

國立交通大學
光電工程研究所
碩士論文

相位電腦全像片的設計與應用
Phase Computer-Generated-Hologram :
Design and Applications



研究生：劉仁崇

指導教授：許根玉 教授

中華民國九十三年七月

相位電腦全像片的設計與應用

學生：劉仁崇

指導教授：許根玉 教授

國立交通大學光電工程研究所

摘要



本論文內容主要介紹電腦全像片的特性與設計方法，並做重建影像的電腦模擬來比較幾種設計方法的優劣。在本論文中並會以電腦模擬來進行電腦全像片在光資訊處理中的一些應用，主要的有影像去模糊濾波器、sin 光柵以及具有辨識形變影像能力的二位元純相位匹配濾波器的設計，以應用於影像還原、影像相減以及影像辨識。

Phase Computer-Generated-Hologram :

Design and Applications

Student : Ren-Chung Liu

Advisor : Dr. Ken-Yu Hsu

Institute of Electro-Optical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like border. Inside the circle, there are stylized Chinese characters and the year '1896'. The word 'Abstract' is printed in bold black text over the top part of the logo.

In this thesis, we introduce the encoding methods for generating computer-generated-holograms and simulate the reconstructed images of the computer-generated-holograms to compare the advantages of these encoding methods. Furthermore, we apply phase encoding methods to produce spatial filters in optical information systems, such as de-blurred spatial filters, sine grating and binary phase matched filters for restoring the original images, image subtraction and distorted-image recognition, respectively. We have also performed the simulations of these optical information processes.

誌謝

首先要感謝許根玉老師對我的諄諄教誨與悉心照顧，引導我順利完成碩士學業。感謝林烜輝老師在我研究上有疑問時不時給我幫助以及解惑。

感謝實驗室的好夥伴：明朗學長、男哥、建舜、俊華、博宇以及謹綱，謝謝你們在課業上、實驗上以及生活上點點滴滴的協助，因為有你們，我才能夠在活潑以及充滿笑聲的研究環境完成我的碩士論文。

最後，僅以這篇論文獻給所有愛我的人，與我愛的人，因為有你們，使我的生命更加完整。



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VI
表目錄	VII

	章節	頁數
第一章 緒論		
1-1 全像術之簡介	1
1-2 電腦全像術之介紹	3
1-3 電腦全像片在光資訊處理之應用	5
1-4 論文編寫方式	6
第二章 相位電腦全相片的設計原理		
2-1 相位繞道編碼法：振幅電腦全像片編碼法	7
2-2 Kinoform：相位電腦全像片編碼法	11
2-3 雙相位合成法：相位電腦全像片編碼法	12
2-4 改良型雙相位合成法：相位電腦全像片編碼法	14
2-5 傅氏轉換遞迴修正理論：相位電腦全像片編碼法	16
第三章 電腦全像片之電腦模擬及其品質評估		
3-1 電腦全像片之品質評估參數	19
3-2 電腦模擬重建影像	22

3-3 電腦全像片重建影像之品質評估與比較.....27

第四章 相位電腦全相片之應用

4-1 應用一：影像去模糊空間濾波器.....29

4-2 應用二：影像減法空間濾波器.....34

4-3 應用三：形變影像辨識之匹配濾波器.....38

第五章 結論44

參考文獻45



圖目錄

章節

頁數

第一章

圖 1-1 記錄全像片	1
圖 1-2 重建物體光波	1
圖 1-3 光學透鏡傅氏轉換系統	2
圖 1-4 電腦全像片重建影像示意圖	3
圖 1-5 離散影像	4
圖 1-6 4f 光資訊處理系統	5

第二章

圖 2-1 Lohmann 編碼法示意圖	7
圖 2-2 入射光波與光軸夾角示意圖	8
圖 2-3 光學傅氏轉換系統	9
圖 2-4 改良型雙相位合成法編碼示意圖	14
圖 2-5 IFTA 流程圖	16
圖 2-6 利用 IFTA 方法設計灰階相位電腦全相片流程圖	17

第三章

圖 3-1 重建影像能量分佈	20
圖 3-2 正確訊號與雜訊示意圖	21
圖 3-3 預期重建影像	22
圖 3-4 相位繞道編碼法產生的電腦全像片	22
圖 3-5 相位繞道編碼法之重建影像	23
圖 3-6 預期影像的傅氏訊號：振幅與灰階相位分佈	23
圖 3-7 Kinoform 編碼法之重建影像	23
圖 3-8 雙相位合成編碼法編碼法產生的電腦全像	24
圖 3-9 雙相位合成編碼法之重建影像	24
圖 3-10 改良型雙相位合成編碼法編碼法產生的電腦全像片	25
圖 3-11 改良型雙相位合成編碼法之重建影像	25
圖 3-12 傅氏轉換遞迴修正理論產生的電腦全像片	25
圖 3-13 傅氏轉換遞迴修正理論之重建影像	26

第四章

圖 4-1 反向濾波器函數圖形	30
圖 4-2 原始影像與模糊影像及其強度對位置函數	31
圖 4-3 kinoform 反向濾波器之去模糊影像	31
圖 4-4 雙相位合成法反向濾波器之去模糊影像	32
圖 4-5 改良型雙相位合成法反向濾波器之去模糊影像	32
圖 4-6 原始清晰影像	33
圖 4-7 動態模糊影像	33
圖 4-8 去模糊影像	33
圖 4-9 影像相減光學系統	34
圖 4-10 sin 光柵的空間頻譜分佈	35
圖 4-11 雙相位合成法產生之 sin 光柵的空間頻譜分佈	36
圖 4-12 改良式雙相位合成法產生之 sin 光柵的空間頻譜分佈	36
圖 4-13 影像相減：輸入影像	37
圖 4-14 雙相位合成法產生之 sin 光柵：影像相減影像	37
圖 4-15 改良式雙相位合成法產生之 sin 光柵：影像相減影像	37
圖 4-16 Vanderlugt 光學交相關運算器	38
圖 4-17 傅氏轉換遞迴修正理論產生純相位合成辨識函數濾波器流程圖	41
圖 4-18 原始影像及其形變影像	42

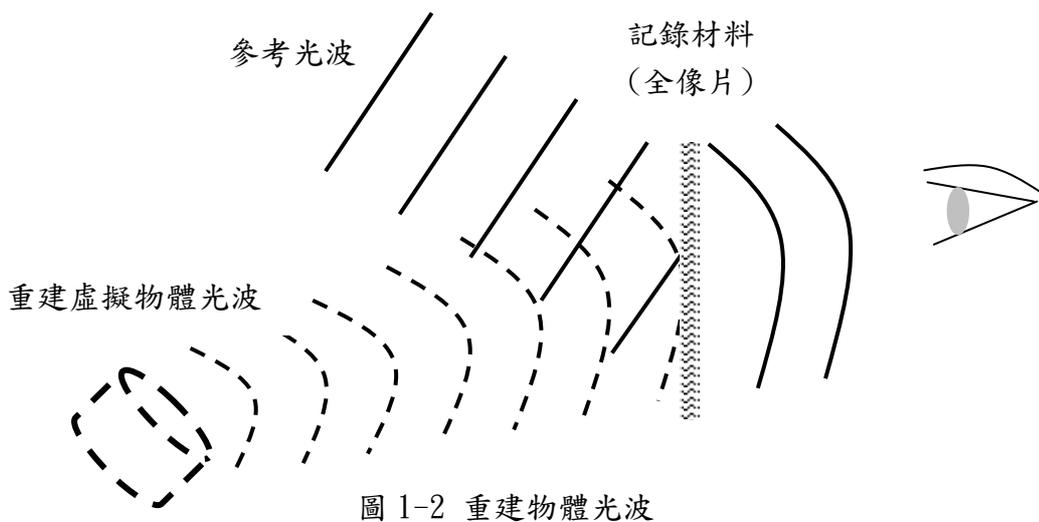
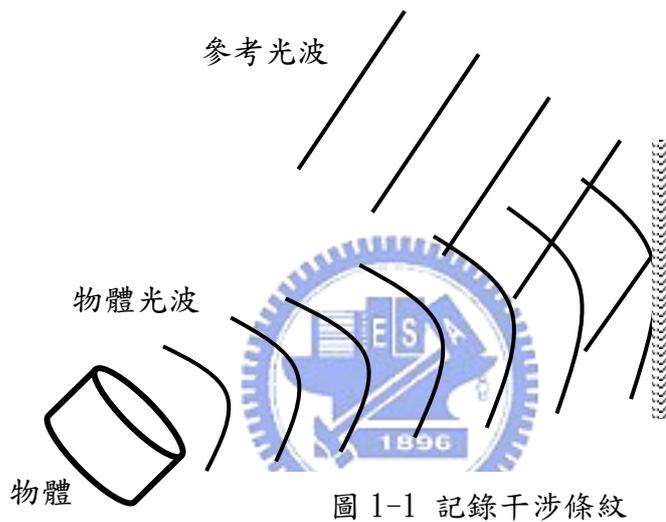
表目錄

章節	頁數
第三章	
表 3-1 各種編碼法評估參數比較表	27
第四章	
表 4-1 二位元純相位匹配濾波器辨識模擬結果	42

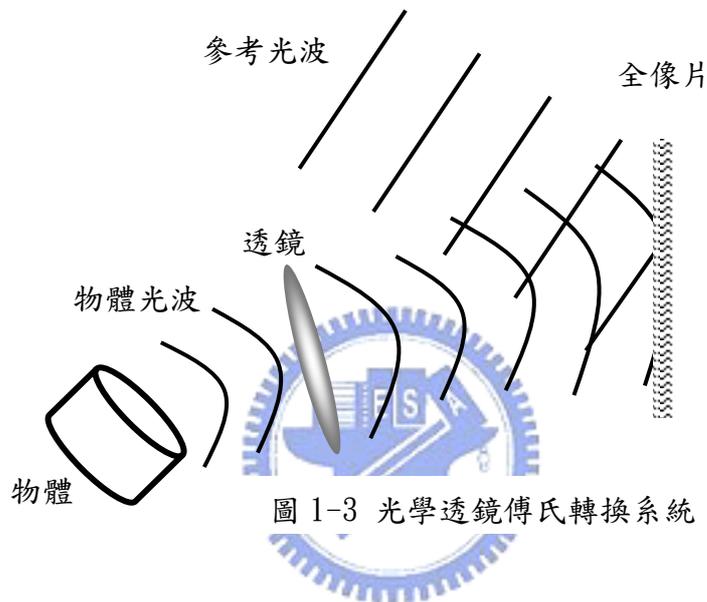
第一章 緒論

1-1 全像術之簡介

Denis Gabor 於 1948 年，提出一種雙步驟的光學存取技術[1]。步驟一記錄：物體光波與參考光波在材料上形成干涉條紋並記錄在材料上，如圖 1-1 所示；步驟二重建：用參考光波入射在記錄有干涉條紋的材料上，此時代表從物體發散的物體光波會被重建出來，觀察者可以看到虛擬的物體，但實際上物體不在觀察者看的位置，觀察者看到的只是從材料上繞射的物體光波，如圖 1-2 所示。此一重建原物體光波的技術稱之為全像術，而能記錄干涉條紋的材料則稱之為全像片。



在圖 1-1 中，若物體與全像片的距離符合 Fresnel 繞射的條件，記錄在全像片上的則是參考光與物體光的 Fresnel 繞射光波的干涉條紋，此種全像片稱之為 Fresnel 全像片；若物體與全像片的距離拉長到滿足 Fraunhofer 繞射的條件，記錄的則是參考光與物體光 Fraunhofer 繞射光波(亦即傅氏轉換的光波)的干涉條紋，此種紀錄的全像片則稱之為傅氏全像片。通常在光學系統的長度以及光強度的考量下，會使用光學透鏡系統來達成傅氏轉換，如圖 1-3 所示。



1-2 電腦全像術之介紹

A. W Lohmann 於 1966 提出一種不是經由記錄光學干涉條紋產生全像片，而是利用電腦計算產生全像片的技術，稱之為電腦全像術 (Computer-Generated-Holography, 簡稱 CGH) [2][3]。電腦全像術顧名思義就是利用電腦的計算產生出具有特定意義的條紋分佈，然後將這些條紋分佈製作在感光板上，這塊感光板就稱為電腦全像片，將光照射在這片圖案上，即可重建出想要的影像；由於電腦全像片上的條紋分佈是由電腦計算產生出來的，不是經由物體光與參考光的光學干涉形成的，故不需要真實物體的存在。電腦全像術是基於電腦能夠利用快速傅氏轉換理論 (Fast-Fourier-transform-algorithm, 簡稱 FFT)，能快速有效率的計算二維影像的傅氏訊號，因此以產生傅氏全像片為主，且因為在計算過程中沒有考慮參考光的干涉，重建影像的位置並不會與重建光有角度差，如圖 1-4 所示。

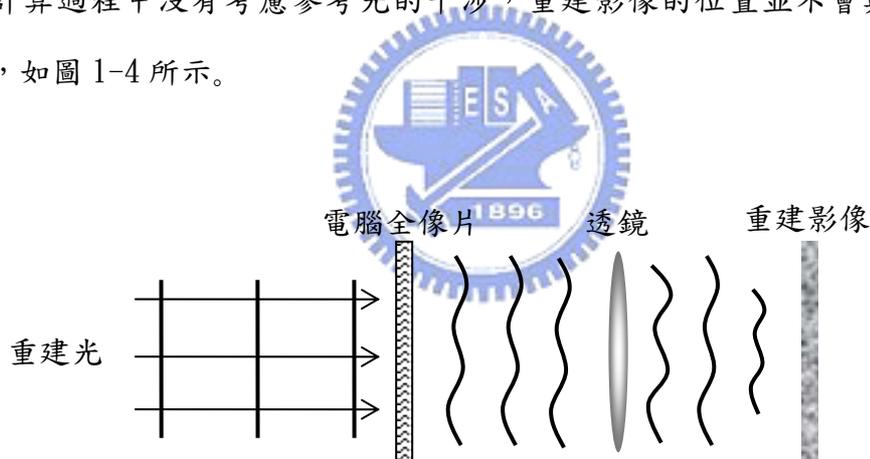


圖 1-4 電腦全像片重建影像示意圖

電腦全像片是藉由電腦計算 FFT 產生出的，所以處理的影像訊號型態必須是離散影像 (discrete image)。進一步來說，在電腦全像片產生的過程中處理的任何影像訊號都是離散且有限維度的影像，以 $M \times N$ pixels 來表示，如圖 1-5 所示。

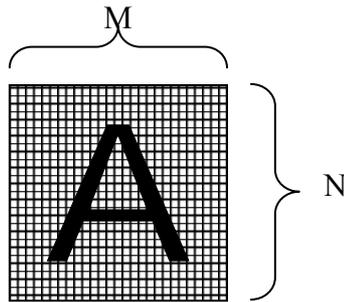


圖 1-5 離散影像

一般光學全像片依紀錄的材料種類，可以分為振幅全像片以及相位全像片。對於電腦全像片並不需要紀錄這一個步驟，只需將電腦計算好的傅氏訊號分布製作在全像材料上或是顯示在空間調制器上，但傅氏訊號自然的會是複數，也就是具有振幅跟相位兩個部分，因為沒辦法直接的把傅氏訊號製作在感光材料上，而需要一道把傅氏訊號轉換成純振幅訊號或是純相位訊號的步驟，這個步驟稱之為編碼，而轉換的方法則稱之為編碼理論。根據要將傅氏訊號轉換成純振幅訊號或是純相位訊號，編碼理論可以分為振幅編碼理論以及相位編碼理論。因此產生一電腦全像片可以分為三個步驟：

1. 利用電腦計算 FFT，求得影像的傅氏訊號。
2. 採用適合的編碼理論將傅氏訊號轉換成為純振幅或者是純相位訊號。
3. 將編碼後的純振幅或者是純相位訊號製作在感光材料上，或者是顯示在空間調制器上。

1-3 電腦全像片在光資訊處理之應用

電腦全像片在光資訊處理的應用主要有影像顯示以及光學濾波兩方面。影像顯示主要是利用製作完成的電腦全像片去重現或投射出我們所想要的影像，如圖 1-4 所示。

相位電腦全像片在光資訊處理的另一個應用就是空間濾波器的製作。圖 1-6 是一個 $4f$ 的光訊號處理系統，將設計好的空間濾波器放置在 (u, v) 平面(輸入影像的傅氏訊號平面)，即可對輸入影像做處理，例如影像相減、影像復原、影像辨識等。

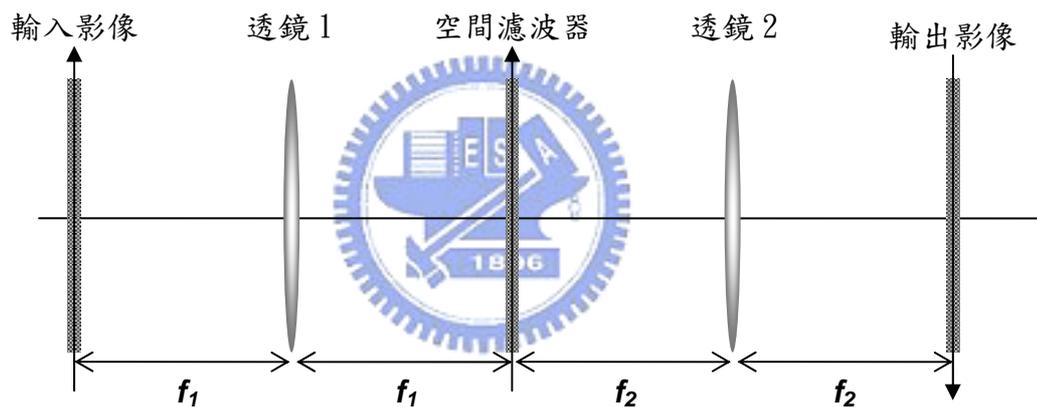


圖 1-6 $4f$ 光資訊處理系統

採用相位調制特性的全像片，配合相位編碼理論產生出來的相位全像片具有高繞射效率、高訊雜比的優點，這在一般光資訊處理中是很重要的。相位電腦全像片相較於振幅電腦全像在影像重建的應用，除了影像品質較佳之外，相位電腦全像片因為本身就具有調變相位的能力，不需要與光軸有特定的傾斜角，不會增加光學系統的複雜度。

1-4 論文架構

本論文的重點是在探討相位電腦全像片的設計方法，將之應用在影像重建、以及光學空間濾波器，並以電腦模擬來評估各種設計方法的優劣。第一章介紹全像片跟電腦全像片的基本概念以及相位電腦像片在光資訊處理的應用；第二章介紹相位電腦全像片的設計原理；第三章是影像重建的電腦模擬與性能評估；第四章是相位電腦全像片在光資訊處理的應用，主要是以製作空間濾波器為主；第五章是結論。



第二章 相位電腦全像片的設計原理

電腦全像片依編碼理論的種類可以分為振幅電腦全像片與相位電腦全像片，在本章中將介紹一個振幅編碼理論：相位繞道編碼法，以及四種相位編碼理論：Kinofom、雙相位合成法、改良型雙相位合成法以及遞迴傅氏轉換修正理論。我們將介紹這五種編碼法的理論以及其特點，並以數學式子來分析這五種編碼法產生電腦全像片的重建影像。

2-1 相位繞道編碼法：振幅電腦全像片設計原理

最早的編碼理論-相位繞道編碼法(detour-phase encoding method)，是由 Lohmann 於 1966 提出，它是一種振幅編碼法。此編碼方法是將全像片等面積區分成與欲重建影像維度一樣的多個小方格，每個小方格表示一個相對應位置的傅氏係數；在每個小方格上開一個孔洞，分別利用開孔的位置以及大小來調變通過光的相位與振幅，如圖 2-1 所示。

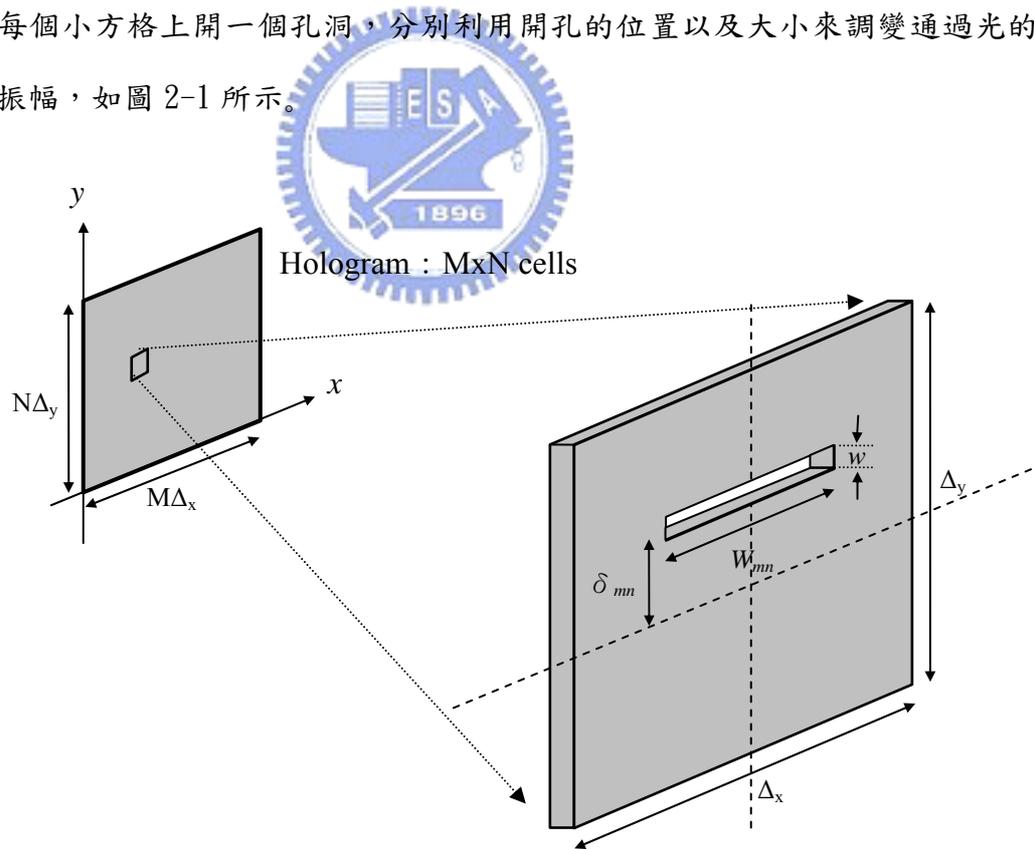


圖 2-1 Lohmann 編碼法示意圖

假設入射光是平面波，入射方向與光軸夾 θ 角，如圖 2-2 所示：

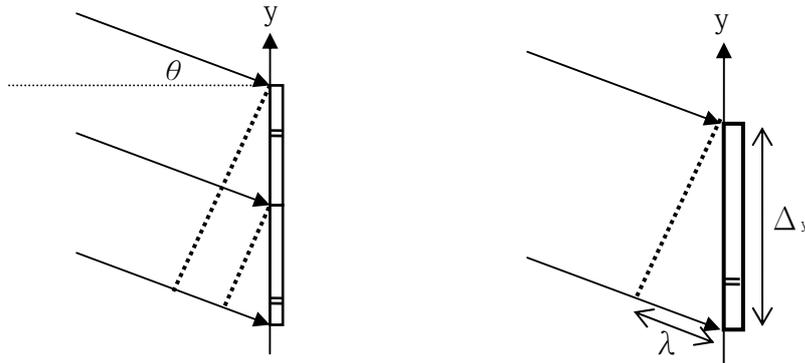


圖 2-2 入射光波與光軸夾角示意圖

圖中平面波入射角為 θ 、波長為 λ ，以及 Lohmann 編碼中的小方格邊長 Δ_y 滿足下面關係式，則剛好可以讓相位 $0 \sim 2\pi$ 的光波線性分布在一個方格中：

$$\Delta_y \cdot \sin\theta = \lambda \dots\dots\dots(2-1)$$

因此可以用 y 方向開洞的位置來決定讓什麼相位的光波通過；除此之外，我們可以利用在 x 方向開孔的大小來調變通過光量的多寡，也就是等價於通過這個方格的光的振幅強度。所以一個方格剛好可以用來表示一個傅氏係數。設傅氏係數 F_{mn} 的振幅為 A_{mn} 與相位為 ϕ_{mn} ，則 A_{mn} 、 ϕ_{mn} 與開孔的大小 W_{mn} 及位置 δ_{mn} 相對應的關係如下：

$$W_{mn} = A_{mn} \cdot \Delta_x \quad , \quad \text{where } 0 \leq A_{mn} \leq 1 \dots\dots\dots(2-2)$$

$$\delta_{mn} = \frac{\phi_{mn}}{2\pi} \cdot \Delta_y \quad , \quad \text{where } -\pi \leq \phi_{mn} \leq \pi \dots\dots\dots(2-3)$$

假設欲重建影像是由 $M \times N$ 個像素組成，則編碼完成的電腦全像片可以用下面數學式表示：

$$H(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \text{rect}\left(\frac{x - m\Delta_x}{A_{mn} \cdot \Delta_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y - n\Delta_y - \delta_{mn}}{w}\right) \dots (2-4)$$

這個開孔的分佈圖可以利用光學傅氏轉換系統來投影，如圖 2-3 所示，把欲重建影像顯示在 (u, v) 平面，若入射光是垂直入射全像片，則輸出平面之光場分佈的數學表示如下：

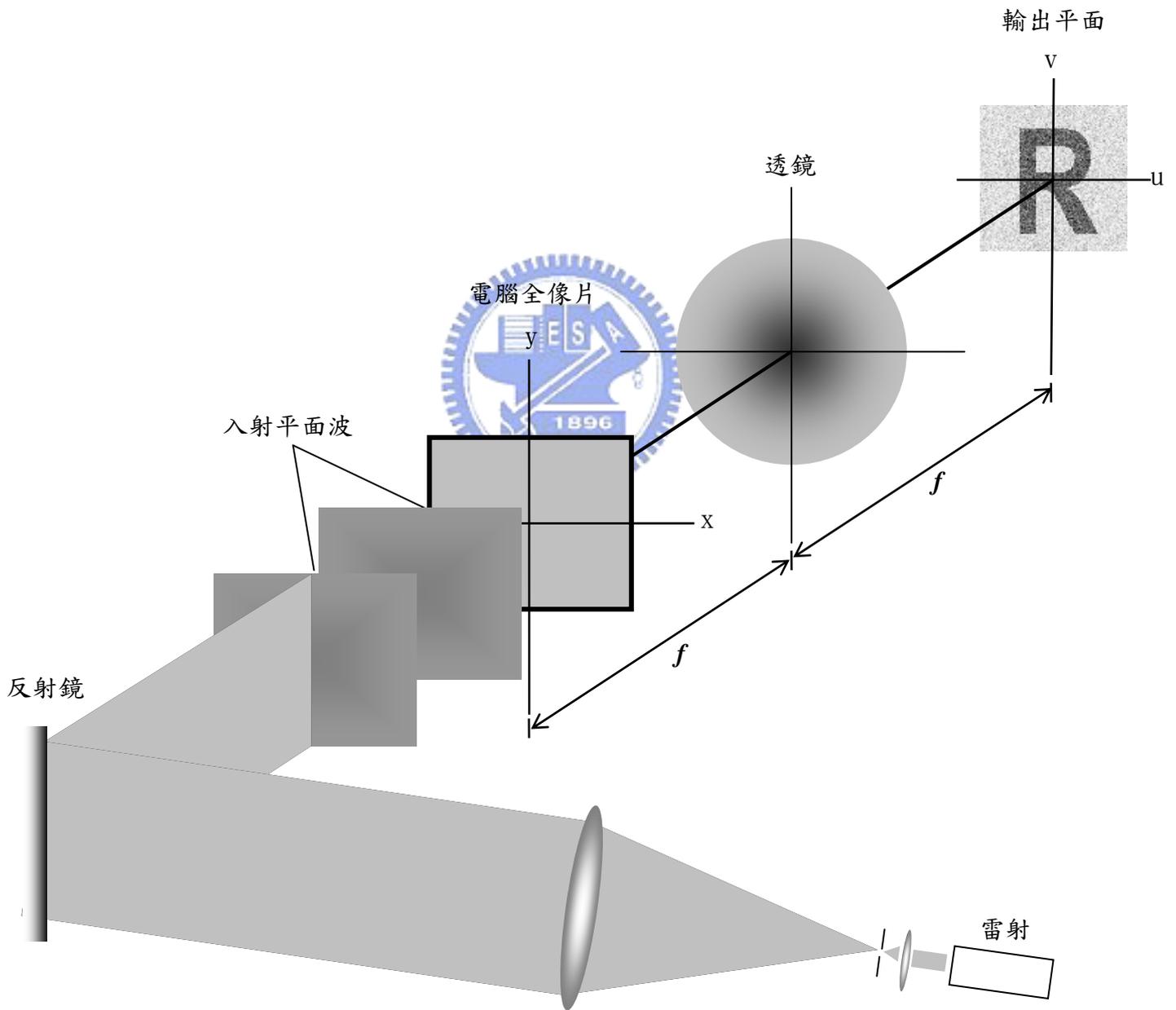


圖 2-3 光學傅氏轉換系統

$$h(u, v) = \mathfrak{F}\{H(x, y)\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \text{rect}\left(\frac{x-m\Delta_x}{A_{mn}\cdot\Delta_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y-n\Delta_y-\delta_{mn}}{w}\right)\right\}$$

$$\propto \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)] \text{sinc}(wv) \text{sinc}(A_{mn}\cdot\Delta_x u) \exp[-j2\pi\delta_{mn}v]$$

其中 $\text{sinc}(wv) \sim 1$ ， $\text{sinc}(A_{mn}\Delta_x u) \sim 1$ ， $\exp[-j2\pi\delta_{mn}v] \sim 1$ ：

$$\propto \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \cdot \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)] \dots\dots\dots(2-5)$$

若入射平片波斜向入射全像片，與光軸夾 θ 角，則重建的影像可以用數學式 2-6 表示：

$$h(u, v) = \mathfrak{F}\left\{e^{-j2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}y} \cdot H(x, y)\right\} = \mathfrak{F}\left\{e^{-j2\pi\frac{y}{\Delta_y}} \cdot H(x, y)\right\}$$

$$= \mathfrak{F}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{y}{\Delta_y}} \cdot \text{rect}\left(\frac{x-m\Delta_x}{A_{mn}\cdot\Delta_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y-n\Delta_y-\delta_{mn}}{w}\right)\right\}$$

$$\propto \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)] \cdot A_{mn} \cdot \exp[j2\pi\frac{\delta_{mn}}{\Delta_y}]$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \cdot \exp[j\phi_{mn}] \cdot \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)] \dots\dots\dots(2-6)$$

比較(2-5)及(2-6)式，我們可以發現入射光垂直入射的話，編碼的相位項就不會顯現出來；若是以滿足 Lohmann 編碼法的斜向角度入射，編碼的相位項就會顯現出來。所以可以知道要以正確的斜向入射角才能經由傅氏轉換系統將編碼好的電腦全像片，重建出預期的影像。

2-2 Kinoform 相位電腦全像片設計原理

Kinoform 是最早製作出的相位電腦全像片[4]。製作電腦全像片的第一個步驟，是使用電腦計算欲重建影像的離散傅氏轉換(DFT)，得到與欲重建影像一樣維度的傅氏係數陣列，每一個傅氏係數都包含一個振幅以及相位資訊。一般情況下，相位資訊保存了比較多的影像資訊，基於這個假設，kinoform 捨棄振幅資訊而只保存相位資訊，並將傅氏係數的相位資訊製作在相位全像材料上。由此可知 kinoform 只是捨棄傅氏係數的振幅資訊，將相位資訊製作在底片上，並沒有對傅氏係數有什麼特別的編排處理。但是因為是採用相位全像片，所以它的繞射效率相對於相位繞道編碼法提高了許多。在編碼時它只是將傅氏訊號的相位訊號取出，編碼在全像片上，因此編碼完成的相位全像片可以用數學式 2-7 表示如下：

$$H(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\phi_{mn}} \cdot \text{rect}\left(\frac{x - m\Delta_x}{\Delta_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y - n\Delta_y}{\Delta_y}\right) \dots\dots\dots(2-7)$$

重建 Kinoform 相位電腦全像片時是將其作傅氏轉換，如數學式 2-8 表示：

$$h(u, v) = \mathfrak{F}\left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\phi_{mn}} \cdot \text{rect}\left(\frac{x - m\Delta_x}{\Delta_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y - n\Delta_y}{\Delta_y}\right) \right\}$$

$$\propto \sin c(\Delta_x u) \cdot \sin c(\Delta_y v) \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\phi_{mn}}}_{\text{相位項}} \cdot \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)] \dots\dots\dots(2-8)$$

由 2-1-8 式可以看出 Kinoform 編碼法捨棄了傅氏訊號的振幅項，而只有相位項對重建影像有貢獻。

2-3 雙相位合成法：相位電腦全像片編碼法

一個傅氏係數包含了振幅與相位兩個資訊，要能夠正確的表現出這兩個資訊，一定要用兩個以上的變數表示。Florence 與 Judy 在 1991 年提出利用兩個純相位變數來表示一個傅氏係數的方法，在此以雙相位合成法稱之[5]，若這兩個純相位變數 $\Phi_{1,mn}$ 、 $\Phi_{2,mn}$ 滿足下列關係式：

$$\begin{aligned} F_{mn} &= A_{mn} \cdot \exp(j\phi_{mn}) \\ \Phi_{1,mn} &= \phi_{mn} + \cos^{-1} A_{mn} \dots\dots\dots(2-9) \\ \Phi_{2,mn} &= \phi_{mn} - \cos^{-1} A_{mn} \end{aligned}$$

其中是 F_{mn} 是傅氏係數， A_{mn} 與 ϕ_{mn} 為其振幅與相位。則這兩個純相位變數的疊加得：



$$\begin{aligned} &\exp(j\Phi_{1,mn}) + \exp(j\Phi_{2,mn}) \\ &= \exp[j(\phi_{mn} + \cos^{-1} A_{mn})] + \exp[j(\phi_{mn} - \cos^{-1} A_{mn})] \\ &= \exp(j\phi_{mn}) \cdot [\exp(j\cos^{-1} A_{mn}) + \exp(-j\cos^{-1} A_{mn})] \\ &\propto A_{mn} \cdot \exp(j\phi_{mn}) = F_{mn} \dots\dots\dots(2-10) \end{aligned}$$

這是 Florence 提出的概念，上式表示，利用兩個純相位係數的疊加可以正確的表示出一個傅氏係數，這是 Florence 提出的概念。但實際上，製作成全像片時，這兩個純相位係數無法置於在同一個空間位置上，而是兩者必需置放在相鄰位置，兩者有一個相對位置偏移 $\Delta/2$ ，這一個位置的偏移將會對重建影像品質造成影響，我們可以用下列數學來分析其影響。首先，編碼完成的電腦全像片可以用(2-11)式來表示：

$$H(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \text{rect}\left(\frac{2x}{\Delta}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{\Delta}\right) \otimes \left\{ \exp(j\Phi_{1,mm}) \cdot \delta\left[x - \left(m + \frac{1}{4}\right)\Delta, y - \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta\right] \right. \\ \left. + \exp(j\Phi_{2,mm}) \cdot \delta\left[x - \left(m + \frac{3}{4}\right)\Delta, y - \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta\right] \right\} \cdots \cdots (2-11)$$

將此電腦全像片作傅氏轉換，可以得到重建影像，如下式：

$$h(u, v) = \mathfrak{F}\{H(x, y)\}$$

$$\propto \sin c\left(\frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \sin c(\Delta v)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \underbrace{\exp(j\Phi_{1,mm})}_{\text{相位 1}} + \underbrace{\exp(j\Phi_{2,mm})}_{\text{相位 2}} \cdot \underbrace{\exp\left(j2\pi u \frac{\Delta}{2}\right)}_{\text{相位誤差}} \right\} \cdot \exp[j2\pi\Delta(mu + nv)] \cdots (2-12)$$

上式表示，重建的結果可以分成兩部分來看，前面有畫底線部分是隨著位置而緩慢變化的振幅變動項；後面沒有畫底線部分則是我們預期希望得到的，相位編碼電腦全像片的離散傅氏轉換。但是要注意的是，在純相位係數相位 1 與相位 2 的疊加項中，會出現一個相位誤差項，這個相位誤差項是一個位置的函數。這個誤差項的來源就是，這兩個純相位係數無法編碼在全像片同一個空間位置上，而有一個不可避免的位置誤差 $\Delta/2$ ，這個誤差會造成重建影像的失真。

2-4 改良型雙相位合成法：相位電腦全像片編碼法

D. Mendlovic 於 1997 年提出改良型的雙相位合成法 [6]，它是利用增加像素以對稱的方式來排列雙相位函數，也就是將原本相位 1、相位 2 的排列，編成相位 2、相位 1、相位 1、相位 2 的排列，如圖 2-4 所示。

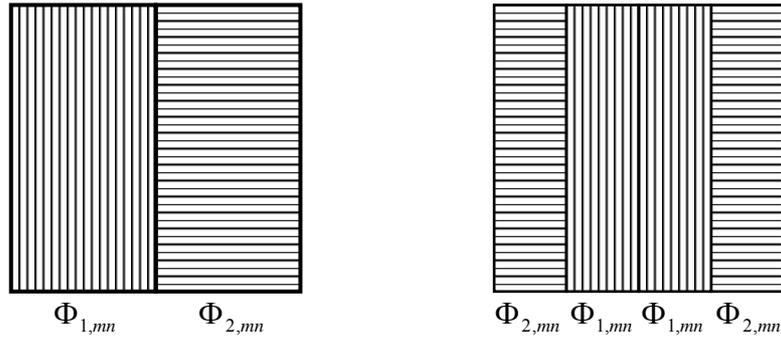


圖 2-4 改良型雙相位合成法編碼示意圖

改良型雙相位合成法編碼的全像片，其數學表示如(2-13)所示：

$$H(x, y) = \sum_m \sum_n \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta/4}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{\Delta}\right) \otimes \{ \exp(j\Phi_{1,mn}) \{ \delta[x - (m + \frac{1}{8})\Delta, y - (n + \frac{1}{2})\Delta] + \delta[x - (m + \frac{7}{8})\Delta, y - (n + \frac{1}{2})\Delta] \} + \exp(j\Phi_{2,mn}) \{ \delta[x - (m + \frac{3}{8})\Delta, y - (n + \frac{1}{2})\Delta] + \delta[x - (m + \frac{5}{8})\Delta, y - (n + \frac{1}{2})\Delta] \} \} \cdots (2-13)$$

其傅氏轉換結果如(2-14)式所示：

$$h(u, v) = \mathfrak{F}\{H(x, y)\} = \int H(x, y) e^{j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\propto \text{sinc}\left(\frac{\Delta u}{4}\right) \cdot \text{sinc}(\Delta v) \cdot \sum_m \sum_n \left[\left(e^{j2\pi u \frac{3\Delta}{8}} + e^{-j2\pi u \frac{3\Delta}{8}} \right) e^{j\Phi_{1,mn}} + \left(e^{j2\pi u \frac{\Delta}{8}} + e^{-j2\pi u \frac{\Delta}{8}} \right) e^{j\Phi_{2,mn}} \right] \cdot e^{j2\pi\Delta(mu+nv)}$$

$$\propto \text{sinc}\left(\frac{\Delta u}{4}\right) \cdot \text{sinc}(\Delta v) \cdot \sum_m \sum_n \left[\cos\left(2\pi u \frac{3\Delta}{8}\right) \cdot e^{j\Phi_{1,mn}} + \cos\left(2\pi u \frac{\Delta}{8}\right) \cdot e^{j\Phi_{2,mn}} \right] \cdot e^{j2\pi\Delta(mu+nv)} \cdots (2-14)$$

振幅誤差項1 相位1 振幅誤差項2 相位2

比較(2-12)與(2-14)式，可以發現使用改良型雙相位合成法是會多出振幅誤差項，而基本型雙相位合成法卻是多出相位誤差項，相位誤差會導致較嚴重的影像失真，我們可以在第三章電腦模擬看出這個結果。



2-5 傅氏轉換遞迴修正理論

傅氏轉換遞迴修正理論(Iterative Fourier-transform algorithm, 之後以 IFTA 簡稱之)衍生自相位還原理論(Phase-retrieval algorithm)[7][8]，是一個架構在影像空間(image domain，以 h 表示)以及傅氏空間(Fourier domain，以 H 表示)之間來回遞迴的理論。其基本的想法就是在影像空間及傅氏空間設定好個別訊號的振幅強度作為限制條件，然後在每次迴圈中，根據這個給予的振幅限制條件修正振幅，而相位則予以保留，如此藉由遞迴的方式，慢慢得到各別空間的相位訊號。傅氏轉換遞迴修正理論的示意圖如圖 2-5 所示：

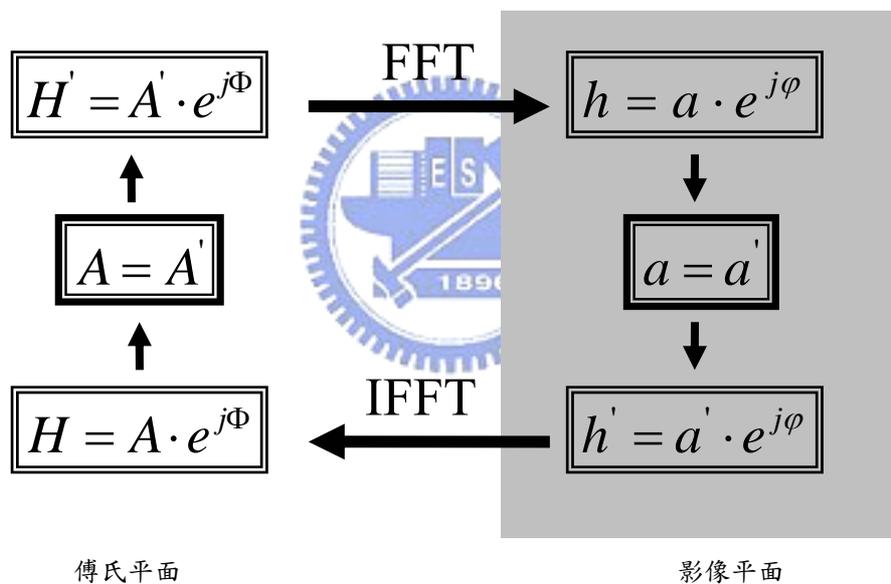


圖 2-5 IFTA 示意圖

其中 H 表示在傅氏空間的訊號， H' 表示修正過的傅氏訊號； h 表示在影像空間的訊號， h' 表示修正過的影像訊號。其中 A' 、 a' 是事先設定的限制條件。由上面的流程圖可以歸納出 IFTA 的原理：(a) 將經由 FFT 或者是 IFFT 計算後得到的振幅根據限制條件予以修正；(b) 經由 FFT 或者是 IFFT 計算後得到的相位予以保留。

這個方法跟設計相位電腦全像片有一個共通點，就是最後能得到相位訊號，

因此可以利用 IFTA 來設計純相位電腦全像片，我們的目標：電腦全像片位於傅氏空間，而重建影像則是在影像空間，吾人希望設計出能夠重建預期影像的純相位電腦全像片，傅氏空間以及影像空間的限制條件，分別設定如下：

(a) 傅氏空間：所有訊號振幅都為 1，相位訊號則依設計要求而予以數位化成所需之灰階數。

(b) 影像空間：預期影像的振幅 $D(m, n)$ 。

圖 2-6 是利用 IFTA 方法設計灰階純相位電腦全像片的流程圖：

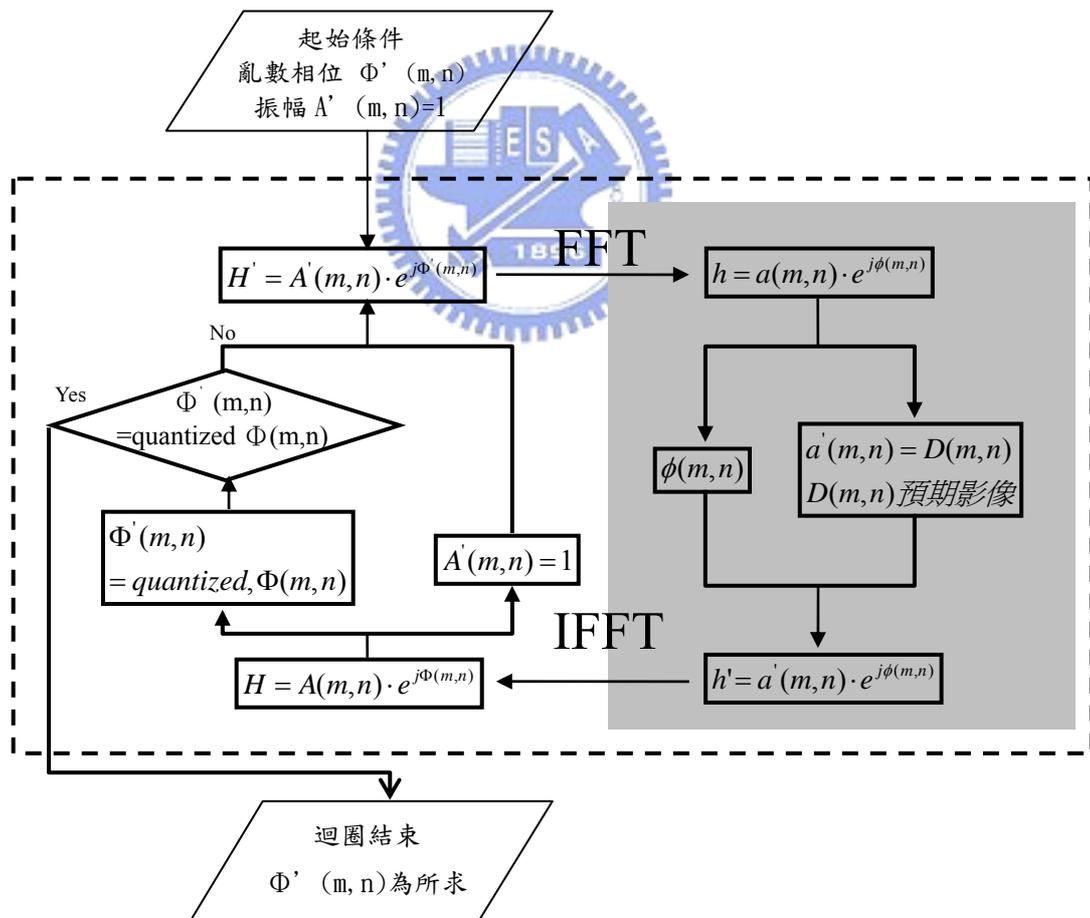


圖 2-6 利用 IFTA 方法設計灰階純相位電腦全像片流程圖

一開始我們先產生一個亂數相位電腦全像片做為起始條件，輸入至我們設計好的

IFTA 迴圈中。將輸入的起始訊號 H' 作 FFT 運算得到影像空間的訊號 h ，在影像空間我們只需令重建影像的振幅能夠跟預期影像的振幅一樣，所以我們只修正振幅 a 使之跟預期影像的振幅 D 的一樣，而相位 ϕ 不作任何的修正，這樣我們可以得到修正過後的影像訊號 h' 。之後將 h' 作 IFFT 運算可以得到傅氏空間的全像片訊號 H ，在全像片空間我們希望的全像片形式是某個灰階數的純相位訊號，根據這個條件，我們將傅氏空間的振幅訊號 A 的值全部令為 1，相位 Φ 則依據設計要求的灰階數予以灰階化，得到修正後的相位訊號 Φ' 。此時我們作一個判斷，若這各修正後的灰階相位訊號跟前一個迴圈修正後的訊號相同，表示說經過 IFTA 這各迴圈已經不能夠對相位訊號有更進一步的修正，整個運算就終止，而這各灰階相位訊號就是我們最後想要的電腦全像片訊號；反之若相位訊號跟前一個迴圈的相位訊號不一樣，表示相位訊號還有進一步修正的空間，那就繼續作 IFTA 的迴圈運算直到對傅氏空間的灰階相位訊號不能再作任何的修正為止。



第三章 電腦全像片之電腦模擬及其品質評估

3-1 電腦全像片之品質評估參數

介紹完設計電腦全像片的原理，接下來將用第二章介紹的設計方法來產生能重建所要影像的電腦全像片。為了能夠評影像的品質優劣，先介紹兩個評估影像品質的參數——繞射效率 (diffraction efficiency, $\eta\%$) 及訊雜比 (signal-to-noise-ratio, SNR)，其各別定義如下：

1. 繞射效率 $\eta\%$ ：用來評估入射光貢獻於重建影像的能量效率，定義如下：

$$\eta\% = \frac{\text{正確位置上光強度的總合}}{\text{每一點光強度的總合和}} \times 100\%$$

考慮電腦全像片在實際光學實驗的重建的影像，在第二章影像重建的數學分析可以知道，其重建影像的能量是呈現 sinc^2 函數分佈，如圖 3-1。此 sinc^2 函數的週期大約是編碼方格長度的倒數。所以在模擬計算繞射效率時，除了扣除全像片吸收的光能量，還要扣除高階繞射的能量，只計算最後分佈在 sinc^2 函數主瓣(main lobe)的能量。在本篇論文的電腦模擬中，為了簡單起見，設定全像片的編碼的方格大小即為其最小特徵尺度，如此一來主瓣的寬度剛好會是重建影像的兩倍。我們以 kinoform 的重建影像來說明：

$$\frac{\sin c(\Delta_x u) \cdot \sin c(\Delta_y v)}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\phi_{mn}} \cdot \exp[-j2\pi(m\Delta_x u + n\Delta_y v)]} \dots\dots\dots(2-8)$$

分析(2-8)式，重建影像的大小為 $\lambda f / \Delta$ ，而 sinc 函數的主瓣寬度為 $2 \lambda f / \Delta$ ，重建影像位在主瓣的中心位置，因此我們以分佈在主瓣的能量作為重建影像的能量。

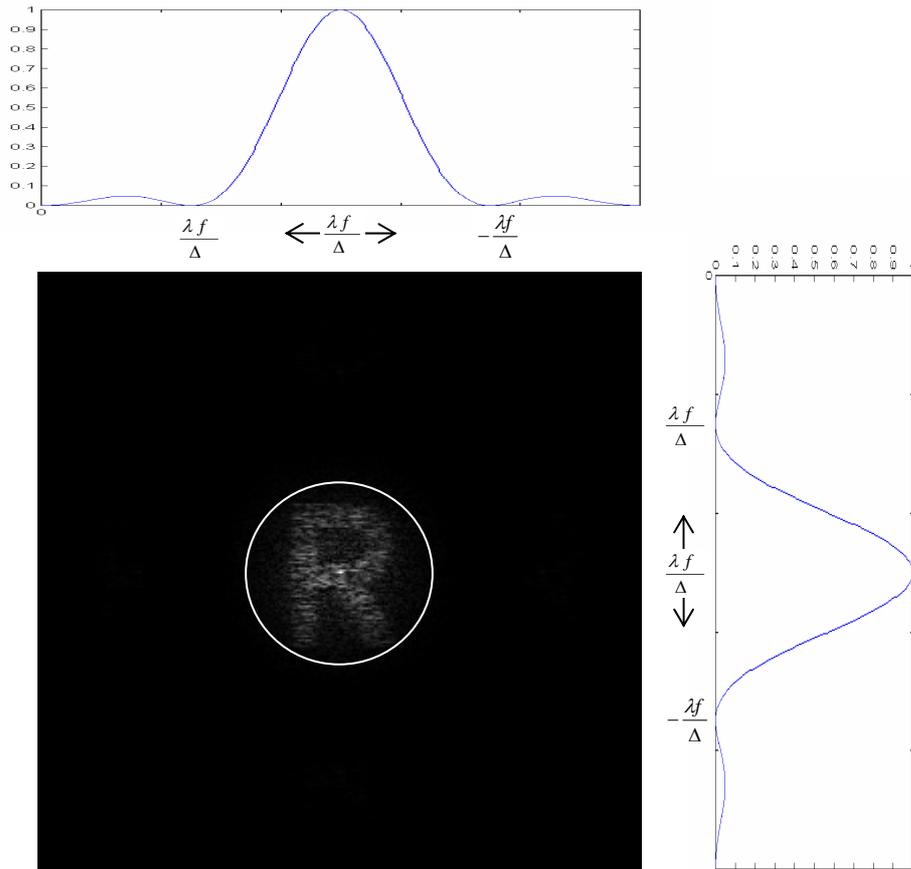


圖 3-1 重建影像能量分佈

2. 訊雜比 SNR：用來評估重建影像訊號雜訊間的比例，可以視作評估影像清晰的程度，定義如下：

$$SNR = \frac{\text{正確位置上光強度的總合}}{\text{不在正確位置上光強度的總合}}$$

這裡正確的訊號定義為重建在正確位置上的訊號，反之不在重建位置上的訊號為雜訊。假設圖 3-2 是預期影像以及重建影像，以預期影像做參考，即可以計算正確訊號跟雜訊的光能量比例。

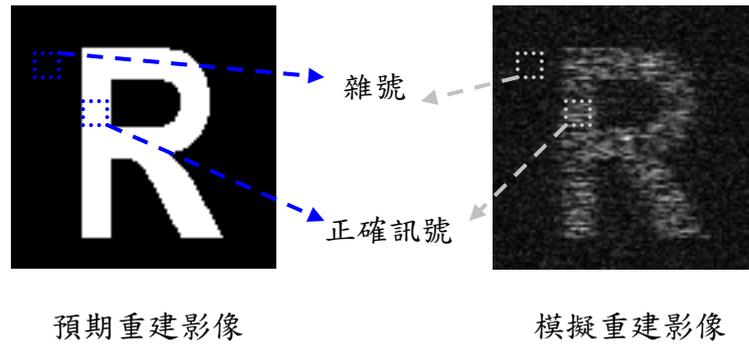


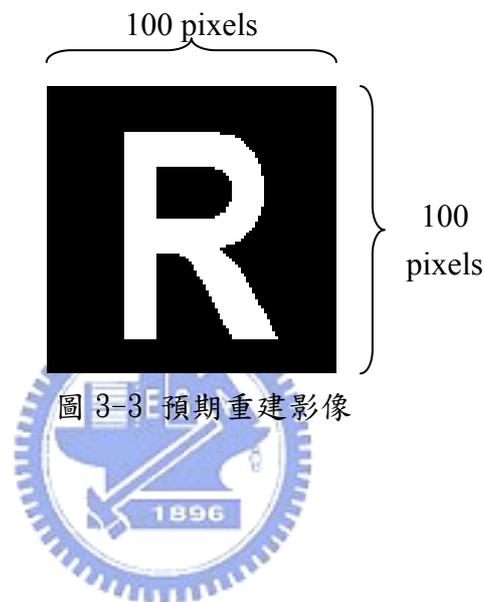
圖 3-2 正確訊號與雜訊示意圖

3. 編碼所需像素：每一個傅氏訊號經過編碼理論轉換成振幅或是相位訊號，可能會須要 2 個或 2 個以上的像素來表示，理想的情況是能用較少的像素來表示一個傅氏訊號越佳。



3-2 電腦模擬重建影像

採用第二章介紹設計電腦全像片的方法，包括相位繞道編碼法、Kinoform、雙相位合成法、改良型雙相位合成法及傅氏轉換遞回修正理論，這五種方法來設計電腦全像片並做重建影像的電腦模擬。圖 3-3 是預期影像，大小為 100X100 像素的二位元黑白影像：



相位繞道編碼法：利用相位繞道編碼法製作出來的振幅電腦全像片的圖形為圖 3-4，每一個編碼方格由 8X8pixels 組成，振幅與相位訊號都量化成灰階數為 8 的訊號，白色部分表示開孔透光的區域，經計算透光面積占總面積比率為 3.3%，圖 3-5 為其電腦模擬的重建影像，經計算 SNR 為 2.27。

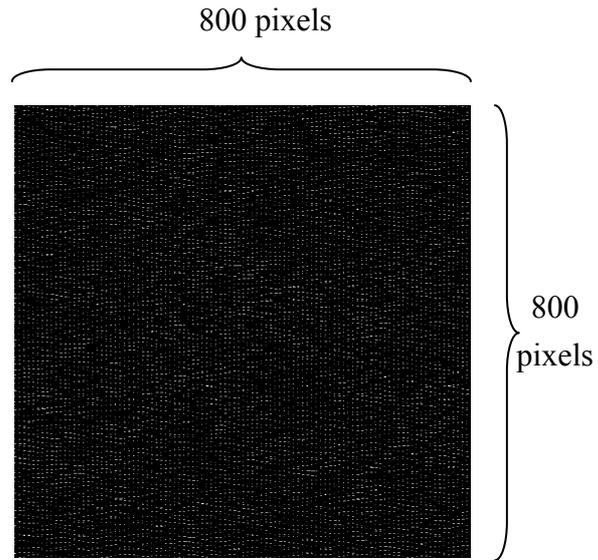


圖 3-4 相位繞道編碼法產生的電腦全像片

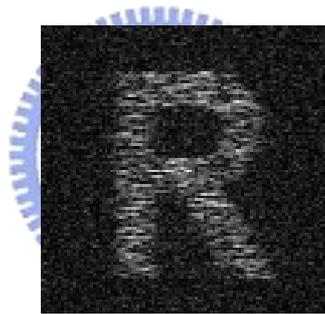
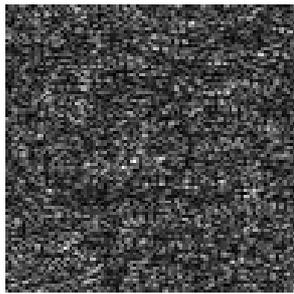
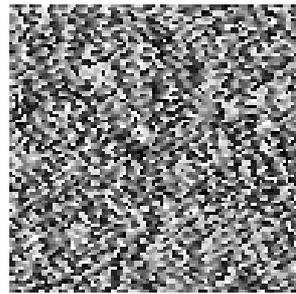


圖 3-5 相位繞道編碼法之重建影像

Kinoform 編碼法：圖 3-6 是預期影像的傅氏訊號的振幅分佈以及量化成 8 個灰階數後的灰階相位訊號分佈，Kinoform 編碼法是捨棄振幅訊號而只是單純的將灰階相位製作在相位全像片上。圖 3-7 是 Kinoform 編碼法之重建影像，經計算訊雜比為 4.29。



振幅訊號



灰階相位訊號

圖 3-6 預期影像的傅氏訊號：振幅與灰階相位分佈

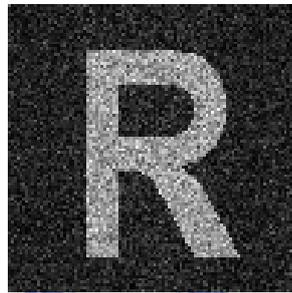


圖 3-7 Kinoform 編碼法的重建影像

雙相位合成編碼法：圖 3-8 是利用雙相位合成編碼法產生的相位全像片，顏色深淺代表相位 $0-2\pi$ 的調變，相位量化為 8 個灰階數。圖 3-9 是雙相位合成編碼法的重建影像，經計算訊雜比為 4.79。

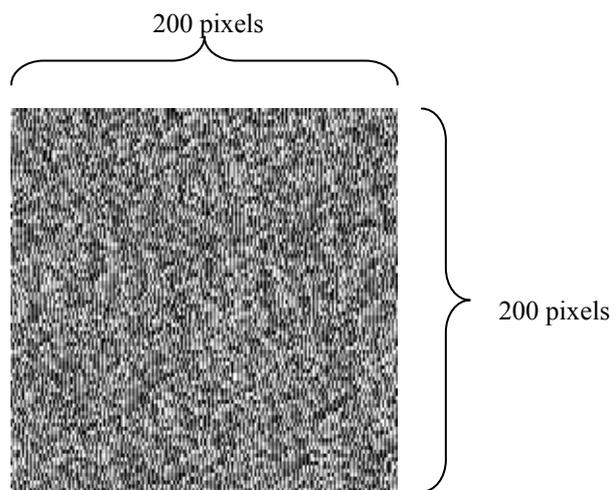


圖 3-8 雙相位合成編碼法編碼法產生的電腦全像

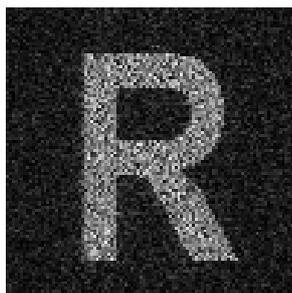


圖 3-9 雙相位合成編碼法的重建影像

改良型雙相位合成法：圖 3-10 是利用雙相位合成編碼法產生的相位全像片，顏色深淺代表相位 $0-2\pi$ 的調變，相位量化為 8 個灰階數。圖 3-11 是雙相位合成編碼法的重建影像，經計算訊雜比為 5.52。

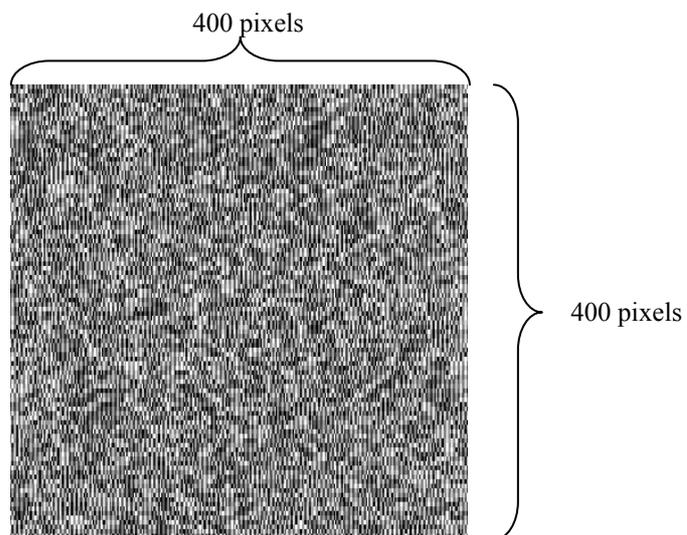


圖 3-10 改良型雙相位合成編碼法編碼法產生的電腦全像片

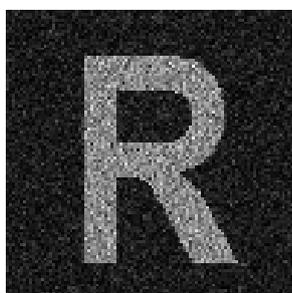


圖 3-11 改良型雙相位合成編碼法的重建影像

傅氏轉換遞迴修正理論：圖 3-12 是利用傅氏轉換遞迴修正理論產生的灰階相位電腦全像片，顏色深淺代表的是相位 $0-2\pi$ 的調變。

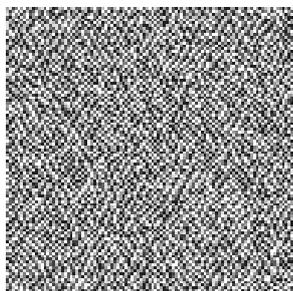


圖 3-12 傅氏轉換遞迴修正理論產生的電腦全像片

圖 3-13 是傅氏轉換遞迴修正理論的重建影像，經計算訊雜比為 27.1。

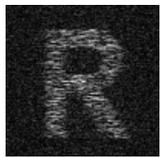
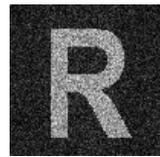
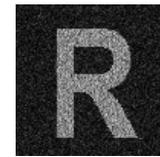


圖 3-13 傅氏轉換遞迴修正理論的重建影像

3-3 電腦全像片重建影像之品質評估與比較

3-2 節總共完成了五種編碼法重建影像的電腦模擬，接下來我們將對這五種方法的模擬結果列表作一個比較，比較的项目有繞射效率、訊雜比及電腦全像片編碼所需像素比。

表 3-1 各種編碼法評估參數比較表

	繞射效率%	訊雜比	編碼所需像素比	重建圖形
相位繞道編碼法	2.1%	2.27	8x8	
Kinoform 編碼法	72.9%	4.29	1	
雙相位合成法	74.5%	4.79	2	
改良型雙相位合成法	76.2%	5.52	16	
傅氏轉換遞迴修正理論	86.8%	27.1	1	

相位繞道編碼法的繞射效率是先計算編碼完成的電腦全像片圖 3-4 的總透光率，為 3.3%，再考慮落在 sinc 函數主瓣的能量佔全部光能量的比例，大約是 90%，最後再由電腦模擬的訊雜比可以計算座落在正確位置上訊號的能量佔主瓣能量的比

例 $1/(1+SNR)$ ，最後將這三個比例相乘 $3.3\%*0.9*1/(1+1/SNR)=2.1\%$ ，即是繞射效率。Kinoform、雙相位合成編碼法以及傅氏轉換遞迴修正理論這三個繞射效率的計算與相位繞道編碼法不同處在於因為是相位全像片，透光率為 100%，之後計算則相同，考慮 sinc 函數主瓣的能量比例以及由訊雜比推出主瓣上重建影像正確位置上訊號的能量比例，再計算繞射效率，各別為 72.9%、74.5%以及 86.8%。我們由表 3-3-1 可以明顯看出傅氏轉換遞迴修正理論除了擁有最佳的重建影像品質，所需的編碼像素也是最少的，可以算是製作重建影像的電腦全像片最好的設計方法；反之相位繞道編碼法重建影像品質最差之外，所需的編碼像素也是最多的。



第四章 相位電腦全相片之應用

除了重建影像，電腦全像術可以應用在空間濾波器的設計。在一般的光資訊處理系統中，空間濾波器通常的數學形式為複數，在目前並沒有辦法以單一全像材料或者是空間調制器來正確顯示複數函數，但是可以利用電腦全像的編碼技術來將複數形式的空間濾波器轉換成純相位的空間濾波器，讓空間濾波器能夠容易的製作在全像材料上或者是以空間調制器來顯示。在本章中，我們將以電腦模擬來執行一些光資訊處理的應用，包括空間濾波器的設計以及光資訊處理的電腦模擬結果。

4-1 應用一：影像去模糊空間濾波器

一般成像系統在底片曝光時，若成像系統對於影像有小幅的相對運動，記錄在底片上的影像會因為相對運動而變得模糊。模糊影像與原始影像的關係可以用數學式 4-1 表示， $f(x, y)$ 是記錄在底片上的影像， $s(x, y)$ 是原始影像， $d(x, y)$ 是底片曝光時，成像系統與底片因相對運動造成影像模糊的脈衝響應 (impulse response)。假設底片與成像系統間的相對運動是在 α 方向的等速直線運動，其光學系統成模糊影像的脈衝響應可以用一方形函數表示，如數學式 4-2 所示， Δ 是曝光時間內底片與成像系統間的相對位移， \oplus 表示卷積運算 [9]。

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha, \beta) \cdot d(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta = s(x, y) \oplus d(x, y) \dots \dots \dots (4-1)$$

$$d(\alpha, \beta) = \text{rect} \left[\frac{\alpha}{\Delta} \right] \dots \dots \dots (4-2)$$

若將底片作傅氏轉換，可以得到模糊影像的空間頻譜，依卷積定理 (Convolution theorem)，兩函數的卷積運算的傅氏轉換，會等於兩函數各別傅氏轉換相乘，如數學式 4-3。

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\{f(x, y)\} &= \mathfrak{T}\{s \otimes d\} = \mathfrak{T}\{s\} \cdot \mathfrak{T}\{d\} \\ F(u, v) &= \mathfrak{T}\{f(x, y)\}, S(u, v) = \mathfrak{T}\{s(x, y)\}, D(u, v) = \mathfrak{T}\{d(x, y)\} \\ \Rightarrow F(u, v) &= S(u, v) \cdot D(u, v) \dots \dots \dots (4-3) \end{aligned}$$

利用圖 1-6 的 4f 光學系統，在傅氏平面利用光學濾波器將微擾函數 $D(u, v)$ 濾掉，即可以在輸出平面得到原始影像。我們採用的濾波函數是反向濾波器 (Inverse filter)，即設計空間濾波器 $H(u, v)$ 的形式為微擾函數 $D(u, v)$ 的倒數如 (4-4) 式，在空間濾波器平面將模糊影像傅氏訊號的微擾函數除掉，再經過一次傅氏轉換即可將原始影像 $s(x, y)$ 還原出來，如 (4-5) 式。

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \text{sinc}(\Delta u) \\ H(u, v) &= \frac{1}{D(u, v)} = \frac{1}{\text{sinc}(\Delta u)} \dots \dots \dots (4-4) \\ \Rightarrow S(u, v) \cdot D(u, v) \cdot H(u, v) &= S(u, v) \cdot \text{sinc}(\Delta u) \cdot \frac{1}{\text{sinc}(\Delta u)} = S(u, v) \\ \Rightarrow \mathfrak{T}\{S(u, v)\} &= s(-x, -y) \dots \dots \dots (4-5) \end{aligned}$$

圖 4-1 是微擾函數 $D(u, v)$ 的反向濾波器的函數 $H(u, v)$ 的圖形，sinc 函數因為有值為零的點，倒數的話會出現有無窮大的情況，因此我們設定反向濾波器的最大絕對值為 T_{\max} ，而 $H(u, v)$ 的最小值為 1，所以歸一化之後振幅則會介於 1 與 $1/T_{\max}$ 之間。還有另一個要注意的是因為 sinc 為正負變化的函數，其倒數也會是正負變化的函數，而一般全像材料的調變特性都是只能單獨調變振幅或者是相位，也就是無法正確表現有正負值的函數。此時就可以利用電腦全像的技術，將正負訊號編碼成純相位訊號，以利於製作在全像材料上或者顯示在空間調製器上。

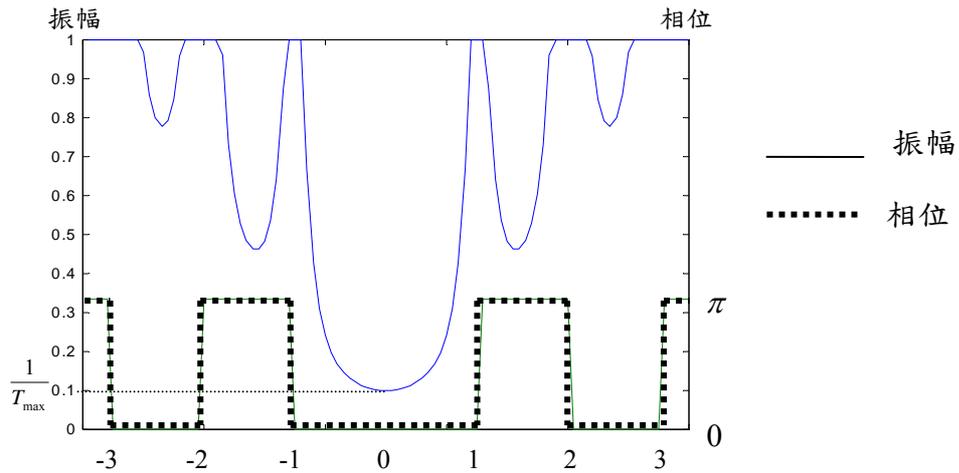


圖 4-1 反向濾波器函數圖形

為了能夠比較清楚觀察到去模糊的效果，原始影像上只有兩個距離相近 10 像素的訊號點，而記錄在底片上的模糊影像，則是在曝光時原始影像與底片在橫向有 10 像素的相對移動，動態模糊之後兩點幾乎無法分辨。圖 4-2 是原始影像及其模糊影像，大小為 100x100 像素。

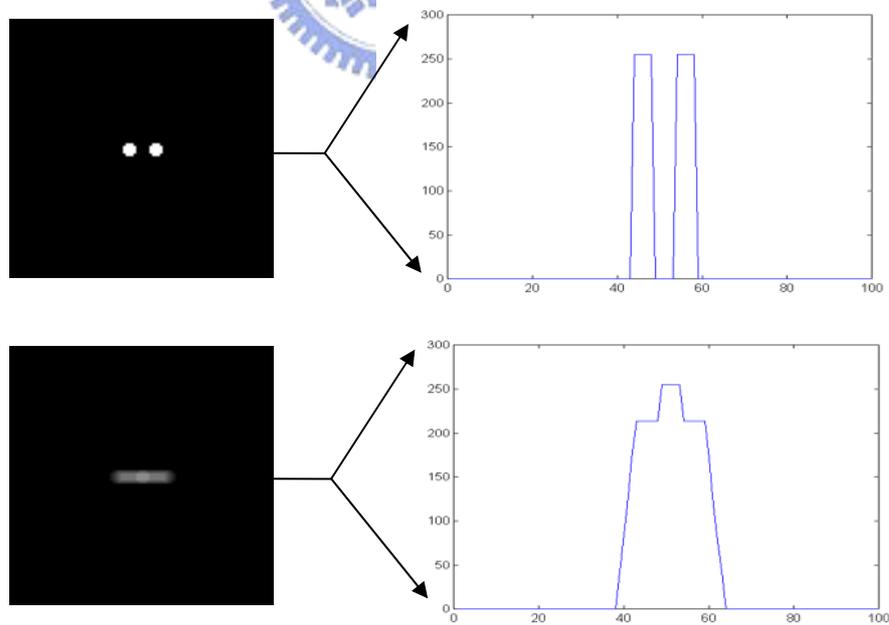


圖 4-2 原始影像與模糊影像及其強度對位置函數

我們使用第二章介紹的編碼理論來設計反向濾波器 $h(u, v)$ ，圖 4-3 是利用 kinoform 編碼法產生的反向濾波器去模糊後的影像，圖 4-4 是用雙相位合成法產生的反向濾波器去模糊後的影像，圖 4-5 是用改良型雙相位合成法產生的空間濾波器去模糊後的影像，可以明顯看出原本無法分辨的兩點已經可以明顯分辨出來了，而其中以改良型雙相位合成法產生之反向濾波器的去模糊效果最好。

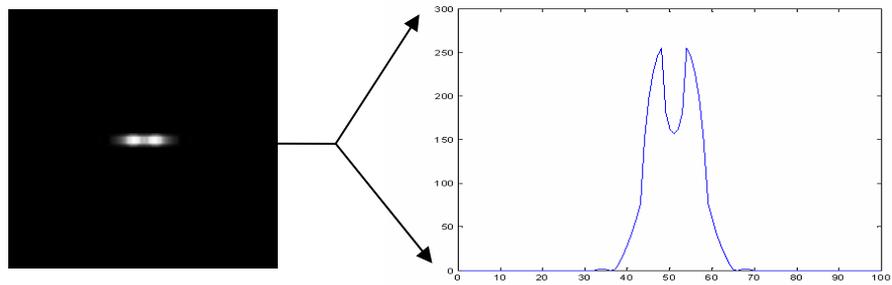


圖 4-3 kinoform 反向濾波器之去模糊影像

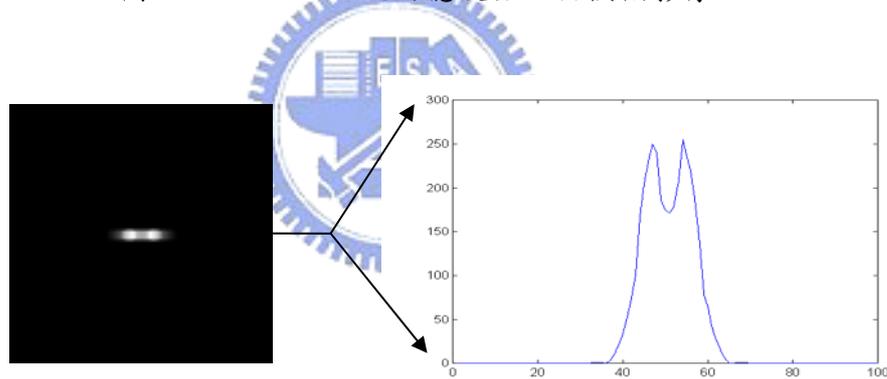


圖 4-4 雙相位合成法反向濾波器之去模糊影像

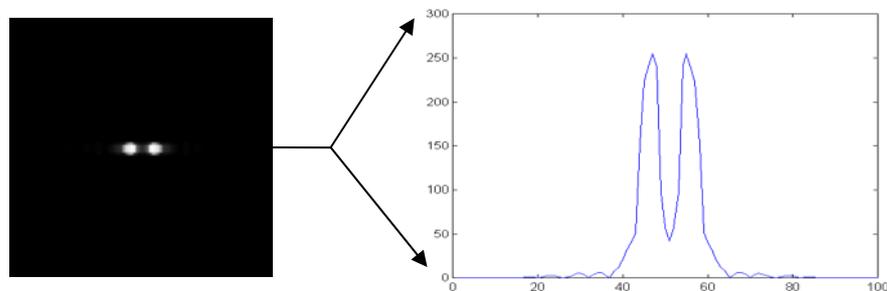


圖 4-5 改良型雙相位合成法反向濾波器之去模糊影像

接下來我們用一張真實的影像，將之動態模糊處理後，用改良型雙相位合成法空間濾波器將之去模糊。圖 4-6 是原始影像，圖 4-7 是動態模糊影像，圖 4-8 是去模糊之後的影像。傅氏轉換遞迴修正理論並不能用來產生去模糊空間濾波器，因為此理論只能限定振幅為限制條件，而在同調光資訊處理中，振幅和相位都扮演了很重要的腳色。

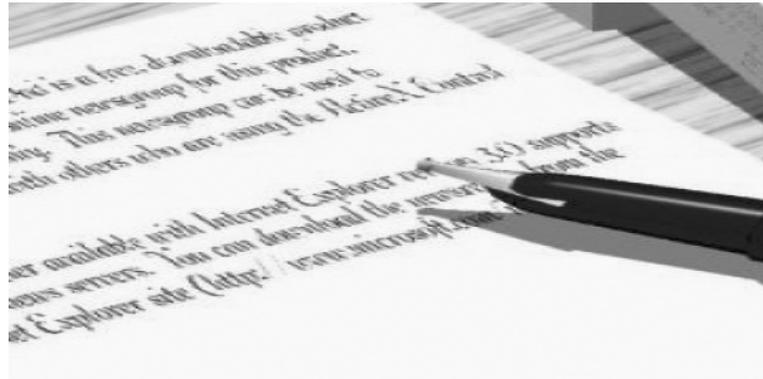


圖 4-6 原始清晰影像



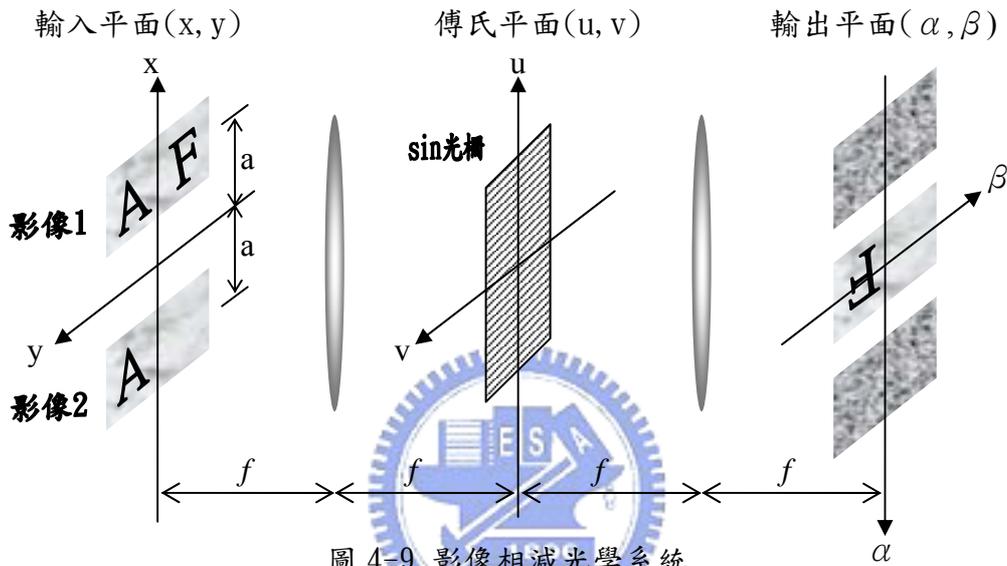
圖 4-7 動態模糊影像



圖 4-8 去模糊影像

4-2 應用二：影像減法空間濾波器

圖 4-9 是一個 4f 光學系統，輸入平面放置有影像 1 與影像 2，相對位置如圖所示，將一片設計好的 sin 光柵置於傅氏平面，此光柵的週期為 a，此光柵的穿透函數如 (4-6) 式，則在輸出平面光軸上可以得到影像 1 與影像 2 的相減訊號[9]。



$$T(u, v) = \sin(2\pi au) \dots \dots \dots (4-6)$$

輸入平面的訊號是影像 1 $f_1(x, y)$ 及影像 2 $f_2(x, y)$ ，相距設定為 $2a$ ，即 sin 光柵週期的兩倍，數學表示如下：

$$\text{輸入平面: } f_1(x - a, y) + f_2(x + a, y) \dots \dots \dots (4-7)$$

輸入平面的訊號經過透鏡在傅氏平面得到傅氏訊號，再經過 sin 光柵得到傅氏平面的訊號，如(4-8)式：

$$\begin{aligned} \text{傅氏平面: } & \mathfrak{F}\{f_1(x - a, y) + f_2(x + a, y)\} \cdot \sin(2\pi au) \\ &= [F_1(u, v) \cdot e^{-j2\pi au} + F_2(u, v) \cdot e^{j2\pi au}] \cdot \sin(2\pi au) \\ &= [F_1(u, v) \cdot e^{-j2\pi au} + F_2(u, v) \cdot e^{j2\pi au}] \cdot \frac{1}{2j} [e^{j2\pi au} - e^{-j2\pi au}] \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \{ [F_1(u, v) - F_2(u, v)] - [F_1(u, v) \cdot e^{-j4\pi au} - F_2(u, v) \cdot e^{j4\pi au}] \} \dots \dots (4-8) \end{aligned}$$

輸出平面的訊號是傅氏平面的訊號作傅氏轉換，得到的結果如(4-9)示：

$$\begin{aligned} \text{輸出平面} &: \frac{1}{2j} \cdot \mathfrak{F} \left\{ [F_1(u, v) - F_2(u, v)] - [F_1(u, v) \cdot e^{-j4\pi au} - F_2(u, v) \cdot e^{j4\pi au}] \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \underbrace{[f_1(\alpha, \beta) - f_2(\alpha, \beta)]}_{\text{光軸訊號}} - \underbrace{[f_1(\alpha - 2a, \beta) - f_2(\alpha + 2a, \beta)]}_{\text{離軸訊號}} \right\} \dots\dots\dots(4-9) \end{aligned}$$

(4-9)式有兩個部份，在光軸附近的訊號是影像 1 減影像 2 的訊號，也就是我們想要的影像相減結果；離軸訊號部分包含延 α 軸偏離 $2a$ 距離的影像 1，以及延 α 軸偏離 $-2a$ 距離的影像 2。

接下來我們將用雙相位合成法、改良式雙相位合成法這兩個編碼法來產生 sin 光柵。sin 光柵製作的困難之處在於 sin 有正負訊號，使用相位電腦全像的技術可以解決這個困難。圖 4-10 是將 sin 光柵作傅氏轉換得到的空間頻譜分佈，圖 4-11 是利用雙相位合成法產生的 sin 光柵作傅氏轉換得到的空間頻譜，而圖 4-12 是利用改良式雙相位合成法產生的 sin 光柵作傅氏轉換得到的空間頻譜。可以發現使用改良式雙相位合成法產生的 sin 光柵與實際 sin 光柵的空間頻譜最為接近。

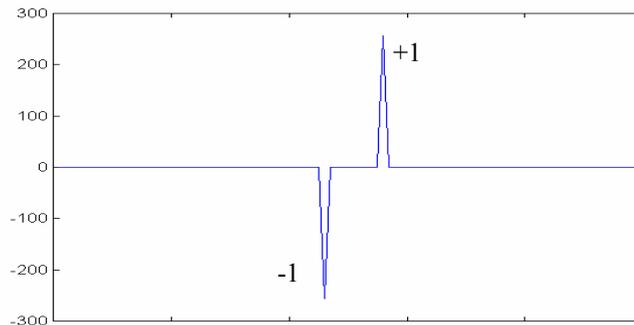


圖 4-10 sin 光柵的空間頻譜分佈

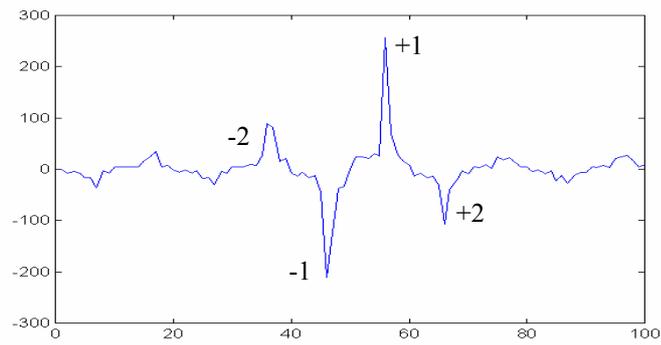


圖 4-11 雙相位合成法產生之 \sin 光柵的空間頻譜分佈

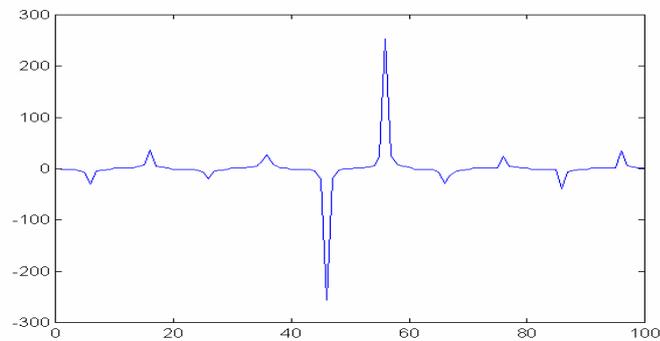


圖 4-12 改良式雙相位合成法產生之 \sin 光柵的空間頻譜分佈

雙相位合成法產生的 \sin 光柵與原始 \sin 光柵的空間頻譜的差別，除了原本正負一階的繞射光點，會多出其他高階繞射的光點，正負 2 階的光點訊號強度幾乎是正負一階強度的一半。這些高階繞射訊號會在輸出平面造成雜訊。改良型雙相位合成法產生的 \sin 光柵的空間頻譜，高階繞射光點的能量相對於正負一階來講就小得多了。

接下來我們作影像相減的電腦模擬，圖 4-13 是我們的輸入影像，長方形是對應圖 4-9 中的影像 1，橢圓形是影像 2。圖 4-14 是用雙相位合成法產生的 \sin 光柵，利用圖 4-9 的 $4f$ 光學系統來做影像相減後的輸出圖形，圖 4-15 是用改良型雙相位合成法產生的 \sin 光柵，利用圖 4-9 的 $4f$ 光學系統來做影像相減後的輸出圖形。

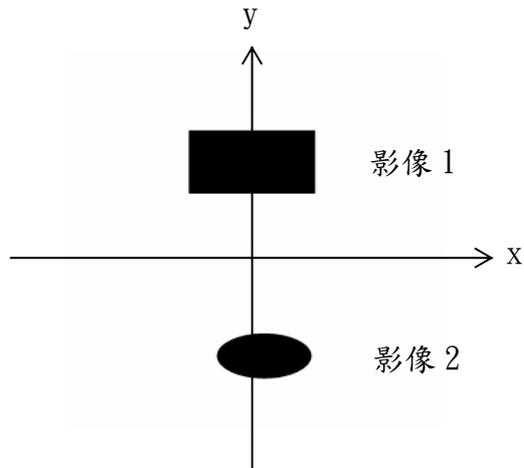


圖 4-13 輸入影像

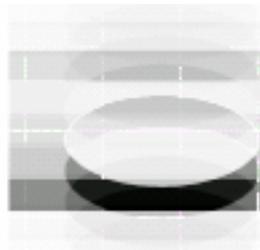


圖 4-14 雙相位合成法產生之 sin 光柵：
影像相減影像



圖 4-15 改良式雙相位合成法產生之 sin 光柵：
影像相減影像

從空間頻譜來看，雙相位合成法產生之 sin 光柵，除了原本只有正負一階繞射光點，因為編碼的關係而跑出高階繞射號，所以影像相減的效果不是很好；改良式雙相位合成法的影像相減的輸出，除了能清楚看出影像相減的效果，雜訊也小很多。

4-3 應用三：形變影像辨識之匹配濾波器

光資訊處理中一個很常用的應用就是用來作圖形識別，其基本的原理就是利用 $4f$ 的光學系統，若空間濾波器的形式為欲辨識影像的空間頻率訊號的共軛複數訊號，標示為 H^* ，則稱之為匹配濾波器，在輸出平面的原點訊號為輸入影像與欲辨識影像的相關運算，如圖 4-16，此光學系統又稱為 Vanderlugt 交相關運算器。

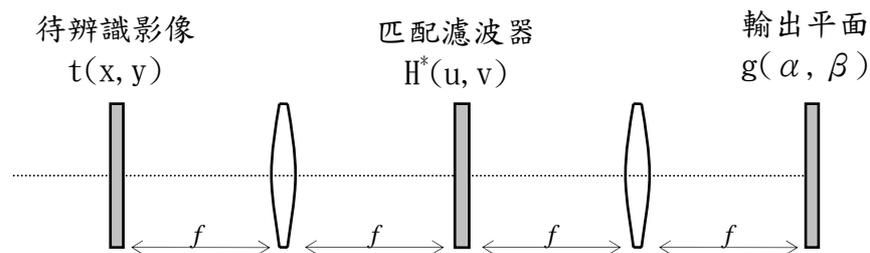


圖 4-16 Vanderlugt 光學交相關運算器

若輸入影像 t 與欲辨識影像 h 相似，再輸出平面 (α, β) 的原點就會出現一個峰值，如數學式數學式 4-10。

$$g(\alpha, \beta) = t(\alpha, \beta) * h(\alpha, \beta) \dots \dots \dots (4-10)$$

通常一片濾波器只能辨識一個圖形，且輸入影像若有形變，包括影像大小、旋轉等變化，相關運算的峰值會下降的很快。為了能夠正確辨識形變後的欲辨識影像，我們引入合成辨識函數(Synthetic Discriminant function, 簡稱 SDF)的概念 [10]。合成辨識函數的基本概念就是先給予一個由辨識圖形的形變圖形，及其他有助於辨識圖形的圖形樣本所組成之集合，此集合是用來做為訓練產生具有辨識形變影像能力的合成辨識函數濾波器(SDF filter)。合成辨識函數最基本的形式是假設為訓練樣本圖形的線性組合，如數學式 4-11 所示， h 是表示合成辨識濾波函數， t_n 是表示訓練集合裡 N 個樣本中第 n 個訓練樣本， a_n 是第 n 個樣本的比重係數。

$$h = \sum_{n=1}^N a_n \cdot t_n \dots \dots \dots (4-11)$$

除了給定訓練樣本，還需要設定每一個訓練樣本與合成辨識函數在輸出平面原點的交相關運算值，也就是這兩個訊號的內積值，如(4-12)式所示， c_n 是表示第 n 個訓練樣本與合成辨識函數的內積值。

$$h^+ \cdot t_n = c_n, n = 1, 2 \dots N \dots\dots\dots(4-12)$$

為了方便用矩陣運算來求出合成辨識函數，原本訓練樣本圖形、合成辨識函數是二維的影像，現在皆延展成一維的行向量， d 是圖形的總像素，如(4-13)式所示：

$$t_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{dn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4-13)$$

依序將第 n 個行向量訓練樣本做為矩陣的第 n 個行向量，則可以組成一個 $d \times N$ 的訓練矩陣，而組成合成辨識函數的訓練樣本的比重係數及其內積值也可以寫成行向量形式，如(4-14)、(4-15)、(4-16)式：

$$\vec{S} = (t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_N) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{d1} & t_{d2} & \dots & t_{dN} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4-14)$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4-15)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4-16)$$

如此一來，(4-11)式及(4-12)式可以改寫成向量-矩陣的乘法，如(4-17)式及(4-18)式所示，：

$$\vec{h} = \vec{S} \cdot \vec{a} \dots\dots\dots(4-17)$$

$$\overline{S}^t \cdot \vec{h}^* = \vec{c} \dots\dots\dots(4-18)$$

其中矩陣 S 與內積向量 c 是已知條件，而 h 以及比重向量 a 是希望求得的。利用 (4-17) 式及 (4-18) 式兩個方程式的矩陣運算，可以解出 h 及 c 向量，解得的 h 及 c 向量各別為 (4-19) 式及 (4-20) 式：

$$\vec{h} = \overline{S} \cdot \left(\overline{S}^+ \cdot \overline{S} \right)^{-1} \cdot \vec{c}^* \dots\dots\dots(4-19)$$

$$\vec{a} = \left(\overline{S}^+ \cdot \overline{S} \right)^{-1} \cdot \vec{c}^* \dots\dots\dots(4-20)$$

介紹完合成辨識函數的基本原理，接下來將引進傅氏轉換遞迴修正理論來產生二位元相位的合成辨識濾波器。利用傅氏轉換遞迴修正理論產生二位元相位合成辨識濾波器，其主要的想法就是分別在濾波器平面以及相關運算輸出平面給予限制條件，在濾波器平面的限制條件是，將濾波器函數修正成二位元純相位函數；而在相關運算輸出平面的限制條件，則是將訓練樣本與合成辨識函數的相關運算峰值的絕對值修正為預期的峰值。為了簡單以及提高辨識的準確率，欲辨識影像及其形變的訓練樣本圖形的相關運算預期峰值的光強度設定為 1，而其他用來幫助提高辨識率的訓練樣本圖形，例如亂數圖形、任意選取與欲辨識影像無關的圖形等，則設定為 0。圖 4-17 式是設計流程圖，一開始由給定的相關運算峰值以及訓練樣本矩陣，可以求出第一個合成辨識函數 h，之後將合成辨識函數作傅氏轉換，得到濾波器函數，再根據濾波器空間的限制條件，將濾波器函數修正為二位元純相位函數 H''；修正完之後再對 H'' 作反傅氏轉換得到合成濾波函數 h''，將 h'' 帶入公式 4-18 可以得到合成辨識函數與訓練樣本的相關運算峰值 c，此峰值是個複數，再根據相關運算輸出平面的限制條件，將得到的峰值絕對值修正為預期峰值絕對值 c''，而將 c 的相位項保留得到修正後的峰值 c'。至此已經完成一個迴圈，此時得到的峰值 c_i' 與初始的 c₀' 絕對值是一樣的，但是因為經過一個迴圈的運算修正，c_i' 會多出相位項；c_i' 此時做為第二個回圈的起始條件，但是因為多出了相位訊號，代入數學式計算 (4-19)、(4-20) 出來的合成辨識函數與比重向量會跟第一個迴圈計算出來的不同，由此可以看出相位訊號提供了產生不同合成辨識函數

的自由度，再經由多次的遞迴修正，可以慢慢尋找出符合我們設計需求的二位元純相位濾波器，且此濾波器具有合成辨識函數的功能，能夠正確辨識形變後的欲辨識影像。另外在此迴圈之中，修正後的合成辨識函數 h' 與訓練樣本的相關運算峰值與預期峰值的差會因為一次又一次的修正而越來越小，我們設定一個停止條件 δ ，當每個訓練樣本與合成辨識函數的相關運算峰值與預期峰值的差皆小於停止條件 δ ，則迴圈停止，最後一個迴圈得到的濾波器函數即為所求。

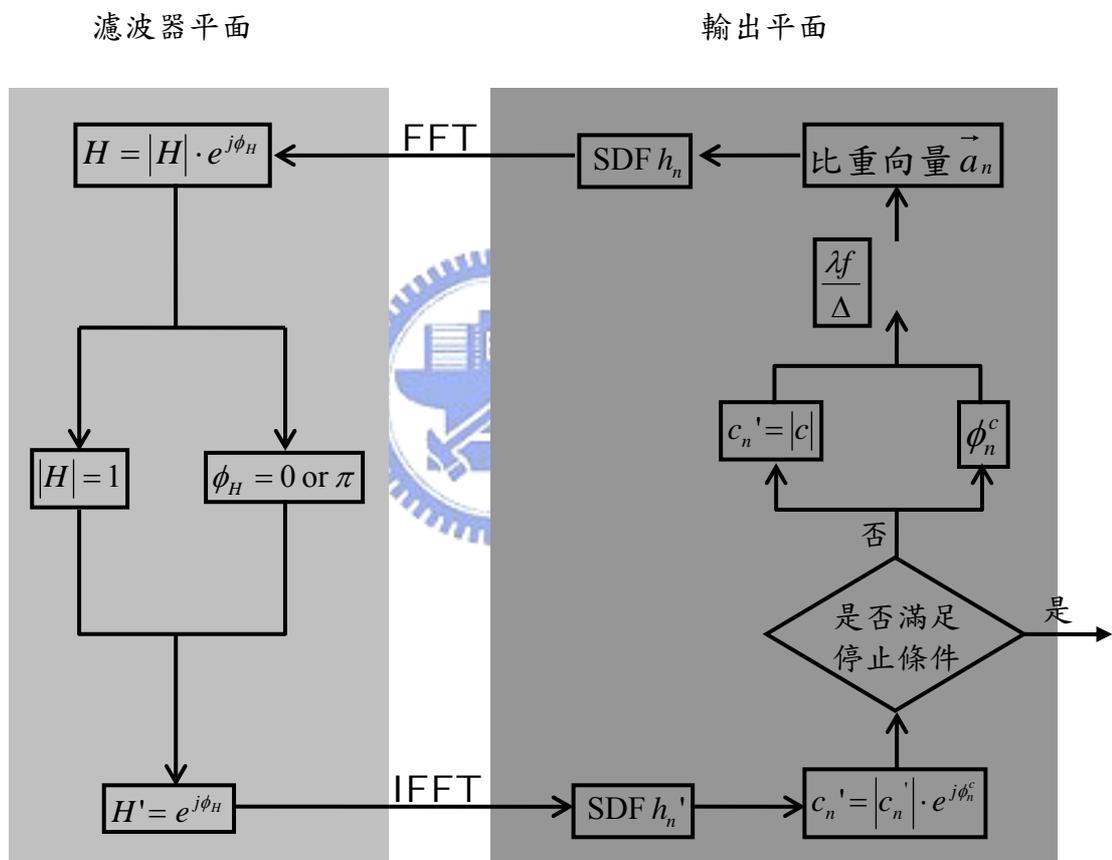


圖 4-17 傅氏轉換遞迴修正理論產生純相位合成辨識函數濾波器流程圖

我們使用一由英文字母及數字組成的圖形 4-18 為例子，大小形變有 0.8、0.9、1、1.1、1.2 五種，其中每一種大小又有 11 種旋轉形變 $+5^0 \sim -5^0$ ，以 1^0 為間隔，所以總共有 55 種形變樣本圖形，此 55 張型變樣本徒刑的相關運算峰值皆設定為 1。除此

之外，我們選取了五張與形變圖形無關的鑑別圖形加進訓練圖形集合中，其相關運算峰值則設定為 0，以與形變圖形區別。所以圖形集合中總共有 60 張樣本圖形，選取其中 35 張形變圖形以及五張鑑別圖形做為訓練圖形。我們設定的停止條件為當所有訓練樣本與合成辨識函數的相關運算峰值差皆小於 0.01，則迴圈停止，最後得到的 H' 即為所求。再得到最後 H' 之後，為了檢驗此匹配濾波器的辨識能力，我們選取了其它不在訓練樣本中的其他形變圖形作為待辨識圖形，還有其它由不是正確英文數字組成的圖形來測試，其測試結果如表 4-1。

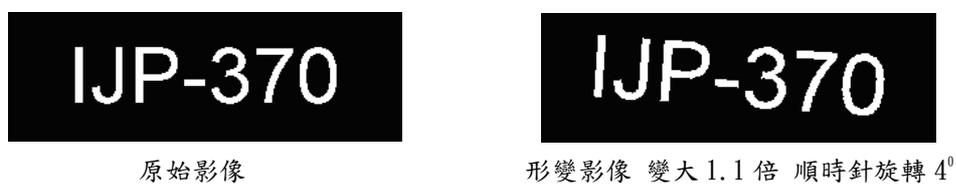


圖 4-18 原始影像及其形變影像

表 4-1 二位元純相位匹配濾波器辨識模擬結果

測試圖形 { 大小 , 旋轉角度 }	相關運算峰值
原始圖形 { 1.0 , 0 } 	0.99
鑑別圖形 	0.01
形變圖形 1 { 1.1 , +4 } 	0.74
形變圖形 2 { 0.9 , -2 } 	0.57
形變圖形 3 { 0.8 , -4 } 	0.32
測試圖形 	0.23
亂數圖形 	0.27

表中的原始圖形及鑑別圖形因為是訓練集合中的圖形，所以其相關運算峰值皆相

當接近預期峰值，原始圖形為 0.99 而鑑別圖形為 0.01；而形變圖形 1、2、3，測試圖型及亂數圖形則皆不是在訓練集中的圖形，其相關運算峰值與預期峰值的誤差，相對於訓練樣本就大得多了，但是可以注意到，所有形變圖形的相關運算峰值最低是 0.32，所以我們可以設定 0.3 為辨識圖形的閾值，若輸入圖形與合成辨識函數的相關運算峰值大於閾值，此圖形則為正確的圖形；反之若峰值小於閾值，則此圖形為錯誤的圖形。至此我們成功結合合成辨識函數以及傅氏轉換遞迴修正理論，設計出能夠辨識形變圖形的二位元純相位匹的配濾波器。



第五章 結論

本論文介紹了電腦全像片的原理及與一般光學全像片的異同，並介紹了振幅式以及相位式電腦全像片的設計方法，包括相位繞道編碼法，是屬於振幅電腦全像片設計方法，Kinoform 編碼法、雙相位合成法及傅氏轉換遞迴修正理論，是屬於相位電腦全像片設計方法。

為了能夠比較各種設計方法的優劣，我們在第三章作了每種編碼法重建影像的電腦模擬，利用繞射效率、訊雜比以及編碼所需像素三個參數來評估其好壞，比較結果傅氏轉換遞迴修正理論擁有最佳的重建影像品質，改良式雙相位合成法次之。相較於相位電腦全像片，振幅電腦全像片因為繞射效率不佳，訊雜比也比較低，且編法所需像素比較多，比較不適合在光資訊處理中的應用。

第四章我們將相位電腦全像術應用於光資訊處理系統中，主要用來產生空間濾波器，其中的應用包括影像還原、影像相減以及形變影像辨識。在影像還原的應用裡，使用了 kinoform、雙相位合成法及其改良型雙相位合成法來產生空間濾波器，模擬結果以改良型雙相位合成法產生的空間濾波器對模糊影像的去模糊效果最佳；在影像相減的應用裡，同樣是採用改良型雙相位合成法產生的空間濾波器效果，所做的影像相減效果最好。在形變影像辨識的應用裡，結合了合成辨識函數能夠辨識形變影像以及傅氏轉換遞迴修正理論能夠產生二位元純相位電腦全像片的優點，設計出二位元純相位匹配濾波器，除了能夠辨識形變圖形之外，因為是二位元的相位函數，能夠降低利用空間調製器來即時顯示電腦全像片的困難度。

參考文獻

- [1] D.Gabor. "A new microscope principle." *Nature*, **161**, p.777, 1948.
- [2] B.R. Brown and A.W. Lohmann. "Complex spatial filter." *Appl. Opt.*, **5**, p.967, 1966.
- [3] A.W. Lohmann and D.P. Paris. "Binary Fraunhofer holograms generated by computer." *Appl. Opt.*, **6**, p.1739, 1967.
- [4] L.B. Lesem, P.M. Hirsch, and J.A. Jordon, Jr. "The kinoform:a new wavefront reconstruction device." *IBM J. Res. And Dev.*, **13**, p.150, 1969.
- [5] J.M. Florence and R.D. Juday, "Full-complex spatial filtering with a phase mostly DMD." *Proc. SPIE*, **1558**, p. 487, 1991.
- [6] D. Mendlovic, G. Shabtay, U. Levi, Z. Zalersky, and E. Marom, "Encoding technique for design of zero-order (on-axis) Fraunhofer computer-generated-holograms." *Appl. Opt.*, **36**, p.8427, 1997.
- [7] J.R. Fienup, "Phase retrieval algorithm: a comparison." *Appl. Opt.*, **21**, p. 2758, 1982.
- [8] F. Wyrowski and O. Bryngdahl, "Iterative Fourier transform algorithm applied to computer holography," *JOSA. A*, **5**, p.1058, 1988.
- [9] Francis T.S. Yu, "Optical Signal Processing, Computing, and Neural Networks.", John Wiley & Sons, INC., 1992.
- [10] David Casasent and Wen-Thong Chang, "Correlation synthetic discriminant functions." *Appl. Opt.*, **25**, p.2343, 1986.