第五章　高精確度光學外差偏極計

5.1 前言

在生物科技的檢測中，生物體中的對掌性物質濃度往往都不高，例如人類的血糖濃度[1]，因此造成光學旋轉角的旋轉角度也不大，一般的光學偏極計的量測精確度有限[2-7]，所以對於旋角角度很小的對掌性物質，較不易量測。

為了克服此一困難，本章提出一種高精確度光學外差偏極計，可用於測量光學旋轉角度很小的對掌性物質。其原理是當經過待測物並且由 Mach-Zehender 干涉儀所輸出的兩組外差光源，分別經過幾個偏光元件後再干涉;當偏光元件的方位角在適當的條件下，干涉信號中關於光學旋轉角的相位差會被放大，而被放大的相位差可利用外差干涉術測量出來，同時光學旋轉角也可被估計出來。由於相位差放大的關係，光學旋轉角的量測解析度也會被提高。同時，因為量測解析度提高，所以所需待測物的厚度可以縮短，使得所需待測物的量也跟著減少。

5.2 原理

本方法的設計架構圖如Fig. 5.1 所示。為了方便起見，定+z軸為光行進方向，x軸為水平方向。一水平偏振光經過一快軸與x軸夾$\theta_h/2$ 的二分之一波片H後，其Jones vector可表示為

$$E_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_h \\ \sin\theta_h \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

此線性偏振光繼續通過快軸在x方向上的電光調制器。外加驅動器產生一個鋸齒

波電壓訊號驅動電光晶體。鋸齒波的角頻率與振幅分別為ω 及 $V_{\lambda/2}$。因此經過電光晶體後，光的Jones vector變成

$$
\begin{aligned}
E_i' &= EO(\omega t)\cdot E_i \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_h \\ \sin\theta_h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_h \cdot e^{i\omega t/2} \\ \sin\theta_h \cdot e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

其次，此光束進入如Fig. 5.1 所示，由偏極分光鏡PBS、兩個面鏡M_a及M_b與分光器BS所組成的Mach-Zehnder干涉儀中，待測物S放在其中一光程中。光束被偏極分光器(PBS)分成兩路徑：(a) PBS→M_a→S→BS 及 (b) PBS→M_b→BS, 其中待測物置於路徑(a)中。穿透的p-偏光與反射的s-偏光在分光器處重疊產生電場E_t，可表示為

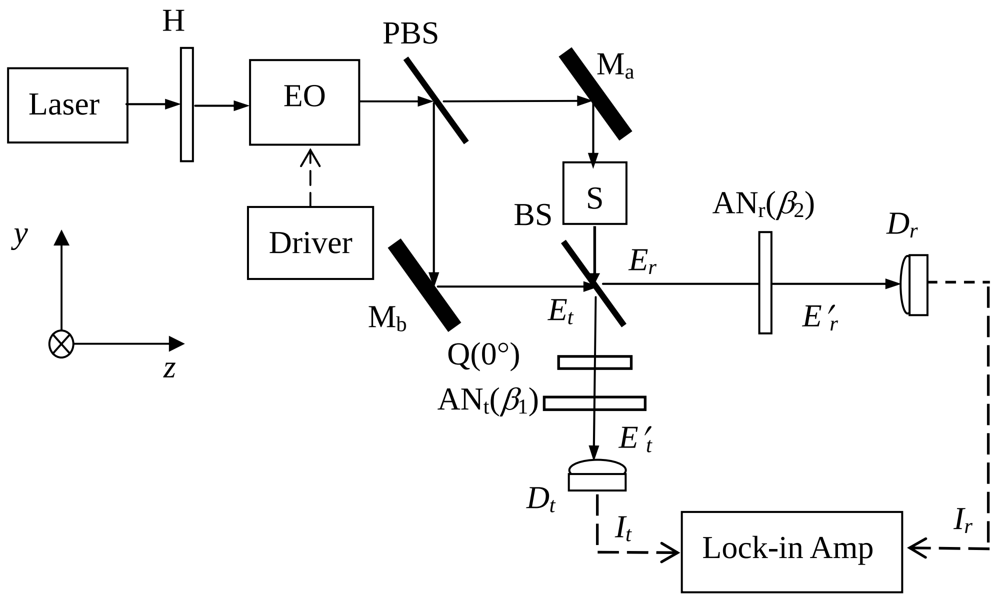

Fig. 5.1 高精確度光學外差偏極計

$$E_t = E_{p1} + E_{s1}$$

$$= \cos\theta_p \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} e^{i[(\omega t/2)-\phi_{Ma}]} + \sin\theta_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i[(\omega t/2)+kd+\phi_{Mb}+(\phi_{BS}/2)]}, \quad (5.3)$$

而穿透的s-偏光與反射的p-偏光則在BS處合成為電場E_r，可表示為

$$E_r = E_{p2} + E_{s2}$$

$$= \cos\theta_p \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot e^{i\phi_{BS}/2} \\ \sin\theta \cdot e^{-i\phi_{BS}/2} \end{pmatrix} e^{i[(\omega t/2)-\phi_{Ma}]} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i[(\omega t/2)+kd+\phi_{Mb}]}, \quad (5.4)$$

其中下標p與s代表p-與s-偏光，1 與 2 代表從BS輸出的光，而 θ 對掌性物質的光學旋轉角。令d 為兩臂的光程差、ϕ_{BS} 為p-與s-偏光在BS反射所引進的相位差，ϕ_{Ma}與 ϕ_{Mb} 則是面鏡M_a 與 M_b所引進的相位差。振幅為E_t 的光束經過一個快軸在x軸的四分之一波片Q(0°)與一穿透軸和水平軸夾β_1角的檢偏板AN_t (β_1)後可表示為

$$E_t' = AN_t(\beta_1)\cdot Q(0^\circ)\cdot E_t$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\beta_1 & \sin\beta_1\cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_1 & \sin^2\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\times \left\{ \cos\theta_p \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} e^{i[(\omega t/2)-\phi_{Ma}]} + \sin\theta_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i[(\omega t/2)+kd+\phi_{Mb}+(\phi_{BS}/2)]} \right\}$$

$$= [A_1\cos\theta_p \cdot e^{i[(\omega t/2)+\phi_t-\phi_{Ma}]} + A_2\sin\theta_p \cdot e^{-i[(\omega t/2)+kd-(\pi/2)+\phi_{Mb}+(\phi_{BS}/2)]}] \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

而光偵測器D_t所測得的強度為

$$I_t = |E_t'|^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\omega t + \psi_t), \tag{5.6}$$

其中

$$\psi_t = \phi_t + kd + (\phi_{BS}/2) + (\phi_{Mb} - \phi_{Ma}) - (\pi/2), \tag{5.7}$$

$$\phi_t = \tan^{-1}(\tan\beta_1 \tan\theta), \tag{5.8}$$

$$A_1 = \cos\theta_p \sqrt{(\cos\beta_1 \cos\theta)^2 + (\sin\beta_1 \sin\theta)^2}\ , \tag{5.9}$$

且

$$A_2 = \sin\theta_p \sin\beta_1 . \tag{5.10}$$

另一方面，振幅為E_r 的光束通過穿透軸與x軸夾 β_2的檢偏板$AN_r(\beta_2)$後，其Jones vector可寫為

$$\begin{aligned}
E_r' &= AN_r(\beta_2)\cdot E_r \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\beta_2 & \sin\beta_2\cos\beta_2 \\ \sin\beta_2\cos\beta_2 & \sin^2\beta_2 \end{pmatrix} \\
&\times \left\{ \cos\theta_p \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot e^{i\phi_{BS}/2} \\ \sin\theta\cdot e^{-i\phi_{BS}/2} \end{pmatrix} e^{i[(\omega t/2)-\phi_{Ma}]} + \sin\theta_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i[(\omega t/2)+kd+\phi_{Mb}]} \right\} \\
&= [B_1\cos\theta_p\cdot e^{i[(\omega t/2)+\phi_r-\phi_{Ma}]} + B_2\sin\theta_p\cdot e^{-i[(\omega t/2)+kd+\phi_{Mb}]}]\begin{pmatrix} \cos\beta_2 \\ \sin\beta_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中

$$\psi_r = kd + (\phi_{Mb} - \phi_{Ma}) + \phi_r \,, \tag{5.13}$$

$$\phi_r = \tan^{-1}\left[\frac{\cos(\beta_2 + \theta)}{\cos(\beta_2 - \theta)} \tan\left(\phi_{BS}/2\right)\right], \tag{5.14}$$

$$B_1 = \cos\theta_p \sqrt{\cos^2\beta_2 \cos^2\theta + \sin^2\beta_2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \sin 2\beta_2 \cos\phi_{BS}} \,, \tag{5.15}$$

且

$$B_2 = \sin\theta \sin\beta_2 \,. \tag{5.16}$$

接著信號I_r 與I_t 則送入鎖相放大器做相位分析，則可得到兩信號之間的相位差$\Delta\psi(=\psi_t - \psi_r)$之值；由於 $\Delta\psi$ 可以寫為

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \psi_t - \psi_r \\ &= (\phi_t - \phi_r) - (\pi/2) + (\phi_{\mathrm{BS}}/2) \\ &= \phi - (\pi/2) + (\phi_{\mathrm{BS}}/2). \end{aligned} \tag{5.17}$$

因此要得到相位差ϕ $(=\phi_t - \phi_r)$，則必須要先知道ϕ_{BS}。為了求得ϕ_{BS}，可先將系統中的待測物移開，讓兩信號I_r 與I_t 直接送入鎖相放大器，因為沒有待測物的關係，所以相位差$\phi=0$，而由鎖相放大器可以讀到相位差$\Delta\psi'$。將此結果代入Eq. (5.17)，即可求得ϕ_{BS} [8]。將所獲得的ϕ_{BS}值代入Eq. (5.17)，即可得到$\phi=\Delta\psi+(\pi/2)-(\phi_{BS}/2)$。

最後，將 Eqs (5.8)與(5.14)兩式相減可得

$$\phi = \tan^{-1}(\tan\beta_1 \tan\theta) - \tan^{-1}\left(\frac{(\cos\beta_2 + \theta)}{(\cos\beta_2 - \theta)}\tan\left(\phi_{BS}\middle/2\right)\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\beta_1 \cdot \tan\theta \cdot \cos(\beta_2 - \theta) - \tan(\phi_{BS}/2)\cdot\cos(\beta_2 + \theta)}{\cos(\beta_2 - \theta) + \tan\beta_1 \cdot \tan(\phi_{BS}/2)\cdot \tan\alpha \cdot \cos(\beta_2 + \theta)}\right), \qquad (5.18)$$

由上式可知，光學旋轉角θ 為相位差ϕ 的函數，所以可以解得光學旋轉角為

$$\theta = -\tan^{-1}\left\{\frac{[C(1-EF) - D(E-F)] - \sqrt{[C(1-EF) - D(E-F)]^2 + 4CD(1+EF)(E+F)}}{2CD(1+EF)}\right\}$$

. (5.19)

其中 $C=\tan\beta_1$, $D=\tan\beta_2$, $E=\tan\phi$, 及$F=\tan(\phi_{BS}/2)$.

5.3. 實驗與結果

在本實驗中，我們測量二分之一波片在不同方位角下所產生的光學旋轉角及重量百分比濃度分別為：0.1%、0.5%、1%、10%、15%及 20%的六種不同葡萄糖溶液。每種溶液置放於一長 10mm的石英玻璃盒中。波長 632.8nm的氦氖雷射被電光晶體調制器所調制，做為外差光源。外差光源的p- 與s-偏光間的頻差為 1kHz。為了有較佳的對比度，我們選擇θ_h=3.5°、 β_1=88.0° 及 β_2=85.0° 且ϕ_{BS}=25.5° 已先被測量出。首先，我們將二分之一波片置入干涉儀當做測試樣本。測量結果如Fig. 5.2 中之“o” 所示，曲線則為理論計算值。Fig. 5.2 的縱軸代表相位差ϕ ，橫軸代表光學旋轉角θ 且 θ 為二分之一波片快軸方位角θ_h 的 2 倍。為了比較，我們將本方法(曲線A)與一般光學外差偏極計(曲線B)的 ϕ 對 θ 之理論曲線表示於圖中，由圖中可以看到，在小角度的區域內，曲線A的斜率幾乎為曲線B的 15 倍，因此本方法的解析度約比一般光學外差偏極計高一個級數。

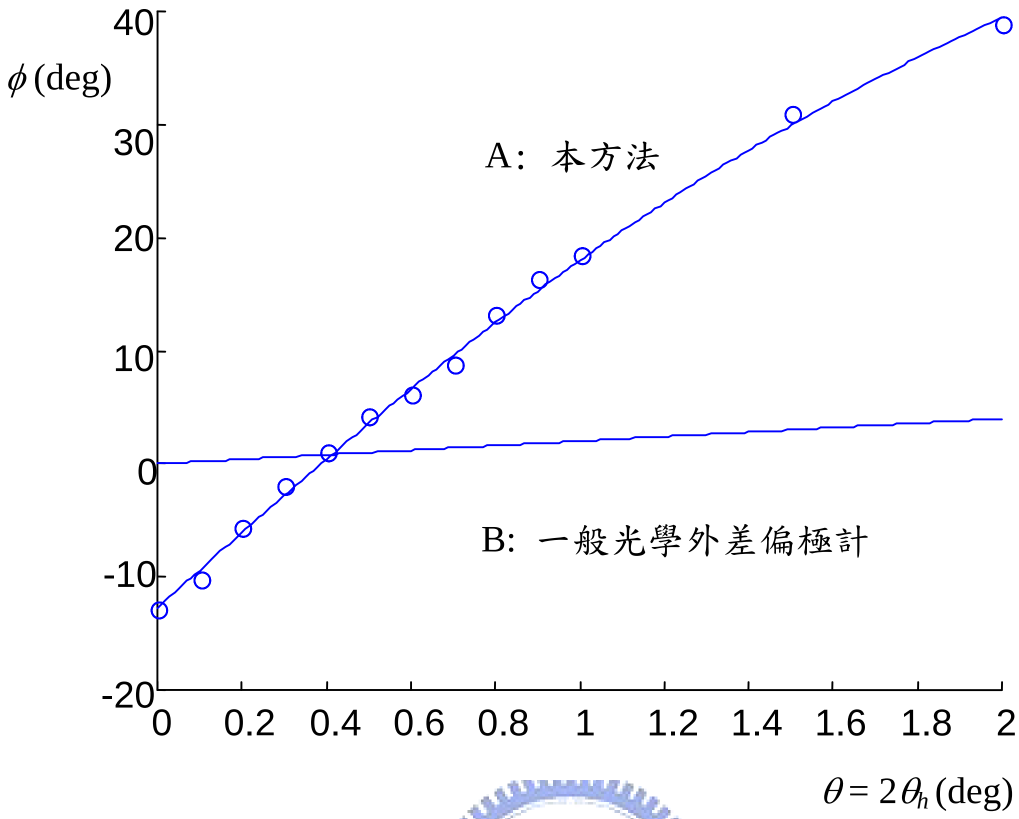

Fig. 5.2 以二分之一波片為樣本的ϕ 與 θ 的測量結果與理論曲線圖

Table 5.1 高精確度光學外差偏極計對不同濃度的葡萄糖溶液之量測結果

Solutions	ϕ	θ	θ_{ref}
Glucose(w=0.1%)	-12.880	-0.00389	-0.00448
Glucose(w=0.5%)	-13.563	-0.02415	-0.02240
Glucose(w=1%)	-14.322	-0.04677	-0.04480
Glucose(w=10%)	-28.660	-0.47499	-0.46502
Glucose(w=15%)	-37.080	-0.73489	-0.71187
Glucose(w=20%)	-44.790	-0.98510	-0.96858

ϕ(degree): 量測相位差 ；θ(degree): 光學旋轉角;

θ_{ref}(degree): 由參考論文 9,12 及 13 所計算而得之光學旋轉角

[θ_s]: 比旋光度: 44.8 deg·(g/cc)$^{-1}$·dm^{-1}.

至於不同濃度的葡萄糖液量測之ϕ 對 θ 值則列於Table 5.1 中，比光旋度 $[\theta_s]$也列於其中。比光旋度的定義為$[\theta_s]=\dfrac{\theta}{C\cdot L}$，其中C為對掌性物質的濃度，L為光通過物質的光程長。$[\theta_s]$的值可由Ref.[6,9,10]獲得。我們將所得之參考數值代入$[\theta_s]=\dfrac{\theta}{C\cdot L}$計算，可得旋轉角$\theta_{ref}$的相關參考值，並將其列於Table 5.1 以便比較。

5.4 討論

為了得到解析度$\Delta\theta$，我們計算 $\tan\phi$ 與其微分。由 Eq. (5.18)，我們得到

$$\tan\phi=\left(\frac{\tan\beta_1\cdot\tan\theta\cdot\cos(\beta_2-\theta)-\tan(\phi_{BS}/2)\cdot\cos(\beta_2+\theta)}{\cos(\beta_2-\theta)+\tan\beta_1\cdot\tan(\phi_{BS}/2)\cdot\tan\alpha\cdot\cos(\beta_2+\theta)}\right). \tag{5.20}$$

當θ 不大(θ<1°)，Eq. (5.20)可寫成

$$\tan\phi\cong\left(\frac{\tan\beta_1\cdot\tan\theta-\tan(\phi_{BS}/2)}{1+\tan\beta_1\cdot\tan(\phi_{BS}/2)\cdot\tan\theta}\right), \tag{5.21}$$

且誤差 $\Delta\theta$ and $\Delta\phi$ 為

$$\Delta\theta\cong\frac{1}{\sec^2\theta}\left[\frac{\sec^2(\phi_{BS}/2)\sec^2\phi}{(1-\tan\phi_{BS}\tan\phi)\tan\beta_1}\right]\Delta\phi. \tag{5.21}$$

考慮二次諧波誤差、偏振混合誤差[11]與鎖相放大器角解析度，則系統相位誤差 $\Delta\phi$ 為 0.0014°。將實驗條件 β_1=88.0°、β_2=85.0°、ϕ_{BS}=25.5° 及 $\Delta\phi$=0.0014°代入Eq. (5.21)，我們可以得到 $\Delta\theta=6\times10^{-5}$度。

5.5 小結

在本章中，我們提出了一種方法，可將光學旋轉角的量測解析度提高，而應用於測量光學旋轉角不大時。當經過待測物並且由Mach-Zehender干涉儀所輸出的兩外差光束，分別經過幾個偏光元件後再干涉;當偏光元件的方位角在適當的條件下，干涉信號中關於光學旋轉角的相位差會被放大，而被放大的相位差可利用外差干涉術測量出來同時光學旋轉角也可被估計。由於相位差放大的關係，光學旋轉角的量測解析度也會提高。同時，因為量測解析度提高，因此所要求之待測物的厚度可以減小。本架構僅需一般外差光學偏極計厚度的 1/15。本方法所得到之光學旋轉角的量測解析度為 6×10^{-5} 度。

參考文獻

1. A. Lakhtakia (Ed.), "*Selected Papers on Natural Optical Activity*," SPIE, Bellingham (1990).
2. E. Charney(Ed.), "*The Molecular Basis of Optical Activity*," Krieger, Malabar, Ch.1 (1985).
3. H. J. King, C. Chou, H. Chang, and Y. C. Huang, "Concentration measurements in chiral media using optical heterodyne polarimeter," *Opt. Commun*. **110**, 259-262 (1994).
4. T. W. King, G. L. Cote, R. McNichols, and M. K. Goetz, "Multispectral polarimetric glucose detection using a single Pockels cell," *Opt. Eng*. **33**, 2746-2753 (1994).
5. C. Chou, Y. C. Huang, C. M. Feng, and M. Chang, "Amplitude sensitive optical heterodyne and phase lock-in technique on small optical rotation angle detection of chiral liquid," *Jpn. J. Appl. Phys*. **36**, 356-359 (1997).
6. G. L. Cote, M. D. Fox, and, and R. B. Northrop, "Noninvasive optical polarimetric glucose sensing using a true phase technique," *IEEE Trans. Biomed. Eng*. **39**, 752-756 (2000).
7. C. M. Feng, Y. C. Huang, J. G. Chang, M. Chang, and C. Chou, " A true phase sensitive optical heterodyne polarimeter on glucose concentration measurement," *Opt. Commun.* **141**, 314-321 (1997).
8. M. H. Chou, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Refractive-index measurement based on the effects of total internal reflection and the uses of heterodyne interferometry," *Appl. Opt*. **36**, 2936-2939 (1997).
9. N. Berova, K. Nakanishi, R. W. Woody (Eds.), "*Circular Dichroism*: *Principles and Applications*," 2nd ed., Wiley, New York, Ch.1 (2000).

10. R. C. Weast (ed), "*CRC Handbook of Chemistry and Physics*," Chemical Rubber, Boca Raton, 61st, ed., D227-270, E418 (1981).
11. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Complex refractive-index measurement based on Fresnel's equations and the uses of heterodyne interferometry," A*ppl. Opt*. **38**, 4047-4052 (1999).