

第四章 新型光學外差偏極計

4.1 前言

對掌性溶液常被使用於生物科技、醫學與製藥等領域。對掌性物質的對掌參數(chiral parameter)與平均折射率，是對於瞭解對掌性分子的量子結構與幾何構造之一項極為重要的特徵[1,2]。一般的光學偏極計僅能測量對掌性參數而無法同時將平均折射率測出[4-6]，此時必須藉由其它方法如全反射法與布魯斯特角法才能將其測出[7,8]。針對此一缺點，本章提出了一種新型的光學外差偏極計，其原理主要是利用旋光外差干涉術並在裝有待測液的玻璃盒中加入一長條玻璃，使得測試信號的相位差為對掌性物質之對掌參數與折射率的函數，最後用數值方法，而將兩參數求出。本架構除了能夠同時測量對掌性物質的對掌參數與平均折射率外，同時具有共光程干涉儀不受環境擾動的優點。



4.2 原理[8-10]

Fig. 4.1 為新型光學外差偏極計的設計架構圖。為了方便起見，我們令+z 軸為光的行進方向，x 軸為水平方向。一個在 s-與 p-偏光之間具有角頻差 ω 的外差光源經過一個快軸與 x 軸夾 45° 的四分之一波片 Q 後，光的 Jones vector 可寫為 [8]

$$\begin{aligned} E_i &= Q(45^\circ) \cdot E_{in} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\omega t/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\omega t/2 + i\pi/2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

由Eq. (4.1)我們可以看到右旋光與左旋光分別有 $\omega/2$ 與 $-\omega/2$ 的角頻率偏移。因此兩旋光之間存在著角頻差 ω 。此旋光外差光源入射至一分光器BS後，分成兩部分：反射光及穿透光。反射光進入檢偏板 AN_r 且進入光偵測器 D_r 。若 AN_r 的穿透軸設置在與x軸夾 45° 的方向，則到達 D_r 的光之Jones vector可寫為

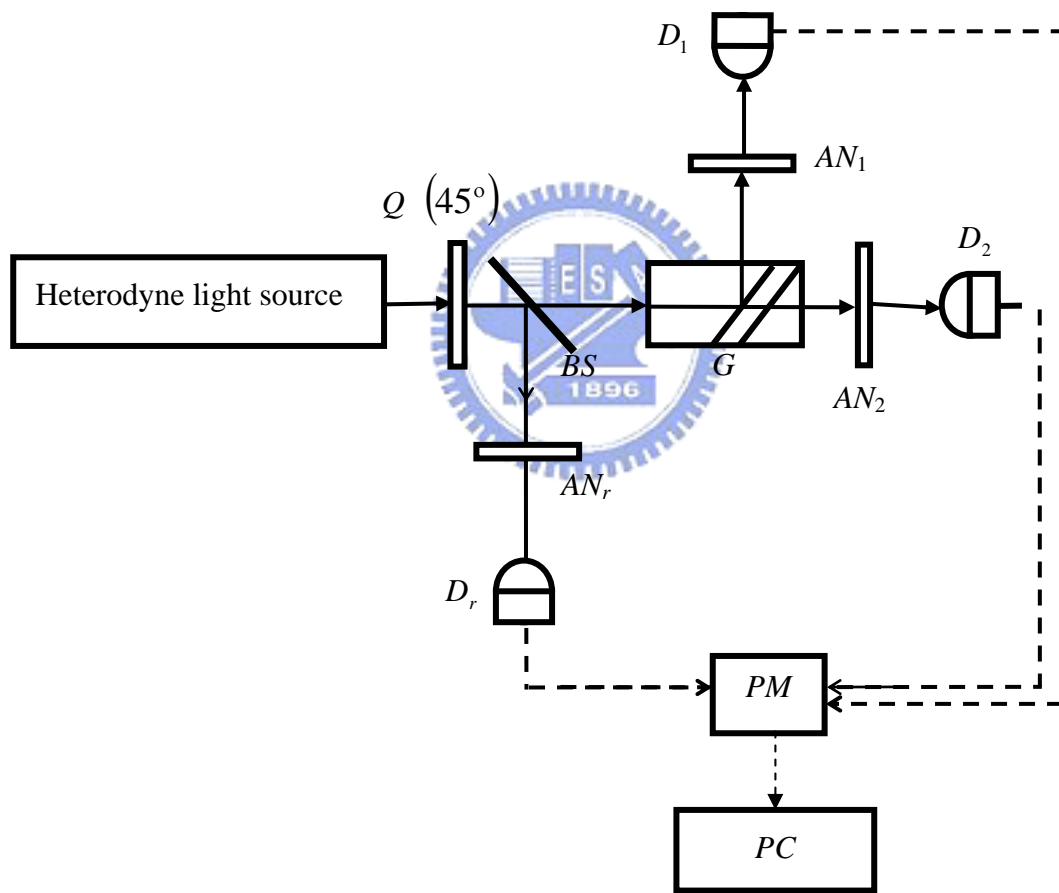


Fig. 4.1 新型光學外差偏極計

$$\begin{aligned}
E_r &= AN_r(45^\circ) \cdot BS \cdot E_i \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_{BS}/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_{BS}/2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\omega t/2} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\omega t/2 + i\pi/2} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(i e^{-i\phi_{BS}/2} + e^{i\phi_{BS}/2} \right) e^{i\omega t/2} + \left(i e^{i\phi_{BS}/2} + e^{-i\phi_{BS}/2} \right) e^{-i\omega t/2} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)
\end{aligned}$$

D_r 所測得之光強度為

$$I_r = |E_r|^2 = \frac{1}{2} (1 + 2 \cos \phi_{BS} \cdot \cos \omega t), \quad (4.3)$$

在此 I_r 為參考信號， ϕ_{BS} 為p-偏光與s-偏光之間經BS反射後所引進的相位差。另一方面，BS的穿透光進入一裝有平均折射率 n 及對掌參數 g 之對掌性溶液的方形玻璃盒及一折射率為 n_g 且與玻璃盒邊夾 45° 的玻璃平板G，如Fig. 4.2所示。在這裡，對掌參數定義為[11]

$$g = \frac{(n_l - n_r)}{2}, \quad (4.4)$$

其中 n_l 及 n_r 分別表示左右旋光的圓偏極折射率。光在對掌性溶液經過一段距離 d 後，其Jones vector 可表示為

$$E'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t/2 - k_r d)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t/2 + k_l d - \pi/2)}, \quad (4.5)$$

其中 k_l 及 k_r 分別表示左旋光及右旋光的波數 (wavenumber)。然後該光束再被玻璃平板G分成兩道光：反射光與穿透光。這兩道光分別在對掌性溶液中通過 d_1 與 d_2 長的距離，並穿過檢偏板 AN_1 及 AN_2 ，最後分別進入光偵測器 D_1 與 D_2 。令 r 與 t

為光從對掌性溶液到玻璃板G的反射係數與穿透係數， t' 則表示光由G到溶液的穿透係數，下標p與s代表p-及s-偏光。若檢偏板AN₁及AN₂的穿透軸設置在45°，則到達偵測器D₁與D₂的光之Jones vector可分別表示

$$\begin{aligned}
 E_1 &= AN_1(45^\circ) \cdot S(\theta_1) \cdot G \cdot E'_i \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t/2 - k_r d)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t/2 + k_r d - \pi/2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} A \left(e^{i(\omega t/2 - k_r d + \phi_1)} + e^{-i(\omega t/2 + k_r d + \phi_1 - \pi/2)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

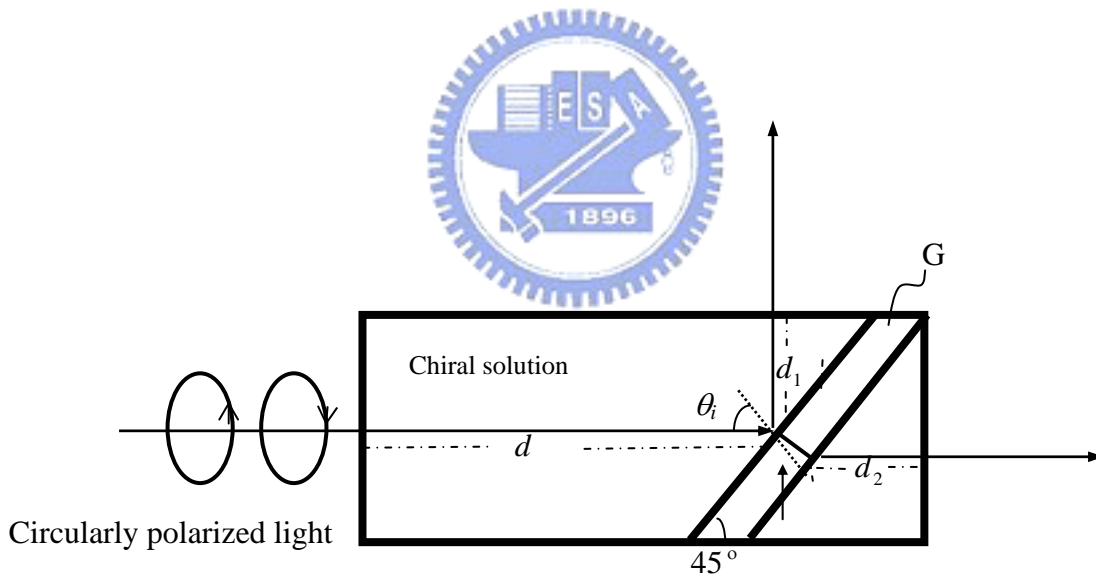


Fig. 4.2 裝置對掌性溶液之玻璃盒架構圖

及

$$\begin{aligned}
E_2 &= AN_2(45^\circ) \cdot S(\theta_2) \cdot G \cdot E'_i \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_p & 0 \\ 0 & t'_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{pmatrix} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t / 2 - k_r d)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t / 2 + k_l d - \pi / 2)} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} B \left(e^{i(\omega t / 2 - k_r d + \phi_2)} + e^{-i(\omega t / 2 + k_l d + \phi_2 - \pi / 2)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.7}
\end{aligned}$$

其中 $S(\theta_1)$ 與 $S(\theta_2)$ 分別表示對掌性溶液之光學旋轉角的Jones matrices，且

$$A = \sqrt{[r_p (\cos \theta_1 + \sin \theta_1)]^2 + [r_s (\cos \theta_1 - \sin \theta_1)]^2}, \tag{4.8}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left[\frac{r_s (\cos \theta_1 - \sin \theta_1)}{r_p (\cos \theta_1 + \sin \theta_1)} \right], \tag{4.9}$$

$$\theta_1 = (k_r - k_l) d_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_r - n_l) d_1, \tag{4.10}$$

$$r_p = \frac{n'^2 - \sqrt{2n'^2 - 1}}{n'^2 + \sqrt{2n'^2 - 1}}, \tag{4.11}$$

$$r_s = \frac{1 - \sqrt{2n'^2 - 1}}{1 + \sqrt{2n'^2 - 1}}, \tag{4.12}$$

$$B = \sqrt{[t'_p t'_p (\cos \theta_2 + \sin \theta_2)]^2 + [t'_s t'_s (\cos \theta_2 - \sin \theta_2)]^2}, \tag{4.13}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left[\frac{t_s t'_s (\cos \theta_2 - \sin \theta_2)}{t_p t'_p (\cos \theta_2 + \sin \theta_2)} \right], \quad (4.14)$$

$$\theta_2 = (k_r - k_l) d_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_r - n_l) d_2, \quad (4.15)$$

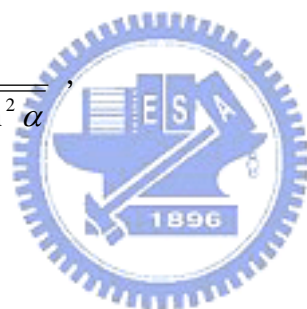
$$t_p = \frac{1}{n'} (r_p + 1), \quad (4.16)$$

$$t_s = r_s + 1, \quad (4.17)$$

$$t'_p = \frac{2n'' \cos \alpha}{n''^2 \cos \alpha + \sqrt{n''^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (4.18)$$

$$t'_s = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{n''^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (4.19)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot n'} \right), \quad (4.20)$$



$n' = n_g / n$ 及 $n'' = (n')^{-1}$ 。最後光偵測器 D_1 與 D_2 所測得之光強度為

$$I_1 = |E_1|^2 = \frac{1}{8} A^2 [1 + \cos(\omega t + \psi_1)], \quad (4.21)$$

及

$$I_2 = |E_2|^2 = \frac{1}{8} B^2 [1 + \cos(\omega t + \psi_2)], \quad (4.22)$$

其中

$$\psi_1 = 2\phi_1 + \phi - \frac{\pi}{2}, \quad (4.23)$$

$$\psi_2 = 2\phi_2 + \phi - \frac{\pi}{2}, \quad (4.24)$$

且

$$\phi = (k_l - k_r)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_l - n_r)d = \frac{4\pi}{\lambda}gd. \quad (4.25)$$

將兩組訊號 (I_r, I_1) 及 (I_r, I_2) 送入相位計 PM 後，可以得到相位差 ψ_1 及 ψ_2 。

由Eqs. (4.9)~(4.12)，(4.14)~(4.20)及(4.25)可以明顯看出， ψ_1 及 ψ_2 是 n 、 g 、 d 、 d_1 、 d_2 及 n_g 的函數。若是在已知 d 、 d_1 、 d_2 及 n_g 的情況下，實驗上所測得的相位差 ψ_1 及 ψ_2 為

$$\psi_1 = \psi_1(n, g), \quad (4.26)$$

$$\psi_2 = \psi_2(n, g), \quad (4.27)$$



此兩組方程式可用數值方法[12]解出參數 n 及 g 。

4.3 實驗與結果

為了驗證這個方法的可行性，我們在 20°C 下測量了葡萄糖溶液與蔗糖溶液的平均折射率與對掌性參數。外差光源是由波長 632.8nm 的氦氖雷射與電光晶體所組成。左旋光與右旋光的頻差為 1kHz 。折射率為 1.4507 的石英玻璃平板被置入對掌性溶液，而長度 d 、 d_1 及 d_2 分別為 50mm 、 10mm 及 10mm 。自製相位計的角解析度為 0.01° 。除此之外，個人電腦用於紀錄與分析資料。實驗結果與參

考數值如同Table 4.1 所示，其中 g_{ref} 是由比光旋度(specific rotation)的定義[1,13] 與待測物的參考值推導而得[4]。其結果與所對應的參考值相當符合，因此可看出本方法的可行性。

Table 4.1 新型光學外差偏極計對葡萄糖與蔗糖溶液之量測結果

Solutions	ψ_1	ψ_2	$g (\times 10^8)$	$g_{ref} (\times 10^8)$	n	n_{ref}
				(at 632.8nm)		
Glucose(w=5%)	-258.84°	2.44°	4.07	4.01 ^a	1.3394	1.3402 ^b
Glucose(w=10%)	-257.12°	5.31°	8.22	8.17 ^a	1.3472	1.3477 ^b
Sucrose(w=5%)	-258.25°	3.18°	5.16	5.11 ^c	1.3396	1.3403 ^b
Sucrose(w=10%)	-256.01°	6.77°	10.35	10.43 ^c	1.3483	1.3478 ^b

Note: 1.上標 a 及 b 分別表示由參考論文 1 及 13 所得之參考值。

2.上標 c 表示由參考論文 13 並利用曲線擬合方法所得之估計值。

4.4 討論

由 Eq. (4.25)我們得到

$$|\Delta g| = \left| \frac{\lambda}{4\pi d} \right| \cdot |\Delta \phi| + \left| \frac{\lambda \phi}{4\pi d^2} \right| \cdot |\Delta d|, \quad (4.28)$$

其中 Δg 、 $\Delta \phi$ 及 Δd 分別是 g 、 ϕ 及 d 的誤差。考慮相位計的角解析度、二次諧波誤差及偏振混合誤差後，可以得到系統相位誤差 $|\Delta \phi| \cong 0.03^\circ$ [14]。此外，長度誤差 $|\Delta d|=0.01\text{mm}$ 也必須考慮在實驗中。代入實驗結果、誤差與實驗條件到Eq. (4.28) 可以得到 $|\Delta g| \cong 5.5 \times 10^{-10}$ 。

由 Eqs. (4.23)及(4.24)，可以得到

$$\begin{aligned} \psi' = \psi_2 - \psi_1 &= 2 \tan^{-1} \left[\frac{t_s t'_s (\cos \theta_2 - \sin \theta_2)}{t_p t'_p (\cos \theta_2 + \sin \theta_2)} \right] - 2 \tan^{-1} \left[\frac{r_s (\cos \theta_1 - \sin \theta_1)}{r_p (\cos \theta_1 + \sin \theta_1)} \right] \\ &= 2 \tan^{-1} \left[\frac{(\cos \theta_2 - \sin \theta_2)(\cos \theta_1 + \sin \theta_1) r_p t_s t'_s - (\cos \theta_1 - \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + \sin \theta_2) r_s t_p t'_p}{(\cos \theta_2 + \sin \theta_2)(\cos \theta_1 + \sin \theta_1) r_p t_p t'_p + (\cos \theta_2 - \sin \theta_2)(\cos \theta_1 - \sin \theta_1) r_s t_s t'_s} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

由 Eq. (4.29)，我們得到

$$\Delta n \cong \frac{\left| \sec^2 \left(\frac{\psi'}{2} \right) \cdot \Delta \psi' \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial \theta_i} \cdot \Delta \theta_i \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \cdot \Delta \theta_1 \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial \theta_2} \cdot \Delta \theta_2 \right|}{\left| \frac{\partial h}{\partial n} \right|}, \quad (4.30)$$

其中 Δn 、 $\Delta \psi'$ 、 $\Delta \theta_i$ 、 $\Delta \theta_1$ 及 $\Delta \theta_2$ 分別為 n 、 ψ' 、 θ_i 、 θ_1 及 θ_2 的誤差。上式中的 $|\Delta \theta_1|$ 、 $|\Delta \theta_2|$ 及 h 分別表示如下

$$|\Delta\theta_1| = \left| \frac{4\pi}{\lambda} (n_r - n_l) \cdot \Delta d_1 \right| = \left| \frac{4\pi}{\lambda} g \cdot \Delta d_1 \right| , \quad (4.31)$$

$$|\Delta\theta_2| = \left| \frac{4\pi}{\lambda} (n_r - n_l) \cdot \Delta d_2 \right| = \left| \frac{4\pi}{\lambda} g \cdot \Delta d_2 \right| , \quad (4.32)$$

且

$$h = h(n, \theta_i, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_1 \cdot n_2 \cdot r_p(\theta_i) t_s(\theta_i) t'_s(\theta_i) - n_1 \cdot m_2 \cdot r_s(\theta_i) t_p(\theta_i) t'_p(\theta_i)}{m_1 \cdot m_2 \cdot r_p(\theta_i) t_p(\theta_i) t'_p(\theta_i) + n_1 \cdot n_2 \cdot r_s(\theta_i) t_s(\theta_i) t'_s(\theta_i)} , \quad (4.33)$$

其中

$$m_1 = \cos\theta_1 + \sin\theta_1 , \quad (4.34)$$

$$n_1 = \cos\theta_1 - \sin\theta_1 , \quad (4.35)$$

$$m_2 = \cos\theta_2 + \sin\theta_2 , \quad (4.36)$$

$$n_2 = \cos\theta_2 - \sin\theta_2 , \quad (4.37)$$

$$r_p(\theta_i) = \frac{n'^2 \cos\theta_i - \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_i}}{n'^2 \cos\theta_i + \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_i}} , \quad (4.38)$$

$$r_s(\theta_i) = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n'^2 - \sin^2 \theta_i}} , \quad (4.39)$$

$$t_p(\theta_i) = \frac{1}{n'} [r_p(\theta_i) + 1] , \quad (4.40)$$

$$t_s(\theta_i) = r_s(\theta_i) + 1 , \quad (4.41)$$



$$t'_p(\theta_i) = \frac{2n'' \cos \alpha}{n''^2 \cos \alpha + \sqrt{n''^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (4.42)$$

$$t'_s(\theta_i) = \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{n''^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (4.43)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_i}{n'} \right). \quad (4.44)$$

將實驗條件 $|\Delta\psi| \cong 0.03^\circ$ 、 $|\Delta\theta| = 0.001^\circ$ 、 $|\Delta d_1| = |\Delta d_2| = 0.001^\circ$ 及所測量的對掌性溶液的 n 與 g 值代入Eq. (4.30)，可得到 $|\Delta n| \cong 5 \times 10^{-4}$ 。

由Eqs. (4.8)、(4.11)、(4.12)及(4.21)可看出，當 n' 接近1時，信號 I_1 會變得太弱而無法測到。為了克服這個缺點，玻璃平板 G 的折射率必須適當的選擇，使得 G 的折射率與溶液的平均折射率之間的差愈大愈好。



4.5 小結

在本章中，我們提出了一種新型的光學外差偏極計並對其操作原理及結果加以說明。當旋光光源穿過對掌性溶液或經一非吸收材料反射，會產生相位差變化。相位差的變化可經由旋光外差干涉術精確的測出。將此量到的相位差代入推導的公式，並利用數值方法即可同時計算出對掌性物質的對掌參數與平均折射率。這種新的偏極計除了可同時測出兩參數外，且同時有共光程干涉儀及外差干涉儀的優點。

參考資料

1. G. L. Cote, M. D. Fox, and R. B. Northrop, "Noninvasive optical polarimetric glucose sensing using a true phase technique," *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **39**, 752-756 (2000).
2. P. K. Yang, and J. Y. Huang, "Sum-frequency generation from an isotropic chiral medium," *J. Opt. Soc. Am. B* **15**, 1698-1706 (1998).
3. M. P. Silverman, N. Ritchie, G. M. Cushman, and B. Fisher, "Experiment configurations using optical phase modulation to measure chiral asymmetries in light specularly reflected from a naturally gyrotropic medium," *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 1852-1862 (1988).
4. T. W. King, G. L. Cote, R. McNichols, and M. K. Goetz, "Multispectral polarimetric glucose detection using a single Pockels cell," *Opt. Eng.* **33**, 2746-2753 (1994).
5. H. J. King, C. Chou, H. Chang, and Y. C. Huang, "Concentration measurements in chiral media using optical heterodyne polarimeter," *Opt. Commun.* **110**, 259-262 (1994).
6. C. Chou, Y. C. Huang, C. M. Feng, and M. Chang, "Amplitude sensitive optical heterodyne and phase lock-in technique on small optical rotation angle detection of chiral liquid," *Jpn. J. Appl. Phys.* **36**, 356-359 (1997).
7. M. H. Chou, J. Y. Lee, and D. C. Su, "Refractive-index measurement based on the effects of total internal reflection and the uses of heterodyne interferometry," *Appl. Opt.* **36**, 2936-2939 (1997).
8. M. H. Chou, J. Y. Lee, and D. C. Su, "A method for measuring Brewster's angle by circularly polarized heterodyne interferometry," *J. Opt.* **29**, 349-353 (1998).

9. D. J. Caldwell ,and H. Eyring, “*Theory of Optical Activity*”, Wiley, New York, Ch. 1 (1971).
10. S. Huard, “*Polarization of Light*”, Wiley, New York, Ch.5 (1997).
11. M. P. Silverman, and J. Badoz, “Multiple reflection from isotropic chiral media and the enhancement of chiral asymmetry,” *J. Electromagn. Wave Appl.* **6**, 587-601 (1992).
12. S. E. Koomin, and D. C. Meredith, “*Computational Physics*,” Addison-Wesley, MA, Ch.2 (1990).
13. R. C. Weast (ed), “*CRC Handbook of Chemistry and Physics*,” Chemical Rubber, Boca Raton, 61st, ed., D227-270, E418 (1981).
14. M. H. Chiu, J. Y. Lee, and D. C. Su, “Complex refractive-index measurement based on Fresnel’s equations and the uses of heterodyne interferometry,” *Appl. Opt.* **38**, 4047-4052 (1999).

