

## 第一章 緒論

橢圓偏光術 (ellipsometry) 是一種測量介質對入射光與反射光的偏極態間的轉變，進而推算介質光學特性的方法，由於其有非破壞性的特性再加上電腦科技的提升增加了資料處理的速度，故已被廣泛應用於半導體薄膜的檢測[1]。橢圓偏光術依設置可分為三類：反射式橢圓偏光術 (Reflection Ellipsometry)、穿透式橢圓偏光術 (Transmission Ellipsometry) 以及散射式橢圓偏光術 (Scattering Ellipsometry)，而運用橢圓偏光技術所發展出來的儀器即為橢圓儀 (Ellipsometer)，根據運作原理的不同，橢圓儀大致上可分為歸零式橢圓儀 (nulling ellipsometer) 與亮度式橢圓儀 (photometric ellipsometer)。歸零式橢圓儀發展較早，所以市面上所購得的多屬此型，主要是量取最小訊號，由於需尋找最暗點故需要一個極靈敏的偵測器。而 Meyer et. al. [2] 測量析光片 (analyzer) 各個方位角下的反射光強度的分佈，並利用最小平方法 (Least-Squares Method) 來推算物質的光學特性，本實驗室發展一[3] 僅測量析光片三個角度之光強度即可推算出物質之橢圓參數，並可量出偏光片的方位角誤差進而降低了因偏光片的方位角誤差所造成的影響。由於此三亮度量法所需資料處理有限，故曾用於影像式偏光儀 (CCD polarimetry) [4]。傳統的橢圓儀組成元件主要為偏光片 (Polarizer)、補償器

(compensator) 、待測樣品 (sample) 與析光片 (analyzer) ，稱為 PCSA 系統，若利用擴束系統與電荷耦合偵測器 CCD (charge coupled device) 收光，則可將系統提升為 PCSA 影像式橢圓儀。依照運用上方法的不同大致可將影像式橢圓儀區分為以下三種類別：

(1) 歸零式：目前市面上所生產的 Nanofilm (EP3) 影像式橢圓儀就是屬於此類型，其基本架構為 PCSA 或 PSCA ，主要是量取最小信號[5] ，此系統側向解析度最大可達  $2\ \mu\text{m}$  ，放大倍率為 50 倍。

(2) 歸零與亮度混合式：此類方法可分為兩種 (a) 其基礎是利用歸零式的方法找到參考平面之信號最小時 P 、 C 與 A 的方位角，利用待測樣品厚度的微小變化使得光強度增強的狀況下，可以得到樣品與參考面之間的相對厚度 [6-8] ，系統側向解析度為  $5\ \mu\text{m}$  。 (b) 入射角固定於基材（一般為水或玻璃）之布魯斯特角 (Brewster angle) ，除以可調變相位之液晶延遲器取代補償片外，其基本架構為 PCSA ，量測調變相位下微小光強度之變化，並利用 Drude 方程式推得待測物之厚度變化[9-12] ，此系統側向解析度最大可達  $2\ \mu\text{m}$  。

(3) 亮度式：此類方法主要都是以光強度振幅的變化做為量測的基本資料，其基本架構為 PSA 為主，以析光片旋轉調變入射光信號方式進行量測[13] ，系統側向解析度為  $3\ \mu\text{m}$  。

上述三種方法中，前兩種方法因需要尋找最小光亮度或量測微小亮度

之變化故主要缺點是量測速度慢，且需採用高靈敏度之 CCD 配合，而亮度式的方法需量測多個不同析光片下光強度的值，經富氏轉換或數據擬合以求橢圓偏光參數。由於所得資料過於龐大（以單點為例，一般須要 128 個亮度量測），造成運算上的困難且費時，非常不適合發展成影像式橢圓偏光儀。

本實驗室近年來利用傳統之三個亮度 PSA 架構橢圓偏光術，不管是針對實驗中光學元件的角度校正或是應用在光學常數的量測上，均已獲得不錯的結果[3, 4, 17, 18]。近年來材料科學的快速發展使得在光學常數以及材料相關參數的量取與探討更形重要，因此我們利用擴束系統與 CCD 取代傳統的光偵測器，將傳統 PSA 單點量測的架構延伸為對於二維表面上的研究。因為只需要量測三個角度之光強度分佈，不管是在量測速度還是資料處理上都可節省時間並有一定的精準度。由於在實驗過程中系統需旋轉偏光片會造成光束偏差 (Beam deviation)，造成入射角偏差[14]。除此之外，在橢圓偏光術量測系統中光學元件（偏光片與析光片）角度設定有偏差時會造成量測的誤差，因此如何克服入射角偏差問題與方位角的校正成為本論文研究重點之一，詳細內容將在第三章中加以討論。

在傳統的橢圓偏光量測中，一般光束之光強度是由光偵測器的單點信號量測，對於非均勻 (inhomogeneous, 如變折射率) 之材料的光

學參數是無法直接獲得，因此希望能從二維影像式的量測方法獲得進一步的資料，過去有許多學者[20-27]發展出各種方法來量測變折射率，我們利用影像式偏光量測 BK7 楔型玻璃的折射率的分佈，結果驗證了此三個亮度 PSA 影像式偏光量測方法有足夠的準確度來量取 GRIN Lens (gradient index lens) 的變折射率分佈。由於系統中偏光片與析光片之方位角誤差多少都會存在，在本研究中我們針對此誤差做了一個數值模擬，以便了解方位角誤差大小對量測結果的影響。量取 GRIN Lens 變折射率分佈時，我們亦可同時推得偏光片之方位角誤差  $\alpha$  分佈，除了可以判斷所量得的折射率的準確性，並可判斷平面的平整性，故可應用在非均勻平面材料的量測。傳統橢圓儀一般僅適用於研究平面材料之光學特性[1]，對於曲面結構的研究往往因為入射角的偏差而無法準確的量測，為了進一步研究入射角偏差對量測結果的影響，我們希望影像式橢圓偏光術除了能量測平面上材料之折射率外，且能夠量測到曲面上材料之表面形貌 (surface topography) 與折射率分佈，以便擴展本技術的應用範圍。利用水平面作為參考平面用來校正系統中偏光片方位角誤差  $\alpha$ ，再量測  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  的平面在不同傾斜角度下所得之  $\alpha$  分佈，從量測出來所得之結果，可以確定  $\alpha$  可用來量測樣品表面法線變化的方向，根據此結果可進一步的來觀察曲面結構對  $\alpha$  分佈的關係。以 BK7 平凸透鏡凸面做為量測樣

品，根據量測出來的  $\alpha$  分佈計算凸面之曲率半徑，並代入修正入射角偏差量來獲得正確的折射率分佈，詳細內容將在第四章中加以討論。

本論文主要分為五個章節，第一章為緒論，內容包括有關橢圓偏光術的應用背景說明，並扼要陳述研究動機。第二章主要來描述論文中所採用三個亮度 PSA 量測系統其架構與工作原理。第三章著重於 PSA 單點量測系統中偏光片與析光片之方位角之校正，並利用 PSA 二維影像的方法量得且校正因旋轉偏光片而造成入射角偏差量。第四章我們分別討論非均勻平面（變折射率）材料與非平面但均勻性材料之折射率之研究，除此之外我們透過量測偏光片之方位角偏差量  $\alpha$ ，可推出凸面的曲率半徑。第五章總結本論文所提出的重要論點與研究成效並提出 PSA 影像式橢圓偏光術之未來研究方向。

## 第二章 原理

### 2.1 橢圓偏極態理論：

偏極是橫波共有的一種性質。例如：電磁波和固體中的彈性波…等均具有這種性質。光波實質上就是電磁波亦是一種橫波，它的電場向量是與傳播方向垂直，而偏極即是指用一個電場向量來描述空間某一個固定點所觀測到的向量波隨時間變化的特性。一般都將光波的偏極（振）態定義為：電場方向隨時間在空間中畫出之軌跡。而由電場隨時間變化偏極的軌跡形狀可將光波的偏極態區分為線偏極光、圓偏極光以及橢圓偏極光。

描述光波的偏極態常用的數學表示方法有兩種：史托克向量 (Stokes vector) 和瓊斯向量 (Jones vector)。史托克向量為一  $4 \times 1$  矩陣，可用來描述具有包含部分偏極化光 (partially polarized light) 的任意光，能將圓座標及直角座標放在同一矩陣中。瓊斯向量是一  $2 \times 1$  的矩陣，簡單而易於說明，但只限用在純偏極化的電磁波且為一瞬間電場的振幅，如需量測則需算出其亮度，又不能將圓座標及直角座標放在同一矩陣中。

### 2.1.1 瓊斯向量

在這裡的電磁波以平面波為例子，假設光波沿  $z$  軸方向前進，則電場之振動方向將位於  $x$ - $y$  平面上，平面波的電場可寫成  $x, y$  的分量為

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{0x}(t)e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}; \\ E_y(z, t) &= E_{0y}(t)e^{i(kz - \omega t + \delta_y)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中  $E_{0x}(t)$  與  $E_{0y}(t)$  為瞬時的振幅 (instantaneous amplitudes)， $\delta_x$  與  $\delta_y$  為瞬時的相位 (instantaneous phase factors)， $\omega$  為角頻率 (angular frequency)。可將 (2.1) 式可改寫為

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_x e^{i(kz - \omega t)}; \\ E_y(z, t) &= E_y e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_y &= E_{0y} e^{i\delta_y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

由(2.2)式可看出  $E_x(z, t)$  和  $E_y(z, t)$  的不同點僅在於電場振幅  $E_x$  和  $E_y$  的部分，現在就討論  $E_x$  和  $E_y$  並將電磁波的電場表示為  $2 \times 1$  矩陣

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

則 (2.4) 式稱為瓊斯向量。一般而言瓊斯向量只能表示純偏極光，不能表示非偏振光或部份偏振光，但光波大部份均為部份偏振光，故需用史托克向量來代表。



## 2.1.2 史托克向量與穆勒矩陣

由於史托克向量係一量測值，故在這裡的電磁波仍以一往  $z$  方向行進的平面波的實值來表示，平面波的電場可寫成：

$$E_x(z, t) = E_{0x}(t) \cos[kz - \omega t + \delta_x(t)] \quad (2.5)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y}(t) \cos[kz - \omega t + \delta_y(t)] \quad (2.6)$$

利用移項和三角函數的運算可將 (2.5) 式及 (2.6) 式展開為

$$\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} = \cos(\omega t - kz) \cos(\delta_x) - \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_x) \quad (2.7)$$

$$\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz) \cos(\delta_y) - \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y) \quad (2.8)$$

將 (2.7) 及 (2.8) 合併計算可得

$$\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \sin(\delta_y) - \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \sin(\delta_x) = \cos(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.9)$$

$$\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos(\delta_y) - \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \cos(\delta_x) = \sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2.10)$$

將 (2.9) 及 (2.10) 式合併可得

$$\left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (2.11)$$

其中

$$\delta = \delta_x - \delta_y$$

方程式 (2.11) 為橢圓方程式，也就是說在某平面電場在一週的傳播軌跡為橢圓形。一般來說，橢圓的長軸和短軸並不是在  $x$  軸和  $y$  軸上；所以必須藉由座標轉換才可將 (2.11) 式化成標準的橢圓方程式。如圖 2-1 所示，將座標  $(x,y)$  旋轉  $\theta$  角，則新座標  $(x',y')$  為

$$E_x = E'_x \cos \theta - E'_y \sin \theta \quad (2.12)$$

$$E_y = E'_x \sin \theta + E'_y \cos \theta \quad (2.13)$$

將 (2.12) 和 (2.13) 代入 (2.11) 式中計算可得[15]



$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2.14)$$

其中

$$a^2 = E_{ox}^2 \cos^2 \theta + E_{oy}^2 \sin^2 \theta + 2E_{ox}E_{oy} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \quad (2.15)$$

$$b^2 = E_{ox}^2 \sin^2 \theta + E_{oy}^2 \cos^2 \theta - 2E_{ox}E_{oy} \cos \delta \cos \theta \sin \theta \quad (2.16)$$

與

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{ox}E_{oy} \cos \delta}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad (2.17)$$

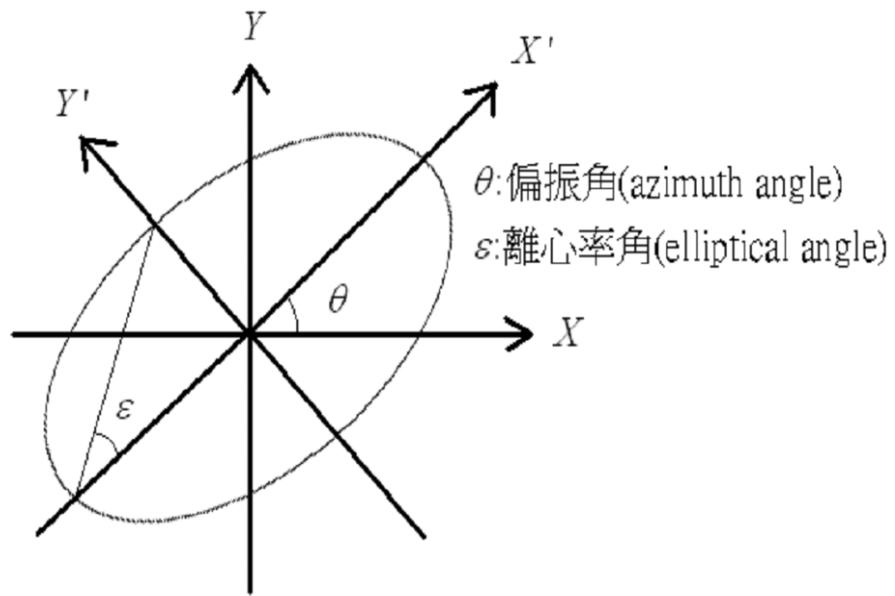


圖 2-1：橢圓偏振光示意圖

由 (2.11) 式可知光波在任一點之電場分布為橢圓型故稱橢圓偏振形式，接下來介紹幾種橢圓偏極的特例：

- (1) 當  $\delta = 0$  或  $\delta = \pm\pi$  時，電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光（圖 2-2）。
- (2) 當  $\delta = \frac{\pi}{2}$  並且  $x$  與  $y$  方向之振幅相等時，電場在  $x$ - $y$  平面的振幅相同，稱為圓偏振光（圖 2-3）。

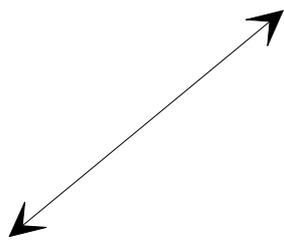


圖 2-2：線偏振光示意圖

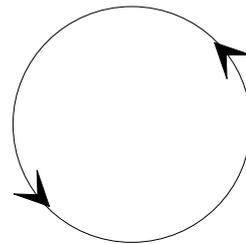


圖 2-3：圓偏振光示意圖

由於 (2.11) 式中的電場均為瞬時電場，而瞬時的電場是無法被量測到，因此必須將 (2.11) 式做時間平均，此處對時間平均的符號表示為  $\langle \rangle$ ，所以 (2.11) 式寫成

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.18)$$

代入

$$\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t)E_j(t)dt \right] \quad , i, j = xy \quad (2.19)$$

並乘上  $4E_{0x}^2E_{0y}^2$ ，即可以得到

$$\begin{aligned} & 4E_{0y}^2 \langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2 \langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x}E_{0y} \langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos \delta \\ & = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

由 (2.5)，(2.6) 兩式利用 (2.19) 式求對時間平均可得到

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x}^2 \quad (2.21a)$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0y}^2 \quad (2.21b)$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.21c)$$

將 (2.21a)、(2.21b) 與 (2.21c) 代入 (2.20) 得到

$$2E_{0x}^2E_{0y}^2 + 2E_{0x}^2E_{0y}^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.22)$$

若以光強度來表示最後的結果，則 (2.22) 式可改寫成

$$\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)^2 - \left(E_{0x}^2 - E_{0y}^2\right)^2 - \left(2E_{0x}E_{0y} \cos \delta\right)^2 = \left(2E_{0x}E_{0y} \sin \delta\right)^2 \quad (2.23)$$

現在可將 (2.23) 式中量寫成

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.24a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.24b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.24c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.24d)$$

則 (2.23) 式表示為

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.25)$$

(2.24) 式中的四個方程式代表平面波的史托克參數 (Stokes parameters)，至於其分別代表的意義是： $S_0$  是光波的總亮度 (total intensity of the light)， $S_1$  是表示光的水平線偏振與垂直線偏振的亮度差， $S_2$  是表示光沿  $45^\circ$  方向的線偏振與沿  $-45^\circ$  方向的線偏振的亮度差， $S_3$  是表示右旋偏振與左旋偏振的亮度差。

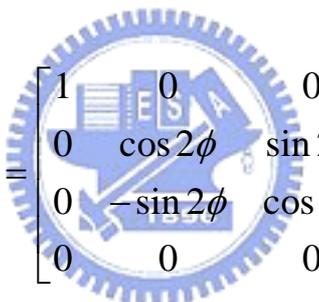
如同描述電磁波偏極狀態的方法，描述光學元件對電磁波傳導可用穆勒矩陣以用來描述。由於史托克參數有四個，故穆勒矩陣是一個  $4 \times 4$  階的矩陣，可用來表示光學元件的傳導矩陣。當一入射光進入偏光元件時，元件本身所帶有的光學特性會改變入射光的偏振態，可利

用穆勒矩陣 ( $M$ ) 來結合入射光 ( $S$ ) 史托克向量和出射光史托克向量 ( $S'$ ) 的關係

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

以下列舉常用到的矩陣：

(1) 旋轉矩陣 (假設旋轉  $\phi$  度)



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & \sin 2\phi & 0 \\ 0 & -\sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

(2) 偏光片透射軸 (transmission axis) 與入射面所夾之方位角為  $P$  度時

$$M_{polarizer}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & -\sin 2P & 0 \\ 0 & \sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ 0 & -\sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可推得：

$$M_{polarizer}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

當光路徑中有數個偏光元件，則出射光的史托克向量 ( $S_{out}$ ) 等於各元件的穆勒矩陣 ( $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3 \dots$ ) 依序作用於入射光史托克向量 ( $S_{in}$ ) 的結果：

$$S_{out} = (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots) S_{in} \quad (2.29)$$



## 2.2 橢圓參數 $\Psi$ 與 $\Delta$ 之定義：

根據馬克斯威爾方程式 (Maxwell equations) 和介面條件 (Boundary conditions) 可導出介質表面的反射係數及穿透係數[15]為

$$r_p = \frac{N_1 \cos \theta_0 - N_0 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_0 + N_0 \cos \theta_1} \quad (2.30a)$$

$$r_s = \frac{N_0 \cos \theta_0 - N_1 \cos \theta_1}{N_0 \cos \theta_0 + N_1 \cos \theta_1} \quad (2.30b)$$

$$t_p = \frac{2N_0 \cos \theta_0}{N_1 \cos \theta_0 + N_0 \cos \theta_1} \quad (2.30c)$$

$$t_s = \frac{2N_0 \cos \theta_0}{N_0 \cos \theta_0 + N_1 \cos \theta_1} \quad (2.30d)$$

其中

$r_p$ ：平行入射面方向之反射係數

$r_s$ ：垂直入射面方向之反射係數

$t_p$ ：平行入射面方向之穿透係數

$t_s$ ：垂直入射面方向之穿透係數

$N_0$ ：入射前介質之折射率

$N_1$ ：入射後介質之折射率

$\theta_0$ ：入射角

$\theta_1$ ：折射角

橢圓參數則定為平行入射面的反射率與垂直入射面的反射率之比

$$\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} \quad (2.31)$$

又平行入射面的反射率與垂直入射面的反射率之比可定為

$$r_p = |r_p| e^{i\delta_p}, \quad r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$$

(2.31) 式可改寫成

$$\tan \Psi = |r_p| / |r_s|, \quad \Delta = \delta_p - \delta_s$$

其中  $\tan \Psi$  為反射光在平行入射面與垂直入射面之振幅大小比值； $\Delta$  為反射光在平行入射面與垂直入射面之相位差。這兩參數被命名為橢圓參數 (ellipsometric parameters)，如何藉此參數轉換為光學參數則須先了解偏極光經介質反射時所遵循的物理模式即可推算，以下僅就

(1) 單次反射的塊狀物 (bulk medium) (2) 具多次反射型態的薄膜 (thin film) 兩種模式加以討論。

(1) 塊狀物：單次反射型態

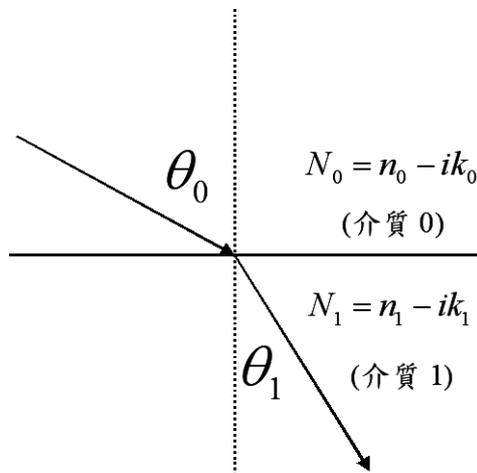


圖 2-4：單次反射型示意圖

當平面光波照射在各向同性 (isotropic) 、具吸收的介質 (如金屬或半導體) 中，其折射率 (complex refractive index) 應為複數  $N$  ，故其表示法為  $N = n - ik$  ，其中  $n$  為該介質的折射率 (index of refraction) ， $k$  為介質的消光係數 (extinction coefficient) ，如圖 2-4 ，若傾斜入射的平面光波在複數折射率分別為  $N_0$  與  $N_1$  且各向同性均勻介質 0 與 1 間平面界面處的反射和透射，其中折射角  $\theta_1$  可以由 Snell's law 求得

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{N_0}{N_1} \sin \theta_0\right)^2} \quad (2.32)$$

如果介質 0 與 1 都是透明的，則  $N_0$  和  $N_1$  都是實數，然而如果任一種介質或兩種介質都有吸收為吸收介質，此時 (2.32) 式仍然有效。利用量測反射光的偏振態來求出 P 偏振與 S 偏振的費涅爾反射係數的比值  $\rho$  為

$$\rho = \frac{r_p}{r_s};$$

又稱為橢圓偏光參數，故

$$\rho = \tan \Psi e^{i\Delta}$$

利用方程式 (2.30a) 、(2.30b) 與 (2.32) 可以推得

$$N_1 = N_0 \tan \theta_0 \left[ 1 - \frac{4\rho}{(1+\rho)^2} \sin^2 \theta_0 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

如果已知介質 0 的折射率，並能在入射角為  $\theta_0$  時量測得比值  $\rho$ ，則能得到介質 1 的複數折射率（詳細運算程式見附錄 A）。

(2) 薄膜型：多次反射型態

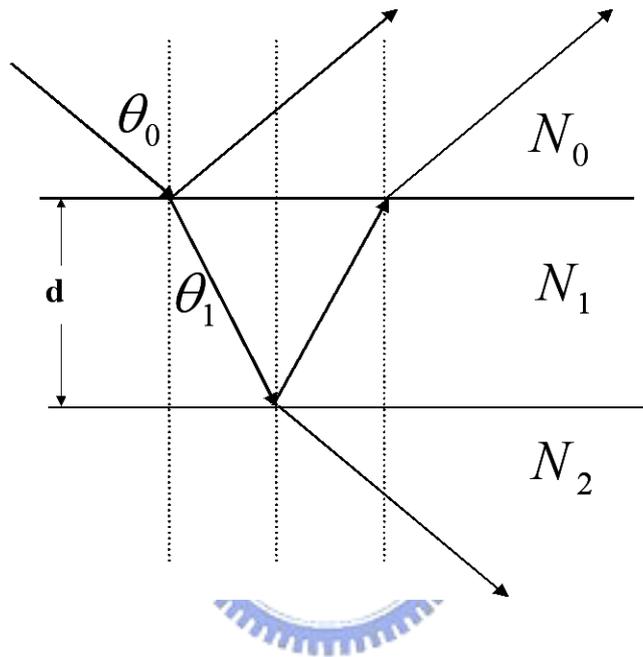


圖 2-5：多次反射型示意圖

在橢圓偏光量測中最常使用的一種情形正是薄膜量測，此種型態有多次反射情形發生，假設第一道反射光和第二道反射光的相位差為  $2\gamma$ ，同理第二道反射光和第三道反射光的相位差也為  $2\gamma$ ，所以第  $n$  道反射光和第  $n+1$  道反射光的相位差都為  $2\gamma$ 。則反射係數為：

$$r_p = r_{01p} + t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}r_{12p}^2e^{-i4\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}^2r_{12p}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.34a)$$

$$r_s = r_{01s} + t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}r_{12s}^2e^{-i4\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}^2r_{12s}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.34b)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{ijp} &= \frac{N_j \cos \theta_i - N_i \cos \theta_j}{N_j \cos \theta_i + N_i \cos \theta_j} \\ r_{ijs} &= \frac{N_i \cos \theta_i - N_j \cos \theta_j}{N_i \cos \theta_i + N_j \cos \theta_j} \\ t_{ijp} &= \frac{2N_i \cos \theta_i}{N_j \cos \theta_i + N_i \cos \theta_j} \\ t_{ijs} &= \frac{2N_i \cos \theta_i}{N_i \cos \theta_i + N_j \cos \theta_j} \\ \gamma &= \frac{2\pi d N_1}{\lambda} \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$d$  : 薄膜厚度

$\lambda$  : 光的波長

$r_{ijp}$  : 光線從介質  $i$  入射到介質  $j$  , 平行入射面方向之反射係數

$r_{ijs}$  : 光線從介質  $i$  入射到介質  $j$  , 垂直入射面方向之反射係數

$t_{ijp}$  : 光線從介質  $i$  入射到介質  $j$  , 平行入射面方向之穿透係數

$t_{ijs}$  : 光線從介質  $i$  入射到介質  $j$  , 垂直入射面方向之穿透係數

反射端所接收總反射係數為

$$\begin{aligned} r_p &= r_{01p} + \frac{t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma}}{1 - r_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma}} \\ r_s &= r_{01s} + \frac{t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma}}{1 - r_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma}} \end{aligned}$$

又因

$$r_{10} = -r_{10}, \quad t_{01}t_{10} = 1 - r_{01}^2$$

可得

$$\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{r_{01p} + r_{12p} e^{-i2\gamma}}{1 + r_{01p} r_{12p} e^{-i2\gamma}} \frac{1 + r_{01s} r_{12s} e^{-i2\gamma}}{r_{01s} + r_{12s} e^{-i2\gamma}} \quad (2.36)$$

由方程式 (2.35) 、 (2.36) 可知橢圓偏光參數 ( $\Psi$ 、 $\Delta$ ) 與物理參數 ( $N_0$ 、 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $\theta_0$ 、 $d$ ) 之函數關係。只要知道橢圓參數、入射角以及各層介質的折射率就可以反推薄膜的厚度 (詳細程式見附錄 B)。



### 2.3 PSA 橢圓偏光術：

若各向同性介質之橢圓參數分別為  $\Psi$  與  $\Delta$ ，則其穆勒矩陣可寫為[1]

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \Psi & -1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \Psi & 1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \Psi \cos \Delta & 2 \tan \Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \Psi \sin \Delta & 2 \tan \Psi \cos \Delta \end{bmatrix}$$

當線性偏振雷射光 ( $S_i$ ) 經過偏振片 (P)、樣品 (S)、析光片 (A) 而構成 PSA 橢圓偏光量測系統後，出射光 ( $S_f$ ) 之矩陣乘積表示法

$$S_f = M_a(A) \cdot M_s(\Psi, \Delta) \cdot M_p(P) \cdot S_i$$

可由  $S_f$  之第一項  $S_0$  (代表強度 I) 得

$$I(P, A) = I_0(\sin^2 P \cdot \sin^2 A + \tan^2 \Psi \cdot \cos^2 P \cdot \cos^2 A + 0.5 \tan \Psi \cdot \cos \Delta \cdot \sin 2P \cdot \sin 2A) \quad (2.37)$$

其中 P, A 分別為偏光片與析光片的方位角，由於亮度僅有三個未知數，即  $\tan \Psi$ 、 $\cos \Delta$  及  $I_0$ ，故只需量測三個方位角的亮度即可推算以上的未知數。Meyer et.al. 將  $P=45^\circ$  的線偏極光照射在金屬上，並以極座標表示 (如圖 2-6)，則反射光之強度分佈形成類橢圓型，其數學模式可寫成下式[2]

$$I(A) = \frac{L}{2} \cos^2(A - \theta) + \frac{T}{2} \sin^2(A - \theta). \quad (2.38)$$

其中  $L$  與  $T$  為長軸與短軸， $\theta$  為偏振角。

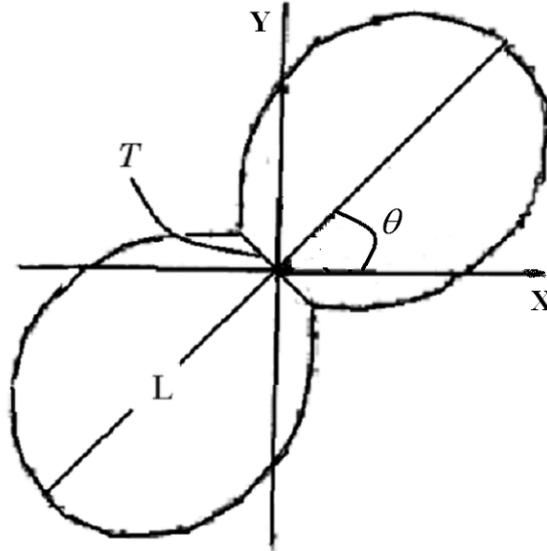


圖 2-6：反射光之強度分佈圖

比較 (2.37) 與 (2.38) 式展開式及三角函數關係可得[16]

$$\tan^2 \Psi = \frac{1 - \frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta}{1 + \frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta} \quad (2.39)$$

$$\tan 2\theta = -\cos \Delta \tan 2\Psi. \quad (2.40)$$

其中當  $A=0$ 、 $60$  與  $120^\circ$  三個角度下之亮度分列如下

$$I(0) = 0.5[(L+T) + (L-T)\cos 2\theta]$$

$$I(60) = 0.5[(L+T) + (L-T)\cos(120-2\theta)]$$

$$I(120) = 0.5[(L+T) + (L-T)\cos(240-2\theta)]$$

由以上三式可推導出[3, 16]

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}[I(60) - I(120)]}{2I(0) - I(60) - I(120)} \quad (2.41)$$

$$\frac{L-T}{L+T} \cos 2\theta = \frac{2I(0) - I(60) - I(120)}{I(0) + I(60) + I(120)}. \quad (2.42)$$

由 (2.42) 式代入 (2.39) 式可推出  $\Psi$  值，由 (2.41) 式與  $\Psi$  值代入 (2.40) 即可得  $\Delta$  值。



## 2.4 偏光片與析光片方位角具誤差下之優化法：

若假設偏光片 (P) 與析光片 (A) 均產生一微小偏差量  $\alpha$  與  $\beta$ ，則  $P = 45^\circ + \alpha$ ， $A = A + \beta$ ；故 (2.37) 與 (2.38) 兩式可分別改寫成

$$I(\alpha, A + \beta) = 0.5I_0[\sin^2(A + \beta) + \tan^2 \Psi \cdot \cos^2(A + \beta) + (\sin^2(A + \beta) - \tan^2 \Psi \cdot \cos^2(A + \beta)) \cdot \sin 2\alpha + \tan \Psi \cdot \cos \Delta \cdot \sin 2(A + \beta) \cdot \cos 2\alpha] \quad (2.43)$$

$$I(A + \beta) = L \cos^2[(A + \beta) - \theta] + T \sin^2[(A + \beta) - \theta] \quad (2.44)$$

比較 (2.43) 與 (2.44) 式展開式及三角函數關係可得

$$\tan^2 \Psi = \frac{(1 + \sin 2\alpha) \cdot (1 + RB)}{(1 - \sin 2\alpha) \cdot (1 - RB)} \quad (2.45)$$

其中  $RB = \frac{L - T}{L + T} \cos 2(\theta - \beta)$ 。

同理，當  $P = -45^\circ + \alpha$  可得

$$\tan^2 \Psi = \frac{(1 - \sin 2\alpha) \cdot (1 + RB')}{(1 + \sin 2\alpha) \cdot (1 - RB')} \quad (2.46)$$

其中  $RB' = \frac{L' - T'}{L' + T'} \cos 2(\theta' - \beta)$ 。由 (2.45) 與 (2.46) 兩式相乘得

$$\tan \Psi = \left[ \frac{(1 + RB) \cdot (1 + RB')}{(1 - RB) \cdot (1 - RB')} \right]^{1/4} \quad (2.47)$$

可獲得一組不受到偏光片方位角偏差  $\alpha$  所影響的橢圓參數  $\Psi$  。

當  $\alpha = 0$  ,  $\beta = 0$  時 :

$$\tan 2\theta = -\tan 2\Psi \cdot \cos \Delta \quad (2.48)$$

$$\tan 2\theta' = \tan 2\Psi \cdot \cos \Delta \quad (2.49)$$

由式 (2.48) 與 (2.49) 可知 :  $\theta + \theta' = 180^\circ$  。

當  $\alpha \neq 0$  與  $\beta \neq 0$  時從 (2.43) 與 (2.44) 兩式可推得:

$$\tan 2(\theta - \beta) = -\tan 2\Psi \cdot \cos \Delta \cdot \cos 2\alpha \cdot \left( \frac{\cos 2\Psi}{\cos 2\Psi + \sin 2\alpha} \right) \quad (2.50)$$

$$\tan 2(\theta' - \beta) = \tan 2\Psi \cdot \cos \Delta \cdot \cos 2\alpha \cdot \left( \frac{\cos 2\Psi}{\cos 2\Psi - \sin 2\alpha} \right) \quad (2.51)$$

由式 (2.50) 與 (2.51) 可知 :  $\theta + \theta' - 2\beta \neq 180^\circ$

取  $\bar{\theta} = [180^\circ - (\theta' - \beta) + (\theta - \beta)] / 2$  代入 (2.40) 式可得

$$\cos \Delta = \frac{-\tan 2\bar{\theta}}{\tan 2\Psi} \quad (2.52)$$

可藉由以上之優化過程推算出較精確之橢圓參數  $\Psi$  與  $\Delta$ 。

若將 (2.45) 與 (2.46) 兩式相除可得

$$\frac{(1 - \sin 2\alpha)}{(1 + \sin 2\alpha)} = \sqrt{\frac{(1 + RB)(1 - RB')}{(1 - RB)(1 + RB')}} \quad (2.53)$$

令  $\sqrt{\frac{(1 + RB)(1 - RB')}{(1 - RB)(1 + RB')}} = g$  且將上式整理化簡得

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{1 - g}{1 + g} \right) \quad (2.54)$$

利用反算方位角偏差  $\alpha$  與已校正的方位角偏差  $\alpha$  比較，可以用來判斷此實驗數據的正確與否（詳細程式見附錄 C）。



### 第三章 系統校正

在 PSA 量測系統中，因為只需要量測三個角度之光強度分佈，不管是在量測速度還是資料處理上都可節省時間並有一定的精準度。由於在實驗過程中系統需旋轉偏光片，以優化橢圓偏光參數的量測值，但此旋轉偏光片會造成光束偏差，因此我們選擇一楔型玻璃上的油跡當作面上的參考點，匹配非對稱油跡的重心來修正光束偏差。除此之外，在橢圓偏光術量測系統中光學元件（偏光片與析光片）角度設定有偏差時會造成量測的誤差，利用光強度比例 (Intensity Ratio) 技術以內插法來求得光學元件方位角偏差量。最後再以三個亮度 PSA 影像式橢圓儀來量測一標準片的薄膜厚度並與精密儀器中心 Sopra 橢圓儀之量測結果做比較。

### 3.1 偏光片與析光片之方位角校正

#### 3.1.1 粗調

如果入射角為布魯斯特角  $\theta_B$ ，即  $\theta_B = \tan^{-1}(n_1/n_o)$ ，此時平行入射面方向之反射率為零。運用此原理，若有一不知透射軸方向的偏光片，可找到光經由一已知折射率  $n_1$  之樣品以布魯斯特角反射後通過偏光片所測得之光強度最弱之位置，便是此偏光片之穿透軸（如圖 3-1）。

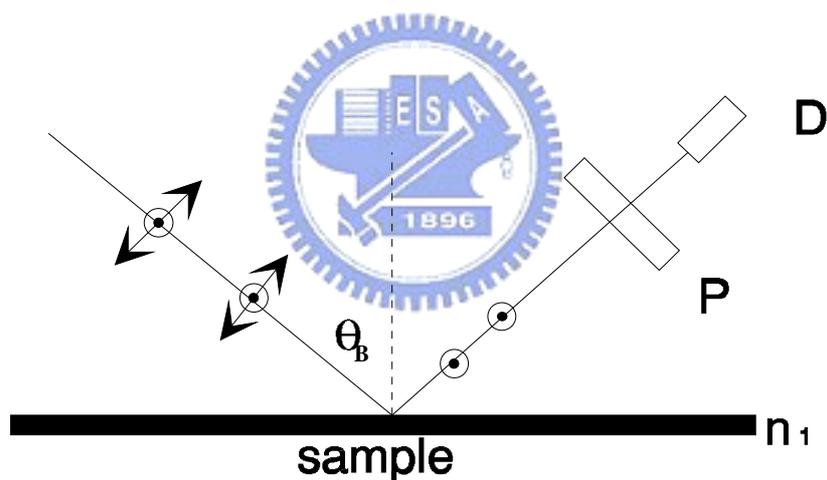


圖 3-1：測量偏光片穿透軸之架構圖

#### 3.1.2 微調

假設偏光片與析光片方位角偏差分別為  $\alpha$  與  $\beta$ ，利用 (2.37) 式可得兩亮度比為[17]

$$E = \frac{I(45^\circ + \alpha, \beta)}{I(45^\circ + \alpha, 90^\circ + \beta)}; \quad (3.1)$$

$$F = \frac{I(-45^\circ + \alpha, \beta)}{I(-45^\circ + \alpha, 90^\circ + \beta)}.$$

當  $\alpha, \beta < 10^\circ$ ，則由 (3.1) 式一階近似可寫成

$$E \approx \tan^2 \Psi - 2(2 \tan^2 \Psi \cdot \alpha - \sec^2 \Psi \cdot \tan \Psi \cdot \cos \Delta \cdot \beta) \quad (3.2)$$

$$F \approx \tan^2 \Psi + 2(2 \tan^2 \Psi \cdot \alpha - \sec^2 \Psi \cdot \tan \Psi \cdot \cos \Delta \cdot \beta) \quad (3.3)$$

由 (3.2) 與 (3.3) 式可知 E、F 均與  $\alpha$  和  $\beta$  成線性關係，當  $\beta$  固定在  $\beta_i$  時，可看出 E 與 F 對  $\alpha$  呈線性關係且斜率相反。當  $2 \cdot \tan^2 \Psi \cdot \alpha - \sec^2 \Psi \cdot \tan \Psi \cdot \cos \Delta \cdot \beta = 0$  時  $E = F = \tan^2 \Psi$ 。

### 3.1.3 方位角校正之實驗步驟

以 PSA 系統裝置 (圖 3-2) 來說明：

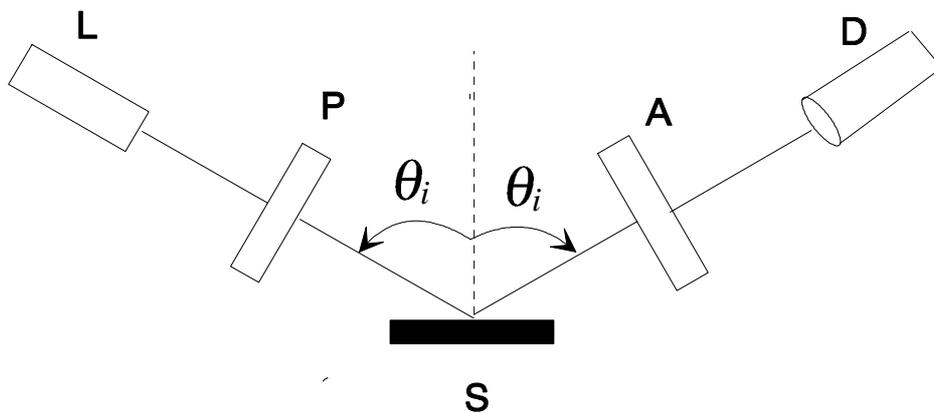


圖 3-2：PSA 系統實驗裝置圖

實驗基本設置為：雷射光源 (Melles Griot He-Ne laser 1 mw) ，偏光片及析光片 (Melles Griot 03FPG007 sheet polarizer of extinction ratio  $10^{-4}$ ) ，及光偵測器 (Newport 818-SL) 。本實驗裝置 (圖 3-2) 為 PSA 亮度式橢圓儀，當光源輸出一光強度後，通過偏光片 (P) ，經由樣品 (S) ，以入射角 (  $45^\circ$  或  $70^\circ$  ) 入射，其反射光通過析光片 (A) 進入偵測器內，所偵測到的訊號以供電腦處理。以厚度 105 nm  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  薄膜為樣品，當光通過偏光片後在樣品上以反射角  $45^\circ$  反射後通過析光片進入偵測器，此時將析光片 A 固定於  $0^\circ$  ，分別讓偏光片從  $40^\circ$  轉到  $50^\circ$  與  $-50^\circ$  轉到  $-40^\circ$  ，每  $1^\circ$  取一亮度值，再將 A 轉至  $90^\circ$  ，同樣讓偏光片從  $40^\circ$  轉到  $50^\circ$  與  $-50^\circ$  轉到  $-40^\circ$  每  $1^\circ$  取一亮度值即完成第一步。此時再將 A 由  $89^\circ$  轉至  $91^\circ$  每  $1^\circ$  重複上述第一步驟，如此即完成在入射角等於  $45^\circ$  的部份。接下來將入射角調  $70^\circ$  ，繼續執行與在入射角為  $45^\circ$  時所做的實驗步驟，最後以內插法可推算出所須微調角度，並將偏光片與析光片調整至正確位置。表 1 為  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  薄膜在入射角分別為  $45^\circ$  與  $70^\circ$  下相對於  $\beta = -1^\circ$  ，  $\beta = 0^\circ$  及  $\beta = 1^\circ$  所測得之  $\alpha$  值，(圖 3-3) 為  $\alpha$  對  $\beta$  在兩入射角下在零點間之線性關係，利用內插法可得其交點  $(-0.08, 0.03)$  ，此即為所需校正之角度。

Sample: SiO <sub>2</sub> /Si	$\beta = -1^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 1^\circ$
入射角45° 所得 $\alpha$	0.98	0.01	-1.15
入射角70° 所得 $\alpha$	-0.52	0.05	0.71

表 1：不同入射角下所量測之方位角偏差結果

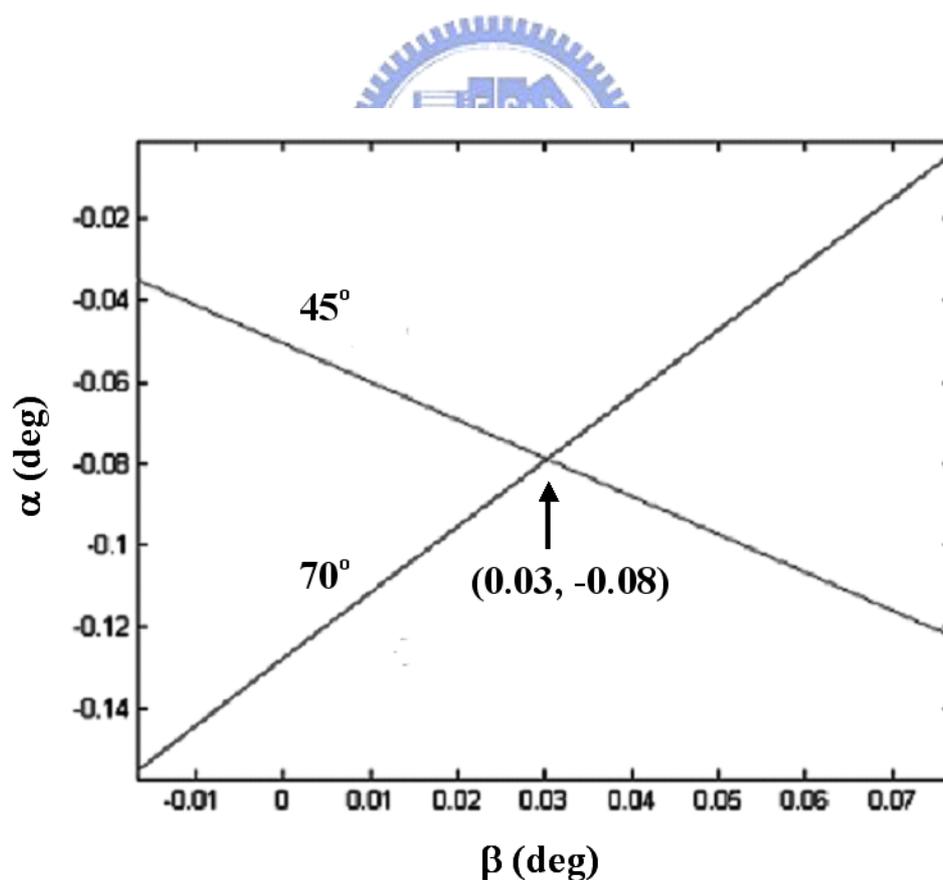


圖 3-3：不同入射角下所量測之方位角偏差圖

### 3.2 旋轉偏光片所造成入射角偏差之校正

如果光學元件的平面不平整時，則光束通過該元件透射出來時便會造成光束偏差[14]，因此在橢圓偏光量測時，旋轉偏光片會有入射角的偏差的現象而造成測量上的誤差，為了校正此偏差，我們量測玻璃上微小凸起且非對稱油跡（圖 3-4）並使用擴束系統將光點放大並由電荷耦合器取像，分別量測在偏光片方位角  $P = 45^\circ$  與  $P = -45^\circ$  之橢圓參數  $\Delta$ ，我們比較在不同偏光片方位角下  $\Delta$  的變化進而算出入射角偏差量。現在以 PSA 影像式橢圓儀實驗架構以（圖 3-5）來做說明，雷射光垂直入射偏光片 P（旋轉角度  $45^\circ$ ）後以  $70^\circ$  入射到樣品為楔型玻璃上的油點後反射進入析光片 A（析光片旋轉方位角  $0^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $120^\circ$ ）經擴束系統放大由電荷耦合偵測器（CCD，Starlight MX516，16 bit）取像計算出  $\Delta$ ；再旋轉偏光片方位角為  $-45^\circ$  並重複上述步驟計算出  $\Delta'$ 。比較最大  $\Delta$  及  $\Delta'$  位置的偏移以求出偏光片由  $P = 45^\circ$  到  $P = -45^\circ$  光點的偏移。實驗基本設置均如前除了多加一放大率為 10 倍的擴束器外並將偵測器換成電荷耦合偵測器以達二維的量測。由（圖 3-6）可知，當  $P = 45^\circ$  時橢圓參數最大  $\Delta$  的  $(x,y)$  位置在  $(73,71)$  可對應  $P = -45^\circ$  時橢圓參數最大  $\Delta'$  的  $(x',y')$  位置在  $(65,71)$ 。可知當偏光片旋轉時，光點位置往負 x 方向移動 8 個像素 (pixel)。利用式 (2.53) 可反推出偏光片方位

角偏差  $\alpha$  的整個分佈情形，從（圖 3-7）中可知，雷射光點經擴束系統放大後在電荷耦合偵測器上所能運算的範圍為 100 個像素。由於雷射光點大小為 1.5 mm 因此可以推出在 10 倍放大下，PSA 影像式橢圓儀的側向解析度為  $15\ \mu\text{m}$ ，量測反射光點到毛玻璃的距離為 20 cm，利用三角函數計算我們可以求出入射角偏移量為  $0.041^\circ$ ，所測出的入射角偏差也與先前所量的結果[18]入射角偏移量  $0.06^\circ \pm 0.02^\circ$  相近。

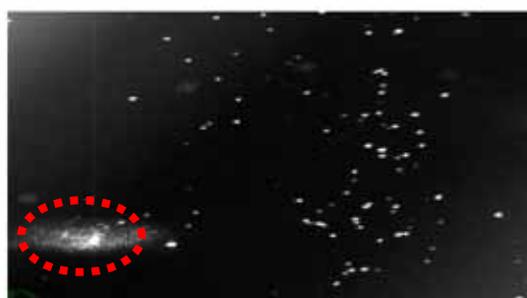


圖 3-4：楔型玻璃上的非對稱油跡

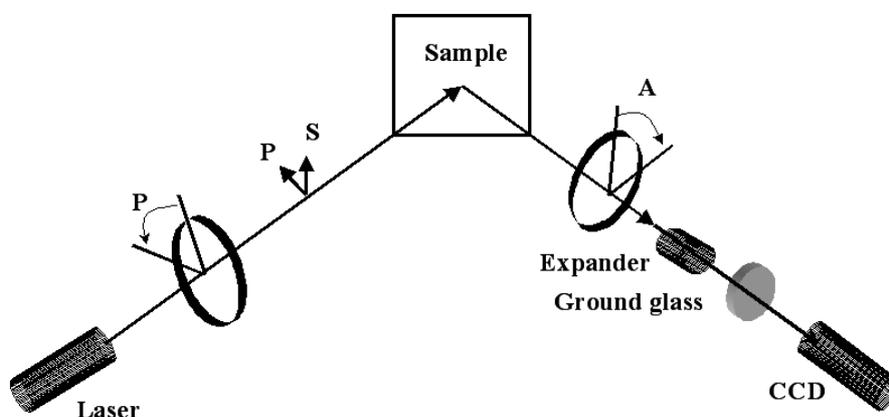


圖 3-5：PSA 影像式橢圓儀實驗裝置圖

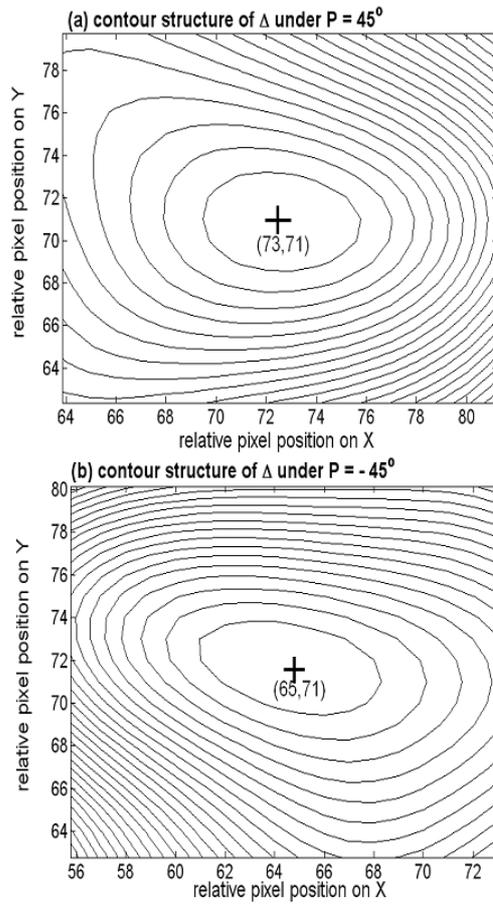


圖 3-6：旋轉偏光片後橢圓參數  $\Delta$  的分佈圖

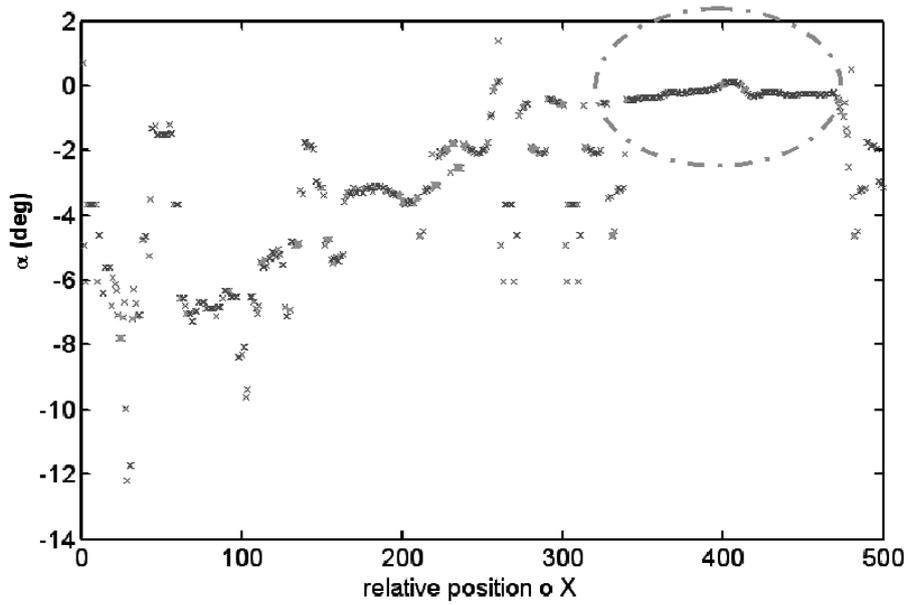


圖 3-7：雷射光點在電荷耦合偵測器上的有效工作範圍

### 3.3 PSA 影像式橢圓偏光術之薄膜量測

經過先前之光學元件方位角偏差校正與入射角偏差校正，為了可確定三個亮度 PSA 影像式橢圓偏光量測系統對薄膜厚度量測的準確性，因此選取標準厚度校正片為樣品（圖 3-8）進行量測，所量測的樣品為標示 2 的位置。將偏光片方位角分別設定在  $P = 45^\circ$  與  $P = -45^\circ$ ，旋轉析光片方位角度，經 10 倍放大擴束系統以電荷耦合偵測器取  $A = 0$ 、 $60$ 、 $120^\circ$  的亮度圖，利用 2.4 節所介紹的運算原理可得優化後的橢圓參數  $\Psi$  與  $\Delta$ ，將樣品的折射率代入程式（附錄 B）則可推出薄膜厚度為  $296 \pm 3 \text{ \AA}$ （如圖 3-9）。將相同的樣品以精密儀器中心 Sopra 橢圓儀量測後所得之厚度結果  $297 \pm 5 \text{ \AA}$ （如表 2），此結果可以確認 PSA 影像式橢圓偏光術在平面量測的準確度。再將所量測到的橢圓參數  $\Psi$  代入 (2.52) 與 (2.53) 式去反推偏光片方位角偏差  $\alpha$ （圖 3-10），可以驗證之前以光強度比例技術用內插法來求得光學元件方位角偏差量  $\alpha$  之結果相符合。



圖 3-8：標準校正片

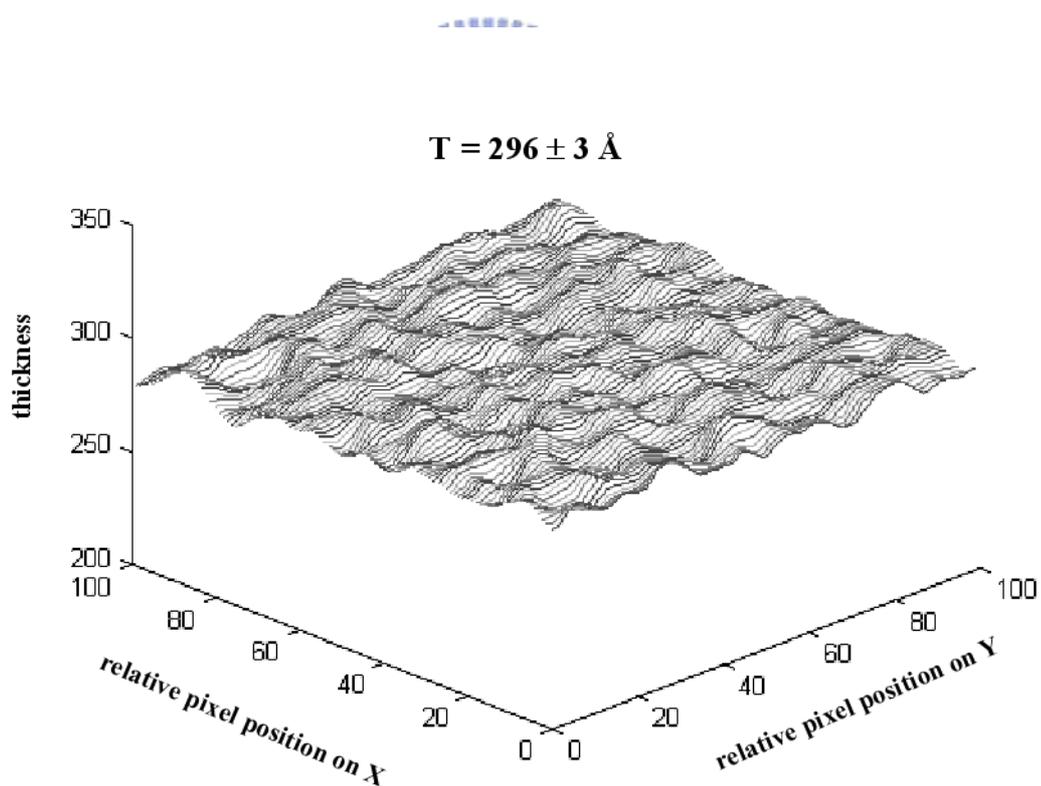


圖 3-9：薄膜厚度分佈圖

**SOPRA-ES4G:**  
**Standard Deviation.: 6.578E-4**  
**Iteration.....: 2**  
**Angle (deg) ....: 75.408011 ± 0.000429**  
**Thick (μm) ....: 0.029715 ± 0.000584**  
**A....: 1.422114 ± 0.025833**  
**B....: 3.0157E-3 ± 3.1490E-3**  
**C....: 6.9679E-5 ± 2.2275E-4**

表 2 : Sopra 橢圓儀量測之結果

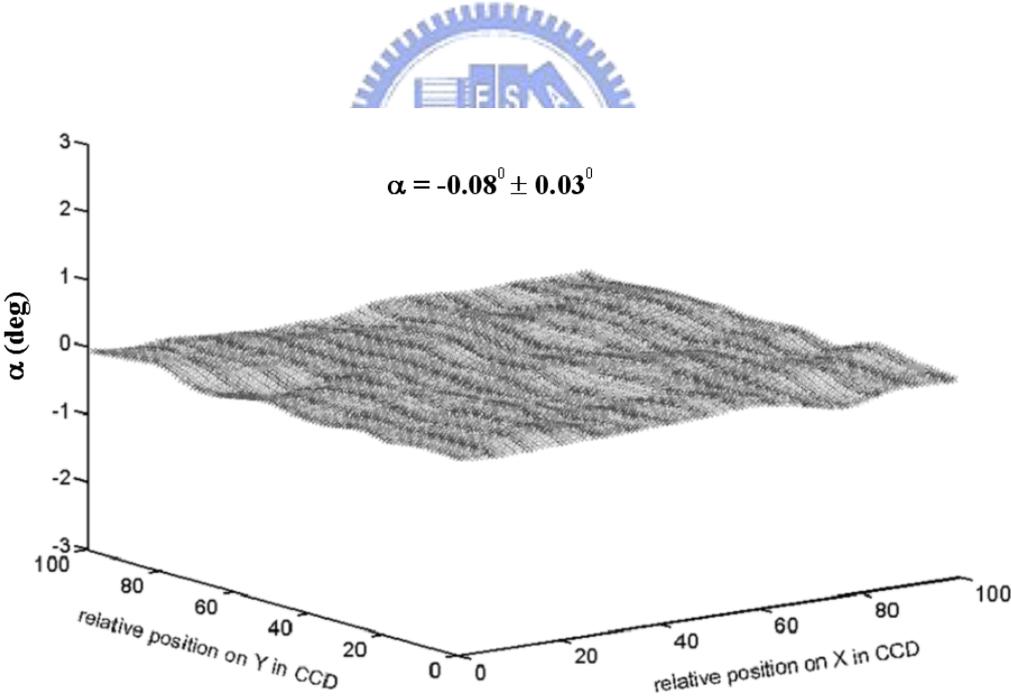


圖 3-10 : 偏光片方位角偏差分佈圖

## 第四章 非均勻平面與均勻曲面材料之研究

近年來材料科學的快速發展使得在光學常數以及材料相關參數的量取與探討更形重要，因此我們利用擴束系統與電荷耦合器取代傳統的光偵測器，將傳統 PSA 單點量測的架構延伸為對於二維表面上的研究與應用。我們先針對影像式偏光量測 BK7 楔型玻璃的折射率的分佈，驗證了此三個亮度 PSA 影像式偏光量測方法有足夠的準確度來量測 GRIN Lens 之漸變折射率分佈，並以水平面作為參考平面用來校正系統中偏光片方位角偏差  $\alpha$ ，再量測  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  的平面在不同傾斜角度下所得之  $\alpha$  分佈，從量測出來所得之結果，可以確定  $\alpha$  可用來量測樣品表面法線變化的方向並應用於曲面之曲率半徑的量測，故以下分為非均勻（如漸變折射率）平面與均勻曲面材料（如凸透鏡）分別加以探討。

#### 4.1 非均勻平面材料之量測

漸變式折射率鏡片簡稱 GRIN Lens，其製程是利用離子擴散來達到材料的濃度漸進的狀態而形成漸變折射率，為光通訊系統所必須的組件，目前已經完成的相關產品如光纖準直器 (collimator)，其主要的功能在於協助光線的前進達到近乎平行直進的程度，以避免光傳播的發散導致光能量損失，而鏡片上漸變折射率分佈的狀態會影響整體光通訊元件的品質[19]。目前在量測漸變折射率分佈的方法有掃描折射光式 (scanning refracted ray) [20-23]、影像式 (imaging) [24, 25]、干涉式 (interference) [26, 27]三種，前兩種方法的基本概念是利用光線追跡 (ray tracing) 的技巧而第三種方法則是運用干涉的理論，上述的三種方法全都是利用穿透的架構，並運用幾何光學的數學方法或利用計算干涉條紋間的變化將材料的漸變折射率分佈推導出來。相較於利用穿透的方式，我們提出以偏光片-樣品-析光片為實驗基本架構再搭配以電荷耦合偵測器為光偵測器的三個亮度 PSA 影像式橢圓偏光術，運用反射且非破壞性的方法（不用將樣品浸入匹配油中）將漸變折射率的分佈直接量測出來。實驗之初我們首先以數值模擬的方法，驗證了以三個亮度量測技術的正確性，在實際量測中，我們利用此方法可精確的量測了 BK7 玻璃的折射率分佈，此結果驗

證了三個亮度 PSA 影像式偏光量測方法有足夠的準確度來進一步量測 GRIN Lens 的漸變折射率分佈，亦可同時推得偏光片方位角偏差分佈，可判斷所量的折射率值之準確性，除此之外我們以原廠所提供的產品規格與量測出來的結果做比較。

#### 4.1.1 工作原理與數值運算

利用 2.2 節與 2.4 節所敘述的運算方法可求得材料之橢圓參數  $\Psi$  與  $\Delta$ 、材料之折射率以及偏光片方位角偏差  $\alpha$ 。為了了解偏光片方位角偏差  $\alpha$  與優化後  $\Delta$  的關係，我們使用兩種優化方法來做數值運算 (a) 利用亮度最大的相位角的平均值，即  $\bar{\theta} = [(180^\circ - \theta') + \theta]/2$ ，代入 (2.40) 式以求得優化  $\Delta$  之方法，(b) 利用  $\Delta = (\Delta_{45^\circ} + \Delta_{-45^\circ})/2$  之平均數。比較這兩種優化方法所得之數值結果 (圖4-1) 可以歸納出只要  $\alpha$  小於  $\pm 3^\circ$ ，利用優化的方法即可獲得準確之橢圓參數  $\Psi$  與  $\Delta$ 。由於此種優化過程是可以提高偏光量測的準確性[3]，因此我們應用此種技術於影像式橢圓偏光術上，再用來量得非均勻平面之折射率分佈。

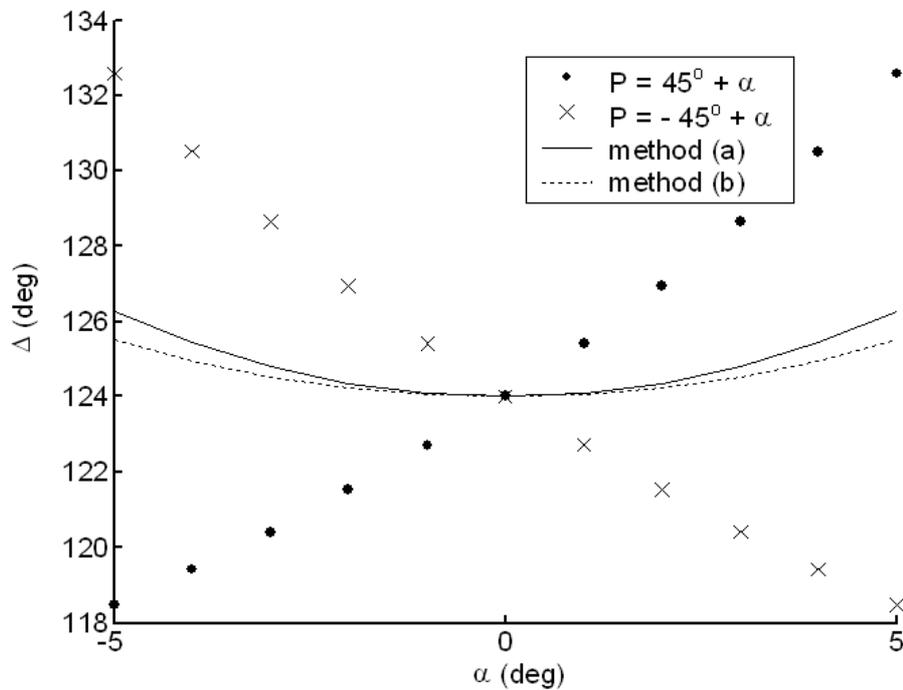


圖 4-1：利用不同優化方法之數值模擬結果

#### 4.1.2 實驗架構與步驟

為了量測的準確性，我們利用第三章中所述之光強度比例的方法校正偏光片與析光片的偏光角。實驗基本架構與步驟與 3.2 節所述相同，在經過 10 倍放大的擴束系統後由電荷耦合偵測器在毛玻璃上取像並紀錄下光強度的分佈，並可利用影像處理軟體中的 Gaussian smoother filter 的功能將雜訊去除。為了比較表面之折射率分佈，我們分別量測了具相同折射率分佈的 BK7 楔形玻璃與漸變折射率分

佈的 GRIN Lens 兩種樣品。其中我們所量測的 GRIN Lens 是由 NSG 公司利用離子交換的方法所製造，型號為 SLW-180 且直徑大小為 1.8 mm。

#### 4.1.3 結果與討論

利用三個亮度的技術將量測到的光強度代入式 (2.39-42) 與 (2.52-53) 可以推得橢圓參數  $\Psi$ 、 $\Delta$  與偏光片方位角偏差  $\alpha$ 。除了使用優化後的  $\Psi$  值之外，我們亦使用了 4.1.1 節所介紹 (a)、(b) 兩種優化  $\Delta$  的方法，將優化後的  $\Psi$  與分別求得  $\Delta$  代入式 (2.33) 計算出 BK7 玻璃之折射率分佈，從這兩種方法我們皆可得到兩組平坦的折射率分佈平面（如圖4-2），且求得之折射率分別為

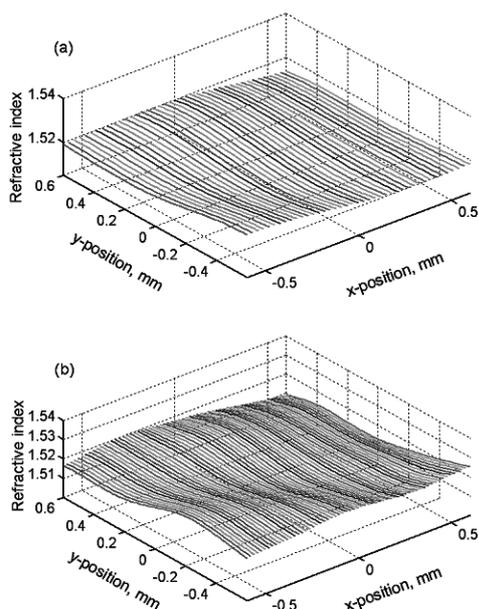


圖 4-2：不同優化方法所得 BK7 玻璃折射率分佈圖

1.519 ( $\pm 0.003$ ) 與 1.520 ( $\pm 0.003$ )，所得之結果與廠商所提供的規格 (Schott: optical glass, BK7,  $n=1.521$ ) 相符，由於所量到折射率之準確度可達  $10^{-3}$ ，足以用來量測漸變折射率材料之折射率分佈。根據 NSG 提供之 GRIN lens 的規格為：波長為 550 nm 時軸心折射率 ( $n_0$ ) 為 1.614；漸變常數 (A) 為 0.344，本實驗利用 543 nm 雷射所量測到的軸心折射率 ( $n_0$ ) 為 1.614 而漸變常數 (A) 為 0.345 均與所提供之資料吻合。除此之外，此橢圓偏光技術最有趣的方面是能夠利用推得的偏光片方位角偏差量  $\alpha$  找出與表面的關係，並且能夠了解所量測到之結果是否準確 (如圖4-3(a))，因為推得之  $\alpha$  在優化條件的範圍內，量測之折射率分佈曲線與規格之理論曲線相符合 (如圖4-3(b))。由於光束並非垂直入射於透鏡或取像時有輕微失焦 [18] 都會造成極化像差，可能是造成量測之邊緣折射率分佈與理論值有較大誤差 (約 0.004) 的主要原因，此誤差大於在量測 BK7 玻璃時的標準差 (如圖4-4)。對於折射率剖面圖中非對稱之結果可能是材料結構本身還是極化像差所造成，目前則仍在研究中。為了探討此問題我們需要安裝高倍率的擴束系統與較穩定的光源，這些裝置也同時能夠增加量測折射率之解析度與準確度。從以上的實驗結果顯示，利用影像式橢圓偏光術不但僅需量測六個光強度就可以獲得相當準確的橢圓參數值，可以節省分析非均勻平面材料的時間。

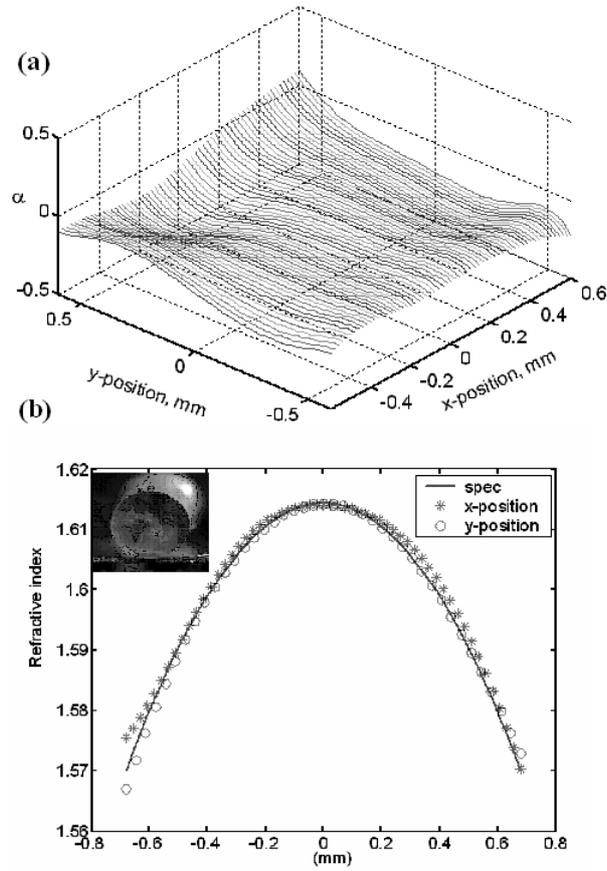


圖 4-3 : GRIN Lens 折射率分佈曲線與方位角偏差分佈圖

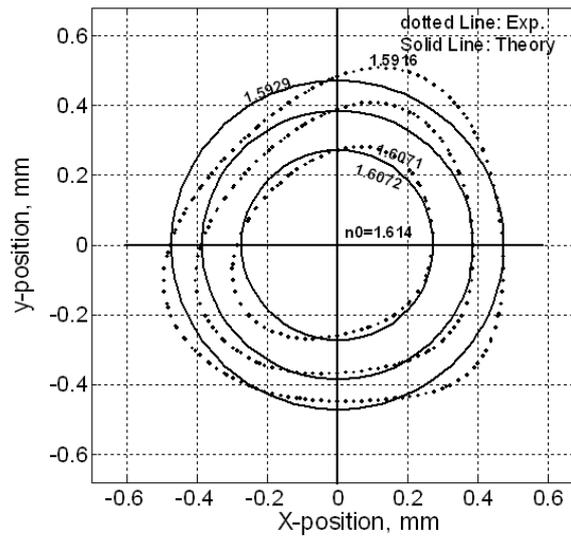


圖 4-4 : GRIN Lens 之折射率剖面分佈圖

## 4.2 均勻曲面材料之量測

利用影像式橢圓偏光術，我們除了希望能量測材料平面上之折射率分佈，且能夠量測到均勻曲面之表面形貌與折射率分佈，以便擴展本技術的應用範圍。一般用來量測表面形貌的儀器分別有以探針為主的接觸式 (contact stylus) [29, 30] 與以光學為主的非接觸式 (non-contact) [31, 32] 兩種方法，並有其應用的領域 [33]。利用 PSA 三個亮度橢圓偏光術[3]，在分別量出偏光片在兩個方位角相差  $90^\circ$  的情形之下橢圓參數的優化法，可以判斷出與入射面有關的偏光片方位角偏差  $\alpha$ 。在本節中我們將證明以 PSA 影像式橢圓偏光術所量測出來的  $\alpha$  分佈與待測物表面之法線變化量是相同。利用水平面作為參考平面用來校正系統中偏光片方位角偏差  $\alpha$ ，再量測  $\text{SiO}_2 / \text{Si}$  的平面在不同傾斜角度下所得之  $\alpha$  分佈，從量測出來所得之結果可以確定  $\alpha$  可用來量測樣品表面法線變化的方向，根據此結果可進一步的來觀察曲面結構對  $\alpha$  分佈的關係。從 4.1 節中可知利用影像式橢圓偏光術可以推得材料之折射率分佈，在本節中延續先前之方法來量測稀釋酒精與水的折射率分佈，並且得到一平坦的  $\alpha$  分佈平面且其值接近零，進而證實其法線的方向。既然  $\alpha$  可以用來量測樣品表面法線變化的方向，我們以此觀念利用影像式橢圓偏光術來量測一 BK7 平凸透鏡之表面形貌，根據量測出來的  $\alpha$  值可推得凸面之

曲率半徑並修正入射角偏差來獲得正確的折射率分佈。

#### 4.2.1 結果與討論

本實驗架構僅改變了光源波長 ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ) 與放大倍率 20 倍的擴束系統，其餘實驗架構及步驟與 3.2 節所述相同。為了校正一平坦表面，我們量測了水與稀釋酒精的橢圓參數  $\Psi$ 、 $\Delta$  與偏光片方位角偏差  $\alpha$  (如圖 4-5)，從這兩種樣品所推得的  $\alpha$  分佈都很平坦，所得之折射率則分別為  $1.333 (\pm 0.002)$  與  $1.373 (\pm 0.002)$ 。另外我們量測在不同傾斜角度下的  $\text{SiO}_2 / \text{Si}$  平面，表面法線變化與量測所得偏光片方位角偏差  $\alpha$  的關係 (如圖 4-6)，由於我們將  $\text{SiO}_2 / \text{Si}$  平面的傾斜角度從  $-2^\circ$  轉至  $2^\circ$  每間隔  $1^\circ$ ，量測到的  $\alpha$  分佈正如預期相同，所以可以確定  $\alpha$  是可用來量測樣品表面法線變化的方向。

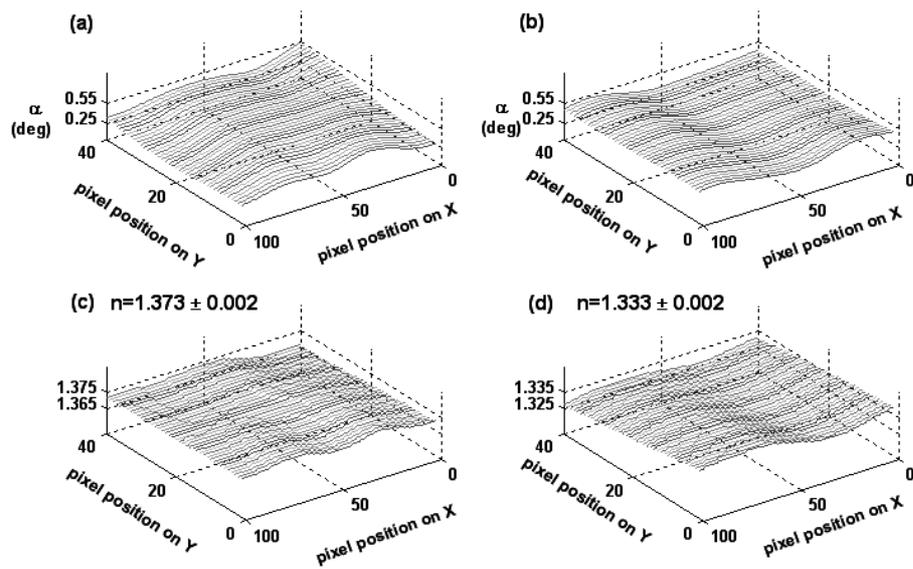


圖 4-5：水與酒精之折射率及  $\alpha$  之分佈圖

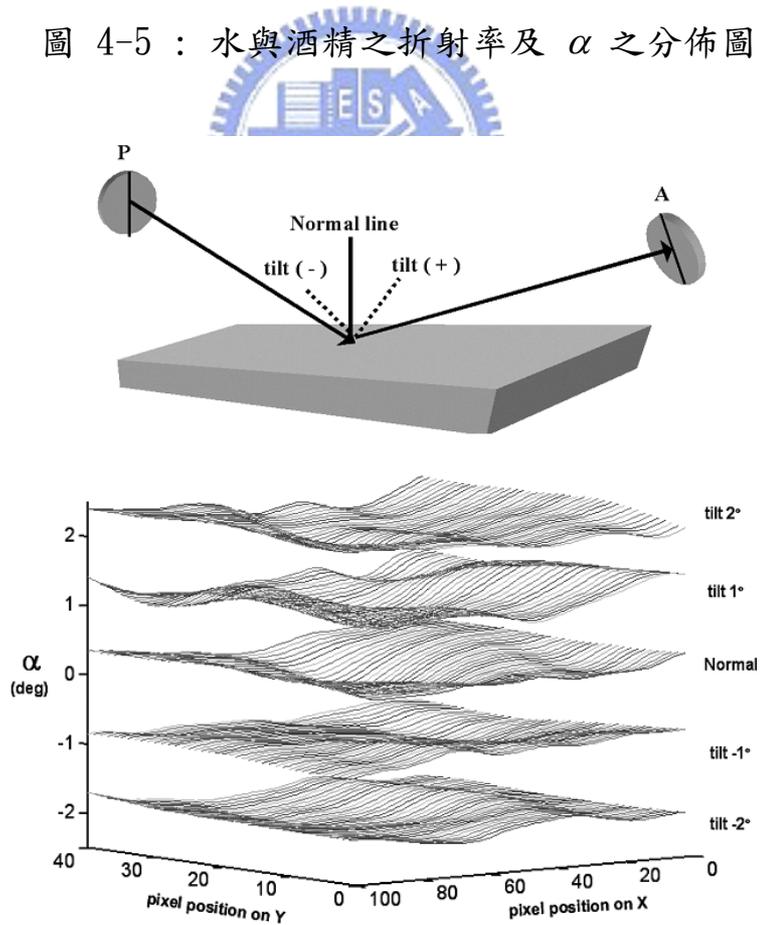


圖 4-6：不同傾斜角之  $\text{SiO}_2/\text{Si}$  平面所得  $\alpha$  分佈圖

利用影像式橢圓偏光術來量測一 BK7 平凸透鏡之表面形貌，為了便於觀察（圖 4-7 (a)），將凸面鏡表面反射分析在各處  $\alpha$  值之大小，發現底部邊緣  $\alpha$  值分佈的並不對稱，可能是因為雷射光所造成干涉，此結果仍尚待進一步的研究。取誤差最小擬合法 (least square fit) 利用  $\alpha$  中心曲線來計算曲面上斜率；擬合出凸面鏡之曲率半徑為 72.70 mm，與 Zygo 相位干涉儀 (Phase-shift interferometer) 所量出來樣品之曲率半徑 (72.55 mm) 相去不遠。若將量測樣品的位置分為凸面之中心與外圍兩部分，因為在影像處理中使用了 Gaussian smoother filter 的功能將雜散光去除，不過此功能會使曲線變得較為平滑（圖4-7 (b)），線性度降低，影響線性迴歸分析時擬合所得之結果，比較在凸面之中心與外圍所得  $\alpha$  分佈曲線，由於兩條曲線邊緣之  $\alpha$  相差 ( $0.03^\circ$ ) 大於在平面量測所得之標準差 ( $0.02^\circ$ )，根據擬合所得之結果，可得凸面之中心與外圍之曲率半徑差為 0.80 mm，由於中心與外圍  $\alpha$  曲線之非對稱性與 4.1 節所得之折射率分佈非對稱相類似，可知極化像差可能是造成誤差的原因。根據量測到的  $\alpha$  分佈，我們可以推斷出因為凸面所造成的入射角偏差範圍從  $70^\circ - 0.4^\circ$  到  $70^\circ + 0.4^\circ$ ，利用所得的入射角偏差來修正所得的折射率分佈，修正後可得一平坦的折射率分佈平面（圖4-8），其值為  $1.521 (\pm 0.002)$ 。一般而言，傳統的橢圓儀僅能量測平面薄

膜的特性，然而利用 PSA 影像式橢圓偏光術將可應用於透鏡上光學  
 鍍膜之膜厚度量測。

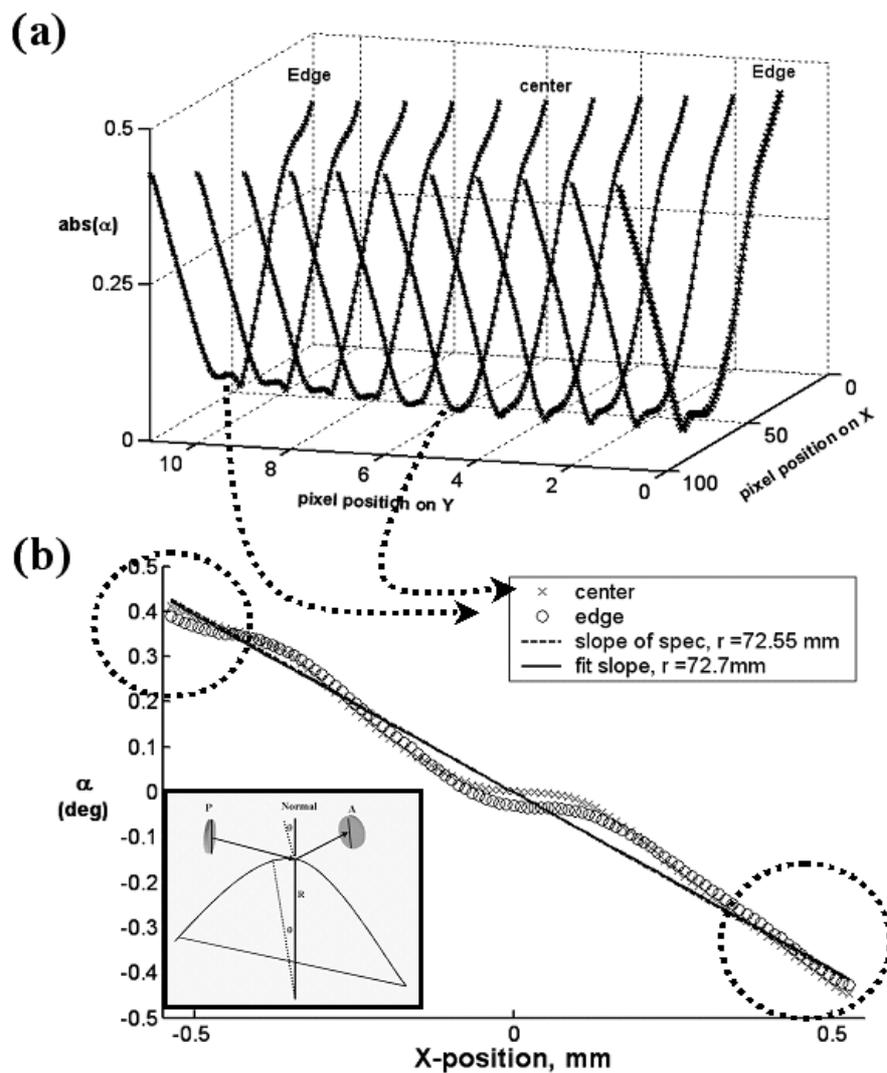


圖 4-7： $\alpha$  之分佈及與斜率之線性擬合結果

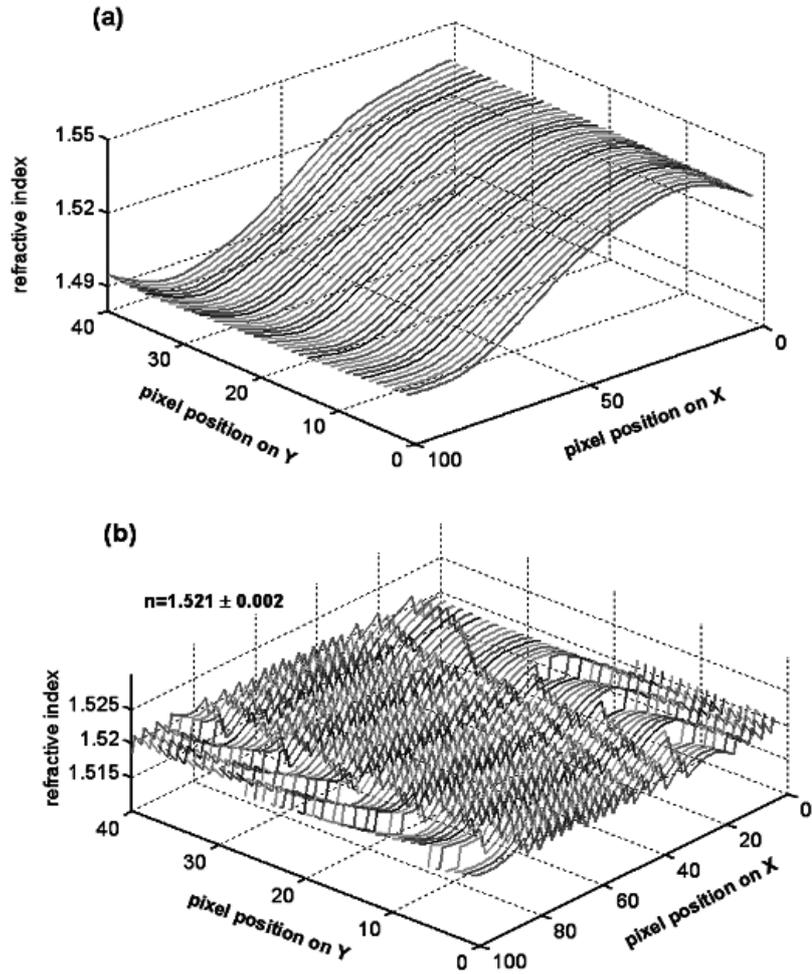


圖 4-8：BK7 透鏡之折射率修正前與修正後分佈之結果

根據以上的分析可知，利用 PSA 影像式橢圓偏光術，除了能量測非均勻平面上材料之折射率分佈，亦能夠利用  $\alpha$  來量測均勻曲面材料之表面形貌，應可做為其它現有量測材料參數之系統以外的另一種選擇（圖 4-9）。

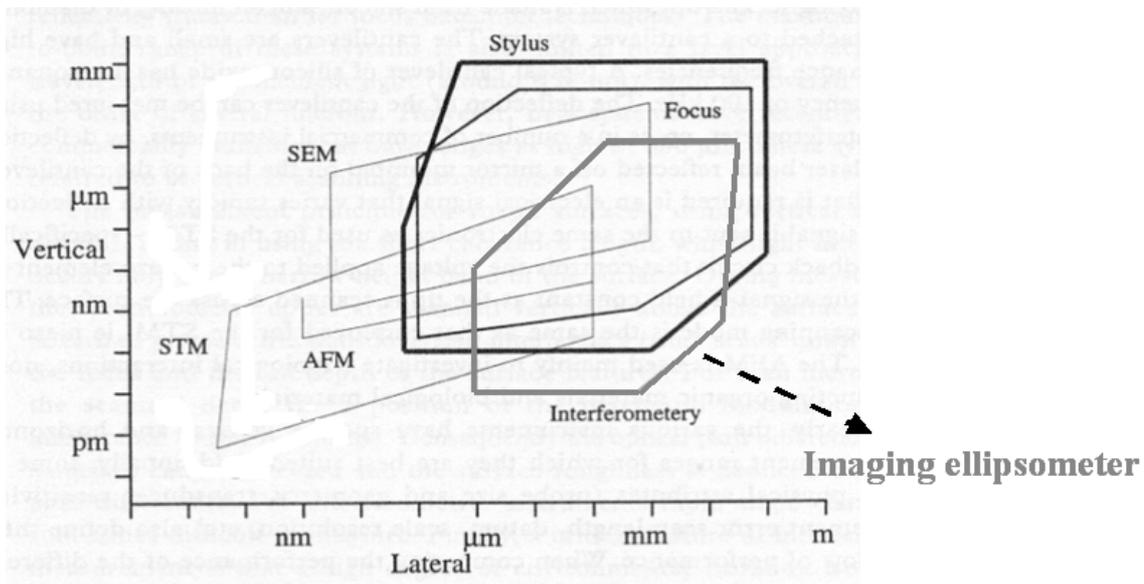


圖 4-9：影像式橢圓儀在表面形貌量測上的應用範圍



## 第五章 結論

傳統歸零式橢圓儀都有使用補償片，但為了避免補償器造成色散現象而以無補償器的簡式橢圓儀為基礎設計而成的 PSA 影像式橢圓儀，利用三個亮度量測技術可以節省量測及資料分析的時間。實驗過程中旋轉偏光片而造成光束偏差會影響量測的精準度，我們匹配非對稱油跡的重心 (center of mass) 並將橢圓偏光參數  $\Psi$  加以優化而獲得一定的精準度，所量出的入射角偏差也與石英所量的結果[18]相近。此反射式量測法是一種非破壞性的方法（不用將樣品浸入匹配油中），除了可以直接量測變折射率的分佈外，亦可同時推得偏光片之方位角誤差  $\alpha$  分佈，因此可以判斷所量得的折射率的準確性及其平面的平整性。由於藉  $\alpha$  可以量測平面的傾斜角，故我們量測均勻曲面並證明  $\alpha$  是可用來量測樣品表面法線變化的方向。根據量測出來的  $\alpha$  值我們可推得凸面之曲率半徑並修正入射角偏差來獲得正確的折射率分佈。本量測技術不但對於非均勻平面結構材料之光學參數，更可應用於均勻曲面結構材料之量測上，應可做為其它現有量測材料參數之系統以外的另一種選擇。

最後有關此系統未來之研究方向，除現在正進行中的凸面鏡上膜厚之量測外，對於應用在量測上所發展出新的數值計算法可分別推算

出偏光片與析光片的方位角誤差並立即修正樣品之橢圓參數，此數值計算法可大幅提高量測準確度，並可放寬對偏光片方位角誤差的限制（ $\alpha$  小於  $\pm 3^\circ$ ），除此之外，對於解決光學元件造成之極化像差的問題都將是下一階段研究重點。



## 參考文獻

1. R. M. A. Azzam and N. M. Bashara: *Ellipsometry and Polarized Light*. (Amsterdam: North-Holland 1992)
2. E. Meyer, H. Frede and H. Knof: *J. Appl. Phys.* **38** (1967) 3682.
3. Y. F. Chao, W. C. Lee, C. S. Hung and J. J. Lin: *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31** (1998) 1968.
4. Y. F. Chao and W. F. Hsieh: *Appl. Opt.* **30** (1991) 4012.
5. A. H. Liu, P. C. Wayner, and J. L. Plawsky: *Appl Optics.* **33** (1994) 1223.
6. H. Arwin, S. W. Klintstrom, and R. Jansson: *J. Colloid and Interface Sci.* **156** (1993) 377.
7. G. Wang, H. Arwin, and R. Jansson: *Appl Optics.* **42** (2003) 38.
8. G. Wang, R. Jansson, and H. Arwin: *Rev. Sci. Instrum.* **67** (1996) 2930.
9. D. Beaglehole: *Rev. Sci. Instrum.* **59** (1988) 2557.
10. H. K. Pak, and B. M. Law: *Rev. Sci. Instrum.* **66** (1995) 4972.
11. B. M. Law, and H. K. Pak: *J. Opt. Soc. Am. A.* **13** (1996) 379.
12. S. Henon, and J. Meunier: *Rev. Sci. Instrum.* **62** (1991) 936.
13. A. Albersdofer, G. Elender, G. Mathe, and K. R. Neumaier: *Appl. Phys. Letters.* **72** (1998) 2930.
14. J. R. Zeidler, R. B. Kohles and N. M. Bashara: *Appl. Opt.* **13** (1974) 1938.
15. Edward Collett: *Polarized Light*. (Marcel Dekker, Inc. 1993).
16. 李文智: PSA 簡式橢圓儀. 國立交通大學光電所碩士論文. (1995) 22.
17. Y. F. Chao, C. S. Wei, W. C. Lee, S. C. Lin and T. S. Chao: *Jpn. J. Appl. Phys.* **34** (1995) 5016.
18. Y. F. Chao, M. W. Wang and Z. C. Ko: *J. Phys. D* **32** (1999) 2246.
19. W. J. Tomlinson: *Appl. Opt.* **19** (1980) 1127.

20. M. Young: Appl. Opt. **20** (1981) 3415.
21. R. Conde, C. Depeursinge, B. Gisin, N. Gisin and B. Groebli: Pure Appl. Opt. **5** (1996) 269.
22. N. Gisin, R. Passy and B. Perny: J. Lightwave. Tech. **11** (1993) 1875.
23. N. H. Fontaine and M. Young: Appl. Opt. **38** (1999) 6836.
24. X. H. Sun, H. Ma, H. Ming, Z. Q. Zheng, J. W. Yang, Y. S. Zhang and J. P. Xie: Chin. Phys. Lett. **20** (2003) 374.
25. X. H. Sun, H. Ma, H. Ming, Z. Q. Zheng, J. W. Yang and J. P. Xie: Opt. & Laser Tech. **36** (2004) 163.
26. P. W. Oliveira, H. Krug and H. Schmidt: Proc. SPIE. **3136** (1997) 442.
27. Z. G. Liu, X. M. Dong, Q. G. Chen, C. Y. Yin, Y. Xu and Y. J. Zheng: Appl. Opt. **43** (2004) 1485.
28. R. A. Chipman and L. J. Chipman: Opt. Eng. **28** (1989) 100.
29. J. Garratt and M. Mills: Nanotechnology **7** (1996) 13.
30. F. F. Leal, S. O. Ferreira, I. L. Menezes-Sobrinho and T. E. Faria: J. Phys: Condens. Matter **17** (2005) 27.
31. J. Szabo, F. Riesz, and B. Szentpali: Jpn. J. Appl. Phys. **35** (1996) L258.
32. L. D'Acquisto, L. Fratini, and A. M. Siddiolo: Meas. Sci. Technol. **13** (2002) 613.
33. K. J. Stout and L. Blunt: Three Dimensional Surface Topography, (Penton Press, London, 1994). Chap. 2, p. 89.

## 附錄 A

### 運算塊材折射率

```
clear all;
data1=fitsread('pa0.fit');
data2=fitsread('pa60.fit');
data3=fitsread('pa120.fit');

data4=fitsread('sa0.fit');
data5=fitsread('sa60.fit');
data6=fitsread('sa120.fit');

pab=data1(183:243,228:288);
pbb=data2(184:244,225:285);
pcb=data3(180:240,229:289);

pdb=data4(154:214,210:270);
peb=data5(159:219,213:273);
pfb=data6(166:226,208:268);

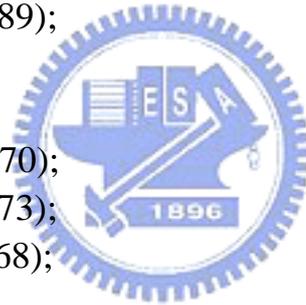
for k=1:61;
j=1:61;

NRP(k,j)=((2*pab(k,j)-(pbb(k,j)+pcb(k,j)))/(pab(k,j)+pbb(k,j)+pcb(k,j)));
NRA(k,j)=((2*pdb(k,j)-(peb(k,j)+pfb(k,j)))/(pdb(k,j)+peb(k,j)+pfb(k,j)));

NTANPHIP(k,j)=sqrt((1+NRP(k,j))/(1-NRP(k,j)));
NTANPHIA(k,j)=sqrt((1+NRA(k,j))/(1-NRA(k,j)));
NPHIP(k,j)=atan(NTANPHIP(k,j)).*180/pi;
NPHIN(k,j)=atan(NTANPHIA(k,j)).*180/pi;

tanphi(k,j)=sqrt((NTANPHIP(k,j).*NTANPHIA(k,j)));
PHI(k,j)=atan(tanphi(k,j)).*180/pi;

NTAN2B0P(k,j)=(sqrt(3)*(pbb(k,j)-pcb(k,j)))/(2*pab(k,j)-(pbb(k,j)+pcb(k,j))
```



```

k,j));
NTAN2B0A(k,j)=(sqrt(3)*(peb(k,j)-pfb(k,j)))/(2*pdb(k,j)-(peb(k,j)+pfb(
k,j)));

```

```

BETAP(k,j)=atan(NTAN2B0P(k,j)).*180/(2*pi);
BETAA(k,j)=atan(NTAN2B0A(k,j)).*180/(2*pi);
BETA(k,j)=(180-BETAA(k,j)+BETAP(k,j))./2;

```

```

NTAN2B0(k,j)=tan(2*BETA(k,j).*pi/180);
cosdelta(k,j)=-NTAN2B0(k,j)./tan(2*PHI(k,j).*pi/180);
DELTA(k,j)=acos(cosdelta(k,j)).*180/pi;

```

```

a=70*pi/180; % incident angle
b(k,j)=tanphi(k,j).*exp(i*(DELTA(k,j).*pi/180)); % ellipsometric ratio

```

```

n(k,j)=tan(a)*sqrt(1-(4*b(k,j).*sin(a)^2./(1+b(k,j)).^2));
% refractive index of bulk medium
end

```



## 附錄 B

### 反推入射角與厚度

```
clear all;

w=0.6328;           % wavelength
del=118.0694;       % input the experimental data
chi1=17.4439;
chi=chi1;
Z0=z0;              % impedance resistance =377
a0=69;              % incident angle
step=0.1;           % step
d1=1000/10000;      % initial thickness
step1=20/10000;     % step
xi1=tan(45*pi/180); % p=45
for x=1:31;
    for y=1:101;
        a(x)=a0+(x-16).*step;
        beta=sin(a(x).*pi/180);
        w1(y)=(d1+(y-51).*step1)./w;
    cover(:,:,x,y)=[1 1 1 0 0 0 NaN];
    layer1(:,:,x,y)=[1.46 1.46 1.46 0 0 0 w1(y)];
    % refractive index of SiO2
    substrate(:,:,x,y)=[3.88+i*0.02 3.88+i*0.02 3.88+i*0.02 0 0 0 NaN];
    % refractive index of substrate
    system(:,:,x,y)=[cover(:,:,x,y)
        layer1(:,:,x,y)
        substrate(:,:,x,y)];
    m=size(system(:,:,x,y),1);
    Fc(:,:,x,y)=fmat(system(1(:,:,x,y)),beta);
    M(:,:,x,y)=cmat(system(2:m(:,:,x,y)),beta);
    Fs(:,:,x,y)=fmat(system(m(:,:,x,y)),beta);
    A(:,:,x,y)=smat(Fc(:,:,x,y),M(:,:,x,y),Fs(:,:,x,y));
    Rss(:,:,x,y)=(A(1,1,x,y)*A(4,3,x,y)-A(1,3,x,y)*A(4,1,x,y))./(A(1,1,x,y)*
    A(3,3,x,y)-A(1,3,x,y)*A(3,1,x,y));
    Rsp(:,:,x,y)=(A(4,1,x,y)*A(3,3,x,y)-A(4,3,x,y)*A(3,1,x,y))./(A(1,1,x,y)*
    A(3,3,x,y)-A(1,3,x,y)*A(3,1,x,y));
```

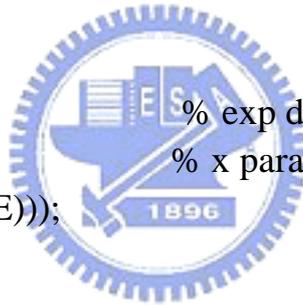
```

Rps(:,:,x,y)=(A(1,1,x,y)*A(2,3,x,y)-A(2,1,x,y)*A(1,3,x,y))./(A(1,1,x,y)*
A(3,3,x,y)-A(1,3,x,y)*A(3,1,x,y));
Rpp(:,:,x,y)=(A(2,1,x,y)*A(3,3,x,y)-A(2,3,x,y)*A(3,1,x,y))./(A(1,1,x,y)*
A(3,3,x,y)-A(1,3,x,y)*A(3,1,x,y));
xr1(:,:,x,y)=((Rsp(:,:,x,y)./Rss(:,:,x,y))+xi1)./((Rpp(:,:,x,y)./Rss(:,:,x,y))+
(Rps(:,:,x,y)./Rss(:,:,x,y)).*xi1));
tau1(:,:,x,y)=xi1/xr1(:,:,x,y);
psi(:,:,x,y)=atan(abs(tau1(:,:,x,y))).*180/pi;
delta(:,:,x,y)=angle(tau1(:,:,x,y)).*180/pi;
if (delta(:,:,x,y))<180 & 0<(delta(:,:,x,y))
    delta1(:,:,x,y)=180-(delta(:,:,x,y));
else
    delta1(:,:,x,y)=180-(delta(:,:,x,y));
end
E1(:,:,x,y)=abs((psi(:,:,x,y)-chi).*5)+abs((delta1(:,:,x,y)-del));
end
end
E=reshape(E1,31,101);
for m=1:31;
    for n=1:101;
        [m,n]=find(E==min(min(E)));
    end
end
a2=a0+(m-16)*step;
d2=d1+(n-51)*step1;
step2=0.01;
step3=0.1/10000;

% exp data
% x parameter
% incident angle of round2
% thickness of round 2
% degree
% thickness

for x1=1:101;
    for y1=1:201;
        a1(x1)=a2+(x1-51).*step2;
        beta=sin(a1(x1).*pi/180);
        w2(y1)=(d2+(y1-101).*step3)./w;
    cover(:,:,x1,y1)=[1 1 1 0 0 0 NaN];
    layer1(:,:,x1,y1)=[1.46 1.46 1.46 0 0 0 w2(y1)];
    substrate(:,:,x1,y1)=[3.88+i*0.02 3.88+i*0.02 3.88+i*0.02 0 0 0 NaN];
    system(:,:,x1,y1)=[cover(:,:,x1,y1)
        layer1(:,:,x1,y1)

```



```

    substrate(:,:,x1,y1)];
m=size(system(:,:,x1,y1),1);
Fc(:,:,x1,y1)=fmat(system(1(:,:,x1,y1),beta);
M(:,:,x1,y1)=cmat(system(2:m-1(:,:,x1,y1),beta);
Fs(:,:,x1,y1)=fmat(system(m(:,:,x1,y1),beta);
A(:,:,x1,y1)=smat(Fc(:,:,x1,y1),M(:,:,x1,y1),Fs(:,:,x1,y1));
Rss(:,:,x1,y1)=(A(1,1,x1,y1)*A(4,3,x1,y1)-A(1,3,x1,y1)*A(4,1,x1,y1))./(
A(1,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(1,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1));
Rsp(:,:,x1,y1)=(A(4,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(4,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1))./(
A(1,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(1,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1));
Rps(:,:,x1,y1)=(A(1,1,x1,y1)*A(2,3,x1,y1)-A(2,1,x1,y1)*A(1,3,x1,y1))./(
A(1,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(1,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1));
Rpp(:,:,x1,y1)=(A(2,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(2,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1))./(
A(1,1,x1,y1)*A(3,3,x1,y1)-A(1,3,x1,y1)*A(3,1,x1,y1));
xr11(:,:,x1,y1)=((Rsp(:,:,x1,y1)./Rss(:,:,x1,y1))+xi1)/((Rpp(:,:,x1,y1)./Rss
(:,:,x1,y1))+((Rps(:,:,x1,y1)./Rss(:,:,x1,y1)).*xi1));
tau11(:,:,x1,y1)=xi1/xr11(:,:,x1,y1);
psi1(:,:,x1,y1)=atan(abs(tau11(:,:,x1,y1))).*180/pi;
delta2(:,:,x1,y1)=angle(tau11(:,:,x1,y1)).*180/pi;
if (delta2(:,:,x1,y1))<180 & 0<(delta2(:,:,x1,y1))
    delta3(:,:,x1,y1)=180-(delta2(:,:,x1,y1));
else
    delta3(:,:,x1,y1)=180-(delta2(:,:,x1,y1));
end
end
E2(:,:,x1,y1)=abs((psi1(:,:,x1,y1)-chi).*5)+abs((delta3(:,:,x1,y1)-del));
end
end
E3=reshape(E2,101,201);
for m1=1:101; % exp data
    for n1=1:201; % x parameter
        [m1,n1]=find(E3==min(min(E3)));
    end
end
a3=a2+(m1-51)*step2 % final angle
d3=(d2+(n1-101)*step3)*10000 % final thickness
psi1(:,:,m1,n1)
delta3(:,:,m1,n1)

```

## 子程式

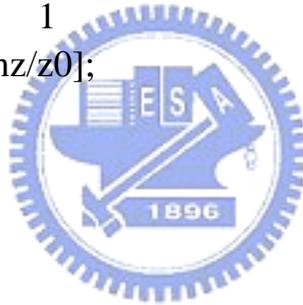
### fmtat

```
function [F,alpha,E,H]=fmtat(arg1,beta)
% fmtat  Field matrix used in Berreman calculus.
%       In [F,alpha,E,H]=fmtat(arg1,beta) arg1 may
%       have the material or layer format.

%4X4 field matrix F, alphas, power and fields for anisotropic medium
% test for PS layer
if nargin==1
ny=arg1(1);
nz=arg1(2);
F=[1      1      0      0
   ny/z0 -ny/z0  0      0
   0      0      1      1
   0      0     -nz/z0  nz/z0];
alpha=[ny -ny  nz -nz];
E=[0 0 0 0
   F(1,:);
   F(3,:)];
H=[0 0 0 0
   F(4,:);
   F(2,:)];
else

n1=arg1(1); n2=arg1(2); n3=arg1(3);
eta=arg1(4); psi=arg1(5); xi=arg1(6);

% test for isotropic layer
if (abs(n1-n2) < 0.000001) & (abs(n1-n3) < 0.000001)
  alph=sqrt(n1^2-beta^2);
  gs=-alph/z0; gp=n1*n1/alph/z0;
  F=[1      1      0      0
     gp  -gp      0      0
     0      0      1      1
     0      0      gs -gs];
```



```

alph=sqrt(n1^2-beta^2);
alpha=[alph -alph alph -alph];
exx=n1^2; exy=0; exz=0;
else
e=epsilon(arg1); % dielectric matrix
exx=e(1,1); exy=e(1,2); exz=e(1,3);
    eyy=e(2,2); eyz=e(2,3);
        ezz=e(3,3);
Mbeta=[-beta*exy/exx  z0*(1-beta^2/exx)  -beta*exz/exx  0
(eyy-exy*exy/exx)/z0  -beta*exy/exx  (eyz-exy*exz/exx)/z0  0
0  0  0
-z0
(-eyz+exz*exy/exx)/z0  beta*exz/exx  (beta^2-ezz+exz*exz/exx)/z0
0];
[F,Alpha]=eig(Mbeta);
alpha=[Alpha(1,1) Alpha(2,2) Alpha(3,3) Alpha(4,4)];

% normalize columns of F so that |Ey|^2+|Ez|^2=1
% set phase of columns to angle(Ey+Ez)
normc=sqrt(F(1,:).*conj(F(1,:))+F(3,:).*conj(F(3,:))) ...
.*exp(i*angle(F(1,:)+F(3,:)));
F=F./[normc; normc; normc; normc];

% sort columns of F in order of real alpha, with complex conjugates
% sorted on imag alpha
a=alpha;
[dum,j]=sort(real(a));
a=[a(j(1)) a(j(2)) a(j(3)) a(j(4))];
F=[F(:,j(1)) F(:,j(2)) F(:,j(3)) F(:,j(4))];
j=[1 2 3 4];
ia=a~=real(a);
ni=sum(ia);
if ni==2
    ji=find(ia);
    if imag(a(ji(1))) > imag(a(ji(2)))
        jh=j(ji(1)); j(ji(1))=j(ji(2)); j(ji(2))=jh;
    end
elseif ni==4

```

```

if imag(a(1)) > imag(a(2))
    j=[j(2) j(1) j(3) j(4)];
end
if imag(a(3)) > imag(a(4))
    j=[j(1) j(2) j(4) j(3)];
end
end
alpha=[a(j(1)) a(j(2)) a(j(3)) a(j(4))];
F=[F(:,j(1)) F(:,j(2)) F(:,j(3)) F(:,j(4))];

% first determine sign of power flow along x-axis for each basis vector
Pd=poynting(F);
for j=1:4
    if abs(Pd(j)) < 0.00001
        Pd(j)=0;
    end
end
Pd=sign(Pd);

    j=[4 1 2 3];
if Pd==[-1 -1 1 1] | Pd==[-1 0 0 1]
    j=[4 1 3 2];
end

alpha=[alpha(j(1)) alpha(j(2)) alpha(j(3)) alpha(j(4))];
F=[F(:,j(1)) F(:,j(2)) F(:,j(3)) F(:,j(4))];
end

% complete fields of basis vectors
E=[-(exy*F(1,:)+exz*F(3,:)+z0*beta*F(2,:))/exx
    F(1,:);
    F(3,:)];
H=[beta*F(3,:)/z0; F(4,:); F(2,:)];
end

```



## Cmat

```
function M=cmat(arg1,beta)
% cmat Characteristic matrix M in Berreman calculus.
% cmat(arg1,beta) can be used to determine M for a layer,
% stack, or system.
if nargin==1 % PS case
Z0=z0;
m=size(arg1,1);
m1=1; m2=m;
if arg1(1,3) == NaN
m1=2; m2=m-1;
end
M=eye(4);
for j=m1:m2
ny=arg1(j,1);
nz=arg1(j,2);
dw=arg1(j,3);
phiy=2*pi*ny*dw;
phiz=2*pi*nz*dw;
cy=cos(phiy);
cz=cos(phiz);
sy=sin(phiy);
sz=sin(phiz);
M=M*[cy -i/ny*Z0*sy 0 0
-i*ny/Z0*sy cy 0 0
0 0 cz i/nz*Z0*sz
0 0 i*nz/Z0*sz cz];
end

else % general case
m=size(arg1,1);
m1=1; m2=m;
if arg1(1,7) == NaN
m1=2;
end
if arg1(m,7) == NaN
m2=m-1;
end
```



```
end
M=eye(4);
for j=m1:m2
[F,alpha]=fmat(arg1(j,:),beta);
M=M*F*pmat(alpha,arg1(j,7))*inv(F);
end
end
```



## smat

```
function A=smat(arg1,arg2,arg3)
% smat System matrix A used in Berreman calculus.
%      Formats are smat(system,beta) and smat(Fc,M,Fs).

if nargin==2
    system=arg1; beta=arg2
    m=size(system,1);
    Fc=fmat(system(1,:),beta)
    M=cmat(system(m-1,:),beta);
    Fs=fmat(system(m,:),beta)
else
    Fc=arg1; M=arg2; Fs=arg3;
end
A=inv(Fc)*M*Fs;
```



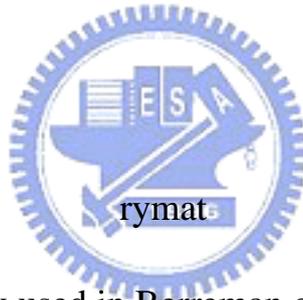
## Epsilon

```
function y=epsilon(param1)
% epsilon Relative permittivity matrix.
% Determines epsilonxyz from epsilon123.

% param1=[n1 n2 n3 eta psi xi] in the material format.
% param1=[n1 n2 n3 eta psi xi dw] in the layer format.
e=[param1(1)^2 0 0; 0 param1(2)^2 0; 0 0 param1(3)^2];
e=rxmat(param1(4))*e*rxmat(-param1(4));
e=rzmat(param1(5))*e*rzmat(-param1(5));
y=rxmat(param1(6))*e*rxmat(-param1(6));
```

### rxmat

```
function y=rxmat(x)
y=[1 0 0
  0 cos(x) -sin(x)
  0 sin(x) cos(x)];
```



```
function y=rymat(x)
% rymat Rotation matrix used in Berreman calculus.
y=[cos(x) 0 -sin(x)
  0 1 0
  sin(x) 0 cos(x)];
```

### rzmat

```
function y=rzmat(x)
% rzmat Rotation matrix used in Berreman calculus.
y=[cos(x) -sin(x) 0
  sin(x) cos(x) 0
  0 0 1];
```

## 附錄 C

### 反推橢圓參數與偏光片方位角偏差

```
clear all;

data1=fitsread('pa0.fit');
data2=fitsread('pa60.fit');
data3=fitsread('pa120.fit');

data4=fitsread('sa0.fit');
data5=fitsread('sa60.fit');
data6=fitsread('sa120.fit');

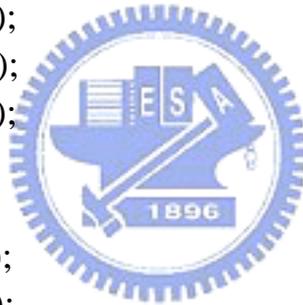
pa=data1(85:185,161:261);
pb=data2(85:185,161:261);
pc=data3(85:185,161:261);

sa=data4(80:180,155:255);
sb=data5(80:180,155:255);
sc=data6(80:180,155:255);

for i=1:100;
    j=1:100;
    pa1=pa(i,j);
    pb1=pb(i,j);
    pc1=pc(i,j);

    sa1=sa(i,j);
    sb1=sb(i,j);
    sc1=sc(i,j);

    pRB(i,j)=((2*pa1-(pb1+pc1))./(pa1+pb1+pc1));
    sRB(i,j)=((2*sa1-(sb1+sc1))./(sa1+sb1+sc1));
```



```

tanphi1(i,j)=sqrt(((1+pRB(i,j)).*(1+sRB(i,j)))./((1-pRB(i,j)).*(1-sRB(i,j))
));
tanphi(i,j)=sqrt(tanphi1(i,j));
phi(i,j)=atan(tanphi(i,j)).*180/pi;

NTANPHIP(i,j)=(1+pRB(i,j))./(1-pRB(i,j));
NTANPHIA(i,j)=(1+sRB(i,j))./(1-sRB(i,j));

A(i,j)=sqrt(NTANPHIA(i,j)./NTANPHIP(i,j)); % optimized Ψ
B(i,j)=((A(i,j)-1)./(A(i,j)+1));
alpha(i,j)=0.5*asin(B(i,j))*180/pi;          % azimuth deviation of α

tanbeta1(i,j)=(sqrt(3)*(pb1-pc1))./(2*pa1-(pb1+pc1));
tanbeta2(i,j)=(sqrt(3)*(sb1-sc1))./(2*sa1-(sb1+sc1));
beta1(i,j)=atan(tanbeta1(i,j))*180/(2*pi);
beta2(i,j)=atan(tanbeta2(i,j))*180/(2*pi);
beta(i,j)=(180-beta2(i,j)+beta1(i,j))./2;
cosdelta(i,j)=-((tan(2*beta(i,j)*pi/180))./tan(2*phi(i,j)*pi/180));
delta(i,j)=acos(cosdelta(i,j))*180/pi;      % optimized Δ

end

```

