

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒印分析

Bearing Contact Analysis of Helical Gears with Crowned and Profile

Modification Teeth

研究生：蘇政豪

指導教授：蔡忠杓 教授

中華民國九十五年六月

具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒印分析

Bearing Contact Analysis of Helical Gears with Crowned and Profile
Modification Teeth

研究生：蘇政豪

Student：Jheng-Hao Su

指導教授：蔡忠杓

Advisor：Chung-Biau Tasy

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文

A Thesis
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Mechanical Engineering

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒印分析

研究生：蘇政豪

指導教授：蔡忠杓 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

漸開線螺旋齒輪早已普遍使用多時，其相關之齒面修整方式亦有諸多研究及運用，冠狀修整、轉位修整與改變壓力角等均為業界所常用之齒形修整方式。但目前尚未見有具冠狀且具轉位齒形修整之漸開線螺旋齒輪的整合齒面數學模式，亦缺少對此類具齒面修整之齒輪進行接觸研究與齒印分析，因此，建立其齒面數學模式並進行研究分析，以及考量裝配誤差為非定值之偏擺誤差的影響及特性，將可對漸開線螺旋齒輪之齒面修整的特性更為瞭解，並有助於本文所提及齒面修整技術在產業上的運用。

本論文依據齒輪原理與創成機構以推導出具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒面數學模式，進而利用齒輪嚙合原理建立齒面接觸分析與齒印分析之數學模式，並輔以電腦分析程式之開發，進行各項齒輪接觸模擬分析。本研究在接觸分析方面已找出修整型螺旋齒輪在理想狀況或具裝配誤差以及發生偏擺時之接觸點的位置與運動誤差，齒印分析則已模擬求得齒輪於嚙合接觸時之齒印形狀與位置，也探討齒面修整方式對於漸開線螺旋齒輪之影響。

Bearing Contact Analysis of Helical Gears with Crowned and Profile Modification Teeth

Student : Jheng-hao Su

Advisor : Dr. Chung-Biau Tasy

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Involute helical gears have been widely used for a long time, and there are many researches and applications on the tooth modification methods for that. Tooth crowning, shifting modification and changing pressure angle are frequently used methods for tooth modifications by industry. However, an integrated mathematical model for helical gears with crowned and profile-shifted modification teeth has not been developed yet, and lack of researches on tooth contact and bearing contact analysis on modified tooth gears. Therefore, this study develops a mathematical model and performs the analysis with considerations on the influence and properties of gears with runout errors that the values of misalignment errors are varied. This enables us to increase the understanding of characteristics of tooth modifications, and facilitates the industry applications to this kind of gears.

In this thesis, according to the theory of gearing and gear generation mechanism, a mathematical model for helical gears with crowned and profile-shifted modification teeth has been developed. Based on the gear meshing theory, mathematical models of tooth contact and bearing contact analysis have also been established. The location of contact points and kinematic errors of gears with ideal, misalignment and runout assemblies have been investigated. Bearing contact pattern and location as well as the influences of tooth modifications on the involute helical gears have also been studied.

誌謝

本論文能順利完成，得先感謝指導教授 蔡忠杓博士，即使平日甚為忙碌，仍細心與認真地在教學、研究與論文，甚至待人處世上給予學生指導和教誨，令學生受益匪淺，故在此由衷地感謝老師為學生的付出。

於論文中雖來不及放上實驗的相關成果，但仍需感謝三陽工業研發中心的甯攸威博士、尤志文先生、范俊彥大哥以及振動與噪音實驗室的各位，對計畫與論文的幫助，獲得甚多實務上之經驗。

同時也感謝馮展華學長與劉家彰學長對學弟論文的指正與建議，令本論文得以更為完備。亦感謝齒輪實驗室的大家，曾瑞堂學長、陳冠宇學長、趙立基學長和黃俊諭同學的疑難資詢與意見提供，宗賢、健育及家誠三位學弟的陪伴，令我對能待在這實驗室以及認識大家而感到十分慶幸。

此外則是陪伴我放鬆壓力與忙裡偷閒的社團朋友們，感謝有你們作為我的中途休息站，讓我總是可以調整狀態再出發。

接著則不得不感謝我的父母親，因為有你們多年以來的養育與栽培，以及上大學以來的信任與支持，我才能夠到達今天的成就，感激之情難以言語表達。

最後，感謝至今所有曾給予過我幫助的人，謝謝。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	x
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究內容	3
第二章 冠狀修整與齒形修整	5
2.1 冠狀修整	5
2.2 齒形修整	7
第三章 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的齒面數學模式	12
3.1 前言	12
3.2 齒條刀之齒面數學模式	13
3.3 接觸線之共同法線向量	21
3.4 嚙合方程式	22
3.5 齒輪之齒面數學模式	25
3.6 本章結論	27
第四章 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪接觸與齒印分析	28
4.1 前言	28

4.2 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪齒面接觸分析數學模式.....	29
4.3 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪接觸齒印分析的數學模式...	34
4.4 例題與討論	39
4.5 本章結論	64
第五章 具偏擺誤差之齒輪接觸與齒印分析.....	66
5.1 前言	66
5.2 偏擺誤差之數學模式.....	67
5.3 例題與討論	74
5.4 本章結論	82
第六章 結論與未來展望.....	83
6.1 結論	83
6.2 未來展望	84
參考文獻.....	86



圖目錄

圖 2.1 轉位滾削之齒輪其齒面的冠狀修整效果.....	5
圖 2.2 滾齒機之一般滾削路徑與冠狀齒形滾削路徑示意圖.....	6
圖 2.3 正轉位切削之齒輪外形.....	8
圖 2.4 負轉位切削之齒輪外形.....	9
圖 2.5 轉位齒輪之嚙合長度.....	11
圖 3.1 兩嚙合齒輪之座標系間的運動示意圖.....	13
圖 3.2 齒條刀 Σ_i 法向剖面圖.....	15
圖 3.3 齒條刀 Σ_i 之圓弧導角法向剖面圖.....	15
圖 3.4 形成具導程角之齒條刀的相關座標系關係.....	18
圖 3.5 刀具之位移量及齒輪冠狀修整量之關係.....	19
圖 3.6 空間中兩嚙合運動曲面之關係示意圖.....	23
圖 3.7 齒條刀與小齒輪之相對運動關係.....	23
圖 3.8 經修整之齒輪電腦輔助繪圖範例.....	27
圖 4.1 齒輪組具裝配誤差之座標系間的關係示意圖.....	30
圖 4.2 兩嚙合齒面與切平面座標系之空間關係示意圖.....	35
圖 4.3 固定一 θ_i 角時之 $r_t - Z_i$ 截面示意圖.....	35
圖 4.4 切平面座標系之關係圖.....	38
圖 4.5 具不同之齒面冠狀修整量之螺旋齒輪的理論接觸齒印.....	41
圖 4.6 不同之轉位修整的冠狀螺旋齒輪的理論接觸齒印.....	44
圖 4.7 不同壓力角之冠狀螺旋齒輪的理論接觸齒印.....	47
圖 4.8 冠狀量 $E_1=0.005\text{mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印.....	50
圖 4.9 冠狀量 $E_1=0.025\text{mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印.....	52
圖 4.10 冠狀量 $E_1=0.05\text{mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印.....	54

圖 4.11 轉位量 $x = 0.25$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差狀況下之接觸齒印	56
圖 4.12 轉位量 $x = -0.25$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差狀況下之接觸齒印	58
圖 4.13 壓力角 $\alpha_n = 19^\circ$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差時的接觸齒印	61
圖 4.14 壓力角 $\alpha_n = 21^\circ$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差時的接觸齒印	63
圖 5.1 齒輪之裝配偏擺示意圖	67
圖 5.2 具偏擺誤差之座標系關係圖	70
圖 5.3 具軸偏擺誤差之座標系關係圖	71
圖 5.4 具偏心誤差之座標系關係圖	72
圖 5.6 具偏心誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸齒印	78
圖 5.7 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的運動誤差	80
圖 5.8 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸齒印	81
圖 5.9 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸軌跡變化	82

表目錄

表 2.1 齒輪正負轉位特性比較表.....	8
表 4.1 具冠狀修整之螺旋齒輪的主要設計參數.....	40
表 4.2 具冠狀修整之螺旋齒輪在理想裝配下的接觸分析與運動誤差	40
表 4.3 具冠狀及轉位修整之螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配下的 接觸分析與運動誤差(1).....	42
表 4.4 具冠狀及轉位修整之螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配下的 接觸分析與運動誤差(2).....	43
表 4.5 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析 與運動誤差(1).....	45
表 4.6 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析 與運動誤差(2).....	45
表 4.7 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析 與運動誤差(3).....	46
表 4.8 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析 與運動誤差(4).....	46
表 4.9 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(1).....	49
表 4.10 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(2).....	51
表 4.11 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(3).....	53
表 4.12 具裝配誤差時之轉位修整螺旋齒輪的接觸分析(1).....	55
表 4.13 具裝配誤差時之轉位修整螺旋齒輪的接觸分析(2).....	57
表 4.14 具裝配誤差時之修整型螺旋齒輪的接觸分析(1).....	60
表 4.16 具裝配誤差時之修整型螺旋齒輪的接觸分析(2).....	62
表 4.17 漸開線螺旋齒輪齒面之各修整方式對於接觸分析與齒印狀況的影響	

及特性概略表.....	65
表 5.1 冠狀修整螺旋齒輪的主要設計參數.....	75
表 5.2 具偏心誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析.....	76
表 5.3 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析.....	79



符號表

$a_u^{(i)}$	齒條刀設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.2)
$a_l^{(i)}$	齒條刀設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.2)
b_i	齒條刀設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.2)
C	理論中心距(mm)	(圖 4.1 及 5.2)
C_x	嚙合中心距(mm)	(圖 4.1 及 5.2)
ΔC_x	平行中心距方向之裝配誤差(mm)	(圖 4.1 及 5.2)
ΔC_y	垂直中心距方向之裝配誤差(mm)	(圖 4.1 及 5.2)
ΔC_{Nx}	第 N 齒之平行中心距方向之裝配誤差(mm)	
ΔC_{Ny}	第 N 齒之垂直中心距方向之裝配誤差(mm)	
d_i	點 P_T 至齒面 Σ_i 的距離($i = 1, 2$)	(圖 4.3)
E	冠狀修整之刀具轉位量(mm)	(圖 3.4 及 3.5)
E_1	齒筋方向之冠狀量(mm)	(圖 3.5)
E_2	冠狀修整之刀具最大轉位量(mm)	(圖 3.4 及 3.5)
$f_u^{(i)}$	圓弧導角設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.3)
$f_l^{(i)}$	圓弧導角設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.3)
F_i	嚙合方程式($i = p, g$)	
ℓ_i	齒條刀齒面設計參數($i = p, g$)(mm)	(圖 3.2)
\mathbf{L}_{ij}	法向量轉換矩陣：(座標系 S_j 轉換至座標系 S_i)	
m_n	法向模數(mm/齒)	
m_s	傳動面之模數(mm/齒)	
$M^{(i)}$	齒條刀刀面之動點	(圖 3.2)
$M_0^{(i)}$	齒條刀刀面之固定點	(圖 3.2)
\mathbf{M}_{ij}	齊次座標轉換矩陣：(座標系 S_j 轉換至座標系 S_i)	
$\mathbf{M}_i^{(\phi)}$	位置向量轉換矩陣：(\mathbf{r}_i 旋轉 ϕ_i' 角)($i = \Delta D, \Delta \gamma$)	
$\mathbf{n}_c^{(i)}$	座標系 S_c 上齒條刀刀面之單位法線向量($i = p, g$)	
$\mathbf{n}_f^{(i)}$	座標系 S_f 上齒條刀刀面之單位法線向量($i = p, g$)	
N	第 N 齒($N = 1, 2, \dots, T$)	
\mathbf{N}	嚙合齒面之共同法線向量	
$\mathbf{N}_c^{(i)}$	座標系 S_c 上齒條刀刀面之法線向量($i = p, g$)	
O_i	座標系 S_i 之原點	
p_i	嚙合接觸點之位置向量的分量($i = x, y, z$)	

P	嚙合齒面之共同接觸點	
P_t	座標系 S_t 上之動點	(圖 4.3)
$P_{\Delta\gamma}$	齒輪旋轉軸之一端點	(圖 5.2)
r_a	軸承內環之外徑(mm)	
r_{bi}	嚙合節圓半徑($i=1,2$)(mm)	(圖 2.5)
r_{gi}	基圓半徑($i=1,2$)(mm)	(圖 2.5)
r_i	節圓半徑($i=1,2$)(mm)	(圖 3.1)
r_{ki}	齒頂圓半徑($i=1,2$)(mm)	(圖 2.5)
r_o	軸承內環移浮動範圍之半徑(mm)	
\mathbf{r}_t	切平面 T 上之向量	(圖 4.3)
$\mathbf{r}_{\Delta D}$	偏心誤差之位置向量	(圖 5.2)
$\mathbf{r}_{\Delta\gamma}$	軸偏擺誤差之位置向量	(圖 5.2)
$\mathbf{r}_{\Delta D}^{(f)}$	偏心誤差表示於固定座標系 S_f 之位置向量	
$\mathbf{r}_{\Delta\gamma}^{(f)}$	軸偏擺誤差表示於固定座標系 S_f 之位置向量	
\mathbf{R}_i	齒輪齒面軌跡之位置向量($i=1,2$)	
R_t	點 O_T 至點 P_T 之長度(mm)	(圖 4.3)
$R_B^{(i)}$	冠狀修整之圓弧曲率半徑($i=1,2$)(mm)	(圖 3.4)
$\mathbf{R}_c^{(i)}$	齒條刀刀面於座標系 S_c 之位置向量($i=p,g$)	
$\mathbf{R}_f^{(i)}$	齒條刀刀面、齒面軌跡於固定座標系 S_f 之位置向量($i=p,g,1,2$)	
$\mathbf{R}_r^{(i)}$	齒條刀刀面於座標系 S_r 之位置向量($i=p,g$)	
$\mathbf{R}_t^{(i)}$	齒輪齒面軌跡於座標系 S_t 之位置向量($i=1,2$)	
$S_i(X_i, Y_i, Z_i)$	座標系 S_i ($i=f,h,m,n,s,t,v$)	
$S_f^{(i)}(X_f^{(i)}, Y_f^{(i)}, Z_f^{(i)})$	座標系 $S_f^{(i)}$ ($i=1,2$)	
$S_j^{(i)}(X_j^{(i)}, Y_j^{(i)}, Z_j^{(i)})$	座標系 $S_j^{(i)}$ ($i=p,g, j=a,c,d,f,r,B$)	
T	嚙合齒面之共同切平面	(圖 3.6)
T_i	齒數($i=1,2$)	
u_i	齒條刀齒面設計參數($i=p,g$)(mm)	(圖 3.4)
$\mathbf{V}^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之速度	
$\mathbf{V}_f^{(i)}$	物體 i 在座標系 S_f 之速度	
$\mathbf{V}_f^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之速度表示於座標系 S_f	
W	齒寬(mm)	(圖 3.4)
x_i	轉位係數($i=p,g$)	

y	中心距補正係數	
α_{bs}	嚙合壓力角(度)	(圖 2.5)
α_s	傳動面之壓力角(度)	
$\alpha_n^{(i)}$	法向壓力角($i = p, g$)(度)	(圖 3.2 及 3.3)
β_i	螺旋角($i = p, g$)(度)	(圖 3.4)
γ_i	靠模版參數($i = p, g$)(度)	(圖 3.4)
γ_{oi}	靠模版參數極限值($i = p, g$)(度)	(圖 3.4)
$\Delta\gamma_h$	水平軸向裝配誤差(度)	(圖 4.1)
$\Delta\gamma_v$	垂直軸向裝配誤差(度)	(圖 4.1)
$\Delta\gamma_{Nh}$	第 N 齒之水平軸向裝配誤差(度)	
$\Delta\gamma_{Nv}$	第 N 齒之垂直軸向裝配誤差(度)	
δ	Z_m 軸與 Z_n 軸之夾角(度)	(圖 4.4)
ε	Z_n 軸與 Z_t 軸之夾角(度)	(圖 4.4)
ε_α	橫向接觸比	
θ_t	切平面 T 上之角度(度)	(圖 4.2)
$\theta_u^{(i)}$	圓弧導角參數(度)	(圖 3.3)
$\theta_l^{(i)}$	圓弧導角參數(度)	(圖 3.3)
λ_i	導程角($i = p, g$)(度)	(圖 3.4)
$\rho_u^{(i)}$	圓弧導角之半徑(mm)	(圖 3.3)
$\rho_l^{(i)}$	圓弧導角之半徑(mm)	(圖 3.3)
ϕ_i	齒輪創成時之旋轉角($i = 1, 2$)(度)	(圖 3.7)
ϕ_j	偏擺誤差之位置向量 \mathbf{r}_j 的旋轉角 ($j = \Delta D, \Delta\gamma$)(度)	(圖 5.3 及 5.4)
ϕ_N	齒輪旋轉至第 N 齒之角度(度)	
ϕ_i'	齒輪嚙合時之旋轉角($i = 1, 2$)(度)	(圖 4.1)
$\Delta\phi_2$	運動誤差(弧度-秒)	
ω_i	齒輪之旋轉角速度(純量)($i = 1, 2$)(弧度/秒)	
$\boldsymbol{\omega}_i$	齒輪之旋轉角速度($i = 1, 2$)(弧度/秒)	(圖 3.1 及 3.7)
Σ_i	齒條刀、齒輪之齒面($i = p, g, 1, 2$)	

第一章 緒論

1.1 前言

漸開線螺旋齒輪主要應用於平行軸的傳動，而螺旋齒輪其實亦可視為由無限多個極薄的正齒輪，沿著齒輪之旋轉軸作螺旋運動所組合而成。由於漸開線螺旋齒輪(Involute Helical Gear)相對於正齒輪來說，因為具有較大的齒輪接觸比，齒輪嚙合應力較小且運轉較平順，故廣泛地被產業界所使用。為配合實際製造和使用之問題以及特殊之需求，漸開線螺旋齒輪經常必須對其齒面進行修整，以改變齒輪之接觸比(Contact Ratio)、齒輪之強度與齒面接觸齒印等齒輪性質及避免齒輪過切(Tooth Undercutting)的問題。一般漸開線螺旋齒輪之齒面修整主要有冠狀(Crowning)及齒形修整(Profile Modification)，冠狀修整乃是沿著漸開線螺旋齒輪之齒筋方向，亦即導程(Lead)方向，利用刀具將漸開線螺旋齒輪齒筋方向兩端之齒肉進行微量之刮除，使得齒輪在齒筋方向兩端之齒厚(Tooth Thickness)略微縮小；齒形修整則是針對漸開線螺旋齒輪之齒形(Profile)作改變，可調整齒輪壓力角(Pressure Angle)之角度及轉位量(Amount of Shift)，或對齒輪之齒冠(Addendum)或齒根(Dedendum)進行特殊之修整加工，使齒輪之齒形產生變化。一齒輪對在嚙合時，其接觸點或接觸線將因齒面受力而造成彈性變形，使得其接觸點或接觸線變成一個接觸區域，而此接觸區域一般是呈現橢圓之形狀，故亦稱為接觸橢圓或接觸齒印(Bearing Contact)，亦即嚙合之兩齒輪接觸時於其齒面上所產生之接觸區域。工業上所進行之齒輪齒印試驗，一般是使用紅丹作為顯示齒印之顏料，而在理論分析模擬齒輪之齒印時，則多以紅丹之顆粒大小作為理論模擬的依據。無論是具冠狀或經過齒形修整之漸開線螺旋齒輪，其接觸狀況皆會隨著齒輪修整量之多寡而產生變化，藉由齒印分析則可直接觀察到該齒輪於嚙合時之接觸狀況，並能更進

一步了解改變冠狀修整量與轉位量之齒形修整對漸開線螺旋齒輪接觸狀況之影響。

1.2 文獻回顧

漸開線螺旋齒輪是一種廣為工業界所使用之齒輪，故已有不少相關研究，冠狀及齒形修整亦是工業界所普遍運用的技術，但對進行冠狀及齒形修整之漸開線螺旋齒輪的接觸狀況及接觸齒印之探討與研究尚不多見。Litvin[1][2]提出齒輪理論之相關探討及接觸分析。蔡等人[3][4]於 1986 年推導漸開線螺旋齒輪之數學模式，以及提出漸開線螺旋齒輪之電腦模擬與接觸分析。蔡等人[5]於 1988 年進行冠狀正齒輪之研究。王[6]於齒輪原理概要中提及冠狀與轉位之理論與相關之齒輪方程式。李[7]論述正齒輪之轉位設計與運用。仙波[8]對轉位正齒輪與轉位螺旋齒輪有諸多探討及研究。陳[9]於 2001 年提出假想齒輪刀具之修整型螺旋齒輪的特性研究。梅山[10]於 1995 年以三維切線極座標建立具齒面修整之螺旋齒輪方程式，並探討壓力角、螺旋角(Helix Angle)及冠狀與齒面修整對傳動誤差(Transmission Error)之最佳化(Optimization)。張[11]於 1996 年提出模擬電腦數控滾齒機，以滾削冠狀螺旋齒輪並建立相關之齒輪齒面數學模式和進行齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis, TCA)。蔡[12]於 1998 年提出以圓弧型之磨輪(Grinding Wheel)或切削刀具來創成修整型螺旋齒輪並探討在負載下的齒印分析。王[13]於 1997 年研究修整型螺旋齒輪之接觸分析。張[14]於同年進行修整型螺旋齒輪之傳動誤差之測試與分析。曾[15]及趙[16]於 2005 年分別探討圓弧線圓柱型齒輪和球形齒輪之齒面數學模式及接觸齒印分析及其相關研究。

1.3 研究內容

經冠狀修整與齒形修整之漸開線螺旋齒輪，除齒輪之齒筋及齒形會改變外，其接觸狀況及齒印亦會依齒輪之修整方式及修整量而有所不同，本論文即探討漸開線螺旋齒輪其冠狀量、轉位量及壓力角改變時，齒輪之接觸齒印會產生何種變化。首先將利用 Litvin[1][2]所提出之齒輪原理及蔡等人[3]所發展之齒輪數學模式的推導流程，來建立具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的數學模式。接著運用電腦輔助設計技術，對經過齒形修整的漸開線螺旋齒輪進行接觸齒印模擬與分析，探討不同之齒輪修整量時之接觸齒印，並假設嚙合齒輪組具有裝配誤差的情形下，經修整之漸開線螺旋齒輪的接觸特性。本研究更考量齒輪在製造與裝配之實務問題，亦即製造或裝配誤差具有非定值的偏擺誤差之情況下，漸開線螺旋齒輪的接觸狀態的變化。

茲臚列本論文之研究大綱如下：

第一章為緒論。概述漸開線螺旋齒輪之冠狀修整與齒形修整及齒印分析，並進行文獻之回顧與介紹各章之研究內容。

第二章則探討漸開線螺旋齒輪之冠狀修整與齒形修整。介紹本研究中漸開線螺旋齒輪所使用的修整方法，並做為後續章節建立齒輪齒面數學模式之依據。

第三章係探討具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的齒面數學模式。運用創成共軛運動對之相關理論為基礎，建立具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的齒面數學模式。

第四章探討具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪接觸與齒印分析。依據第三章所推導之齒面數學模式配合齒輪組之裝配狀態與齒面接觸條件，建立齒輪對之接觸分析模式並據以模擬一對齒輪的嚙合傳動狀態及接觸齒印。

第五章則探討具齒面修整之螺旋齒輪在具有偏擺誤差時之齒輪接觸模擬與齒印分析。建立齒輪對在具有偏擺誤差時之關係數學模式，進而探討具偏

擺誤差且具有冠狀修整之漸開線螺旋齒輪的接觸模擬與齒印變化。
第六章為本論文之結論與未來展望。



第二章 冠狀修整與齒形修整

2.1 冠狀修整

在齒輪製造與裝配的過程中，製造與裝配誤差是在所難免，漸開線螺旋齒輪本身雖具有容許些微中心距誤差之特性，但在齒輪旋轉軸呈軸向裝配偏差的情況，除造成嚙合之齒輪組的運動誤差(Kinematical Error)增加外，齒輪嚙合時之接觸齒印的位置和分佈，亦會從原本理想組裝狀態之平均分佈於齒面之齒筋方向轉而偏至齒筋方向之兩端面，亦即接觸齒印可能會落於齒輪之端面上，造成所謂的齒緣接觸(Edge Contact)。齒緣接觸除了會造成齒面應力集中外，亦可能導致齒面的崩壞和減少齒輪之使用壽命，也會因為齒輪的傳動不平穩而產生振動及噪音問題。

為了因應上述情形之產生，產業界常對齒輪進行齒面冠狀修整，如圖 2.1 所示，則是工業上常用的改善之道，亦即是沿著齒輪之齒筋方向，利用刀具轉位滾削的方式，將齒輪齒筋方向兩端之齒肉做微量的刮除，使其兩端之齒厚縮小，以避免因裝配時具有旋轉軸之軸向偏差，而導致接觸齒印偏向齒筋方向之兩端面，使得齒輪齒面之接觸位置可以落於齒筋之中央區域。

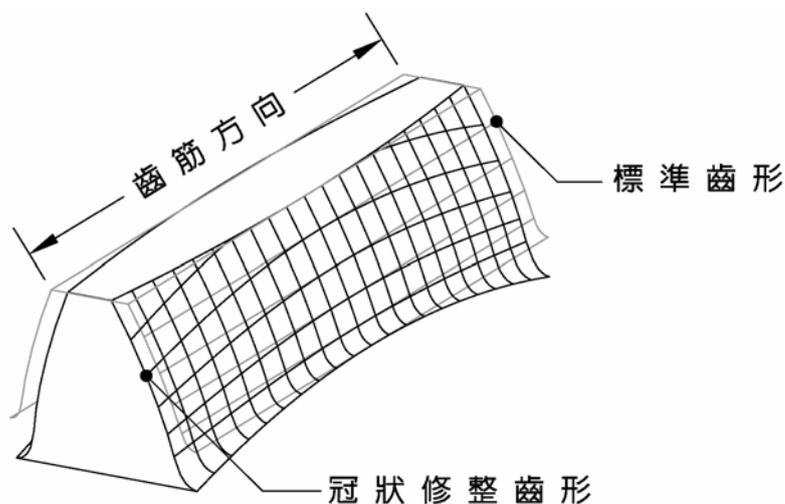


圖 2.1 轉位滾削之齒輪其齒面的冠狀修整效果

在實際滾削齒形具有冠狀效果之齒輪時，乃是使用滾齒刀具於滾齒時加入冠狀滾削，或使用刮刀(Shaving Cutter)或磨輪對齒輪進行再加工。加工路徑的選擇，在傳統滾齒機是使用靠模板(Curved-Template Guide)來控制刀具與工件軸心之距離，如圖 2.2 所示，亦即控制轉位量以達到齒形具冠狀之目的。靠模板之曲線設計雖可依製造者決定，但一般均設計及考慮靠模板曲線為一圓弧。

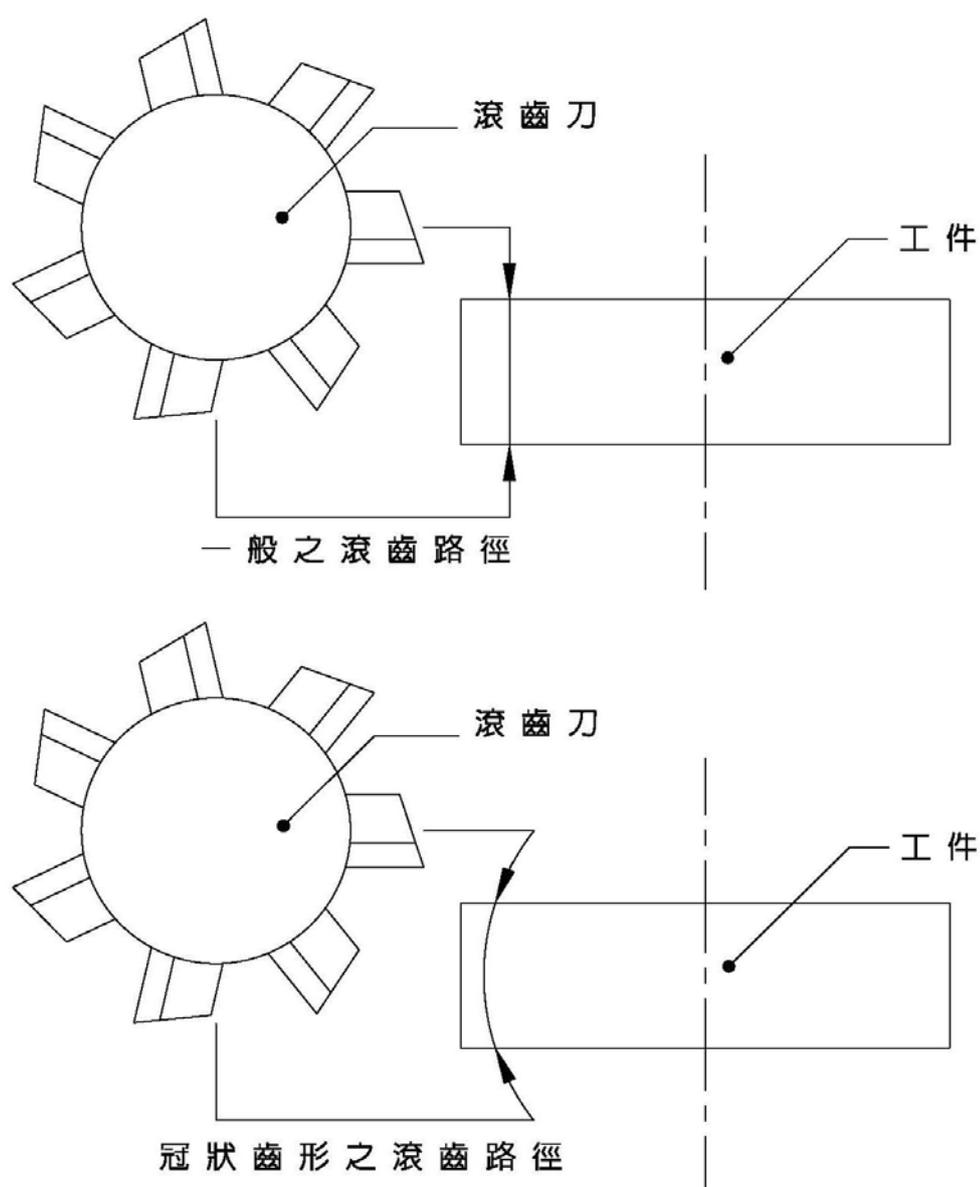


圖 2.2 滾齒機之一般滾削路徑與冠狀齒形滾削路徑示意圖

2.2 齒形修整

漸開線齒輪在設計製造時，若選用之齒數過少，則齒輪會發生所謂的齒形過切(Tooth Undercutting)現象，亦即齒輪之齒根部分在創成過程中會被刀具之齒冠過度的切除，於是在齒輪之截面上可發現其齒形上產生一尖點，亦即所謂的奇異點(Singular Point)，造成漸開線齒形之斜率的不連續。齒輪之齒形過切除了影響齒輪傳動的平穩外，齒輪運轉時也會伴隨產生振動及噪音，更可能因齒輪之齒根部分被過度的切除，而導致齒輪之齒根應力集中而使得該齒輪易於發生崩壞斷裂與影響齒輪之壽命。此外，齒形之過切也會影響到齒輪的接觸比，亦影響到齒輪運轉時之振動、噪音和運轉的平穩度，一般而言，接觸比越高的齒輪對，其振動及噪音較低，傳動平穩度也會較佳。

產業界常用之齒形修整即為應對上述情況的齒輪修整方法，藉由齒輪之齒形改變以減少齒形過切現象或提高接觸比或避免齒緣接觸發生，進而改善齒輪之振動、噪音和傳動平穩度等問題。齒形修整的方式除了對齒冠或齒根進行特殊的再加工，於漸開線齒輪設計製造時使用適當的齒形轉位切削，亦因漸開線齒輪容許中心距誤差的特性，而為漸開線齒輪特有的常用齒形修整法；另外調整齒輪之壓力角亦為齒形修整常用之方式。

茲以齒條刀(Rack Cutter)來模擬切製齒輪，齒輪轉位修整之轉位量是指齒條刀在切製齒輪時，齒條刀之基準節線(Standard Pitch Line)與齒輪之基準節圓(Standard Pitch Circle)之切線，沿著兩者之共同法線所量得之距離，而此轉位量等於齒輪模數 m (Module)與轉位係數 x (Shifted Coefficient)的乘積。當基準節線與基準節圓相離時，其轉位稱為正轉位，轉位量稱為正轉位量，如圖 2.3 所示。當基準節線與基準節圓相交時，該齒輪之轉位稱為負轉位，轉位量則為負轉位量，如圖 2.4 所示。正轉位與負轉位切削對漸開線齒輪之齒形修整的效果及影響不同，齒輪之轉位特性概略歸納如表 2.1 所

表 2.1 齒輪正負轉位特性比較表

	正轉位	負轉位
過切現象	減少	增加
接觸比	下降	上升
作用壓力角	變大	變小
齒根強度	略增	略減
齒頂	變尖	變寬
全齒深	變短	變長
振動與噪音	增加	減少

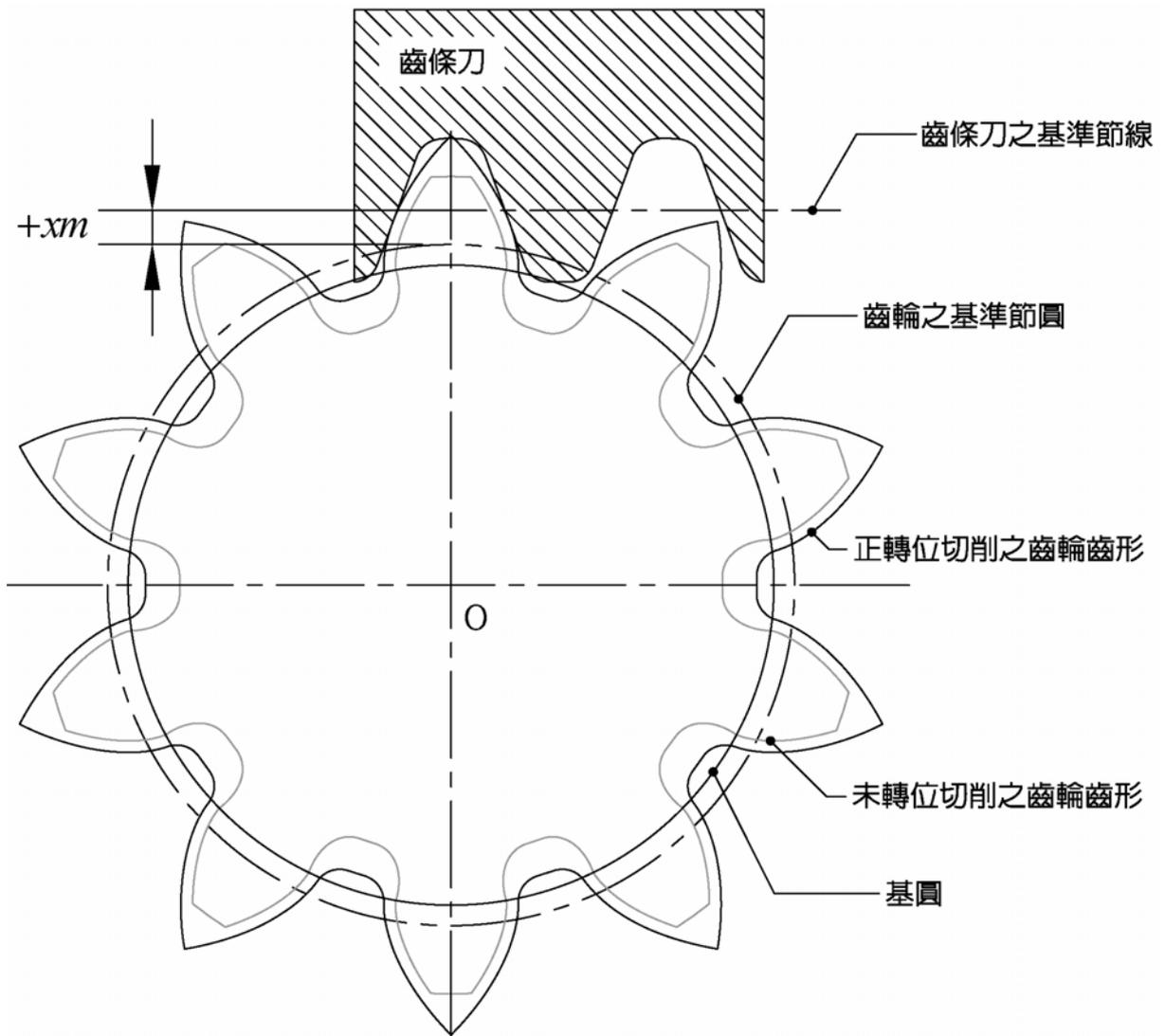


圖 2.3 正轉位切削之齒輪外形

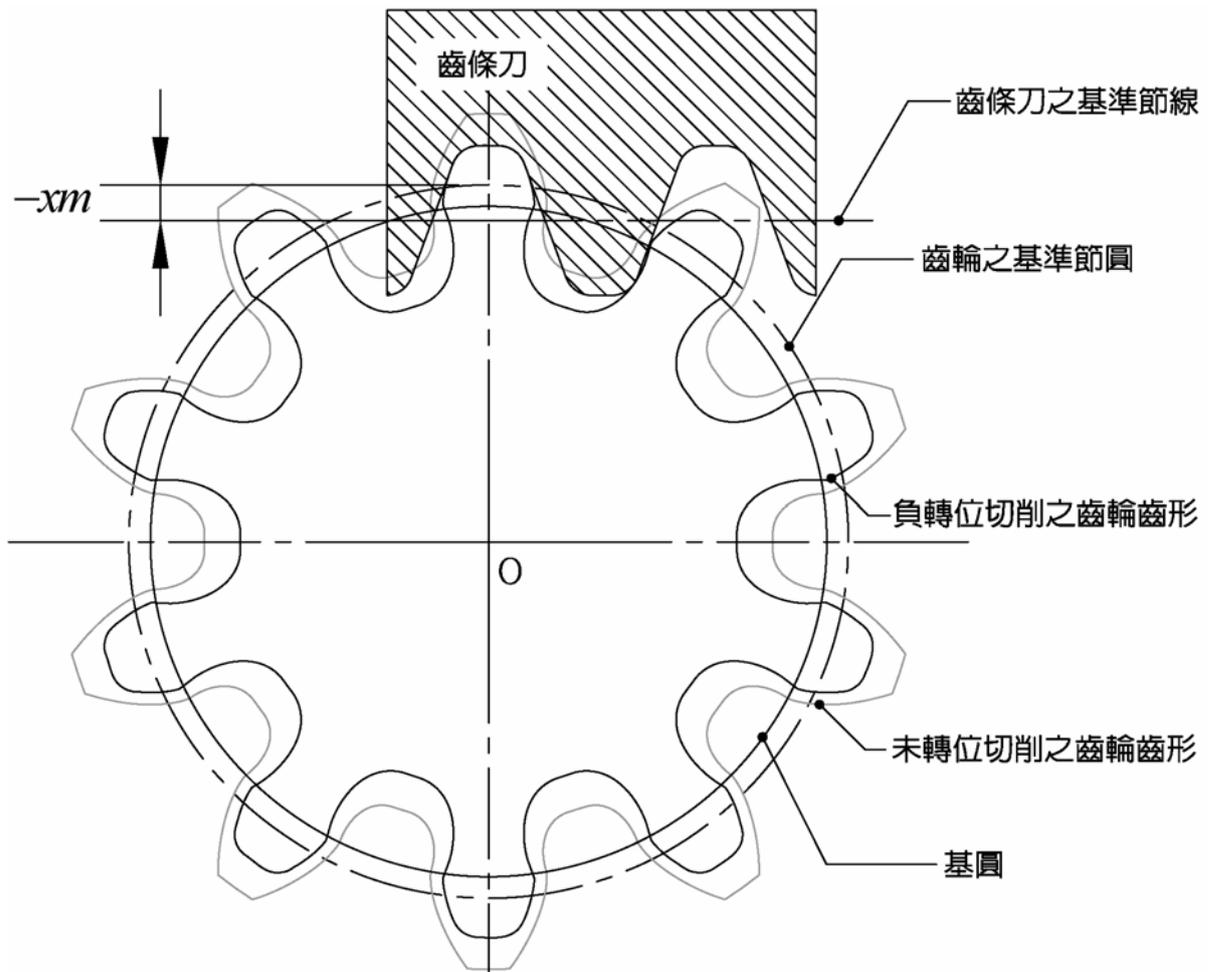


圖 2.4 負轉位切削之齒輪外形

示。一般來說，齒輪正轉位切削主要是為了避免或減輕過切現象的發生，可提升齒根強度，但是會降低齒輪接觸比；負轉位切削與正轉位切削之效果剛好相反，一般而言，負轉位切削可增加齒輪之接觸比，但卻也會增加齒形過切現象的發生及齒根強度之下降。因此，在使用轉位切削來進行齒形修整時，必須依齒輪之特殊需求及條件來適當選擇正轉位或負轉位切削以及適當之轉位量。

若以調整壓力角的方式來進行齒輪之齒形修整，其主要之目的是在改變齒輪之接觸比及齒輪強度，而齒輪之橫向接觸比(Transverse Contact Ratio)是指在傳動面上，兩齒輪之嚙合長度(Contact Length)與法向節距(Normal Pitch)之比值，嚙合長度即如圖 2.5 所示，其中的 α_{bs} 是傳動面上之作用壓力角(Operating Pressure Angle)，為兩齒輪於嚙合時所呈現的壓力角， r_g 與 r_k 分別為齒輪基圓半徑及齒頂圓半徑， r_b 則為轉位齒輪嚙合時之節圓半徑，王[6]於書中以數學式表示螺旋齒輪之橫向接觸比 ε_α 如下：

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} + \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} - C_x \sin \alpha_{bs}}{\pi m_s \cos \alpha_s} \quad (1.1)$$

其中：

下標 1 及 2 分別表示齒輪 1 與齒輪 2， C_x 為兩齒輪嚙合之中心距離， m_s 為齒輪傳動面之模數， α_s 則為齒輪傳動面之壓力角。

由上式中可看出齒輪接觸比與壓力角之關係，而作用壓力角與齒輪之壓力角乃是呈現正相關，故於其他齒輪參數固定的條件下，齒輪壓力角變小時，其接觸比會增大；反之，當齒輪壓力角變大時，則其接觸比會下降。然而齒輪之壓力角亦不宜過小，較小的齒輪壓力角雖然會增加齒輪之接觸比，但也容易造成齒輪之過切，而較小壓力角之齒輪其齒形則會變得較為細長，且易增加齒根應力集中的效應，造成齒輪之齒根強度減弱而可能導致輪齒的斷裂。

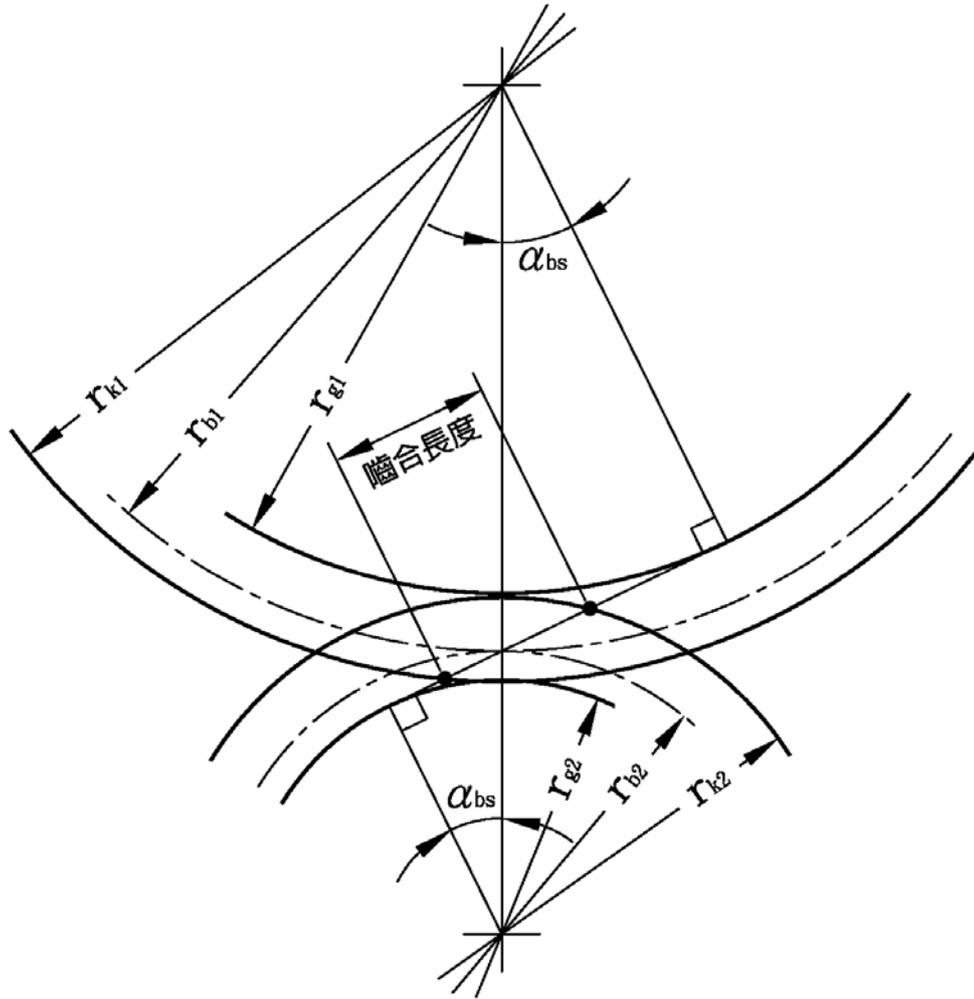


圖 2.5 轉位齒輪之嚙合長度

第三章 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的齒面數學模式

3.1 前言

一對嚙合的漸開線螺旋齒輪，可分為一小齒輪(Pinion)與一大齒輪(Gear)，大小齒輪一般在滾齒製造時可用同一把滾刀來滾削，而在滾齒機上一般所使用的滾齒刀(Hob Cutter)之滾齒動作，即可視為是齒條刀作平移運動及工件作旋轉運動所構成之相對運動。因此，在模擬齒輪之創成時，其小齒輪可視為由一把齒條刀切製而成，而大齒輪則可由另一把齒條刀切製而成。基本上，在齒輪之切製過程的每一瞬間，齒條刀與被切製的齒輪可視為線接觸，而所切製的大小齒輪嚙合時亦為線接觸。圖 3.1 為兩齒輪在嚙合時，其齒輪之節圓相互運動與相關座標系之關係示意圖，此圖亦同時顯示以齒條刀在切製小齒輪與大齒輪時之創成運動示意圖，其中座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 係固聯於小齒輪之座標系，而座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 係固聯於大齒輪之座標系。當切製小齒輪時，齒條刀置於實心之小圓筒(Cylinder)形工件的上方，小圓筒形工件之半徑為小齒輪之節圓(Pitch Circle)半徑加上小齒輪之齒冠高，亦即小齒輪之外徑，齒條刀及小圓筒形工件在創成時之相對運動和方向示意如圖 3.1 所示。當切製大齒輪時齒條刀則置於實心之大圓筒形工件下方，大圓筒形工件之半徑為大齒輪之節圓半徑加上大齒輪之齒冠高，齒條刀及大圓筒形工件在創成時之相對運動和方向示意圖亦如圖 3.1 所示。因漸開線螺旋齒輪是由齒條刀所切製創成而成，因此，欲推導漸開線螺旋齒輪之齒面數學模式時，必須先從齒條刀之數學模式著手，再利用齊次座標(Homogeneous Coordinates)轉換矩陣方程式，根據齒條刀創成齒輪以及冠狀修整之路徑進行座標轉換，並依微分幾何原理找出接觸點或線的位置及其在接觸面上的共同法線向量(Common Normal Vector)，同時加入轉位之齒形修整，再配合齒面運動機構之嚙合方程式(Equation of Meshing)，如

此即可分別推導出小齒輪與大齒輪之齒面數學方程式。

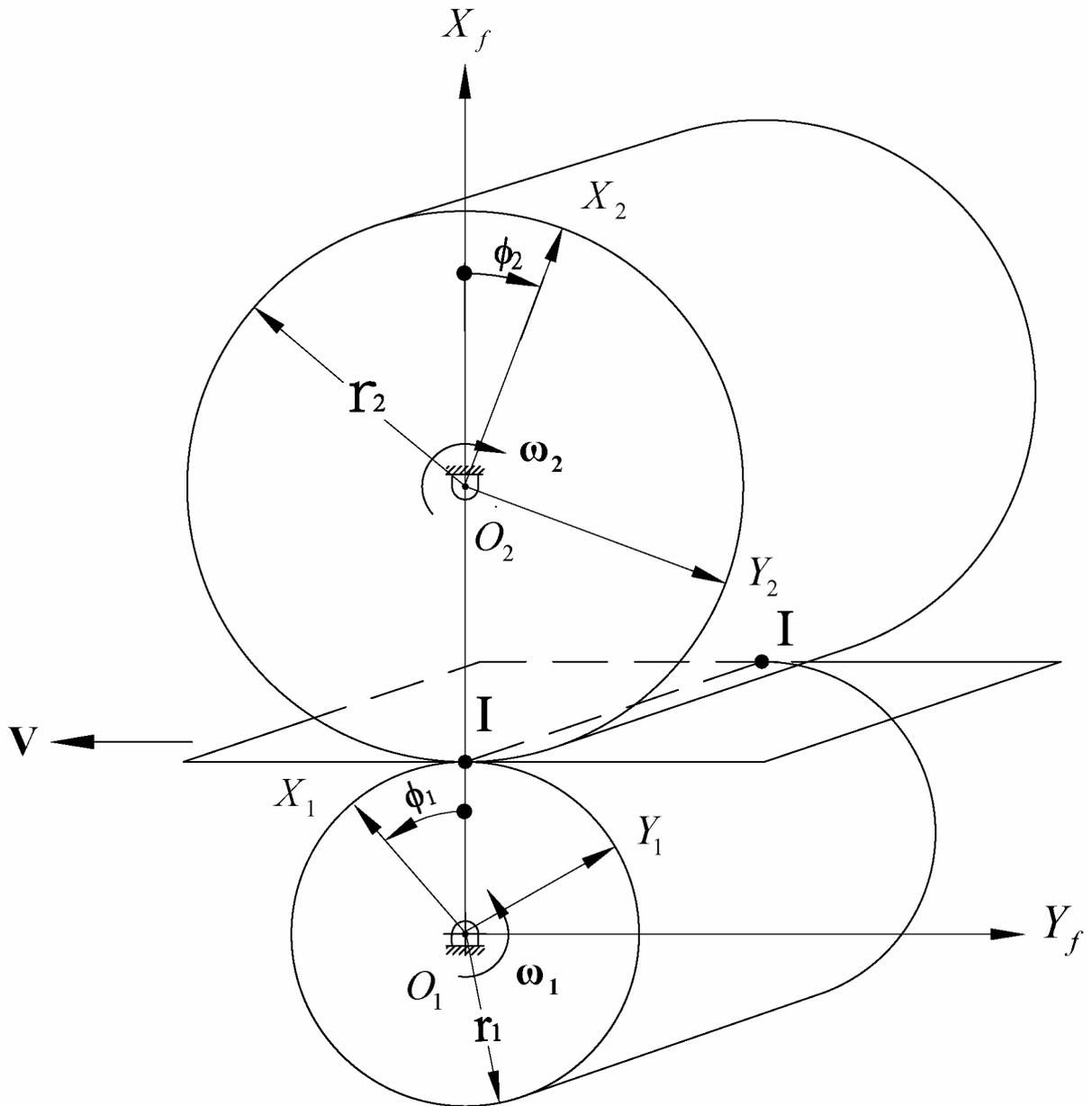


圖 3.1 兩嚙合齒輪之座標系間的運動示意圖

3.2 齒條刀之齒面數學模式

如前所述，漸開線螺旋齒輪可由齒條刀所切製創成，茲假設 Σ_p 和 Σ_g 分別代表切製小齒輪和大齒輪之兩把齒條刀之刀具面，被創成之漸開線螺旋齒輪的大齒輪和小齒輪之齒面則分別以 Σ_1 與 Σ_2 表示，亦即齒條刀之刀

具面 Σ_p 切製小齒輪之齒面 Σ_1 ，而齒條刀之刀具面 Σ_g 則切製大齒輪之齒面 Σ_2 。如圖 3.2 所示之齒條刀 Σ_p 和 Σ_g ，其兩側呈左右對稱，而齒條刀之主體為其直邊刀刃，直邊刀刃的兩端分別接續齒條刀之齒根導角(Dedendum Fillet)與齒頂導角(Addendum Fillet)，亦即齒條刀之上導角(Upper Fillet)與下導角(Lower Fillet)。在齒條刀切製齒輪的過程中，齒條刀之直邊將創成齒輪之漸開線齒形部分，齒條刀之齒根導角將會創成出齒輪之齒頂導角，而齒條刀之齒頂導角將會創成出齒輪之齒根導角。於本論文往後各章節中，為避免齒條刀與齒輪之導角產生混淆，齒條刀之齒根導角與齒頂導角改以齒條刀之上導角與下導角稱呼之。此外，由於無論大齒輪或小齒輪，其切製流程均相同，故 Σ_p 和 Σ_g 皆以 Σ_i 表示，往後各參數中之 i 即代表 p 和 g ，即 $i = p, g$ 。

圖 3.2 所示為齒條刀 Σ_i 之法向剖面圖(Normal Cross Section)，其中 $\alpha_n^{(i)}$ 係法向壓力角(Normal Pressure Angle)， ℓ_i 則為直邊刀刃之一設計參數，表示由固定點 $M_0^{(i)}$ 沿著齒刀面到其直邊之任一動點 $M^{(i)}$ 之距離，即 $\ell_i = \left| \overline{M_0^{(i)}M^{(i)}} \right|$ ，其範圍定義為 $0 \leq \ell_i \leq \left| \overline{M_0^{(i)}M^{(i)}} \right|$ 。圖 3.3 則為圖 3.2 中齒條刀 Σ_i 之上下導角之放大圖，其中 $\rho_u^{(i)}$ 係齒條刀之上導角的圓弧半徑， $\rho_l^{(i)}$ 則為其下導角之圓弧半徑， $\theta_u^{(i)}$ 與 $\theta_l^{(i)}$ 分別是描述上導角與下導角的圓弧參數，而 $\alpha_n^{(i)} \leq \theta_u^{(i)} \leq \pi/2$ 和 $\alpha_n^{(i)} \leq \theta_l^{(i)} \leq \pi/2$ 則為此兩參數之定義範圍。

在圖 3.2 及圖 3.3 中所示之齒條刀的法向剖面，其直邊及上下導角的各相關參數說明如下：

$\alpha_n^{(i)}$ 表法向壓力角(Normal Pressure Angle)；

$a_u^{(i)}$ 表齒根高，於本研究中設定 $a_u^{(i)} = 1.0m_n$ ， m_n 為法向模數(Normal Module)；

$a_l^{(i)}$ 表齒冠高，於本研究中設定 $a_l^{(i)} = 1.0m_n$ ；

$2b_i$ 表齒條刀法向節距之一半，亦等同於齒厚，即 $2b_i = P_n/2$ ，其中 P_n 為周節(Circular Pitch)；

$f_u^{(i)}$ 表上導角起始點位置參數，於本研究中設定 $f_u^{(i)} = 0.1m_n$ ；

$f_l^{(i)}$ 表下導角起始點位置參數，於本研究中設定 $f_l^{(i)} = 0.15m_n$ ；

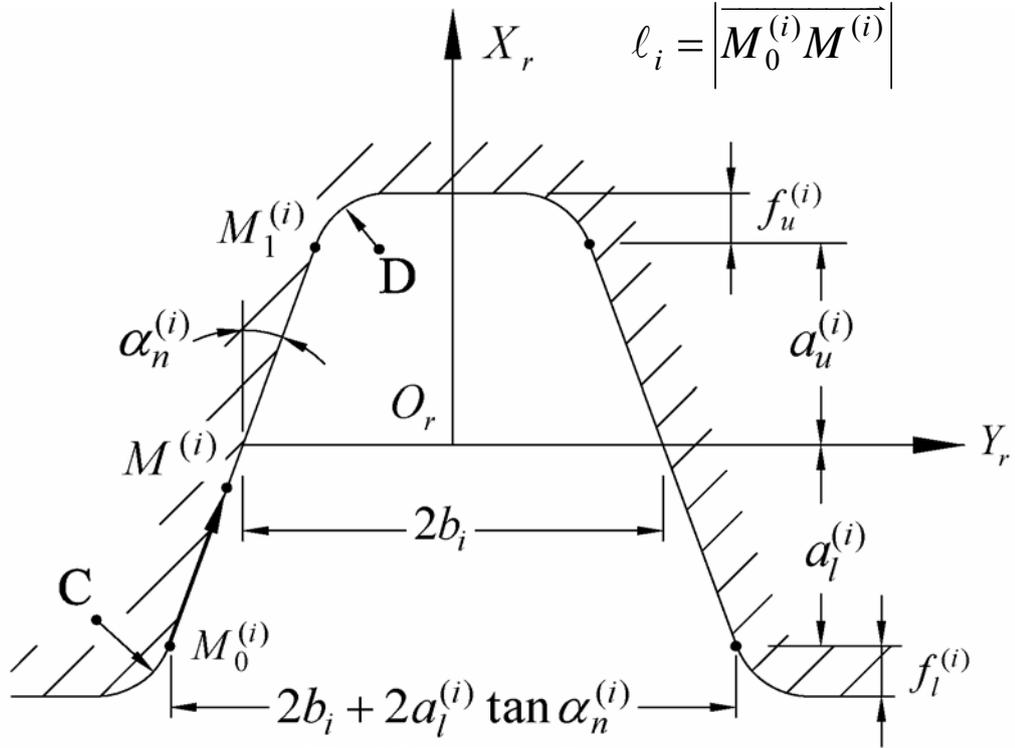


圖 3.2 齒條刀 Σ_i 法向剖面圖

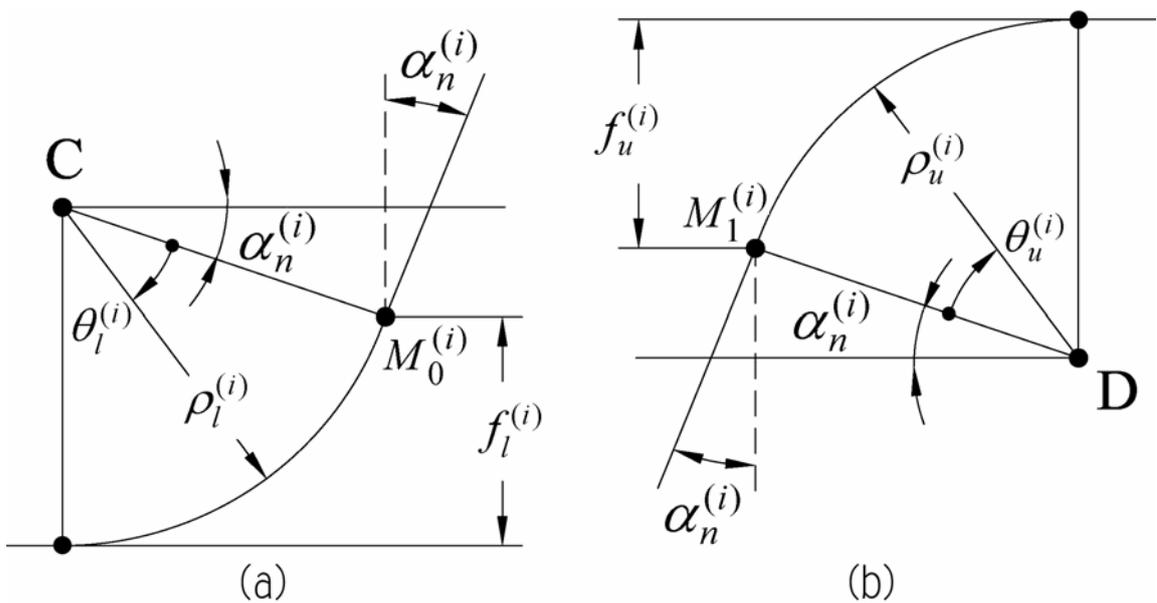


圖 3.3 齒條刀 Σ_i 之圓弧導角法向剖面圖

茲將齒條刀 Σ_i 之各部分的法向剖面在 $S_r^{(i)}(X_r^{(i)}, Y_r^{(i)}, Z_r^{(i)})$ 座標系之通式表示式為：

$$\mathbf{R}_r^{(i)} = \begin{bmatrix} x_r^{(i)} \\ y_r^{(i)} \\ z_r^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

由圖 3.2 及圖 3.3 可知，齒條刀 Σ_i 之左半邊的直邊方程式為

$$\mathbf{R}_{lsr}^{(i)} = \begin{bmatrix} \ell_i \cos \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \\ \ell_i \sin \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} - b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

齒條刀 Σ_i 之左半邊上導角方程式為

$$\mathbf{R}_{lur}^{(i)} = \begin{bmatrix} \rho_u^{(i)} \sin \theta_u^{(i)} - \rho_u^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} + a_u^{(i)} \\ -\rho_u^{(i)} \cos \theta_u^{(i)} + \rho_u^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} + a_u^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} - b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

齒條刀 Σ_i 之左半邊下導角方程式為

$$\mathbf{R}_{lur}^{(i)} = \begin{bmatrix} -\rho_l^{(i)} \sin \theta_l^{(i)} + \rho_l^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \\ \rho_l^{(i)} \cos \theta_l^{(i)} - \rho_l^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} - b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

齒條刀 Σ_i 之右半邊直邊方程式為

$$\mathbf{R}_{rsr}^{(i)} = \begin{bmatrix} \ell_i \cos \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \\ -\ell_i \sin \alpha_n^{(i)} + a_l^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} + b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

齒條刀 Σ_i 之右半邊上導角方程式為

$$\mathbf{R}_{\text{rur}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \rho_u^{(i)} \sin \theta_u^{(i)} - \rho_u^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} + a_u^{(i)} \\ \rho_u^{(i)} \cos \theta_u^{(i)} - \rho_u^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} - a_u^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} + b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

齒條刀 Σ_i 之右半邊下導角方程式為

$$\mathbf{R}_{\text{rlr}}^{(i)} = \begin{bmatrix} -\rho_l^{(i)} \sin \theta_l^{(i)} + \rho_l^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} - a_l^{(i)} \\ -\rho_l^{(i)} \cos \theta_l^{(i)} + \rho_l^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} + a_l^{(i)} \tan \alpha_n^{(i)} + b_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

茲考慮欲模擬切製具螺旋導程角(Lead Angle) λ_i 且又具有轉位之齒條刀外形時，則齒條刀之正交剖面應依如圖 3.4 所示之移動路徑運動，才可形成此齒條刀之外形。座標系 $S_c^{(i)}(X_c^{(i)}, Y_c^{(i)}, Z_c^{(i)})$ 為齒條刀之固定座標系，其中 $Y_c^{(i)} - Z_c^{(i)}$ 平面為齒條刀之基準節線和被切製之齒輪節圓所在平面。座標系 $S_a^{(i)}(X_a^{(i)}, Y_a^{(i)}, Z_a^{(i)})$ 為一輔助的移動座標系， $Y_a^{(i)}$ 軸與 $Z_c^{(i)}$ 軸間的夾角為被創成齒輪之螺旋導程角 λ_i ， $Z_a^{(i)}$ 軸與 $Z_c^{(i)}$ 軸間的夾角則為被創成齒輪之螺旋角 β_i 。在切製無冠狀修整的漸開線螺旋齒輪時，齒條刀 Σ_i 之法向剖面需置放於 $X_a^{(i)} - Y_a^{(i)}$ 平面， u_i 為一設定之參數，表示由固定座標系的原點 $O_c^{(i)}$ 到移動座標系的原點 $O_a^{(i)}$ 之距離，即 $u_i = \left| \overline{O_c^{(i)} O_a^{(i)}} \right|$ ，而齒條刀 Σ_i 係沿著 $\overline{O_c^{(i)} O_a^{(i)}}$ 移動以切製齒輪。若欲切製具有冠狀修整齒形之漸開線螺旋齒輪，則需令齒條刀 Σ_i 之法向剖面固聯於座標系 $S_r^{(i)}$ ，且以 $O_B^{(i)}$ 為原點 $R_B^{(i)}$ 為半徑，使其與座標系 $S_a^{(i)}$ 一同沿著 $\overline{O_c^{(i)} O_a^{(i)}}$ 的方向移動，座標系 $S_r^{(i)}$ 與座標系 $S_a^{(i)}$ 之距離是一個變動的參數 E (如圖 3.4)，可表示齒條刀於某一位置之轉位量，亦即滾齒機在滾切時滾齒刀於某一位置之轉位量，而齒輪在節圓處的齒筋方向冠狀量之值則以 E_1 表示(如圖 3.5(a)與(b)所示)； γ_i 則為靠模板曲線參數之一，用以決定刀具於靠模板曲線的位置，當 $\gamma_i = \gamma_{oi}$ 時，刀具的轉位量 E 達到最大值 E_2 (如圖 3.4 及圖 3.5(a)與(c)所示)，此時齒筋方向之冠狀修整量亦達到最

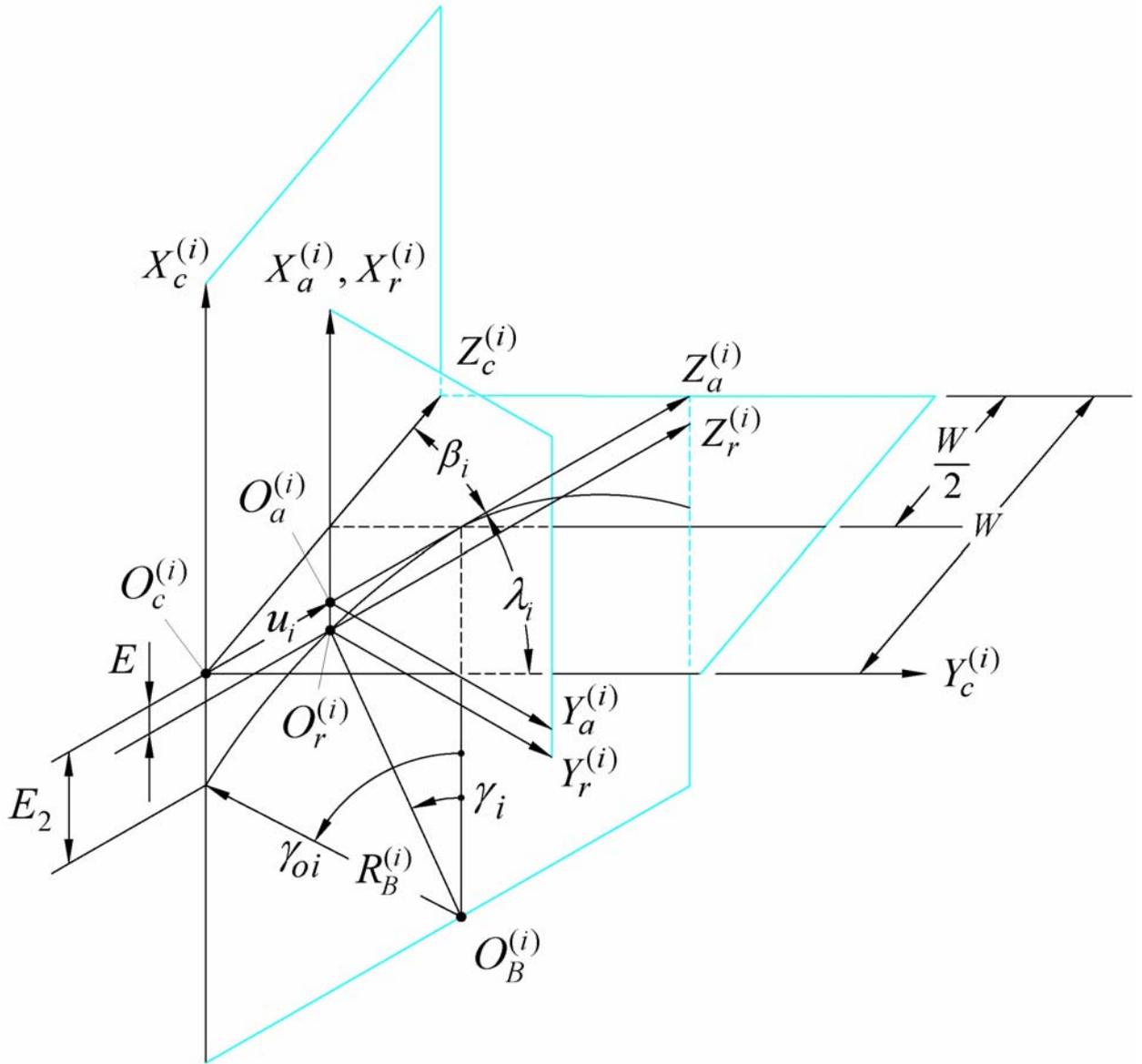


圖 3.4 形成具導程角之齒條刀的相關座標系關係

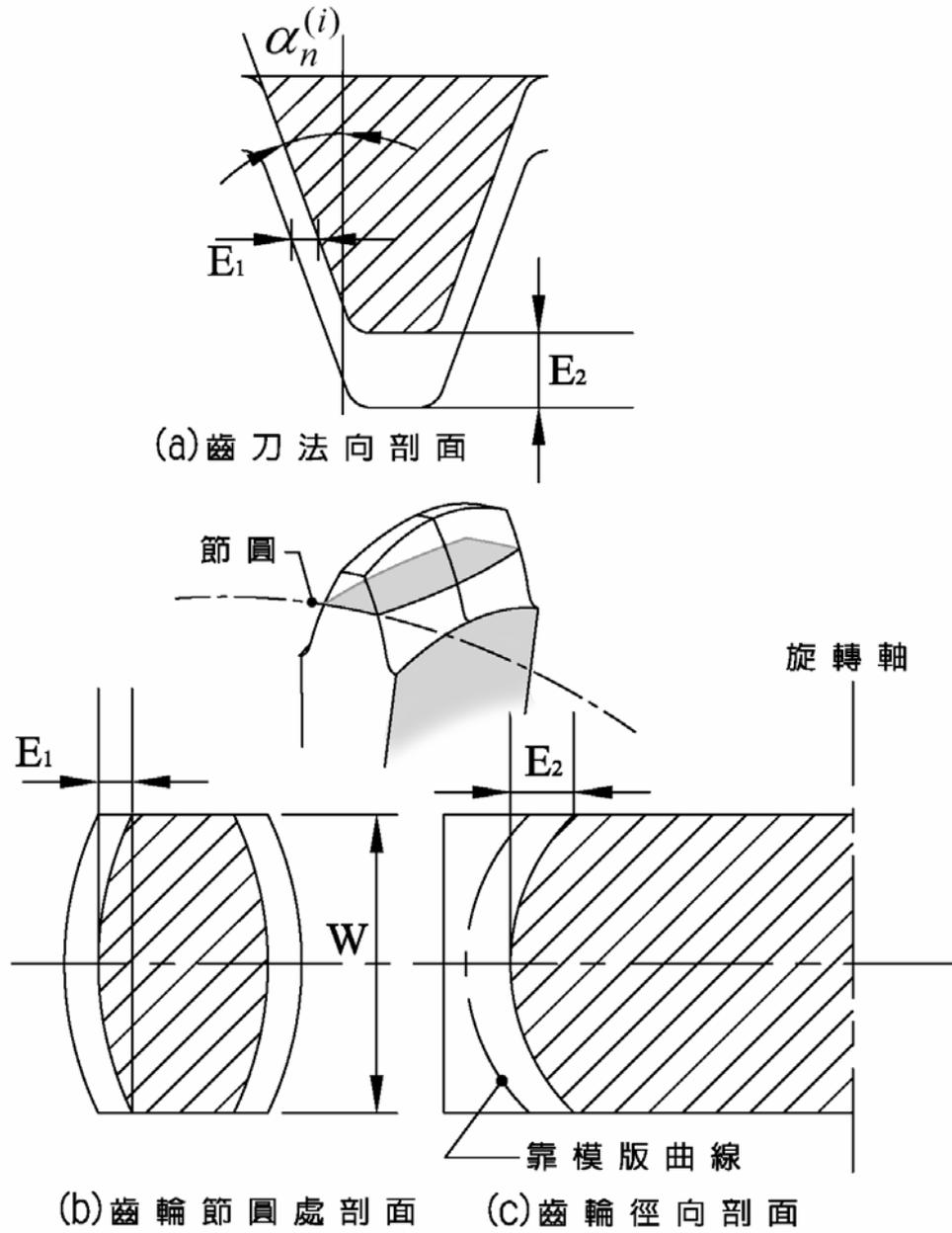


圖 3.5 刀具之位移量及齒輪冠狀修整量之關係

大量 E_1 。在此設定靠模板曲線為一圓弧，則其曲率半徑為 $R_B^{(i)}$ 。根據以上所述之關係，可求得以下關係式：

$$u_i = R_B^{(i)}(\sin \gamma_{oi} - \sin \gamma_i) \quad (3.8)$$

$$E = R_B^{(i)}(1 - \cos \gamma_i) \quad (3.9)$$

$$E_2 = R_B^{(i)}(1 - \cos \gamma_{oi}) \quad (3.10)$$

其中， $-\sin^{-1} \frac{W}{2R_B^{(i)} \sin \lambda_i} \leq \gamma_{oi} \leq \sin^{-1} \frac{W}{2R_B^{(i)} \sin \lambda_i}$ ， W 則表示齒寬。

依據圖 3.4 所示之齒條刀 Σ_i 與各座標系間的關係，即可利用齊次座標轉換矩陣方程式將齒條刀 Σ_i 之齒刀面數學模式表示於座標系 $S_c^{(i)}$ 如下：

$$\mathbf{R}_c^{(i)} = \mathbf{M}_{ca} \mathbf{M}_{ar} \mathbf{R}_r^{(i)} \quad (3.11)$$

其中

$$\mathbf{M}_{ar} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_{ca} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda_i & \cos \lambda_i & u_i \cos \lambda_i \\ 0 & -\cos \lambda_i & \sin \lambda_i & u_i \sin \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

\mathbf{M}_{ar} 及 \mathbf{M}_{ca} 即為齊次座標轉換矩陣，分別表示將位置向量從座標系 $S_r^{(i)}$ 轉換至座標系 $S_a^{(i)}$ ，以及從座標系 $S_a^{(i)}$ 轉換至座標系 $S_c^{(i)}$ 。齒條刀 Σ_i 之齒刀面數學模式轉換至座標系 $S_c^{(i)}$ 後可得：

$$\mathbf{R}_c^{(i)} = \begin{bmatrix} x_r^{(i)} - R_B^{(i)}(1 - \cos \gamma_i) \\ y_r^{(i)} \sin \lambda_i + R_B^{(i)}(\sin \gamma_{oi} - \sin \gamma_i) \cos \lambda_i \\ -y_r^{(i)} \cos \lambda_i + R_B^{(i)}(\sin \gamma_{oi} - \sin \gamma_i) \sin \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.3 接觸線之共同法線向量

齒條刀 Σ_i 與被其創成之齒輪兩者在切製過程為共軛運動(Conjugate Action)關係，在切製過程中兩者間會有共同之接觸線且其法線向量是一致的。依據微分幾何原理，若齒條刀 Σ_i 之齒刀面數學模式分別對其兩個刀面參數 ℓ_i 及 γ_i 取其偏微分後再求兩者之外積，即可求得齒刀面之法線向量並表示在座標系 $S_c^{(i)}$ 如下：

$$\mathbf{N}_c^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(i)}}{\partial \ell_i} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(i)}}{\partial \gamma_i} \quad (3.15)$$

其單位法線向量則可由下式求得：

$$\mathbf{n}_c^{(i)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(i)}}{|\mathbf{N}_c^{(i)}|} \quad (3.16)$$

因此，齒條刀 Σ_i 之左邊直邊刀面的法線向量可求得如下：

$$\mathbf{n}_{lsc}^{(i)} = A \begin{bmatrix} -\sin \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \\ \cos \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \sin \lambda_i + \sin \alpha_n^{(i)} \sin \gamma_i \cos \lambda_i \\ -\sin \alpha_n^{(i)} \sin \gamma_i \cos \lambda_i + \cos \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \sin \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \gamma_i \cos^2 \alpha_n^{(i)} + \sin^2 \alpha_n^{(i)}}}$$

同理，齒條刀 Σ_i 之右邊直邊刀面的法線向量亦可求得如下：

$$\mathbf{n}_{rsc}^{(i)} = A \begin{bmatrix} \sin \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \\ \cos \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \sin \lambda_i - \sin \alpha_n^{(i)} \sin \gamma_i \cos \lambda_i \\ -\sin \alpha_n^{(i)} \sin \gamma_i \cos \lambda_i - \cos \alpha_n^{(i)} \cos \gamma_i \sin \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \gamma_i \cos^2 \alpha_n^{(i)} + \sin^2 \alpha_n^{(i)}}}$$

3.4 嚙合方程式

齒輪之嚙合方程式是表示齒輪齒面座標 ℓ_i 和 γ_i 與運動參數 ϕ 之間的關係式。由於兩嚙合曲面於嚙合時其齒面之接觸狀態應為連續性，如圖 3.6 所示，P 點為兩嚙合運動曲面 Σ_1 與曲面 Σ_2 於空間相切時之共切點(Common Tangent Point)，同時亦為兩嚙合曲面之瞬時接觸點。兩嚙合曲面在 P 點具有共同法線向量 \mathbf{N} ； $\mathbf{V}^{(12)}$ 則表示曲面 Σ_1 與曲面 Σ_2 在 P 點之相對速度。

由於兩曲面在嚙合運動的過程中為連續之接觸狀態，既不會產生一個曲面嵌入另一個曲面，也不會發生兩曲面分離而失去接觸狀態，故不論兩曲面嚙合時是點接觸或線接觸，在其共同法線向量的方向並不存在相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 。但兩嚙合曲面間必存在有相對速度才有嚙合運動關係，故兩者間之相對速度必定與其共同法線向量垂直且落於兩曲面之共同切平面(Common Tangency Plane)T 上，如圖 3.6 所示。

由上述現象可得知：兩嚙合運動之曲面，其共同法線向量 \mathbf{N} 與其相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 在共切點 P(亦即瞬時接觸點)處必相互垂直，亦即兩者之內積為零：

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (3.19)$$

此關係式就是齒輪原理中兩共軛曲面之嚙合運動條件式，亦即所謂的嚙合方程式(Equation of Meshing)。

現在就以齒條刀 Σ_p 切製小齒輪 Σ_1 為例，來推導兩者間之嚙合方程式。如圖 3.7 所示，若在齒輪之切製過程中未考慮轉位切削時，則齒條刀 Σ_p 所在的座標系 $S_c^{(p)}(X_c^{(p)}, Y_c^{(p)}, Z_c^{(p)})$ 會與參考座標系 $S_d^{(p)}(X_d^{(p)}, Y_d^{(p)}, Z_d^{(p)})$ 重合，亦即 $S_c^{(p)} = S_d^{(p)}$ 。在切製過程中，齒條刀 Σ_p 在小齒輪工件 Σ_1 之瞬軸面(即 $Y_d^{(p)} - Z_d^{(p)}$ 平面)上方由右向左平移。若在小齒輪之切製時考慮轉位切製且以轉位係數 x_p 來進行轉位之齒形修整，則齒條刀座標系 $S_c^{(p)}$ 會與相對於參考座標系 $S_d^{(p)}$ 沿著 $X_d^{(p)}$ 軸向平移一轉位量 $x_p m_n$ ，而齒條刀 Σ_p 的速度表示在固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為：

$$\mathbf{V}_f^{(p)} = -\omega_1 r_1 \hat{\mathbf{j}}_f \quad (3.20)$$

被切製之小齒輪 Σ_1 的速度表示在固定座標系 S_f 則為：

$$\mathbf{V}_f^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\overline{O_1 O_c^{(p)}} + \mathbf{R}_c^{(p)}) \quad (3.21)$$

$$\text{其中 } \overline{O_1 O_c^{(p)}} = (r_1 + x_p m_n) \hat{\mathbf{i}}_f - r_1 \phi_1 \hat{\mathbf{j}}_f \quad (3.22)$$

而相對速度 $\mathbf{V}_f^{(p1)} = \mathbf{V}_f^{(p)} - \mathbf{V}_f^{(1)}$ ，故將(3.20)至(3.22)式代入後相減，即可得到齒條刀 Σ_p 與小齒輪 Σ_1 在切製過程之相對速度如下：

$$\mathbf{V}_f^{(p1)} = \begin{bmatrix} \omega_1(-y_c^{(p)} + r_1 \phi_1) \\ \omega_1(x_c^{(p)} + x_p m_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

根據前述嚙合方程式之條件：

$$\mathbf{n}_f^{(p)} \cdot \mathbf{V}_f^{(p1)} = 0 \quad (3.24)$$

因座標系 $S_f^{(p)}$ 與座標系 $S_c^{(p)}$ 間並無相對之旋轉，故 $\mathbf{n}_f^{(p)} = \mathbf{n}_c^{(p)}$ 。將求得之法線向量與相對速度代入(3.24)式，即可求得齒條刀 Σ_p 與小齒輪 Σ_1 之嚙合方程式：

$$F_1(\ell_p, \gamma_p, \phi_1) = n_{fx}^{(p)}(-y_c^{(p)} + r_1 \phi_1) + n_{fy}^{(p)}(x_c^{(p)} + x_p m_n) = 0 \quad (3.25)$$

上式經整理簡化後亦可表示成下列之關係式：

$$\phi_1 = \frac{y_c^{(p)}}{r_1} - \frac{n_{fy}^{(p)}}{n_{fx}^{(p)} r_1} (x_c^{(p)} + x_p m_n) \quad (3.26)$$

同理，以齒條刀 Σ_g 切製大齒輪時，若其轉位係數為 x_g ，則齒條刀 Σ_g 與大齒輪 Σ_2 兩者之相對速度為：

$$\mathbf{V}_f^{(g2)} = \begin{bmatrix} \omega_2(y_c^{(g)} - r_2 \phi_2) \\ \omega_2(-x_c^{(g)} + x_g m_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

而兩者之嚙合方程式則可求得如下式：

$$F_2(\ell_g, \gamma_g, \phi_2) = n_{fx}^{(g)}(y_c^{(g)} - r_2 \phi_2) + n_{fy}^{(g)}(-x_c^{(g)} + x_g m_n) = 0 \quad (3.28)$$

經整理後亦可化簡成下列之關係式：

$$\phi_2 = \frac{y_c^{(g)}}{r_2} - \frac{n_{fy}^{(g)}}{n_{fx}^{(g)} r_2} (x_c^{(g)} - x_g m_n) \quad (3.29)$$

3.5 齒輪之齒面數學模式

根據齒輪原理可知，若將齒條刀 Σ_p 切製小齒輪 Σ_1 時，兩者每一瞬間的接觸點或接觸線轉換至小齒輪之座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，即可求得齒條刀 Σ_p 表示在 S_1 座標系之軌跡方程式，此軌跡方程式若再與兩者之嚙合方程式聯立，即為小齒輪 Σ_1 之齒面數學模式。

因此，若要推導小齒輪之齒面數學模式，必須先以下列之齊次座標轉換矩陣方程式來求得齒條刀表示在 S_1 座標系之軌跡方程式：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1f} \mathbf{M}_{fc} \mathbf{R}_c^{(p)} \quad (3.30)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{fc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_p m_n + r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -r_1 \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{M}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

亦即齒條刀 Σ_p 表示於小齒輪座標系 S_1 之軌跡方程式為：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} x_c^{(p)} \cos \phi_1 - y_c^{(p)} \sin \phi_1 + x_p m_n \cos \phi_1 + r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ x_c^{(p)} \sin \phi_1 + y_c^{(p)} \cos \phi_1 + x_p m_n \sin \phi_1 + r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ z_c^{(p)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

若將此軌跡方程式與兩者之嚙合方程式聯立，即可求得小齒輪 Σ_1 之齒面數學模式。

同理，若將齒條刀 Σ_g 創成大齒輪 Σ_2 時，兩者每一瞬間的接觸點或接觸線轉換至大齒輪之座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ，並與兩者之嚙合方程式聯立，即可求得大齒輪 Σ_2 之齒面數學模式。齒條刀 Σ_g 表示於 S_2 座標系之軌跡方程式可由下列齊次座標轉換方程式求得：

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{2f} \mathbf{M}_{fc} \mathbf{R}_c^{(g)} \quad (3.34)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{fc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_g m_n + r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -r_2 \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{M}_{2f} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & -(r_1 + r_2) \cos \phi_2 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & (r_1 + r_2) \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

而齒條刀 Σ_g 表示在大齒輪座標系 S_2 之軌跡方程式為：

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} x_c^{(g)} \cos \phi_2 + y_c^{(g)} \sin \phi_2 - x_g m_n \cos \phi_2 - r_2 (\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_2) \\ -x_c^{(g)} \sin \phi_2 + y_c^{(g)} \cos \phi_2 + x_g m_n \sin \phi_2 + r_2 (\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2) \\ z_c^{(g)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

若將此軌跡方程式與兩者之嚙合方程式聯立，即可求得大齒輪 Σ_2 之齒面數學模式。

大小齒輪之齒頂導角及齒根導角部分亦可依照相同之方式，分別將其軌跡方程式與嚙合方程式聯立，即可求得齒條刀上下導角所創成之相對應大小齒輪之齒頂與齒根導角的齒面數學模式。

3.6 本章結論

由前面章節所推導而得具冠狀與轉位修整之漸開線螺旋齒輪之齒面數學模式，若再配合電腦輔助程式運算及繪圖，即可將齒輪之三維齒形描繪出來，茲有螺旋齒輪具下列之主要設計參數：法向模數 $m_n = 1.75 \text{ mm/齒}$ ，齒數為 40 齒，壓力角為 20° ，左旋導程角為 80° ，齒寬為 20mm，冠狀修整量 $E_1 = 0.35 \text{ mm}$ ，轉位係數 $x = -0.1$ ，齒條刀之齒冠高 $a_u = 1.0m_n$ ，齒根高 $a_l = 1.0m_n$ ，法向節距之一半 $2b = \pi m_n / 2$ ，上導角 $f_u = 0.1m_n$ ，下導角 $f_l = 0.15m_n$ ，經本章所建立之齒面數學模式及電腦輔助繪圖技術，即可繪出此漸開線螺旋齒輪之外形，如圖 3.8 所示。本研究所推導得到之大小齒輪的齒面數學模式，其冠狀與齒形修整乃是根據一般滾齒機之冠狀與漸開線齒輪轉位滾製方式推導所得，故所推導之齒輪齒面數學模式將有助於產業界實際滾製具有冠狀與轉位之漸開線齒輪及其分析與模擬工作。此數學模式對於具有冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪的齒印分析更是重要。

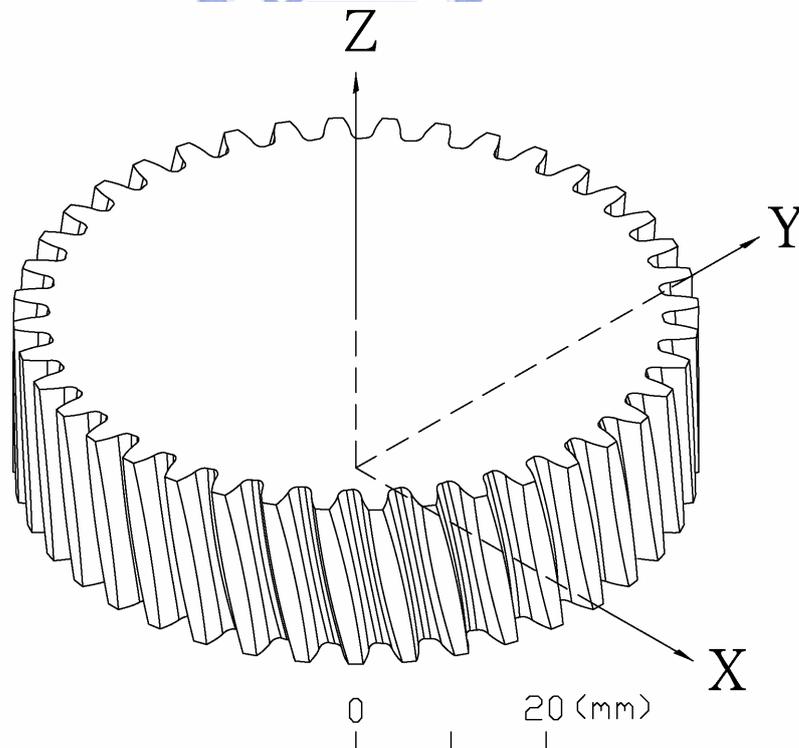


圖 3.8 經修整之齒輪電腦輔助繪圖範例

第四章 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪接觸與齒印分析

4.1 前言

齒輪組於進行嚙合運動時，齒輪的齒形與裝配狀態皆會對齒輪組的傳動造成影響，依據蔡等人[4]建立之螺旋齒輪的齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)方法，將本論文前一章節所推導得到的理想齒輪齒面數學模式後，配合齒輪組之裝配狀態與齒面接觸條件，即可建立出一套齒輪接觸分析模式，可供模擬一對齒輪的嚙合傳動。而此理論之分析過程，包含以下之假設條件：

- 一、齒輪齒面不因受力而變形，即假設齒面為剛體(Rigid Body)。
- 二、齒輪齒面的製作誤差小到可忽視，即假設為理想之漸開線螺旋齒面。
- 三、不考慮溫度變化和潤滑狀態所造成之影響。
- 四、齒輪組之裝配狀態穩定，誤差皆為定值或周期性變化。

於上述假設條件下，透過本章所建立之齒面接觸分析模式，即可得知理想之齒輪嚙合傳動的接觸點和接觸軌跡，亦可求得齒輪經齒形修整與具有裝配誤差之狀況下，該齒輪對在嚙合傳動時之運動誤差及接觸點、接觸齒印和接觸軌跡。

齒印之模擬分析是於接觸分析中，進一步模擬齒輪因齒面受力而造成彈性變形，使其接觸點變成一個接觸區域。具負載之齒印分析主要使用有限單元法(Finite Element Method)來分析模擬，而剛體齒印分析有齒面曲率分析法[1]及齒面外形法(Surface Topology Method)。本論文主要是採用較為直覺的齒面外形法來模擬接觸齒印，其原理是仿照齒輪的齒印試驗，在兩嚙合齒面之接觸點附近，齒面原先所塗佈之紅丹顆粒因齒面接觸而被刮除。因此，設定齒印試驗所使用之紅丹顆粒大小，依齒輪接觸分析所得之接觸點的周遭，找出符合紅丹顆粒大小條件之範圍視為接觸區域。齒印分

析的目的在於使得模擬接觸分析能更接近實際之情形，以及得知齒輪嚙合接觸時的主要接觸情況與其變化趨勢。

4.2 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪齒面接觸分析數學模式

進行齒輪之接觸分析時，首先必須將各齒輪之齒面數學模式以及齒面單位法線向量皆轉換至同一座標系後再加以分析。圖 4.1 所示為小齒輪 Σ_1 與大齒輪 Σ_2 之裝配關係示意圖，座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 分別為固聯於小齒輪與大齒輪之座標系，其中 Z_1 為小齒輪之旋轉軸， ϕ_1' 為小齒輪實際嚙合時的旋轉角； Z_2 為大齒輪之旋轉軸， ϕ_2' 為大齒輪實際嚙合時的旋轉角。 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為固定座標系，座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 為相對於固定座標系 S_f 與齒輪座標系 S_1 和 S_2 ，具有平行中心距方向的裝配誤差 ΔC_x 與垂直中心距方向的裝配誤差 ΔC_y 之輔助座標系。座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 與座標系 $S_v(X_v, Y_v, Z_v)$ 分別為相對於固定座標系 S_f 與小齒輪座標系 S_1 和大齒輪座標系 S_2 ，具有水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 與垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 之輔助座標系。

首先將兩相嚙合之小齒輪 Σ_1 和大齒輪 Σ_2 之齒面數學模式與單位法線向量，利用齊次座標轉換方法表示於同一固定座標系 S_f 如下：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{M}_{fs} \mathbf{M}_{sh} \mathbf{M}_{hv} \mathbf{M}_{v1} \mathbf{R}_1 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \mathbf{L}_{fs} \mathbf{L}_{sh} \mathbf{L}_{hv} \mathbf{L}_{v1} \mathbf{n}_1 \quad (4.2)$$

其中

$$\mathbf{M}_{fs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta C_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta C_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

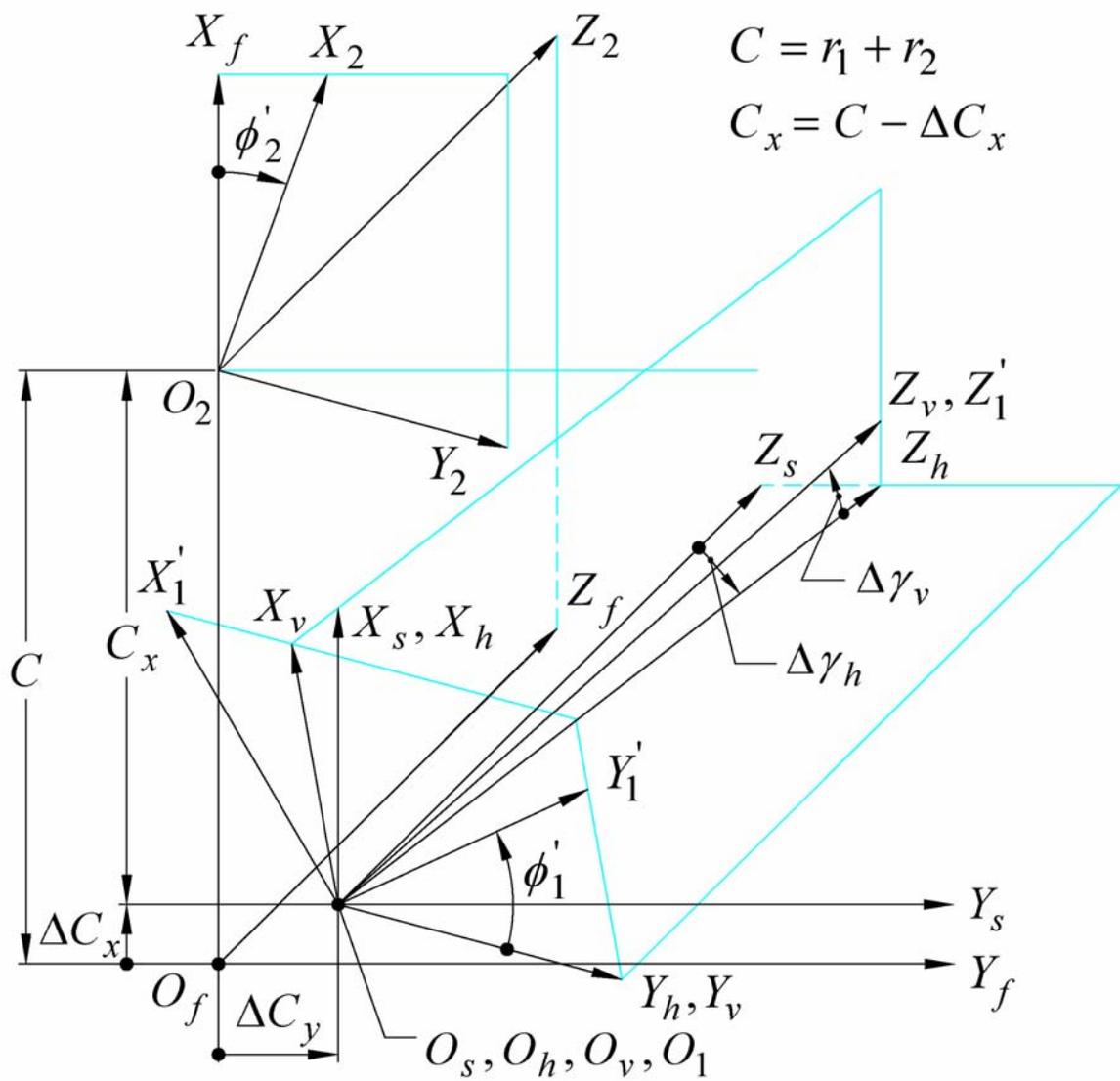


圖 4.1 齒輪組具裝配誤差之座標系間之關係示意圖

$$\mathbf{M}_{sh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & \sin \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{M}_{v1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & \sin \phi_1' & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{L}_{fs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L}_{sh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{L}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & \sin \Delta\gamma_v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}_{v1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & \sin \phi_1' & 0 \\ -\sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

經由上式之運算，小齒輪 Σ_1 表示於固定座標系 S_f 之齒面方程式為：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} x_f^{(1)} \\ y_f^{(1)} \\ z_f^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 \cos \phi_1' + y_1 \sin \phi_1') \cos \Delta\gamma_v + z_1 \sin \Delta\gamma_v + \Delta C_x \\ \cos \Delta\gamma_h (-x_1 \sin \phi_1' + y_1 \cos \phi_1') + A_1 \sin \Delta\gamma_h + \Delta C_y \\ \sin \Delta\gamma_h (x_1 \sin \phi_1' - y_1 \cos \phi_1') + A_1 \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

其中

$$A_1 = -(x_1 \cos \phi_1' + y_1 \sin \phi_1') \sin \Delta\gamma_v + z_1 \cos \Delta\gamma_v$$

小齒輪 Σ_1 表示於固定座標系 S_f 之齒面單位法線向量為：

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} n_{fx}^{(1)} \\ n_{fy}^{(1)} \\ n_{fz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n_{1x} \cos \phi_1' + n_{1y} \sin \phi_1') \cos \Delta\gamma_v + n_{1z} \sin \Delta\gamma_v \\ \cos \Delta\gamma_h (-n_{1x} \sin \phi_1' + n_{1y} \cos \phi_1') + B_1 \sin \Delta\gamma_h \\ \sin \Delta\gamma_h (n_{1x} \sin \phi_1' - n_{1y} \cos \phi_1') + B_1 \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

其中

$$B_1 = -(n_{1x} \cos \phi_1' + n_{1y} \sin \phi_1') \sin \Delta\gamma_v + n_{1z} \cos \Delta\gamma_v$$

同理，亦可將大齒輪 Σ_2 的齒面數學模式與單位法線向量表示於固定座標系 S_f 如下所示：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \mathbf{M}_{f2} \mathbf{R}_2 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \mathbf{L}_{f2} \mathbf{n}_2 \quad (4.14)$$

其中

$$\mathbf{M}_{f2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2' & -\sin \phi_2' & 0 & C \\ \sin \phi_2' & \cos \phi_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{L}_{f2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2' & -\sin \phi_2' & 0 \\ \sin \phi_2' & \cos \phi_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

經由上式之座標轉換，大齒輪 Σ_2 表示於固定座標系 S_f 之齒面方程式為：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} x_f^{(2)} \\ y_f^{(2)} \\ z_f^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \cos \phi'_2 - y_2 \sin \phi'_2 + C \\ x_2 \sin \phi'_2 + y_2 \cos \phi'_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

大齒輪 Σ_2 表示於固定座標系 S_f 之齒面單位法線向量為：

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} n_{fx}^{(2)} \\ n_{fy}^{(2)} \\ n_{fz}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{2x} \cos \phi'_2 - n_{2y} \sin \phi'_2 \\ n_{2x} \sin \phi'_2 + n_{2y} \cos \phi'_2 \\ n_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

當修整型之漸開線螺旋齒輪在進行嚙合運動時，因小齒輪齒面 Σ_1 與大齒輪齒面 Σ_2 相切，兩嚙合齒面之瞬時接觸點 P 落於切平面上，如圖 3.6 所示。根據本文 3.4 節中所述的嚙合條件，嚙合之兩齒輪的齒面在固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 中，其位置向量必定相同，而且兩齒面的單位法線向量必為共線。因此，兩嚙合齒面接觸時必需滿足下列方程式：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{R}_f^{(2)} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (4.20)$$

方程式(4.19)表示兩嚙合齒輪在其齒面共同接觸點處的位置向量相等，而該式亦可表示為三個獨立的位置向量方程式：

$$x_f^{(1)} = x_f^{(2)} \quad (4.21)$$

$$y_f^{(1)} = y_f^{(2)} \quad (4.22)$$

$$z_f^{(1)} = z_f^{(2)} \quad (4.23)$$

方程式(4.20)則表示兩嚙合齒輪在其齒面共同接觸點處之單位法線向量共線，亦即兩者的單位法線向量之外積為零，但此方程式因係單位法線向量 $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ ，所以雖然也包含下列三個方程式，其中卻僅有兩個獨立方程式：

$$n_{fy}^{(1)} n_{fz}^{(2)} - n_{fy}^{(2)} n_{fz}^{(1)} = 0 \quad (4.24)$$

$$-n_{fx}^{(1)}n_{fz}^{(2)} + n_{fx}^{(2)}n_{fz}^{(1)} = 0 \quad (4.25)$$

$$n_{fx}^{(1)}n_{fy}^{(2)} - n_{fx}^{(2)}n_{fy}^{(1)} = 0 \quad (4.26)$$

在以兩把齒刀 Σ_p 和 Σ_g 來分別創成小齒輪 Σ_1 和大齒輪 Σ_2 的過程中，因為有兩個獨立的嚙合方程式(3.26)及(3.29)，所以進行齒面接觸分析時，共有七個獨立方程式來解八個未知數 l_p 、 l_g 、 γ_p 、 γ_g 、 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_1' 和 ϕ_2' 。若將實際嚙合時小齒輪的旋轉角 ϕ_1' 設為已知，便可利用數值分析的方法，以此七個非線性方程式來求解其餘之七個未知數。

在求得兩嚙合齒輪之接觸點的各參數後，其齒輪嚙合運動時的運動誤差 KE 則可以透過以下關係得知：

$$KE = \Delta\phi_2 = \phi_2' - \frac{T_1}{T_2}\phi_1' \quad (4.27)$$

其中 T_1 與 T_2 分別為小齒輪與大齒輪的齒數。



4.3 具冠狀與齒形修整之漸開線螺旋齒輪接觸齒印分析的數學模式

接觸齒印分析所使用之齒面外形法，如圖 4.2 所示，乃是假設佈滿紅丹顆粒之兩嚙合齒面，將其接觸瞬間的接觸點作為共同切平面座標系 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 之原點 O_i ，其中 Z_i 軸與接觸點之法線向量 \mathbf{n} 同方向， X_i 軸與 Y_i 軸皆必然落於共同切平面 T 上。於兩齒面之接觸點周圍的紅丹顆粒將因齒面間距小於紅丹顆粒大小而被刮除，此刮除的區域即為所求之接觸齒印。換言之，兩嚙合齒面接觸點附近所有兩齒面間距小於紅丹顆粒大小所構成的區域便是接觸齒印，亦即齒輪之嚙合接觸區域。

在實際之接觸齒印模擬時，乃是將兩嚙合之齒面數學模式經由座標轉換至兩齒面之共同切平面座標系 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ，再沿著與 X_i 軸夾角 θ_i ($0 \leq \theta_i < 2\pi$) 之向量 \mathbf{r}_i 的方向，如圖 4.2 所示，計算該嚙合瞬間兩齒面之間

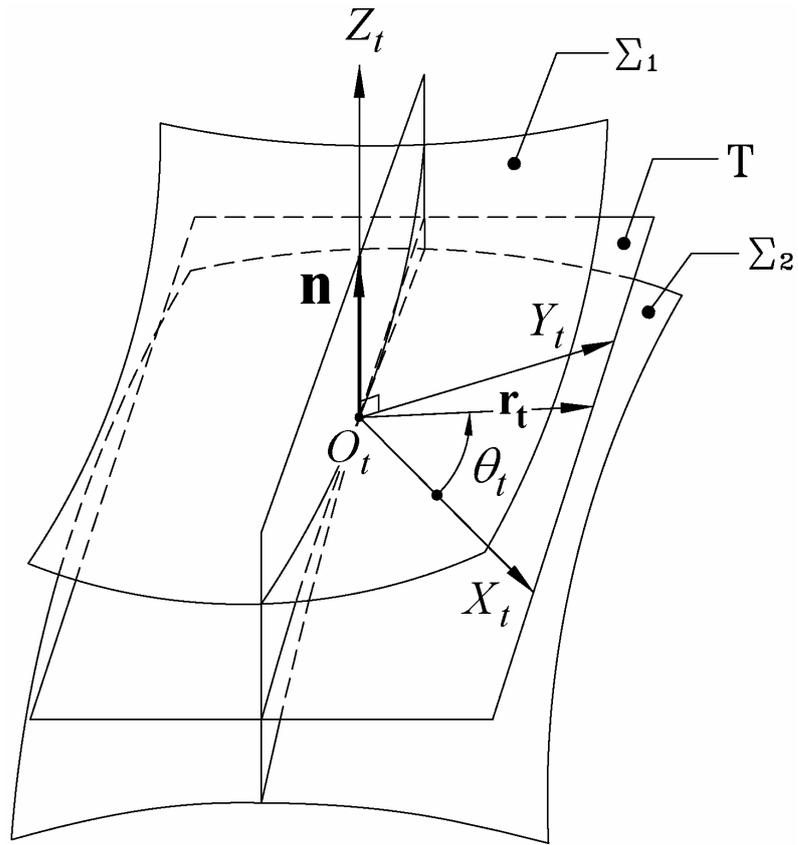


圖 4.2 兩嚙合齒面與切平面座標系之空間關係示意圖

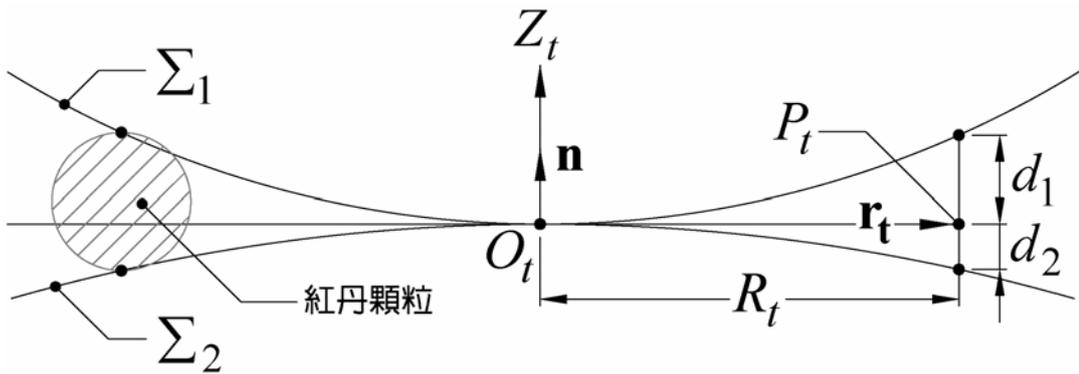


圖 4.3 固定一 θ_t 角時之 r_t - Z_t 截面示意圖

距。圖 4.3 為固定一 θ_t 角時之 $\mathbf{r}_t - Z_t$ 截面圖，其中 $P_t (0 \leq P_t \leq P_t')$ 為 \mathbf{r}_t 方向上之一動點，且 $|\overline{O_t P_t}| = |\mathbf{r}_t| = R_t$ 。點 P_t 至齒面 Σ_1 與 Σ_2 的距離分別為 d_1 與 d_2 ， d_1 與 d_2 相加之值即表示在該動點 P_t 處兩齒面的間距。沿 \mathbf{r}_t 方向漸增動點 P_t 的位置，以極座標表示為 $P_t(\theta_t, R_t)$ ，當計算所得之間距值等於紅丹顆粒大小 (0.00632mm)，即確定此動點 P_t 的位置與齒輪接觸齒印的範圍值，亦即在 θ_t 角之方向，由 O_t 點至 P_t 點之間的紅丹顆粒均會因小於兩齒面間距值而被刮除。繼續改變 θ_t 值，重覆上述過程以求得在該 θ_t 值時，齒面之接觸齒印的範圍值。接觸點 O_t 周圍所有符合間距條件的 $P_t(\theta_t, R_t)$ 點集合，即為齒輪組之兩嚙合齒面於此接觸瞬間的接觸齒印外形。

為進行接觸齒印分析，如前所述，首先亦需將兩齒輪之齒面數學模式皆經由座標轉換至切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ ，圖 4.4 為切平面座標系與其他座標系間之關係示意圖，其中座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為齒輪組之固定座標系，座標系 $S_m(X_m, Y_m, Z_m)$ 與 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 為輔助座標系， δ 角為 Z_m 軸與 Z_n 軸之夾角 ($0 \leq \delta < 2\pi$)， ε 角為 Z_n 軸與 Z_t 軸之夾角 ($0 \leq \varepsilon < 2\pi$)。接觸點 O_t 在座標系 S_f 之座標值為 p_x ， p_y 和 p_z ，亦即接觸點位置向量的三個分量。若將兩嚙合齒輪的齒面數學模式表示於同一切平面座標系 S_t 如下：

$$\mathbf{R}_t^{(i)} = \mathbf{M}_{tm} \mathbf{M}_{nm} \mathbf{M}_{mf} \mathbf{R}_f^{(i)}, \quad (i = 1, 2) \quad (4.28)$$

其中

$$\mathbf{M}_{mf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{M}_{nm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{M}_{\text{tn}} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

經座標轉換至切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ 後之齒面方程式為：

$$\mathbf{R}_t^{(i)} = \begin{bmatrix} x_t^{(i)} \\ y_t^{(i)} \\ z_t^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f^{(i)} \cos \varepsilon - y_f^{(i)} \sin \varepsilon \sin \delta - z_f^{(i)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ y_f^{(i)} \cos \delta - z_f^{(i)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ x_f^{(i)} \sin \varepsilon + y_f^{(i)} \cos \varepsilon \sin \delta + z_f^{(i)} \cos \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \cos \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

由於接觸點之單位法線向量 \mathbf{n} 與 Z_t 軸重合，故從圖 4.4 中之幾何關係可知：

$$\tan \delta = \frac{n_{fy}}{n_{fz}} \quad (4.33)$$

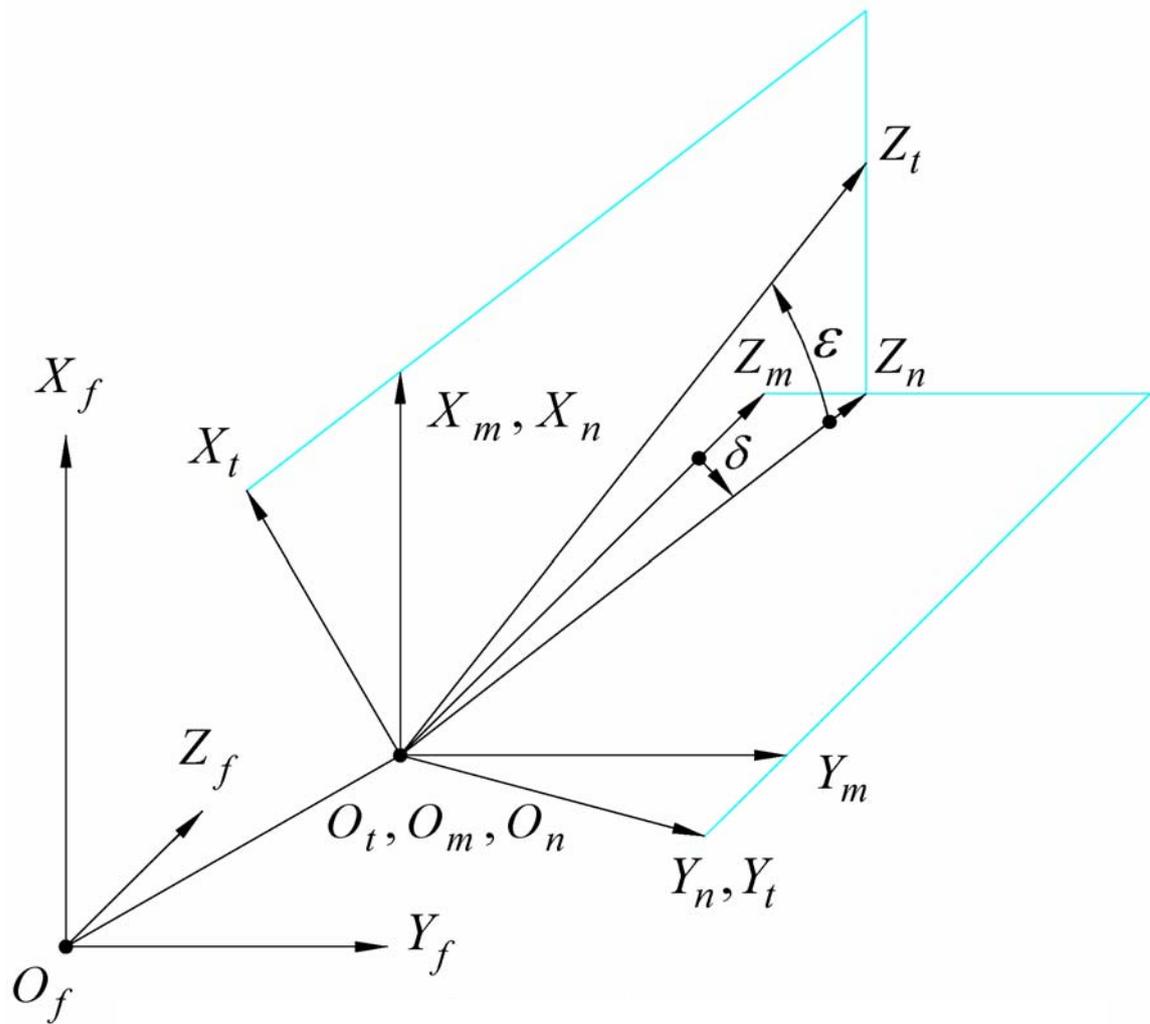
$$\tan \varepsilon = \frac{n_{fx}}{\sqrt{n_{fy}^2 + n_{fz}^2}} \quad (4.34)$$

其中 n_{fx} 、 n_{fy} 和 n_{fz} 為單位法線向量 \mathbf{n} 的三個分量。根據以上推導所得之接觸齒印分析數學模式，用以計算接觸齒印範圍的 $P_t(\theta_t, R_t)$ 值之方程式可表示如下：

$$x_t^{(1)} = x_t^{(2)} = x_t \quad (4.35)$$

$$y_t^{(1)} = y_t^{(2)} = y_t \quad (4.36)$$

其中 x_t 和 y_t 為 $P_t(\theta_t, R_t)$ 位置向量表示於 X_t 軸與 Y_t 軸上的兩個分量，故有四個獨立方程式，加上兩個嚙合方程式(3.26)及(3.29)式，共有六個獨立方程式可供來求解六個未知數 ℓ_p 、 ℓ_g 、 γ_p 、 γ_g 、 ϕ_1 和 ϕ_2 。由前述座標系之間的關係亦可知：



$$\overrightarrow{O_f O_T} = p_x \hat{\mathbf{i}}_f + p_y \hat{\mathbf{j}}_f + p_z \hat{\mathbf{k}}_f$$

圖 4.4 切平面座標系之關係圖

$$|z_t^{(i)}| = d_i, \quad (i = 1, 2) \quad (4.37)$$

若將所求得的六個參數分別代回表示於切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ 之小齒輪與大齒輪的齒面方程式，即可得到 $z_t^{(1)}$ 與 $z_t^{(2)}$ 之值，接觸齒印的範圍值或 $P_t(\theta_t, R_t)$ 點之條件則可表示如下：

$$d_1 + d_2 = |z_t^{(2)} - z_t^{(1)}| = 0.00632mm \quad (4.38)$$

所有符合上述條件的 $P_t(\theta_t, R_t)$ 點之集合，即為所求之接觸齒印的輪廓點。

4.4 例題與討論

依據 4.2 節及 4.3 節推導所得到之齒面接觸齒印的數學模式，並發展電腦輔助模擬程式，以進行各種組裝狀況下之齒輪接觸模擬。以下將分別討論具冠狀修整量、轉位修整量及不同壓力角之漸開線螺旋齒輪，在理想與具裝配誤差時之齒面接觸狀況與齒印，以及探討不同修整量對接觸齒印之影響。



例題 4.1 具冠狀修整之螺旋齒輪在理想裝配下的接觸齒印分析

漸開線螺旋齒輪的主要設計參數如表 4.1 所示，若齒輪之齒面冠狀修整量 E_1 有三個不同修整量，分別為 0.005mm、0.025mm 和 0.05mm，轉位係數 $x=0$ ，壓力角均為 20° ，其齒輪組在理想裝配狀況下嚙合，亦即 $\Delta C_x = 0mm$ 、 $\Delta C_y = 0mm$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 和 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$ 。

經接觸模擬與分析，具齒面冠狀修整的螺旋齒輪在理想裝配下，其接觸分析及齒輪組之運動誤差分析結果如表 4.2 所示。由模擬結果可知在理想裝配狀況下，齒面之冠狀修整量大小並不影響該齒輪組之接觸分析和運動誤差，亦即不論齒面冠狀量是 0.005mm、0.025mm 或是 0.05mm，齒輪組之理論接觸點均相同而且均無運動誤差。圖 4.5 即顯示具冠狀修整之螺旋齒輪在不同齒面冠狀修整量時的理論接觸齒印，由齒印分析結果可知，接觸橢

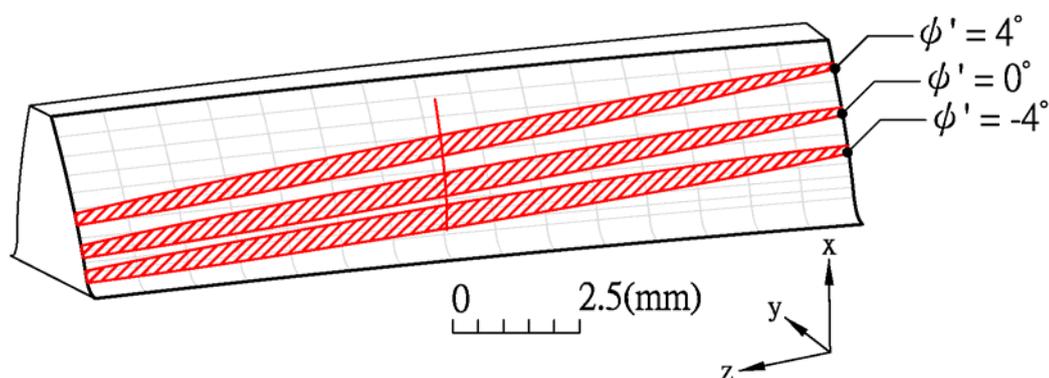
圓之長軸會隨著齒面冠狀量的增加而縮短，亦即冠狀量越大，齒輪之嚙合接觸區域越集中，而齒面冠狀量很小時，其齒輪之接觸趨近於線接觸，此與理論相符。

表 4.1 具冠狀修整之螺旋齒輪的主要設計參數

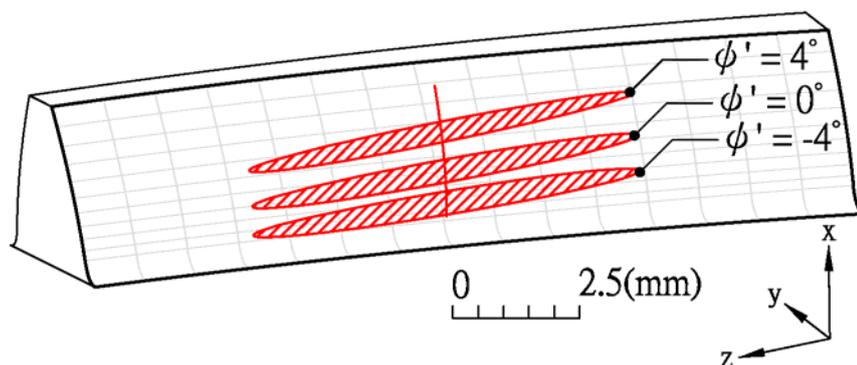
	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.005	0	46.587
						0.025		
						0.050		
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	

表 4.2 具冠狀修整之螺旋齒輪在理想裝配下的接觸分析與運動誤差

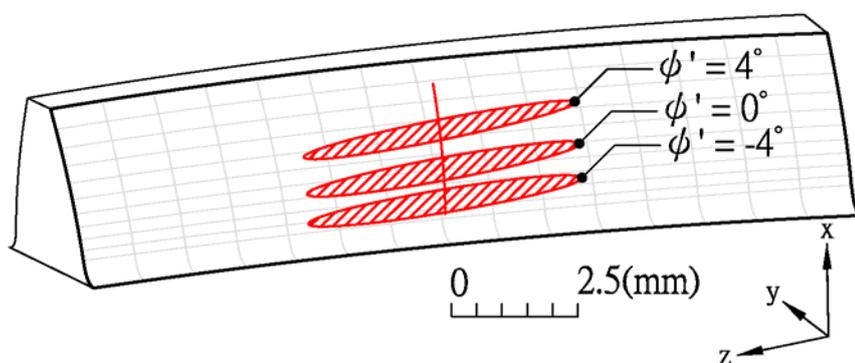
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$						
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)
-6.709	-6.709	-13.417	-13.417	0.000	0.000	0.000
-6.000	-6.000	-12.000	-12.000	0.136	0.136	0.000
-4.000	-4.000	-8.000	-8.000	0.520	0.520	0.000
-2.000	-2.000	-4.000	-4.000	0.904	0.904	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.288	1.288	0.000
2.000	2.000	4.000	4.000	1.672	1.672	0.000
4.000	4.000	8.000	8.000	2.055	2.055	0.000
6.000	6.000	12.000	12.000	2.439	2.439	0.000
8.000	8.000	16.000	16.000	2.823	2.823	0.000
8.260	8.260	16.519	16.519	2.873	2.873	0.000



(a) 冠狀量 $E_1 = 0.005\text{mm}$



(b) 冠狀量 $E_1=0.025\text{mm}$



(c) 冠狀量 $E_1=0.05\text{mm}$

圖 4.5 具不同之齒面冠狀修整量之螺旋齒輪的理論接觸齒印

例題 4.2 具冠狀修整及轉位修整之螺旋齒輪在理想裝配下狀況下的接觸齒印分析

具冠狀及轉位修整之漸開線螺旋齒輪的主要設計參數如表 4.3 和 4.4 所示，齒輪之轉位係數分別為 $x=0.25$ 之正轉位和 $x=-0.25$ 之負轉位，但兩者之齒面冠狀修整量均為 $E_1=0.025\text{mm}$ ，壓力角亦均為 20° ，其齒輪組在理想裝配狀況下嚙合，亦即 $\Delta C_x=0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y=0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h=0.0^\circ$ 和 $\Delta\gamma_v=0.0^\circ$ 。

由於齒輪若有轉位修整時，將會使得齒輪之外徑及節圓改變，故進行理論嚙合時需進行齒輪組之中心距補正，王[6]提出之齒輪組中心距補正係數 y 如下：

$$y = \frac{T_1 + T_2}{2 \cos \beta} \left(\frac{\cos \alpha_s}{\cos \alpha_{bs}} - 1 \right) \quad (4.39)$$

其中，

$$\alpha_{bs} = \text{inv}^{-1} \left(2 \tan \alpha_n \left(\frac{x_1 + x_2}{T_1 + T_2} \right) + \text{inv} \alpha_s \right) \quad (4.40)$$

T_1, T_2 為齒輪 1 與齒輪 2 之齒數； x_1, x_2 為齒輪 1 與齒輪 2 之轉位係數； β 為齒輪之螺旋角；而 inv 則表示漸開線函數。

齒輪組之嚙合中心距 C_x 則可表示如下：

$$C_x = r_1 + r_2 + y m_n \quad (4.41)$$

經由接觸模擬與齒面外形法分析後，具相同之冠狀修整與不同之轉位修整的螺旋齒輪組在理想裝配狀況下，其齒面之接觸分析及齒輪組之運動誤差分析結果如表 4.3 和 4.4 所示。分析結果顯示，不同之轉位係數導致齒輪組之理論接觸點位置有所不同，但其運動誤差均為零。圖 4.6 則顯示，不同之齒輪轉位係數導致齒輪組之理論接觸點改變，但接觸橢圓大小因冠狀修整量相同而看不出有所變化。而由表及圖中皆可見齒輪嚙合之接觸點於正轉位時，較為鬆散且偏向漸開線齒形之下方，負轉位時則較為密集且偏向漸開線齒形之上方。

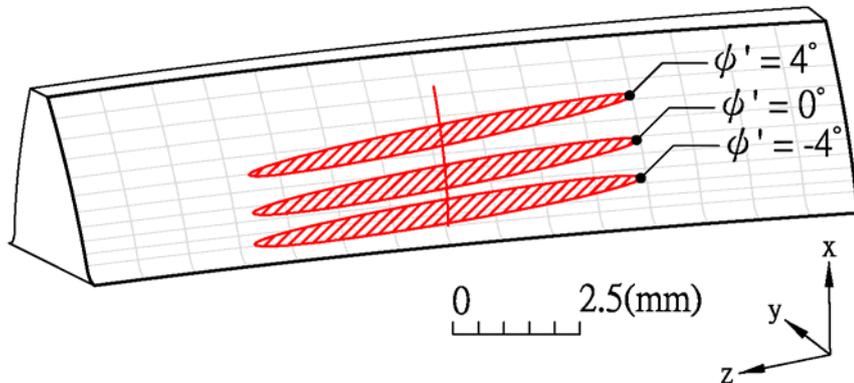
表 4.3 具冠狀及轉位修整之螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配下的接觸分析與運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	0.25	46.953
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta C_y = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
-6.025	-4.873	-13.201	-12.049	0.000	0.021	0.000		
-6.000	-4.848	-13.152	-12.000	0.005	0.025	0.000		

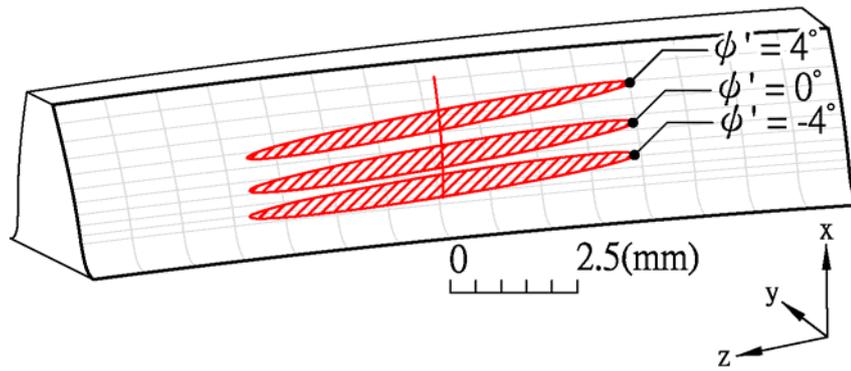
-4.000	-2.848	-9.152	-8.000	0.389	0.409	0.000
-2.000	-0.848	-5.152	-4.000	0.772	0.793	0.000
0.000	1.152	-1.152	0.000	1.156	1.177	0.000
2.000	3.152	2.848	4.000	1.540	1.561	0.000
4.000	5.152	6.848	8.000	1.924	1.945	0.000
6.000	7.152	10.848	12.000	2.308	2.329	0.000
8.000	9.152	14.848	16.000	2.692	2.712	0.000
7.385	8.537	13.618	14.770	2.574	2.594	0.000

表 4.4 具冠狀及轉位修整之螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配下的接觸分析與運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	-0.25	46.201
齒輪2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
	ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)	
	-7.232	-8.544	-13.152	-14.464	0.000	0.025	0.000	
	-6.000	-7.312	-10.688	-12.000	0.236	0.262	0.000	
	-4.000	-5.312	-6.688	-8.000	0.620	0.646	0.000	
	-2.000	-3.312	-2.688	-4.000	1.004	1.029	0.000	
	0.000	-1.312	1.312	0.000	1.388	1.413	0.000	
	2.000	0.688	5.312	4.000	1.772	1.797	0.000	
	4.000	2.688	9.312	8.000	2.156	2.181	0.000	
	6.000	4.688	13.313	12.000	2.540	2.565	0.000	
	8.000	6.688	17.313	16.000	2.924	2.949	0.000	
	8.972	7.660	19.257	17.945	3.110	3.136	0.000	



(a) 轉位係數 $x = 0.25$



(b) 轉位係數 $x = -0.25$

圖 4.6 不同之轉位修整的冠狀螺旋齒輪的理論接觸齒印

例題 4.3 不同壓力角之冠狀螺旋齒輪在理想裝配狀況下的接觸齒印分析

具冠狀修整之漸開線螺旋齒輪的主要設計參數如表 4.5 和 4.6 所示，其壓力角分別為 19° 和 21° ，冠狀修整量 $E_1 = 0.025\text{mm}$ ，轉位係數 $x = 0$ ，齒輪組在理想裝配狀況下嚙合，亦即 $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 和 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$ 。

經接觸模擬與分析後，不同壓力角 (19° 和 21°) 之冠狀螺旋齒輪組在理想裝配狀況下，其齒面之接觸及運動誤差分析結果如表 4.5 和表 4.6 所示。若僅改變齒輪 1 之壓力角為 19° 及 21° ，但齒輪 2 之壓力角均固定為 20° ，則齒輪組之接觸分析結果如表 4.7 和表 4.8 所示。圖 4.7 則為不同壓力角之冠狀螺旋齒輪經齒面外形法分析後的理論接觸齒印。由表 4.5 至 4.8 及圖 4.7 中皆顯示，冠狀修整之螺旋齒輪組的壓力角較大時，其齒面之齒印較為鬆散且略大，漸開線齒形長度較長；反之，當壓力角較小時，齒印較為密集且略小，漸開線齒形長度也較短。若只改變其中一個齒輪之壓力角的情況，則齒輪組在嚙合時在越遠離節圓處 ($\phi'_1 = 0^\circ$) 的接觸點其運動誤差越大。此外，壓力角角度減小時，齒印向齒輪齒筋上螺旋之方向偏移，如圖 4.7(c) 所示；反之，壓力角角度增加時，齒印向齒輪齒筋上螺旋之反方向偏移，如圖 4.7(d) 所示。

表 4.5 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析與運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	19	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	19	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_G (mm)	KE (arc-sec.)		
-7.075	-7.075	-14.150	-14.150	0.000	0.000	0.000		
-6.000	-6.000	-12.000	-12.000	0.196	0.196	0.000		
-4.000	-4.000	-8.000	-8.000	0.562	0.562	0.000		
-2.000	-2.000	-4.000	-4.000	0.927	0.927	0.000		
0.000	0.000	0.000	0.000	1.293	1.293	0.000		
2.000	2.000	4.000	4.000	1.658	1.658	0.000		
4.000	4.000	8.000	8.000	2.023	2.023	0.000		
6.000	6.000	12.000	12.000	2.389	2.389	0.000		
8.000	8.000	16.000	16.000	2.754	2.754	0.000		
8.421	8.421	16.841	16.841	2.831	2.831	0.000		

表 4.6 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析與運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	21	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	21	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
-6.381	-6.381	-12.762	-12.762	0.000	0.000	0.000		
-6.000	-6.000	-12.000	-12.000	0.077	0.077	0.000		
-4.000	-4.000	-8.000	-8.000	0.479	0.479	0.000		
-2.000	-2.000	-4.000	-4.000	0.881	0.881	0.000		
0.000	0.000	0.000	0.000	1.283	1.283	0.000		
2.000	2.000	4.000	4.000	1.686	1.686	0.000		
4.000	4.000	8.000	8.000	2.088	2.088	0.000		
6.000	6.000	12.000	12.000	2.490	2.490	0.000		
8.000	8.000	16.000	16.000	2.892	2.892	0.000		
8.109	8.109	16.219	16.219	2.914	2.914	0.000		

表 4.7 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析與運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	19	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ϕ_1' (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ_2' (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
-7.898	-7.547	-15.229	-15.900	0.083	0.000	-6.593		
-6.000	-5.649	-11.409	-12.080	0.429	0.366	-5.009		
-4.000	-3.649	-7.382	-8.053	0.795	0.752	-3.339		
-2.000	-1.649	-3.355	-4.027	1.160	1.139	-1.670		
0.000	0.351	0.671	0.000	1.525	1.525	0.000		
2.000	2.351	4.698	4.027	1.890	1.911	1.670		
4.000	4.351	8.724	8.053	2.256	2.297	3.339		
6.000	6.351	12.751	12.080	2.621	2.683	5.009		
6.882	7.233	14.528	13.856	2.782	2.853	5.746		

表 4.8 修整型螺旋齒輪的主要設計參數及其在理想裝配狀況下之接觸分析與運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	21	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{ mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ϕ_1' (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ_2' (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
-5.116	-5.456	-10.825	-10.160	0.000	0.066	4.483		
-4.000	-4.340	-8.608	-7.944	0.224	0.279	3.505		
-2.000	-2.340	-4.636	-3.972	0.627	0.661	1.752		
0.000	-0.340	-0.664	0.000	1.029	1.042	0.000		
2.000	1.660	3.308	3.972	1.432	1.424	-1.752		
4.000	3.660	7.280	7.944	1.834	1.806	-3.505		
6.000	5.660	11.252	11.916	2.236	2.187	-5.257		
8.000	7.660	15.224	15.888	2.639	2.569	-7.010		
9.705	9.365	18.611	19.275	2.982	2.894	-8.504		

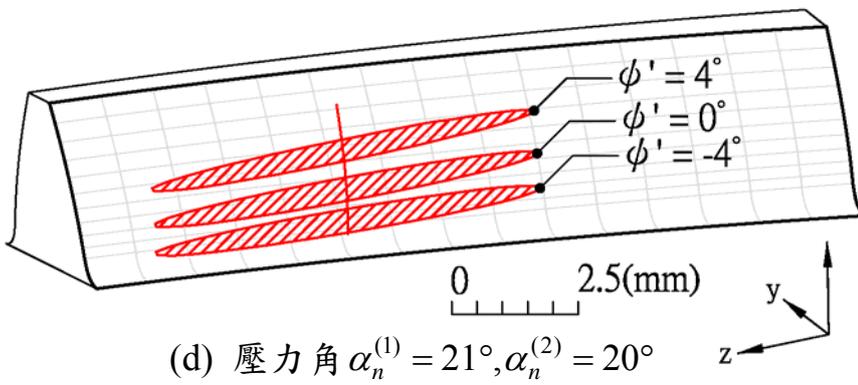
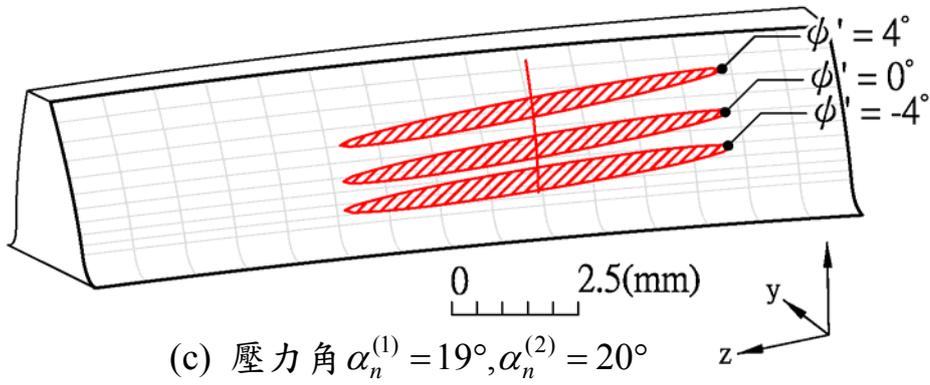
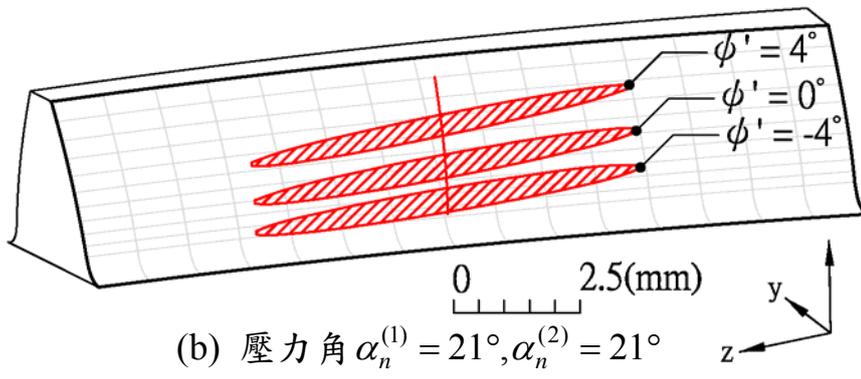
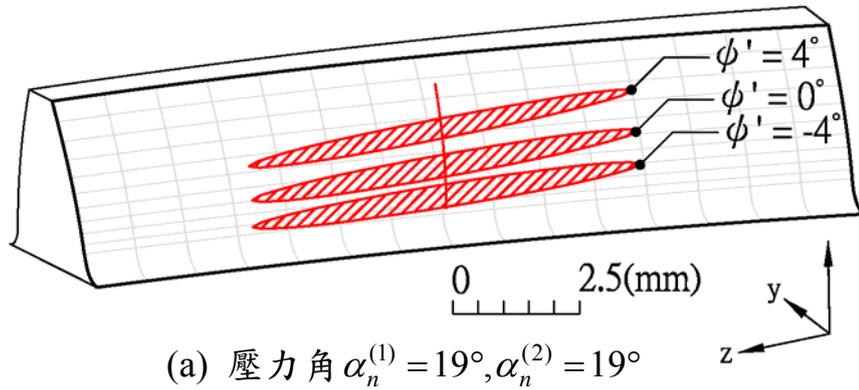


圖 4.7 不同壓力角之冠狀螺旋齒輪的理論接觸齒印

例題 4.4 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸齒印分析和運動誤差

具冠狀修整之螺旋齒輪之主要設計參數如表 4.9、4.10 和 4.11 所示，齒輪之冠狀修整量 E_1 分別為 0.005mm、0.025mm 和 0.05mm，轉位係數 $x=0$ ，壓力角均為 20° ，經由齒輪接觸模擬及齒面外形法分析後，該齒輪組在具有裝配誤差之狀況下的接觸分析如表 4.9、4.10 和 4.11 所示，而齒印分析結果則如圖 4.8、4.9 和 4.10 所示。

由分析結果顯示，齒輪組若具有中心距裝配誤差 ΔC_x 與 ΔC_y 時(如圖 4.1 所示)，則其接觸齒印皆偏向漸開線齒形之下方，其平行中心距方向之裝配誤差 ΔC_x 對於接觸齒印的影響大於垂直中心距方向之裝配誤差 ΔC_y ，而受冠狀量大小之影響很小。若在具水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 與垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 時，接觸齒印會偏向齒筋方向之端面，其偏移的量會隨冠狀量之增加而減小，亦即冠狀量越大的漸開線螺旋齒輪受軸向誤差的影響越小，且水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 的影響大於垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 。

例題 4.5 具裝配誤差時之具轉位修整的冠狀螺旋齒輪接觸齒印分析

轉位係數分別為 $x=0.25$ 之正轉位和 $x=-0.25$ 之負轉位的螺旋齒輪，其冠狀修整量 $E_1=0.025\text{mm}$ ，壓力角均為 20° ，如表 4.12 和 4.13 所示。

若齒輪組具有裝配誤差，經齒輪接觸模擬與齒面外形法之分析，表 4.12 和 4.13 以及圖 4.11 和圖 4.12 分別顯示轉位係數分別為 $x=0.25$ 之正轉位和 $x=-0.25$ 之負轉位螺旋齒輪之接觸分析及其接觸齒印。

具有轉位修整之齒輪組其中心距誤差的影響與冠狀修整齒輪的趨勢相同，皆無產生明顯之運動誤差。在具水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 與垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 時，齒印亦會偏向齒筋方向之端面。而在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 時，齒輪組之運動誤差會隨著轉位係數的增加而減少；而具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 時，其運動誤差則會隨著轉位係數的增加而增加，且齒印偏移量亦會隨著轉位係數的增加而增加。

表 4.9 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.005	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ_1' (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ_2' (度)	ℓ_p (mm)	ℓ_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.718	-5.614	-8.000	0.190	0.744	0.000		
0.000	-1.718	2.386	0.000	0.958	1.512	0.000		
4.000	2.282	10.386	8.000	1.726	2.280	0.000		
8.000	6.282	18.386	16.000	2.493	3.047	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.606	-9.242	-8.000	0.404	0.401	0.000		
0.000	-0.606	-1.242	0.000	1.171	1.168	0.000		
4.000	3.394	6.758	8.000	1.939	1.936	0.000		
8.000	7.394	14.758	16.000	2.707	2.704	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.05^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.004	-8.016	-8.002	0.978	0.972	-0.117		
0.000	-0.003	-0.015	0.000	1.746	1.739	0.000		
4.000	3.997	7.987	8.002	2.513	2.507	0.117		
8.000	7.998	15.988	16.004	3.281	3.275	0.235		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.05^\circ$								
-4.000	-4.035	-7.994	-7.999	0.343	0.352	0.044		
0.000	-0.033	0.004	0.000	1.112	1.120	0.000		
4.000	3.969	8.001	7.999	1.880	1.887	-0.044		
8.000	7.970	15.999	15.999	2.648	2.655	-0.089		

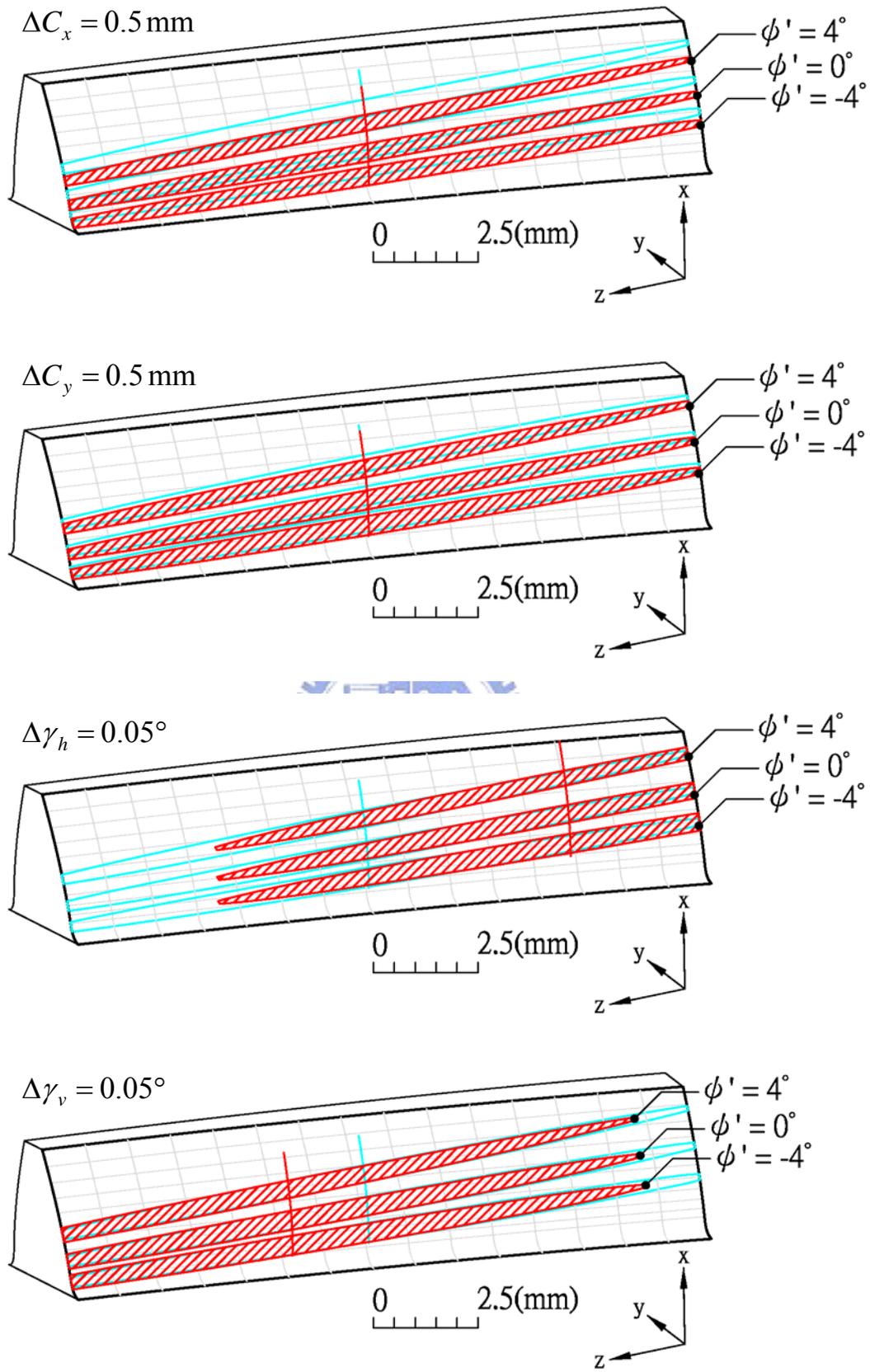
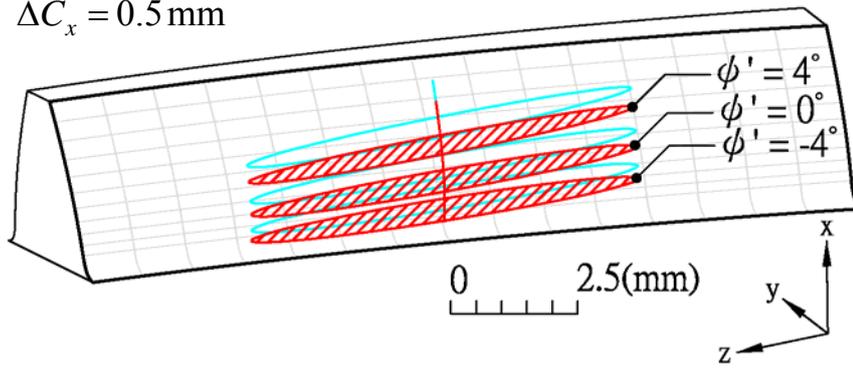


圖 4.8 冠狀量 $E_1 = 0.005 \text{ mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印

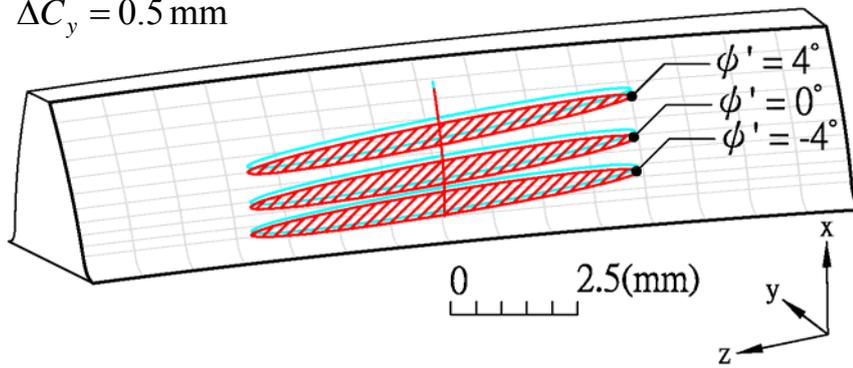
表 4.10 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.718	-5.614	-8.000	0.190	0.744	0.000		
0.000	-1.718	2.386	0.000	0.958	1.512	0.000		
4.000	2.282	10.386	8.000	1.726	2.280	0.000		
8.000	6.282	18.386	16.000	2.493	3.047	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.606	-9.242	-8.000	0.404	0.401	0.000		
0.000	-0.606	-1.242	0.000	1.171	1.168	0.000		
4.000	3.394	6.758	8.000	1.939	1.936	0.000		
8.000	7.394	14.758	16.000	2.707	2.704	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.019	-8.065	-8.007	0.897	0.877	-0.468		
0.000	-0.017	-0.060	0.000	1.665	1.645	0.000		
4.000	3.986	7.945	8.007	2.432	2.412	0.468		
8.000	7.988	15.950	16.015	3.200	3.180	0.935		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$								
-4.000	-4.133	-7.982	-7.997	0.360	0.395	0.177		
0.000	-0.127	0.008	0.000	1.130	1.162	0.000		
4.000	3.880	7.999	7.997	1.899	1.929	-0.177		
8.000	7.887	15.989	15.994	2.668	2.696	-0.354		

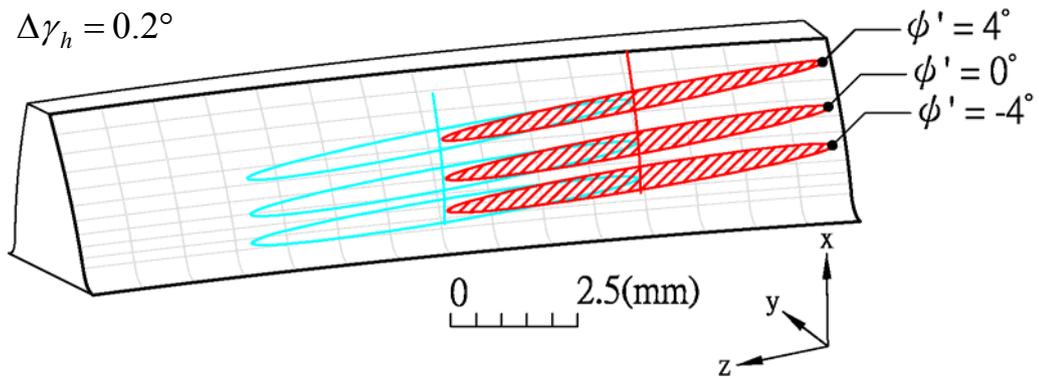
$\Delta C_x = 0.5 \text{ mm}$



$\Delta C_y = 0.5 \text{ mm}$



$\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$



$\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$

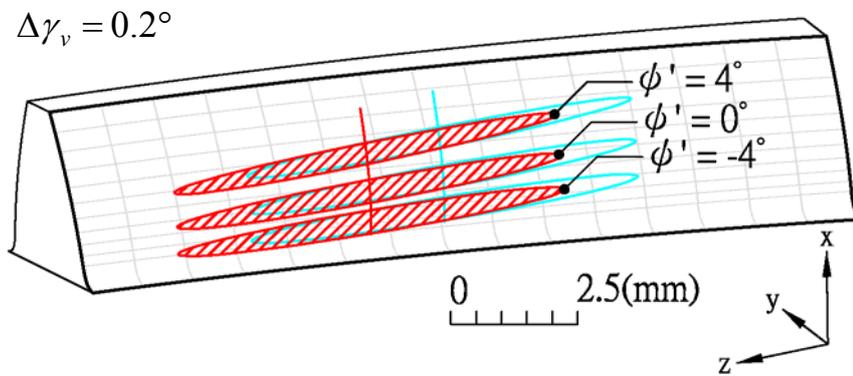


圖 4.9 冠狀量 $E_1 = 0.025 \text{ mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印

表 4.11 具裝配誤差時之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.05	0	46.587
齒輪2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.718	-5.614	-8.000	0.190	0.744	0.000		
0.000	-1.718	2.386	0.000	0.958	1.512	0.000		
4.000	2.282	10.386	8.000	1.726	2.280	0.000		
8.000	6.282	18.386	16.000	2.493	3.047	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.606	-9.242	-8.000	0.404	0.401	0.000		
0.000	-0.606	-1.242	0.000	1.171	1.168	0.000		
4.000	3.394	6.758	8.000	1.939	1.936	0.000		
8.000	7.394	14.758	16.000	2.707	2.704	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.037	-8.157	-8.018	1.023	0.960	-1.159		
0.000	-0.031	-0.145	0.000	1.790	1.727	0.000		
4.000	3.975	7.868	8.018	2.558	2.495	1.159		
8.000	7.981	15.880	16.037	3.325	3.262	2.318		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$								
-4.000	-4.344	-7.945	-7.993	0.292	0.380	0.440		
0.000	-0.327	0.031	0.000	1.063	1.146	0.000		
4.000	3.690	8.007	7.993	1.835	1.912	-0.440		
8.000	7.707	15.983	15.986	2.606	2.678	-0.881		

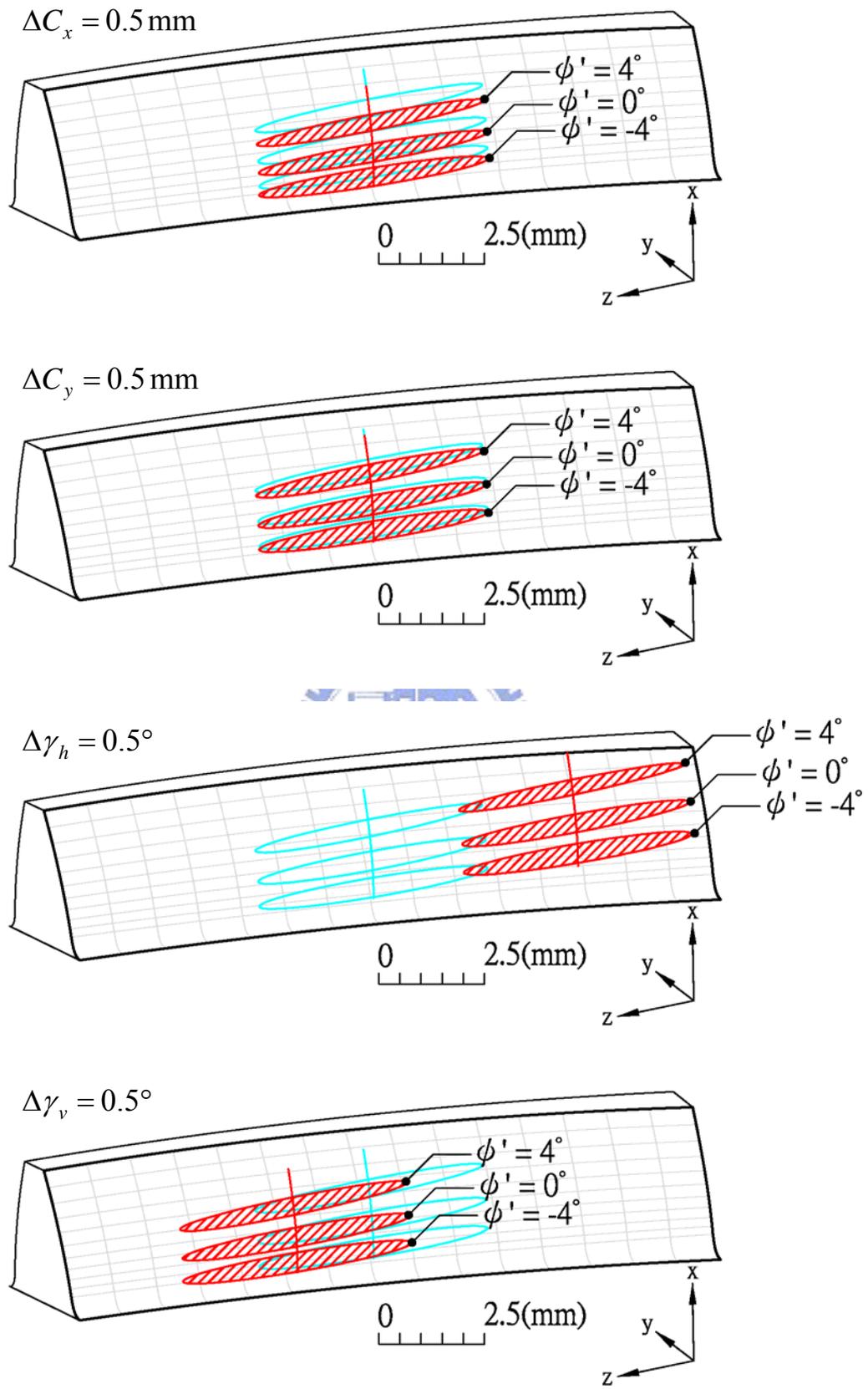


圖 4.10 冠狀量 $E_1 = 0.05 \text{ mm}$ 之齒輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印

表 4.12 具裝配誤差時之轉位修整螺旋齒輪的接觸分析(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	0.25	46.953
齒輪2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ_1' (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ_2' (度)	ℓ_p (mm)	ℓ_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.446	-6.847	-8.000	0.082	0.626	0.000		
0.000	-0.446	1.153	0.000	0.850	1.394	0.000		
4.000	3.554	9.153	8.000	1.617	2.161	0.000		
8.000	7.554	17.153	16.000	2.385	2.929	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-3.450	-10.384	-8.000	0.273	0.291	0.000		
0.000	0.550	-2.384	0.000	1.041	1.059	0.000		
4.000	4.550	5.616	8.000	1.809	1.826	0.000		
8.000	8.550	13.616	16.000	2.576	2.594	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-2.867	-9.218	-8.007	0.763	0.763	-0.464		
0.000	1.135	-1.213	0.000	1.530	1.531	0.000		
4.000	5.138	6.792	8.007	2.298	2.298	0.464		
8.000	9.140	14.797	16.015	3.065	3.066	0.928		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$								
-4.000	-2.975	-9.139	-7.997	0.223	0.277	0.186		
0.000	1.031	-1.148	0.000	0.993	1.044	0.000		
4.000	5.037	6.843	7.997	1.762	1.811	-0.186		
8.000	9.044	14.834	15.994	2.531	2.578	-0.373		

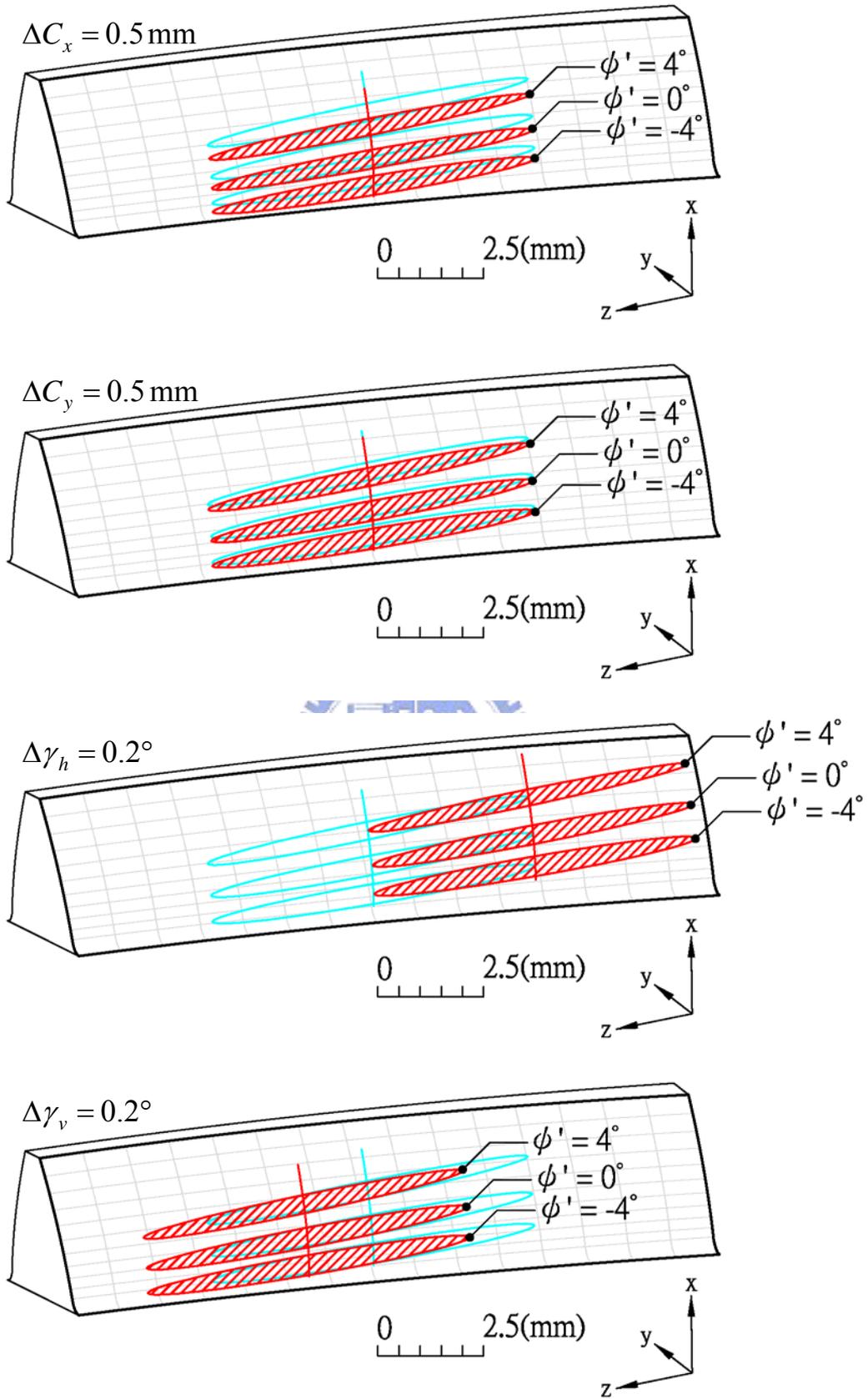
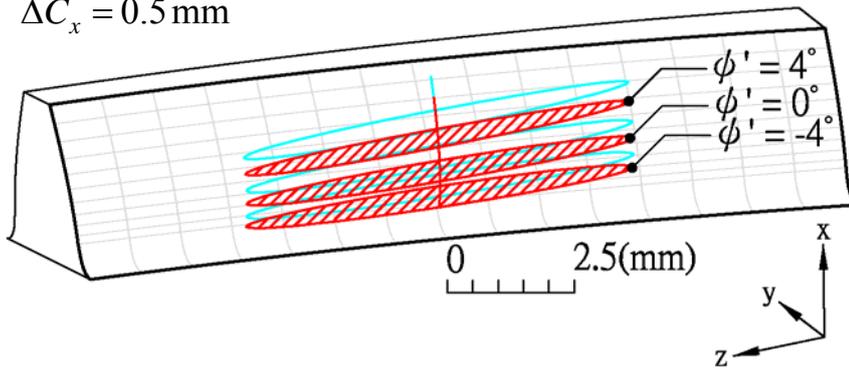


圖 4.11 轉位量 $x=0.25$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差狀況下之接觸齒印

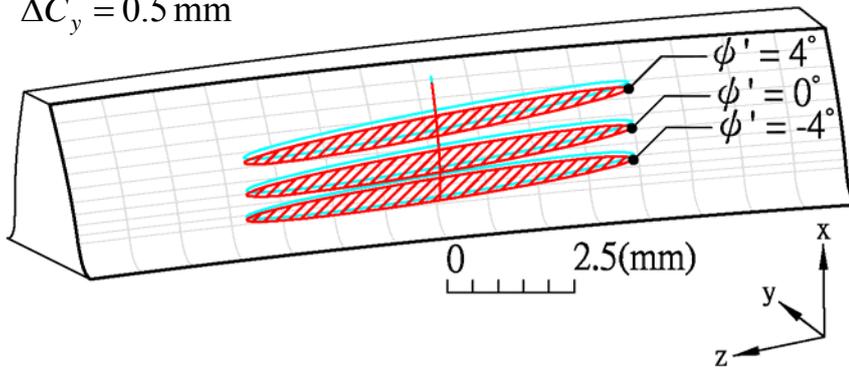
表 4.13 具裝配誤差時之轉位修整螺旋齒輪的接觸分析(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	-0.25	46.201
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ_1' (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ_2' (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-7.187	-4.190	-8.000	0.261	0.880	0.000		
0.000	-3.187	3.810	0.000	1.028	1.648	0.000		
4.000	0.813	11.810	8.000	1.796	2.416	0.000		
8.000	4.813	19.810	16.000	2.564	3.184	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.923	-7.941	-8.000	0.503	0.525	0.000		
0.000	-1.923	0.059	0.000	1.271	1.293	0.000		
4.000	2.077	8.059	8.000	2.039	2.061	0.000		
8.000	6.077	16.059	16.000	2.806	2.829	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.332	-6.751	-8.008	1.001	1.006	-0.471		
0.000	-1.330	1.254	0.000	1.769	1.773	0.000		
4.000	2.673	9.259	8.008	2.536	2.541	0.471		
8.000	6.675	17.264	16.015	3.304	3.309	0.943		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$								
-4.000	-5.454	-6.664	-7.997	0.467	0.530	0.166		
0.000	-1.447	1.326	0.000	1.237	1.297	0.000		
4.000	2.560	9.317	7.997	2.006	2.064	-0.166		
8.000	6.568	17.307	15.995	2.775	2.831	-0.332		

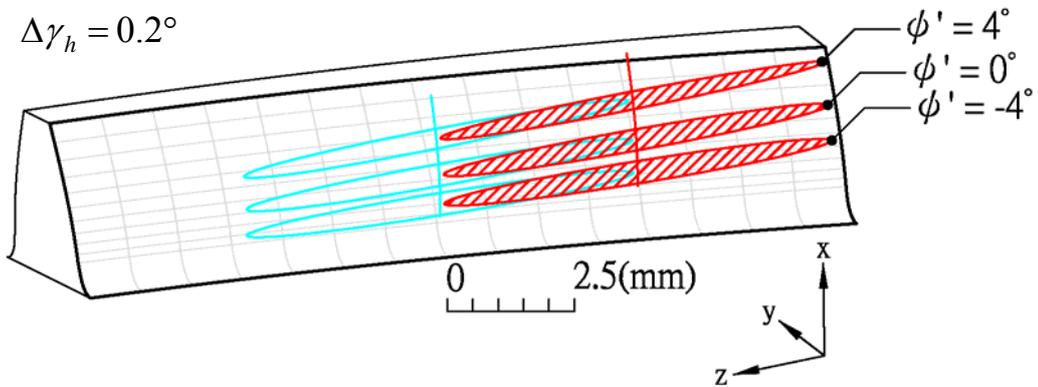
$\Delta C_x = 0.5 \text{ mm}$



$\Delta C_y = 0.5 \text{ mm}$



$\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$



$\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$

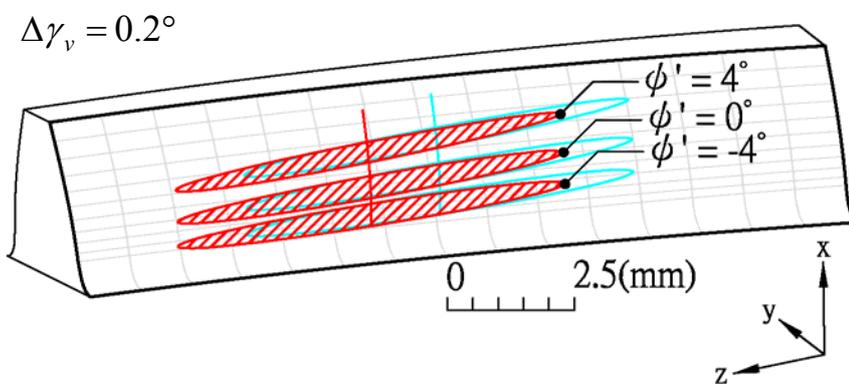


圖 4.12 轉位量 $x = -0.25$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差狀況下之接觸齒印

例題 4.6 具裝配誤差時之不同壓力角的具冠狀螺旋齒輪接觸齒印分析

如表 4.14 和表 4.15 所示，為壓力角分別為 19° 和 21° ，冠狀修整量 $E_1 = 0.025 \text{ mm}$ ，轉位係數 $x=0$ 之螺旋齒輪組的主要設計參數。

經由齒輪接觸模擬與齒面外形法分析後，齒輪組在具有裝配誤差狀況下之接觸分析及接觸齒印，如表 4.14 和 4.15 以及圖 4.13 和圖 4.14 所示。

分析結果顯示，不同壓力角之中心距誤差的影響與冠狀與轉位修整齒輪的趨勢皆相同，亦皆無產生明顯之運動誤差。在具有軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h$ 與 $\Delta\gamma_v$ 時，齒印亦會偏向齒筋方向之端面。而在具有水平軸向之裝配誤差 $\Delta\gamma_h$ 時，齒輪組之運動誤差會隨著壓力角的角度增加而增加，但其變化量甚小；當具有垂直軸向之裝配誤差 $\Delta\gamma_v$ 時，則齒輪組之運動誤差會隨著壓力角角度的增加而增加，且其接觸齒印偏移量亦會隨著壓力角角度的增加而增加。



表 4.14 具裝配誤差時之修整型螺旋齒輪的接觸分析(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	19	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	19	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	ℓ_p (mm)	ℓ_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.826	-5.546	-8.000	0.228	0.782	0.000		
0.000	-1.826	2.454	0.000	0.959	1.513	0.000		
4.000	2.174	10.454	8.000	1.690	2.243	0.000		
8.000	6.174	18.454	16.000	2.421	2.974	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.606	-9.243	-8.000	0.451	0.448	0.000		
0.000	-0.606	-1.243	0.000	1.182	1.179	0.000		
4.000	3.394	6.757	8.000	1.913	1.910	0.000		
8.000	7.394	14.757	16.000	2.644	2.641	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.019	-8.065	-8.007	0.925	0.904	-0.467		
0.000	-0.017	-0.060	0.000	1.656	1.635	0.000		
4.000	3.986	7.945	8.007	2.387	2.365	0.467		
8.000	7.988	15.950	16.015	3.117	3.096	0.935		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$								
-4.000	-4.139	-7.979	-7.997	0.415	0.450	0.167		
0.000	-0.132	0.011	0.000	1.148	1.180	0.000		
4.000	3.875	8.001	7.997	1.880	1.910	-0.167		
8.000	7.882	15.992	15.995	2.612	2.640	-0.334		

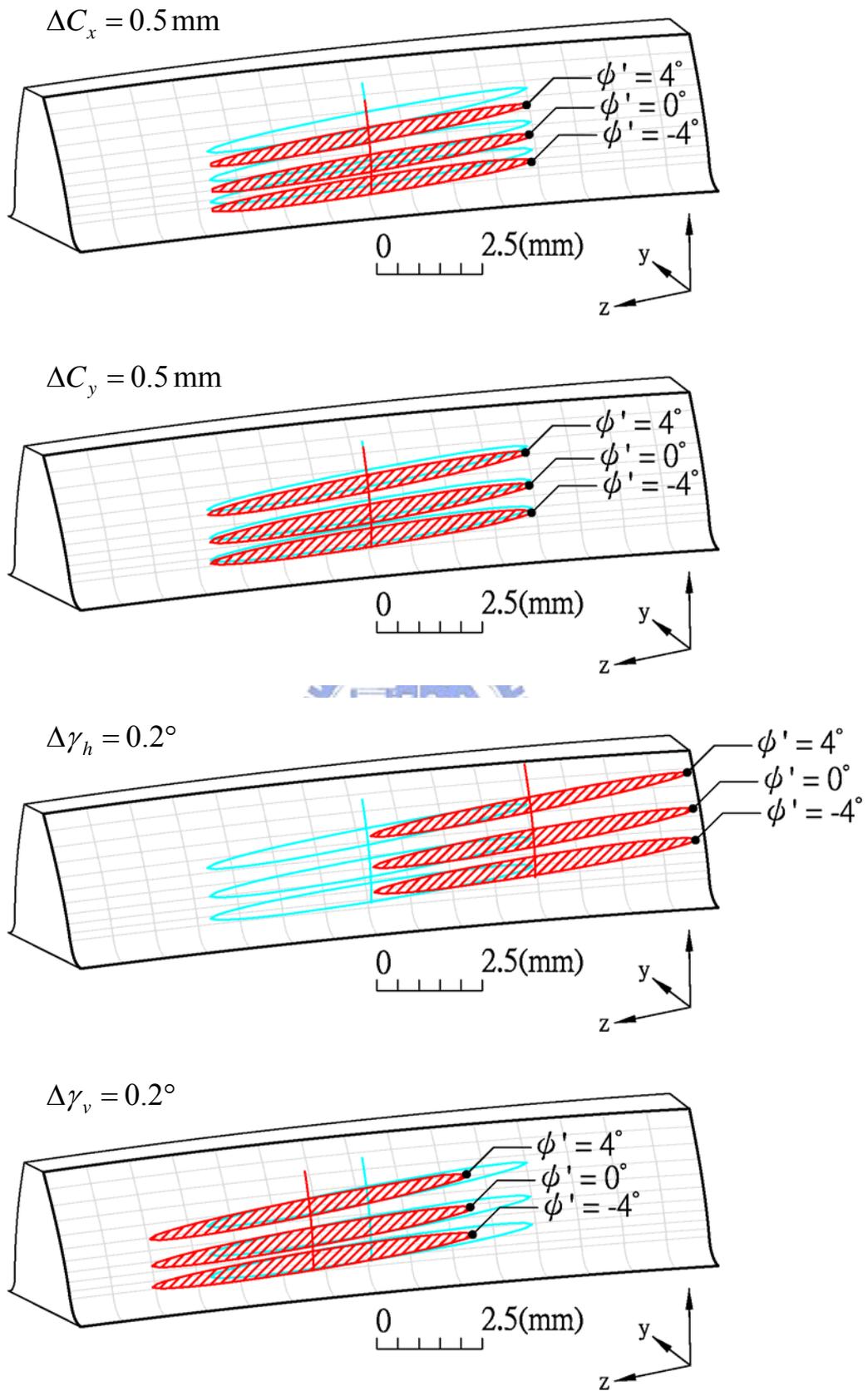


圖 4.13 壓力角 $\alpha_n = 19^\circ$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差時的接觸齒印

表 4.16 具裝配誤差時之修整型螺旋齒輪的接觸分析(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	21	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	21	75(左旋)	15	無冠狀	0	
ϕ'_1 (度)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	ϕ'_2 (度)	ℓ_p (mm)	ℓ_g (mm)	KE (arc-sec.)		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-5.622	-5.671	-8.000	0.153	0.708	0.000		
0.000	-1.622	2.329	0.000	0.957	1.512	0.000		
4.000	2.378	10.330	8.000	1.762	2.317	0.000		
8.000	6.378	18.330	16.000	2.566	3.121	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.607	-9.242	-8.000	0.357	0.354	0.000		
0.000	-0.607	-1.242	0.000	1.161	1.158	0.000		
4.000	3.393	6.758	8.000	1.966	1.963	0.000		
8.000	7.393	14.758	16.000	2.770	2.767	0.000		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
-4.000	-4.019	-8.065	-8.007	0.870	0.851	-0.468		
0.000	-0.017	-0.060	0.000	1.674	1.655	0.000		
4.000	3.985	7.945	8.007	2.478	2.459	0.468		
8.000	7.988	15.950	16.015	3.283	3.263	0.935		
裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.2^\circ$								
-4.000	-4.128	-7.985	-7.997	0.306	0.341	0.186		
0.000	-0.122	0.006	0.000	1.112	1.145	0.000		
4.000	3.884	7.997	7.997	1.918	1.949	-0.187		
8.000	7.891	15.987	15.994	2.724	2.752	-0.373		

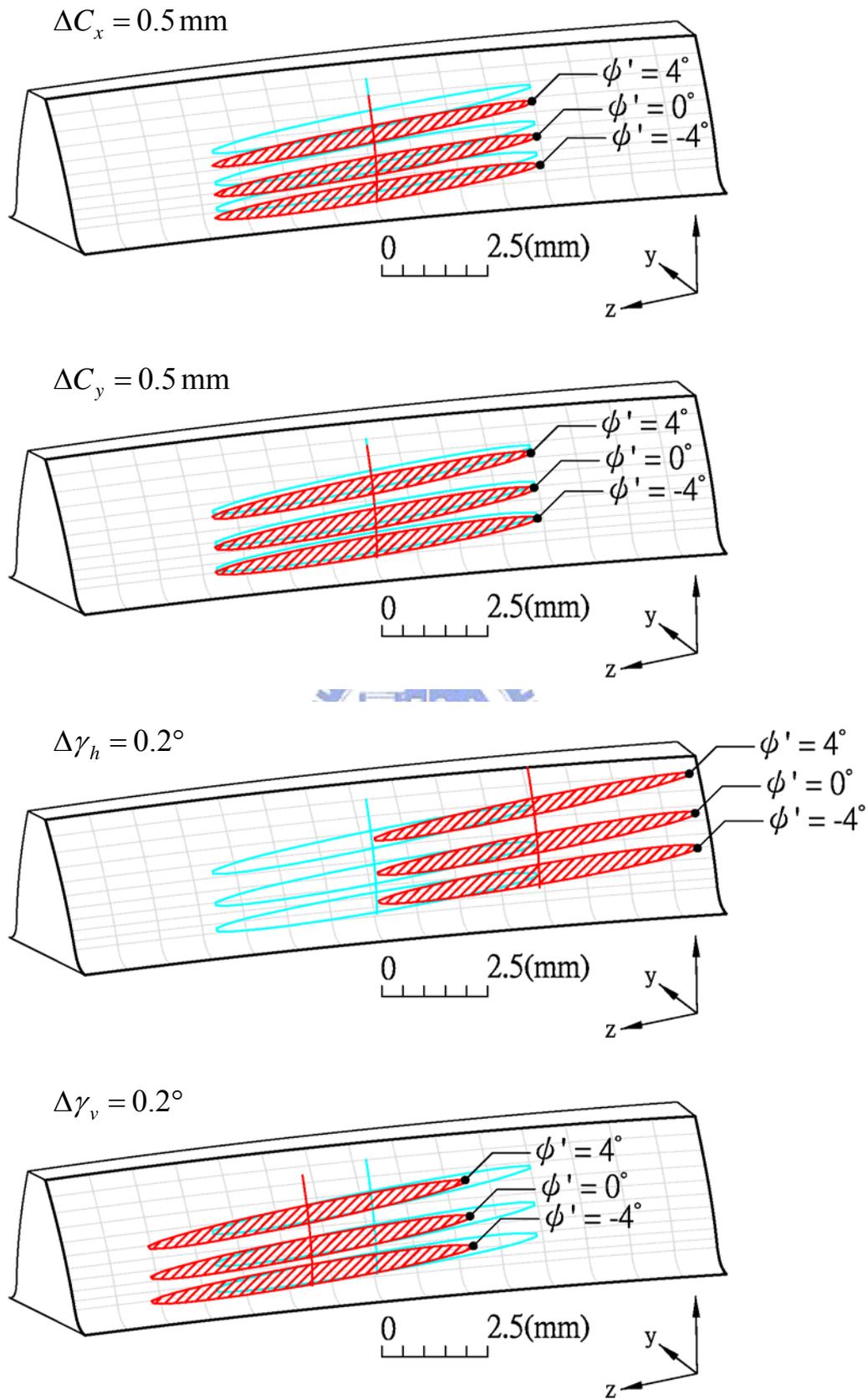


圖 4.14 壓力角 $\alpha_n = 21^\circ$ 之冠狀修整齒輪組在具裝配誤差時的接觸齒印

4.5 本章結論

透過齒面接觸分析與齒印分析，可以得知具冠狀修整型之漸開線螺旋齒輪，其嚙合傳動的接觸點、接觸軌跡與接觸齒印，以及冠狀修整量、轉位修整量與不同壓力角等齒輪設計參數，對於漸開線螺旋齒輪在理想與具裝配誤差下之接觸狀況和影響。而螺旋齒輪齒面之各修整方式對於接觸分析與齒印狀況的影響上，可以整理出以下要點：

1. 漸開線螺旋齒輪無論以何種方式修整，在具有中心距方向之裝配誤差時，皆僅影響其嚙合接觸齒印於漸開線齒面上移或下移，且平行中心距方向之裝配誤差的影響大於垂直中心距方向之裝配誤差。而在具有軸向裝配誤差時，齒輪組皆有明顯之運動誤差產生，而其嚙合接觸齒印則移向齒筋方向之兩側，且水平軸向裝配誤差的影響大於垂直軸向裝配誤差。
2. 漸開線齒輪之冠狀修整可使得其齒面嚙合接觸齒印向齒筋方向的中央集中，對齒輪組之軸向誤差有相當明顯的改善效用。
3. 漸開線齒輪之轉位修整會影響其嚙合接觸齒印在漸開線齒形方向的位置及疏密程度，這也會影響到接觸之位置及其齒根應力大小。具有相同之水平軸向裝配誤差條件下，齒輪組之運動誤差與轉位係數呈反比關係；而具有相同之垂直軸向裝配誤差條件時，齒輪組之運動誤差與轉位係數呈正比關係。
4. 壓力角之角度大小影響嚙合接觸齒印於漸開線齒形方向的疏密程度，也影響到接觸位置及其齒根應力大小。在具相同之軸向裝配誤差條件下，齒輪組之運動誤差與壓力角的角度呈正比關係；若具有相同垂直軸向裝配誤差時，則齒輪組之嚙合接觸齒印將會隨著壓力角的增加而偏向齒筋方向之端面。
5. 在僅改變嚙合齒輪中的一個齒輪之壓力角的情況，齒輪組之接觸點的運動誤差會隨著接觸點遠離節圓處而增加，運動誤差值亦會隨著兩齒輪之

壓力角的角度差值增加而增加；嚙合接觸齒印亦會隨著壓力角之角度的增加或減小，而往齒輪齒筋上螺旋之方向或反方向偏移。

茲將上述漸開線螺旋齒輪齒面之各修整方式對於接觸分析與齒印狀況的影響概略整理如表 4.17。

表 4.17 漸開線螺旋齒輪齒面之各修整方式對於接觸分析與齒印狀況的影響及特性概略表

	理想裝配	具中心距之裝配誤差	具軸向之裝配誤差	
			水平軸向裝配誤差	垂直軸向裝配誤差
無修整	· 線接觸	 · 齒印於漸開線齒面上移或下移 · 對運動誤差無明顯影響		
冠狀修整	· 接觸橢圓長軸會隨著冠狀修整量的增加而縮短		· 齒印偏移量隨冠狀量之增加而減小	· 齒印偏移量隨冠狀量之增加而減小
轉位修整	正轉位 · 齒印較鬆散 · 齒印偏向漸開線齒形之下方		· 運動誤差隨正轉位量增加而減少	· 運動誤差隨正轉位量增加而增加
	負轉位 · 齒印較密集 · 齒印偏向漸開線齒形之上方		· 運動誤差隨負轉位量增加而增加	· 運動誤差隨負轉位量增加而減少
改變一齒輪壓力角	減少 · 齒印密集且略小 · 齒印向齒輪齒筋上螺旋之反方向偏移		· 運動誤差隨角度減少而減少，但變化量甚小	· 運動誤差與齒印偏移量皆隨角度的減少而減少
	增加 · 齒印鬆散且略大 · 齒印向齒輪齒筋上螺旋之方向偏移		· 運動誤差隨角度增加而增加，但變化量甚小	· 運動誤差與齒印偏移量皆隨角度的增加而增加
改變兩齒輪壓力角	減少 · 齒印密集且略小		· 運動誤差隨角度的減少而減少，但變化量甚小	· 運動誤差與齒印偏移量皆隨角度的減少而減少
	增加 · 齒印鬆散且略大		· 運動誤差隨角度的增加而增加，但變化量甚小	· 運動誤差與齒印偏移量皆隨角度的增加而增加

第五章 具偏擺誤差之齒輪接觸與齒印分析

5.1 前言

齒輪嚙合傳動的接觸狀況不但會受到齒輪之齒面修整之影響，也會受齒輪組之裝配誤差所影響。在本論文第四章之研討中所考量之齒輪組的裝配誤差皆為定值，亦即在齒輪組裝配完成後，齒輪轉動時其位置和誤差值皆不會隨之變動。然而一對嚙合之齒輪組若有齒輪偏擺(Runout)狀況時，則齒輪組的運動誤差值則非定值，而會隨著齒輪的轉動而改變，傳動誤差為齒輪轉動角度的函數。齒輪之偏擺包含偏心及軸偏擺，前者是齒輪組之中心距的組裝誤差，包括平行中心距方向之裝配誤差與垂直中心距方向之裝配誤差，齒輪之偏心將會隨著齒輪的轉動而改變；後者則是齒輪組之旋轉軸的組裝誤差，包括水平軸向的裝配誤差與垂直軸向的裝配誤差，齒輪組之運動誤差也會隨齒輪轉動而改變。

齒輪偏擺產生的主要原因係來自於軸承、軸與軸孔裝配之裕度及齒輪加工精度。前述之裝配裕度過大，會使得齒輪呈現浮動的狀態，而齒輪軸或軸孔垂直度與軸心位置的加工精度，亦會決定齒輪組裝配的誤差條件，因而會造成齒輪偏心和軸偏擺的偏擺誤差，如圖 5.1(a)表示齒輪轉軸偏離理想轉軸之位置的偏心誤差，圖 5.1(b)則表示軸承之裕度所造成的偏心誤差，圖 5.1(c)表示因為齒輪轉軸垂直度而造成之軸偏擺誤差，圖 5.1(d)則表示因為軸承之裕度所造成的軸偏擺誤差。

在實務上齒輪組嚙合傳動之偏擺現象的發生相當常見，故透過具偏擺誤差的齒面接觸與齒印分析模擬，將有助於對齒輪組發生偏擺時的齒輪接觸狀況能更為瞭解。

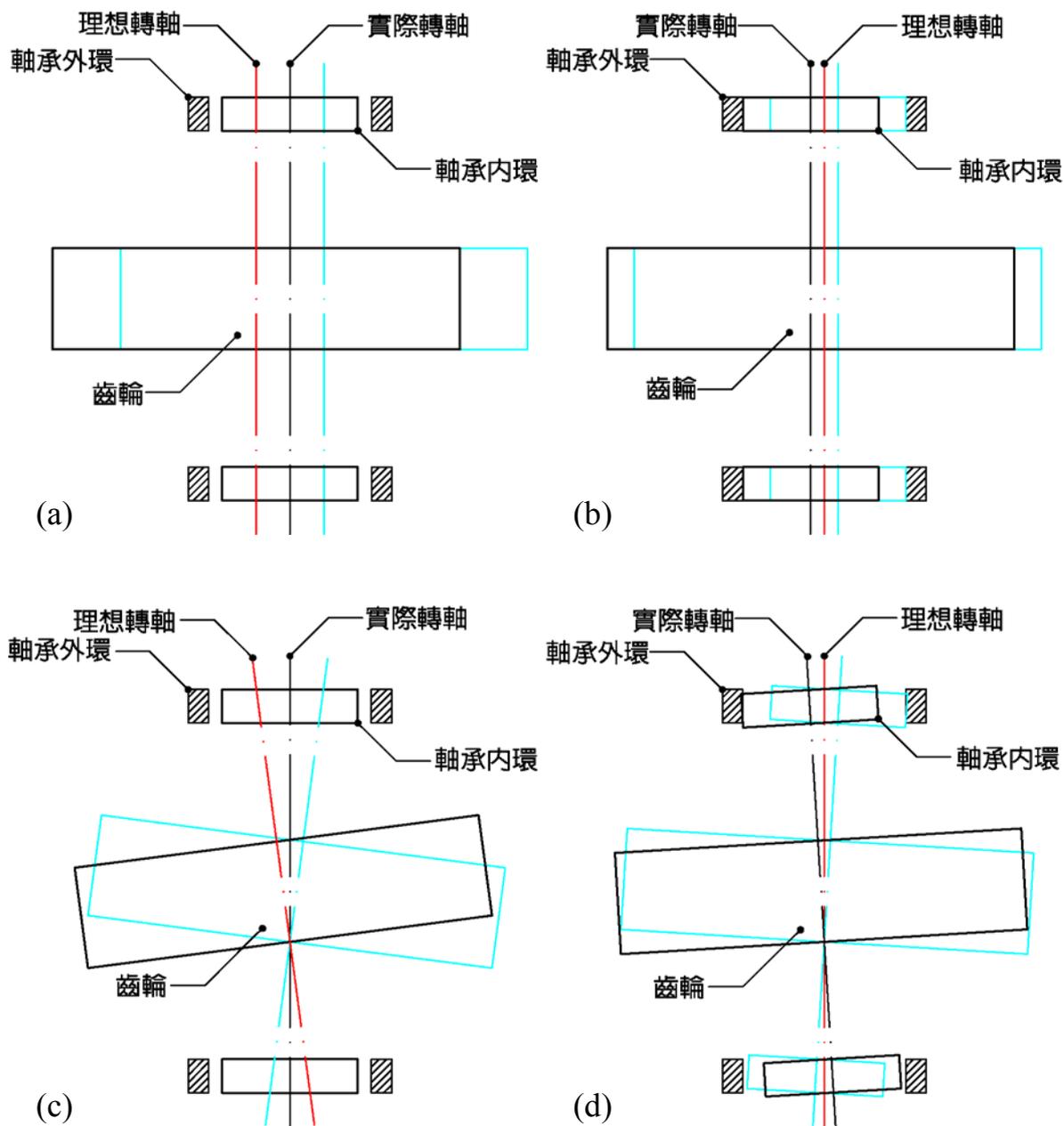


圖 5.1 齒輪之裝配偏擺示意圖

5.2 偏擺誤差之數學模式

齒輪發生偏擺現象時的傳動誤差值是依齒輪轉動而改變，如欲分析齒輪具有偏擺誤差的接觸狀況及其齒印，則必須先找出齒輪偏擺誤差值與齒輪旋轉角度之間的關係式。根據本論文第 4.1 節中的假設條件，齒輪組之裝配狀態穩定，誤差皆為定值或具有周期性之變化，亦即齒輪偏擺誤差在齒

輪轉動數周後會再回到轉動起始的狀態，並重覆相同的誤差變化。

推導偏擺誤差之理論數學模式時，由於相關之傳動元件間的關係相當複雜，故推導過程中假設下列條件：

- 一、齒輪組裝配時使用之軸承及轉軸均為剛體。
- 二、軸承外環與軸承座、轉軸與軸承內環軸孔裝配均為理想之裝配。
- 三、軸承除其內外環與滾珠(針)的間隙外，為理想軸承。
- 四、當齒輪之轉軸或軸孔無製造誤差時，齒輪組裝配之偏擺誤差僅來自軸承內外環與軸承滾珠(針)的間隙。
- 五、當齒輪之轉軸或軸孔有製造誤差時，則齒輪組裝配之偏擺誤差僅來自齒輪之轉軸或軸孔的位置偏離理論之齒輪軸心。

圖 5.2 為齒輪 1 具有偏擺誤差時其之座標系間之關係示意圖，其中座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為固定座標系，座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 分別固聯於齒輪 1 與齒輪 2，座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 為同時具有平行中心距方向之裝配誤差 ΔC_x 和垂直中心距方向之裝配誤差 ΔC_y 的輔助座標系，而 $\Delta\gamma_h$ 與 $\Delta\gamma_v$ 則分別為齒輪 1 座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 相對於前述輔助座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 的水平軸向之裝配誤差角度與垂直軸向之裝配誤差角度。 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 是具中心距裝配誤差的偏心誤差位置向量， $\mathbf{r}_{\Delta\gamma}$ 則是具軸向裝配誤差的軸偏擺誤差之位置向量， O_1 與 $P_{\Delta\gamma}$ 點假定為齒輪旋轉軸之齒寬 W 的兩端點，即 $|\overline{O_1 P_{\Delta\gamma}}| = W$ 。

為找出偏心與軸偏擺之誤差值與齒輪旋轉角度的關係式，先假設齒輪 1 旋轉同時， $\overline{O_1 P_{\Delta\gamma}}$ 繞著 Z_s 軸旋轉之軌跡為一圓錐。起始的軸偏擺誤差位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta\gamma}$ 表示在輔助座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 如下：

$$\mathbf{r}_{\Delta\gamma} = \begin{bmatrix} W \sin \Delta\gamma_v \\ W \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \\ W \cos \Delta\gamma_v \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

如圖 5.3 所示為具軸偏擺誤差之座標系關係圖，其中座標系 $S'_1(X'_1, Y'_1, Z'_1)$ 係小齒輪轉動 ϕ'_1 角後之新小齒輪座標系。當小齒輪轉動 ϕ'_1 角時，位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta\gamma}$ 亦沿著 Z_s 軸轉動 $\phi_{\Delta\gamma}$ 角，可利用齊次座標轉換矩陣方程式表示於固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 如下：

$$\mathbf{r}_{\Delta\gamma}^{(f)} = \mathbf{M}_{\text{fs}} \mathbf{M}_{\Delta\gamma}^{(\phi)} \mathbf{r}_{\Delta\gamma} \quad (5.2)$$

其中

$$\mathbf{M}_{\text{sf}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta C_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta C_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{M}_{\Delta\gamma}^{(\phi)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{\Delta\gamma} & \sin \phi_{\Delta\gamma} & 0 & 0 \\ -\sin \phi_{\Delta\gamma} & \cos \phi_{\Delta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

因此，齒輪 1 轉動 ϕ'_1 角時，表示於固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 的軸偏擺誤差位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta\gamma}^{(f)}$ 為：

$$\mathbf{r}_{\Delta\gamma}^{(f)} = \begin{bmatrix} W(\sin \Delta\gamma_v \cos \phi_{\Delta\gamma} + \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \sin \phi_{\Delta\gamma}) + \Delta C_x \\ W(-\sin \Delta\gamma_v \sin \phi_{\Delta\gamma} + \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \cos \phi_{\Delta\gamma}) + \Delta C_y \\ W \cos \Delta\gamma_v \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

茲以新的軸偏擺誤差位置向量來表示此瞬間的位置向量：

$$\mathbf{r}'_{\Delta\gamma} = \begin{bmatrix} W \sin \Delta\gamma'_v + \Delta C_x \\ W \cos \Delta\gamma'_v \sin \Delta\gamma'_h + \Delta C_y \\ W \cos \Delta\gamma'_v \cos \Delta\gamma'_h \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\Delta\gamma}^{(f)} \quad (5.6)$$

由方程式(5.1)至(5.6)可知，當小齒輪轉動 ϕ'_1 角之瞬間，其垂直軸向的裝配誤差 $\Delta\gamma'_v$ 和水平軸向的裝配誤差 $\Delta\gamma'_h$ 之關係式如下：

$$\Delta\gamma'_v = \sin^{-1}(\sin \Delta\gamma_v \cos \phi_{\Delta\gamma} + \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \sin \phi_{\Delta\gamma}) \quad (5.7)$$

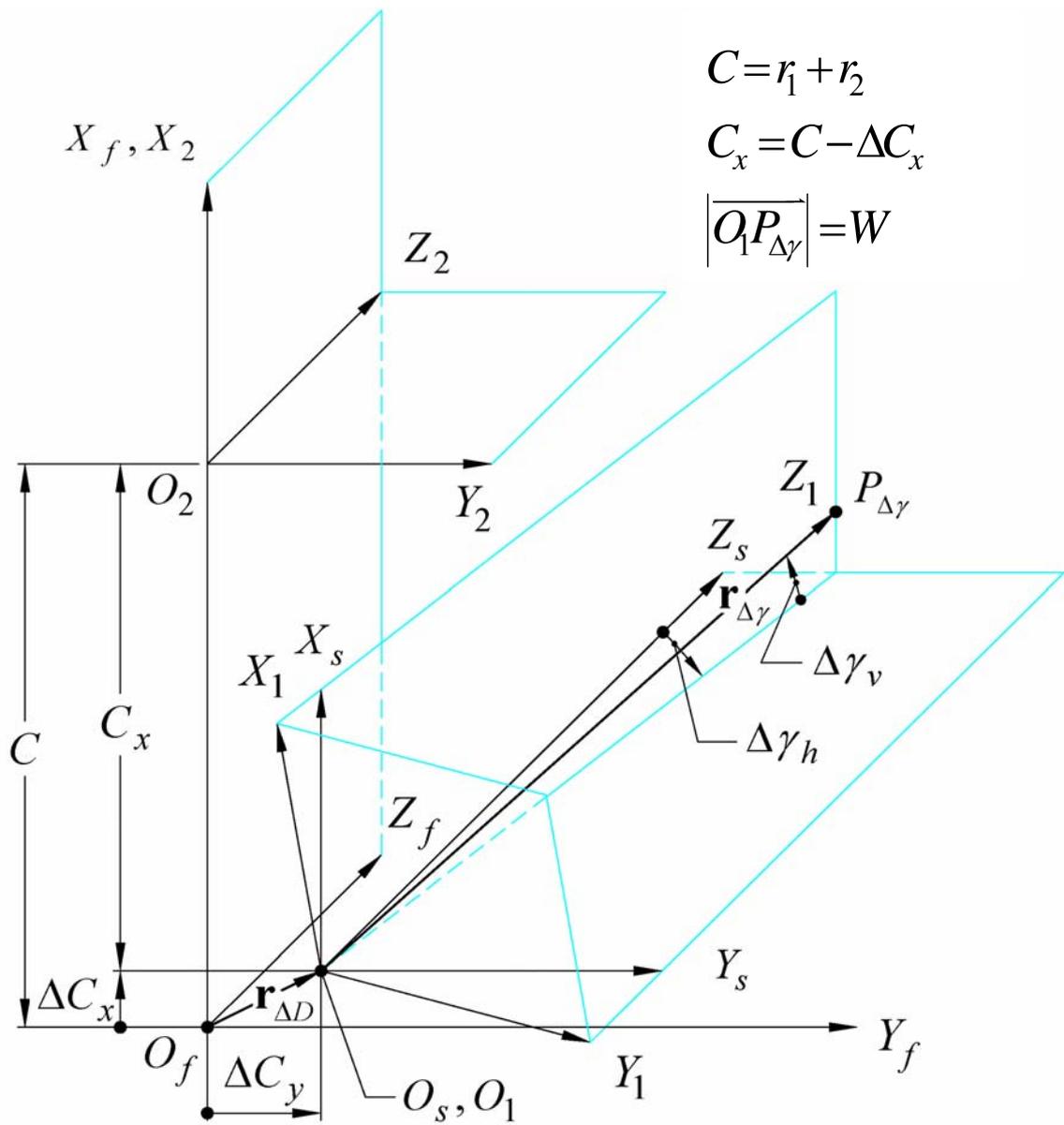


圖 5.2 具偏擺誤差之座標系關係圖

係輔助座標系 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 在小齒輪轉動 ϕ_1' 角後之新座標系。當小齒輪轉動 ϕ_1' 角時，若位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 亦沿著 Z_f 軸轉動 $\phi_{\Delta D}$ 角，利用齊次座標轉換矩陣方程式表示於固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 如下：

$$\mathbf{r}_{\Delta D}^{(f)} = \mathbf{M}_{\Delta D}^{(\phi)} \mathbf{r}_{\Delta D} \quad (5.10)$$

其中

$$\mathbf{M}_{\Delta D}^{(\phi)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{\Delta D} & \sin \phi_{\Delta D} & 0 & 0 \\ -\sin \phi_{\Delta D} & \cos \phi_{\Delta D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

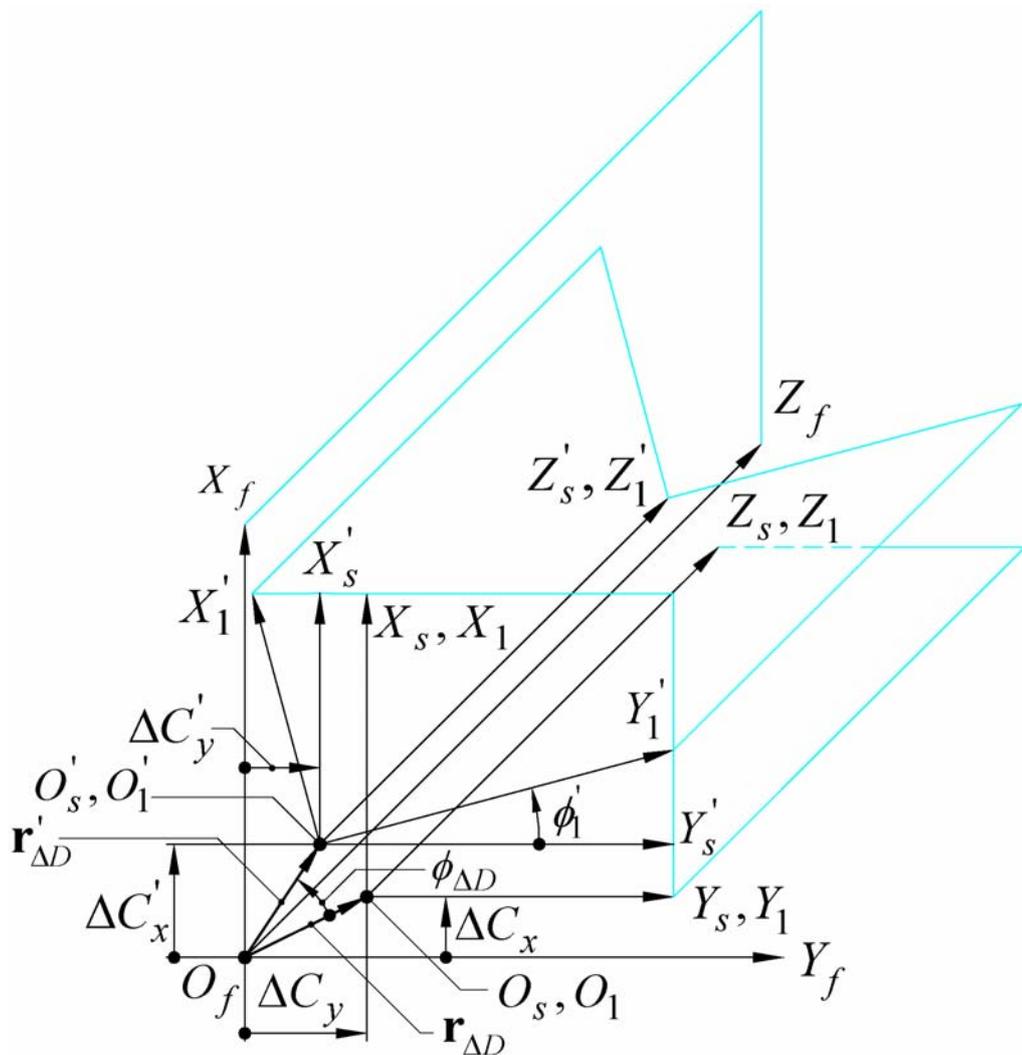


圖 5.4 具偏心誤差之座標系關係圖

因此， $\mathbf{r}_{\Delta D}^{(f)}$ 即為齒輪 1 轉動 ϕ_1' 角時，齒輪 1 座標系原點的偏心誤差位置向量。

茲以新的偏心誤差位置向量來表示此瞬間的位置向量如下：

$$\mathbf{r}_{\Delta D}' = \begin{bmatrix} \Delta C_x' \\ \Delta C_y' \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\Delta D}^{(f)} \quad (5.12)$$

由方程式(5.9)至(5.12)可知，當齒輪 1 轉動 ϕ_1' 角之瞬間，其平行中心距方向的裝配誤差 $\Delta C_x'$ 和垂直中心的距裝配誤差 $\Delta C_y'$ 之關係式如下：

$$\Delta C_x' = \Delta C_x \cos \phi_{\Delta D} + \Delta C_y \sin \phi_{\Delta D} \quad (5.13)$$

$$\Delta C_y' = -\Delta C_x \sin \phi_{\Delta D} + \Delta C_y \cos \phi_{\Delta D} \quad (5.14)$$

將本論文第四章中的裝配誤差值，皆以上述之誤差值與齒輪旋轉角度的關係式取代，再進行齒輪組之接觸模擬，即可得到在具偏擺誤差時之齒面接觸與齒印分析。此時所計算分析的僅為齒輪中之一齒，能分析之齒輪旋轉角度亦受齒面範圍限制於一齒之內。在無偏擺誤差時，齒輪各齒誤差條件相同，對一齒的分析可以代表其餘各齒；在具偏擺誤差時，誤差值隨齒輪旋轉角度變動，故於齒輪各齒上的影響不盡相同。

欲對齒輪具偏擺誤差時其餘各齒作分析，需於計算分析前先將齒輪旋轉至欲分析之齒所在的位置。若以齒輪未旋轉時所分析之齒為第 1 齒，則分析第 N 齒所需預先旋轉的角度 ϕ_N (弧度) 為：

$$\phi_N = (N-1) \frac{2\pi}{T}, \quad (N = 1, 2, \dots, T) \quad (5.15)$$

其中 T 為齒輪之齒數，齒數 N 之計數方向與齒輪轉動方向相反，亦即齒輪順時針轉動，齒數則逆時針方向計數；齒輪逆時針轉動，齒數則順時針方向計數。若位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta y}$ 沿 Z_f 軸轉動的 $\phi_{\Delta y}$ 角與小齒輪旋轉之角度 ϕ_1' 呈一函

數關係，亦即 $\phi_{\Delta\gamma} = \phi_{\Delta\gamma}(\phi_1')$ ，則於齒數旋轉至第 N 齒時，該齒輪組之軸偏擺誤差的各誤差起始值如下：

$$\Delta\gamma_{Nv} = \sin^{-1}(\sin \Delta\gamma_v \cos \phi_{\Delta\gamma}(\phi_N) + \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \sin \phi_{\Delta\gamma}(\phi_N)) \quad (5.16)$$

$$\Delta\gamma_{Nh} = \sin^{-1}\left(\frac{-\sin \Delta\gamma_v \sin \phi_{\Delta\gamma}(\phi_N) + \cos \Delta\gamma_v \sin \Delta\gamma_h \cos \phi_{\Delta\gamma}(\phi_N)}{\cos \Delta\gamma_{Nv}}\right) \quad (5.17)$$

在偏心誤差狀況下，若位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 沿 Z_f 軸轉動的 $\phi_{\Delta D}$ 角與小齒輪旋轉之角度 ϕ_1' 呈一函數關係，亦即 $\phi_{\Delta D} = \phi_{\Delta D}(\phi_1')$ ，則於齒數旋轉至第 N 齒時，齒輪組之偏心誤差的各誤差起始值如下：

$$\Delta C_{Nx} = \Delta C_x \cos \phi_{\Delta D}(\phi_N) + \Delta C_y \sin \phi_{\Delta D}(\phi_N) \quad (5.18)$$

$$\Delta C_{Ny} = -\Delta C_x \sin \phi_{\Delta D}(\phi_N) + \Delta C_y \cos \phi_{\Delta D}(\phi_N) \quad (5.19)$$

分析齒輪組之第 N 齒的接觸模擬與齒印分析所用之各裝配誤差值則如下：

$$\Delta\gamma'_v = \sin^{-1}(\sin \Delta\gamma_{Nv} \cos \phi_{\Delta\gamma}(\phi_1') + \cos \Delta\gamma_{Nv} \sin \Delta\gamma_{Nh} \sin \phi_{\Delta\gamma}(\phi_1')) \quad (5.20)$$

$$\Delta\gamma'_h = \sin^{-1}\left(\frac{-\sin \Delta\gamma_{Nv} \sin \phi_{\Delta\gamma}(\phi_1') + \cos \Delta\gamma_{Nv} \sin \Delta\gamma_{Nh} \cos \phi_{\Delta\gamma}(\phi_1')}{\cos \Delta\gamma'_v}\right) \quad (5.21)$$

$$\Delta C'_x = \Delta C_{Nx} \cos \phi_{\Delta D}(\phi_1') + \Delta C_{Ny} \sin \phi_{\Delta D}(\phi_1') \quad (5.22)$$

$$\Delta C'_y = -\Delta C_{Nx} \sin \phi_{\Delta D}(\phi_1') + \Delta C_{Ny} \cos \phi_{\Delta D}(\phi_1') \quad (5.23)$$

5.3 例題與討論

同第四章之例題與討論，以下將以電腦模擬分析具偏擺誤差時之修整型漸開線螺旋齒輪的接觸齒印，探討齒輪組具有偏擺誤差時對於修整型漸開線螺旋齒輪的影響。以下例題將分別討論冠狀修整漸開線螺旋齒輪具偏心誤差時與具軸偏擺誤差時之接觸分析與齒印分析，各例題中所使用之齒輪的主要設計參數如表 5.1 所示。

表 5.1 冠狀修整螺旋齒輪的主要設計參數

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	冠狀量 E_1 (mm)	轉位 係數	中心距 (mm)
齒輪 1	1.5	40	20	75(右旋)	15	0.025	0	46.587
齒輪 2	1.5	20	20	75(左旋)	15	無冠狀	0	

例題 5.1 具偏心誤差之修整型螺旋齒輪的接觸齒印分析

當齒輪組裝配之偏心誤差僅來自軸承內外環與軸承滾珠(針)的間隙的狀況下，如圖 5.1(b)所示，軸承內環外徑為 r_a mm，因軸承內外環之間隙，軸承內環所浮動的範圍之最大半徑為 r_o mm，則裝配誤差值 $|\mathbf{r}_{\Delta D}|$ 如下：

$$|\mathbf{r}_{\Delta D}| = r_o - r_a \quad (5.24)$$

齒輪組啮合轉動時，軸承之內外環與滾珠(針)之接觸狀況皆為純滾動，則偏心誤差之位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 的轉動角度 $\phi_{\Delta D}$ ，與齒輪 1 旋轉之角度 ϕ_1' 的關係如下：

$$\phi_{\Delta D} = \frac{r_a}{r_o} \phi_1' \quad (5.25)$$

將(5.24)代入(5.25)，可得到軸承內環之外徑 r_a 、偏心誤差之位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 與轉動角度 ϕ_1' 、 $\phi_{\Delta D}$ 的關係式：

$$\phi_{\Delta D} = \frac{r_a}{|\mathbf{r}_{\Delta D}| + r_a} \phi_1' \quad (5.26)$$

為簡化問題及利於模擬分析，假設軸承內環之外徑 r_a 值遠大偏心誤差之裝配誤差值 $|\mathbf{r}_{\Delta D}|$ ，則 $\phi_{\Delta D} = \phi_1'$ ，即齒輪 1 轉動一周時，偏心誤差之位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta D}$ 亦旋轉一周。

若齒輪 1 之第一齒的起始($\phi_1' = 0^\circ$)裝配誤差為 $\Delta C_x = 0.5$ mm，則接觸模擬、運動誤差與齒印分析之結果如表 5.2、圖 5.5 和圖 5.6 所示。在齒輪轉動之每一瞬間的中心距誤差值皆會不同，以第 1 齒(N=1)之起始狀態作為基準比較，依據運動誤差的變化趨勢可以推測，齒輪轉動一周所呈現的運動

誤差最大值出現於第 6 齒至第 11 齒間，最小值則出現於第 26 齒至第 31 齒間。接觸齒印的位置在第 1 齒與第 31 齒為偏向齒形下方，第 11 齒與第 21 齒為偏向齒形上方；而於第 6 齒至第 11 齒間和第 26 齒至第 31 齒間，具偏心誤差之接觸齒印與圖 5.3 中以淡色橢圓表示的理論接觸齒印相近，於第 36 齒至第 1 齒間和第 16 齒至第 21 齒間，具偏心誤差之接觸齒印則與理論接觸齒印有較多的偏移。若依齒數 N 連續比較各齒之分析結果，運動誤差與接觸齒印皆呈現周期性的變化。

表 5.2 具偏心誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析

第 1 齒起始裝配狀態： $\Delta C_x = 0.5\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta \gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma_v = 0.0^\circ$								
ΔC_x (mm)	ΔC_y (mm)	$\Delta \gamma_h$ (度)	$\Delta \gamma_v$ (度)	ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)
第 1 齒 (N=1)								
0.4988	0.0349	0	0	-4.000	-8.132	0.183	0.735	-8.272
0.5	0	0	0	0.000	0.000	0.958	1.512	0.000
0.4988	-0.0349	0	0	4.000	8.129	1.735	2.287	8.074
0.4951	-0.0696	0	0	8.000	16.253	2.513	3.062	15.910
第 6 齒 (N=6)								
0.3774	-0.3280	0	0	-4.000	-6.940	0.353	0.766	66.602
0.3536	-0.3536	0	0	0.000	1.123	1.143	1.529	70.549
0.3280	-0.3774	0	0	4.000	9.177	1.934	2.290	73.934
0.3009	-0.3993	0	0	8.000	17.221	2.725	3.051	76.738
第 11 齒 (N=11)								
0.0349	-0.4988	0	0	-4.000	-6.782	0.617	0.652	76.555
0	-0.5	0	0	0.000	1.173	1.407	1.404	73.710
-0.0349	-0.4988	0	0	4.000	9.119	2.196	2.157	70.286
-0.0699	-0.4951	0	0	8.000	17.055	2.985	2.908	66.303
第 16 齒 (N=16)								
-0.3280	-0.3774	0	0	-4.000	-7.755	0.808	0.466	15.416
-0.3536	-0.3536	0	0	0.000	0.120	1.586	1.217	7.569
-0.3774	-0.3280	0	0	4.000	7.992	2.361	1.969	-0.515
-0.3993	-0.3009	0	0	8.000	15.860	3.135	2.721	-8.794
第 21 齒 (N=21)								
-0.4988	-0.0349	0	0	-4.000	-9.259	0.826	0.314	-79.121
-0.5	0	0	0	0.000	-1.388	1.587	1.073	-87.234
-0.4988	0.0349	0	0	4.000	6.486	2.346	1.833	-95.121
-0.4951	0.0696	0	0	8.000	14.365	3.103	2.595	-102.745
第 26 齒 (N=26)								
-0.3774	0.3280	0	0	-4.000	-10.41	0.672	0.280	-151.379

-0.3536	0.3536	0	0	0.000	-2.469	1.420	1.052	-155.117
-0.3280	0.3774	0	0	4.000	5.480	2.167	1.825	-158.316
-0.3009	0.3993	0	0	8.000	13.438	2.914	2.599	-160.962
第 31 齒 (N=31)								
-0.0349	0.4988	0	0	-4.000	-10.56	0.426	0.386	-160.790
0	0.5	0	0	0.000	-2.516	1.171	1.168	-158.104
0.0349	0.4988	0	0	4.000	5.535	1.917	1.952	-154.867
0.0696	0.4951	0	0	8.000	13.595	2.664	2.735	-151.094
第 36 齒 (N=36)								
0.3280	0.3774	0	0	-4.000	-9.628	0.219	0.575	-102.261
0.3536	0.3536	0	0	0.000	-1.506	0.975	1.360	-94.624
0.3774	0.3280	0	0	4.000	6.620	1.732	2.145	-86.726
0.3993	0.3009	0	0	8.000	14.749	2.492	2.929	-78.605

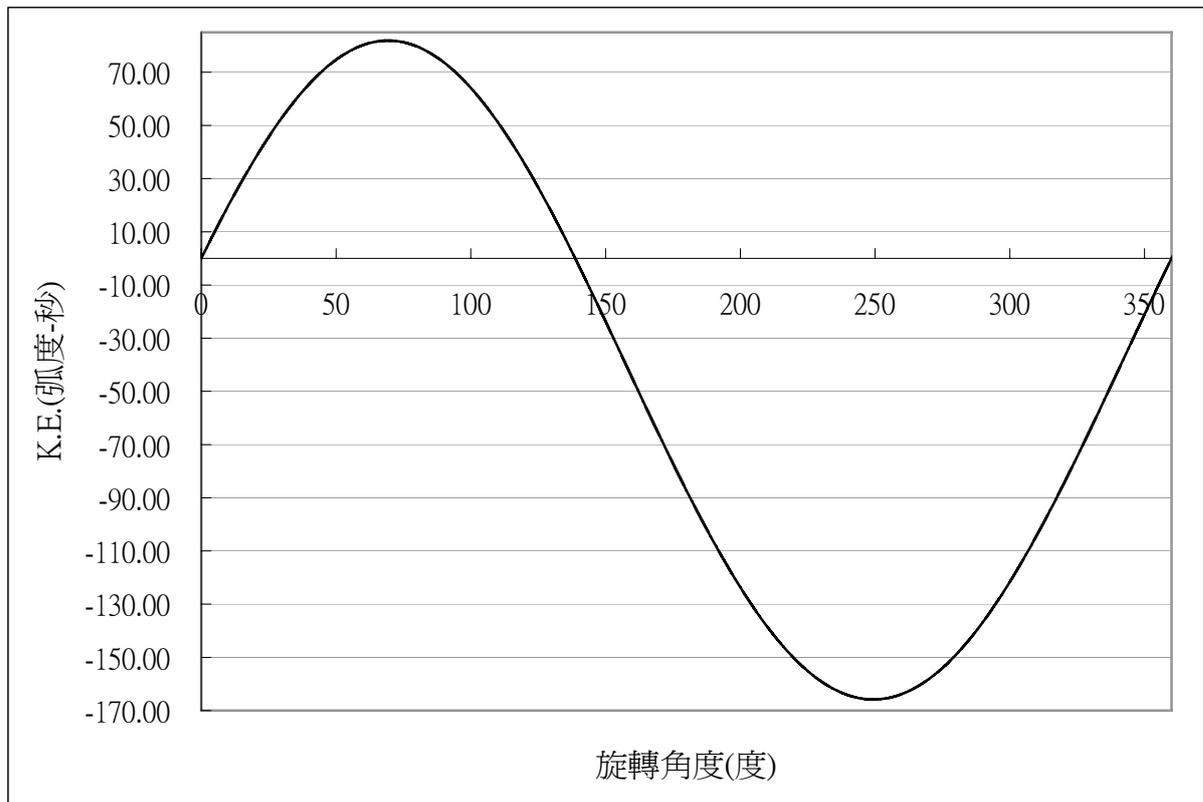


圖 5.5 具偏心誤差之冠狀修整螺旋齒輪的運動誤差

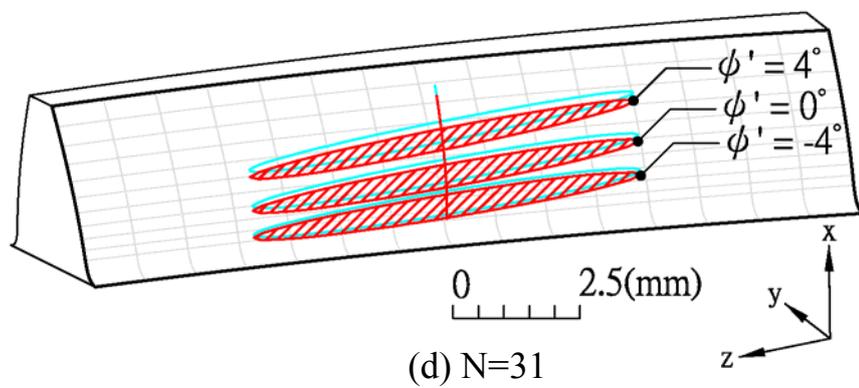
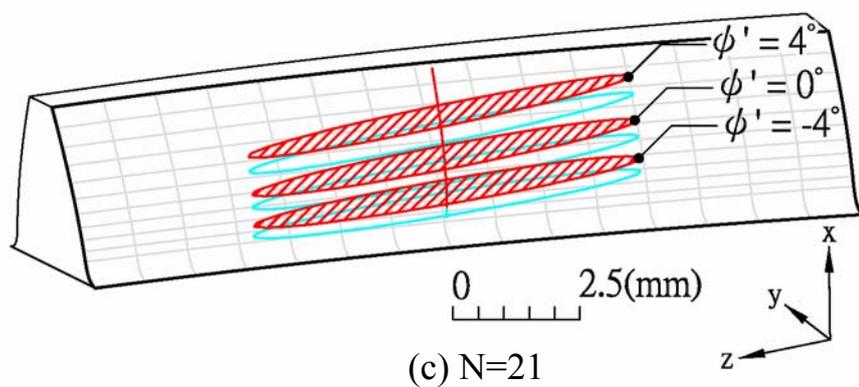
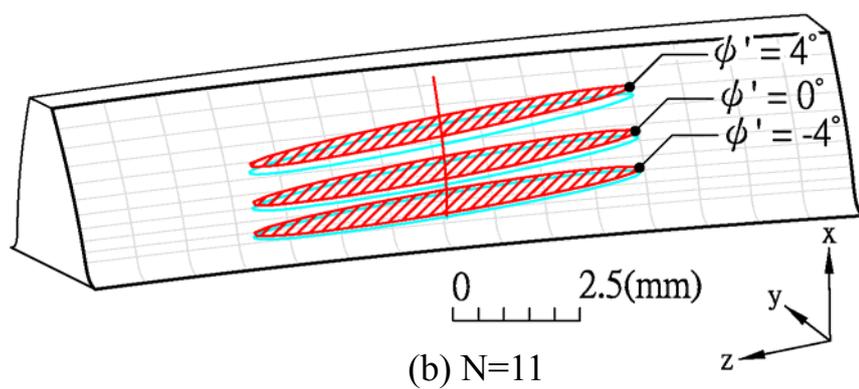
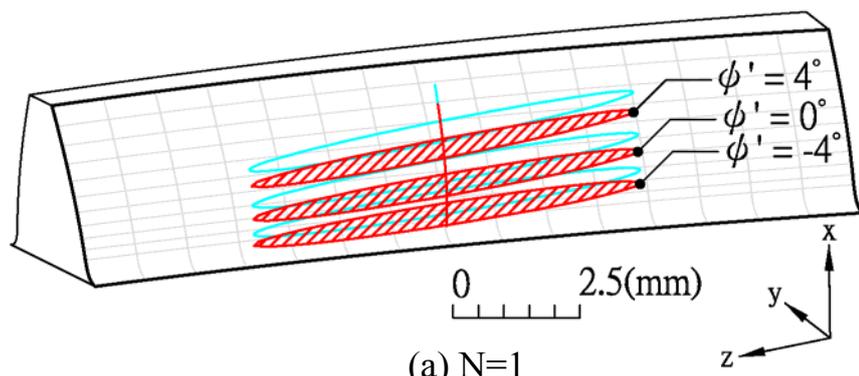


圖 5.6 具偏心誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸齒印

例題 5.2 具軸偏擺誤差之修整型螺旋齒輪的接觸齒印分析

當齒輪組裝配之軸偏擺誤差僅來自齒輪轉軸製造加工的垂直度，亦即齒輪轉軸與理想轉軸具一交角的狀況下，如圖 5.1(c)所示，則齒輪 1 之旋轉角度 ϕ_1' 與軸偏擺位置向量 $\mathbf{r}_{\Delta\gamma}$ 之旋轉角度 $\phi_{\Delta\gamma}$ 的關係式為 $\phi_{\Delta\gamma} = \phi_1'$ 。

假設修整型螺旋齒輪於第一齒的起始 ($\phi_1' = 0^\circ$) 裝配誤差為水平軸向之誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ ，經模擬後之齒輪接觸分析結果如表 5.3 所示，而運動誤差如圖 5.7 所示，接觸齒印如圖 5.8 所示。分析結果顯示，齒輪轉動之每一瞬間的軸向誤差值皆會不同，以第 1 齒 (N=1) 之起始狀態作為基準比較，齒輪轉動一周所呈現的運動誤差最小值出現於第 6 齒附近，最大值則出現於第 21 齒至第 26 齒間；接觸齒印於齒輪齒筋方向之兩端間移動，亦呈現周期性的變化。如圖 5.9 所示，即為具軸偏擺誤差時之齒輪接觸軌跡變化，第 6 齒至第 11 齒間和第 26 齒至第 31 齒間，具軸偏擺誤差之接觸軌跡和齒印與圖 5.5 中以淡色橢圓表示的理論接觸軌跡和齒印相近，但在第 36 齒至第 1 齒間和第 16 齒至第 21 齒間，具軸偏擺誤差之接觸軌跡和齒印與理論接觸軌跡和齒印則有較多的偏移。

表 5.3 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸分析

第 1 齒起始裝配狀態： $\Delta C_x = 0\text{mm}$ 、 $\Delta C_y = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$								
ΔC_x (mm)	ΔC_y (mm)	$\Delta\gamma_h$ (度)	$\Delta\gamma_v$ (度)	ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	l_p (mm)	l_g (mm)	KE (arc-sec.)
第 1 齒 (N=1)								
0	0	0.1995	-0.0140	-4.000	-8.001	0.908	0.885	-0.090
0	0	0.2	0	0.000	0.000	1.665	1.645	0.000
0	0	0.1995	0.0140	4.000	8.001	2.420	2.402	0.083
0	0	0.1981	0.0278	8.000	16.003	3.174	3.158	0.157
第 6 齒 (N=6)								
0	0	0.1677	0.1089	-4.000	-8.040	0.744	0.748	-2.538
0	0	0.1597	0.1204	0.000	-0.037	1.488	1.494	-2.347
0	0	0.1509	0.1312	4.000	7.965	2.231	2.239	-2.171
0	0	0.1414	0.1414	8.000	15.968	2.973	2.982	-2.010
第 11 齒 (N=11)								

0	0	0.0140	0.1995	-4.000	-7.994	0.385	0.420	0.406
0	0	0	0.2	0.000	0.012	1.130	1.162	0.780
0	0	-0.0140	0.1995	4.000	8.018	1.875	1.905	1.123
0	0	-0.0278	0.1981	8.000	16.023	2.621	2.649	1.433
第 16 齒 (N=16)								
0	0	-0.1312	0.1509	-4.000	-7.877	0.177	0.194	7.739
0	0	-0.1414	0.1414	0.000	0.126	0.937	0.950	7.937
0	0	-0.1509	0.1312	4.000	8.129	1.699	1.706	8.086
0	0	-0.1597	0.1204	8.000	16.130	2.462	2.465	8.190
第 21 齒 (N=21)								
0	0	-0.1995	0.0140	-4.000	-7.789	0.175	0.157	13.252
0	0	-0.2	0	0.000	0.207	0.953	0.932	13.008
0	0	-0.1995	-0.0140	4.000	8.203	1.732	1.710	12.743
0	0	-0.1981	-0.0278	8.000	16.198	2.512	2.489	12.466
第 26 齒 (N=26)								
0	0	-0.1509	-0.1312	-4.000	-7.789	0.365	0.334	13.263
0	0	-0.1414	-0.1414	0.000	0.204	1.155	1.125	12.828
0	0	-0.1312	-0.1509	4.000	8.198	1.946	1.918	12.432
0	0	-0.1203	-0.1597	8.000	16.192	2.738	2.712	12.079
第 31 齒 (N=31)								
0	0	-0.0140	-0.1995	-4.000	-7.848	0.653	0.624	9.575
0	0	0	-0.2	0.000	0.149	1.445	1.418	9.350
0	0	0.0140	-0.1995	4.000	8.146	2.236	2.211	9.183
0	0	0.0278	-0.1981	8.000	16.144	3.026	3.003	9.072
第 36 齒 (N=36)								
0	0	0.1312	-0.1509	-4.000	-7.924	0.885	0.854	4.787
0	0	0.1414	-0.1414	0.000	0.076	1.664	1.634	4.796
0	0	0.1509	-0.1312	4.000	8.077	2.441	2.412	4.830
0	0	0.1597	-0.1204	8.000	16.078	3.216	3.189	4.884

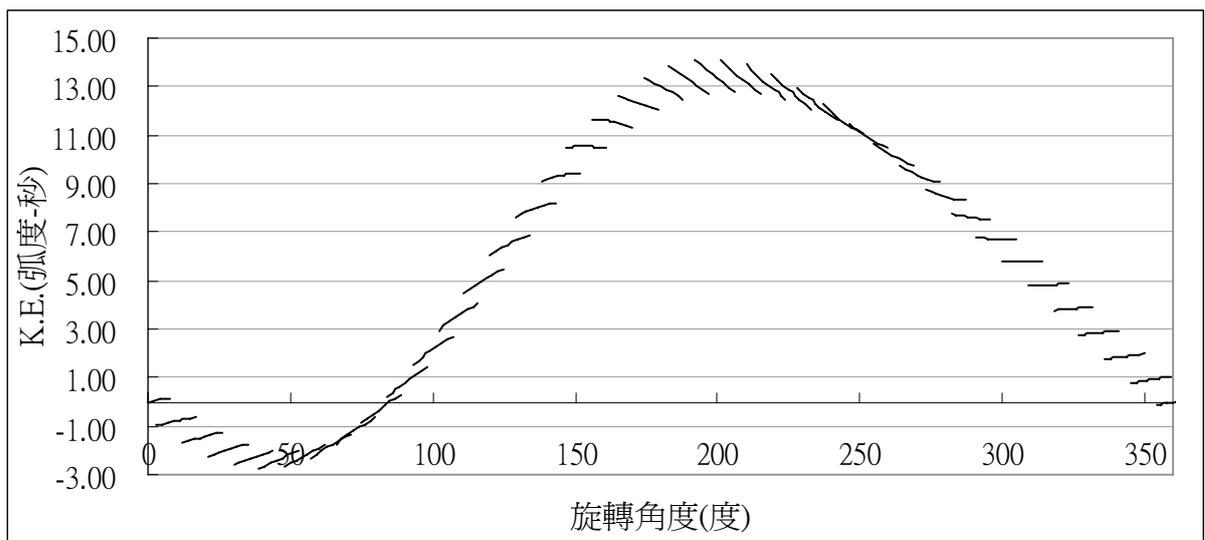


圖 5.7 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的運動誤差

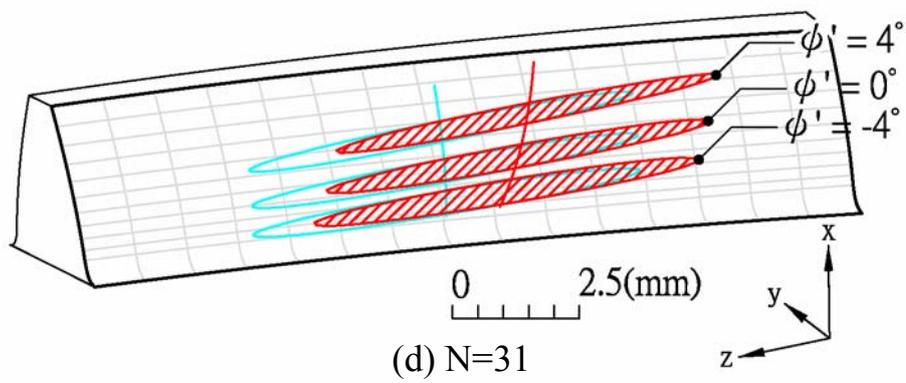
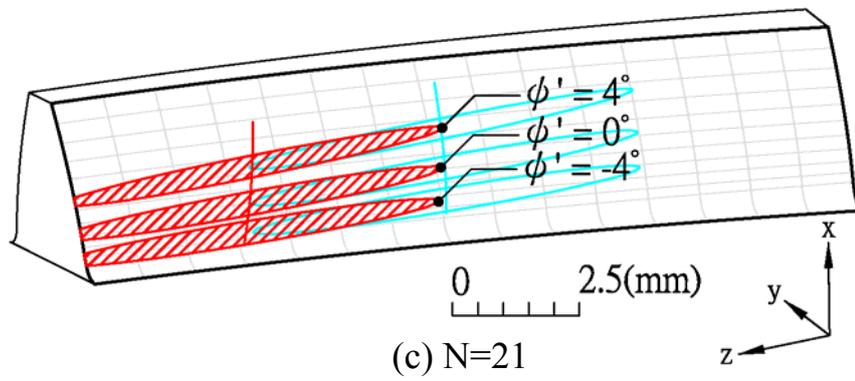
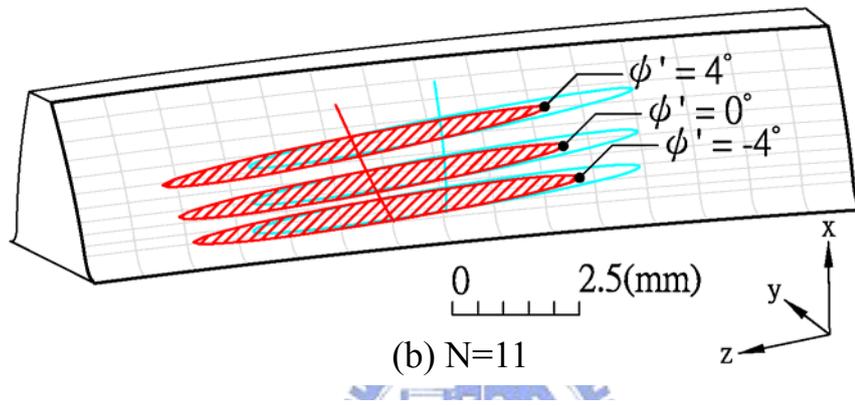
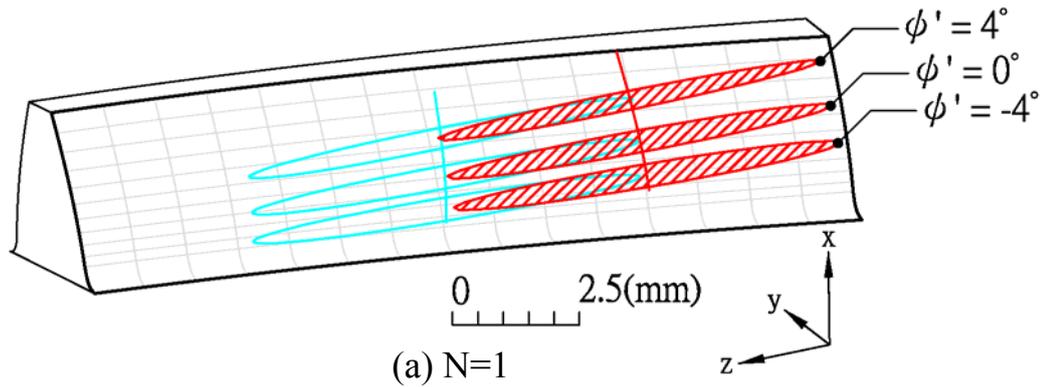


圖 5.8 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸齒印

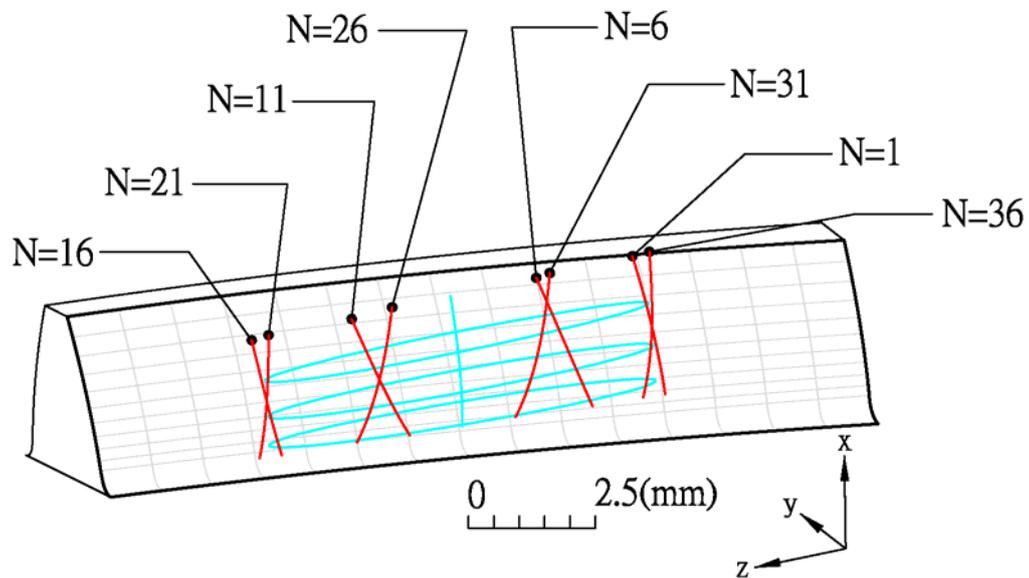


圖 5.9 具軸偏擺誤差之冠狀修整螺旋齒輪的接觸軌跡變化

5.4 本章結論

齒狀之偏心誤差可視為是平行中心距方向之誤差與垂直中心距方向之誤差兩者綜合的連續變化，而齒輪之軸偏擺誤差則可視為是水平軸向誤差與垂直軸向誤差兩者綜合的連續變化。漸開線齒輪因具有容忍些許中心距誤差的特性，所以其誤差為定值時，齒輪組之運動誤差甚小，但齒輪組若具有偏心誤差時，其運動誤差就會明顯出現且呈連續性變化，接觸齒印將於漸開線齒形方向上下偏移；而具有軸偏擺誤差下之接觸齒印則會在齒輪齒筋方向之兩端間移動；齒輪組具有偏擺誤差狀況下，其誤差值之變化若為周期性，則運動誤差與接觸齒印亦對應誤差值而呈現周期性的變化。

齒輪組具有偏擺誤差時，其位置向量的轉動角度，與齒輪旋轉之角度的關係，主要是由裝配所用之軸承、軸與軸孔的裕度與公差來決定，但實際上也受磨擦力、滑動以及受力變形之影響，故模擬裝配偏擺時的假設條件甚為重要。

第六章 結論與未來展望

6.1 結論

漸開線螺旋齒輪及相關之齒形修整方法已於業界運用多時，但少見有學者對具冠狀之修整型螺旋齒輪有整合性的接觸研究與齒印分析，亦未見有考量偏擺誤差之影響。本論文推導具冠狀之修整型螺旋齒輪的齒面數學模式、齒面接觸分析數學模式與接觸齒印數學模式，以及建立偏擺誤差值與齒輪旋轉角度之間的關係式，依據先前各章節的研究與分析結果，茲彙整提出幾項結論如下：

1. 冠狀修整之漸開線螺旋齒輪其修整量不影響理想裝配下的接觸分析，但會影響其接觸齒印之大小。具冠狀修整之螺旋齒輪其接觸齒印會向齒筋方向的中央集中，對齒輪組有軸向裝配誤差具有改善之功效。
2. 具有轉位修整之漸開線螺旋齒輪，在具相同水平軸向裝配誤差條件下，其轉位修整量與運動誤差呈反比關係；具相同垂直軸向裝配誤差條件下，其轉位修整量與運動誤差呈正比關係。正轉位時之接觸齒印會向漸開線齒形之下方偏移且分散；負轉位時之接觸齒印則會向漸開線齒形之上方偏移且集中。
3. 壓力角的角度大小在具相同軸向裝配誤差條件下，會與運動誤差呈正比關係。壓力角之角度較小時，其齒輪之接觸齒印較為集中；而壓力角之角度大時，其齒輪之接觸齒印則較為分散。具相同垂直軸向裝配誤差時，接觸齒印會隨著角度之增加而偏向齒筋方向之端面。
4. 在僅改變一漸開線螺旋齒輪中單一齒輪之壓力角角度的情況下，其齒輪接觸點的運動誤差會隨著遠離節圓處而增加，其值亦會隨著兩齒輪之壓力角角度差值之增加而增加；壓力角角度增大時之接觸齒印會往齒輪齒筋上螺旋方向的端面偏移；壓力角角度減小時之接觸齒印則會往齒輪齒

筋上螺旋反方向的端面偏移。

5. 漸開線螺旋齒輪無論以何種方式修整，中心距之裝配誤差為定值時，齒輪組之運動誤差為零，中心距誤差為拉離兩齒輪時，其接觸齒印會於漸開線齒形上移；中心距誤差若為拉近兩齒輪時，其接觸齒印則為下移。平行中心距方向之裝配誤差對於接觸齒印的影響大於垂直中心距方向之裝配誤差。水平軸向裝配誤差之方向若與齒輪螺旋方向相同時，接觸齒印會往齒輪齒筋之螺旋方向的端面偏移；垂直軸向裝配誤差之接觸齒印則會往較靠近另一齒輪的齒筋端面偏移。水平軸向裝配誤差對於運動誤差及接觸齒印的影響大於垂直軸向裝配誤差。
6. 齒輪之偏心誤差相當於是平行中心距方向之裝配誤差與垂直中心距方向之裝配誤差兩者的綜合與連續變化；齒輪之軸偏擺誤差則相當於是水平軸向裝配誤差與垂直軸向裝配誤差兩者的綜合與連續變化。偏心誤差時之運動誤差較明顯，其接觸齒印會在漸開線齒形方向上下偏移；軸偏擺誤差時之接觸齒印則會在齒輪齒筋方向之兩端間移動，這兩種誤差之運動誤差與接觸齒印皆對應誤差值而呈現連續性的變化。

理想之螺旋齒輪其接觸齒印應平均落於齒面上，才得以運用整個齒面來傳遞作用力，偏離理想接觸位置之接觸狀況，易使齒輪因齒緣接觸和受力集中而崩壞及減少使用壽命。是故對漸開線螺旋齒輪進行齒形修整時，應考慮各種修整方式之特性，再依需求及材料選擇適合之修整方式及適當之修整量，以獲得符合所需條件之修整型漸開線螺旋齒輪。

6.2 未來展望

本研究已建立具冠狀之修整型螺旋齒輪的齒面數學模式、齒面接觸分析數學模式、接觸齒印數學模式，以及偏擺誤差值與齒輪旋轉角度之間的

關係式，本文亦提出冠狀修整、轉位修整、改變壓力角之接觸分析與齒印分析的探討，未來將可更進一步對各種修整特性做最佳化，並可用有限單元法進行齒輪之應力分析，並與齒印分析所得之結果相互比較和印證。



參考文獻

- [1] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washinton D. C., 1989.
- [2] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [3] 蔡忠杓，陳炤彰，陶恕，鄧武宗，馮展華，「漸開線螺旋齒輪數學模式之推導」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月22-23日。
- [4] 蔡忠杓，馮展華，鄧武宗，陳炤彰，陶恕，「漸開線形螺旋齒輪之電腦輔助模擬接觸分析」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月22-23日。
- [5] 蔡忠杓，蕭國模，馮展華，余仲毅，吳俊旻，「冠狀正齒輪」，工業技術研究院機械工業研究所與交通大學電子與資訊研究中心合作研究計畫報告，1988年6月。
- [6] 王如鈺，齒輪原理概要，再版，憬藝企業有限公司，民國八十四年九月。
- [7] 李清安，轉位正齒輪之設計與運用，全華科技圖書股份有限公司，台北，民國七十四年二月。
- [8] 仙波正莊著，移位齒輪之研究，王龍祥譯，正言出版社，台南，民國六十七年九月。
- [9] 陳怡呈，「修整型螺旋齒輪對之特性研究」，國立交通大學機械工程學系，博士論文，2001年5月。
- [10] 梅山光広，「ヘリカルギアのかみあい伝達誤差に及ぼす歯面修整の影響と最適値設定法」，日本機械学会論文集(C編)，61卷582

号，346-353 頁，1995 年 2 月。

- [11] 張信良，「電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬」，國立交通大學機械工程學系，博士論文，1996 年 6 月。
- [12] 蔡忠杓，「負載下螺旋齒輪之嚙合齒印分析」，工業技術研究院委託學術機構研究總報告，1998 年 6 月。
- [13] 王志華，「修整型螺旋齒輪之接觸分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1997 年 6 月。
- [14] 張永源，「修整型螺旋齒輪傳動誤差之測試與分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1997 年 6 月。
- [15] 曾瑞堂，「圓弧齒線圓柱型齒輪之特性研究」，國立交通大學機械工程學系，博士論文，2005 年 6 月。
- [16] 趙立碁，「球形齒輪之數學模式及接觸分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，2005 年 6 月。

