

二、基本理論

本章針對四足機器人的基本理論，從步伐研究時各種重要且基本的考量參數與設計概念作定義上的解釋，與機器人反向運動學的位置、速度分析。而後分別針對最大步伐軌跡規劃法以及步伐轉換的規劃方式一一介紹。

2.1 穩定度

穩定度的定義為：由機器人之重心往地面作投影，其投影點與機器人腳在地面上的支撐點連線所構成之多邊形(又稱穩定多邊形)。兩者間的最短距離(垂直距離)，稱為穩定度。為使機器人在整個運動的過程中保持穩定，不至於翻倒或倒下。穩定度必須大於或等於 0。

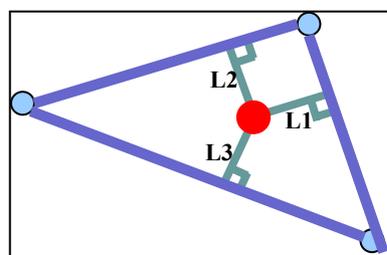


圖 5 重心投影點與支撐點之穩定度示意圖

如圖 5 所示，重心投影點與穩定多邊形的可能最短距離分別為 $L1$ 、 $L2$ 、 $L3$ 。同時 $L1$ 、 $L2$ 、 $L3$ 皆大於 0，表示此四足機器人為穩定狀態。在實際情況下，隨著機器人的移動而產生動量，重心位置還需要計算加速度所造成的力量使得投影點偏移。此為動態穩定度所考量的問題。而靜態穩定度假設機器人的動量的考量小到可以忽略的情況下，所以通常應用在移動慢、體型輕、加速度不大的機器人上。

2.2 工作係數 (Duty Factor)

工作係數(Duty Factor)在機器人步伐上指的是當機器人運動時，每一隻腳在一次完整的運動循環(抬起、跨步、落地、支撐身體移動)中，支撐於地面上所佔的時間比。此係數為設計上常見的參數，通常隨著速度需求及步伐種類而改變。四足機器人如要在整個運動的過程保持穩定，其值會在 0.75，如圖 6(B)所示，在任一時刻至少三足支撐於地面上而使一足保持於空中移動跨步)和 1(四足同時支撐於地面，當停止之時)之間。

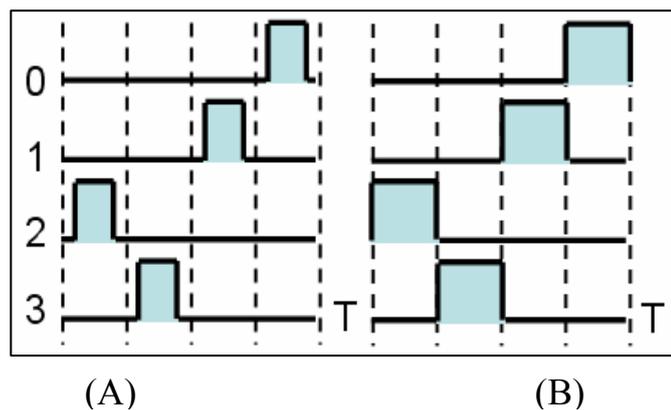


圖 6 工作係數示意圖，(A) $\beta=0.8$ ；(B) $\beta=0.75$

說明：直線高起部分代表機器人將腳抬起運動

2.3 基本步伐

四足機器人最基本的步伐為直行步伐(包括蟹行步在內)及旋轉步。直行步是指行走時，機器人的身體軸與行進方向間維持一固定夾角，當夾角不為 0 時又稱作蟹行步。目前直行步研究認為的最佳步伐順序根據生物界四足動物最常使用之步伐而來。如圖 7(A)所示，順著行進方向來觀察，為右後足(3)、右前足(1)、左後足(4)、左前足(2)。

而旋轉步依照旋轉中心的不同分為兩大類：一類是以機器人的重心或身體結構中心當旋轉中心，讓機器人四隻腳順著同一個圓行走，做類似自轉方式的運動(圖 7B)。另一種則是旋轉中心位在較遠處，各足在曲率半徑不同的同心圓上行走，旋轉時身體重心的軌跡呈一圓弧形。

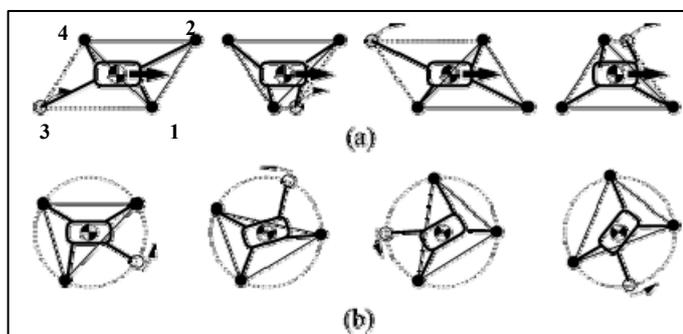


圖 7 四足機器人之基本步伐 (A) 直行步 (B) 旋轉步

2.4 穩定度三角形對角線交換 (Diagonal Triangle Exchange)

在直行步伐中，行走造成腳步位置的變化，使得穩定多邊形連續的以不同的三角形做交替運動。而重心須隨著多邊形的移動做配合，持續保持在多邊型內部。穩定度三角形對角線交換點是指在這過程中有一時間，兩個穩定三角形的接觸為一條對角線，使得重心能經由此共同邊線過度，不致發生失去穩定的情形。這個瞬間機器人各點的位置為其穩定度三角形對角線交換點(DTE point)。這個瞬間便稱為穩定度三角形對角線交換時間(DTE Time)。如圖 8 所示。

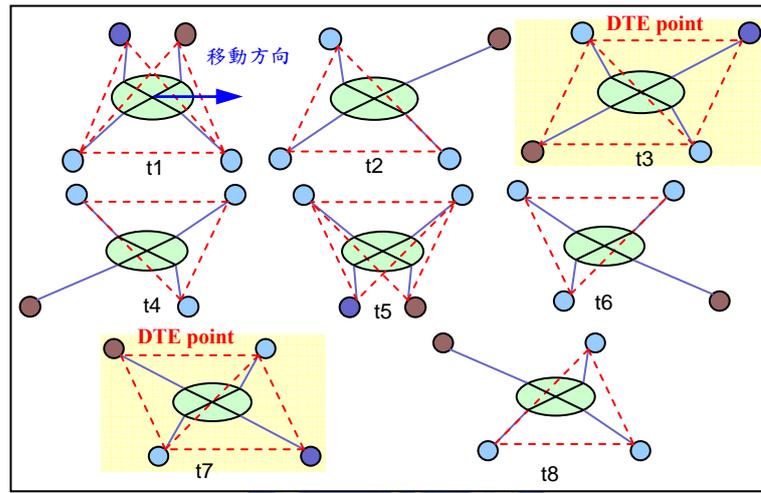


圖 8 直行步 DTE 點

我們以重心為視點來觀察 DTE 點的位置，如圖 9 所示，各時間腳步的位置在工作空間構成一條直線軌跡。其中 t3 及 t7 為 DTE 時間的腳步位置。我們假設步伐相對於重心，在工作空間中所劃過之軌跡總長度為 λ 。當 Duty Factor 為 β 時，由於腳步為四步(每腳各跨一步)一次循環。DTE 發生位置由 t1 到 t3 或是 t5 到 t7，恰巧為跨步一次，也就是循環時間的 1/4 處。支撐於地面移動時腳步為等速前進，腳步的位置與靠近重心之邊界線距離 λ^* 為：

$$V = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda^*}{1/4}$$

$$\Rightarrow \lambda^* = \frac{\lambda}{4\beta} \quad (1)$$

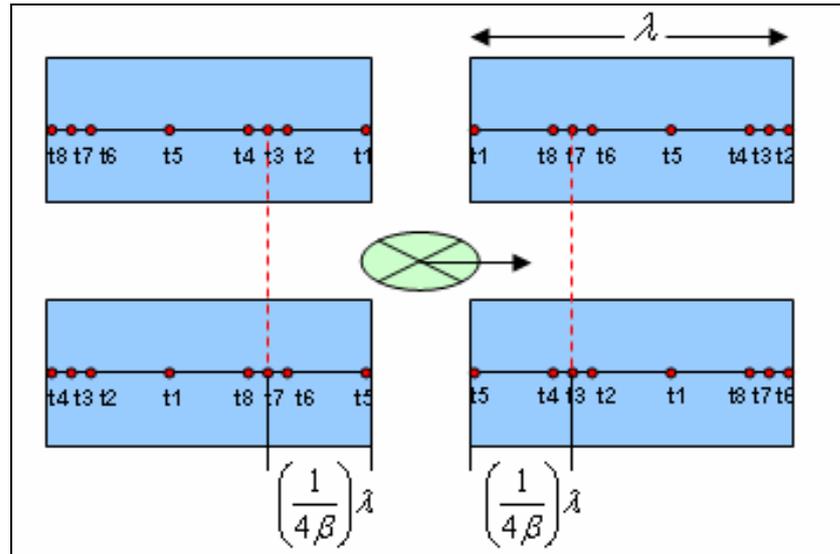


圖 9 重心視角之直行步與 DTE 點

2.5 運動分析

本研究的四足機器人在各足機構設計上為前後對稱、左右對稱，以下取第一隻腳(右前腳)做位移及速度的運動分析。其餘各腳只有軸座標方向有正負之分，其結果可類推。

2.5.1 位移分析

如圖 11、圖 12 所示，以 O 點為第一隻腳的座標原點分析其行走時各關節角度的位移，首先將各關節擺臂之旋轉角度定義如下：

上臂旋轉自由度：旋轉角度 α 。

上臂抬放自由度：旋轉角度 β 。

下臂抬放自由度：旋轉角度 γ 。

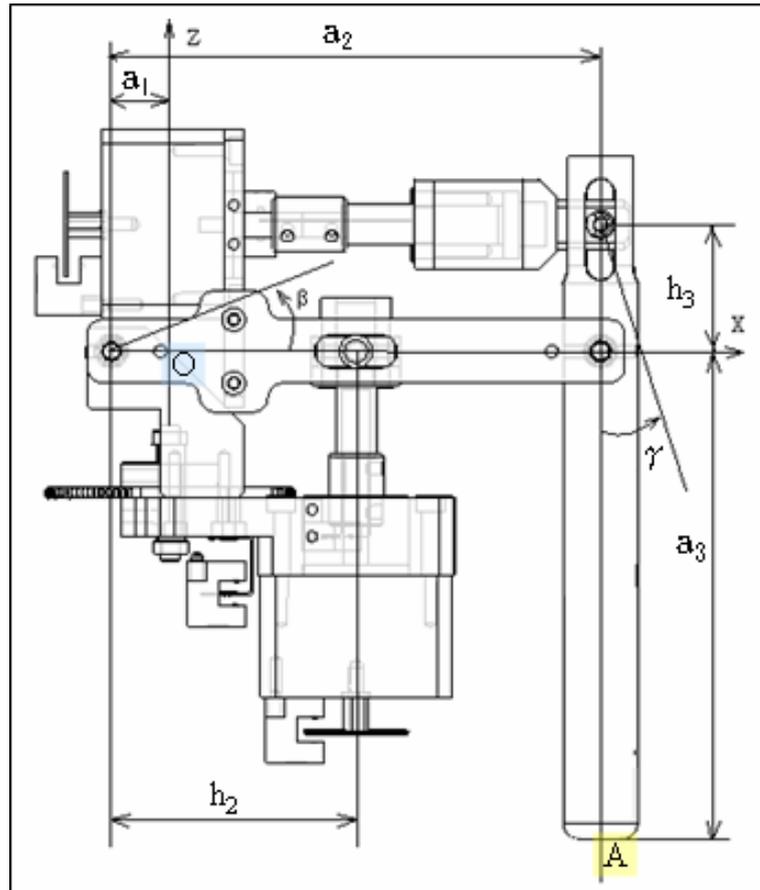


圖 10 機器人腳臂座標圖(側視)

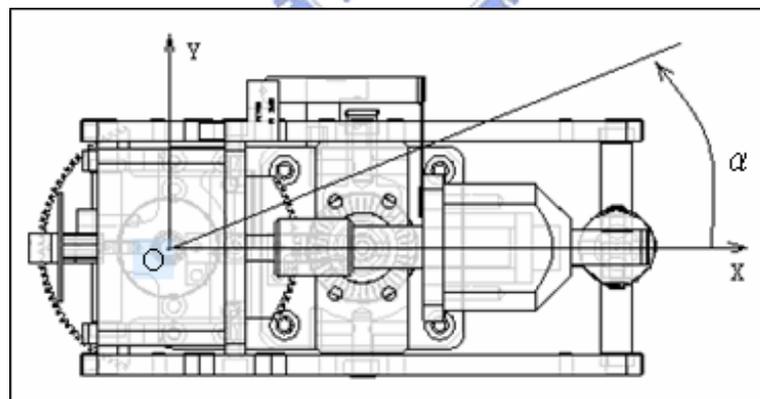


圖 11 機器人腳臂座標圖(上視)

如圖 10、圖 11，以 O 點為座標原點，擺臂末端足底 A 點座標以三角函數表示為：

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} X = [-a_1 + a_2 \cos \beta + a_3 \sin(\beta + \gamma)] \cos \alpha & (2) \\ Y = [-a_1 + a_2 \cos \beta + a_3 \sin(\beta + \gamma)] \sin \alpha & (3) \\ Z = a_2 \sin \beta - a_3 \cos(\beta + \gamma) & (4) \end{cases}$$

先將 α 消去，利用(2)式及(3)式取平方和：

$$(2)^2 + (3)^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 = [-a_1 + a_2 \cos \beta + a_3 \sin(\beta + \gamma)]^2$$

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = -a_1 + a_2 \cos \beta + a_3 \sin(\beta + \gamma) \quad (5)$$

$$a_3 \sin(\beta + \gamma) = \sqrt{X^2 + Y^2} + a_1 - a_2 \cos \beta \quad (6)$$

(4)式移項取出 $\cos(\beta + \gamma)$ ：

$$(4) \Rightarrow Z = a_2 \sin \beta - a_3 \cos(\beta + \gamma)$$

$$a_3 \cos(\beta + \gamma) = a_2 \sin \beta - Z \quad (7)$$

將(6)(7)式平方和除去三角函數項，可得：

$$(6)^2 + (7)^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + 2a_1\sqrt{X^2 + Y^2} - 2a_1a_2 \cos \beta - 2a_2\sqrt{X^2 + Y^2} \cos \beta - 2a_2Z \sin \beta = 0 \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} \beta &= \theta \\ A &= -2a_2Z \\ B &= -2a_1a_2 - 2a_2\sqrt{X^2 + Y^2} \\ C &= X^2 + Y^2 + Z^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + 2a_1\sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned}$$

則(8)式可以化簡為：

$$(8) \Rightarrow A \sin \theta + B \cos \theta + C = 0$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B} \quad (9)$$

如此，因 $\beta=0$ ，由式(9)便能計算出得出 β 值。

接著將(3)式除以(2)式，可消去 β 及 γ 項：

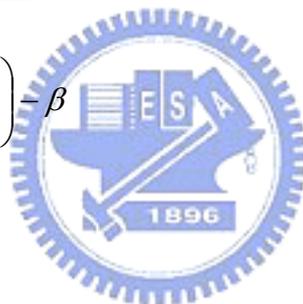
$$\begin{aligned} (3)/(2) &\Rightarrow \\ \tan \alpha &= \frac{Y}{X} \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

α 值在此求出。

最後，在已知 β 的情況下，代回(4)式，可得：

$$\begin{aligned} (4) &\Rightarrow \\ Z &= a_2 \sin \beta - a_3 \cos(\beta + \gamma) \\ \cos(\beta + \gamma) &= \frac{a_2 \sin \beta - Z}{a_3} \\ \gamma &= \cos^{-1}\left(\frac{a_2 \sin \beta - Z}{a_3}\right) - \beta \end{aligned} \tag{11}$$

γ 便能求出。



2.5.2 速度分析

速度分析則需利用座標轉換矩陣，求得賈可賓矩陣。首先機器人座標系簡化後，如圖 12 所示。藉此，可以列出如表 2 之腳部各 D-H 座標參數：

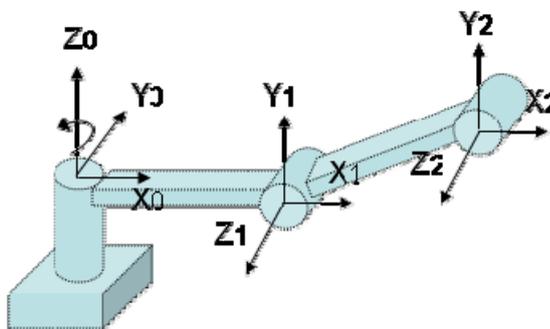


圖 12 機器人座標系

表 2 機器人腳臂機構 D-H 參數表

Joint i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\pi/2$	a_1	0	$\theta_1=\alpha$
2	0	a_2	0	$\theta_2=\beta$
3	0	a_3	0	$\theta_3=\gamma-\pi/2$

以下將 $\cos \theta_1$ $\sin \theta_1$ 分別簡化表示為 $c\theta_1$ $s\theta_1$ 。

接著利用各 D-H 參數，求得各相關軸間的座標轉換矩陣：

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

然後求出各軸的軸向量：

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Z_1 = {}^0R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$Z_2 = {}^0R_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

再求出位置向量：

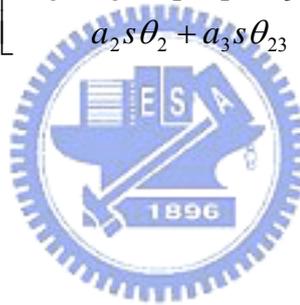
$${}^2P_3^* = {}^0R_2 \begin{bmatrix} a_3c\theta_3 \\ a_3s\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3c\theta_1c\theta_{23} \\ a_3s\theta_1c\theta_{23} \\ a_3s\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$${}^1P_3^* = {}^0R_1 \begin{bmatrix} a_2c\theta_2 \\ a_2s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^2P_3^* = \begin{bmatrix} c\theta_1(a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) \\ s\theta_1(a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) \\ a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$${}^0P_3^* = {}^0R_1 \begin{bmatrix} -a_1c\theta_1 \\ -a_1s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^1P_3^* = \begin{bmatrix} c\theta_1(-a_1 + a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) \\ s\theta_1(-a_1 + a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) \\ a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (20)$$

最後求得賈可賓矩陣：

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$



$$J = \begin{bmatrix} -s\theta_1(-a_1 + a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) & c\theta_1(a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23}) & c\theta_1(a_3s\theta_{23}) \\ c\theta_1(-a_1 + a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23}) & -s\theta_1(a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23}) & -s\theta_1(a_3s\theta_{23}) \\ 0 & a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} & a_3c\theta_{23} \end{bmatrix} \quad (22)$$

2.6 一般性標準步伐軌跡規劃法

Hirose[2]於 1991 年提出步伐軌跡規劃法。其目的在於使四足機器人根據行進方向、工作係數，決定出能在工作空間作出移動距離最大的直行步伐軌跡與 DTE 點。此方法利用下列幾點步驟來完成：

- i. 決定步伐工作空間並將落腳點的工作空間截面投影於工作平面

- ii. 篩選 DTE 點可存在之區域
- iii. 選擇步伐行走的模式
- iv. 計算各 DTE 點所對應之步伐長度值，並將 DTE 點對應之步伐長度值繪製成等高線圖
- v. 藉由等高線圖選擇最長之步伐距離的 DTE 點
- vi. 決定步伐之軌跡與可行之落地點

本章以 NC-F4 仿生四足機器人做範例，說明最大直行軌跡步伐規劃步驟。首先介紹機器人各接頭之活動範圍。

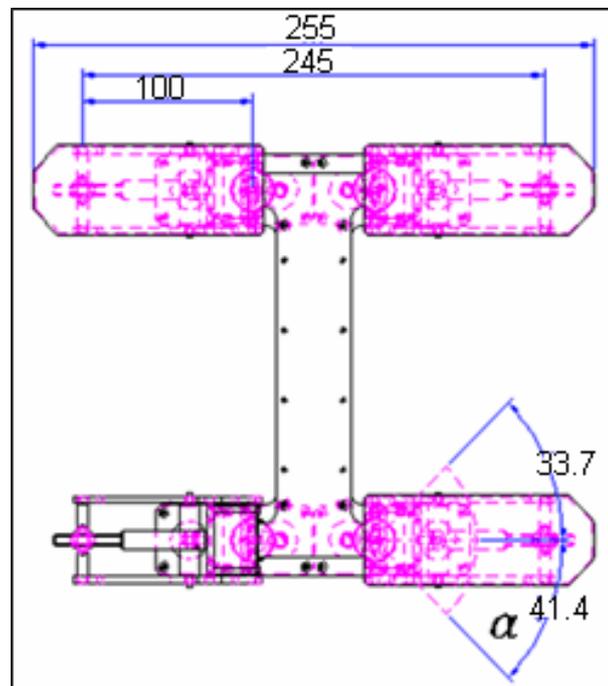


圖 13 機器人各軸工作範圍(上視)

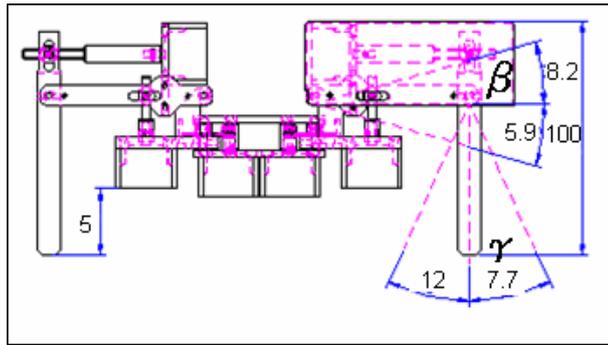


圖 14 機器人各軸工作範圍(側視)

機器人各軸的旋轉角度範圍如圖 13、圖 14 所示，為：

- 旋轉角度 α ：+41.4~-33.7 度。
- 旋轉角度 β ：+8.2~-5.9 度。
- 旋轉角度 γ ：+7.7~-12 度。

如圖 15 所示，固定 $\alpha=0$ ，將 β 與 γ 在活動範圍內變化，各工作點所涵蓋的區域為 X-Z 平面之工作範圍。

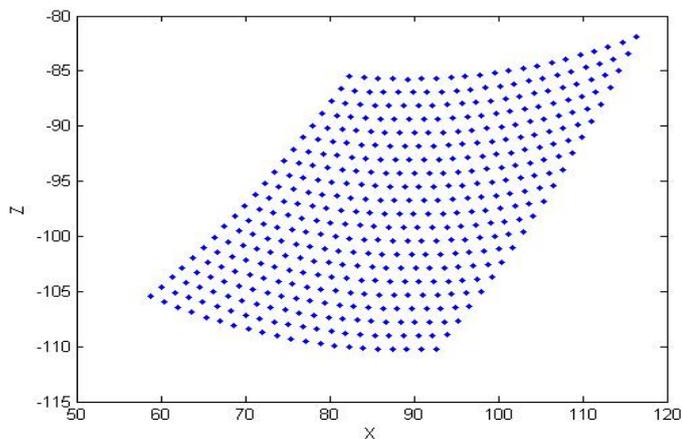


圖 15 Y-Z 平面工作範圍圖($\alpha=0$)

固定高度於 $Z=-100$ ， α 、 β 、 γ 在活動範圍內變動，此時 X-Y 平面之工作範圍如圖 16 所示。

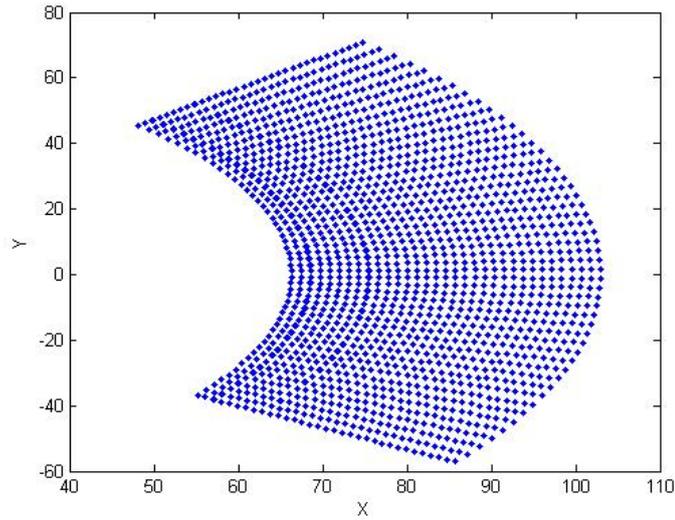


圖 16 X-Y 平面工作範圍圖(Z=-100)

將 X-Z 面之工作空間範圍隨著 α 角運動，所掃掠形成的單足工作空間之邊界框架示意圖，如圖 17 所示。

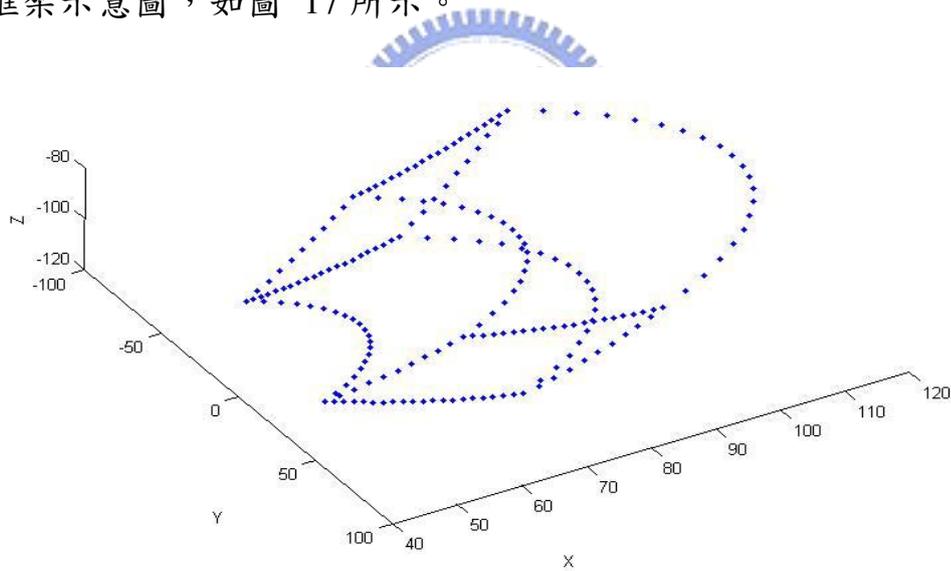


圖 17 單足工作空間的邊界框架圖

2.6.1 工作空間投影

工作空間求出後，配合地形可能的起伏程度，先設定機器人之工作高度範圍。本研究機器人在動作初始位置時，末端工作點相對於座標中心之高度為 $Z=-100\text{mm}$ 。在機構設計時，因腳臂機構進行抬起、放下(β 角)與外張、內縮(γ 角)等動作時，是利用馬達帶動螺桿，撐起關節角，因此運動的減速

比十分的大，其每傳送一次脈波給馬達轉動所能造成之關節旋轉角度分別為 $\beta=0.011^\circ$ 及 $\gamma=0.0057^\circ$ ；而 Z 軸向的旋轉由齒輪帶動，減速比每一脈波所造成旋轉角度為 $\alpha=0.12^\circ$ 。相比之下機器人在 X 軸橫向及上下運動速度比 Y 軸向的差距甚大。舉起動作會花費過多時間，假設其工作高度為 5mm，範圍為 $Z=-95\sim-100$ (抬高這個距離就大約需 2.5 秒時間)。

為確保機器人在 X-Y 平面之工作範圍中，任何一點皆能夠在這個高度範圍內運動，將腳步機構做垂直的舉起、放下等動作。將 $Z=-95\text{mm}\sim-100\text{mm}$ 的工作空間整個投影在水平面上，要符合上訴條件，則必需將所有高度截面的工作範圍取交集處。圖 18 中“○”及“X”符號分別為 $Z=-95\text{mm}$ 及 $Z=-100\text{mm}$ 之工作範圍，其他高度的範圍則介於兩者間，交集處與所有高度的工作空間截面取交集的情況相同。由“·”符號所步滿之範圍即為所求得之交集區域。

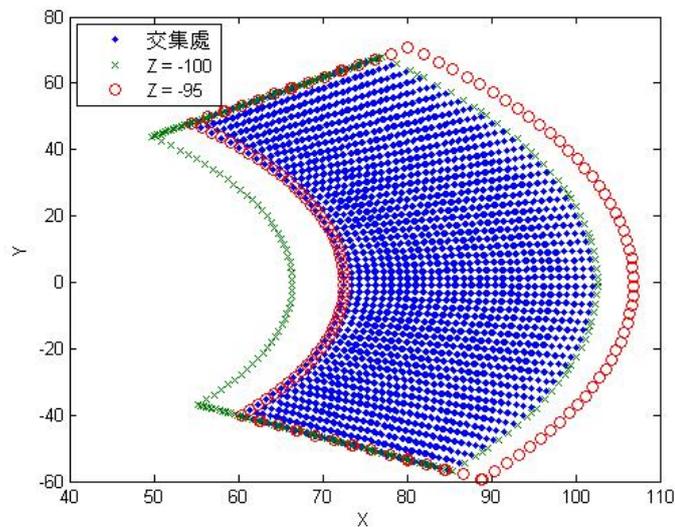


圖 18 工作空間截面投影圖($Z=-95\text{mm}\sim-100\text{mm}$)

2.6.2 有效區域篩選

所謂的有效區域指的是在直行步裡，有可能成為腳步 DTE 點的工作範圍。篩選方法便是利用 DTE 點之特性決定，在 DTE 瞬間，右前足、左後足與左前足、右後足，兩組腳步位置的連線皆必定通過重心。反過來說，當從任一足工作範圍內取一點，畫通過重心的直線必須同時要通過另一足的工作範圍。若無相應的工作範圍存在，則此點不可能成為 DTE 點，因此

將其淘汰。

如圖 19 之範例。如果機器人之工作空間在設計上依照重心互相對稱，則工作範圍經此篩選法並不會有被淘汰之部分。不對稱的情況則會如圖 20 所觀察。被淘汰的範圍通常為工作空間的邊緣處。

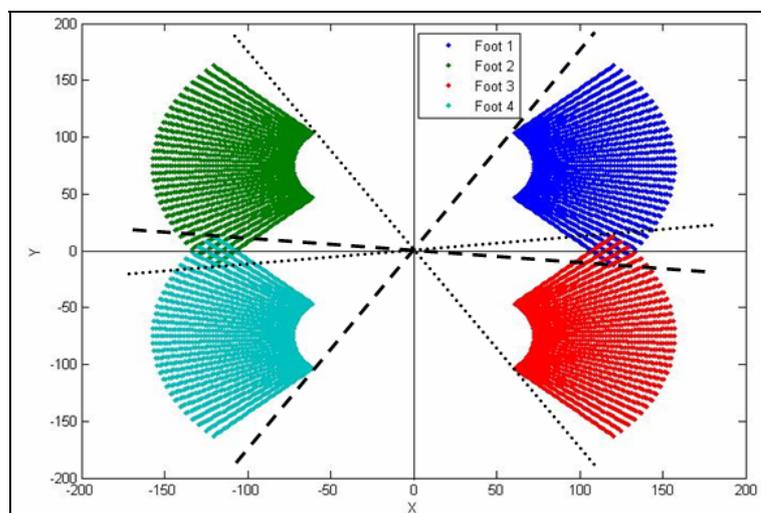


圖 19 對稱之工作空間不會被刪去

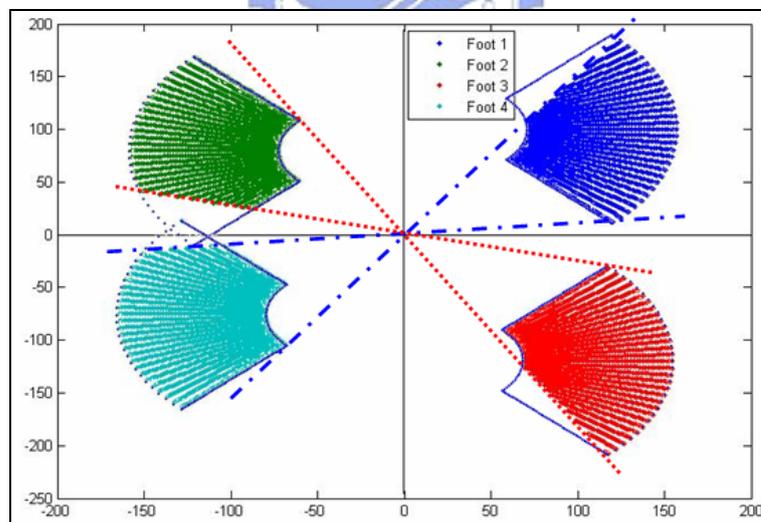


圖 20 非對稱經刪去篩選後之有效工作空間

2.6.3 步伐模式選擇

由於移動方向的不同，雖然步伐相同，但各足相對應的位置改變。如圖 21 所示，當朝著正 Y 方向前進時，基本步伐之順序為右後足、右前足、左後足、左前足也就是 3-1-4-2。當朝著正 X 方向前進時，由步伐方向的視點

來看仍為右後足、右前足、左後足、左前足，但腳步順序卻是 4-3-2-1。因此，將這兩種腳步順序區別為 X 型與 Y 型。

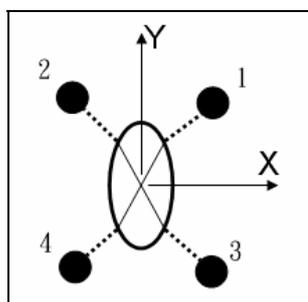


圖 21 X 型(4-3-2-1)與 Y 型(3-1-4-2)步伐

利用這兩種模式行走各有角度的極限，假設當行進方向落在 1、3 或 2、4 兩腳的工作範圍之間時，若要以 Y 型行走，則會因足 3 無法成為右後足而宣告失敗。反之在 1、2 或 3、4 兩腳的工作範圍之間時，無法以 X 型行走。若行進方向通過 1、4 或 2、3 的工作範圍時，以 X 或 Y 型皆能夠順利行走，此時稱作 XY 型。如圖 22 所示，假設移動方向 $\theta=45^\circ$ 度，此時恰好穿過工作空間，為 XY 型，此時如選擇成為 X 或 Y 型時，能對應基本步伐的工作範圍會有所變化。若選擇 X 型則如圖 22(A)，足 1 成為左前足，超過移動方向的部份為右前足的範圍，因此被淘汰。反之 Y 型如圖 22(B)所示。

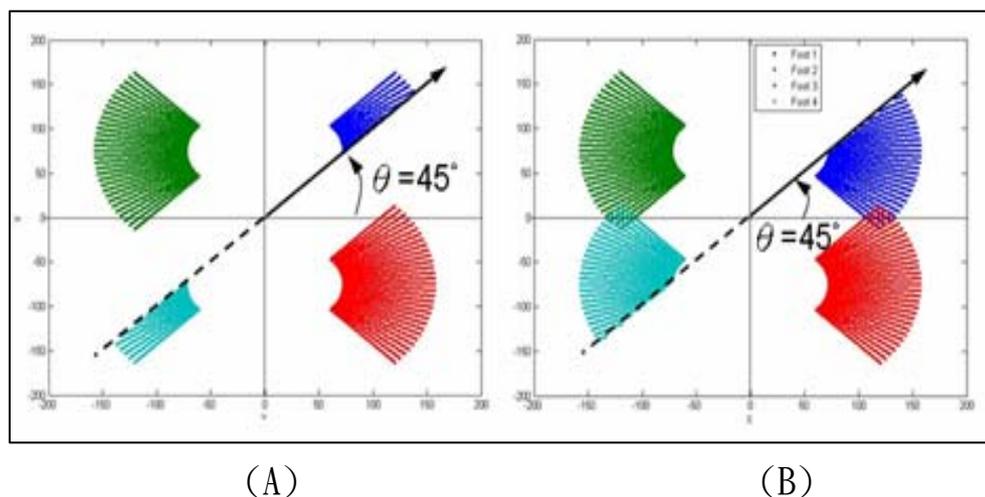


圖 22 移動方向 45 度在選擇(A)X 型與(B)Y 型後之工作空間

2.6.4 步伐長度等高線圖

工作範圍經由前面幾個條件篩選後，接著要求出步伐的長度，步伐軌跡長度與 DTE 點到步伐軌跡端點的比例，在之前已經求證過。利用這個比例關係，當已知工作係數以及行進方向時。假設工作範圍內任一點為腳步之 DTE 點，則軌跡為由此點往兩邊作與行進方向平行之線段。線段的比例維持 λ^* 和 $(\lambda-\lambda^*)$ 向兩邊延長，直至一端與工作範圍邊界相交，如圖 23 所示，這整條線段便是以該點為 DTE 點時的最大步伐軌跡。

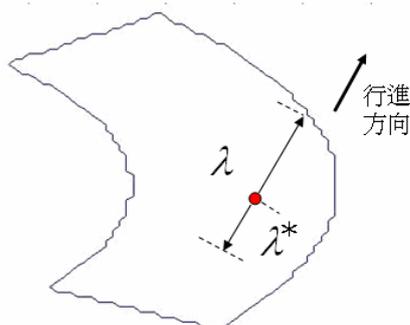


圖 23 最大步伐軌跡計算示意圖

將工作範圍每一點皆依此方法求出可能的最大步伐軌跡，為了方便觀察，將代表該點的最大步伐長度標成高度。如此，便會成為類似圖 24 所示之等高線圖。

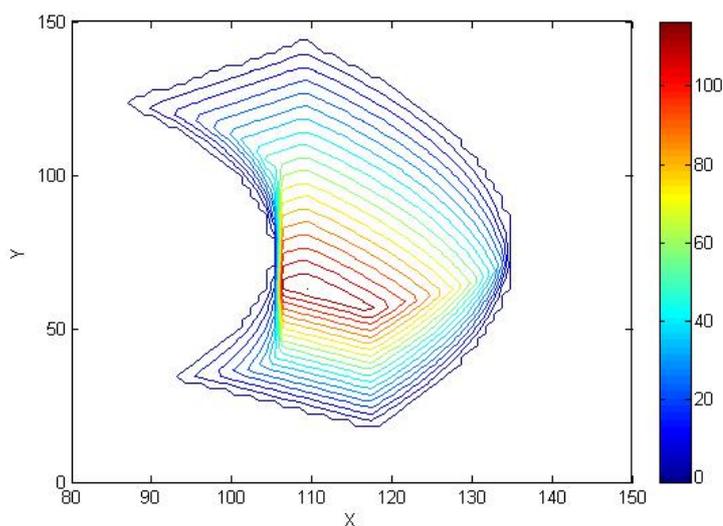


圖 24 機器人足 1 之步伐軌跡長度等高線圖($\beta=0.75$, $\theta=90$ 度)

2.6.5 最長步伐距離之選擇

求出各點的步伐軌跡後，接著便可以從等高線圖來尋找可能之最長軌跡。雖然我們可以清楚的找到單足等高線圖的最高點(最長步長軌跡的對應 DTE 點)，但是在其它腳上不一定有相同高度的點存在。同樣利用 DTE 點連線會通過重心之規律，先取無限多條同時通過重心與足 1、4 工作範圍之直線，如圖 25 為例，其中一條 30 度角的直線上，所通過各點的高度值(步伐長度)，找到各自最大高度為 λ_1 及 λ_2 。但是各腳的總移動距離要相等，才能達到直行的目的。因此取較小的 λ_1 為 30 度直線上的適合軌跡長度。然後比較各適合軌跡長度後取其中最大值 λ_{14} 。2、3 足也經由同樣的方法取得 λ_{23} ，這兩者同樣要互相配合，故取較小者為 λ_{max} 。這就是此機器人以標準直行步伐所能行走之軌跡最佳(大)值的方法與步驟。

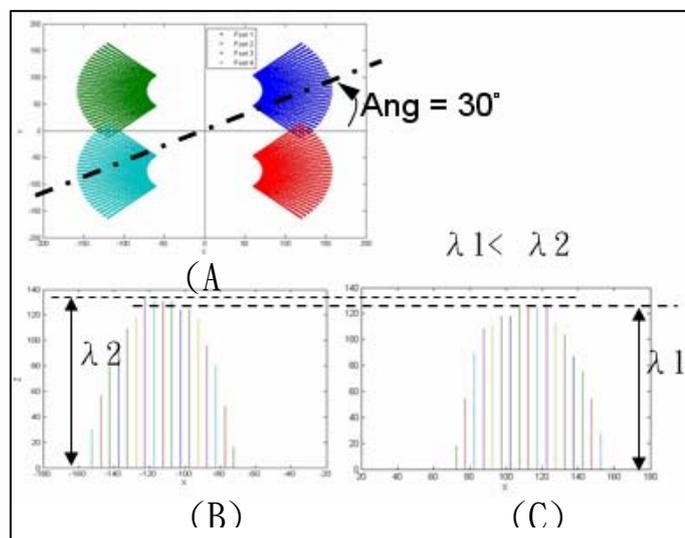


圖 25 步伐長度之選擇方式

圖 25(A)夾角 30 度直線通過足 1 與足 3，(B)通過直線之足 4 各點步伐長度，最大值 λ_2 ，(C)通過直線之足 1 各點步伐長度，最大值 λ_1 。

圖 25 中，當 $\lambda_2 > \lambda_1$ 時，選擇之步伐值為 λ_1 。

2.6.6 步伐軌跡區域

找出最大值後，只要在之前於各個角度上所求得無限多組的適合軌跡值大於或等於 λ_{max} ，該角度上任一大於或等於 λ_{max} 高度的點，便能為最大軌跡的 DTE 點，將 λ_{max} 套入該點上，便是最大值的步伐軌跡。因此，由此歸納法所導出的最佳 DTE 點，如圖 26 所示，各足上可能不只一點，軌

跡也因此可能為一條直線或一整塊區域。

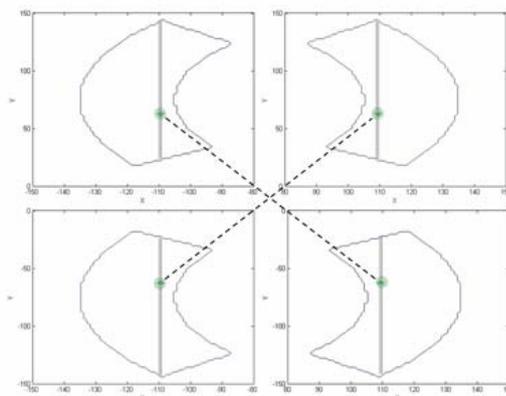


圖 26 由 Hirose 之方法導出之最大步伐與步伐 DTE 點

圖 26 中直線部分為行走所形成的軌跡，虛線代表各 DTE 點連線通過重心。

2.7 步伐轉換設計

機器人的步伐轉換，就是將腳步位置從一種步伐移到另一種步伐的過程。為了配合道路的彎曲或是閃避障礙物，機器人不可能永遠都是直線的行走，依情況改變步伐是必要的。而因為不同的步伐其腳步位置自然不同，一般來說，在沒有特殊設計的情況下，四足機器人最少也要動作四次〈將一隻腳舉起移動後放下為一次〉，才能完成從直行步伐變為旋轉步伐此種的轉換。過去的研究的作法多是將各足歸回步伐的共同原點，在換新步伐開始行走。可以想見的是，這種作法會浪費很大的時間在這種，停下來「原地墊步」調整步伐的轉換過程中。這個狀態也可稱作贅步(Dead Lock)，表示受工作空間、穩定度等因素，使機器人無法以保持原來的運動姿態，而必需停下來調整。因此，對於固定步伐的四足機器人而言，節省轉換時間的設計並減少贅步的產生，是一重要目標。

2.7.1 共用步伐落腳點的設計

如果預先將不同的步伐設計共用步伐落腳點，將不同步伐中，設計幾隻腳在某一時刻具有數個相同的著地點。轉換時便能因為位置相同，有幾隻腳就不用做調整動作，減少轉換所需的步數。可以想見，要是設計的數量越多，則能用越少的步數完成轉換過程，這就是共用步伐落腳點的設計概念。由前面步伐軌跡選擇的結果，從 DTE 點借由運動時間可以反推出每一

隻腳上四足同時落地的瞬間腳步著地點，也就是圖 27 上的 A(軌跡外側端點)、B、C (DTE 點)、D (軌跡內側端點)。這四點的位置隨工作係數而改變，這裡以最快行走速度的工作係數 0.75 為準，共同點便從這四點設計。Shugen Ma[4]等人設計的共用步伐落腳點，是在其中一足的 C (DTE)點上。能在直行步伐與橫行步伐〈 $\theta=0$ 度的 X 型步伐〉的轉換時，可以在右前足與左後足，或是左前足與右後足上同時各具有一個共用步伐落腳點，步伐轉換時間為二步。而在直行步和旋轉步中無法同時出現，僅能有一個，因此步伐轉換時間為三步。

在 2.6.1 節有提過 NC-F4 具有直行和旋轉的優勢，對於橫向移動則表現較差，與文獻[4]的優勢相異。因此針對與旋轉步伐之間轉換的行走，來進行新的共用步伐落腳點設計。這個設計是將共用步伐落腳點改至圖 27 的 B 點處，因為 A 和 D 點處在工作空間的邊界上，要從這兩點進行旋轉步勢必超出範圍。而利用 B 點設計，如圖 28 所示，可以在與旋轉步伐轉換時，同時存在兩個共用步伐落腳點〈右前右後足或是左前左後足上各一〉，並且有增加旋轉角度的優點。圖 27 中的兩個圓分別為兩種設計下旋轉步所在的圓，實線部分則是步伐在工作空間所劃過的軌跡。新設計的旋轉步在落在大圓上，步長軌跡最大值和相對的最大旋轉角度，相對於舊設計的小圓，明顯的大了很多，能進行更大幅度的旋轉。

造成這項改變的原因在於，與旋轉步的步伐共同點一但決定，也同時固定了旋轉步中的特定落地點，軌跡長度與此點的對應位置有固定比例的關係，其軌跡最大值受限於工作空間，可以簡單求出。同時也需滿足各足的步伐軌跡的圓弧長相同(同一半徑的圓上)，而當長度不相等時，則取最小值來維持條件的滿足，也就是永遠只能使用最差的選擇。而舊的旋轉步伐軌跡，圖形上是依圓心作旋轉式的對稱。右前足和左後足(圖中右上和左下)，便抵觸到工作空間的邊界，左前足和右後足(圖中左上和右下)則無。反觀新的步伐，由於步伐軌跡的圖形為左右、前後對稱，和工作空間對稱情況相同，則同時受限於邊界，恰好取到較佳的步伐長度。

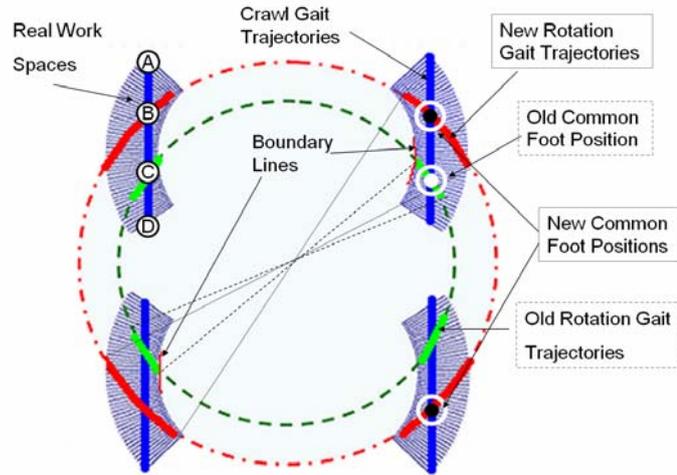


圖 27 兩種共用步伐落腳點的設計與旋轉角度影響

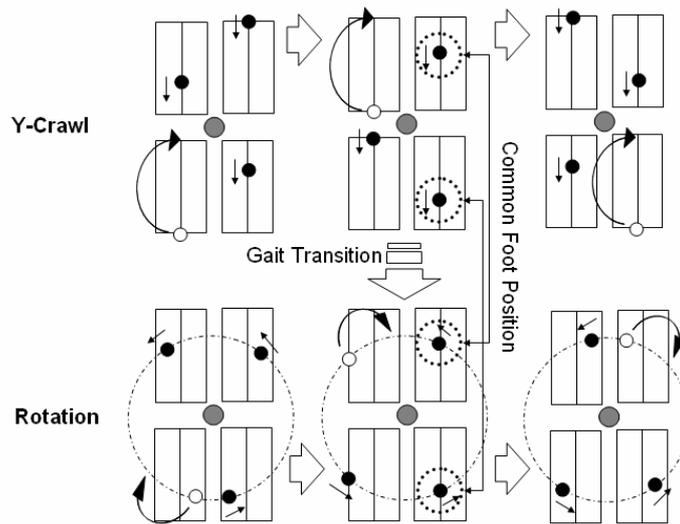


圖 28 直行步伐與旋轉步伐的共用步伐落腳點示意圖

2.7.2 跨步腳的影響

除了兩種步伐間本身的相同點外，另外利用跨步腳動作的影響。當機器人在正要轉換的前一步，若是直行步轉換為旋轉步。此時原本跨步腳應從後端跨至前端，完成了直行步後，下一次跨步再將腳擺到旋轉步伐的軌跡上。這動作是同一隻腳舉起、放下、再舉起、再放下的情況。若改成跨步時直接從直行步後端跨至旋轉步的軌跡弧上，因為身體的移動是由支稱腳來控制，跨步腳不造成影響。分兩次動作或一次完成，是完全相同的結果，

而且還能減少一次的舉放動作。

步伐轉換時間的計算，是從機器人進行不同於標準步伐時。也就是只要其中一隻腳改變了原來的動作的那步開始，便算是轉換步伐了。這種改變跨步的方式，是將步伐轉換的時機提前，並使身體保持移動，不需停下來原地踏步。也就是同時進行原先兩步才能完成的工作，動作上也就相對的快了一步的時間。這種設計直接減少了贅步的產生，使機器人的動作更為流暢。

類似的情況還有一種，便是在完成轉換到新的步伐位置前一刻，最後一隻轉換動作的腳假設從 P1 移至 P2。接著新步伐的動作是將剛最後動作那隻腳，再從 P2 移至 P3 點。同樣的，當初直接從 P1 移至 P3 的話，也可以減少一步的贅步。

當然，這種提前移動至新位置點的行為，首先可能影響的便是下一次行動時，腳步位置改變造成的穩定度影響。這兩種方式都必須在穩定的條件下才能進行，否則便只能以原方法多花一步來取得平衡。而方才所述的兩種可以優化的跨步時機，第一種的情況不受步伐順序影響，在每次步伐轉換都會出現，第二種則要剛好同時為轉換最後一步與新步伐的開始才行。

2.7.3 步伐轉換時間的計算

根據先前的觀念，在此整理出一串簡單的判斷法則，來得出兩種步伐間的轉換，所造成的贅步步數。首先設一次循環的之步伐轉換步伐為 4 (4 腳各跨 1 步到新的步伐位置)，總時間為 T，也就是沒經過設計的轉換時間。要進行優化則考慮下列幾點：

- 同一瞬間，新步伐與舊步伐所具有的共用步伐落腳點數量。共用步伐落腳點可以經由規劃而自定。若共用步伐落腳點有 n 個，則因共用步伐落腳點而能節省的步數 G_1 為：

$$G_1 = n \quad (23)$$

當共用步伐落腳點有四個，則表示新舊步伐位置完全相同，不需轉換。

- 非共用步伐落腳點之腳，是否為跨步腳。也就是剛才的第一種情況，

因此而能省下的步數 G_2 為：

$$G_2 = \begin{cases} 0 & \text{不為跨步腳} \\ 1 & \text{恰好為跨步腳} \end{cases} \quad (24)$$

- 非共用步伐落腳點、非跨步腳之腳，是否為下次的跨步腳。剛才的第二種情況下所能節省的步數 G_3 為：

$$G_3 = \begin{cases} 0 & \text{不為跨步腳} \\ 1 & \text{恰好為跨步腳} \end{cases} \quad (25)$$

步伐轉換步數 ($G_{Transition}$) 只與共用步伐落腳點數量有關，其步數為：

$$G_{Transition} = 4 - G_1 \quad (26)$$

而步伐中無法經設計而省下的步數，便是贅步 ($G_{DeadLock}$)，其步數為：

$$G_{DeadLock} = 4 - (G_1 + G_2 + G_3) \quad (27)$$

步伐轉換通常不以步數而以時間為單位來表示，則步伐轉換與贅步的花費時間 $T_{Transition}$ 和 $T_{DeadLock}$ 分別為：

$$T_{Transition} = G_{Transition} \times \frac{T}{4} \quad (28)$$

$$T_{DeadLock} = G_{DeadLock} \times \frac{T}{4} \quad (29)$$

將文獻[4]裡直行與旋轉步交換的設計代入，得到 $G_1 = 1$ ， $G_2 = 0$ or 1 ， $G_3 = 1$ 。所以 $G_{DeadLock} = 1$ or 2 ，也就是有一或二步是機器人行走時的贅步。以下用這個計算方式，計算本研究設計所需的轉換時間與贅步。

2.7.4 直行步與旋轉步的步伐轉換

根據前面的原理，結合成新的轉換步伐方式，圖 29 是從直行步到旋轉步的轉換方式。由於直行步為週期性互相對稱的，會出現左右相反情況。第一種情況，將腳步從直行步伐的最後一步提早跨到新位置，其間身體保

持直行狀態，加上新設計的兩個共用步伐落腳點，以此三點為支撐，進行旋轉動作，並將還沒放到新位置的最後一隻腳，趁著跨步的同時擺放。整個轉換過程花費二步，且機器人的移動沒有贅步，步數的浪費為零。第二種情況因為步伐順序不同，最後還未擺到旋轉步伐的腳不是跨步腳，得多花費一步($1/4T$)的時間來墊步，之後才能開始旋轉，不過在墊步時就完成了步伐轉換，轉換時間仍然為 $1/2T$ 。

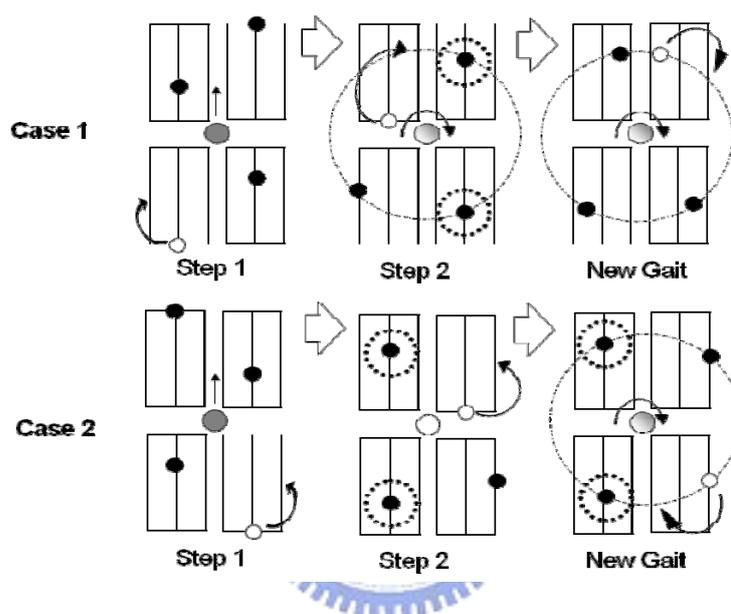


圖 29 直行步到旋轉步的步伐轉換

圖 30 是從旋轉步伐回到直行步伐的方式，也同樣分成兩種情況。左右轉的結果互相對稱，不特別作說明。第一種情況下，旋轉步右轉最後一步時將跨步的腳擺到直行步上的新位置，加上兩個共用步伐落腳點作為三個支撐點，然後變換為前進時將最後一隻腳於跨步同時放置完成，步伐轉換時間為二步($1/2T$)，身體保持運動，沒有多餘墊步($0T$)。第二種情況是從右轉到後退(也可以倒過來看成從左轉到前進)，中間有著一步($1/4T$)的贅步。

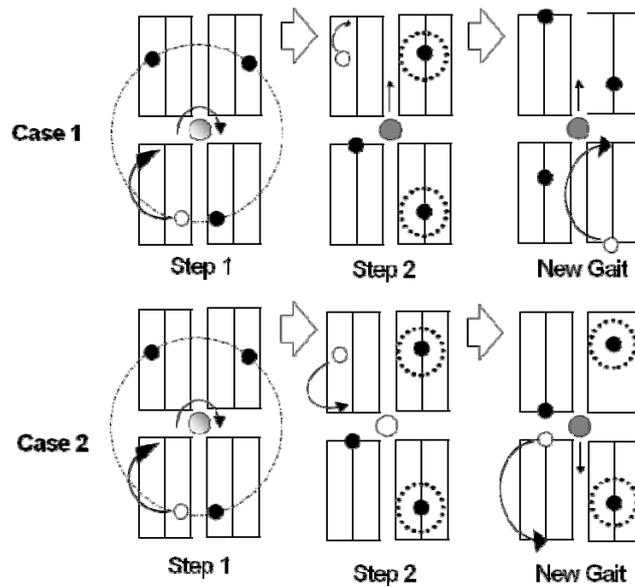


圖 30 旋轉步到直行步的步伐轉換

將上述本研究的設計(New)結果與文獻(Old)與拿來比較，依步伐轉換前後的步伐分類，將轉換時間以及若有贅步則所需浪費的墊步時間作成表格如下。

表 3 及表 4 分別為轉換時間和贅步造成的浪費時間。其中最左行為轉換前的步伐方式，分別為：Y—直行步往前進、RY—直行步往退後、O—順時針旋轉、RO—逆時針旋轉。第一列則為轉換後的地步方式。行列交會處便是所花的時間。很清楚可以發現，新設計在步伐轉換時所花時間皆為 $1/2T$ 〈二步〉，文獻的為 $3/4T$ 〈三步〉。較少的轉換步數使得在控制步驟上更加容易。而贅步的出現，在本研究和文獻中同樣有兩種情形，分別為 $0T$ 或 $1/4T$ 、舊設計為 $1/4T$ 或 $1/2T$ 。都因為同一步伐本身有對稱的兩種姿勢可以進行轉換，造成各別對不同方向具有優勢。

表 3 步伐轉換時間的比較

New	Y		RY		O		RO	
Case	1	2	1	2	1	2	1	2
Y					1/2T	1/2T	1/2T	1/2T
RY					1/2T	1/2T	1/2T	1/2T
O	1/2T	1/2T	1/2T	1/2T				
RO	1/2T	1/2T	1/2T	1/2T				
Old	Y		RY		O		RO	
Case	1	2	1	2	1	2	1	2
Y					3/4T	3/4T	3/4T	3/4T
RY					3/4T	3/4T	3/4T	3/4T
O	3/4T	3/4T	3/4T	3/4T				
RO	3/4T	3/4T	3/4T	3/4T				

表 4 贅步花費時間比較

New	Y		RY		O		RO	
Case	1	2	1	2	1	2	1	2
Y					0T	1/4T	0T	1/4T
RY					0T	1/4T	0T	1/4T
O	0T	1/4T	0T	1/4T				
RO	0T	1/4T	0T	1/4T				
Old	Y		RY		O		RO	
Case	1	2	1	2	1	2	1	2
Y					1/4T	1/2T	1/4T	1/2T
RY					1/4T	1/2T	1/4T	1/2T
O	1/4T	1/2T	1/4T	1/2T				
RO	1/4T	1/2T	1/4T	1/2T				

2.7.5 非整數步伐數或非標準路線的步伐轉換方式

前面所建立的步伐轉換，必需要固定的幾種姿勢下，才具有產生共用步伐落腳點的機會，得以進行步伐轉換。但實際環境的情況並非是如此理想。若機器人到達地面上預定要旋轉的位置時，機器人的姿勢不是先前設計的

那樣子。差個一步、二步，甚至有隻腳還在半空中，這樣步伐轉換便無法進行，失去了實用價值，只是成為空談。而為了保證機器人在必要的地方以必要的姿勢到達，使其能順利進行步伐轉換。針對這種因步伐距離造成姿勢差距的情況，有另外的墊步方法。

如圖 31 所示，從原步伐長度到可執行步伐轉換間，只需要兩步的調整。上方是不經改變的原步伐，下方為改變後。這方式的第一步步長保持原步長，藉跨步腳來墊步，而後就能改變為較短的行走步伐，也可以以相同的方式在轉回以最大步伐距離行走。圖 31 是一個相位差的墊步，其它長度的墊步也可以用同樣方式得出來。如此在行進中可以輕易改變步伐的長度，就算改變步伐長度，共用步伐落腳點的腳步位置仍然保持著不變。依舊可以進行步伐轉換。雖然也可以在一開始就將路徑總長度依步伐數量作平均的分擔，但主要取決於程式的設計難易度和使用上的考量。利用這種墊步的方式，能先以最大步伐行走，並在最後關頭達到調整效果。

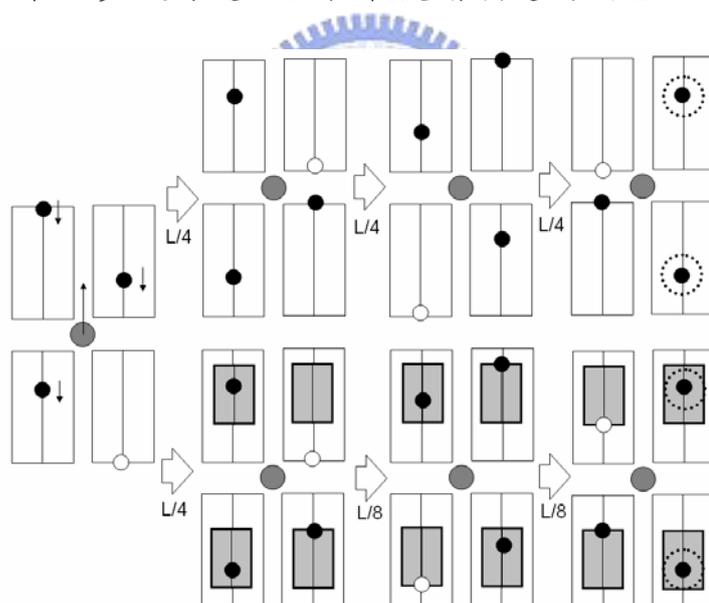


圖 31 步伐大小改變的設計

另外，圓弧也是常見的行走路線，一般來說，這種路徑可以採用轉彎步的走法，也就是將旋轉步的旋轉中心放至於身體中心甚至是身體之外。但本研究尚未進入到轉彎步伐的設計階段，這裡提出的在圓弧路線上的走法是利用直行步和旋轉步所結合，也就是機器人先直線前進到圓弧邊緣，再旋轉後以直線前進。因為在直行步伐上有對步伐距離最佳化，這裡稍微計算在圓弧內，機器人所能行走的最長直線距離。

這裡將機器人的步伐軌跡利用圖 32 示意，必需假設機器人本身沒有大到會影響行走，也就其行走軌跡位於身體之外。其左右兩邊的直行步伐軌跡各利用直線表示，距離為 $2W$ 。在直行步伐時，機器人身體各處不會超出這兩條線之外，也就是機器人所能行走的最窄路寬限制。而旋轉時軌跡所在的圓，半徑為 R ，也就是機器人最少需要這樣大的圓形空間才能進行旋轉。

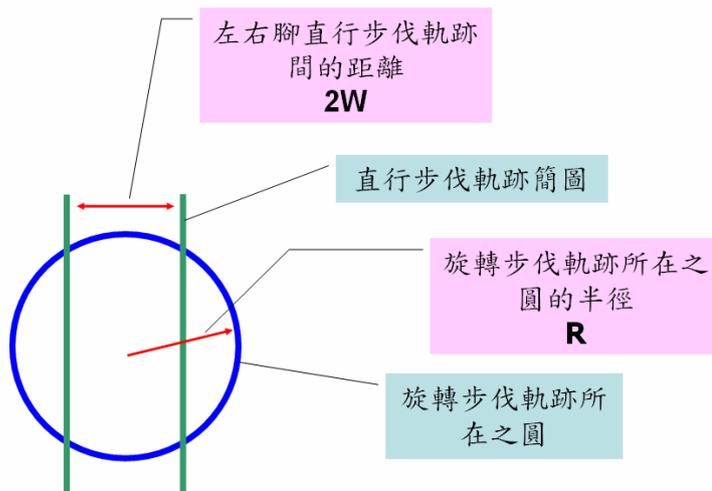


圖 32 機器人步伐軌跡示意簡圖

當在圓弧形的道路行走，道路的參數分別是，道路內圈圓的半徑 r_1 ，外圈圓的半徑為 r_2 。當路寬大於行走軌跡時，利用三角形公式，可得出圓弧內可直線行進的最長距離 L_1 為：

$$L_1 = 2 \cdot \sqrt{(r_2 - R)^2 - (r_1 + w)^2} \quad (30)$$

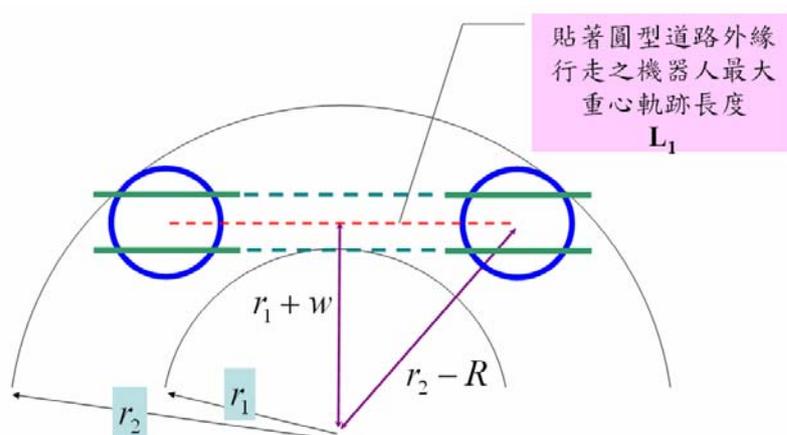


圖 33 圓弧內的行走

而當機器人剛進入圓弧路線時，最多在到達到路外緣時要轉為旋轉步，從剛進圓弧道路開始算起，機器人可以直線行進的最長距離 L_2 為：

$$L_2 = \sqrt{(r_2 - R)^2 - \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2} \quad (31)$$

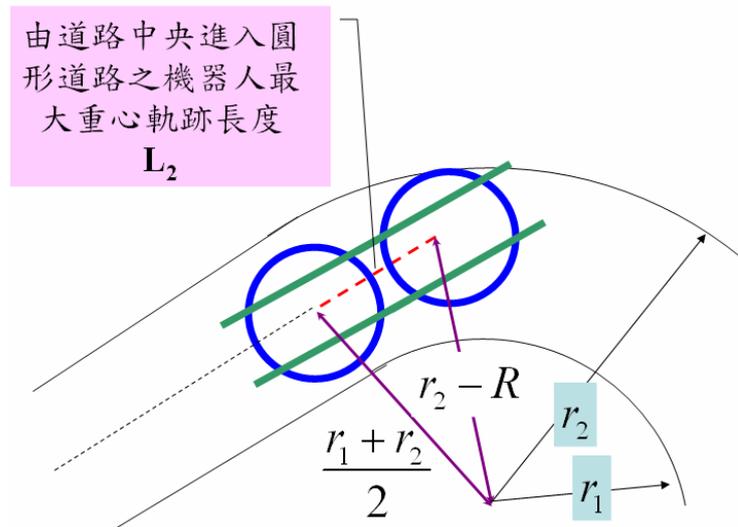


圖 34 直線進入圓弧的行走

