

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

黏性流體之全域速度場數值解法研究

A numerical method for viscous fluid
from low speed to high speed regions

研究生：李崇綱

指導教授：傅武雄 博士

中華民國九十五年七月

黏性流體之全域速度場數值解法研究

研究生：李崇綱

指導教授：傅武雄 博士

國立交通大學機械工程學系

摘要

本文主要目的是以數值方法求得計算流場誘導之聲場項所需的資訊。數值模擬方法採用有限插分(finite difference)法，在非黏滯性項以近似黎曼解 (approximation Riemann solver) 中的 Roe 法計算通量，並且加入 preconditioning 法加速收斂效率；在黏滯性項方面則以中央插方法加上 LES 紊流模式，使程式適用於全域流場，提高程式的應用範圍。

由上述的內容可知，本程式的應用範圍極廣，包含有高速流體、低速流體、黏滯性流體、非黏滯性流體、層流流體與紊流流體，皆可利用本程式計算而得到精確的結果。



A numerical method for viscous fluid from low speed to high speed regions

Abstract

The aim of this study is to develop a numerical method of which finite difference is adopted to get the necessary information to calculate the aeroacoustics induced by fluid flow. The Roe scheme in approximation Riemann solver is used to deal with the flux of inviscid terms and the preconditioning method is added to make the scheme to be more effective for all speed filed. The central difference method and LES scheme are used to handle the viscous terms.

As a result, this program can be applied in high speed flow, low speed flow, viscous flow, inviscid flow, laminar flow and turbulent flow, and use it the necessary information for calculating aeroacoustics induced by fluid flow to be easily obtained.



誌 謝

能夠順利完成碩班的學業，要感謝的人太多了。首先衷心的感謝指導老師傅武雄教授兩年來在課業上以及論文上的指導以及生活上各方面的關心與協助；同學、學長與學弟們所帶給我的歡笑與回憶；父母與親友們對我的支持與關懷；最後，更要感謝投諸在我身上的一切社會資源，希望本篇論文的完成能夠不辜負所有對我有期待與關心的人們。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
一、 緒論	1
二、 Lighthill 方程式理論	5
2.1 Lighthill 方程式推導	5
2.2 Lighthill 方程式物理意義	6
2.3 Lighthill analogy	7
2.4 Lighthill's Stress Tensor 簡化	7
三、 LES 計算理論	8
四、 控制方程式	12
五、 數值方法	14
六、 結果與討論	32
6.1 層流背階流場	32
6.2 超音速流場	40
6.3 紊流背階流場	46
七 結論	53
參考文獻	54
附錄	56

表目錄

表 6-1、層流背階計算範圍·····	34
表 6-2、超音速流場計算範圍·····	42
表 6-3、紊流背階計算範圍·····	48



圖目錄

圖 5-1、黎曼問題特徵值結構圖	17
圖 5-2、插分示意圖	30
程式流程圖	31
圖 6-1、背階模型圖	35
圖 6-2、三維模型圖	35
圖 6-3、網格示意圖	36
圖 6-4、背階高度圖	36
圖 6-5、瞬時速度場($t=0.05$ 秒)	37
圖 6-6、瞬時速度場($t=0.3$ 秒)	37
圖 6-7、瞬時速度場($t=1$ 秒)	38
圖 6-8、瞬時速度場($t=2$ 秒)	38
圖 6-9、穩態速度場	39
圖 6-10、迴流區域速度圖	39
圖 6-11、再接觸點	39
圖 6-12、超音速流場	43
圖 6-13、流場速度場圖	43
圖 6-14、底板壓力分佈圖	44
圖 6-15、底板壓力分佈圖[16]	44
圖 6-16、平板前緣壓力分佈圖	45
圖 6-17、平板前緣壓力分佈圖[16]	45
圖 6-18、背階模型圖	49
圖 6-19、背階網格圖	49

圖 6-20、背階網格圖.....	50
圖 6-21、瞬時速度圖.....	50
圖 6-22、瞬時速度圖 (t=0.05 秒)	51
圖 6-23、瞬時速度圖 (t=0.5 秒)	51
圖 6-24、瞬時速度圖 (t=2.5 秒)	52
圖 6-24、平均速度圖.....	52



第一章 緒論

近年來，由於科技的進步帶動生活品質的提升，機械元件若僅有功能的增強與效率的改善已漸漸無法滿足消費者的需要。相對的，產品對環境所造成的汙染與其舒適度更是不可或缺的一環。在此領域內，又屬噪音的控制最為困難與重要。

噪音對人體的影響可分為身體與心理方面的傷害。對身體方面：不僅耳朵與聽力造成暫時性或永久性的聽覺損失，更會透過神經系統，引起身體其他器官或系統的失調與異常，產生「非聽覺性的影響」。除此之外，長期處於高噪音環境下，容易使身體胃腸蠕動增快、呼吸型態改變、血壓增高、心跳加快、需氧量增加、血清膽固醇增加、血小板凝集等現象，雖不能斷定噪音是導致這些疾病的禍首，但噪音為導致或形成這些疾病的複雜因素之一，卻是無庸置疑的。對心理影響方面：噪音會影響睡眠、妨礙交談、工作效率低落、厭惡、生氣等心理作用，久而久之，因心理反應、失眠而導致生理功能失調等現象，如頭痛、頭暈、精神無法集中等均為噪音直接與間接的影響。兒童如長時期暴露在高噪音的環境下，會採用一種使自己聽不見噪音環境的調適方法來對抗噪音，這將造成兒童在吵雜的環境下變得忽略聲音訊號的不良作用，尤其是兒童不易區分聲音的重要性，將對兒童學習及認知的發展有相當的影響。也因為噪音對日常生活的影響甚鉅，因此像歐盟國家對於噪音的控管，從大至要求所有成員國規範工作環境噪音到小至輸入歐洲的玩具均需符合歐洲委員會授權統一標準組(CEN)訂立的玩具噪音標準都有嚴格的明文規定。由上面的敘述中，可以清楚了解到噪音控制在未來工程應用上所扮演的重要角色。

一般而言，噪音產生的原因可概略粗分為「結構產生(structure-borne)」的「結構噪音(Structure-borne noise)」與「氣流產生(air-borne)」的「氣動噪音(Aeroacoustic)」，結構噪音是由於結構表面振動推擠鄰近介質所產生的聲波輻射，產生的機制較易預測，因此在污染控制上已獲得相當程度的改善。氣動噪音肇始於紊流流場的速度或壓力變動，所以有著不可預測性，因此難以改善。但改善氣動噪音的重要性並不亞於結構噪音，例如：個人電腦由於計算速度的日漸增快，所需的散熱風扇越益增加，跟隨而來的是風扇葉片在高轉速之下造成氣動噪音提高的

問題。因此如何改進扇葉外型以降低氣動噪音，讓使用者感到舒適，將會是該產業接下來所面臨到的最大難題；汽車除了在低耗油的設計下，如何降低高速行駛下所造成的氣動噪音以免影響乘客與駕駛者的舒適度更是現今市場中，決定該產品優劣的關鍵之處。

而要改善氣動噪音，必須先了解氣動聲學，該學問由於Lighthill於 [1]所提出的理論而有著開創性的貢獻，Lighthill將聲源部份利用實驗或計算流體力學(CFD)方法求得，在利用波動方程式計算其傳遞過程，此即為Lighthill's analogy。接著，Williams等人[2]根據Lighthill's analogy的方法，重新整理Lighthill方程式，由於推導過程是根據Navier-stokes方程式而來且未有任何簡化，所以Ffowcs Williams-Hawkings方程式(簡稱FW-H方程式)的適用範圍比原始的Lighthill方程式更加廣泛。但受限於電腦運算速度的限制，直到1992年，Zorumski在[3]中才將氣動噪音與計算流體力學(Computational Fluid Dynamic, CFD)的結合做出合理的預測與整理，其中包括有定義CAA(Computational AeroAcoustic)的適用範圍與方法、找出適合CFD應用的Governing equation、CAA中Boundary condition的定義。此後，隨著運算速度的增快，便有越來越多的文獻是利用Lighthill's analogy的方法，結合CFD對氣動噪音做出合理的預測與改善。例如：Ohnishi等人在[4]中，以實用為目的，將Lighthill's analogy的方法對三維圓柱體、旋轉的正方體與車輛作出與實驗值接近的氣動噪音預測；Ono等人再[5]中，也利用同樣的方法先計算出車子於高速行駛下，照後鏡所產生的氣動噪音，再用其結果與風洞的實驗值做比較，發現兩者吻合。最後在重新設計照後鏡外型，成功降低了氣動噪音。而除了在實際應用方面之外，也有文獻是闡述Lighthill方程式下，不同的解所適用的不同範圍，Priour等人在[6]中，詳細的解釋了FW-H方程式與Kirchhoff方程式的適用範圍與相異之處，其指出：FW-H方程式若在一控制表面的範圍內，適用性將不會受到限制；而Kirchhoff方程式只適用於相同介質中，線性傳遞的聲波，並且只能計算控制表面與控制表面外的聲場分布。然而氣動聲學的模擬中，除了用Lighthill's analogy的方法外，也可使用Liner Euler Equation (LEE) 計算聲場，Addad等人在[7]以Star-CD先計算暫態流場之後，在以LEE去對渦流(vortex)產生的機制與聲源(acoustic source)的關係做比較，發現流場中渦流所產生的位置與聲源所產生的位置幾乎相同。但是Bogey等人

在[8]中，非常明白的指出，在低馬赫數的情況下，選擇Lighthill方程式來分析聲場是比較快速且準確的。

由上述的原理得知，要計算聲場必先得到紊流場中速度與壓力的變化，因此需先計算可壓縮流之紊流暫態流場。大部份而言，在計算流場部份多依照流體速度將其區分為可壓縮流 (compressible flow) 與不可壓縮流 (incompressible flow)，此種區隔卻嚴重的影響其應用範圍：如引擎工作時之流場與其所產生的噪音(雖為低速卻是可壓縮流)、壓縮機運轉時的噪音…等，都無法明確將其區分為可壓縮或不可壓縮流。

為了改善上述缺點，在本研究中不論流體為高速或低速，皆視其為可壓縮流，以獲得計算聲場時所需的流場資訊。此種方法最大的困難處在於計算低速流場時，由於可壓縮流計算時須遵守CFL條件，因此在低速流體時，受限於流體變化傳遞速度(約莫等於聲速)，時階將會極小。此種情況造成計算過程將耗費極大的時間與整體過低的效率。為了改善此缺失，本研究在計算可壓縮流時，加入preconditioning法，藉此讓流體即使在低速時，也可有較高的效率與良好的收斂性。

在計算此種低馬赫速流體的方面，目前有密度基底法 (density-based method) 與壓力基底法 (pressure-based method)，本研究以密度基底法為主。在密度基底法中又以Tuker於1987年[9]所提出的preconditioning法應用最廣泛，不僅可同時應用在可壓縮流與不可壓縮流中，更可以加速方程式收斂至穩態。

至於紊流流場的計算中，目前而言，有DNS、RANS與LES三種方法。其中DNS，除了需耗費大量的計算時間外，更有著雷諾數不可過高的缺點，造成其應用層面上受到限制。RANS雖然有著計算過程簡便，運算時間較快等優點，但由於其計算為時均化的結果，因此無法有效表現紊流流場中流體性質隨時間變動等特性，所以不予考慮。LES則介於DNS與RANS之間，有著計算時間較DNS迅速且暫態結果較RANS吻合實際物理情況等優點。LES的基本架構建立於只計算大尺度 (large scale) 物理量對於流場的影響，小尺度 (small scale) 部份的物理量由於對流場的影響甚微於是予以模組化以大幅降低計算時間。

本論文主要的目的為流場誘導聲場之先期研究。在高速流場時 (大於0.3馬赫數)，流場中之密度變化為主要聲源；低速流場時 (小於0.3馬赫數)，流場中之渦

流為主要聲源，因此本研究發展出一種解法以求解完整的Navier-stokes方程式；並且加入紊流LES模式截抓取渦流位置。為達上述目的，解析過程下列參數：層流、紊流、高速流場、低速流場、黏性流、非黏性流與溫度均加以考慮。結果顯示不論在低速流、高速流與紊流狀態和過去的研究結果均有良好的一致性。



第二章 Lighthill 方程式理論

2.1 Lighthill 方程式推導：

為了得到 Lighthill 的結果，必須將連續方程式與動量方程式結合以推導出 Lighthill 方程式。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y_i} \rho v_i = 0 \quad (2-1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} v_i \right) = - \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{\partial e_{ij}}{\partial y_j} \quad (3-2)$$

(2-1)為連續方程式，(2-2)為動量方程式，其中 e_{ij} 為黏滯性所造成的作用力向。對於黏性氣體而言，可以用速度梯度表示如下：

$$e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \right) \quad (2-3)$$

μ 為流體的黏滯係數

接著將(2-2)動量方程式移項整理，可得：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i = - \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - e_{ij}) \quad (2-4)$$

在將在將(2-4)式的兩邊加上 $c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i}$ 該項，於是(2-4)式可表示成：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - e_{ij}) + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \quad (2-5)$$

等式右邊在合併整理可得出：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial}{\partial y_j} \{ \rho v_i v_j + [\delta_{ij} (p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij} \} \quad (2-6)$$

$$\text{令 } T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij} (p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij} \quad (2-7)$$

方程式可再進一步表示成

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} = - \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \quad (2-8)$$



$$\text{或 } \frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \quad (2-9)$$

其中， T_{ij} 稱為 Lighthill turbulence stress tensor

在來對(2-1)連續方程式的兩邊作時間的微分，可得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y_i} \rho v_i = 0 \quad (2-10)$$

將(2-10)式中的第二項式予以分解

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y_i} \rho v_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i \right) \quad (2-11)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i$ 可以(2-9)式帶入，得出：

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \rho v_i \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \right) \quad (2-12)$$

在此結果帶入(2-10)式中，進一步推導出：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \right) = 0 \quad (2-13)$$

最後將其整理，得到最後的 Lighthill 方程式：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \rho}{\partial y_i \partial y_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (2-14)$$

最後我們將結果在一次敘述如下：

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \quad (2-15)$$

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij}(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)] - e_{ij} \quad \text{Lighthill turbulence stress tensor}$$

2.2 Lighthill 方程式物理意義：

(2-15)式中之 ighthill 方程式與波動方程式的形式非常接近，差別只在於 $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$

所造成的非齊性項 (nonhomogeneous)。因此可將 Lighthill 方程式視為在流場中，

會產生出音源 $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$ ，此音源讓流場所產生的聲響以聲音的波動方式 $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho$ 傳遞出去。

2.3 Lighthill analogy :

在(2-15)式中，等號兩邊的變數是互相包含，因此可由數值方法上獲得其解。但由於方程式中，擾動值 $\rho - \rho_0$ 與平衡值 ρ 的數量值差異太大，以致於不易獲得精確的數值解。為了解決此問題，Lighthill 於 [1] 提出，方程式右邊的非齊性項可利用實驗或 CFD 的方法求得，帶入(2-15)式中，將其視為典型的聲學波動方程式，並且可利用數值方法或聲學分析的方法，得出精確的聲場分布，此即為 Lighthill analogy。

2.4 Lighthill's Stress Tensor 簡化 :

為了讓 Lighthill analogy 更加實用，對(2-15)式中 T_{ij} 項做出合理的假設與簡化：

1. 假設流場為紊流，忽略 e_{ij} 所造成的黏滯性作用力 $e_{ij} = 0$ ，於是

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + [\delta_{ij}(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)]。$$

2. 流動過程為一等熵過程 (isentropic)，所以 $(p - p_0) = c_0^2(\rho - \rho_0)$ ， T_{ij} 可再進一步簡化成 $T_{ij} = \rho v_i v_j$ 。

3. 假設流速為低馬赫數，所以密度為定值，於是 Lighthill 方程式可以簡化成

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho' = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial y_i \partial y_j} \quad (2-16)$$

$$\text{或 } \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2-17)$$

第三章 LES 計算理論

LES 將流體物理量區分為大尺度(large-scale)與次格點尺度(subgrid scale (SGS))兩部分。對於大尺度的物理量在 LES 中直接由 Navier-Stokes 方程式求解，而在次格點尺度內的物理量則需要模式化。

目前大部分的次格點尺度流體剪應力模式 (subgrid-scale stress models) 是以流體剪應力假設為基礎，其中最常被引用的模式為 Smagorinsky 次格點尺度流體剪應力模式。

首先應用 LES 解決紊流問題的是 Deardorff [10]。他所模擬的為管道流體運動，雷諾數相當的大。其最大貢獻在於闡述了利用 LES 方法來模擬三維流場的可能性。

由 Kolmogorov 的相似法則得知，小渦流的性質和雷諾數無關，因此小渦流部分使用模式計算，而大渦流部分使用數值計算。其中渦流大小的劃分採用過濾(filter)方法，用 filter function 將計算範圍確定：

$$\bar{U}(r,t) = \bar{U}(r) + U'(r,t) \quad (3-1)$$

以波數(wave no.)空間， $U'(r,t)$ 表示某些波數的組合

$$U'(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\infty} \hat{U}'(r,t) e^{ikr} dk \quad (3-2)$$

具有空間和時間性質的物理量， $f(r,t)$ 之局部空間平均 $\bar{f}(r,t)$ 為

$$\bar{f}(r,t) = \int_{\infty} G(r,r') f(r',t) dr' \quad G(r,r') \text{ 為 filter function} \quad (3-3)$$

其中較常見的 filter function 有下列幾種：

(1) Gaussian filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \times \frac{1}{\Delta_i} \exp \left[-\frac{6(x_i - x'_i)^2}{\Delta_i^2} \right] \quad (3-4)$$

(2) Top hat filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & x_i - \frac{\Delta_i}{2} < x'_i < x_i + \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-5)$$

(3) sharp cutoff filter function :

$$G(x_i, x'_i) = \frac{2S_{in} \left[\pi - \frac{(x_i - x'_i)}{\Delta_i} \right]}{\pi(x_i - x'_i)} \quad (3-6)$$

其中 Δ_i : filter width

$$f(r) = \bar{f}(r) + f'(r)$$

如果利用(3-4)式對 Navire-stokes 方程式過濾，並且是在不可壓縮條件得：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\bar{P}}{x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \tau_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (3-8)$$

其各項所代表的物理意義分別為：

$$L_{ij} \text{ (Leonard) 項: } \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

大渦流因和小渦流之間干涉作用而承受應力，此應力擔負部分大渦流能量的耗散，使用不同之 filter function，渦流尺寸會有不同。若使用 sharp cutoff

filter function，小渦流完全被過濾，無干涉作用產生，此項則為零。

$$C_{ij} \text{ (Cross 項)} : \overline{u_i + u'_j} + \overline{u_j + u'_i}$$

負擔相當部分之大渦流能量之散逸，需 modeling，若以體積平均作為 filtering，則 L_{ij} 和 C_{ij} 不會出現。 L_{ij} 、 C_{ij} 和 R_{ij} 大小約為同 order， $L_{ij} + C_{ij}$ 有相互抵銷的作用，若兩項同時忽略，誤差很小。

$$R_{ij} \text{ (Reynold 項)} : \overline{u'_i u'_j}$$

SGS(subgrid scale)model 通常指 Reynolds stress 項，負擔大部分小渦流，對大渦流的干涉 s 行為，並含能量散逸

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \zeta_{ij} \frac{\overline{u'_k u'_k}}{3} = \left[-\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3-9)$$

在 R_{ij} 項內，小渦流導致之垂直應力 $\overline{u'_k u'_k}$ 的平均值，包含在大渦流的靜壓力項 \bar{P} 內，因此大渦流實際之靜壓力大小 \bar{p} 為 \bar{P} 減掉垂直應力部分。

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{1}{3} \rho \overline{u'_k u'_k} \quad (3-10)$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{\frac{1}{3}} \quad (3-11)$$

$$P = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{3} K_G \quad K_G = \frac{\nu_t^2}{(C_v \Delta)^2} \quad C_v = 0.094$$

C_s : 0.1 壁面紊流；0.25 等方向性紊流；0.15 介於上述兩者之間

Δ : 網格間距 1 : X 2 : Y 3 : Z

在未有任何簡化的 Navier-Stokes 方程式下，利用 Favre-filtered (density-weighted) 變數對其進行過濾，可以將小渦流濾掉，避開了次格點尺度中，質量守恆的問題。其方法如下：

假設有一方程式 f ，其 filtered 形式為 \bar{f} 且其 Favre-averaged 形式為 \tilde{f} ，於是

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V G f dV \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

在上式中， G 為 filtering 方程式，利用上式對 Navier-Stokes 方程式過濾可得：

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} \tilde{u}_k = 0 \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_l + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = 0 \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{E}_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{E}_l \tilde{u}_l + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{p} u_l - \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_k \tau_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_l} (\tilde{k} \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{T}) + \tilde{u}_k \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + C_v \frac{\partial q_l}{\partial x_l} = 0 \quad (3-14)$$

過濾後的理想氣體狀態方程式為：

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (3-15)$$

原始的 Navier-Stokes 方程式中的動量方程式經過過濾後得到 (3-13) 式，其次格點尺度對方程式的影響 σ_{kl} 可表示成：

$$\sigma_{kl} = \bar{\rho} (\widetilde{u_k u_l} - \tilde{u}_k \tilde{u}_l) \quad (3-16)$$

為了讓 LES 方程式成為閉和系統 (close system)，因此需對 (3-16) 式模式化。根據 Moin 所提出，(3-16) 式可表示成：

$$\sigma_{kl} = -2C \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{kl} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{kl}) + \frac{1}{3} q^2 \delta_{kl} \quad (3-17)$$

其中 $q^2 = \sigma_{ii}$

$$\tilde{S}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} \right) \text{ 且 } |\tilde{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{kl} \tilde{S}_{kl}}$$

在 (3-17) 中， C 為常數，根據 Smagorinsky 所提出的 SGS 模式， $C = 0.01$ 。

第四章 控制方程式

本研究選擇可壓縮流 LES 紊流模式模擬流場，流場作以下假設：

1. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
2. 忽略重力效應影響。
3. 所有壁面均為不可滑移(No slip condition)

本研究所採用的原始統御方程式為可壓縮 Navier-stokes 方程式，需要給定的邊界條件有：初始狀態、入口條件、出口條件、流體邊界

1. 初始狀態：初始速度、初始壓力、初始密度

2. 入口條件：

超音速流：給定壓力、速度、密度

次音速流：給定速度與密度，壓力由計算 Domain 外插得到

3. 出口條件：

超音速流：並不需給予出口條件。

次音速流：壓力為大氣壓力，速度與密度則由計算 Domain 外插得到。

4. 壁面邊界：

邊界速度：不可滑移條件， $U = V = W = 0$

邊界壓力：Neumann 條件（利用 Poisson 方程式來求得邊界壓力）。

根據高斯散度定理，可將 Poisson 方程式寫成如下形式

$$\text{Poisson 方程式：} \iint_A \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} dy = \oint_C \frac{\partial p}{\partial n} dl \quad (4-1)$$

$$\text{所以 } \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{p_{y+1} - 2p_y + p_{y-1}}{\Delta y^2}$$

$$\text{因為 } \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \text{ 由此可得到 } p_{y-1} = p_y$$

所以 $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{p_{y+1} - 2p_y + p_{y-1}}{\Delta y^2}$ 可以改寫成 $\frac{p_{y+1} - p_y}{\Delta y^2}$

因此在邊界的壓力可以設定成 $p_{y+1} = p_y$



第五章 數值方法

本研究在流場方面的計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式(Euler equation)，採用 Riemann 問題中的 Roe 方法計算通量(flux)，並且引入 preconditioning 方法，讓程式不論在計算高馬赫數的可壓縮流或低馬赫數的可壓縮流，皆可獲得良好之收斂結果；第二部份為黏滯性項的計算，採用 LES 模擬中最常使用的 Smagorinsky 模式，並且以中央插分法計算速度梯度。在時間項方面則採用隱式法(implicit)。

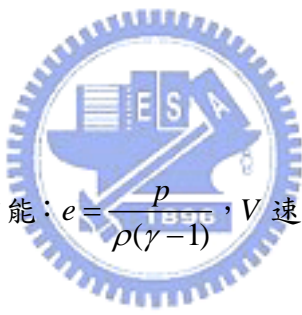
考慮 Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$U = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \end{array} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho v u - \tau_{xy} \\ \rho w u - \tau_{xz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) u + p u - k \frac{\partial T}{\partial x} - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} - w \tau_{xz} \end{array} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho u v - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho w v - \tau_{yz} \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) v + p v - k \frac{\partial T}{\partial y} - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} - w \tau_{yz} \end{array} \right\},$$



，其中 e 為內能： $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ ， V 速度平方總和： $V = u^2 + v^2 + w^2$ ，

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})w + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{array} \right\}$$

上式可拆解成黏滯性項與非黏滯性項：

$$F = F_{inviscid} + F_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})u + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ +u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{array} \right\}$$

$$G = G_{inviscid} + G_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})v + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ +u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{array} \right\}$$

$$H = H_{inviscid} + H_{viscid} = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho(e + \frac{V^2}{2})w + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ +u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{array} \right\}$$

由非黏滯項所組成的方程式，即稱為尤拉方程式，再一次整理如下，

$$\text{Euler equation: } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$U = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{array} \right\},$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) u + p u - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\},$$

$$G = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho w v \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) v + p v - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w^2 \\ \rho w^2 + P \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) w + p w - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\}$$



在雙曲線(hyperbolic)的守恆形式(conservative type)方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續(piecewise)常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維的黎曼方程式表示如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a \text{ 為 Jacobian 矩陣} \quad (5-2)$$

$$\text{初始條件：} u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \quad (5-3)$$

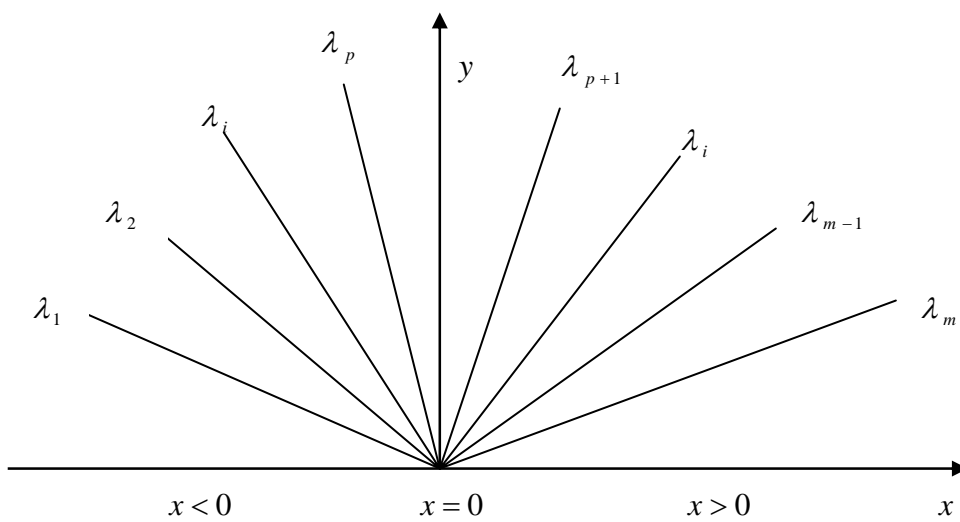


圖 5-1：黎曼問題特徵值結構圖

接著將方程式(5-2)重新改寫，

$$U_t + AU_x = 0 \quad (5-4)$$

再從 A 中找出特徵值與特徵矩陣

$$A = K\Lambda K^{-1}, \text{ 其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣: } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]$ 為特徵向量，所以 $AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}$

接著定義特徵變數 W (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = K^{(-1)}U \text{ 或 } U = KW,$$

所以 $U_t = KW_t$ 且 $U_x = KW_x$ ，再將此結果帶入(5-3)中，可得：

$KW_t + AKW_x = 0$ ，可再繼續簡化成：

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (5-5)$$

方程式(5-5)稱為 Canonical form 或 Characteristic form

將其結果整理如下：

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \text{ 或 } \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0$$

方程式(5-5)可以由特徵曲線法求得其解為：

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (5-6)$$

其中， α_i 與 β_i 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到

$$u(x, t) = \sum_i^m w_i^0(x - \lambda_i t) K^{(i)}$$

參照圖 5-1，可以進一步推導出

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (5-7)$$

除此之外，還可決定出 $u(x, t)$ 中的 jump Δu ：

$$\Delta u = u_R - u_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (5-8)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$

在黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性項部分需利用疊帶等方法處理，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題(approximation Riemann problem)解而不直接求其 exact solution。在近求解似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe[11] 所提出，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (5-9)$$

根據 chain rule，可將方程式(5-9)改寫如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(5-8)可以表示成：}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (5-10)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jaconian 矩陣。

而 Roe 將原本的 Jaconian 矩陣 $A(U)$ 用一常數 Jaconian 矩陣(constant Jaconian matrix) $\tilde{A}(U_L, U_R)$ 代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (5-11)$$

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases}$$

於是可得到方程式(5-9)的解析解。由上述的原理可得知：在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jaconian 矩陣取代原本的 Jaconian 矩陣使方程式從非線性變成線性，但是初使條件並沒有被改變，因此可以得到方程式方程式(5-9)的近似解。為了要求得合理的常數 Jaconian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1. U 與 F 之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當 $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則 $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3. $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣 \tilde{A} 的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jaconian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3. 則是為了符合守恆定律 (conservation law) 與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(5-6)與(5-8)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ 的解

可以利用下面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (5-12)$$

$$\text{或 } U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (5-13)$$

其中 $i+\frac{1}{2}$ 表示網格與網格之間的交界面 (face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{Q})}{\partial x} = 0, \text{ 根據(5-11)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守衡的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (5-14)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解 $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量 (flux) 的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (5-15)$$

再從 $\tilde{F} = \tilde{A}U$ 的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (5-16)$$

再根據(5-12)式與(5-13)式可以推導出：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (5-17)$$

$$\text{或 } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (5-18)$$

(5-17)與(5-18)所指的 $\tilde{\lambda}_i^-$ 與 $\tilde{\lambda}_i^+$ 分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (5-19)$$

再由(5-7)式可再次改變 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (5-20)$$

其中 $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ，

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(|\tilde{\lambda}_1|, |\tilde{\lambda}_2|, \dots, |\tilde{\lambda}_m|)$$



考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (5-21)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}$ ； $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}$ ， a 為聲速

方程式(5-21)的 jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

特徵向量： $K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}$ ， $K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$

接著選定 parameter vector

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

再將 F 與 U 利用 Q 表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

為了表示出 ΔU 與 ΔF 需在定義 averaged vector \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

再找出 $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$ 與 $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$ 使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (5-27)$$

將 (5-27) 結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C} \tilde{B}^{-1}) \Delta U \quad (5-28)$$

再根據條件 3 求出近似 Jcaobian 舉陣

$$\tilde{A} = \tilde{C} \tilde{B}^{-1} \quad (5-29)$$

為了滿足 (5-27)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix} ; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

再帶入(5-29)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (5-31)$$

\tilde{u} 為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (5-32)$$

在計算網格與網格之間的物理量時，本研究採用 Van Leer[12]所提出的高次項插分法，其方程式如下：

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{1+\psi}{4}(u_{i+1} - u_i) + \frac{1-\psi}{4}(u_i - u_{i-1}) \quad (5-33)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_{i+1} - \frac{1+\psi}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1-\psi}{4}(u_{i+2} - u_{i+1}) \quad (5-34)$$

其中，

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = -1 \quad \text{Second-order accurate scheme} \\ \psi = \frac{1}{2} \quad \text{Quick scheme} \\ \psi = \frac{1}{3} \quad \text{Third-order accurate scheme} \end{array} \right.$$

但高次項的插分法在不連續的情況下，卻容易使震盪變大，為了降低震盪，MUSCL 利用 limiter functions，因此需要加入 minmod limiter 以確保程式不會發散。

因此(5-33)與(5-34)式需在改寫如下：

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = u_i + \frac{1+\psi}{4} \min \text{mod}[u_{i+1} - u_i, b(u_i - u_{i-1})] + \frac{1-\psi}{4} \min \text{mod}[u_i - u_{i-1}, b(u_{i+1} - u_i)]$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^R = u_{i+1} - \frac{1+\psi}{4} \min \text{mod}[u_{i+1} - u_i, b(u_{i+2} - u_{i+1})] - \frac{1-\psi}{4} \min \text{mod}[u_{i+2} - u_{i+1}, b(u_{i+1} - u_i)]$$

$$\text{其中，} 1 \leq b \leq \frac{3-\psi}{1-\psi}$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{Sgn}(x) \text{Max}\{0, \text{Min}[|x|, y \text{Sgn}(x)]\}$$

為了提高程式的應用範圍，加入 preconditioning 法，讓程式不論在高速或低速流體內，皆可獲得精確的計算結果。本程式採用 Weiss and Smith 的

preconditioning method [13]，方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-35)$$

(5-35) 為原始方程式，接著將保守形式 (conserved variables) 轉變成主要變數形式 (primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-36)$$

其中 $U_p = [P \ U \ V \ W \ T]^T$ ， M 為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

其中 $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$; $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(5-36)式的方程式乘上矩陣 K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

再將 K 與 M 相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (5-39)$$


將(5-39)式帶入(5-36)式，觀察連續方程式：

$$\rho_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (5-40)$$

在理想氣體中可將(5-40)在表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (5-41)$$

其中 C 為聲速

由 (5-41) 式可以看出，在等密度條件下，由於 ρ_p 為零，(5-40)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (5-42)$$

上式即為不可壓流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(5-39)式中的 ρ_p 項，利用當地流場速度(local

velocity) 的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度冪次級數(order)相同，系統不再受到 CFL 條件的限制，提高程式的計算效率。

利用 θ 取代 ρ_p 項：

$$\theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (5-43)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (5-44)$$

其中 ε 為一極小的值，約等於 10^{-5} ，其主要是用來防止停滯點 (stagnation point) 在計算時所造成的奇異點 (singular point) 現象。對於黏制性流體而言， U_r 必須大於流體的當地擴散速度 (local diffusion velocity)，因此 U_r 還需加入下列限制：

$$U_r = \max\left(U_r, \frac{v}{\Delta x}\right)$$

將 θ 帶入(5-39)式後，可得到一新矩陣 Γ_{nc}

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (5-45)$$

經過上述推導之後，方程式從(5-35)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \quad (5-46)$$

為了讓(5-46)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上 K^{-1}

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-47)$$

根據 (5-47) 式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T}H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-49)$$

由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。在 (5-20) 式中，可以觀察到 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 項，是由 $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$ 的中央差分法加上為了

解決不連續面問題的 artificial viscosity term $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$ 所組成。加入

preconditioning 的方程式只需在 artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2}\Gamma |\Gamma^{-1}AM| (U_R + U_L) \quad (5-50)$$

$$\text{其中 } |\Gamma^{-1}AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$$

方程式(5-49)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，因此利用

修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time stepping[14]的模組，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。

首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項，稱為 artificial time term。方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-51)$$

其中 τ 即為 artificial time， t 為 physical time

接著在 artificial time term 加入 preconditioning 的方法：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5-52)$$

最後對 artificial time term 採一階的有限差分離散，對 physical time term 採二階的後項差分離散，可得

$$\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3U^{k+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1}) = 0 \quad (5-53)$$

此處 k 為 artificial time 中的疊帶次數， n 為 physical time 的疊帶次數

上述方程式，當 artificial time term 收斂至 $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} = 0$ 時，方程式即會回復到原始的 Navier-Stokes 方程式，並且包含著時間項，故程式可以計算暫態結果。

接著整理 (5-53) 式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{\Delta U_p}{\Delta \tau} + \frac{3(U^k + M \Delta U_p) - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_x (F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y (G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z (H^k + C_p^k \Delta U_p) = 0 \quad (5-54)$$

$$\text{其中 } \Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k, \delta_x F^k = \frac{1}{\Delta x} (F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1}), A_p = AM$$

再將 ΔU_p 項，放置於等號左邊，其餘則於等號右邊：

$$[\Gamma + M \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t} + \Delta \tau (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k)] \Delta U_p = R^k \quad (5-55)$$

$$\text{此處 } R^k = -\Delta\tau\left(\frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t}\right) - \Delta\tau(\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_z H^k)$$

再令 $S_p = \Gamma + M \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t}$ ，(5-55)式可在寫成

$$[S_p + \Delta\tau(\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k)]\Delta U_p = R^k \quad (5-56)$$

最後在解開 (5-56) 式即可得到 ΔU_p

在黏滯性項的計算方面，採用中央插分法。在尤拉方程式中，由於計算的範圍皆為網格與網格之間的通量項，因此在黏滯性項方面，所需得到的速度梯度項也需在網格與網格之間，下列以三維的 X 方向為例，圖 5-2 為其示意圖。

圖 5-2 中各編號所代表的位置分別為：

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow (i, j+1, k) \quad ; \quad 2 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j+1, k) \quad ; \quad 3 \rightarrow (i+1, j+1, k) \quad ; \\ 4 &\rightarrow (i, j, k-1) \quad ; \quad 5 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k-1) \quad ; \quad 6 \rightarrow (i+1, j, k-1) \quad ; \\ 7 &\rightarrow (i, j, k) \quad ; \quad 8 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) \quad ; \quad 9 \rightarrow (i+1, j, k) \quad ; \\ 10 &\rightarrow (i, j, k+1) \quad ; \quad 11 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k+1) \quad ; \quad 12 \rightarrow (i+1, j, k+1) \quad ; \\ 13 &\rightarrow (i, j-1, k) \quad ; \quad 14 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j-1, k) \quad ; \quad 15 \rightarrow (i+1, j-1, k) \quad ; \end{aligned}$$

其各速度梯度分別為：

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\Delta U}{\Delta X} = \frac{U(9) - U(7)}{\Delta X} \quad (5-57)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\Delta V}{\Delta X} = \frac{V(9) - V(7)}{\Delta X} \quad (5-58)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\Delta W}{\Delta X} = \frac{W(9) - W(7)}{\Delta X} \quad (5-59)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\Delta U}{2\Delta Y} = \frac{U(2) - U(14)}{2\Delta Y} = \frac{U(2)}{2\Delta Y} - \frac{U(14)}{2\Delta Y} \quad (5-60)$$

$$\text{其中 } U(2) = \frac{U(3) + U(1)}{2} \quad ; \quad U(14) = \frac{U(13) + U(15)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{U(3)+U(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{U(13)+U(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{U(3)+U(1)-U(13)-U(15)}{4\Delta Y} \quad (5-61)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{V(3)+V(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{V(13)+V(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{V(3)+V(1)-V(13)+V(15)}{4\Delta Y} \quad (5-62)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{W(3)+W(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{W(13)+W(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{W(3)+W(1)-W(13)-W(15)}{4\Delta Y} \quad (5-63)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\Delta U}{2\Delta Z} = \frac{U(11)-U(5)}{2\Delta Z} = \frac{U(11)}{2\Delta Z} - \frac{U(5)}{2\Delta Z} \quad (5-64)$$

$$\text{其中 } U(11) = \frac{U(10)+U(12)}{2} \quad ; \quad U(5) = \frac{U(4)+U(6)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\left(\frac{U(10)+U(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{U(4)+U(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{U(10)+U(12)-U(4)-U(6)}{4\Delta Z} \quad (5-65)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\left(\frac{V(10)+V(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{V(4)+V(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{V(10)+V(12)-V(4)-V(6)}{4\Delta Z} \quad (5-66)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\left(\frac{W(10)+W(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{W(4)+W(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{W(10)+W(12)-W(4)-W(6)}{4\Delta Z} \quad (5-67)$$

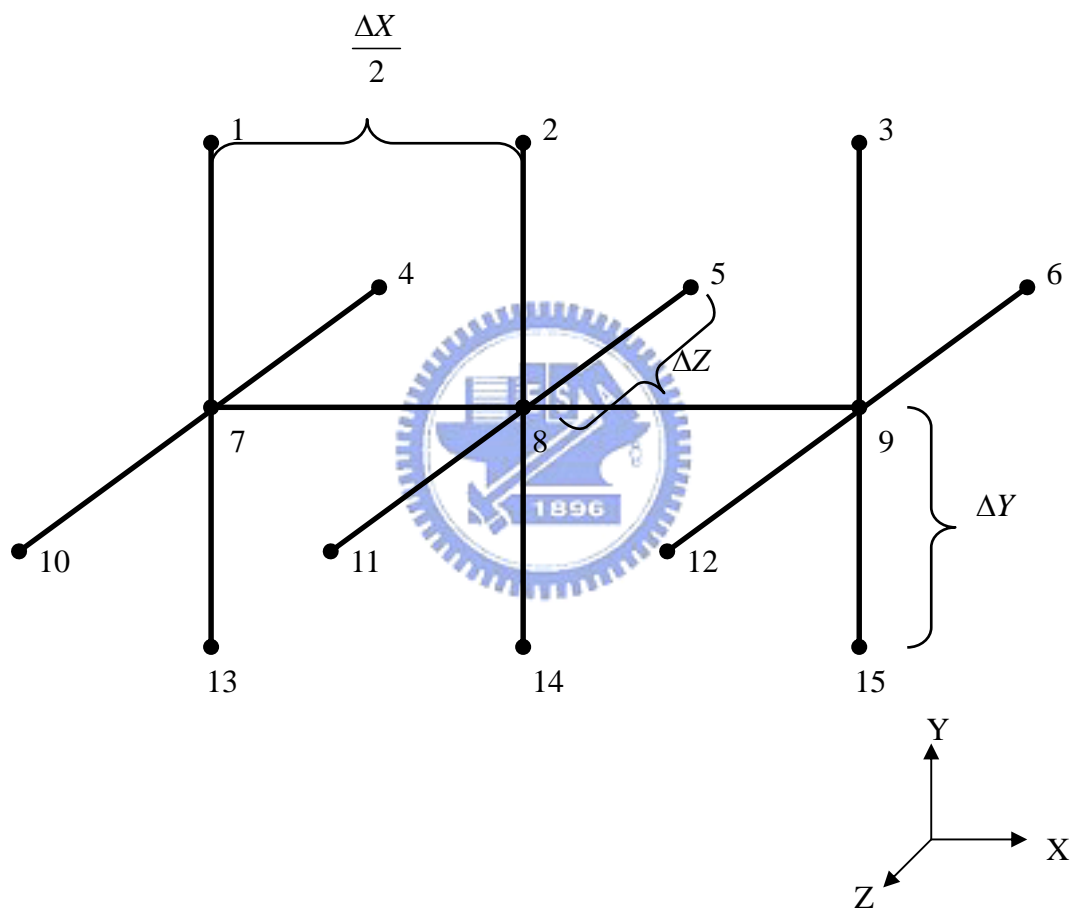
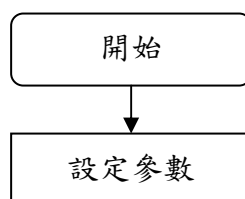
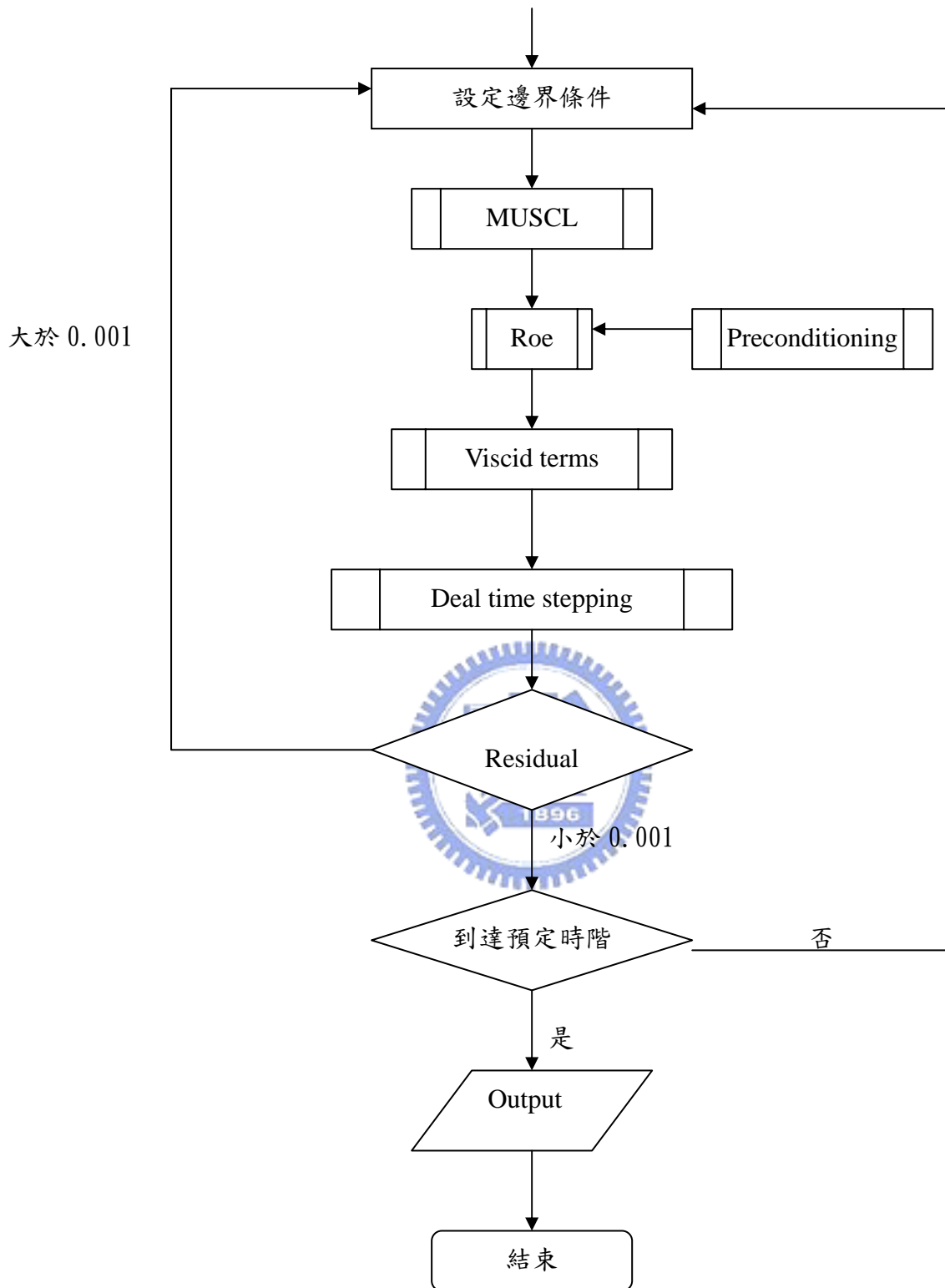


圖 5-2：插分示意圖

程式流程圖：





第六章 結果討論

6.1 層流背階流場：

為了驗證 preconditioning 在低速可壓縮流的效用，先計算極低速流之背階流場。圖 6-1 為計算模型，圖 6-2 與圖 6-3 為其三維網格示意圖，接著定義其背

階高度為 H ，如圖 6-4 所示。為了確定出口速度可以到達完全發展流，因此管道整體長度為 $35H$ ，整體高度為 $2H$ 。

由於為極低速可壓縮流，因此流體進口速度極低，為 0.46 公尺，約為 0.0013 馬赫數，雷諾數 450 為層流。邊界條件如下：

入口條件：速度 = 0.46 公尺

密度 = 大氣空氣密度

出口條件：完全發展流

壓力 = 1 大氣壓

固體邊界：速度 = 0

壓力與密度為 Neumann 條件

其詳細計算範圍如表 6-1 所示

圖 6-5 至圖 6-8 為背階流場其速度隨時間變化的情形。在圖 6-5 為 $t=0.05$ （第十時階）的瞬時速度圖，由於傳遞速度，速度影響範圍只在進口前方處，其餘部分的速度皆為零。圖 6-6 為 $t=0.03$ 秒的瞬時速度圖，流體的影響範圍已經到背階處，由於背階部分為較低壓部分，因此流體被迫往背階處移動，而在管道後段處，未受到影響，速度依然為零。圖 6-7 為 $t=1$ 秒的瞬時速度圖，流體的變化即將到達管道後段，背階部分由於低壓出現一次迴流，二次迴流也漸漸出現。圖 6-8 為 $t=2$ 秒的瞬時速度圖，流體變化已經到達出口部分，接著流體便開始調整其一次迴流與二次迴流的位置。

本研究能夠清楚的將流場速度隨著時間的變化表現出來，是由於在程式中，未簡化流體為不可縮流，而是解出完整的 Navier-Stokes 方程式，因此其為可縮流，與不可壓縮流最大的差異在於其傳遞速度有限，所以清楚看到流體從進口到出口的變化情形，而不可縮流由於傳遞速度無限大，並無法表現出此種特性。

圖 6-9 為流場到達穩態後的速度強度圖，於該圖中，我們可以清楚的看到背階流場中的一次回流與二次迴流。圖 6-10 為一次回流區域的速度圖，可以更明顯看出迴流區域的流場變化。

接著將此結果與 BARKLEY 等人於[15]的結果做比較，其再接觸點約為 10H，如圖 6-11 所示。本流場的再接觸點約為 9.5H。與該結果相當接近，由此可確定 preconditioning 在極低速可壓縮流的模擬中，也可得到良好的精度與結果。





	X 方向	Y 方向	Z 方向
網格 大小	$\Delta X = 0.0035$	$\Delta Y = 0.0005$	$\Delta Z = 0.01$
網格數	120	40	10

表 6-1 層流背階計算範圍



圖 6-1：背階模型圖

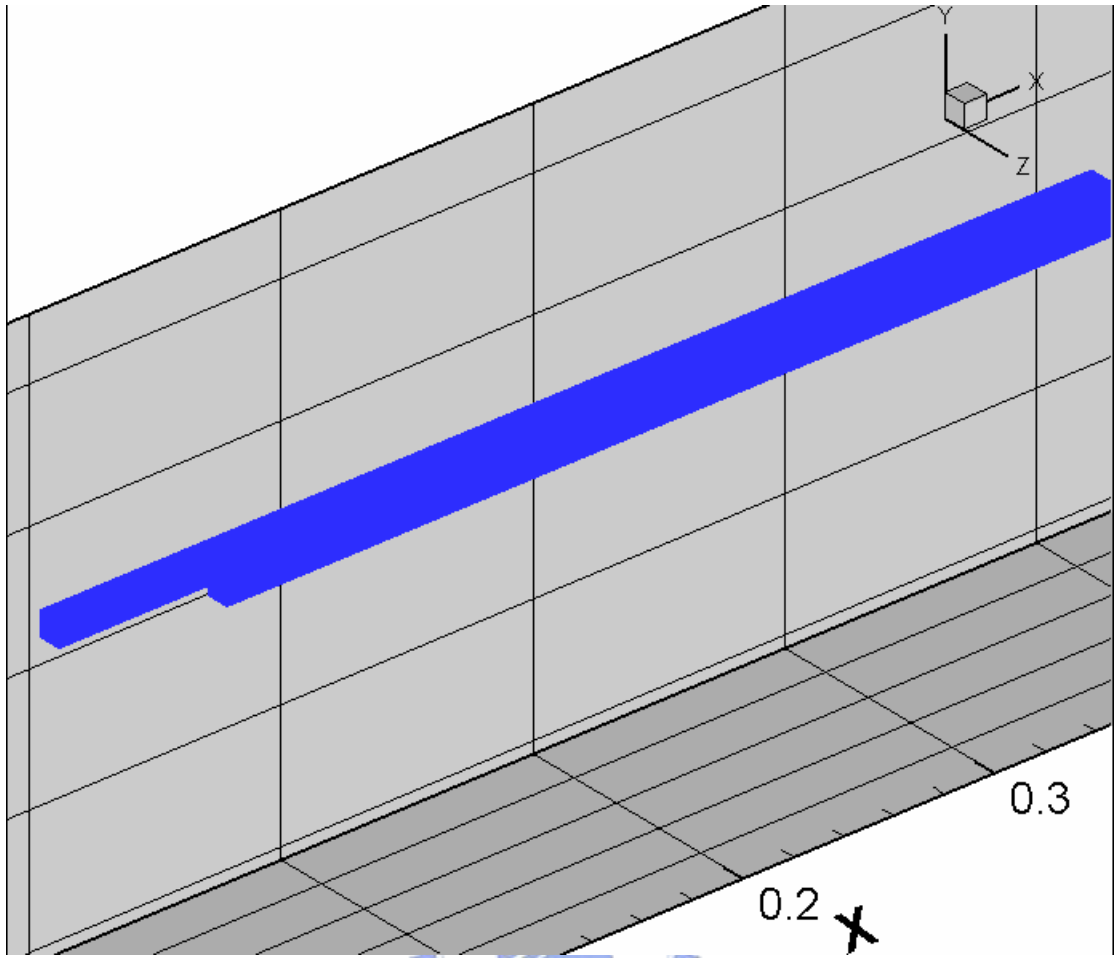


圖 6-2：三維模型圖

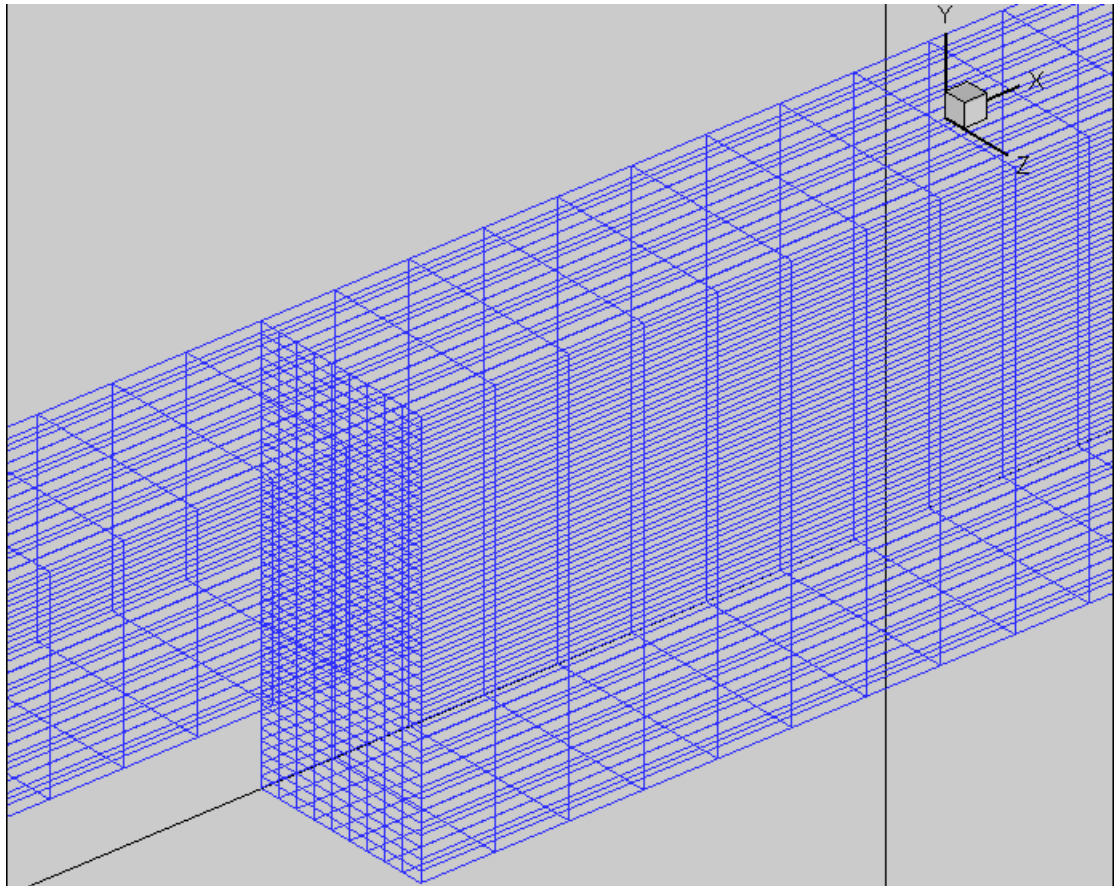


圖 6-3：網格示意圖

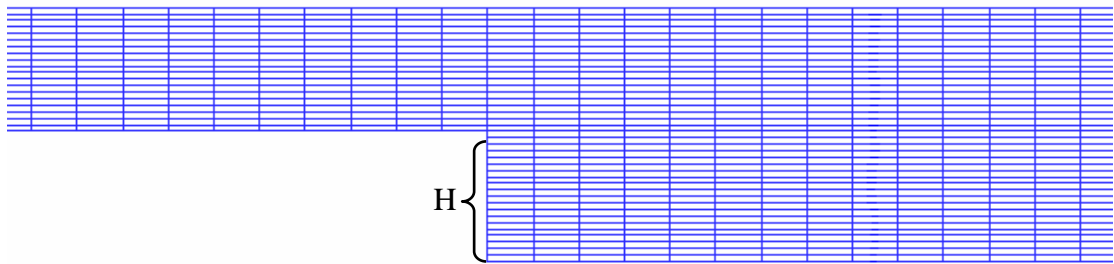


圖 6-4：背階高度圖

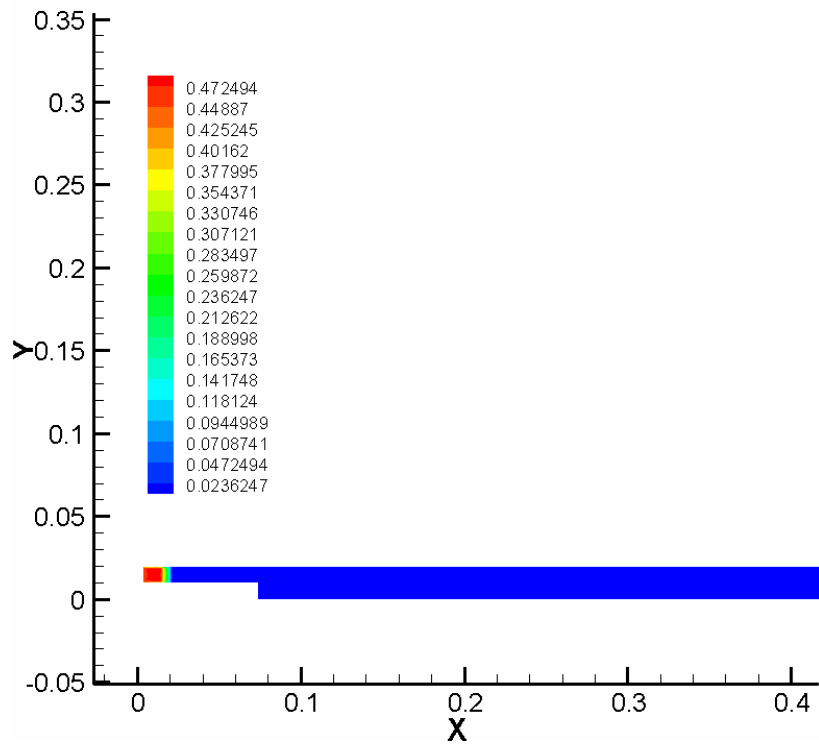


圖 6-5：瞬時速度場(t=0.05 秒)

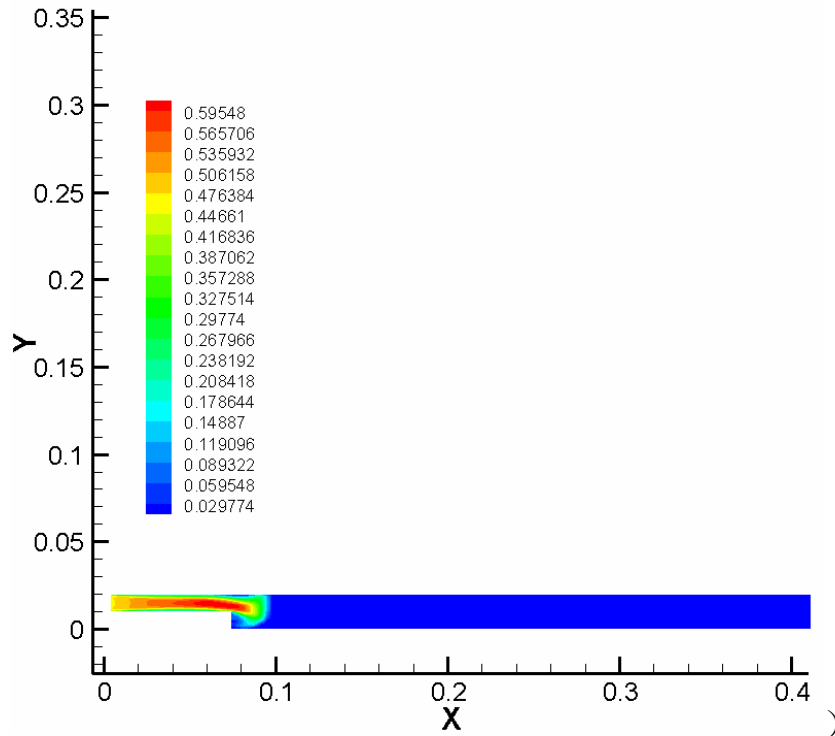
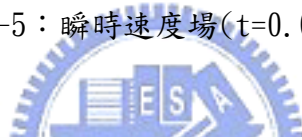


圖 6-6：瞬時速度場(t=0.3 秒)

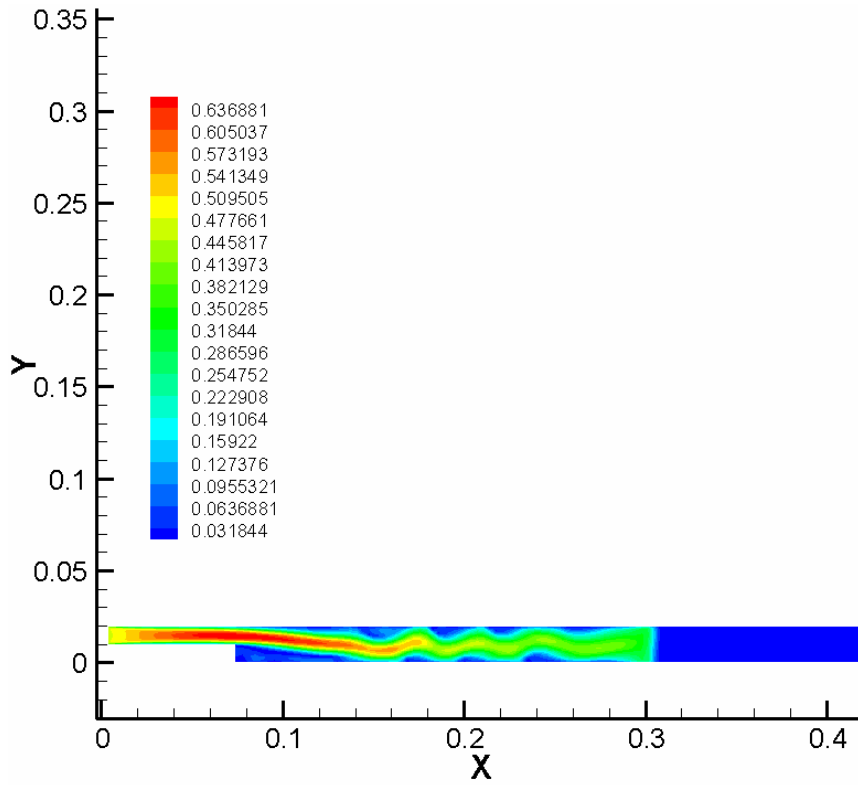


圖 6-7：瞬時速度場(t=1 秒)

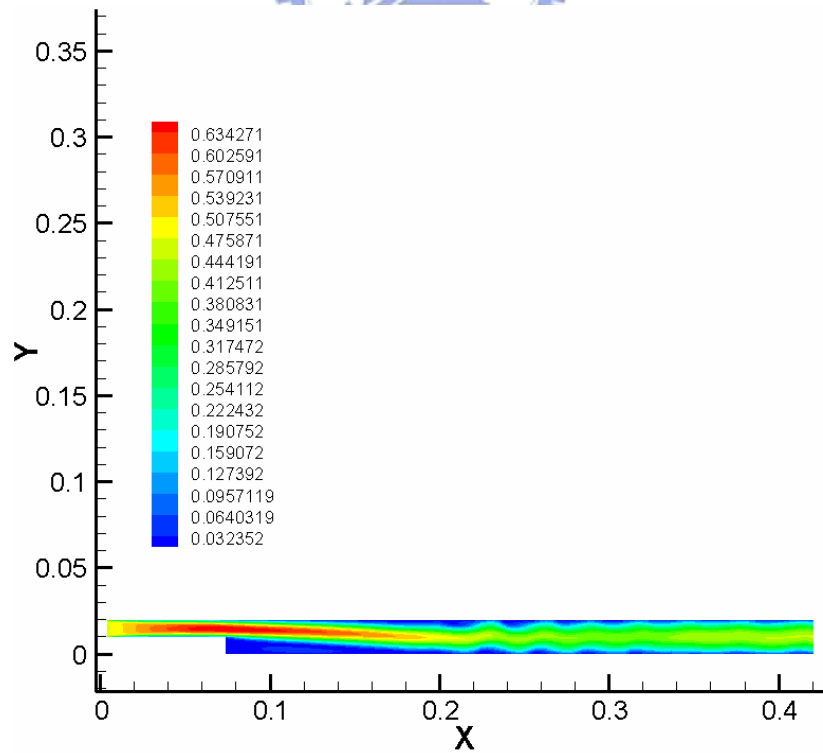


圖 6-8：瞬時速度場(t=2 秒)

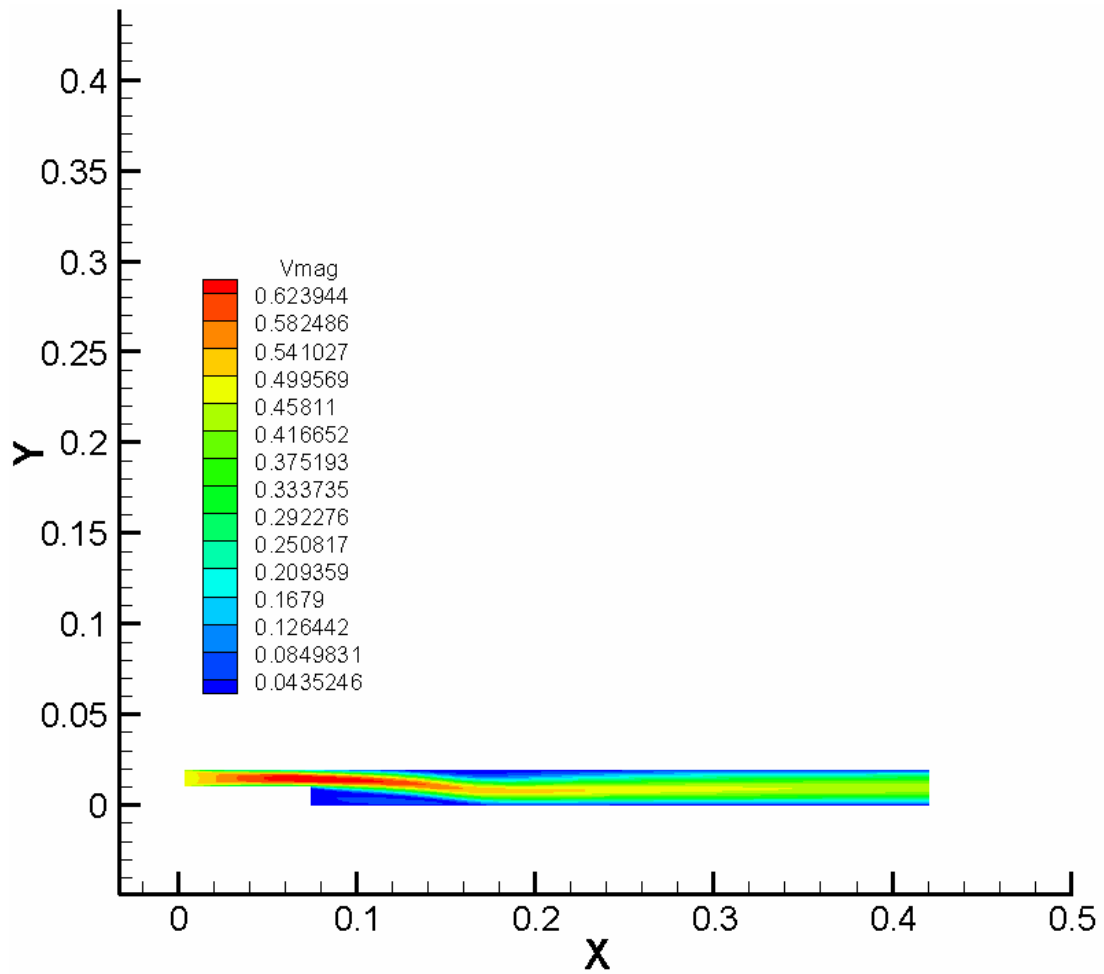


圖 6-9：穩態速度場

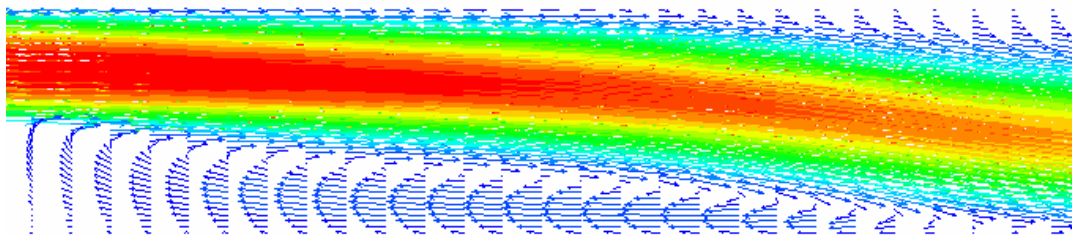


圖 6-10：回流區域速度圖



圖 6-11：再接觸點[15]

6.2 超音速流場：

在高速可壓縮的流場中，本研究將計算超音速流經過平板時所發生的物理效應。計算範圍的物理模型如圖 6-12 所示。

由於為超音速流場，因此其邊界條件與次音速流場並不相同，其給予的條件整理如下：

入口條件：速度 = 4 馬赫數(U=4 Mach、V=0、W=0)

溫度 = 大氣空氣溫度

壓力 = 1 大氣壓

出口條件：壓力、溫度與速度均外插得到

平板底部：速度 = 0

壓力為 Neumann 條件

溫度為絕熱條件

平板頂部：速度 = 4 馬赫數(U=4 Mach、V=0、W=0)

壓力 = 1 大氣壓

溫度 = 大氣空氣溫度

其詳細計算範圍如表 6-2 所示

由上述物理量可以計算出其雷諾數約為 900，為層流。除此之外，在高馬赫數的情況下，流體內部溫度變化較大，需考慮溫度對於黏滯性的影響。採此部份本研究採用[16]的結果，黏滯係數修正如下：

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad \text{其中 } \mu_0 = 1.7894 \times 10^{-5}, T_0 = 288.16k$$

其結果速度強度突如圖 6-10 所示。由此圖可以看到，流體的邊界層隨著平板長度的增加逐漸增厚。由此可以得知此部分的結果符合物理現象。

接著是平板底部的壓力分佈圖，如圖 6-14 所示。平板的前緣(leading edge)產生震盪(oscillations)的現象，其發生的原因是因為在此不連續

(noncontinuum) 區域內對其做出連續 (continuum) 的假設所造成，因此，該震盪現象究竟是實際物理現象或是計算上的影響還不清楚。雖然此區域內的物理現象極為複雜，但根據目前的研究卻顯示，此種震盪對於平板前緣後方的物理現象並不重要。

圖 6-17 為平板前緣 (約 $X = 1.2 \times 10^{-6}$) 垂直方向的壓力分佈圖。在此區域內由於極低的密度造成即薄的邊界層。因此當後方流體經過此類似鈍形體 (blunter body) 時，會馬上在平板前緣產生不連續的震波 (shock wave) 效應，使的壓力劇烈升高。

最後，將此結果與[16]的結果做比較，如圖 6-15 與圖 6-17 所示。圖中，黑色實線部份為此文獻之結果，紅色記號為本程式之結果。由此可以看出兩者非常接近，因此確定本程式即使在高馬赫數的情況下，可以得到正確的結果。





	X 方向	Y 方向
網格大小	$\Delta X = 1.5 \times 10^{-7}$	$\Delta Y = 1.1 \times 10^{-7}$
網格數	70	70
長度	$X = 1.05 \times 10^{-5}$	$Y = 0.77 \times 10^{-5}$

表 6-2 超音速流場計算範圍

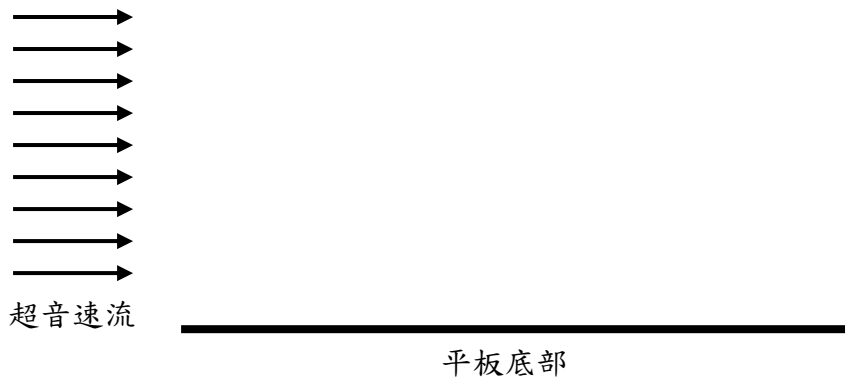


圖 6-12：超音速流場

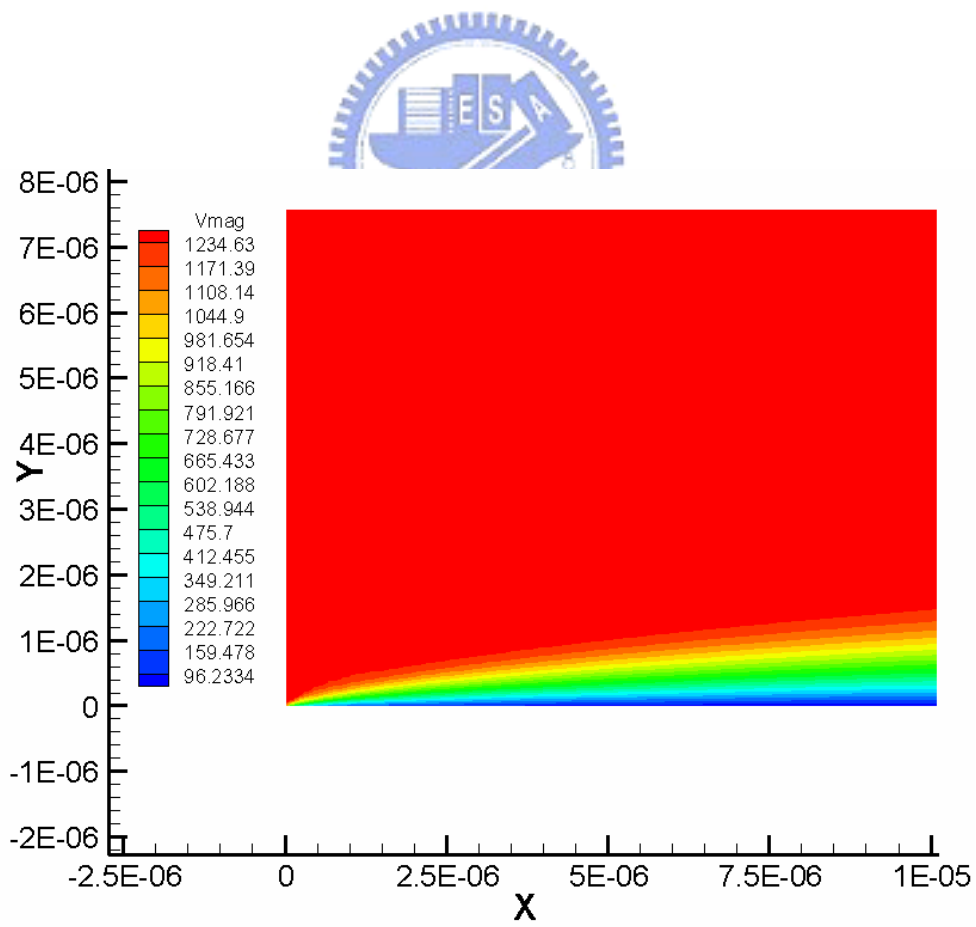


圖 6-13：流場速度場圖

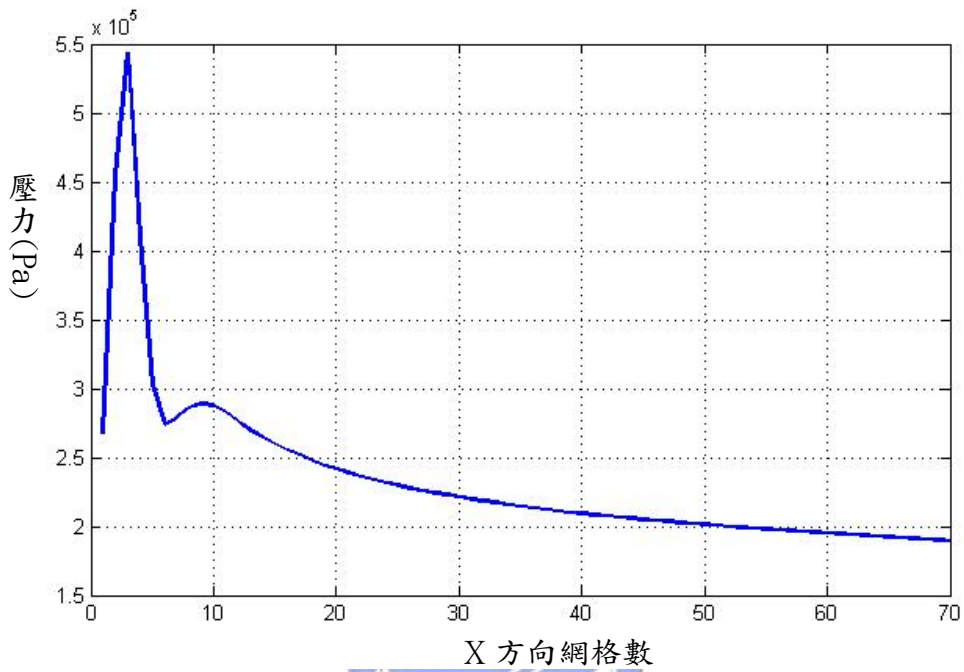


圖 6-14：底板壓力分佈圖

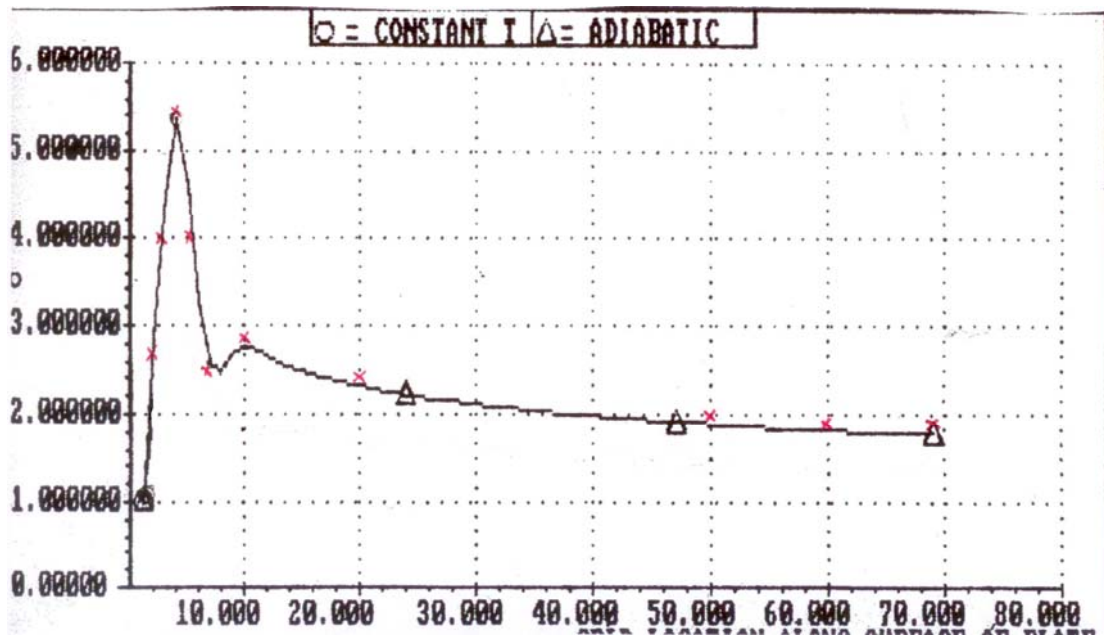


圖 6-15：底板壓力分佈圖[16]

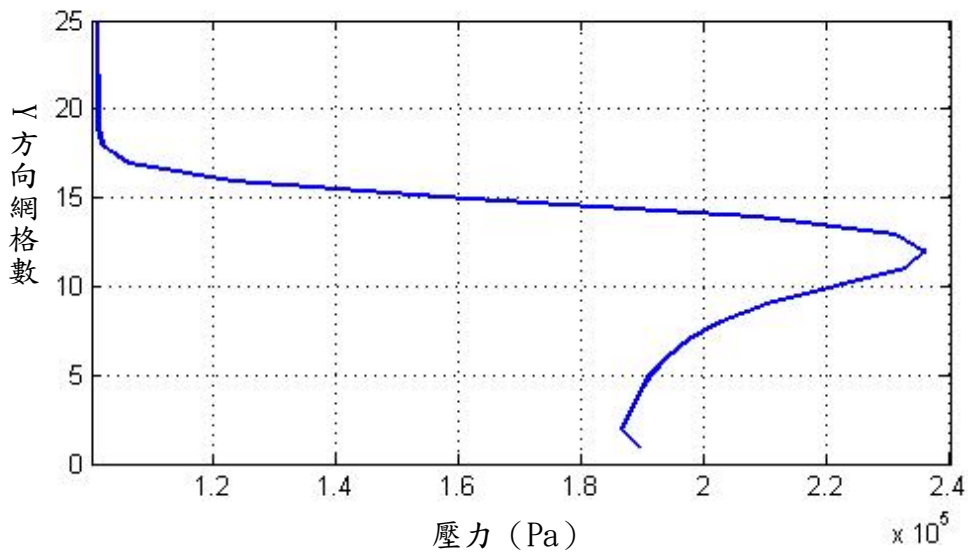


圖 6-16：平板前緣壓力分佈圖

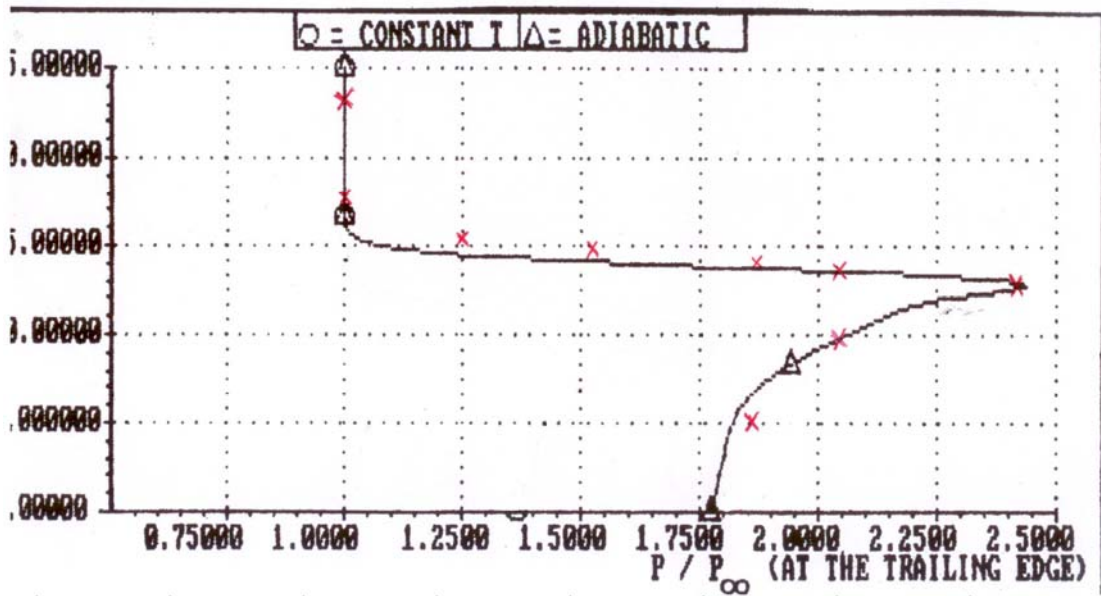


圖 6-17：平板前緣壓力分佈圖[16]

6.3 紊流背階流場：

再實際的物理現象中，流體現象以紊流為大部分。為了提高程式的應用範圍，因此在程式中加入紊流模式中的 LES 模組，採用背階流場來驗證其精確度。

圖 6-18 為背階物理模式圖，圖 6-19 與圖 6-20 為背階附近的網格分佈圖。接著定義背階高速為 H ，管道總長度約為 $16.7H$ ，高度為 $2.5H$ 。

由於流場為低速可壓縮流，因此流體進口速度為 4.12 m/s ，雷諾數 38000 為紊流。邊界條件如下：

入口條件：速度 = 4.12 m/s (雷諾數 38000)

密度 = 大氣空氣密度

出口條件：壓力 = 1 大氣壓

固體邊界：速度 = 0

壓力與密度為 Neumann 條件

其詳細計算範圍如下表 6-3 所示。

圖 6-22 至圖 6-24 分別為時間 $t=0.05$ 秒、 $t=0.5$ 秒與 $t=2.5$ 秒的瞬時速度圖。在圖 6-22 中，由於流體速度變化未傳遞至出口，因此只有在前端的背階部分速度有變化。其中，在未到背階部分的流體速度大約為 4 m/s 左右，進入背階之後，由於管道有擴張的效果，為了符合連續方程式，因此流體速度遽降至 2 m/s 左右。在圖 6-23 中，流體已充滿整個管道，因此可以觀察到一次迴流與二次迴流部分，但由於其為紊流流場，流體速度不斷變化，因此在圖 6-24 中可觀察到一次迴流與二次迴流的位置再度改變。

圖 6-21 為某一瞬時速度圖，在圖中可以看到一次迴流區域與二次迴流區域，以及再接觸點。但是由於是紊流模式，因此整體的流場相當的紊亂。

為了讓流場的物理現象更加明顯，將此流場模擬的最後 900 時階予以平均，可以得到平均速度圖 6-25。由於為時均化的結果，因此其結果將會接近 RANS 的紊流模式。在此圖中，可以明顯的看出一次回流區域與其在接觸點。再接觸點的位置約為 $8H$ 左右。接著在與 Neto 等人於 [17] 的結果作比較，其在接觸點約為

8.1H 左右，與本模擬的結果相當吻合。除此之外，LES 的紊流模式也改善了 $K-\varepsilon$ 模式的缺點。根據[18]的實驗結果，其再接觸點約為 7.8H，而 $K-\varepsilon$ 模式所算出的在接觸點約為 6.2H，與實驗值相差較遠。而本研究 LES 紊流模擬結果約為 8H，與實驗值誤差在 3% 以內。

由上述結果可以得知，本程式即使在低速的紊流流場中，也可計算出相當精確的結果。





	X 方向	Y 方向	Z 方向
網格 大小	$\Delta X = 0.008$	$\Delta Y = 0.008$	$\Delta Z = 0.008$
網格數	200	30	30

表 6-3：背階計算範圍

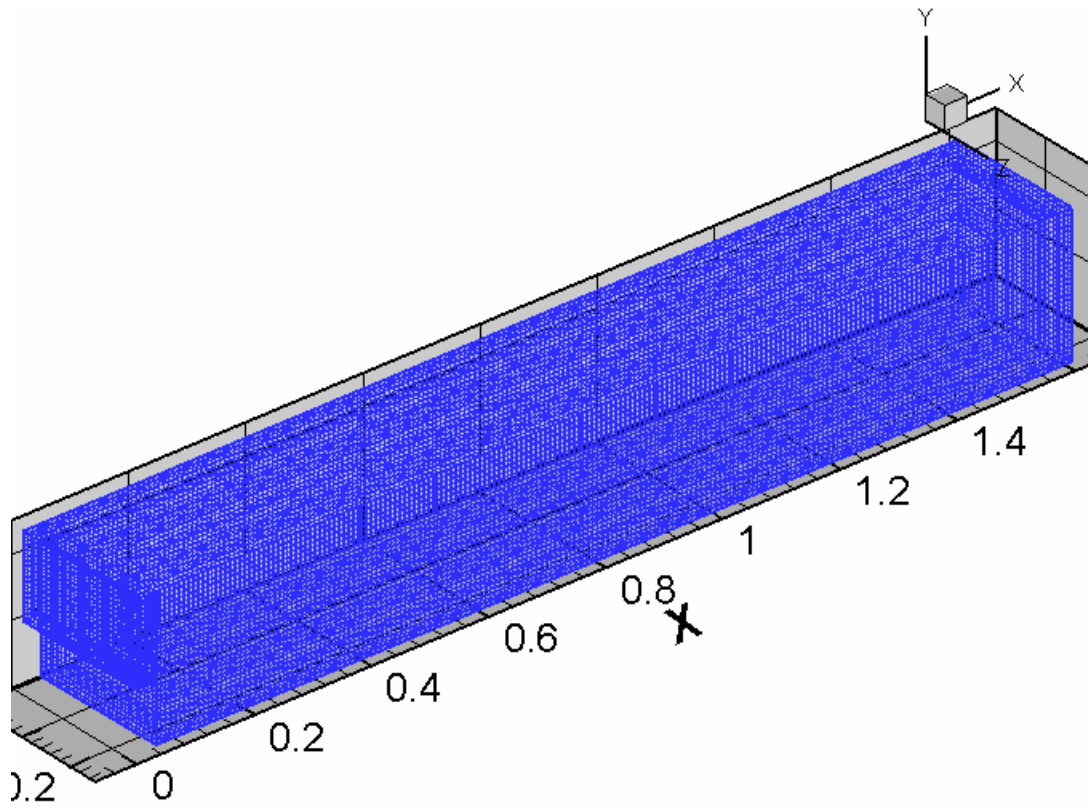


圖 6-18：背階模型圖

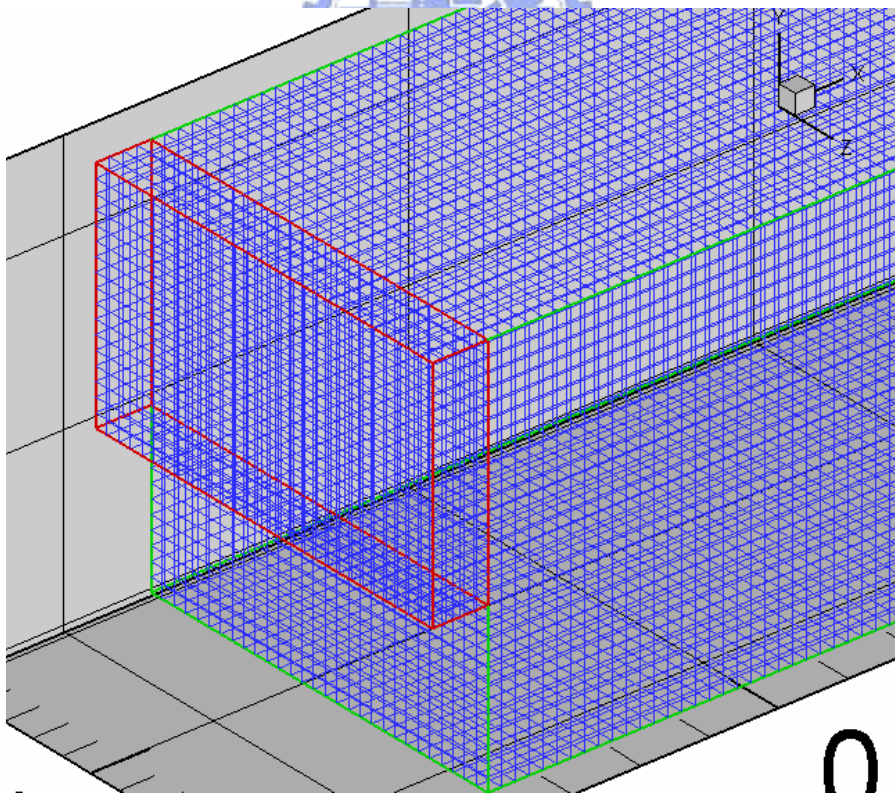


圖 6-19：背階網格圖

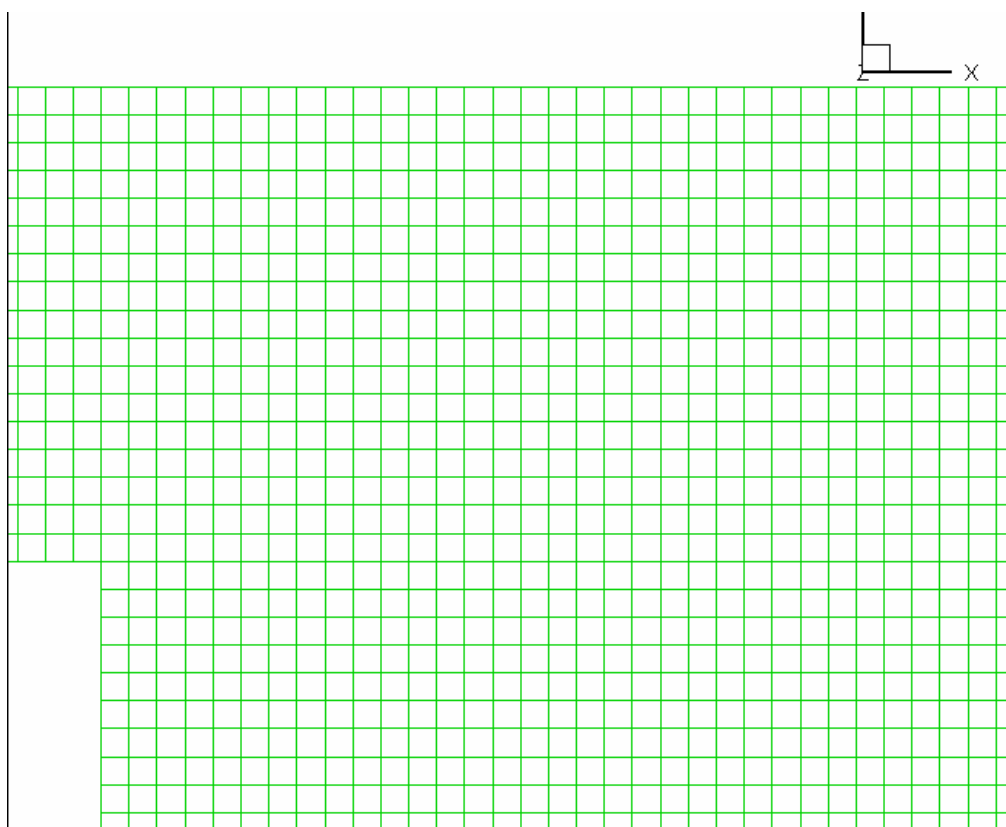


圖 6-20：背階網格圖

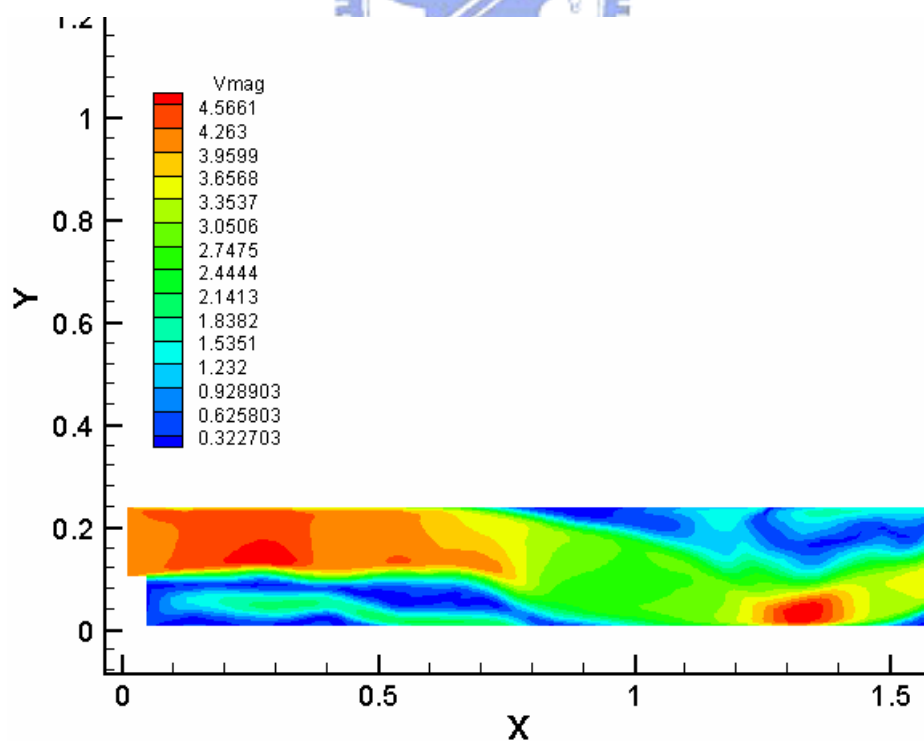


圖 6-21：瞬時速度圖

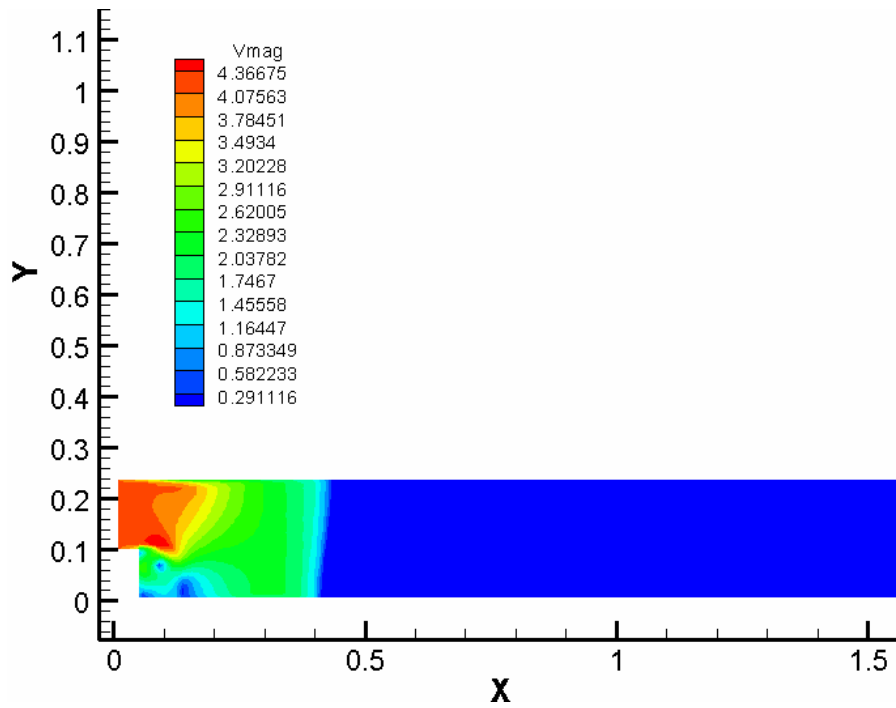


圖 6-22：瞬時速度圖 (t=0.05 秒)

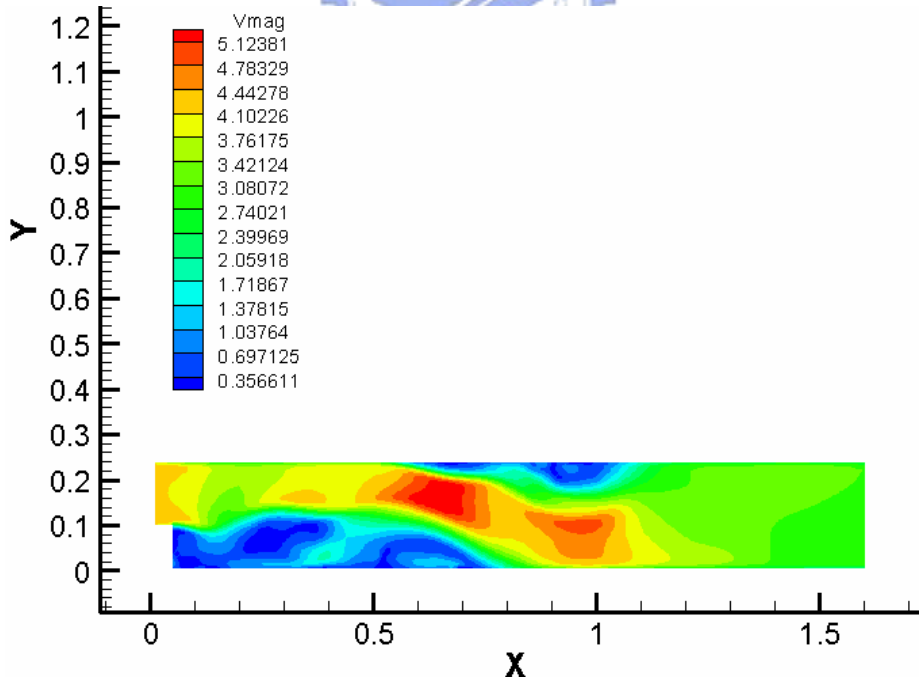


圖 6-23：瞬時速度圖 (t=0.5 秒)

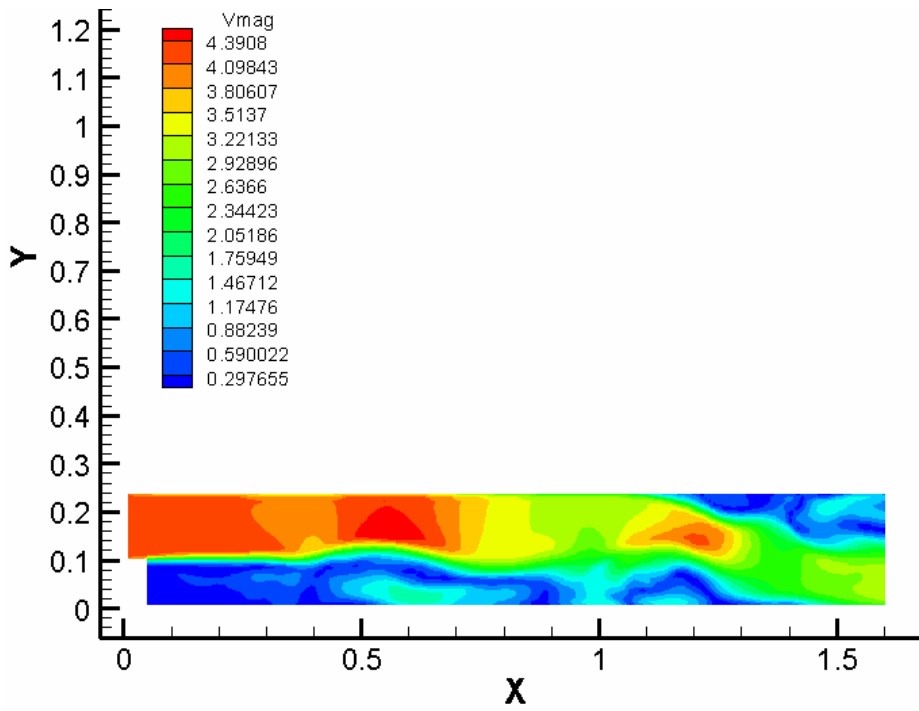


圖 6-24：瞬時速度圖 (t=2.5 秒)

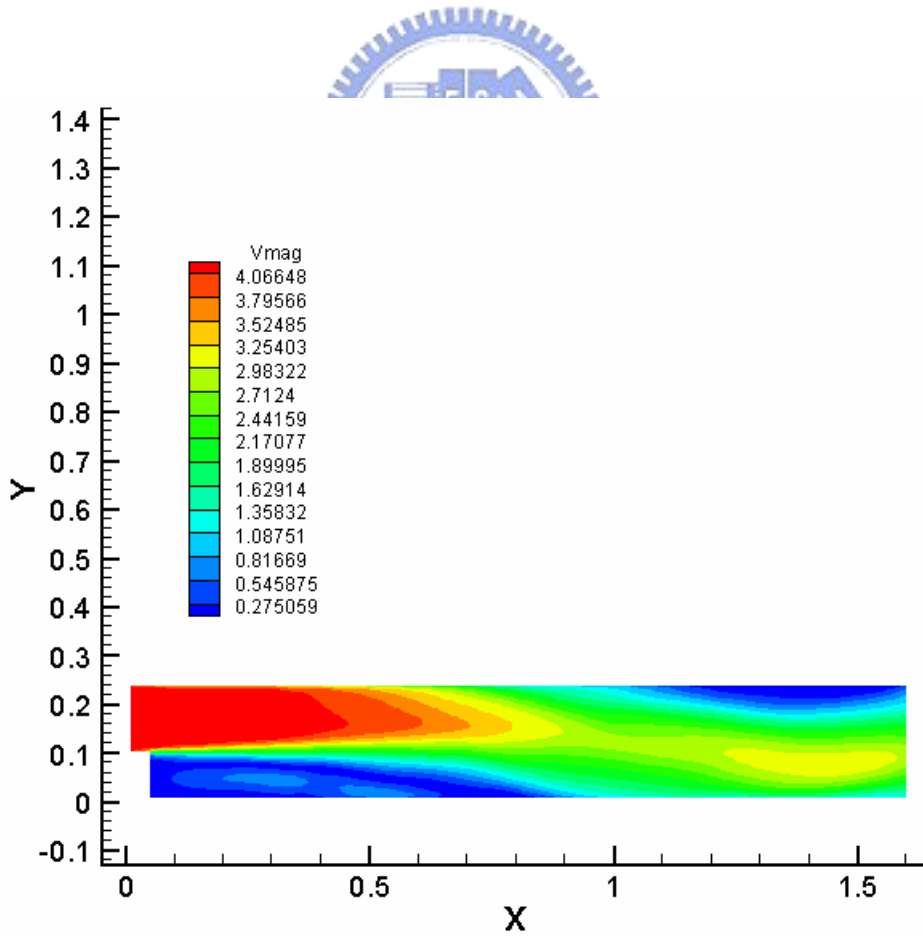


圖 6-25：平均速度圖

第七章 結論

本研究中，成功的將流體問題整合。包含有：

1. 改善過去將流體區分為可壓縮流與不可壓縮流的缺點。
2. 在可壓縮流中加入 preconditioning 方法，讓程式適用於全域流場。
3. 加入 LES 紊流模式，提高程式的應用範圍。

因此程式的應用範圍極廣，包括高速流體、低速流體、黏滯性流體、非黏滯性流體、層流流體與紊流流體，皆可於本程式中計算而得到精確的結果。



參考文獻：

1. M. J. Lighthill, "On sound generation aerodynamically – I. General theory", Proc. Roy. Soc. London, Vol. 211, pp. 564-587, 1952.
2. J. E. Ffowcs Williams, D. L. Hawkings, "Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion", Philos. T. Roy. Soc. Vol. 264, pp.321-342, 1969.
3. E. Z. William, "CLASS THEORETICAL APPROACHES TO COMPUTATIONAL AEROACOUSTIC", Mail Stop 461, NASA Langley Research Center Hampton, Virginia 23681-0001, 1992
4. K. Ohnishi, H. Zhang, T. Tomohiro, H. Kayama, Kamisu-cho, M. Nawa, and N. Taniguchi, "The evidence of the noise analysis technique by LES using general-purpose code FrontFlow", JSFM, Vol. 18, 2004
5. O. Kenji, H. Ryutaro, and F. Tatsuya, "Prediction of wind noise radiated from passenger cars and its evaluation based on auralization", JOURNAL OF wind engineering AND industrial aerodynamics, Vol. 81, pp. 403-419, 1999.
6. P. Jean, and R. Gilles, "Aeroacoustic integral methods, formulations and efficient numerical implementation", Aerosp. Sci. Technol. 5, pp. 457-468, 2001
7. Y. Addad, D. Laurence, C. Talotte, and M.C. Jacob, "Large eddy simulation of a forward-backward facing step for acoustic source identification", International Journal of HEAT AND FLUID FLOW, Vol. 24, pp.562-571, 2003.
8. B. Christophe, B. Christophe and J. Daniel, "Noise computation using Lighthill's equation with inclusion of mean flow-acoustic interaction", AIAA, 7th Aeroacoustics Conference. May, 2001.
9. E. Turkel, "Preconditioned method for solving the incompressible and low speed compressible equations", Journal of Computational Physics, Vol. 72, pp.277-298, 1987.
10. J. W. Deardorff, "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers", J. Fluid Mech. Vol. 41, pp.453, 1970.
11. P. L. Roe, "Approximation Riemann solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes", J. Comput. Phys., Vol. 43, pp.357-372, 1981.
12. E. F. Toro, "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics", Srpinger, 1999.
13. J. M. Weiss and W. A. simth, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows", AIAA Journal, Vol. 33, No. 11, November 1995.
14. A. P. Shishir, V. Sankaran and H. P. Thomas, "Implementation of Preconditioned Dual-Time Procedures in OVERFLOW", AIAA Journal, 2003.

15. B. Dwight , M. Gabriela, M. Gomes and Ronals, D. Henderson,
“Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step”, J. Fluid
Mech, Vol. 473, pp.167-190, 2002.
16. D. Anderson, JR., “Computational Fluid Dynamics THE BASICS WITH
APPLICATIONS”, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, 1995.
17. A. S. Neto, D. Grand, O. Metais, and M. Lesieur, “Large-Eddy Simulation of the
Turbulent Flow in the Downstream Region of a Backward-Facing Step”,
PHYSICAL REVIEW LETTERS, vol. 66, No. 18, 6 May 1991.
18. J. K. Eaton and J. P. Johnston, “Stanford University Report”, No. MD-39, 1980.
19. T. B. Tong, ”A parallel. Finite-Volume Algorithm for Large-Eddy Simulation of
Turbulence Flows”, AIAA, Vol. 37, 1999.
20. I.J. Keshtiban, F. Belblidia and M.F. Webster, “COMPRESSIBLE FLOW
SLOVERS FOR LOW MACH NUMBER FLOWS – a review”, Institute of
Non-Newtonian Fluid Mechanics.
21. J. Dennis, P. Thomas, and B. Pieter , “Recent Enhancements to OVERFLOW”,
AIAA Journal, 1997.
22. Reece E. Neel, G. Andrew, and D. William McGrory, “Low-Speed, Time-Accurate
Validation of GASP Version 4”, AIAA journal, 2005.
23. Y. H. Choi, and C. L. Merkle, “The application of preconditioning in viscous
flows”, Journal of Computational Physics, Vol. 150, No 2, pp.207-223, 1993.
24. 白明憲, 「聲學理論與應用-主動是噪音控制」, 全華科技圖書股份有限公司,
90 年九月.
25. <http://www.kscep.gov.tw/> 高雄縣政府環境保護局
26. <http://www.epa.gov.tw/> 中華民國行政院環境保護署

附錄：

Three dimensional Jacobian :

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (K-1)H - U^2 - C^2 & (3-K)U & -(K-1)V & -(K-1)W & K-1 \\ -UV & V & U & 0 & 0 \\ -UW & W & 0 & U & 0 \\ \frac{1}{2}U[(K-3)H - C^2] & H - (K-1)U^2 & -(K-1)UV & -(K-1)UW & KU \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -UV & V & U & 0 & 0 \\ (K-1)H - V^2 - C^2 & -(K-1)U & (3-K)V & -(K-1)W & K-1 \\ -VW & 0 & W & V & 0 \\ \frac{1}{2}V[(K-3)H - C^2] & -(K-1)UV & H - (K-1)V^2 & -(K-1)VW & KV \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial H}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -UW & W & 0 & U & 0 \\ -VW & 0 & W & V & 0 \\ (K-1)H - W^2 - C^2 & -(K-1)U & -(K-1)V & (3-K)W & K-1 \\ \frac{1}{2}W[(K-3)H - C^2] & -(K-1)UW & -(K-1)VW & H - (K-1)W^2 & KW \end{bmatrix}$$

其中 $H = \frac{C^2}{K-1} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$; C 為聲速

Eigenvalue and Eigenvector of the Jacobian

$$A = KA \times |DA| \times KA^{-1}$$

$$DA = \begin{bmatrix} U-C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U+C \end{bmatrix}$$

$$KA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ U-C & U & 0 & 0 & U+C \\ V & V & 1 & 0 & V \\ W & W & 0 & 1 & W \\ H-UC & \frac{1}{2}VV & V & W & H+UC \end{bmatrix}$$

$$KA^{-1} = \begin{bmatrix} H + \frac{C}{K-1}(U-C) & -(U + \frac{C}{K-1}) & -V & -W & 1 \\ -2H + \frac{4}{K-1}C^2 & 2U & 2V & 2W & -2 \\ -\frac{2VC^2}{K-1} & 0 & \frac{2C^2}{K-1} & 0 & 0 \\ -\frac{2WC^2}{K-1} & 0 & 0 & \frac{2C^2}{K-1} & 0 \\ H - \frac{C}{K-1}(U+C) & -U + \frac{C}{K-1} & -V & -W & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = KB \times |DB| \times KB^{-1}$$

$$DB = \begin{bmatrix} V-C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V+C \end{bmatrix}$$

$$KB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ U & 1 & U & 0 & U \\ V-C & 0 & V & 0 & V+C \\ W & 0 & W & 1 & W \\ H-VC & U & \frac{1}{2}VV & W & H+VC \end{bmatrix}$$

$$KB^{-1} = \begin{bmatrix} H + \frac{C}{K-1}(V-C) & -U & -(V + \frac{C}{K-1}) & -W & 1 \\ -\frac{2UC^2}{K-1} & \frac{2C^2}{K-1} & 0 & 0 & 0 \\ -2H + \frac{4}{K-1}C^2 & 2U & 2V & 2W & -2 \\ -\frac{2WC^2}{K-1} & 0 & 0 & \frac{2C^2}{K-1} & 0 \\ H - \frac{C}{K-1}(V+C) & -U & -V + \frac{C}{K-1} & -W & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = KC \times |DC| \times KC^{-1}$$

$$DC = \begin{bmatrix} W-C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W+C \end{bmatrix}$$

$$KC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ U & 1 & 0 & U & U \\ V & 0 & 1 & V & V \\ W-C & 0 & 0 & W & W+C \\ H-WC & U & V & \frac{1}{2}VV & H+WC \end{bmatrix}$$

$$KC^{-1} = \begin{bmatrix} H + \frac{C}{K-1}(W-C) & -U & -V & -(W + \frac{C}{K-1}) & 1 \\ -\frac{2UC^2}{K-1} & \frac{2C^2}{K-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2VC^2}{K-1} & 0 & \frac{2C^2}{K-1} & 0 & 0 \\ -2H + \frac{4}{K-1}C^2 & 2U & 2V & 2W & -2 \\ H - \frac{C}{K-1}(W+C) & -U & -V & -W + \frac{C}{K-1} & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $VV = U^2 + V^2 + W^2$

Eigenvalue and Eigenvector of Jacobian for preconditioning :

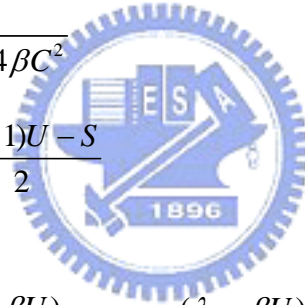
$$|\Gamma^{-1}AM| = KA_p \times |DA_p| \times KA_p^{-1}$$

$$DA_p = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)U+S}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)U-S}{2} \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta = \frac{U_r}{C^2} ; S = \sqrt{U^2(\beta-1)^2 + 4\beta C^2}$$

$$\lambda_4 = \frac{(\beta+1)U+S}{2} ; \lambda_5 = \frac{(\beta+1)U-S}{2}$$



$$KA_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda_5 - \beta U)}{S} & \frac{(\lambda_4 - \beta U)}{S} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho S} & -\frac{1}{\rho S} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-(K-1)(\lambda_5 - \beta U)}{K\rho S} & \frac{(K-1)(\lambda_4 - \beta U)}{K\rho S} \end{bmatrix}$$

$$KA_p^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(K-1)}{K\rho} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \rho(\lambda_4 - \beta U) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho(\lambda_5 - \beta U) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Gamma^{-1}BM| = KB_p \times |DB_p| \times KB_p^{-1}$$

$$DB_p = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)V+S}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)V-S}{2} \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta = \frac{U_r}{C^2} ; S = \sqrt{V^2(\beta-1)^2 + 4\beta C^2}$$

$$\lambda_4 = \frac{(\beta+1)V+S}{2} ; \lambda_5 = \frac{(\beta+1)V-S}{2}$$

$$KB_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda_5 - \beta V)}{S} & \frac{(\lambda_4 - \beta V)}{S} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho S} & -\frac{1}{\rho S} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-(K-1)(\lambda_5 - \beta V)}{K\rho S} & \frac{(K-1)(\lambda_4 - \beta V)}{K\rho S} \end{bmatrix}$$

$$KB_p^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{(K-1)}{K\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho(\lambda_4 - \beta U) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \rho(\lambda_5 - \beta U) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Gamma^{-1}CM| = KC_p \times |DC_p| \times KC_p^{-1}$$

$$DC_p = \begin{bmatrix} W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)W+S}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)W-S}{2} \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta = \frac{U_r}{C^2} ; S = \sqrt{W^2(\beta-1)^2 + 4\beta C^2}$$

$$\lambda_4 = \frac{(\beta+1)W+S}{2} ; \lambda_5 = \frac{(\beta+1)W-S}{2}$$

$$KC_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda_5 - \beta W)}{S} & \frac{(\lambda_4 - \beta W)}{S} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho S} & -\frac{1}{\rho S} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{(K-1)(\lambda_5 - \beta W)}{K\rho S} & \frac{(K-1)(\lambda_4 - \beta W)}{K\rho S} \end{bmatrix}$$

$$KC_p^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K-1)}{K\rho} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \rho(\lambda_4 - \beta U) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \rho(\lambda_5 - \beta U) & 0 \end{bmatrix}$$

Three dimensional Roe average values :

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{C} = \sqrt{(K-1)\left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{V}\tilde{V}\right)}$$

$$\tilde{V}\tilde{V} = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2$$

