

具殘留應力薄膜結構的熱彈聲波波傳

Thermal Acoustic Wave Propagation in Stressed
Thin-film Structures

研究生：張桓禎

Student : Huan-Chen Chang

指導教授：尹慶中 博士

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

國立交通大學

機械工程研究所



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Mechanical Engineering

September 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年九月

具殘留應力薄膜結構的熱彈聲波波傳

研究生：張桓禎

指導教授：尹慶中博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘 要

光聲效應主要應用於量測材料的光學、熱物理性質與微結構的次表面性質。本文根據微體波的聲彈理論，推導層狀介質殘留應力的熱彈聲波理論，模擬薄膜材料的光聲效應。薄膜材料廣泛應用於半導體與光電元件，當薄膜材料的晶格大小與基材不一致，甚或兩者熱膨脹係數相異時，在薄膜上會產生殘留應力。本文推導高斯分佈之強度調制雷射光束照射薄膜結構表面，模擬單晶立方材料承受單軸與雙軸面內殘留應力的光聲效應變化。以數值分析塊材的微體波與熱波之相速度與振幅衰減，兩者的變化均與殘留應力大小呈線性關係。薄膜結構的熱彈性波頻散分析遭遇數值不穩定問題，故以定性方式探討熱彈性藍姆波頻散方程之波數複數根的變化。

關鍵字：光聲效應、熱彈聲波、殘留應力、薄膜結構

Thermal Acoustic Wave Propagation in Stressed Thin-film Structures

Student : Huan-Chen Chang

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

Photoacoustic effect is used to measure optical, thermal physical properties of materials and to characterize the subsurface properties of microstructures. This thesis presents a formulation for thermal acoustic wave propagation in stressed layered media based on the acoustoelasticity for bulk acoustic waves in order to simulate photoacoustic effect of thin-film materials. Thin-film materials are broadly used in many applications of semiconductor and electro-optic devices. Due to misfit between different lattices or distinction of coefficients of thermal expansion of the heterostructures, residual stresses are frequently induced in thin film structures during fabrication. The stressed thin-film structure is insonified by an intensity modulated laser which is modeled as a Gaussian beam. The photoacoustic effects for single crystalline cubic thin-films under in-plane, uniaxial and biaxial stresses are investigated numerically. The azimuthal dependent phase velocities and attenuation factors for bulk acoustic waves and thermal waves are calculated. Variations of both are proportional to the residual stress values. Unfortunately, numerical instability occurred in solving the dispersion of thermal acoustic waves in thin-film structures. Instead, the complex-value roots of the dispersion equation for thermal acoustic Lamb waves were qualitatively discussed.

Keywords: Photoacoustic effect, Thermal acoustic wave, Residual stress,
Thin-film structure



誌 謝

在此論文定稿之際，衷心感謝 尹慶中博士兩年多的殷切指導，引領桓禎完成論文研究。同時感謝金大仁教授及蕭國模教授撥允擔任口試委員，給予學生指正。此外，感謝工研院鄭凱宇及潘善彭學長所提供的幫助，博班學長游泰和、王多聞、許世明、溫子達及李雨青平日給予的建議，學長孫繼增、黃俊傑、蔡德新、許家豪，同學陳俊宏、黃國彰，隔壁實驗室的曾世華、鄭一烈，學弟施文斌、蘇裕為、李振良、揚炘岳的陪伴，讓桓禎碩士班的生涯增色不少，更感謝雙親，張文賢先生與沈秀枝女士，以及胞兄張哲禎的支持，讓桓禎在無後顧之憂下完成碩士學位。



目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iv
目錄	v
圖表目錄	vii
符號表	xi
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 內容簡述	4
第二章 具殘留應力的熱彈聲波理論	6
2.1 熱彈本構方程式	6
2.2 具殘留應力的熱彈本構方程式	7
2.2.1 殘留應力效應	7
2.2.2 座標轉換	10
2.3 具殘留應力的熱彈統御方程式	13
2.3.1 具殘留應力的運動方程式	13
2.3.2 具殘留應力的熵平衡式	15
第三章 光聲效應之波傳理論分析	17
3.1 具殘留應力立方晶體平板的熱彈波頻散方程式	17
3.1.1 克里斯多福方程式	17
3.1.2 頻散方程式	24
3.2 具殘留應力層狀介質之光聲效應	26

第四章 數值分析與討論	30
4.1 熱彈波的波慢與相速度	30
4.2 立方晶體平板頻散方程式之數值模擬	32
第五章 結論與展望	34
5.1 結論	34
5.2 未來展望	34
參考文獻	36
附錄	38



圖表目錄

表 1 鍺的材料常數	40
表 2 矽的材料常數	40
圖 1.1 麥克風和光聲腔體搭配之光聲感測示意圖	41
圖 1.2 雷射和光電位置感測器搭配之光聲感測示意圖	41
圖 1.3 壓電換能器感測光聲效應的示意圖	42
圖 2.1 自然狀態、初始狀態、最終狀態與對應的座標系統	42
圖 2.2 以初始座標為觀察座標描述預變形材料的動態擾動	43
圖 3.1 晶格不匹配產生薄膜壓應力	43
圖 3.2 單層立方晶體平板及參考座標	44
圖 3.3 對稱與反對稱模態示意圖	44
圖 3.4 N 層半無限域材料及上邊界之高斯分布熱源	45
圖 3.5 單晶矽鍺薄膜結構，參考座標與材料主軸重合	45
圖 4.1 鍺的徹體波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	46
圖 4.2 鍺的徹體波波慢，實線代表未受應力，虛線代表	
$\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	46
圖 4.3 鍺的熱波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	47
圖 4.4 鍺的熱波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	47
圖 4.5 鍺的徹體波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
$\sigma_2 = -5GPa$	48
圖 4.6 鍺的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	48
圖 4.7 鍺的徹體波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
$\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	49
圖 4.8 鍺的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
$\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	49

圖 4.9	銻[010]方向微體波的波慢與殘留壓應力關係圖	50
圖 4.10	銻[010]方向熱波的波慢與殘留壓應力關係圖	50
圖 4.11	銻的微體波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	51
圖 4.12	銻的微體波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	51
圖 4.13	銻的熱波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	52
圖 4.14	銻的熱波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	52
圖 4.15	銻[010]方向的微體波相速度與殘留壓應力關係圖	53
圖 4.16	銻[010]方向的熱波相速度與殘留壓應力關係圖	53
圖 4.17	銻的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	54
圖 4.18	銻的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$	54
圖 4.19	銻的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	55
圖 4.20	銻的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	55
圖 4.21	矽的微體波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	56
圖 4.22	矽的微體波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	56
圖 4.23	矽的熱波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	57
圖 4.24	矽的熱波波慢，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	57
圖 4.25	矽的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	58
圖 4.26	矽的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	58

圖 4.27	矽的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	59
圖 4.28	矽的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	59
圖 4.29	矽[010]方向的微體波波慢與殘留拉應力關係圖	60
圖 4.30	矽[010]方向的熱波波慢與殘留拉應力關係圖	60
圖 4.31	矽的微體波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	61
圖 4.32	矽的微體波相速度，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	61
圖 4.33	矽的熱波相速度，實線代表未受應力，虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$	62
圖 4.34	矽的熱波相速度，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	62
圖 4.35	矽的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_2 = 5GPa$	63
圖 4.36	矽的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_2 = 5GPa$	63
圖 4.37	矽的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，	
	虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	64
圖 4.38	矽的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，虛線代表	
	$\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	64
圖 4.39	矽[010]方向的微體波相速度與殘留拉應力關係圖	65
圖 4.40	矽[010]方向的熱波相速度與殘留拉應力關係圖	65
圖 4.41	鍺受單軸及雙軸壓應力的熱波衰減值	66
圖 4.42	矽受單軸及雙軸拉應力的熱波衰減值	66
圖 4.43	鍺平板[110]波傳方向的 $ Q^S $ 對波數、衰減值的變化	67
圖 4.44	鍺平板在頻率為 1.6MHz 時， $ Q^S $ 對波數、衰減值的關係變化	69

圖 4.45	同圖 4.44，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	69
圖 4.46	鋳平板在頻率為 1.6MHz 時， $ Q^A $ 對波數、衰減值的變化	70
圖 4.47	同圖 4.46，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$	70
圖 4.48	矽平板在頻率為 1.6MHz 時， $ Q^S $ 對波數、衰減值的變化	71
圖 4.49	同圖 4.48，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	71
圖 4.50	矽平板在頻率為 1.6MHz 時， $ Q^A $ 對波數、衰減值的變化	72
圖 4.51	同圖 4.50，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$	72



符號表

$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$	應力張量
ρ	質量密度
ρ^i	初始狀態的質量密度
u_β	位移張量
q_α	熱通量
θ_r	參考溫度
$\tilde{\eta}$	熵
t	時間
$E_{\alpha\beta}$	應變張量
$K_{\alpha\beta}$	熱傳導係數
θ	溫度
G	吉布士電能函數
$c_{\alpha\beta\gamma\delta}$	二階彈性常數
$c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$	三階彈性常數
$\mu_{\alpha\beta}$	熱模數
$\alpha_{\gamma\delta}$	熱膨脹係數張量
$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$	熱彈耦合高階常數
$\nu_{\alpha\beta}$	熱彈耦合高階常數
C_e	固定應變下的比熱
ϵ_1	熱能常數
ϵ_2	熱能的高階常數
ξ	自然狀態的位置向量
X	初始狀態的位置向量



x	最終狀態的位置向量
$\sigma_{\alpha\beta}$	應力增量
$\sigma_{\alpha\beta}^i$	初始狀態應力
$\sigma_{\alpha\beta}^f$	最終狀態應力
η	熵增量
η^i	初始狀態熵
η^f	最終狀態熵
$E_{\alpha\beta}$	應變增量
$E_{\alpha\beta}^i$	初始狀態應變
$E_{\alpha\beta}^f$	最終狀態應變
u_{β}	位移增量
u_{β}^i	初始位移
u_{β}^f	最終位移
θ	溫度增量
θ^i	初始狀態溫度
θ^f	最終狀態溫度
$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$	permutation symbol
η	基於初始座標之熵增量
\bar{C}_{IJKL}	有效彈性常數
$\bar{\mu}_{IJ}$	有效熱模數
\bar{C}_e	有效熱容量
$\bar{\sigma}_{KJ}^i$	柯西應力
ε^i	初始體積變化率



σ_{IJ}^T	熱應力
k_i	X_i ($i=1,2$) 方向上的波數
ζ	X_3 方向上的波數
ω	角頻率
s_i	X_i ($i=1,2$) 方向上的波慢
ς	X_3 方向上的波慢
U_J	X_J ($J=1,2$) 方向位移偏振的振幅分量
Θ	熱波振幅



第一章 緒論

1.1 研究背景

薄膜材料具有電、磁和光等方面的特殊性質，近年來，被廣泛的應用在許多不同的領域，尤其在超大型積體電路(VLSI)和微機電(MEMS)製程裡，薄膜材料更是一大關鍵。以薄膜材料成長或沉積的方式而言，如熱氧化(thermal oxidation)、化學氣相沉積(chemical vapor deposition, CVD)、濺鍍(sputtering)、蒸鍍(evaporation)等，都會使基材表面的薄膜產生殘留應力，對半導體、微機電製程而言，殘留應力的存在容易造成薄膜元件的變形、並減損壽命及強度。但殘留應力的存在並非完全只有負面的影響，有時反而是個有利因素，如珠擊法(shot peening)，將機械元件的表面利用珠粒(如鋼珠)高速噴擊，使它的表面受衝擊力，而造成塑性變形產生殘留壓應力，使表面能夠承受較大的拉伸應力，並有效抑制表面的裂紋成長，增加機械元件的疲勞強度。對於表面聲波(surface acoustic wave, SAW)元件而言，如果在元件內部加上殘留拉應力，能使元件的彈性常數增加，增強剛性，提高表面聲波頻率，可應用於高頻的射頻(radio frequency, RF)元件上。為了探究殘留應力對工業產品的影響，亟需可靠與有效的殘留應力量測方法。

過去二十多年中，光聲效應被歐、美、蘇等國家研究發掘出潛力。光聲顯微鏡(photoacoustic microscopy, PAM)是基於固體的光聲效應，材料受到光線照射時，吸收光能而受激發，然後通過非輻射的消除激發過程，使吸收的光能全部或部分地轉變為熱能。如果照射的光束的強度先經過週期性的調制(modulation)，在材料內部就會產生週期性的溫度變化。溫度變化使材料熱脹冷縮，內部的應力和應變也會產生週期性變化，產生週期性的熱彈性(thermoelastic)變形。若利用感測器將熱彈性變形轉換為電子訊號，其頻率與光的調制頻率相同，強度和相位則由材料本身的光學、熱學、彈

性特性及樣品的幾何形狀決定。透過鎖相(lock-in)技術可以獲得微弱的時諧電子訊號之強度和相位訊息，藉以分析出材料內部的物理性質。光聲顯微鏡技術的研究主要針對各種金屬、陶瓷、塑膠材料內部的熱物理性質以及表面或次表面的微細結構，對於應力相關的研究卻寥寥無幾。若能將光聲法拓展至量測材料內部的殘留應力，對於半導體、微機電製程等的改良，將會是一個有利的工具。

1.2 文獻回顧

光聲成像技術若依偵測樣品熱彈效應的型式區分，可以分為接觸式及非接觸式量測。非接觸式量測方式有兩種，參考圖 1.1 所示，以麥克風作為感測器，量測在光聲腔體(photoacoustic cell)內試片的光聲效應；另一如圖 1.2 所示，雷射和光電位置感測器(position sensitive detector, PSD)搭配的方式來偵測表面變形。接觸式則是以壓電換能器(piezoelectric transducer)來偵測熱彈性變形，如圖 1.3 所示。本研究模擬非接觸式偵測光聲效應，因此不考慮感測器造成的影響。

1880 年，Bell [1]研究光聲電話(photophone)，首先發現固體的光聲效應，他將固體密封於硒晶光聲腔體(selenium cell)裡，利用聚焦太陽光間斷的照射在光聲盒中的樣品，通過一個連接到光聲腔體上的聽筒聽到了某種聲響。1881 年，他又和 Tyndall 和 Röntgen 相繼發現氣體和液體也有光聲效應，進一步發現光聲訊號強度決定於物質對光的吸收率。

1976 年，Rosencwaing 和 Gersho [2]利用調制光束照射透明及非透明固體，推導在光聲腔體內垂直樣品表面一維壓力變化的光聲效應方程式，光聲腔體假設為絕熱。計算的結果顯示改變光束的調制頻率可變化熱擴散長度，光聲訊號的強度與光吸收係數、熱擴散長度成正比。

2001 年，Wang *et al* [3]依據 Rosencwaing 和 Gersho[2]的理論，以實驗

量測矽晶圓(SiO_2)基材和基材上鎳薄膜的熱擴散係數，無論試片的表面性質為粗糙或光滑，由光聲訊號的強度變化，皆能成功量測出基材的熱擴散係數，且與理論值相近。

1974 年，Mindlin [4]曾分析線性範圍內的熱壓電晶體平板之位移、電壓與溫度變化，以吉布士自由能(Gibbs free energy)推導熱壓電晶體本構方程式，再推導出熱壓電晶體板的振動方程式。在 2002 年，Altay 和 Dökmeçi [5-6]進一步將 Mindlin 熱壓電方程式中的位移高階項，分別應用於一維熱壓電桿及二維熱壓電薄殼的振動理論推導。

1967 年，Lord 和 Shulman [7]研究動態熱彈理論(dynamical theory of thermoelasticity)，發現在分析動態熱彈現象時，熱傳方程式若只考慮古典的傅立葉熱傳導(Fourier law of heat conduction)，波傳速度上會產生誤差。因此考慮非傅立葉(non-Fourier)熱傳導效應，在古典的熱傳導式子裡加入一個熱弛緩時間(thermal relaxation time)做修正。1972 年，Green 和 Lindsay [8]為了減少動態熱彈理論上的誤差，於能量方程式及 Duhamel-Neumann 熱彈性定律中也導入二個熱弛緩時間做修正。

1974 年，Banerjee 和 Pao[9]研究接近絕對零度時，在非等向性固體傳遞的熱彈波(thermoelastic wave)，在熱彈連體理論中，考慮熱聲子弛緩效應(effect of thermal phonon relaxation)，發現熱彈波共有四個波速，其中三個近似於等溫絕熱條件下的彈性波，另一個則為熱波(thermal wave)，表示固體內的溫度擾動。

2001 年，Wang 和 Xu [10]依據 Lord-Shulman[7]的動態熱彈理論，研究脈衝雷射照射固體產生的熱彈波(thermoelastic wave)，以數值模擬不同脈衝時間的雷射生成熱彈波的差異，並比較傅立葉與非傅立葉熱傳導的影響，結果顯示，考慮非傅立葉熱傳導效應，固體的表面溫度更高，而彈性波強度較弱，但脈衝雷射時間須在幾十皮秒(ps)、甚至是幾十飛秒(fs)的情況下，

非傅立葉熱傳導對結果才會有較顯著的影響。目前研究非傅立葉熱傳效應的領域，主要都是圍繞在低溫凝態物質或是短脈衝加熱的情況，對光聲效應而言，加熱時間遠長於幾十皮秒的短脈衝雷射，因此非傅立葉熱傳效應的影響十分有限。

2002 年和 2006 年，Verma [11-12]利用 Lord-Shulman[7]的非傅立葉熱傳效應，分別推導非等向性層狀結構之熱彈理論，探討層狀結構的縱波、熱波波速與熱弛緩時間的關係，發現不論是採用熱彈耦合理論或古典理論，剪力波皆不受熱變化的影響。

2005 年，Singh [13]根據 Lord-Shulman[7]與 Green-Lindsay[8]的熱彈理論做基礎，分別推導固體等向性材料的二維熱彈方程式，探討平面波反射係數與熱能、擴散參數之間的關係。

1984-1985 年，Pao *et al* [14]及 Pao 與 Gamer [15]依據物體受力狀態，描述具殘留應力之物理模型，建立殘留應力的聲彈理論(acoustoelasticity)。發現在軸向對稱的介質中，由於初始應變的影響，造成剪力波產生雙折射現象，且兩剪力波的波速差與兩應力主軸的應力差有關。

2000 年，Osetrov *et al* [16]依據 Pao *et al* [14]建立之微體波聲彈理論，以傳遞矩陣法(transfer-matrix method)計算矽鍺薄膜結構殘留應力的聲彈效應，模擬在[100]及[110]方向傳遞的拉芙波(Love wave)相速度與殘留應力之間的關係。

1.3 內容簡述

本研究以熱彈耦合理論(theory of coupled thermoelasticity)探討光聲效應的生成機制，並分析具殘留應力的薄膜材料對光聲效應之影響。內容共分四章。

第二章介紹具殘留應力的熱彈耦合理論，先以 Mindlin [4]的熱壓電吉

布士自由能做基礎，忽略電性部分，推導熱彈本構方程式。繼而參考 Pao 和 Gamer [14]的殘留應力量彈理論，將熱彈模型依受力情形區分為自然狀態、初始狀態與最終狀態不同狀態討論，座標系統也以相同方式區分，透過座標轉換導出預殘留應力量之熱彈本構方程式。

第三章考慮以 Lagrangian 座標表示的運動方程式及熵平衡(balance of entropy)方程式，將預殘留應力量之熱彈本構方程式代入，推導出具殘留應力量的熱彈統御方程式，參考 Verma [10-11]將位移及溫度變化假設為時諧行進波(time-harmonic traveling wave)。此外，將調制雷射光假設為時諧之高斯能束(Gaussian beam)照射於試片表面上，以層狀介質之波傳理論來進行分析。

第四章為本研究的模擬結果與討論，而第五章為本文的結論與展望。



第二章 具殘留應力的熱彈聲波理論

光聲效應是調制雷射光照射試體，試體吸收調制雷射的輻射熱後，部分熱能引起體積熱膨脹產生熱彈聲波，其餘則由試體吸收產生溫度變化，若以感測訊號作區分，前者為交流(AC)訊號，後者為直流(DC)訊號。本章將以熱彈耦合理論為基礎探討光聲效應，並以 Pao *et al* [14]及 Pao 與 Gamer [15]的方法為經緯，進一步推導具殘留應力的熱彈聲波理論。

2.1 熱彈本構方程式

在熱彈耦合理論中，應力、位移、熵及溫度之間存有相互作用，彈性與熱的散度方程式(divergence equations)[17]表示為

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} = \rho \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial \xi_{\alpha}} = -\theta_r \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad (2.1)$$

其中 $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ 為應力張量， ρ 為質量密度， u_{β} 為位移張量， q_{α} 為熱通量(heat flux)， θ_r 為參考溫度， $\tilde{\eta}$ 為熵(entropy)， t 為時間。彈性與熱的梯度方程式(gradient equations)[17]表示為

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} \right), \quad q_{\alpha} = -K_{\alpha\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{\beta}} \quad (2.2)$$

其中前者代表應變張量 $E_{\alpha\beta}$ 的定義，後者為傅立葉熱傳導方程式， $K_{\alpha\beta}$ 為熱傳導係數， θ 表示溫度。熱彈本構方程式與吉布士電能函數的關係為

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial G}{\partial E_{\alpha\beta}}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (2.3)$$

其中 G 為吉布士電能函數，考慮熱與彈性耦合，表示如下：

$$G = \frac{1}{2!} c_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + \frac{1}{3!} c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} E_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{2!} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} \theta - \mu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \theta - \frac{1}{2!} \nu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \theta^2 - \frac{1}{2!} \epsilon_1 \theta^2 - \frac{1}{3!} \epsilon_2 \theta^3 \quad (2.4)$$

其中 $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 為二階彈性常數， $c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$ 為三階彈性常數 (third-order elastic constants)， $\mu_{\alpha\beta}$ 為熱模數 (thermal moduli)， $\mu_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}\alpha_{\gamma\delta}$ ， $\alpha_{\gamma\delta}$ 為熱膨脹係數張量 (thermal expansion tensor)， $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 為應變二次與溫度一次的高階熱彈耦合常數， $\nu_{\alpha\beta}$ 為應變一次與溫度二次的高階熱彈耦合常數， $\epsilon_1 = \rho C_e / \theta_0$ ， C_e 為固定應變下的比熱 (specific heat at constant strain)， ϵ_2 為熱能的高階常數。將(2.4)代回(2.3)，可得熱彈本構方程式為

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} E_{\gamma\delta} E_{\epsilon\zeta} - \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} \theta - \mu_{\alpha\beta} \theta - \frac{1}{2} \nu_{\alpha\beta} \theta^2 \quad (2.5a)$$

$$\tilde{\eta} = \epsilon_1 \theta + \frac{1}{2} \epsilon_2 \theta^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta} E_{\gamma\delta} + \mu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + \nu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \theta \quad (2.5b)$$

2.2 具殘留應力的熱彈本構方程式

依試體受力情況區分為三種系統狀態，參考圖 2.1 所示，系統在無應力和應變的自然狀態 (natural state)；系統受殘留應力產生預變形的初始狀態 (initial state)，以上標符號 i 表示；以及系統受其他動態擾動的最終狀態 (final state)，以上標符號 f 表示。座標系統採 Eulerian 座標系，依狀態劃分，在自然狀態下為自然座標 (natural coordinates)，以羅馬字母的下標符號 $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ 表示；在初使狀態下為初始座標 (initial coordinates)，以大寫英文字母的下標符號 $I, J, K = 1, 2, 3$ 表示；在最終狀態下則為最終座標 (final coordinates)，以小寫英文字母的下標符號 $i, j, k = 1, 2, 3$ 表示，而 ξ 、 \mathbf{X} 和 \mathbf{x} 分別代表自然狀態、初始狀態、最終狀態的位置向量。

2.2.1 殘留應力效應

探討具殘留應力介質受到微小的擾動，是以初始狀態為基準，觀察最終狀態的變化，先各別考慮系統的初始狀態及最終狀態，由圖 2.1 可知 $\mathbf{u}^i = \mathbf{X} - \xi$ ， $\mathbf{u}^f = \mathbf{x} - \xi$ ，則初始狀態和最終狀態的位置梯度可分別表示為

$$\frac{\partial X_J}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{J\alpha} + \frac{\partial u_J^i}{\partial \xi_\alpha} \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{j\alpha} + \frac{\partial u_j^f}{\partial \xi_\alpha} \quad (2.6b)$$

其中 $\delta_{j\alpha}$ 為 Kronecker delta。根據 Lagrangian 應變的定義，初始應變和最終應變可表示為

$$E_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial X_J}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.7a)$$

$$E_{\alpha\beta}^f = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_j}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.7b)$$

由(2.6)和(2.7)，可將初始和最終應變以位移梯度(displacement gradient)表示為

$$E_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} + \delta_{\alpha\delta} u_{\gamma,\beta}^i) u_{\gamma,\delta}^i \quad (2.8a)$$

$$E_{\alpha\beta}^f = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} + \delta_{\alpha\delta} u_{\gamma,\beta}^f) u_{\gamma,\delta}^f \quad (2.8b)$$

由(2.5a)，初始狀態和最終狀態的應力分別為

$$\sigma_{\alpha\beta}^i = c_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^i + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} E_{\gamma\delta}^i E_{\epsilon\zeta}^i - \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^i \theta^i - \mu_{\alpha\beta} \theta^i - \frac{1}{2} \nu_{\alpha\beta} \theta^{i2} \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^f = c_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^f + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} E_{\gamma\delta}^f E_{\epsilon\zeta}^f - \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^f \theta^f - \mu_{\alpha\beta} \theta^f - \frac{1}{2} \nu_{\alpha\beta} \theta^{f2} \quad (2.9b)$$

由(2.5b)，初始狀態和最終狀態的熵分別為

$$\eta^i = \epsilon_1 \theta^i + \frac{1}{2} \epsilon_2 \theta^{i2} + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta}^i E_{\gamma\delta}^i + \mu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^i + \nu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^i \theta^i \quad (2.10a)$$

$$\eta^f = \epsilon_1 \theta^f + \frac{1}{2} \epsilon_2 \theta^{f2} + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta}^f E_{\gamma\delta}^f + \mu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^f + \nu_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}^f \theta^f \quad (2.10b)$$

由初始狀態觀察最終狀態的動態擾動，所觀察的相對位移稱為位移增量(incremental displacement)，表示如下：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^f - \mathbf{u}^i \quad (2.11)$$

相對的溫度則稱為溫度增量(incremental temperature)，表示為

$$\theta = \theta^f - \theta^i \quad (2.12)$$

相對的應變稱為應變增量(incremental strains)，表示為

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^f - E_{\alpha\beta}^i \quad (2.13)$$

將(2.8)和(2.11)代入(2.13)，考慮微小變形($u \ll u^i$)，忽略位移增量的高次乘積項($u_{\alpha,\beta}u_{\gamma,\delta} \approx 0$)，可將應變增量以位移梯度表示為

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta} + \delta_{\alpha\delta}u_{\gamma,\beta} + \delta_{\alpha\delta}u_{\gamma,\beta}^i + \delta_{\beta\delta}u_{\gamma,\alpha}^i)u_{\gamma,\delta} \quad (2.14)$$

相對的應力變化稱為應力增量(incremental stresses)，表示為

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^f - \sigma_{\alpha\beta}^i \quad (2.15)$$

由(2.9)及(2.12)~(2.15)，可將應力增量改以位移梯度表示如下：

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} = & c_{\alpha\beta\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda} + c_{\alpha\beta\gamma\lambda}u_{\kappa,\gamma}^i u_{\kappa,\lambda} + c_{\alpha\beta\kappa\lambda\mu\nu}u_{\kappa,\lambda}u_{\mu,\nu}^i - \lambda_{\alpha\beta\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda}\theta^i \\ & - \lambda_{\alpha\beta\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda}^i\theta - \mu_{\alpha\beta}\theta - \nu_{\alpha\beta}\theta\theta^i \end{aligned} \quad (2.16)$$

同理，相對的熵變化稱為熵增量(incremental entropy)，表示為

$$\eta = \eta^f - \eta^i \quad (2.17)$$

由(2.10)~(2.14)及(2.17)，可將熵增量改以位移梯度表示如下：

$$\begin{aligned} \eta = & \epsilon_1\theta + \epsilon_2\theta\theta^i + \lambda_{\kappa\lambda\mu\nu}u_{\kappa,\lambda}u_{\mu,\nu}^i + \mu_{\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda} + \mu_{\lambda\beta}u_{\kappa,\beta}^i u_{\kappa,\lambda} \\ & + \nu_{\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda}\theta^i + \nu_{\kappa\lambda}u_{\kappa,\lambda}^i\theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.16)與(2.18)合稱為殘留應力的熱彈本構方程式(基於自然座標)，經化簡表示為

$$\sigma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}^o u_{\gamma,\delta} - \mu_{\alpha\beta}^o \theta \quad (2.19a)$$

$$\eta = \mu_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} + \epsilon^* \theta \quad (2.19b)$$

其中各項係數為

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta}^o = c_{\alpha\beta\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\lambda\delta} u_{\gamma,\lambda}^i + c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} u_{\epsilon,\zeta}^i - \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^i \quad (2.20a)$$

$$\mu_{\alpha\beta}^o = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i + \mu_{\alpha\beta} + \nu_{\alpha\beta} \theta^i \quad (2.20b)$$

$$\mu_{\alpha\beta}^* = \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^i + \mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\nu} u_{\alpha,\nu}^i + \nu_{\alpha\beta} \theta^i \quad (2.20c)$$

$$\epsilon^* = \epsilon_1 + \epsilon_2 \theta^i + \nu_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^i \quad (2.20d)$$

2.2.2 座標轉換

參考圖 2.2 所示，偵測預變形材料的動態擾動是以初始狀態和初始座標為基準。(2.19)雖然是描述初始狀態至最終狀態的變化，卻是以自然座標描述，因此需進行座標轉換，由自然座標轉為初始座標。依據 N 階張量座標轉換之定義

$$\mathfrak{R}_{\underbrace{IJK\dots L}_{N \text{ order}}} = \det\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^{-1} \underbrace{\frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\gamma} \dots \frac{\partial X_L}{\partial \xi_\delta}}_{N \text{ order}} \mathfrak{R}_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\dots\delta}_{N \text{ order}}} \quad (2.21)$$

其中 $\mathfrak{R}_{IJK\dots L}$ 為基於初始座標的 N 階張量， $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}$ 為基於自然座標的 N 階張量。利用(2.21)，可將 2nd Piola-Kirchhoff 應力張量予以進行座標轉換，應力張量屬於 2 階張量，初始座標與自然座標的應力增量關係為

$$\sigma_{IJ} = \det\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^{-1} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

純量屬於 0 階張量，根據(2.21)的張量定義，初始座標與自然座標的熵增量關係為

$$\eta = \det\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^{-1} \eta \quad (2.23)$$

其中 $\det(\partial X/\partial \xi)$ 的定義為

$$\det\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_\gamma} = \epsilon_{IJK} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_3} \quad (2.24)$$

此處 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 與 ϵ_{IJK} 為 permutation symbol。將(2.6a)代入(2.24)，可獲得

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}\right) = 1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2^i}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_3^i}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_2^i}{\partial \xi_2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3^i}{\partial \xi_3} \frac{\partial u_1^i}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1^i}{\partial \xi_1} \frac{\partial u_2^i}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_1^i}{\partial \xi_1} \frac{\partial u_2^i}{\partial \xi_2} \frac{\partial u_3^i}{\partial \xi_3} \quad (2.25)$$

若僅考慮線性部分，忽略初始位移梯度兩次以上乘積項($u_{\alpha,\beta}^i u_{\gamma,\delta}^i \approx 0$)，(2.25)

近似為

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}\right) \approx 1 + \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \quad (2.26)$$

(2.26)中 $\partial u_v^i / \partial \xi_v \ll 1$ ，因此 $\det(\partial \mathbf{X} / \partial \xi)^{-1}$ 近似為

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \quad (2.27)$$

將(2.6a)及(2.27)代回(2.22)及(2.23)，可獲得

$$\sigma_{IJ} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left[\left(1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \right) \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\beta^i}{\partial \xi_\gamma} \sigma_{\alpha\gamma} + \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\delta} \sigma_{\beta\delta} \right] \quad (2.28a)$$

$$\eta = \left(1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \right) \eta \quad (2.28b)$$

根據(2.16)及(2.18)，可將(2.28)改以位移梯度表示

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} & \left[\left(1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \right) (c_{\alpha\beta\gamma\delta} - \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \theta^i) + c_{\alpha\beta\mu\delta} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\mu} + c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \frac{\partial u_\epsilon^i}{\partial \xi_\zeta} \right. \\ & + (c_{\alpha\kappa\gamma\delta} - \lambda_{\alpha\kappa\gamma\delta} \theta^i) \frac{\partial u_\beta^i}{\partial \xi_\kappa} + (c_{\beta\lambda\gamma\delta} - \lambda_{\beta\lambda\gamma\delta} \theta^i) \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\lambda} \left. \right] \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} \\ & - \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left[\left(1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v} \right) (\mu_{\alpha\beta} + \nu_{\alpha\beta} \theta^i) + \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\delta} \right. \\ & \left. + (\mu_{\alpha\kappa} + \nu_{\alpha\kappa} \theta^i) \frac{\partial u_\beta^i}{\partial \xi_\kappa} + (\mu_{\beta\lambda} + \nu_{\beta\lambda} \theta^i) \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\lambda} \right] \theta \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\eta = \left(1 - \frac{\partial u_v^i}{\partial \xi_v}\right) \left[\left(\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\delta} + \mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\nu} \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\nu} + \nu_{\alpha\beta} \theta^i \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} \right. \\ \left. + \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 \theta^i + \nu_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\beta} \right) \theta \right] \quad (2.29b)$$

考慮位移梯度之座標轉換

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \frac{\partial u_I}{\partial \xi_J}, \quad \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\beta} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \frac{\partial u_I^i}{\partial \xi_J} \quad (2.30)$$

根據(2.6a)， $\partial u_I / \partial \xi_J$ 及 $\partial u_I^i / \partial \xi_J$ 可近似為

$$\frac{\partial u_I}{\partial \xi_J} \approx \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_I}{\partial X_M} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_J}, \quad \frac{\partial u_I^i}{\partial \xi_J} \approx \frac{\partial u_I^i}{\partial X_J} + \frac{\partial u_I^i}{\partial X_M} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_J} \quad (2.31)$$

由(2.30)及(2.31)，可獲得

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} \approx \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_I}{\partial X_K} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_J} \right), \quad \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\beta} \approx \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left(\frac{\partial u_I^i}{\partial X_J} + \frac{\partial u_I^i}{\partial X_K} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_J} \right) \quad (2.32b)$$

將(2.32)代回(2.29)，得到初使座標下之具殘留應力的熱彈本構方程式為

$$\sigma_{IJ} = \left(c_{IJKL} - c_{IJKL} \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + c_{IJNL} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_N} + c_{IJKLMN} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_N} \right. \\ \left. + c_{INKL} \frac{\partial u_J^i}{\partial X_N} + c_{NJKL} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_N} + c_{IJKN} \frac{\partial u_L^i}{\partial X_N} - \lambda_{IJKL} \theta^i \right) \frac{\partial u_k}{\partial X_L} \\ - \left(\mu_{IJ} - \mu_{IJ} \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \mu_{IN} \frac{\partial u_J^i}{\partial X_N} + \mu_{NJ} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_N} + \nu_{IJ} \theta^i \right. \\ \left. + \lambda_{IJMN} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_N} \right) \theta \quad (2.33a)$$

$$\eta = \left(\mu_{IJ} + \mu_{IJ} \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \mu_{NJ} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_N} + \mu_{IN} \frac{\partial u_J^i}{\partial X_N} + \nu_{IJ} \theta^i \right. \\ \left. + \lambda_{IJKL} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_L} \right) \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \left(\epsilon_1 + \epsilon_1 \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \epsilon_2 \theta^i + \nu_{IJ} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_J} \right) \theta \quad (2.33b)$$

(2.33)透過化簡表示如下：

$$\sigma_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \frac{\partial u_k}{\partial X_L} - \bar{\mu}_{IJ} \theta \quad (2.34a)$$

$$\eta = \bar{\mu}_{IJ} \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \bar{\epsilon} \theta \quad (2.34b)$$

其中 \bar{C}_{IJKL} 為有效彈性常數(effective elastic constants)

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} = & c_{IJKL} - c_{IJKL} \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + c_{IJNL} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_N} + c_{IJKLMN} \frac{\partial u_M^i}{\partial X_N} + c_{INKL} \frac{\partial u_J^i}{\partial X_N} \\ & + c_{NJKL} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_N} + c_{IJKN} \frac{\partial u_L^i}{\partial X_N} - \lambda_{IJKL} \theta^i \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$\bar{\mu}_{IJ}$ 是有效熱模數(effective thermal moduli)

$$\bar{\mu}_{IJ} = \mu_{IJ} - \mu_{IJ} \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \mu_{IN} \frac{\partial u_J^i}{\partial X_N} + \mu_{NJ} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_N} + \nu_{IJ} \theta^i + \lambda_{IJKL} \frac{\partial u_K^i}{\partial X_L} \quad (2.35b)$$

$\bar{\epsilon} = \frac{\rho \bar{C}_e}{\theta_o^i}$ ，其中 \bar{C}_e 為有效熱容量(effective heat capacity)， $\bar{\epsilon}$ 則可表示為

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_1 \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \epsilon_2 \theta^i - \epsilon_2 \theta^i \frac{\partial u_N^i}{\partial X_N} + \nu_{IJ} \frac{\partial u_I^i}{\partial X_J} \quad (2.35c)$$

2.3 具殘留應力的熱彈統御方程式

熱彈統御方程式由運動方程式及熵平衡式組成。運動方程式描述系統的力平衡，其中包含微體力(body force)，但彈性波位移擾動很小，微體力作功遠小於應變能和動能，因此將微體力忽略不計。熵平衡式中也含有熱源的熵生成(entropy generation)，但熱源僅在試體表面加熱，所以統御方程式中不考慮熱源，而是以邊界條件來考慮。

2.3.1 具殘留應力的運動方程式

同 2.2 節觀念，具殘留應力的運動方程式即是相對於初始狀態及初始座標的運動方程式。由圖 2.1 所示，可知

$$x_J(\mathbf{X}, t) = X_J + u_J(\mathbf{X}, t) \quad (2.36)$$

將(2.36)對初始座標 X_L 偏微分得

$$\frac{\partial x_J}{\partial X_L} = \delta_{JL} + \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \quad (2.37)$$

將(2.36)對時間偏微分兩次，可得初始座標系描述之加速度，

$$\frac{\partial u_J^2(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial x_J^2(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

最終狀態的運動方程式為

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left(\sigma_{KL}^f \frac{\partial x_J}{\partial X_L} \right) = \rho^i \ddot{x}_J \quad (2.39)$$

由(2.36)~(2.39)，可獲得以位移梯度表示之最終狀態運動方程式，

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left(\sigma_{JK}^f + \sigma_{KL}^f \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \right) = \rho^i \ddot{u}_J \quad (2.40)$$

在初始狀態下，殘留應力量屬於靜態平衡，試體呈現靜止狀態，即 $\ddot{X}_J = 0$ ，則初始狀態的運動方程式為

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{KJ}^i}{\partial X_K} = \rho^i \ddot{X}_J = 0 \quad (2.41)$$

其中 $\bar{\sigma}_{KJ}^i$ 為柯西應力(Cauchy stress)張量。考慮相對於初始狀態的運動方程式，將(2.40)減去(2.41)，可獲得

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left(\sigma_{JK}^f - \bar{\sigma}_{JK}^i + \sigma_{KL}^f \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \right) = \rho^i \ddot{u}_J \quad (2.42)$$

基於初始座標的 2nd Piola-Kirchhoff 應力量增量為

$$\sigma_{JK} = \sigma_{JK}^f - \sigma_{JK}^i = \sigma_{JK}^f - \bar{\sigma}_{JK}^i \quad (2.43)$$

(2.43)對初始座標 X_L 偏微分，移項後得

$$\frac{\partial \sigma_{JK}^f}{\partial X_K} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{JK}^i}{\partial X_K} - \frac{\partial \sigma_{JK}}{\partial X_K} \quad (2.44)$$

將(2.43)及(2.44)代回(2.42)，獲得具殘留應力的運動方程式，

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left[\sigma_{JK} + (\bar{\sigma}_{KL}^i + \sigma_{KL}) \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \right] = \rho^i \ddot{u}_J \quad (2.45)$$

由於僅考慮微小擾動， $\sigma_{KL} \ll \sigma_{KL}^i$ ， $u_J \ll u_J^i$ ，因此忽略應力增量和位移增量梯度的乘積項($\sigma_{KL} \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \approx 0$)，則(2.45)具殘留應力的運動方程式可改寫為

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left(\sigma_{JK} + \bar{\sigma}_{KL}^i \frac{\partial u_J}{\partial X_L} \right) = \rho^i \ddot{u}_J \quad (2.46)$$

2.3.2 具殘留應力的熵平衡式

為了描述具殘留應力試體中的熱變化，熵的平衡方程式仍以最終狀態相對於初始狀態來考慮。利用 Lagrangian 表示的熵平衡方程式可寫為

$$\frac{\partial q_I}{\partial X_I} = -\theta_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.47)$$

將傅立葉熱傳導方程式(2.2b)等號兩端對於空間座標一次微分，則

$$\frac{\partial q_I}{\partial X_I} = -K_{IJ} \frac{\partial \theta}{\partial X_I \partial X_J} \quad (2.48)$$

由(2.47)及(2.48)，可獲得

$$\theta_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = K_{IJ} \frac{\partial \theta}{\partial X_I \partial X_J} \quad (2.49)$$

其中 θ_0 是絕對參考溫度，即 $\theta_0 = \theta + \theta_{ref} + 273$ ， θ_{ref} 是周圍環境的攝氏溫度。根據(2.49)，初始狀態的熵平衡方程式表示為

$$\theta_0^i \frac{\partial \eta^i}{\partial t} = K_{IJ} \frac{\partial \theta^i}{\partial X_I \partial X_J} = 0 \quad (2.50)$$

其中 θ_0^i 是絕對初始溫度，即 $\theta_0^i = \theta^i + \theta_{ref} + 273$ 。同理，最終狀態的熵平衡式表示為

$$\theta_0^f \frac{\partial \eta^f}{\partial t} = K_{IJ} \frac{\partial \theta^f}{\partial X_I \partial X_J} \quad (2.51)$$

其中 θ_0^f 是絕對最終溫度，即 $\theta_0^f = \theta^f + \theta_{ref} + 273$ 。考慮相對於初始狀態的熵平衡方程式，將(2.51)減去(2.50)，可獲得具殘留應力的熵平衡方程式，

$$\theta \frac{\partial \eta^i}{\partial t} + (\theta_0^i + \theta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = K_{IJ} \frac{\partial \theta}{\partial X_I \partial X_J} \quad (2.52)$$

因為初始狀態的熵是屬於靜態的($\partial \eta^i / \partial t = 0$)，且初始絕對溫度遠大於溫度增量($\theta_0^i \gg \theta$)，所以 $\theta_0^i + \theta \approx \theta_0^i$ ，則(2.52)具殘留應力的熵平衡式可改寫為

$$\theta_0^i \frac{\partial \eta}{\partial t} = K_{IJ} \frac{\partial \theta}{\partial X_I \partial X_J} \quad (2.53)$$



第三章 光聲效應之波傳理論分析

光聲效應是由週期性的局部加熱生成時諧的熱波(thermal wave)及彈性波，藉由具殘留應力的熱彈統御方程式建立其物理模型，邊界條件考慮試體表面為自由表面，且調制雷射光假設為熱源。考慮試體為薄膜材料，以層狀介質熱彈波傳理論探討薄膜結構殘留應力的光聲效應。

3.1 具殘留應力立方晶體平板的熱彈波頻散方程式

參考圖 3.1 所示，在本文考慮的材料中，矽與鍺皆為立方晶體材料(cubic material)，由於兩種材料的晶格常數不同，造成矽鍺薄膜結構因為異質界面晶格不匹配(lattice misfit)而產生預應力，假設預應力是延材料主軸方向的正向應力，且不具剪應力，依據第二章殘留應力的熱彈耦合理論，可得到材料的有效常數。

本節將以藍姆波的型態，先探討受預應力之單層立方晶體平板的熱彈波波傳，熱性之邊界條件不考慮任何加熱源，求出齊次解(homogeneous solution)和頻散方程式。

3.1.1 克里斯多福方程式

參考圖 3.2 所示，考慮三維物理模型，將具殘留應力的熱彈本構方程式(2.34)代入(2.45)及(2.52)，可將具殘留應力的熱彈統御方程式表示為

$$\frac{\partial}{\partial X_I} \left(\bar{C}_{IJKL} \frac{\partial u_k}{\partial X_L} - \bar{\mu}_{IJ} \theta + \bar{\sigma}_{IK}^i \frac{\partial u_J}{\partial X_K} \right) = \rho^i \ddot{u}_J \quad (3.1a)$$

$$\theta_0^i \left(\bar{\mu}_{IJ} \frac{\partial u_I}{\partial X_J \partial t} + \bar{\epsilon} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = K_{IJ} \frac{\partial \theta}{\partial X_I \partial X_J} \quad (3.1b)$$

考慮(3.1)中各項材料常數，立方晶體材料在自然狀態下的彈性常數為

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

假設試體中的殘留應力為均勻分布之正向應力，且不具剪應力，則初始應力與初始應變的關係可表示為

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^i \\ \bar{\sigma}_{22}^i \\ \bar{\sigma}_{33}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1}^i \\ u_{2,2}^i \\ u_{3,3}^i \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

立方晶體的三階彈性常數共有六個，表示如下：

$$\begin{aligned} c_{123}, \quad c_{456}, \\ c_{111} = c_{222} = c_{333}, \\ c_{144} = c_{255} = c_{366}, \\ c_{112} = c_{223} = c_{133} = c_{113} = c_{122} = c_{233}, \\ c_{166} = c_{155} = c_{244} = c_{344} = c_{266} = c_{355} \end{aligned} \quad (3.4)$$



三階彈性常數具對稱性質，因此

$$c_{IJK} = c_{KIJ} = c_{JKI} \quad (3.5)$$

具殘留應力效應之有效彈性常數可由(2.35a)、(3.2)~(3.5)式計算獲得，若忽略高階熱彈耦合常數($\lambda_{IJ} = 0$)，則有效彈性常數可表示為

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

其中各項展開如下：

$$\bar{C}_{11} = c_{11}(1 - \varepsilon^i) + (4c_{11} + c_{111}) \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + c_{112} \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + c_{112} \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7a)$$

$$\bar{C}_{22} = c_{22}(1 - \varepsilon^i) + c_{112} \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + (4c_{22} + c_{111}) \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + c_{112} \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7b)$$

$$\bar{C}_{33} = c_{33}(1 - \varepsilon^i) + c_{112} \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + c_{112} \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + (4c_{33} + c_{111}) \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7c)$$

$$\bar{C}_{44} = c_{44}(1 - \varepsilon^i) + c_{144} \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + (2c_{44} + c_{166}) \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + (2c_{44} + c_{166}) \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7d)$$

$$\bar{C}_{55} = c_{55}(1 - \varepsilon^i) + (2c_{55} + c_{166}) \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + c_{144} \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + (2c_{55} + c_{166}) \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7e)$$

$$\bar{C}_{66} = c_{66}(1 - \varepsilon^i) + (2c_{66} + c_{166}) \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + (2c_{66} + c_{166}) \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + c_{144} \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7f)$$

$$\bar{C}_{23} = c_{23}(1 - \varepsilon^i) + c_{123} \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + (2c_{23} + c_{112}) \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + (2c_{23} + c_{112}) \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7g)$$

$$\bar{C}_{13} = c_{13}(1 - \varepsilon^i) + (2c_{13} + c_{112}) \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + c_{123} \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + (2c_{13} + c_{112}) \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7h)$$

$$\bar{C}_{12} = c_{12}(1 - \varepsilon^i) + (2c_{12} + c_{112}) \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + (2c_{12} + c_{112}) \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + c_{123} \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.7i)$$

(3.7)中 ε^i 表示初始體積變化率，定義為

$$\varepsilon^i = \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.8)$$

熱彈耦合由熱膨脹引起，以彈性力學觀點而言，熱模數是描述熱應力與溫度變化的關係，

$$\sigma_{IJ}^T = \mu_{IJ} \theta = c_{IJKL} \alpha_{KL} \theta \quad (3.9)$$

其中 σ_{IJ}^T 為熱應力， μ_{IJ} 為自然狀態的熱模數， α_{KL} 為熱膨脹係數(thermal expansion coefficients)。若立方晶體材料受熱後產生等向性(isotropic)的熱膨脹，熱膨脹係數表示為

$$\alpha_{KL} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

依據(2.35b)、(3.9)與(3.10)，忽略應變一次與溫度二次的高階熱彈耦合常數 ($\nu_{IJ} = 0$)，有效熱模數可表示為

$$\bar{\mu}_{IJ} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

其中各項展開如下：

$$\bar{\mu}_{11} = c_{11}\alpha(1 - \varepsilon^i) + 2c_{11}\alpha \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \quad (3.12a)$$

$$\bar{\mu}_{22} = c_{22}\alpha(1 - \varepsilon^i) + 2c_{22}\alpha \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \quad (3.12b)$$

$$\bar{\mu}_{33} = c_{33}\alpha(1 - \varepsilon^i) + 2c_{33}\alpha \frac{\partial u_3^i}{\partial X_3} \quad (3.12c)$$

材料的熱性質描述材料吸收熱能後溫度的變化和分布，依據熱容量的定義，在溫度變化未造成材料相變化(phase transition)的前提下，吸收熱量與溫度變化的關係為

$$Q = \rho C_e \theta \quad (3.13)$$

其中Q為吸收的熱量。根據(2.35c)，並忽略高階常數($\varepsilon_2 = \nu_{IJ} = 0$)，則

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\rho^i \bar{C}_e}{\theta_0^i} = \frac{\rho^i C_e}{\theta_0^i} (1 - u_{N,N}^i) \quad (3.14)$$

材料吸收熱量後溫度的擴散和分布屬於熱傳導性質，參考傅立葉熱傳導方程式(2.2b)，假設立方晶體材料的熱傳導性質屬於等向性，則熱傳導係數表示為

$$K_{IJ} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

在光聲效應的研究中，所使用的熱源是調制雷射，使試體受週期性加熱，並以鎖相技術偵測所引起的溫度變化和熱膨脹，因此考慮位移場和溫度場具時諧因子(time-harmonic factor) $e^{-\omega t}$ ，表示如下：

$$u_J(X_1, X_2, X_3, t) = U_J \exp[i(k_1 X_1 + k_2 X_2 + \zeta X_3 - \omega t)] \quad (3.16a)$$

$$\theta(X_1, X_2, X_3, t) = \Theta \exp[i(k_1 X_1 + k_2 X_2 + \zeta X_3 - \omega t)] \quad (3.16b)$$

其中 k_1 、 k_2 、 ζ 分別為 X_1 、 X_2 、 X_3 方向的波數(wavenumber)，且 $k_1 = \omega s_1$ 、 $k_2 = \omega s_2$ 、 $\zeta = \omega \zeta$ ， s_1 、 s_2 、 ζ 分別為 X_1 、 X_2 、 X_3 方向上的波慢(slowness)， ω 為角頻率(angular frequency)， U_J 為 X_J 方向位移偏振的振幅分量， Θ 為熱波振幅。將各項材料常數(3.6)–(3.11)、(3.14)和(3.15)代入統御方程式(3.1)中，並考慮時諧因子(3.16)，可將統御方程式展開如下：

$$\begin{aligned} \rho^i \omega^2 U_1 = & (\bar{C}_{11} k_1^2 + \bar{C}_{66} k_2^2 + \bar{C}_{55} \zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2) U_1 \\ & + (\bar{C}_{12} k_1 k_2 + \bar{C}_{66} k_1 k_2) U_2 + (\bar{C}_{13} k_1 \zeta + \bar{C}_{55} k_1 \zeta) U_3 + i\bar{\mu}_{11} k_1 \Theta \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \rho^i \omega^2 U_2 = & (\bar{C}_{66} k_1 k_2 + \bar{C}_{21} k_1 k_2) U_1 + (\bar{C}_{66} k_1^2 + \bar{C}_{22} k_2^2 + \bar{C}_{44} \zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 \\ & + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2) U_2 + (\bar{C}_{23} k_2 \zeta + \bar{C}_{44} k_2 \zeta) U_3 + i\bar{\mu}_{22} k_2 \Theta \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$\begin{aligned} \rho^i \omega^2 U_3 = & (\bar{C}_{55} k_1 \zeta + \bar{C}_{31} k_1 \zeta) U_1 + (\bar{C}_{44} k_2 \zeta + \bar{C}_{32} k_2 \zeta) U_2 + (\bar{C}_{55} k_1^2 \\ & + \bar{C}_{44} k_2^2 + \bar{C}_{33} \zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2) U_3 + i\bar{\mu}_{33} \zeta \Theta \end{aligned} \quad (3.17c)$$

$$i\omega \theta_0^i (i\bar{\mu}_{11} k_1 U_1 + i\bar{\mu}_{22} k_2 U_2 + i\bar{\mu}_{33} \zeta U_3 + \bar{\epsilon} \Theta) = K(k_1^2 + k_2^2 + \zeta^2) \Theta \quad (3.17d)$$

將(3.17)式的振幅分量 U_1 、 U_2 、 U_3 和 Θ 提出，可得克里斯多福方程式(Christoeffel equation)如下：

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{23} & \gamma_2 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho^i \omega^2 & \gamma_3 \\ \varphi_1 / i\omega\theta_0^i & \varphi_2 / i\omega\theta_0^i & \varphi_3 / i\omega\theta_0^i & \kappa / i\omega\theta_0^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \Theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

其中對應之矩陣元素如下：

$$\Gamma_{11} = \bar{C}_{11}k_1^2 + \bar{C}_{66}k_2^2 + \bar{C}_{55}\zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2 \quad (3.19a)$$

$$\Gamma_{22} = \bar{C}_{66}k_1^2 + \bar{C}_{22}k_2^2 + \bar{C}_{44}\zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2 \quad (3.19b)$$

$$\Gamma_{33} = \bar{C}_{55}k_1^2 + \bar{C}_{44}k_2^2 + \bar{C}_{33}\zeta^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 + \bar{\sigma}_{33}^i \zeta^2 \quad (3.19c)$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{44})k_2\zeta \quad (3.19d)$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{55})k_1\zeta \quad (3.19e)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bar{C}_{12} + \bar{C}_{66})k_1k_2 \quad (3.19f)$$

$$\frac{\kappa}{i\omega\theta_0^i} = \bar{\epsilon} - \frac{K(k_1^2 + k_2^2 + \zeta^2)}{i\omega\theta_0^i} \quad (3.19g)$$

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_1}{i\omega\theta_0^i} = i(\bar{\mu}_{11}k_1) \quad (3.19h)$$

$$\gamma_2 = \frac{\varphi_2}{i\omega\theta_0^i} = i(\bar{\mu}_{22}k_2) \quad (3.19i)$$

$$\gamma_3 = \frac{\varphi_3}{i\omega\theta_0^i} = i(\bar{\mu}_{33}\zeta) \quad (3.19j)$$

若(3.18)式存在非零解，則(3.18)等號左端的行列式必須為零，

$$\det \begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{23} & \gamma_2 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho^i \omega^2 & \gamma_3 \\ \varphi_1 / i\omega\theta_0^i & \varphi_2 / i\omega\theta_0^i & \varphi_3 / i\omega\theta_0^i & \kappa / i\omega\theta_0^i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

將(3.20)展開，可得 ζ^2 的四次特徵方程式為

$$A_8\zeta^8 + A_6\zeta^6 + A_4\zeta^4 + A_2\zeta^2 + A_0 = 0 \quad (3.21)$$

其中領導係數 $A_8 \sim A_0$ 詳列於附錄 A，為了限制特徵值為單值函數，需加入一拘束條件， $\text{Im}(\zeta_k) \geq 0$ ， $k=1, 2, 3, 4$ ，即傳入試體的彈性波和熱波，其振幅強度隨著傳入之深度遞減。特徵值分別為 $\pm\zeta_1, \pm\zeta_2, \pm\zeta_3, \pm\zeta_4$ ，正號代表朝正 X_3 方向波傳的下傳波(down-going waves)，負號代表朝負 X_3 方向波傳的上傳波(up-going waves)。將特徵值代回(3.18)中，可獲得對應的特徵向量 $\{U_1, U_2, U_3, \Theta\}$ ，特徵向量各分量比值之關係為

$$\frac{U_1^{\pm(k)}}{P_{1k}^{\pm}} = \frac{U_2^{\pm(k)}}{P_{2k}^{\pm}} = \frac{U_3^{\pm(k)}}{P_{3k}^{\pm}} = \frac{\Theta^{\pm(k)}}{P_{4k}^{\pm}} = C_k^{\pm} \quad (3.22)$$

其中未知係數 C_k^{\pm} 必須由邊界條件決定，而各項比例 P_{ik}^{\pm} 為

$$P_{1k}^{\pm} = \det \begin{bmatrix} \Gamma_{12} & \Gamma_{13}^{\pm(k)} & \gamma_1 \\ \Gamma_{22}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{23}^{\pm(k)} & \gamma_2 \\ \Gamma_{32}^{\pm(k)} & \Gamma_{33}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \gamma_3^{\pm(k)} \end{bmatrix} \quad (3.23a)$$

$$P_{2k}^{\pm} = -\det \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{13}^{\pm(k)} & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{23}^{\pm(k)} & \gamma_2 \\ \Gamma_{31}^{\pm(k)} & \Gamma_{33}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \gamma_3^{\pm(k)} \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

$$P_{3k}^{\pm} = \det \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{12} & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \gamma_2 \\ \Gamma_{31}^{\pm(k)} & \Gamma_{32}^{\pm(k)} & \gamma_3^{\pm(k)} \end{bmatrix} \quad (3.23c)$$

$$P_{4k}^{\pm} = -\det \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 & \Gamma_{23}^{\pm(k)} \\ \Gamma_{31}^{\pm(k)} & \Gamma_{32}^{\pm(k)} & \Gamma_{33}^{\pm(k)} - \rho^i \omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.23d)$$

由(3.16)和(3.22)，位移及溫度可表示為

$$\left\{ U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \Theta \right\}^T = \left[\mathbf{P}^+ \quad \mathbf{P}^- \right] \begin{bmatrix} \mathbf{D}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \\ \mathbf{C}^- \end{Bmatrix} e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2 - \omega t)} \quad (3.24)$$

其中矩陣分別為

$$\mathbf{P}^{\pm} = \begin{bmatrix} P_{11}^{\pm} & P_{12}^{\pm} & P_{13}^{\pm} & P_{14}^{\pm} \\ P_{21}^{\pm} & P_{22}^{\pm} & P_{23}^{\pm} & P_{24}^{\pm} \\ P_{31}^{\pm} & P_{32}^{\pm} & P_{33}^{\pm} & P_{34}^{\pm} \\ P_{41}^{\pm} & P_{42}^{\pm} & P_{43}^{\pm} & P_{44}^{\pm} \end{bmatrix} \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{D}^{\pm} = \begin{bmatrix} e^{\pm i\zeta_1 X_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pm i\zeta_2 X_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pm i\zeta_3 X_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pm i\zeta_4 X_3} \end{bmatrix} \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{C}^{\pm} = \{C_1^{\pm} \quad C_2^{\pm} \quad C_3^{\pm} \quad C_4^{\pm}\} \quad (3.25c)$$

3.1.2 頻散方程式

前一小節所討論的是熱彈波必須滿足殘留應力熱彈統御方程式，本節考慮在有限厚度 h 的受預應力立方晶體平板中，受到上下邊界條件限制，彈性波和熱波的相速度為頻率函數。

參考圖 3.3 所示，考慮熱彈波為藍姆波型態，依位移及溫度之對稱性，可分為對稱波(symmetric waves)和反對稱波(anti-symmetric)。將(3.25b)以三角函數表示，可將位移及溫度分為對稱和反對稱函數，分別表示如下：

(1) 對稱波

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^3 P_{1j} B_j \cos(\zeta_j X_3) \\ \sum_{j=1}^3 P_{2j} B_j \cos(\zeta_j X_3) \\ i \sum_{j=1}^3 P_{3j} B_j \sin(\zeta_j X_3) \\ \sum_{j=1}^3 P_{4j} B_j \cos(\zeta_j X_3) \end{Bmatrix} e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2 - \omega t)} \quad (3.26a)$$

(2)反對稱波

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{cases} = \begin{cases} i \sum_{j=1}^3 P_{1j} D_j \sin(\zeta_j X_3) \\ i \sum_{j=1}^3 P_{2j} D_j \sin(\zeta_j X_3) \\ \sum_{j=1}^3 P_{3j} D_j \cos(\zeta_j X_3) \\ i \sum_{j=1}^3 P_{4j} D_j \sin(\zeta_j X_3) \end{cases} e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2 - \omega t)} \quad (3.26b)$$

其中 $B_j (j=1,2,3,4)$ 和 $D_j (j=1,2,3,4)$ 為待定係數。

假設平板的彈性邊界條件為無表面曳力作用，熱之邊界條件為表面絕熱，也就是在 $X_3 = \pm h$ ， X_3 方向平面上無曳力和熱傳發生，

$$\{\sigma_{13} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{33} \quad q_3\} = 0 \quad (3.27)$$

將(2.34a)與(2.47)代回(3.27)，可獲得

$$\sigma_{13} = \bar{C}_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) = 0 \quad (3.28a)$$

$$\sigma_{23} = \bar{C}_{44} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) = 0 \quad (3.28b)$$

$$\sigma_{33} = \bar{C}_{33} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} - \bar{\mu}_{33} \theta = 0 \quad (3.28c)$$

$$q_3 = K \frac{\partial \theta}{\partial X_3} = 0 \quad (3.28d)$$

根據(3.26)與(3.28)，邊界條件(3.27)經過整理表示為

$$\begin{cases} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \\ q_3 \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{Q}^S \mathbf{B} \\ \mathbf{Q}^A \mathbf{D} \end{cases} = 0 \quad (3.29)$$

其中 $\mathbf{B} = \{B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4\}^T$ 和 $\mathbf{D} = \{D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4\}^T$ ， \mathbf{Q}^S 和 \mathbf{Q}^A 中的矩陣元素如下：

$$Q_{1k}^S = -\bar{C}_{55}(P_{1k}\zeta_k + P_{3k}k_1)\sin(\zeta_k X_3) \quad (3.30a)$$

$$Q_{2k}^S = -\bar{C}_{44}(P_{2k}\zeta_k + P_{3k}k_2)\sin(\zeta_k X_3) \quad (3.30b)$$

$$Q_{3k}^S = (i\bar{C}_{33}P_{3k}\zeta_k + \bar{\mu}_{33}P_{4k})\cos(\zeta_k X_3) \quad (3.30c)$$

$$Q_{4k}^S = -KP_{4k}\zeta_k\sin(\zeta_k X_3) \quad (3.30d)$$

$$Q_{1k}^A = i\bar{C}_{55}(P_{1k}\zeta_k + P_{3k}k_1)\cos(\zeta_k X_3) \quad (3.31a)$$

$$Q_{2k}^A = i\bar{C}_{44}(P_{2k}\zeta_k + P_{3k}k_2)\cos(\zeta_k X_3) \quad (3.31b)$$

$$Q_{3k}^A = -(\bar{C}_{33}P_{3k}\zeta_k + i\bar{\mu}_{33}P_{4k})\sin(\zeta_k X_3) \quad (3.31c)$$

$$Q_{4k}^A = iKP_{4k}\zeta_k\cos(\zeta_k X_3) \quad (3.31d)$$

若待定係數 $B_j (j=1,2,3,4)$ 和 $D_j (j=1,2,3,4)$ 存在非零解，則(3.29)等號左端 \mathbf{Q}^S 和 \mathbf{Q}^A 的行列式必須為零，由此可得對稱波與反對稱波的頻散方程式，

$$\det \mathbf{Q}^S = 0 \quad (3.32a)$$

$$\det \mathbf{Q}^A = 0 \quad (3.32b)$$

在固定頻率下，以尋根數值程式找出符合(3.32)之相速度，可繪製出某一段頻寬下，不同模態的熱彈波頻散曲線。

3.2 具殘留應力層狀介質之光聲效應

本節考慮受預應力之層狀介質表面受到調制雷射照射，由熱性邊界條件求出熱彈波的全解(complete solution)，透過波數積分，將可解出熱彈波之頻率響應。

參考圖 3.4 所示，輸入的雷射假設為分佈於介質表面 $X_3 = 0$ 處的熱源 $q_0(X_1, X_2, 0, \omega)$ ，強度的空間分布屬於高斯分佈型態。介質對於光的吸收率通常小於 1，前述的分佈熱源假設已包含介質的光吸收率之影響，可將熱源 q_0 及其空間頻譜函數(spatial spectral function)以傅立葉積分轉換對(Fourier integral transform pair)表達如下：

$$q_0(X_1, X_2, 0, \omega) = e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2}{a^2}} \quad (3.33a)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(k_1, k_2, 0, \omega) e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2)} dk_1 dk_2$$

$$Q_0(k_1, k_2, 0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(X_1, X_2, 0, \omega) e^{-i(k_1 X_1 + k_2 X_2)} dX_1 dX_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2}{a^2}} e^{-i(k_1 X_1 + k_2 X_2)} dX_1 dX_2 \quad (3.33b)$$

$$= \pi a^2 e^{-\frac{a^2}{4}(k_1^2 + k_2^2)}$$

其中 a 為雷射光束的加熱半徑。熱彈波的位移和溫度變化採用二維傅立葉積分轉換如下

$$\begin{Bmatrix} u_1(X_1, X_2, X_3, \omega) \\ u_2(X_1, X_2, X_3, \omega) \\ u_3(X_1, X_2, X_3, \omega) \\ \theta(X_1, X_2, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_1(k_1, k_2, X_3, \omega) \\ U_2(k_1, k_2, X_3, \omega) \\ U_3(k_1, k_2, X_3, \omega) \\ \Theta(k_1, k_2, X_3, \omega) \end{Bmatrix} e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2)} dk_1 dk_2 \quad (3.34)$$

其中核函數 $U_j(k_1, k_2, X_3, \omega)$, $j=1,2,3$ 與 $\Theta(k_1, k_2, X_3, \omega)$ 為(3.24)所表示之位移與溫度的振幅函數。

考慮層狀介質的狀態函數，其中第 m 層的狀態函數 $\mathbf{S}_m(k_1, k_2, X_3, \omega)$ 定義如下：

$$\mathbf{S}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) \\ \mathbf{T}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

其中 $\mathbf{U}_m(k_1, k_2, X_3, \omega)$ 為第 m 層的位移和溫度狀態向量， $\mathbf{T}_m(k_1, k_2, X_3, \omega)$ 為第 m 層的應力和熱傳狀態向量，分別表示如下：

$$\mathbf{U}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) = \{U_{1m} \quad U_{2m} \quad U_{3m} \quad \Theta_m\} \quad (3.36a)$$

$$\mathbf{T}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) = \{\Sigma_{13m} \quad \Sigma_{23m} \quad \Sigma_{33m} \quad Q_{3m}\} \quad (3.36b)$$

根據(3.24)，(3.35)可以表示為

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) \\ \mathbf{T}_m(k_1, k_2, X_3, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m^+ & \mathbf{P}_m^- \\ \mathbf{Q}_m^+ & \mathbf{Q}_m^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_m^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_m^+ \\ \mathbf{C}_m^- \end{Bmatrix} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad (3.37)$$

其中子矩陣 \mathbf{P}_m^\pm 的元素如(3.23)所示，子矩陣 \mathbf{Q}_m^\pm 和 \mathbf{D}_m^\pm 則表示如下：

$$\mathbf{Q}_m^\pm = \begin{bmatrix} Q_{11}^\pm & Q_{12}^\pm & Q_{13}^\pm & Q_{14}^\pm \\ Q_{21}^\pm & Q_{22}^\pm & Q_{23}^\pm & Q_{24}^\pm \\ Q_{31}^\pm & Q_{32}^\pm & Q_{33}^\pm & Q_{34}^\pm \\ Q_{41}^\pm & Q_{42}^\pm & Q_{43}^\pm & Q_{44}^\pm \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{D}_m^+ = \begin{bmatrix} e^{i\zeta_1(X_3 - Z_{m-1})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\zeta_2(X_3 - Z_{m-1})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\zeta_3(X_3 - Z_{m-1})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\zeta_4(X_3 - Z_{m-1})} \end{bmatrix} \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{D}_m^- = \begin{bmatrix} e^{-i\zeta_1(X_3 - Z_{m-1})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta_2(X_3 - Z_{m-1})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\zeta_3(X_3 - Z_{m-1})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\zeta_4(X_3 - Z_{m-1})} \end{bmatrix} \quad (3.39b)$$

子矩陣 \mathbf{Q}_m^\pm 的元素為

$$Q_{1k}^\pm = i\bar{C}_{55} (P_{1k}^\pm C_k^\pm \zeta_k + P_{3k}^\pm C_k^\pm k_1) \quad (3.40a)$$

$$Q_{2k}^\pm = i\bar{C}_{44} (P_{2k}^\pm C_k^\pm \zeta_k + P_{3k}^\pm C_k^\pm k_2) \quad (3.40b)$$

$$Q_{3k}^\pm = i\bar{C}_{33} P_{3k}^\pm C_k^\pm \zeta_k + \bar{\mu}_{33} P_{4k}^\pm C_k^\pm \quad (3.40c)$$

$$Q_{4k}^\pm = iK P_{4k}^\pm C_k^\pm \zeta_k \quad (3.40d)$$

考慮邊界連續條件，在第 m 層與第 $m+1$ 層的界面處，狀態向量滿足連續條件。依據(3.37)，可將邊界連續表示為

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_m^+ & \mathbf{P}_m^- \\ \mathbf{Q}_m^+ & \mathbf{Q}_m^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_m^+ \\ \mathbf{C}_m^- \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{m+1}^+ & \mathbf{P}_{m+1}^- \\ \mathbf{Q}_{m+1}^+ & \mathbf{Q}_{m+1}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{m+1}^+ \\ \mathbf{C}_{m+1}^- \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

其中

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} e^{i\zeta_1 m h_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\zeta_2 m h_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\zeta_3 m h_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\zeta_4 m h_m} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

其中， h_m 表示第 m 層介質的厚度。層狀介質最上層的上表面滿足曳力為零，且傳入之熱量滿足(3.23b)之分布，而在層狀介質最下層(第 N 層)的下表面則滿足零曳力和絕熱條件，上下表面邊界條件分別表示如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_1^- \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_0 \end{Bmatrix} \quad (3.43a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_N^+ \mathbf{E}_N & \mathbf{Q}_N^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_N^+ \\ \mathbf{C}_N^- \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_N = \mathbf{0} \quad (3.43b)$$

參考圖 3.5 所示，以矽鍺薄膜結構為例，考慮雙層介質，由邊界條件(3.37)及(3.39)，可獲得一組聯立方程式，表示為

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_1^- \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_1^+ \mathbf{E}_1 & \mathbf{P}_1^- & -\mathbf{P}_2^+ & -\mathbf{P}_2^- \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{Q}_1^+ \mathbf{E}_1 & \mathbf{Q}_1^- & -\mathbf{Q}_2^+ & -\mathbf{Q}_2^- \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^+ \mathbf{E}_2 & \mathbf{Q}_2^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1^+ \\ \mathbf{C}_1^- \\ \mathbf{C}_2^+ \\ \mathbf{C}_2^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

利用克拉瑪法則(Cramer's Rule)可以求解出 $\mathbf{C}_m^\pm = \{C_{1m}^\pm, C_{2m}^\pm, C_{3m}^\pm, C_{4m}^\pm\}$ ，代回(3.24)，獲得核函數 $U_j(k_1, k_2, X_3, \omega)$, $j=1,2,3$ 和 $\Theta(k_1, k_2, X_3, \omega)$ 。再依據(3.34)進行二維波數積分(wavenumber integration)[18]，可數值計算得到調制雷射激發的熱彈波頻率響應。

第四章 數值分析與討論

本章依據第三章的推導撰寫數值程式，並參考 Banerjee 和 Pao[9]的研究，考慮無邊界的介質材料，在固定頻率下計算殘留應力值對於熱彈波的波速及波慢。假設波傳介質為單層立方晶體平板，討論熱彈波頻散方程式的根與殘留應力之關係。

4.1 熱彈波的波慢與相速度

本節分析在無窮域中傳遞的平面熱彈諧波(plane harmonic thermoelastic wave)，根據(3.18)~(3.21)式，假設波傳方向與立方材料的[001]方向垂直，與[100]方向夾角 $\bar{\theta}$ ，則波前(wavefront)向量的成分 $n_1 = \cos \bar{\theta}$ ， $n_2 = \sin \bar{\theta}$ ， $n_3 = 0$ ， $k_1 = \omega n_1 / c$ 、 $k_2 = \omega n_2 / c$ 及 $\zeta = 0$ ，其中 c 為相速度，則特徵方程式必須滿足 $A_0 = 0$ ，參考附錄 A，可將(3.20)表示如下：

$$\det \begin{bmatrix} A_{11}(1/c)^2 - 1 & A_{12}(1/c)^2 & 0 & A_{14}(1/c) \\ A_{12}(1/c)^2 & A_{22}(1/c)^2 - 1 & 0 & A_{24}(1/c) \\ 0 & 0 & A_{33}(1/c)^2 - 1 & 0 \\ A_{14}(1/c) & A_{24}(1/c) & 0 & A_{44}(1/c)^2 + \bar{A}_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

其中，各項元素分別為

$$A_{11} = (\bar{C}_{11}n_1^2 + \bar{C}_{66}n_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i n_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i n_2^2) / \rho^i \omega^2 \quad (4.2a)$$

$$A_{22} = (\bar{C}_{66}n_1^2 + \bar{C}_{22}n_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i n_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i n_2^2) / \rho^i \omega^2 \quad (4.2b)$$

$$A_{33} = (\bar{C}_{55}n_1^2 + \bar{C}_{44}n_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i n_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i n_2^2) / \rho^i \omega^2 \quad (4.2c)$$

$$A_{44} = iK(n_1^2 + n_2^2) / \omega \theta_0 \rho^i \omega^2 \quad (4.2d)$$

$$\bar{A}_{44} = \bar{\epsilon} / \rho^i \omega^2 \quad (4.2e)$$

$$A_{12} = (\bar{C}_{11}^2 + \bar{C}_{66}^2) n_1 n_2 / \rho^i \omega^2 \quad (4.2f)$$

$$A_{14} = i\bar{\mu}_{11} n_1 / \rho^i \omega^2 \quad (4.2g)$$

$$A_{24} = i\bar{\mu}_{22}n_2/\rho^i\omega^2 \quad (4.2h)$$

將(4.1)展開，可得 $(1/c)^2$ 四次特徵方程式為

$$B_8(1/c)^8 + B_6(1/c)^6 + B_4(1/c)^4 + B_2(1/c)^2 + B_0 = 0 \quad (4.3)$$

其中，各項的領導係數 $B_8 \sim B_0$ 分別為

$$B_8 = A_{11}A_{22}A_{33}A_{44} - A_{12}^2A_{33}A_{44} \quad (4.4a)$$

$$B_6 = A_{11}A_{22}A_{33}\bar{A}_{44} - A_{12}^2A_{33}\bar{A}_{44} - A_{14}^2A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{14}A_{24}A_{33} \\ - A_{24}^2A_{11}A_{33} + A_{12}^2A_{44} - A_{11}A_{22}A_{44} - A_{11}A_{33}A_{44} - A_{22}A_{33}A_{44} \quad (4.4b)$$

$$B_4 = A_{14}^2\bar{A}_{44} - A_{11}A_{22}\bar{A}_{44} - A_{11}A_{33}\bar{A}_{44} - A_{22}A_{33}\bar{A}_{44} + A_{14}^2A_{22} + A_{14}^2A_{33} \\ - 2A_{12}A_{14}A_{24} + A_{11}A_{24}^2 + A_{33}A_{24}^2 + A_{11}A_{44} + A_{22}A_{44} + A_{33}A_{44} \quad (4.4c)$$

$$B_2 = A_{11}\bar{A}_{44} - A_{22}\bar{A}_{44} - A_{33}\bar{A}_{44} - A_{14}^2 - A_{24}^2 - A_{44} \quad (4.4d)$$

$$B_0 = -\bar{A}_{44} \quad (4.4e)$$

參考 Jenkins 和 Traub [19]，可求出複數係數四次多項式(quartic equation)的根。在塊材介質中傳遞的四個波慢中，三個為徹體波(bulk acoustic waves, BAW)，第四個為熱波，其傳遞速度遠較彈性波慢，且迅速衰減。熱波的波數為複數型態，其相速度的定義為

$$c = \omega/\text{Re}(k) \quad (4.5)$$

由(3.16b)，時諧熱波可以表示為

$$\theta(X_1, X_2, X_3, t) = \Theta \exp[-\text{Im}(k)X] \exp[i(\text{Re}(k)X - \omega t)] \quad (4.6)$$

其中 $\exp[-\text{Im}(k)X]$ 即表示傳遞時的振幅衰減，定義 $\text{Im}(k)$ 為熱波的衰減係數(attenuation)。本節將分別探討矽與鍺受殘留應力負載後，對於波慢及相速度產生的影響。

圖 4.1~4.10 為鍺在固定頻率 100kHz 時的波慢，其中實線代表無殘留應力負載之波慢，虛線則代表受到壓應力之波慢。受到壓應力的影響，兩個

準橫波(quasi-transverse waves)波慢會有交錯的情形，而隨著受到應力的增加，準縱波(quasi-longitudinal wave)波慢會減少，熱波波慢會增加，且近似於線性變化。圖 4.5 之微體波波慢極圖顯示，當單軸壓應力施於鎳的[010]方向，沿[010]方向的縱波及第一個橫波波慢值變小，第二個橫波波慢值變大，受到柏松比效應(Poisson's ratio effect)的影響，沿[100]方向的縱波波慢值變大，兩個橫波的波慢值則不變。由於本文考慮等向性熱膨脹及熱傳導，熱波不具方向性，圖 4.6 的熱波波慢極圖顯示，受到體積變化影響，熱波波慢值變大。

圖 4.7~4.8 之微體波與熱波波慢極圖顯示，當雙軸壓應力施於鎳的[100]及[010]方向，沿[100]及[010]方向的波慢變化相同，縱波及第一個橫波波慢值變小，第二個橫波及熱波波慢值則變大。圖 4.9~4.10 所示為鎳[010]方向的波慢與殘留壓應力之關係，隨著殘留壓應力的增加，縱波及第一個橫波的波慢值會減小，第二個橫波及熱波的波慢值則會增加。相同情況下，圖 4.11~4.20 為鎳在固定頻率 100kHz 時微體波及熱波的相速度，由於相速度為波慢之倒數，變化趨勢與圖 4.1~4.10 相反。

圖 4.21~4.40 所示分別為矽受到拉應力，在固定頻率 100kHz 時的波慢及相速度。隨著應力的增加，準縱波相速度會增加，熱波相速度會減少，與鎳受壓應力時的情況相反，但在任何狀況下，熱波的相速度幾乎都與傳遞方向無關，此與第三章中，(3.10)與(3.15)式假設熱膨脹係數與熱傳導係數為等向性參數有關。

圖 4.41 及 4.42 所示分別為鎳和矽受單軸及雙軸應力的熱波衰減強度，結果顯示，熱波的衰減是由於材料吸收造成，依據(3.14)，熱容會受殘留應力造成的體積變化率所影響，受到拉應力時，熱容減小，因此衰減較緩，反之，受壓應力時，衰減較快。此外，由於與體積變化有關，受雙軸應力時有較明顯的變化。

4.2 立方晶體平板頻散方程式之數值模擬

由 4.1 節的數值分析結果，在計算頻散方程式時，必須考慮波數為複數型態，在計算頻散方程式的過程中，波數實部及虛部對應(3.29)式等號左端 Q^S 或 Q^A 的行列式值，可以勾勒出一曲面，若垂直高度為 Q^S 或 Q^A 的行列式值的絕對值，則符合頻散方程式的根就在曲面高度極低的位置，可以採用簡單體法(simplex method)來搜尋根的位置。

圖 4.43 表示試片厚度為 1mm，在不同頻率下，鍺平板的 Q^S 行列式值對波數之關係，結果顯示在較低頻(400kHz)的情況下，由於各矩陣元素值差異過大，造成數值計算上出現不穩定的情形，而在高頻時的數值情況較穩定。以材料常數而言，彈性與熱的常數原先就有數百萬倍的差距，且由前一節的結果得知熱波波數的實部及虛部數值相較於彈性波都十分可觀，由(3.21)式求出 X_3 方向的波數後，代入(3.22)或(3.29)式時，可能使各矩陣元素值的差距更大，造成複數尋根上的困難。

圖 4.44~4.47 所示為頻率 1.6MHz 下，鍺平板的 Q^S 及 Q^A 行列式值對波數實部與虛部之關係，結果皆在衰減參數軸上有一個根，未受應力前，對稱模態根的位置約在衰減參數 0.7~1.0 之間，施加 5GPa 壓應力後，位置約在 0.9~1.1 之間。反對稱模態也有類似情形，未受應力前，根的位置約在衰減參數 0.7~0.8 之間，施加壓應力後，位置約在 1.0~1.1 之間。

圖 4.48~4.51 所示為頻率 1.6MHz 下，矽平板的 Q^S 及 Q^A 行列式值對波數之關係，也有類似的結果，未受應力前，對稱或反對稱模態根的位置約在衰減參數 0.5~0.6 之間，施加 5GPa 拉應力後，位置約為 0.4。先前曾提到應力與衰減參數之間的關連，而此結果大致上是一致的。

第五章 結論與展望

本文應用熱彈耦合理論，推導熱彈波動方程式層狀介質彈性波與熱波的頻散方程式，並以數值模擬無窮域中微體波與熱波之相速度及衰減參數與殘留應力間的光聲效應，此外，探討單層平板頻散方程式的根與殘留應力的定性關係。由於缺乏材料常數與溫度相依(temperature dependence)的資料，本文假設試體溫度變化範圍不大，數值模擬都是根據與溫度變化無關的材料常數進行計算。本章將綜合數值分析的結果，提供日後改進的參考。

5.1 結論

依據數值模擬結果，在無窮域中傳遞的微體波相速度會受到殘留應力大小及方向的影響，熱波相速度雖然也會受到殘留應力大小的影響，由於僅考慮等向性熱傳導，使熱波幾乎與方向無關。微體波與熱波耦合的特徵方程式為四次多項式，其領導係數屬於複數型態，因此所求得的波數也屬於複數型態，其中波數的虛部代表波動振幅的衰減，模擬結果顯示熱波的衰減遠比微體波快。當材料受到拉應力時，衰減變慢；反之，受到壓應力時，衰減變快。不論是微體波或熱波，其相速度及衰減強度與殘留應力幾乎呈線性關係，因此當殘留應力越大時，光聲效應的變化越明顯。

在模擬分析單層平板藍姆波的頻散方程式時，計算 Q^S 或 Q^A 行列式值的過程中，由於各矩陣元素值差異過大，造成數值不穩定的情形，但在高頻時，似乎較為穩定。以高頻模擬分析單層平板頻散方程式的根與殘留應力的關係，在數值穩定的區域內發現波數有一虛根，當平板受到壓應力時，虛根值會增加。相反的，平板受到拉應力時，虛根值會減小，這與在無窮域中觀察到的趨勢相同。

5.2 未來展望

本研究目前成功推導出薄膜結構殘留應力的熱彈頻散方程式，但在數值分析上遇到一些瓶頸，在計算 Q^S 或 Q^A 行列式值時，會發生數值不穩定，因此有必要將各物理量予以正規化(normalization)，或是透過數值上較穩定的行列式運算，才能進一步透過簡單體法，求解出頻散方程式的複數根。由頻散曲線能得知波數積分所需的數值範圍，最終可求得光聲效應之頻率響應(frequency response)，建立頻率響應與殘留應力之間的定量關係。



參考文獻

1. A. G. Bell (1881), "Upon the production of sound by radiant energy," *Philos. Mag.*, **11**, 510-529.
2. A. Rosencwaig and A. Gersho (1976), "Theory of the photoacoustic effect with solids," *J. Appl. Phys.*, **47**, 64-69.
3. X. Wang, H. Hu, and X. Xu (2001), "Photo-acoustic measurement of thermal conductivity of thin films and bulk materials," *J. Heat Transfer*, **123**, 138-144.
4. R. D. Mindlin (1974), "Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates," *Int. J. Solids Structures*, **10**, 625-637.
5. G. A. Altay and M. C. Dökmeci (2002), "A nonlinear rod theory for high frequency vibrations of thermopiezoelectric materials," *Int. J. Non-linear Mech.*, **37**, 225-243.
6. G. A. Altay and M. C. Dökmeci (2002), "High-frequency equation for non-linear vibrations of thermopiezoelectric shells," *Int. J. Engineering Science*, **40**, 957-989.
7. H. W. Lord and Y. Shulman (1967), "A generalized dynamical theory of thermoelasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, **15**, 299-309.
8. A. E. Green and K. A. Lindsay (1972), "Thermoelasticity," *J. Elasticity*, **2**, 1-7.
9. D. K. Banerjee and Y. Pao (1974), "Thermoelastic waves in anisotropic solids," *J. Acoust. Soc. Am.*, **56**(5), 1444-1454.
10. X. Wang and X. Xu (2001), "Thermoelastic wave induced by pulsed laser heat," *Appl. Phys. A*, **73**, 107-114.
11. K. L. Verma (2002), "On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity," *Int. J. Eng. Sci.*, **40**, 2077-2096.
12. K. L. Verma (2006), "Thermoelastic vibrations with thermal relaxation in multilayered media," *HAIT J. Sci. and Eng. B*, **3**, 2-19

13. B. Singh (2005), "Reflection of P and SV waves from free surface of an elastic solid in generalized thermoelastic diffusion," *J. Earth Syst. Sci.* **114**(2), 159-168.
14. Y. H. Pao, W. Sachse, and H. Fukuoka (1984), "Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses," in *Physical Acoustic*, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston, Vo. 17, 62-143, Academic, New York.
15. Y. H. Pao and U. Gamer (1985), "Acoustoelastic waves in orthotropic media," *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**(3), 806-812.
16. A. V. Osetrov, H.-J. Fröhlich, R. Koch, and E. Chilla (2000), "Acoustoelastic effect in anisotropic layered structures," *Phys. Rev. B*, **62**(21), 13963-13969.
17. G. Thomas Mase and G. E. Mase (1999), *Continuum Mechanics for Engineers*, second edition, CRC Press, Boca Raton, Florida.
18. S. S. Lih (1992), *Response of Composite Laminates to Dynamic Surface Loads*, University of California, Los Angeles, Ph.D. Dissertation.
19. M. A. Jenkins and J. F. Traub (1972), "Zeros of a complex polynomial," *Communications of the ACM*, **15**(2), 97-99

附 錄

由(3.18)及(3.19)式中各項元素表示為 $\Phi_{IJ} + \Psi_{IJ}\zeta^2$ 的形式，則(3.20)可改寫為

$$\det \begin{bmatrix} \Phi_{11} + \Psi_{11}\zeta^2 & \Gamma_{12} & \Psi_{13}\zeta & \gamma_1 \\ \Gamma_{21} & \Phi_{22} + \Psi_{22}\zeta^2 & \Psi_{23}\zeta & \gamma_2 \\ \Psi_{13}\zeta & \Psi_{23}\zeta & \Phi_{33} + \Psi_{33}\zeta^2 & \Psi_{34}\zeta \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \Psi_{34}\zeta & \Phi_{44} + \Psi_{44}\zeta^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.1})$$

其中各項分別為

$$\Phi_{11} = \bar{C}_{11}k_1^2 + \bar{C}_{66}k_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 - \rho^i \omega^2 \quad (\text{A.2a})$$

$$\Psi_{11} = \bar{C}_{55} + \bar{\sigma}_{33}^i \quad (\text{A.2b})$$

$$\Phi_{22} = \bar{C}_{66}k_1^2 + \bar{C}_{22}k_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 - \rho^i \omega^2 \quad (\text{A.2c})$$

$$\Psi_{22} = \bar{C}_{44} + \bar{\sigma}_{33}^i \quad (\text{A.2d})$$

$$\Phi_{33} = \bar{C}_{55}k_1^2 + \bar{C}_{44}k_2^2 + \bar{\sigma}_{11}^i k_1^2 + \bar{\sigma}_{22}^i k_2^2 - \rho^i \omega^2 \quad (\text{A.2e})$$

$$\Psi_{33} = \bar{C}_{33} + \bar{\sigma}_{33}^i \quad (\text{A.2f})$$

$$\Psi_{13} = (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{55})k_1 \quad (\text{A.2g})$$

$$\Psi_{23} = (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{44})k_2 \quad (\text{A.2h})$$

$$\Psi_{34} = i\bar{\mu}_{33} \quad (\text{A.2i})$$

$$\Phi_{44} = -\bar{\epsilon} - \frac{iK(k_1^2 + k_2^2)}{\omega\theta_0^i} \quad (\text{A.2j})$$

$$\Psi_{44} = -\frac{iK}{\omega\theta_0^i} \quad (\text{A.2k})$$

將(A.1)展開如下：

$$A_8\zeta^8 + A_6\zeta^6 + A_4\zeta^4 + A_2\zeta^2 + A_0 = 0 \quad (\text{3.21})$$

其中的各項係數分別為

$$A_8 = \Psi_{11}\Psi_{22}\Psi_{33}\Psi_{44} \quad (\text{A.3a})$$

$$A_6 = \Phi_{11}\Psi_{22}\Psi_{33}\Psi_{44} + \Phi_{22}\Psi_{11}\Psi_{33}\Psi_{44} + \Phi_{33}\Psi_{11}\Psi_{22}\Psi_{44} \\ + \Phi_{44}\Psi_{11}\Psi_{22}\Psi_{33} - \Psi_{13}^2\Psi_{22}\Psi_{44} - \Psi_{23}^2\Psi_{11}\Psi_{44} - \Psi_{34}^2\Psi_{11}\Psi_{22} \quad (\text{A.3b})$$

$$A_4 = \Phi_{11}\Phi_{22}\Psi_{33}\Psi_{44} + \Phi_{11}\Phi_{33}\Psi_{22}\Psi_{44} + \Phi_{11}\Phi_{44}\Psi_{22}\Psi_{33} \\ + \Phi_{22}\Phi_{33}\Psi_{11}\Psi_{44} + \Phi_{22}\Phi_{44}\Psi_{11}\Psi_{33} + \Phi_{33}\Phi_{44}\Psi_{11}\Psi_{22} \\ - \Phi_{11}\Psi_{22}\Psi_{34}^2 - \Phi_{11}\Psi_{44}\Psi_{23}^2 - \Phi_{22}\Psi_{11}\Psi_{34}^2 - \Phi_{22}\Psi_{44}\Psi_{13}^2 \\ - \Phi_{44}\Psi_{22}\Psi_{13}^2 - \Phi_{44}\Psi_{11}\Psi_{23}^2 - \Psi_{22}\Psi_{33}\gamma_1^2 - \Psi_{11}\Psi_{33}\gamma_2^2 \\ - \Psi_{33}\Psi_{44}\Gamma_{12}^2 + 2\Psi_{22}\Psi_{13}\Psi_{34}\gamma_1 + 2\Psi_{44}\Psi_{13}\Psi_{23}\Gamma_{12} \\ + 2\Psi_{11}\Psi_{23}\Psi_{34}\gamma_2 \quad (\text{A.3c})$$

$$A_2 = \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33}\Psi_{44} + \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{44}\Psi_{33} + \Phi_{11}\Phi_{33}\Phi_{44}\Psi_{22} \\ + \Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44}\Psi_{11} - \Phi_{11}\Phi_{22}\Psi_{34}^2 - \Phi_{11}\Phi_{44}\Psi_{23}^2 - \Phi_{22}\Phi_{44}\Psi_{13}^2 \\ - \Phi_{33}\Psi_{22}\gamma_1^2 - \Phi_{22}\Psi_{33}\gamma_1^2 + \Psi_{23}^2\gamma_1^2 - \Phi_{33}\Psi_{11}\gamma_2^2 - \Phi_{11}\Psi_{33}\gamma_2^2 \\ + \Psi_{13}^2\gamma_2^2 + 2\Phi_{22}\Psi_{13}\Psi_{34}\gamma_1 + 2\Phi_{11}\Psi_{23}\Psi_{34}\gamma_2 - 2\Psi_{13}\Psi_{23}\gamma_1\gamma_2 \\ + 2\Phi_{44}\Psi_{13}\Psi_{23}\Gamma_{12} - 2\Psi_{23}\Psi_{34}\gamma_1\Gamma_{12} - 2\Psi_{13}\Psi_{34}\gamma_2\Gamma_{12} \\ + 2\Psi_{33}\gamma_1\gamma_2\Gamma_{12} - \Phi_{44}\Psi_{33}\Gamma_{12}^2 - \Phi_{33}\Psi_{44}\Gamma_{12}^2 + \Psi_{34}^2\Gamma_{12}^2 \quad (\text{A.3d})$$

$$A_0 = \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33}\Phi_{44} - \Phi_{22}\Phi_{33}\gamma_1^2 - \Phi_{11}\Phi_{33}\gamma_2^2 + 2\Phi_{33}\gamma_1\gamma_2\Gamma_{12} \\ - \Phi_{33}\Phi_{44}\Gamma_{12}^2 \quad (\text{A.3e})$$

表 1 鋳的材料常數

密度(g/cm^3)	熱傳導係數($w/m^{\circ}K$)	二階彈性常數(GPa)			
ρ	K	c_{11}	c_{12}	c_{44}	
5.36	60	128.5	48.3	66.8	

熱容($J/g^{\circ}K$)	熱膨脹係數($1/^{\circ}K$)	三階彈性常數(GPa)					
C_E	α	c_{111}	c_{112}	c_{123}	c_{144}	c_{166}	c_{456}
0.32	5.8×10^{-6}	-710	-389	-18	-23	-292	-53



表 2 矽的材料常數

密度(g/cm^3)	熱傳導係數($w/m^{\circ}K$)	二階彈性常數(GPa)			
ρ	K	c_{11}	c_{12}	c_{44}	
2.33	148	165.8	63.9	79.6	

熱容($J/g^{\circ}K$)	熱膨脹係數($1/^{\circ}K$)	三階彈性常數(GPa)					
C_E	α	c_{111}	c_{112}	c_{123}	c_{144}	c_{166}	c_{456}
0.71	2.6×10^{-6}	-825	-451	-64	12	-310	-64

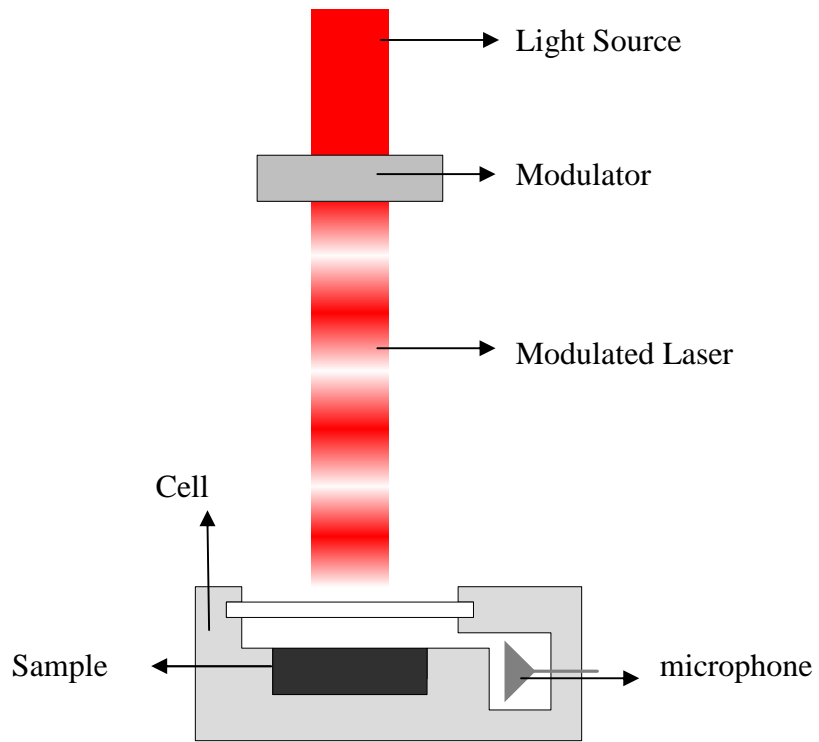


圖 1.1 麥克風和光聲腔體搭配之光聲感測示意圖

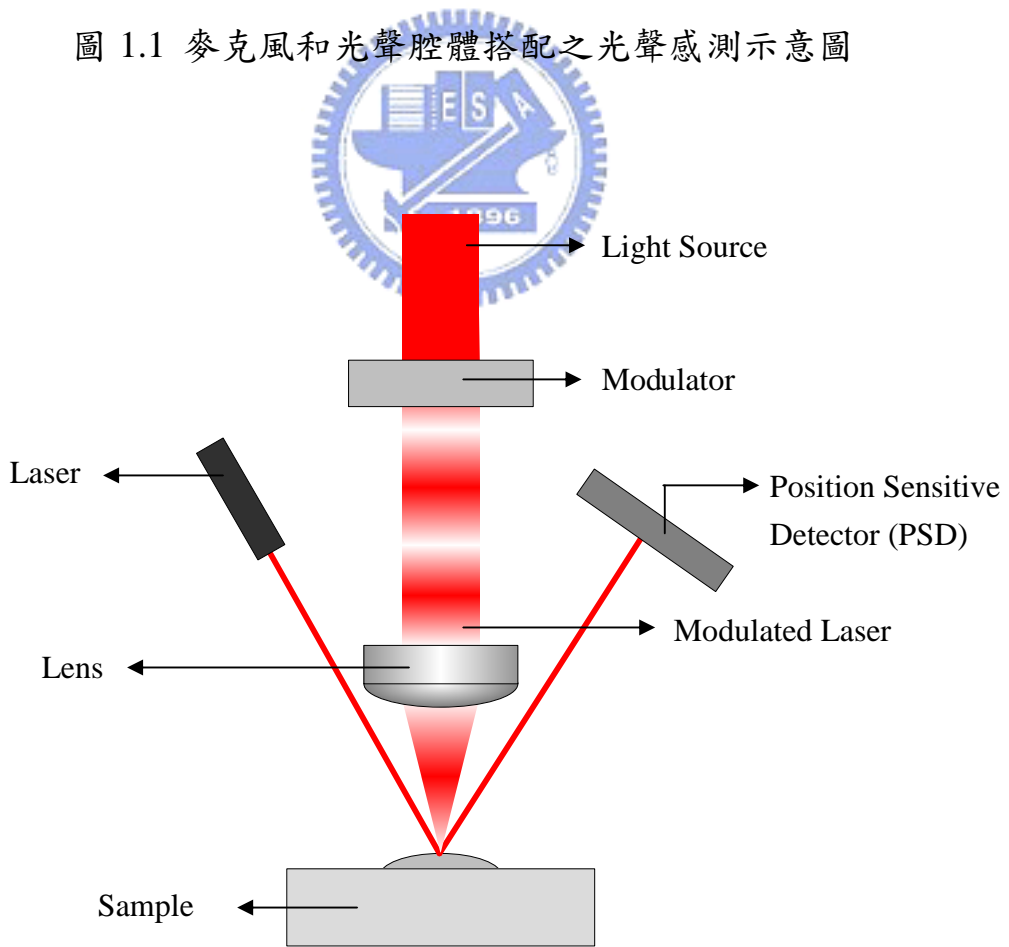


圖 1.2 雷射和光電位置感測器搭配之光聲感測示意圖

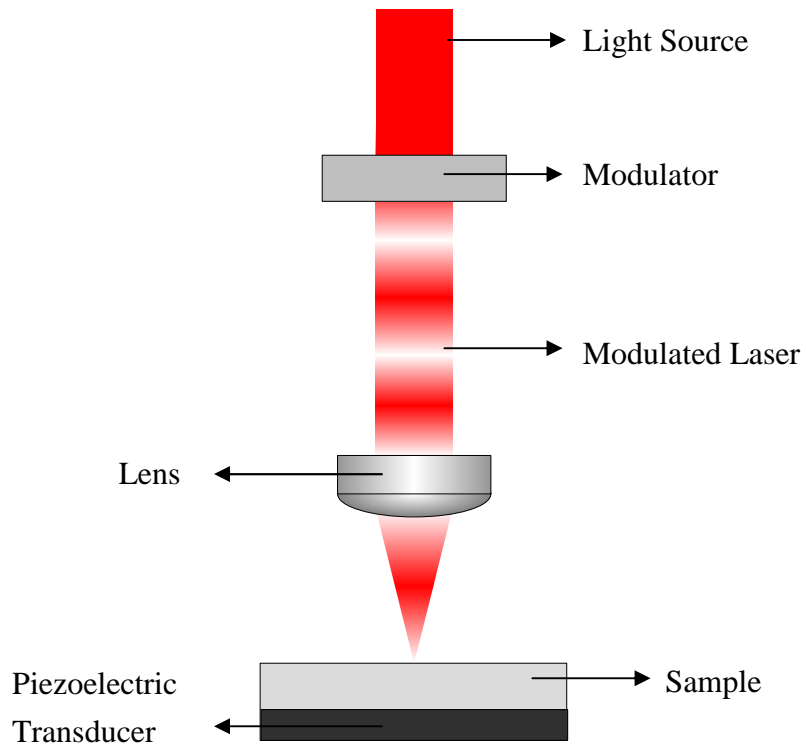


圖 1.3 壓電換能器感測光聲效應的示意圖

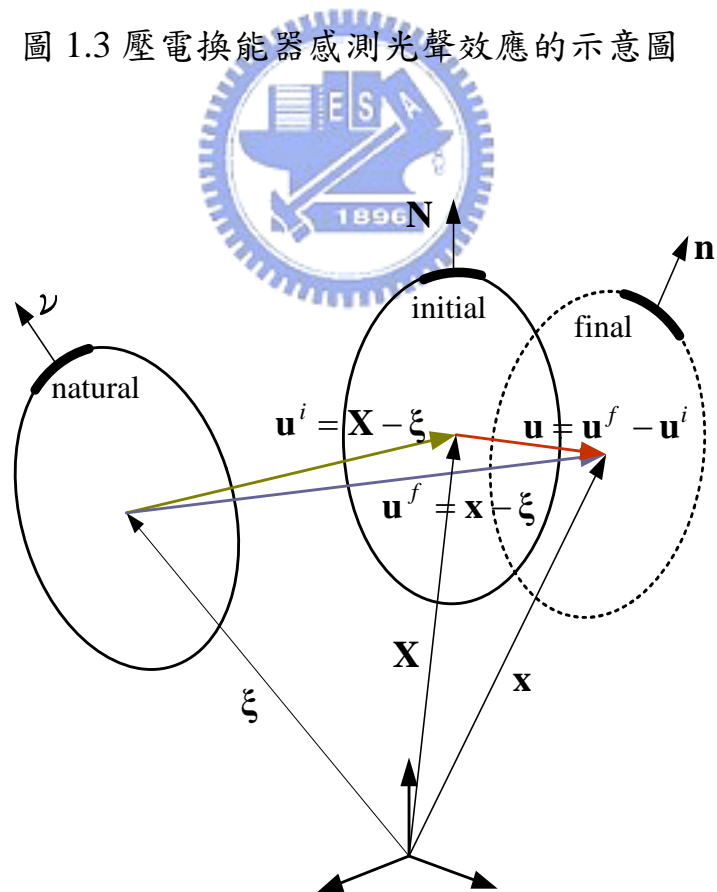


圖 2.1 自然狀態、初始狀態、最終狀態與對應的座標系統

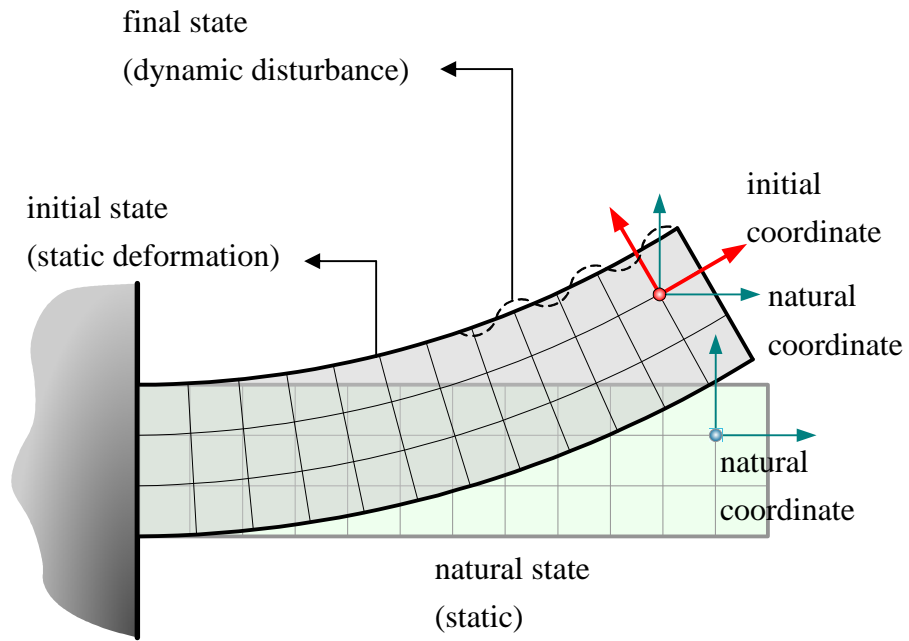


圖 2.2 以初始座標為觀察座標描述預變形材料的動態擾動

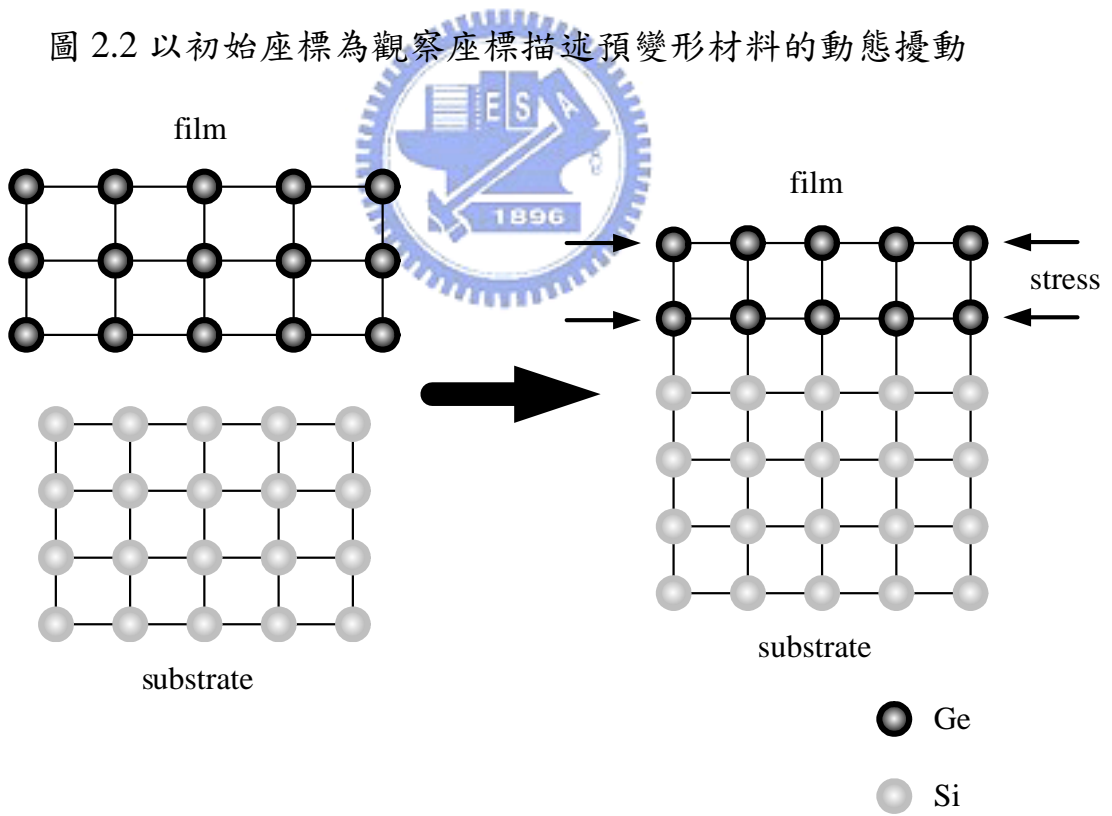


圖 3.1 晶格不匹配產生薄膜壓應力

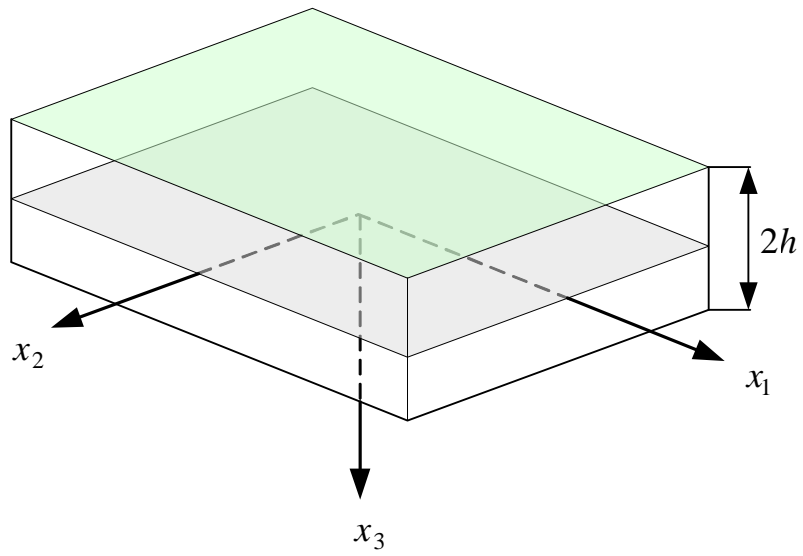


圖 3.2 單層立方晶體平板及參考座標

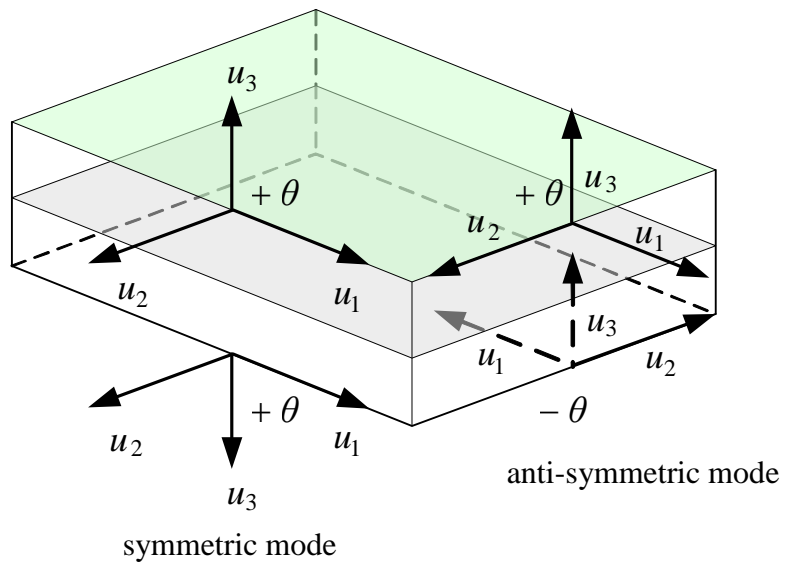


圖 3.3 對稱與反對稱模態示意圖

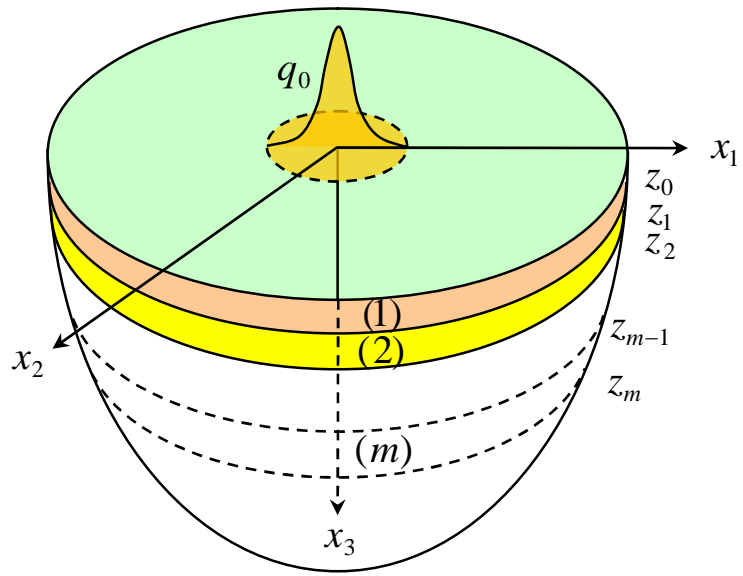


圖 3.4 N 層半無限域材料及上邊界之高斯分布熱源

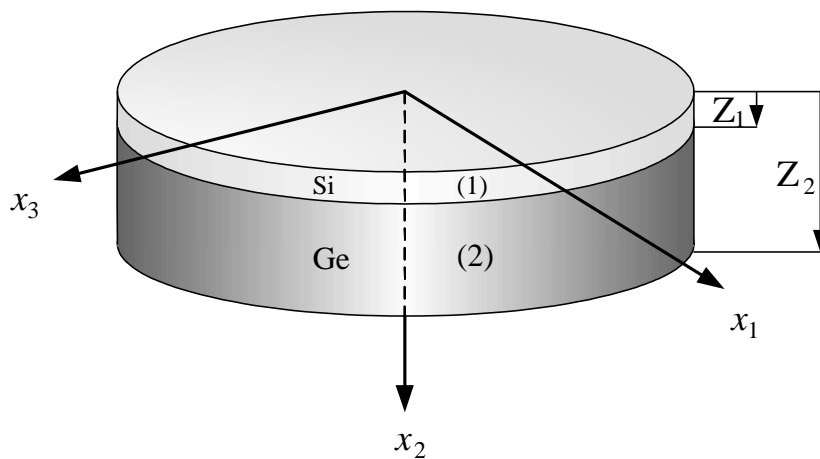


圖 3.5 單晶矽鍺薄膜結構，參考座標與材料主軸重合

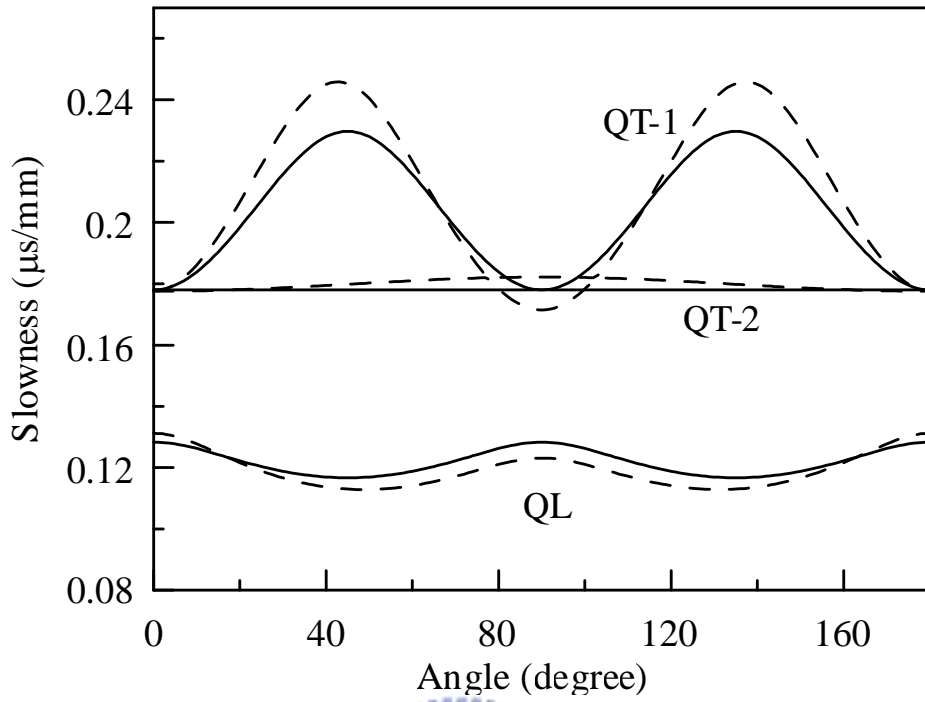


圖 4.1 鋳的微體波波慢，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

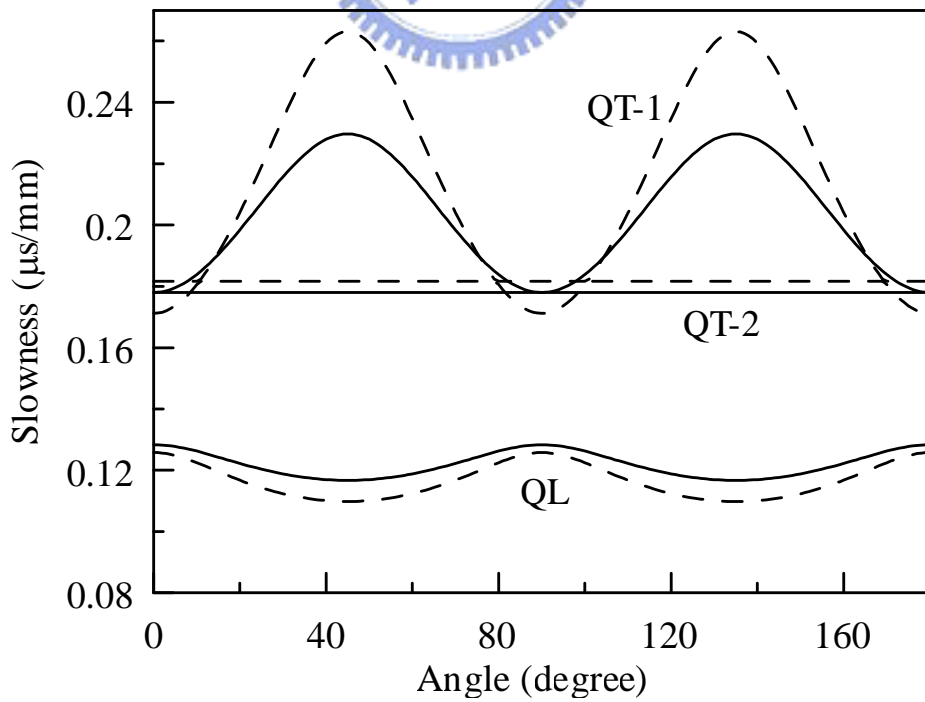


圖 4.2 鋳的微體波波慢，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

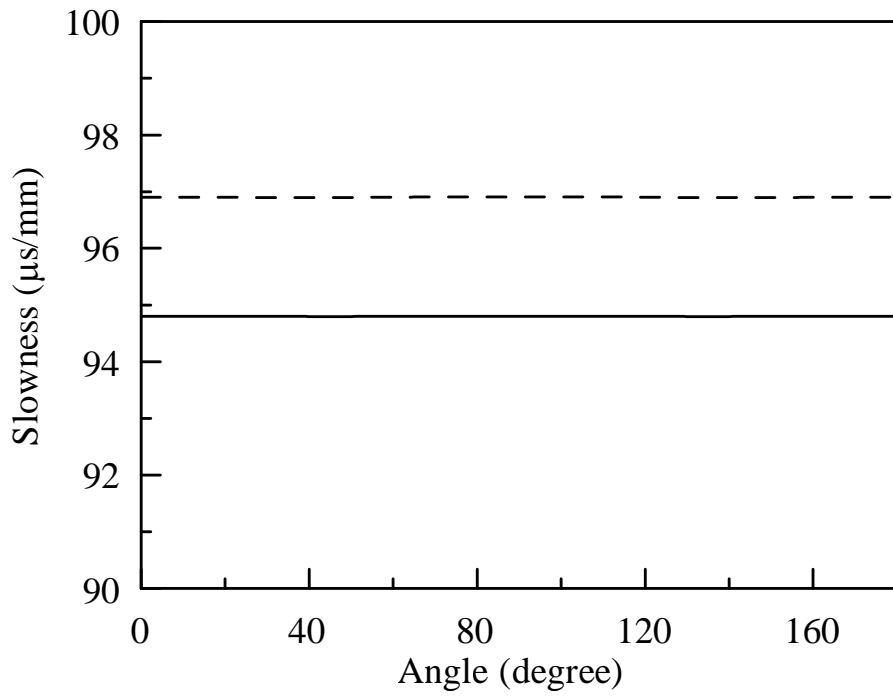


圖 4.3 鎳的熱波波慢，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = -5\text{GPa}$

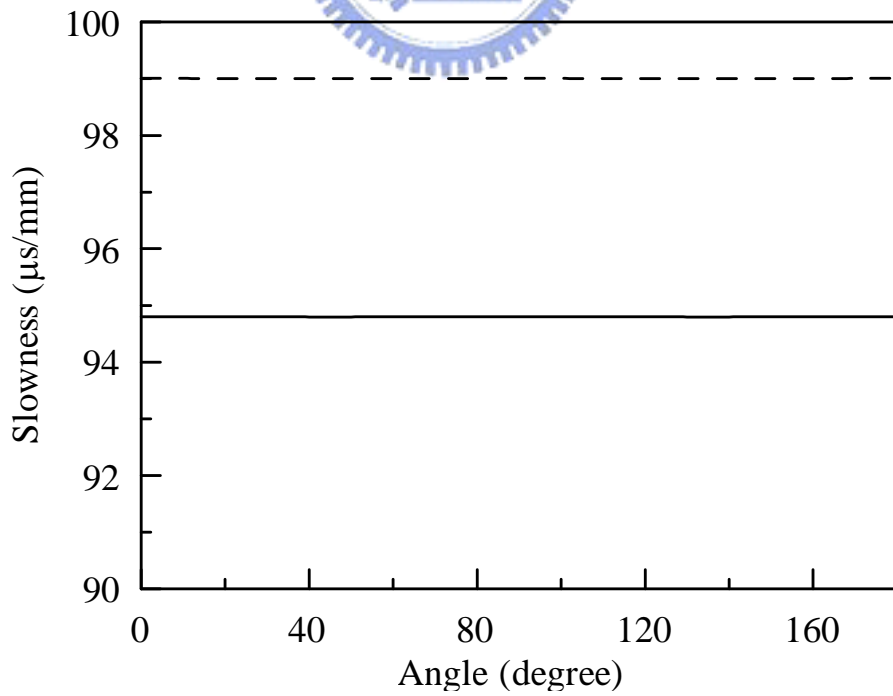


圖 4.4 鎳的熱波波慢，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5\text{GPa}$

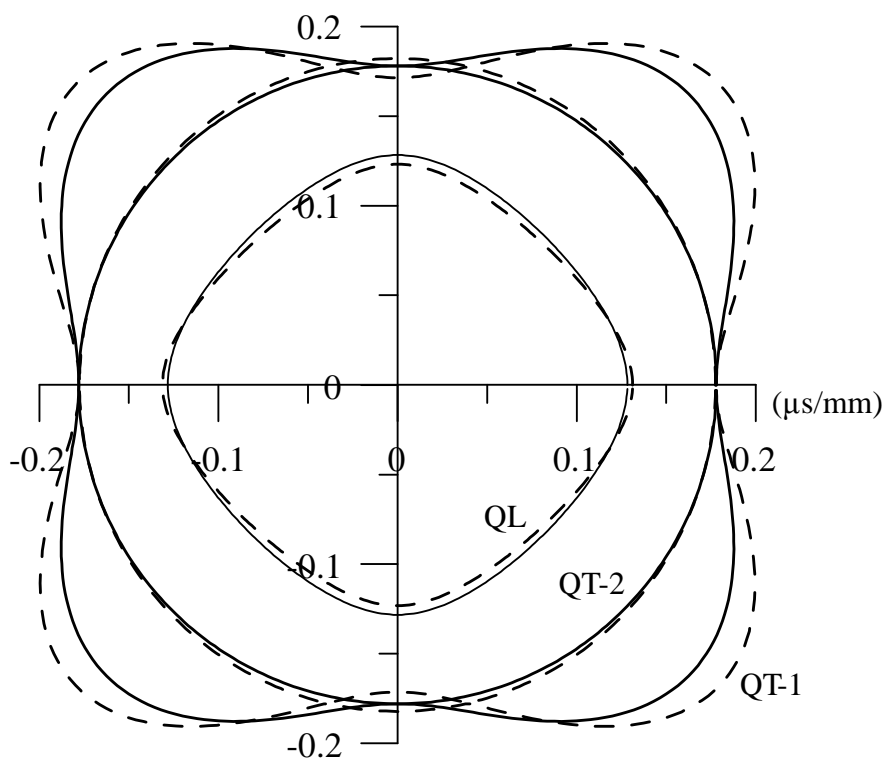


圖 4.5 鋅的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

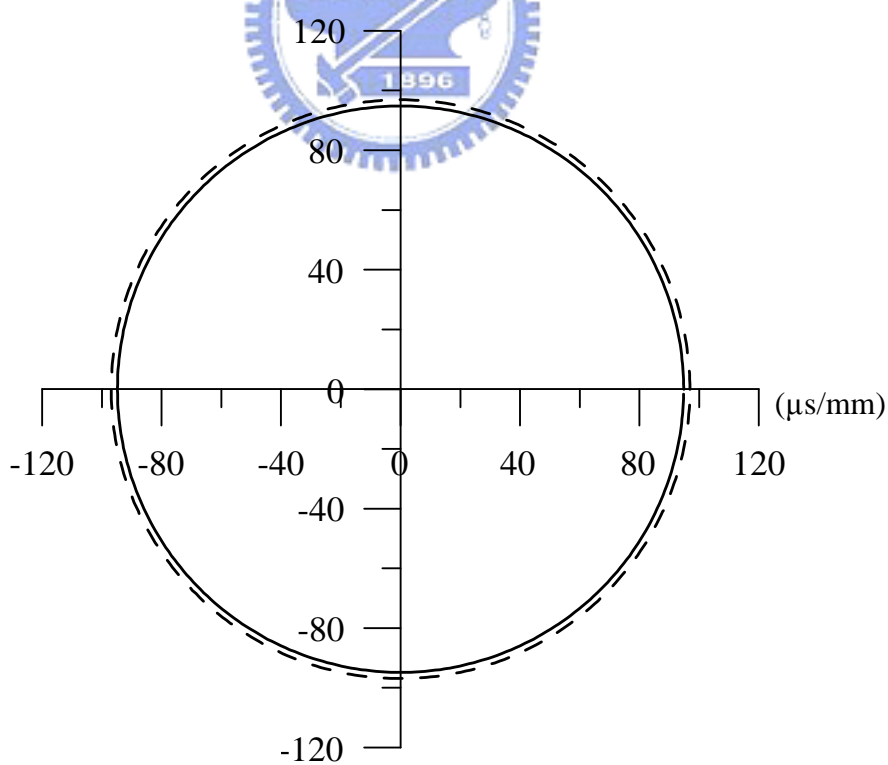


圖 4.6 鋅的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

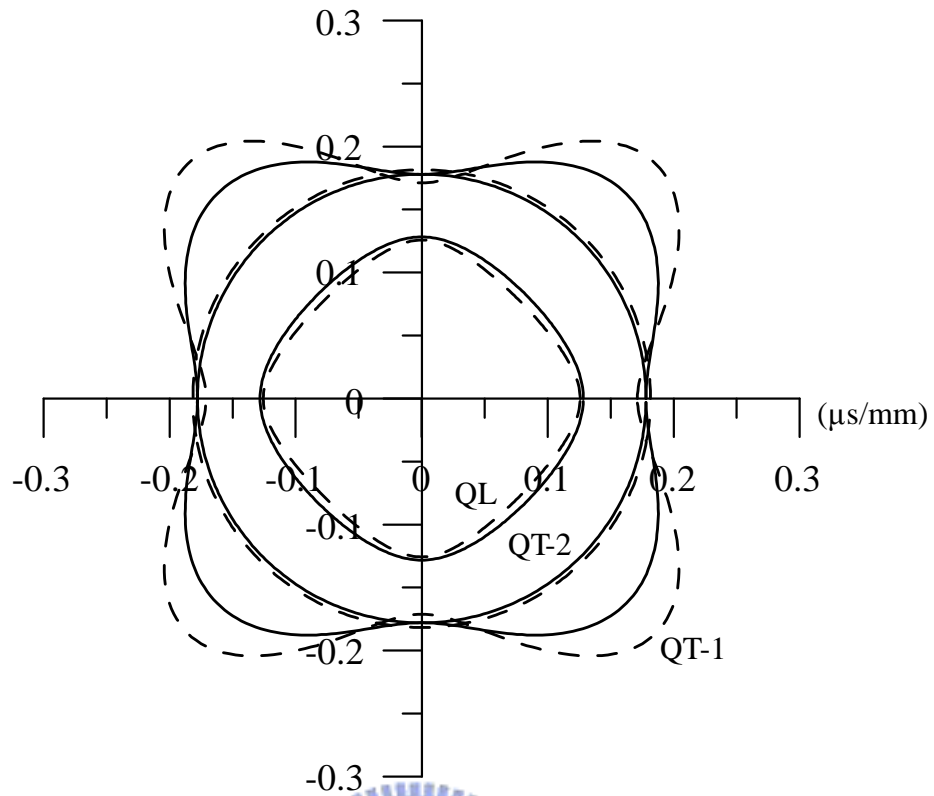


圖 4.7 鋅的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

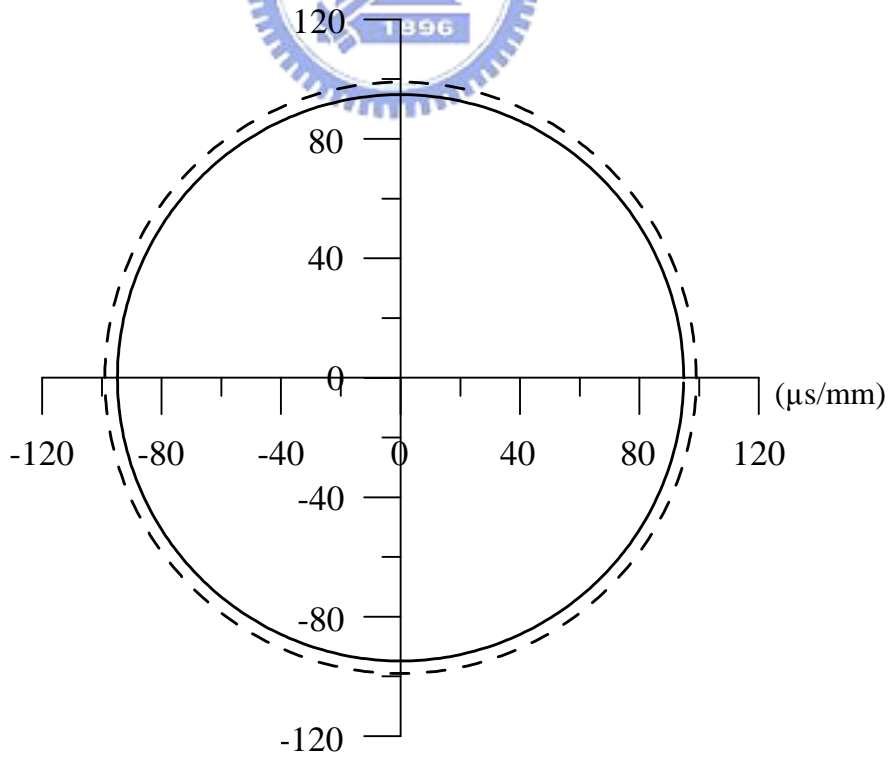


圖 4.8 鋅的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

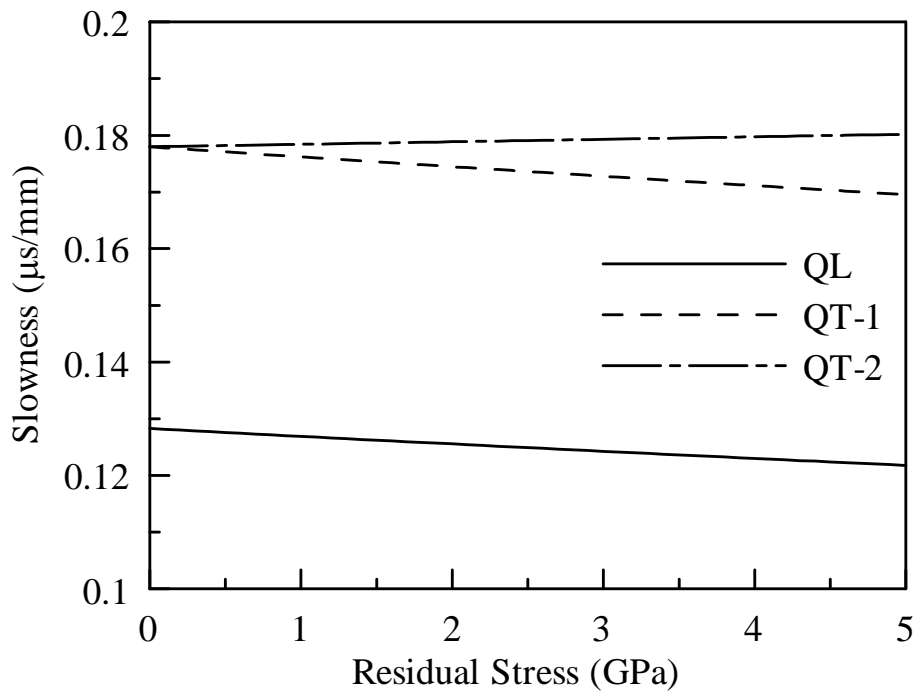


圖 4.9 鋅[010]方向的微體波波慢與殘留壓應力關係圖

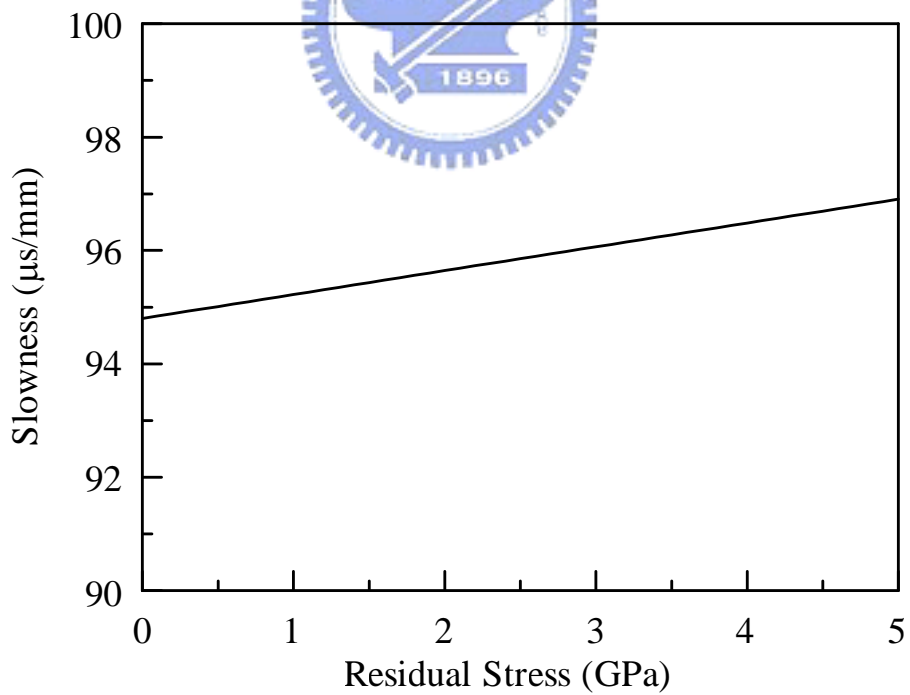


圖 4.10 鋅[010]方向的热波波慢與殘留壓應力關係圖

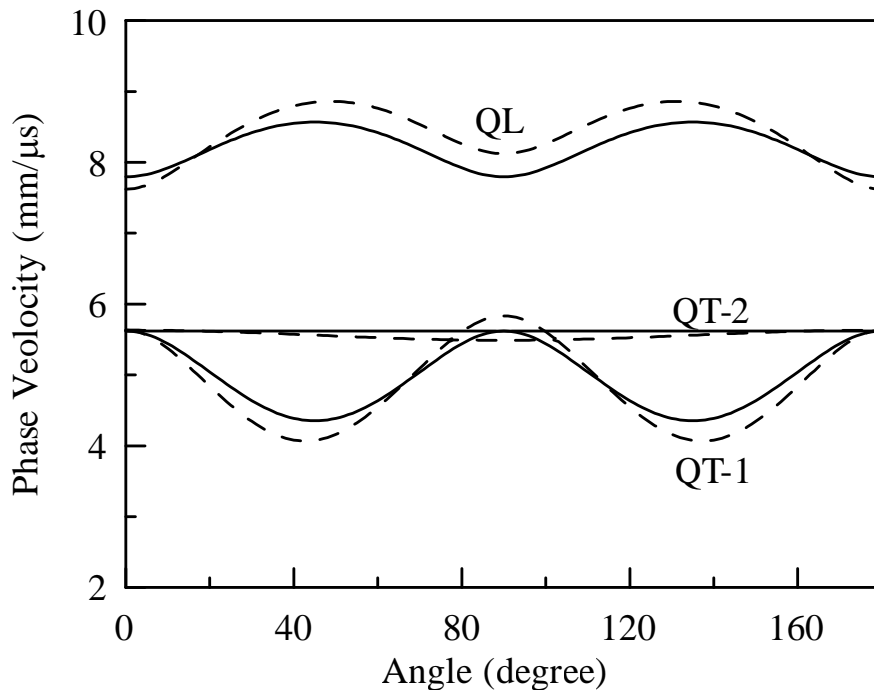


圖 4.11 鋅的微體波相速度，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

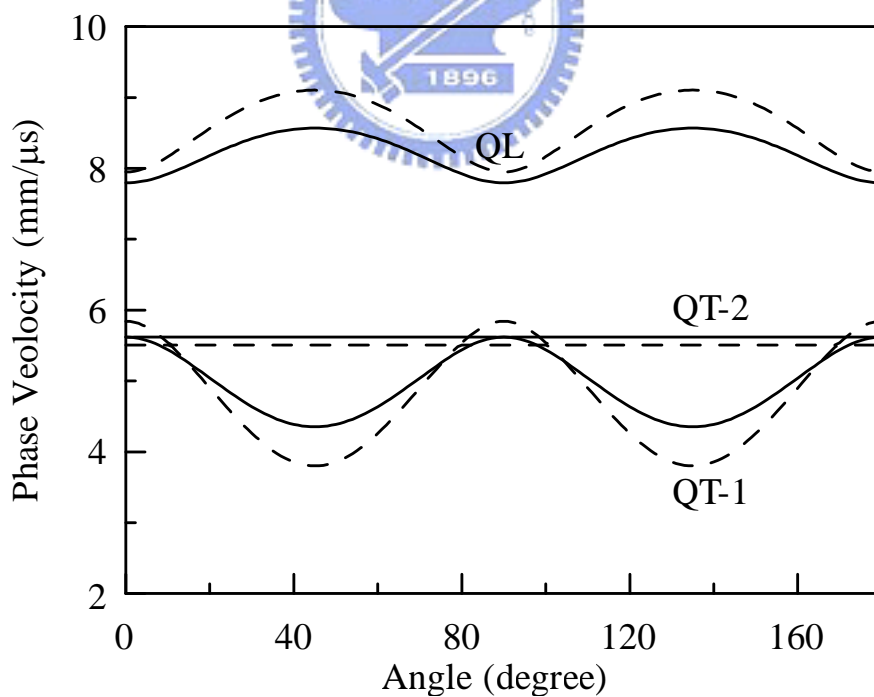


圖 4.12 鋅的微體波相速度，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

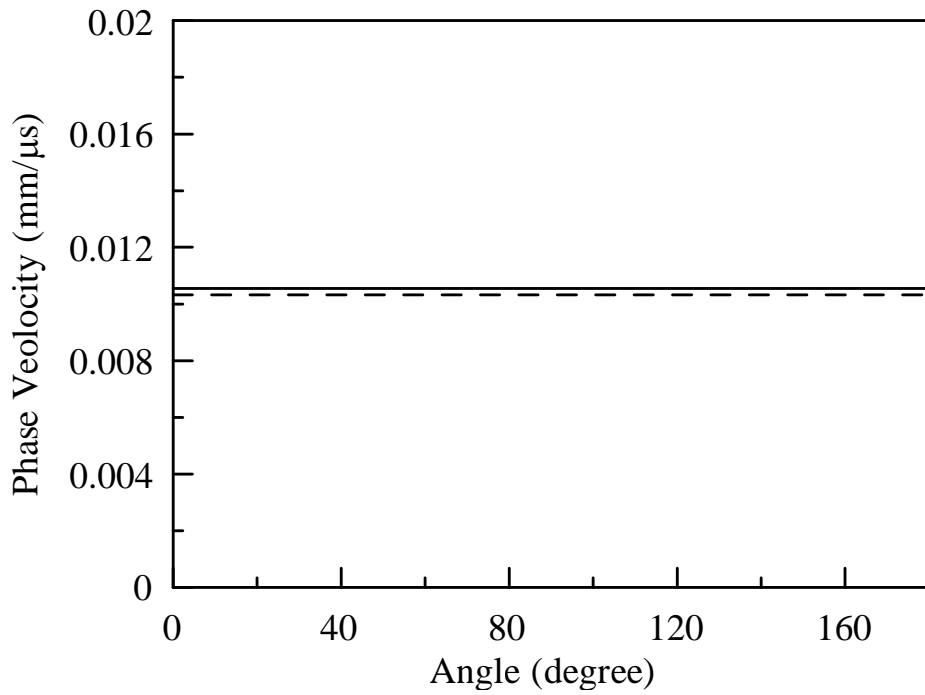


圖 4.13 鋅的熱波相速度，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

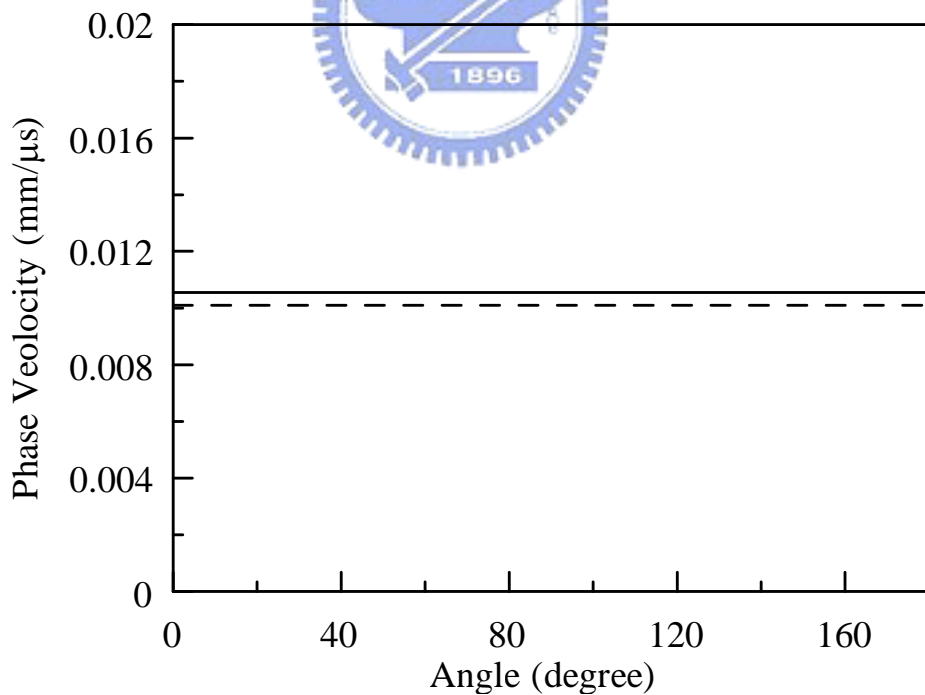


圖 4.14 鋅的熱波相速度，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

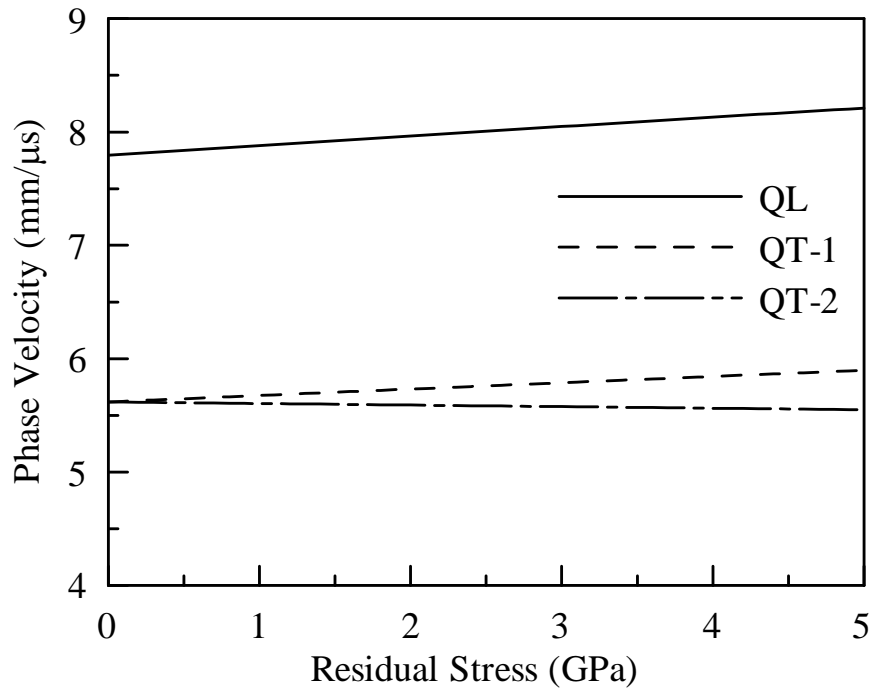


圖 4.15 鍺[010]方向的微體波相速度與殘留壓應力關係圖

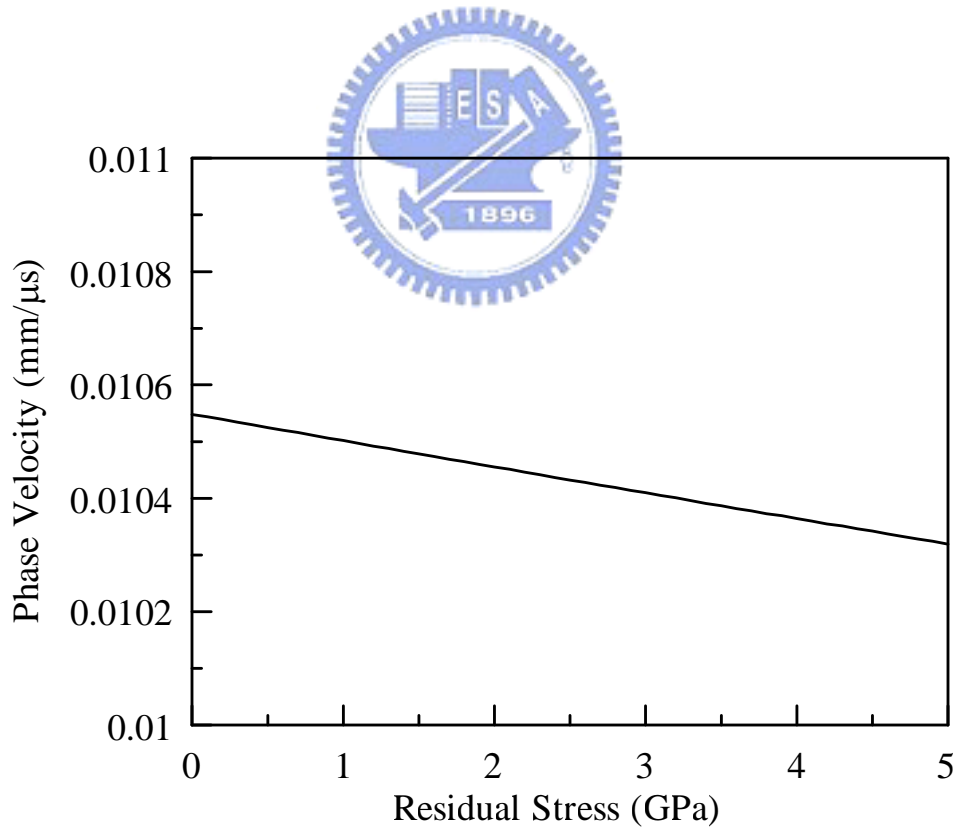


圖 4.16 鍺[010]方向的热波相速度與殘留壓應力關係圖

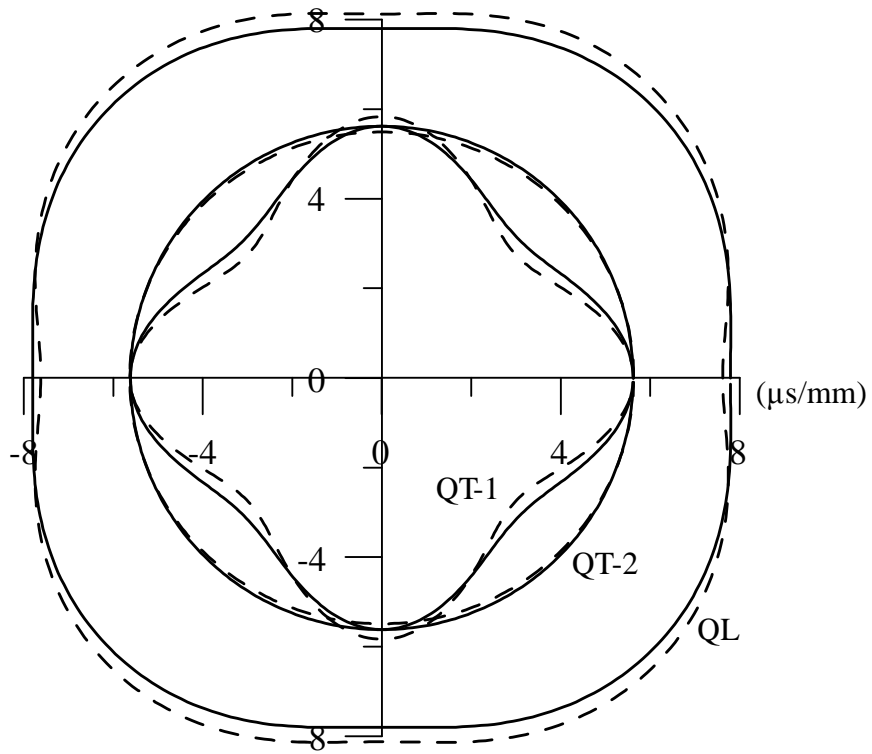


圖 4.17 鋅的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

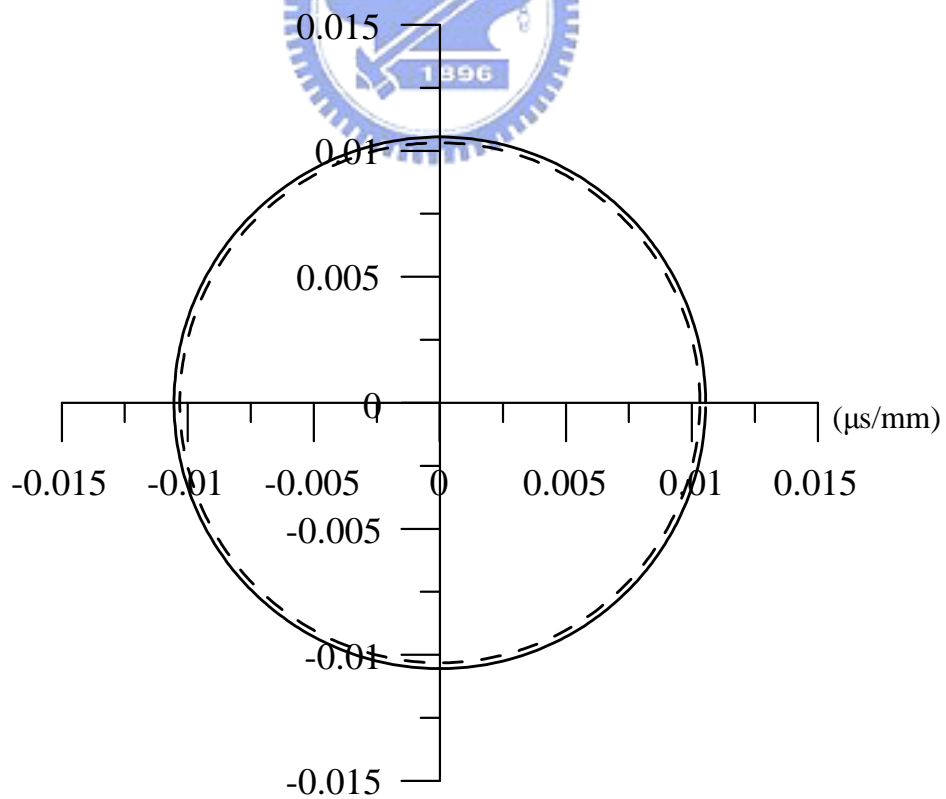


圖 4.18 鋅的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = -5GPa$

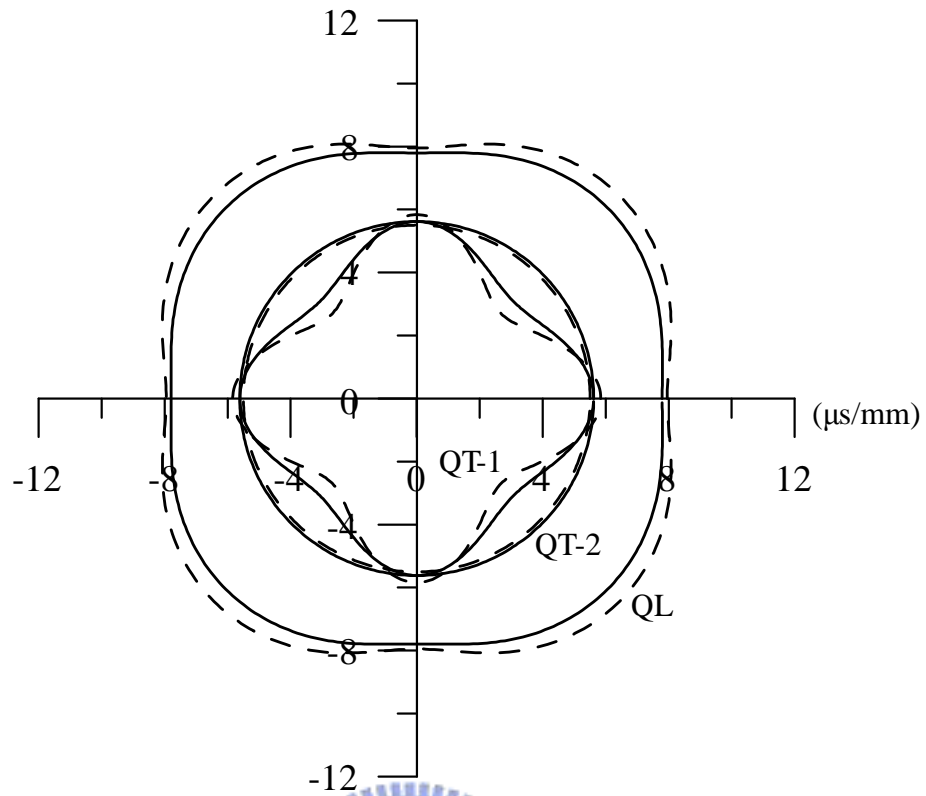


圖 4.19 鋳的徹體波相速度極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

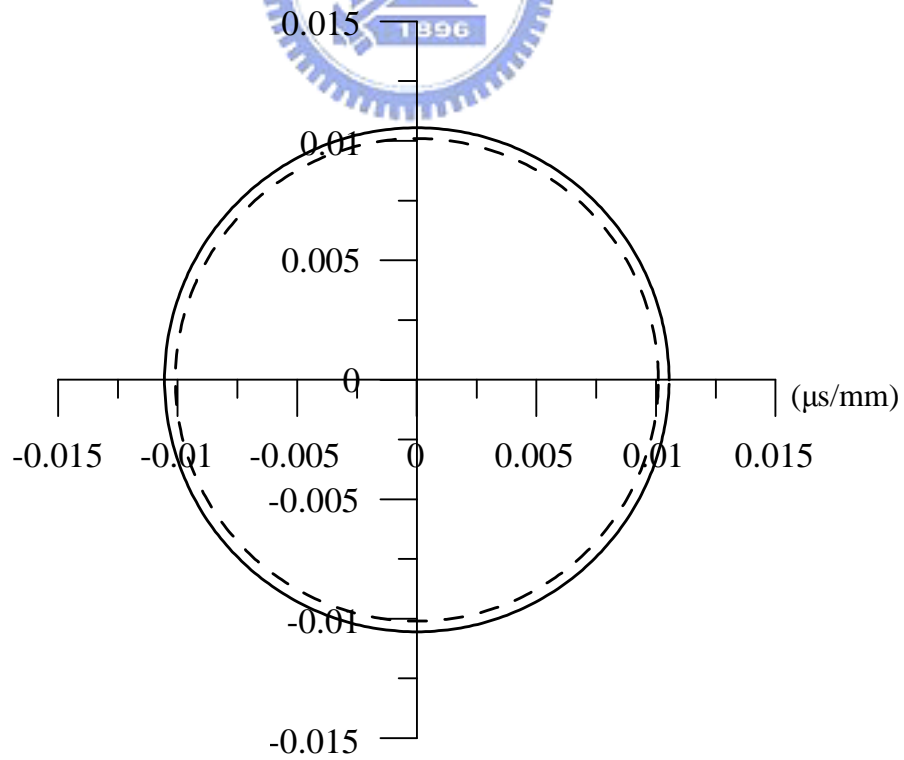


圖 4.20 鋳的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

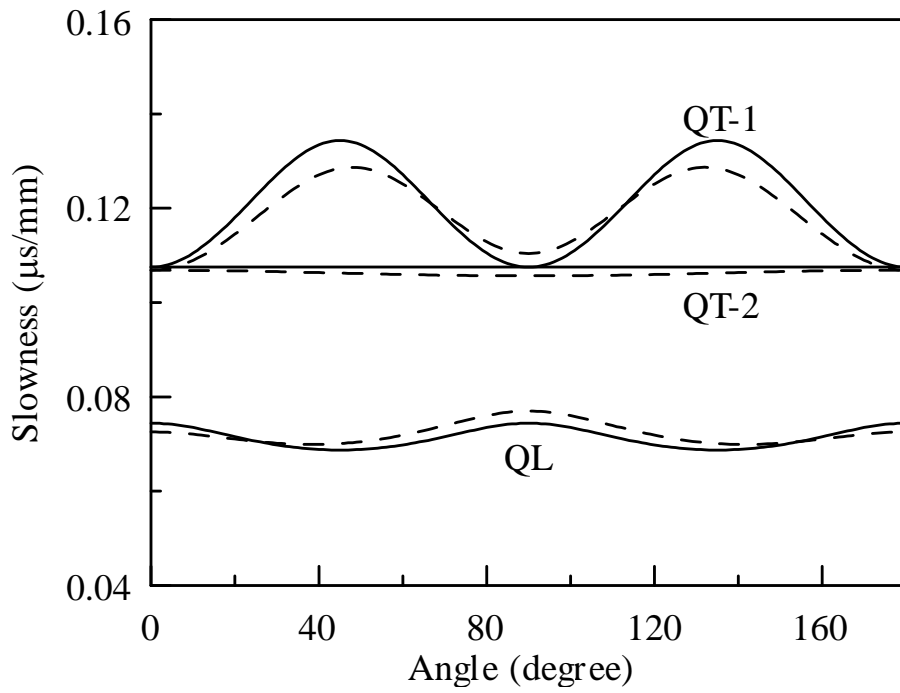


圖 4.21 砂的微體波波慢，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

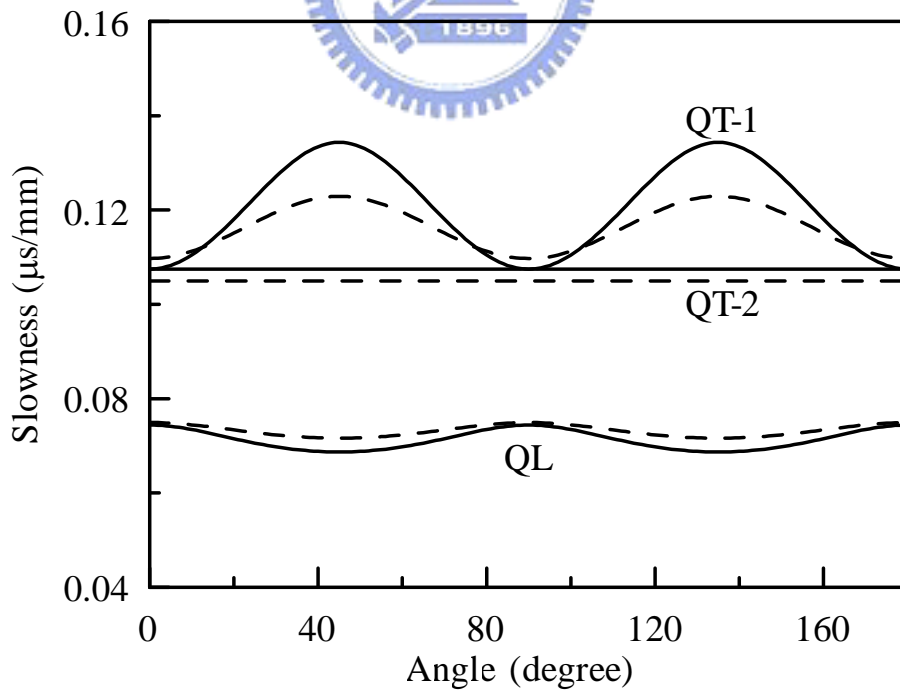


圖 4.22 砂的微體波波慢，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

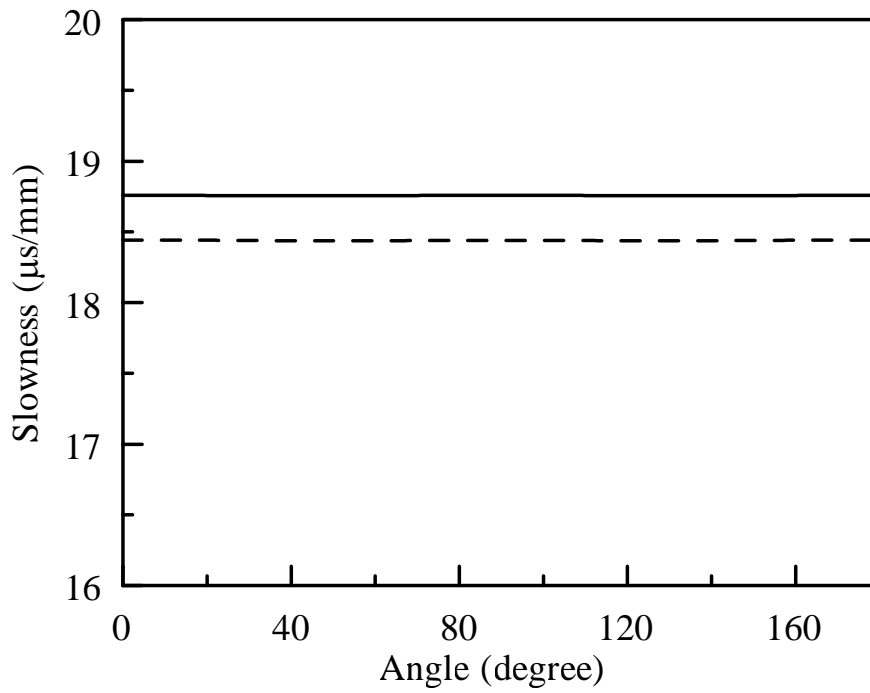


圖 4.23 矽的熱波波慢，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5 \text{ GPa}$

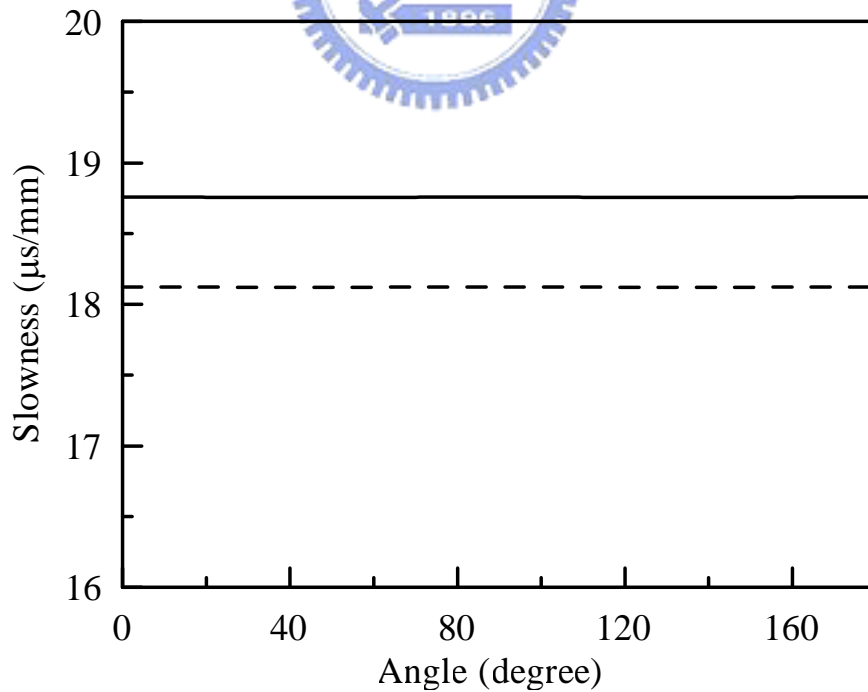


圖 4.24 矽的熱波波慢，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5 \text{ GPa}$

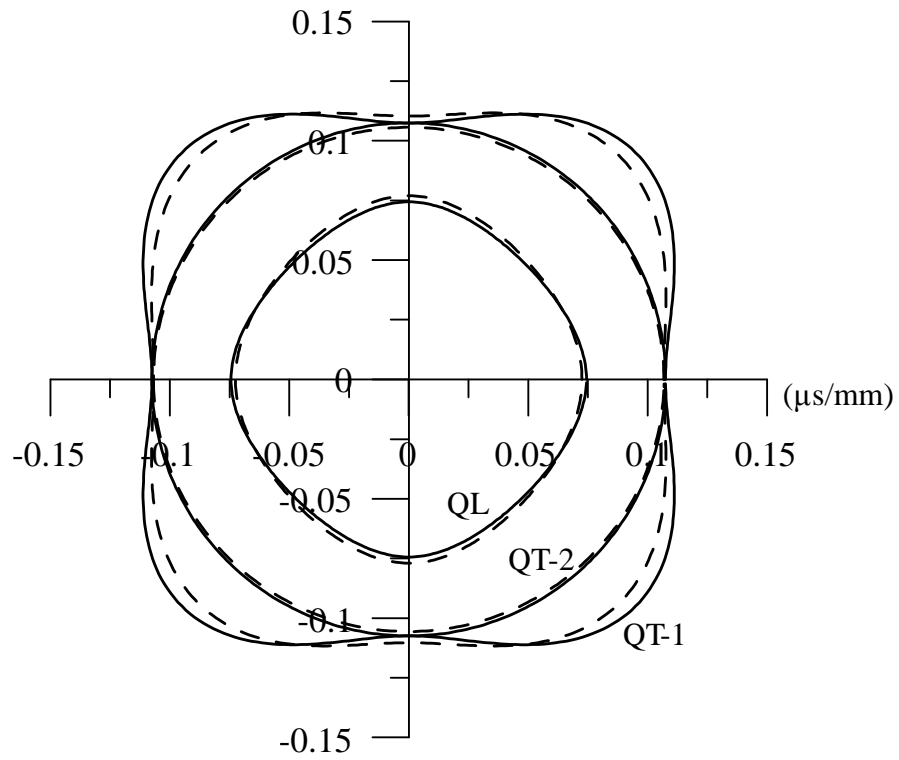


圖 4.25 矽的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

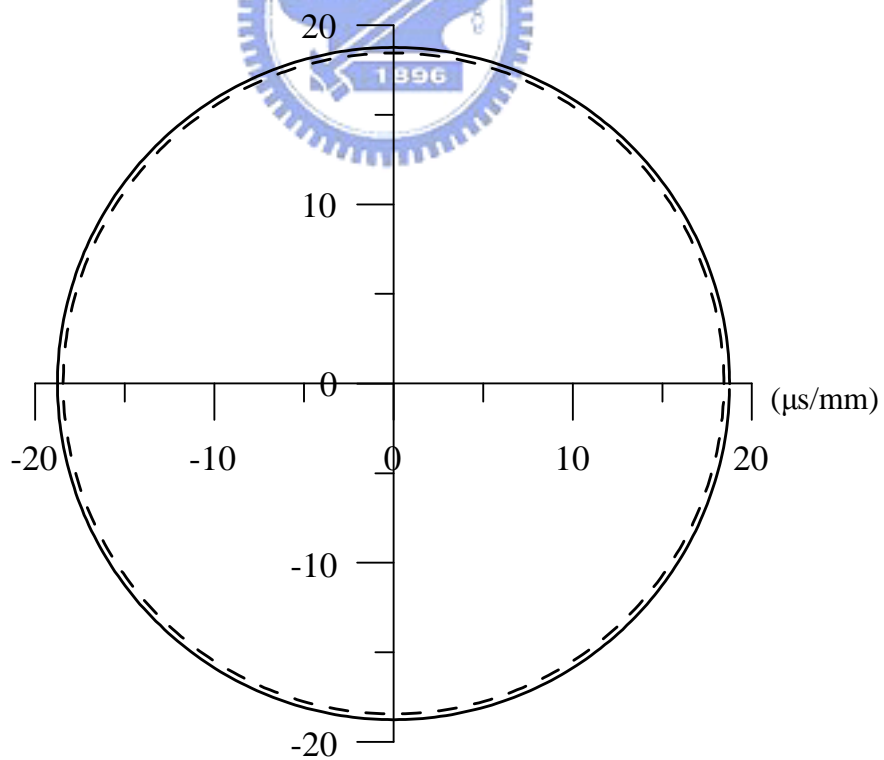


圖 4.26 矽的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

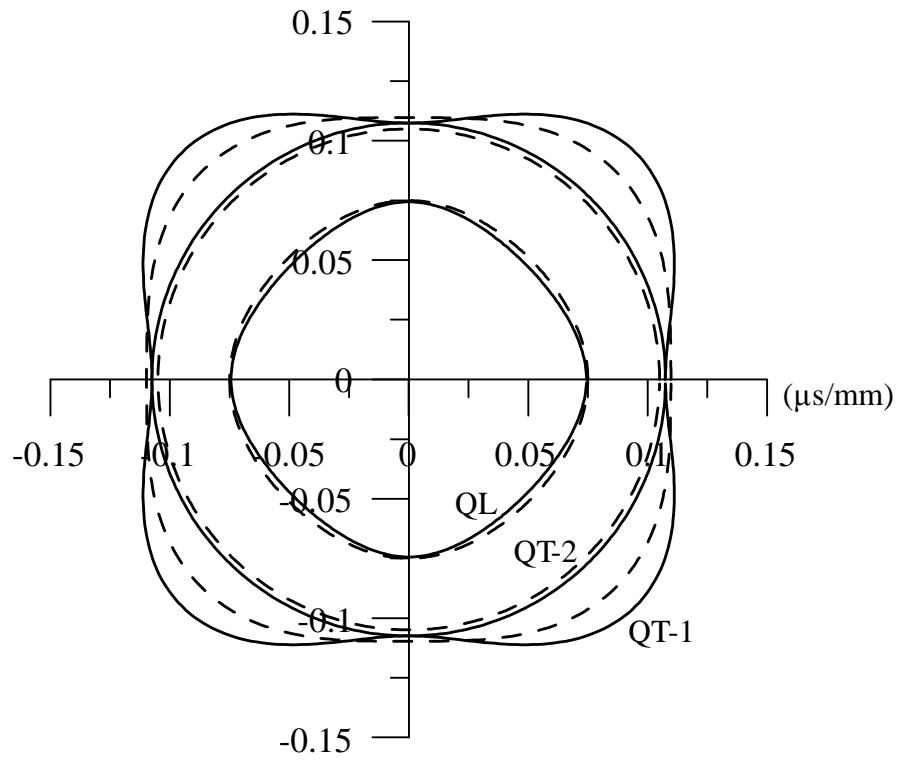


圖 4.27 砂的微體波波慢極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

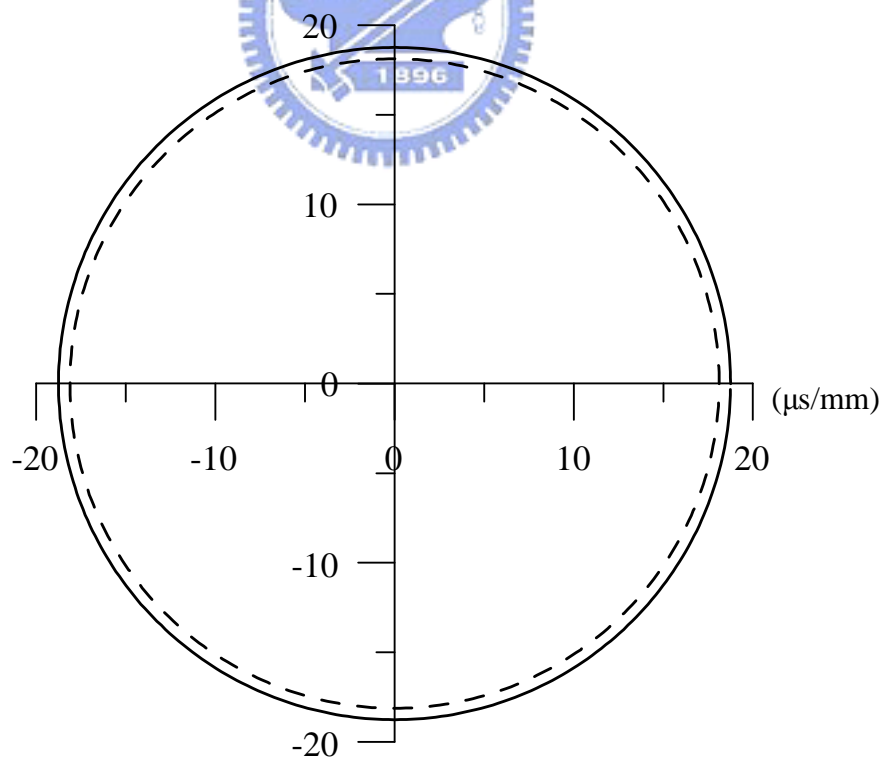


圖 4.28 砂的熱波波慢極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

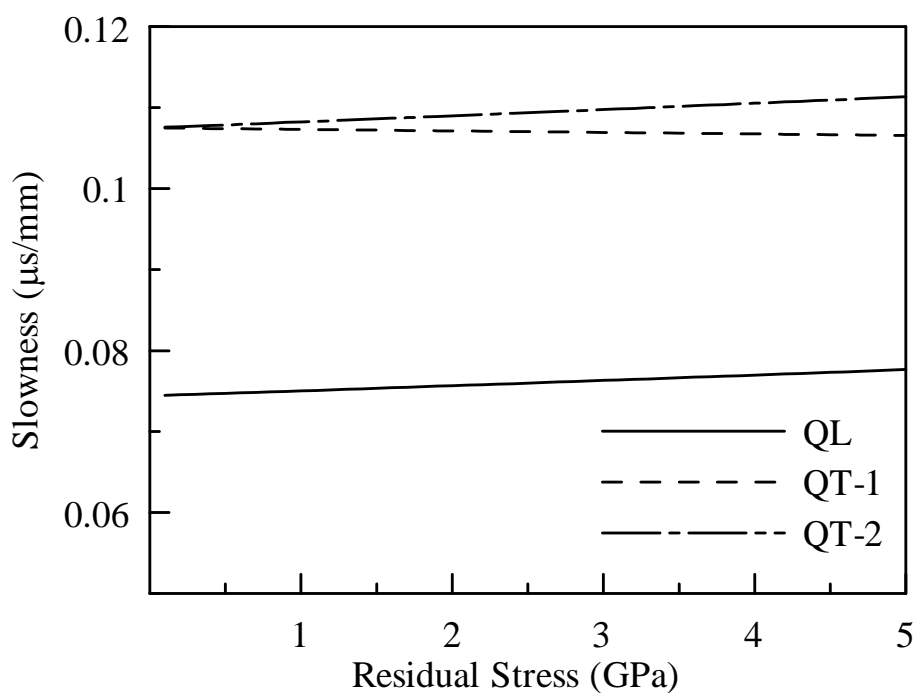


圖 4.29 矽[010]方向的微體波波慢與殘留拉應力關係圖

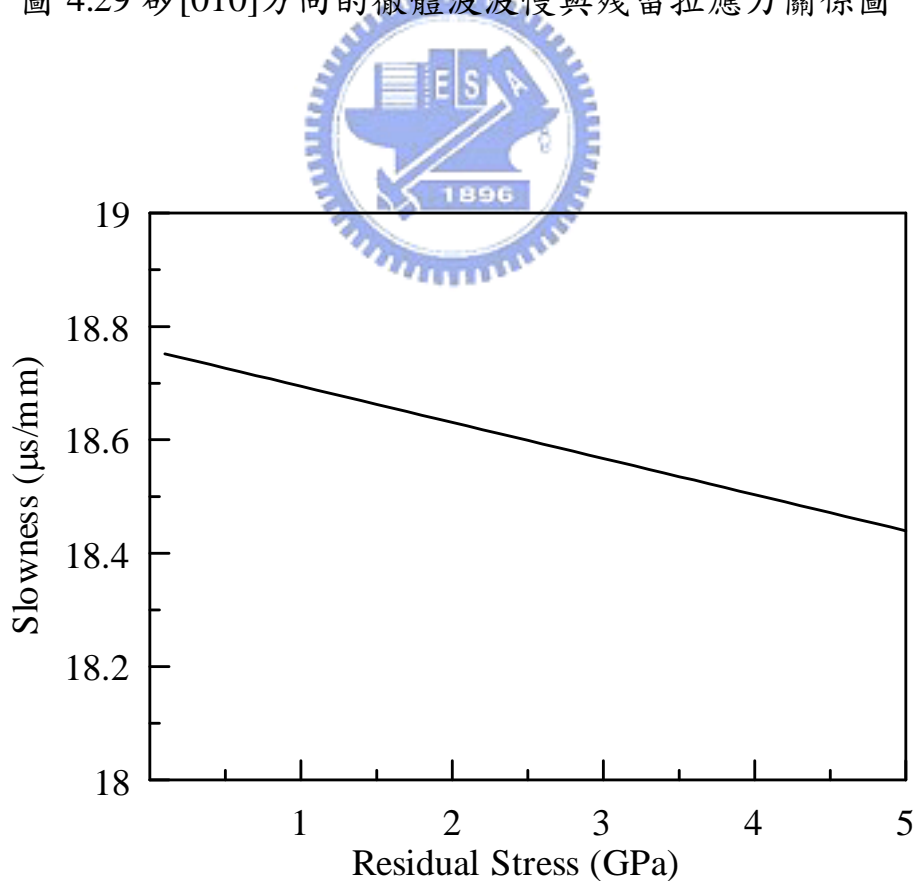


圖 4.30 矽[010]方向的热波波慢與殘留拉應力關係圖

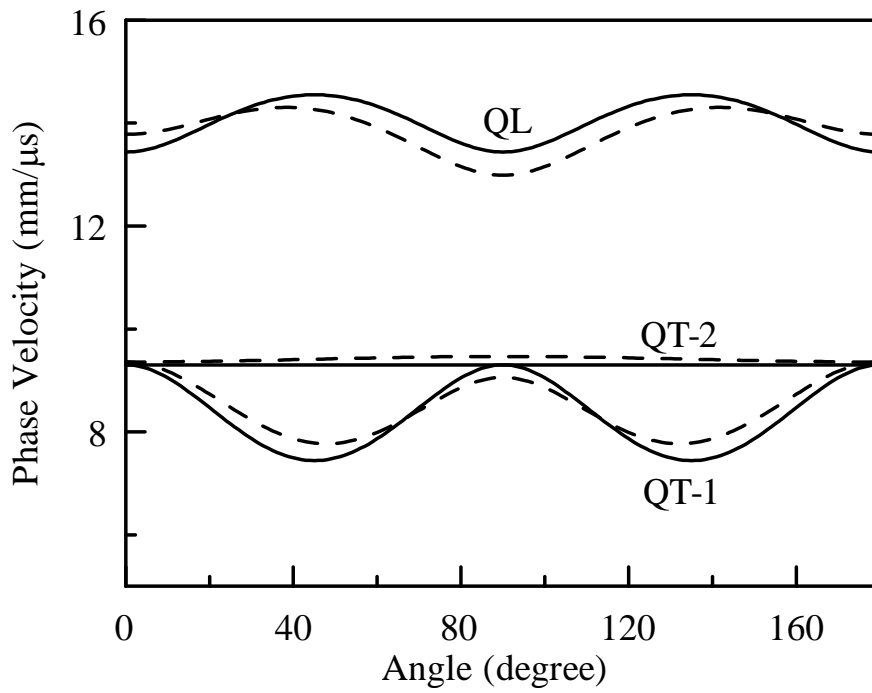


圖 4.31 矽的微體波相速度，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

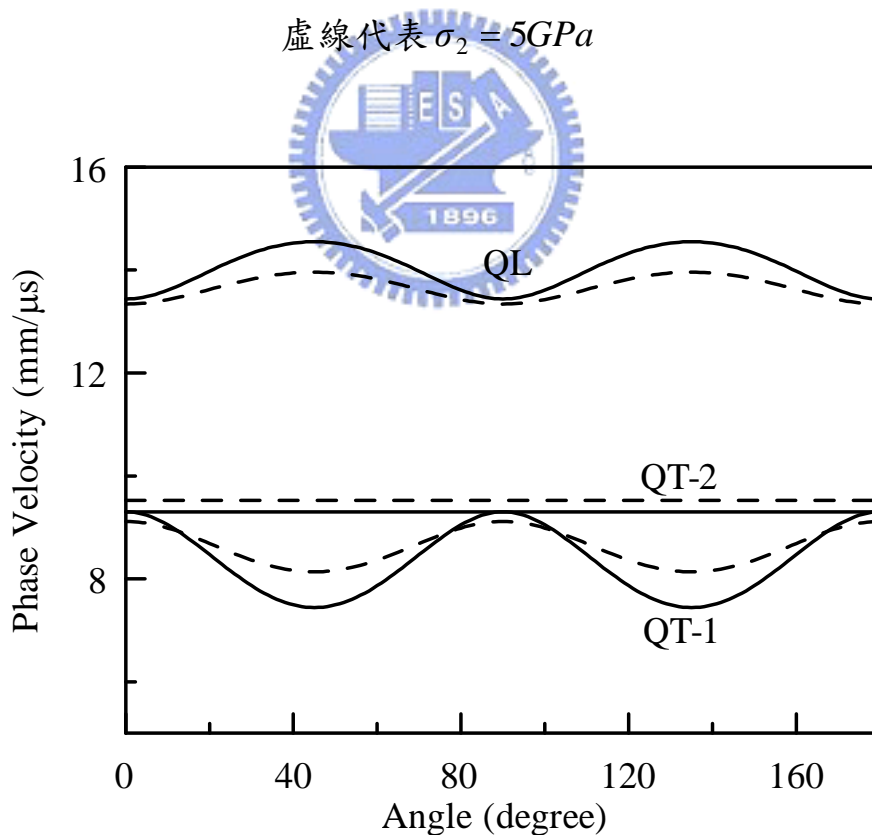


圖 4.32 矽的微體波相速度，實線代表未受應力，
虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

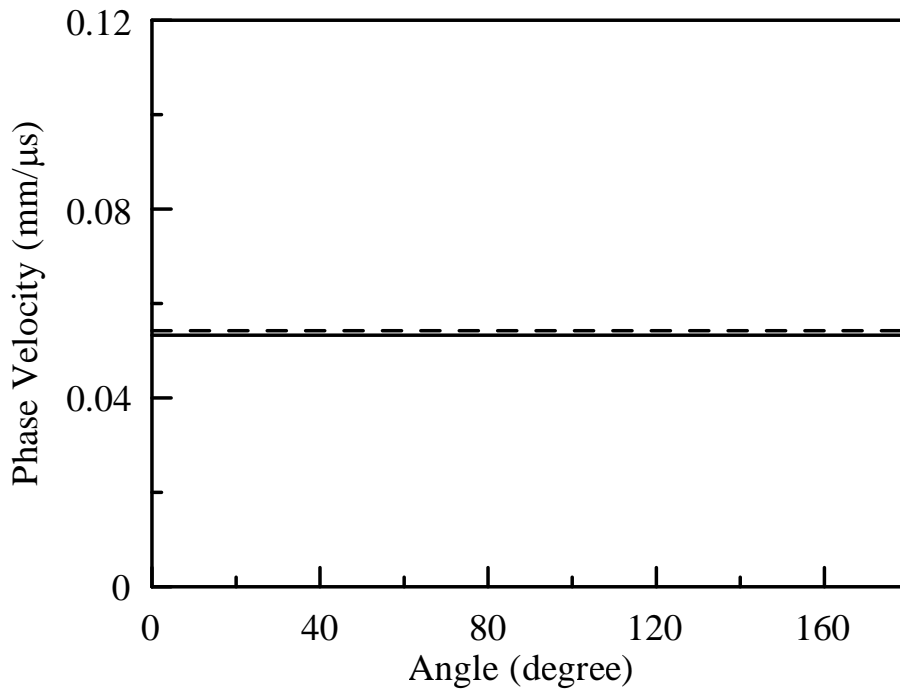


圖 4.33 矽的熱波相速度，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5 \text{ GPa}$

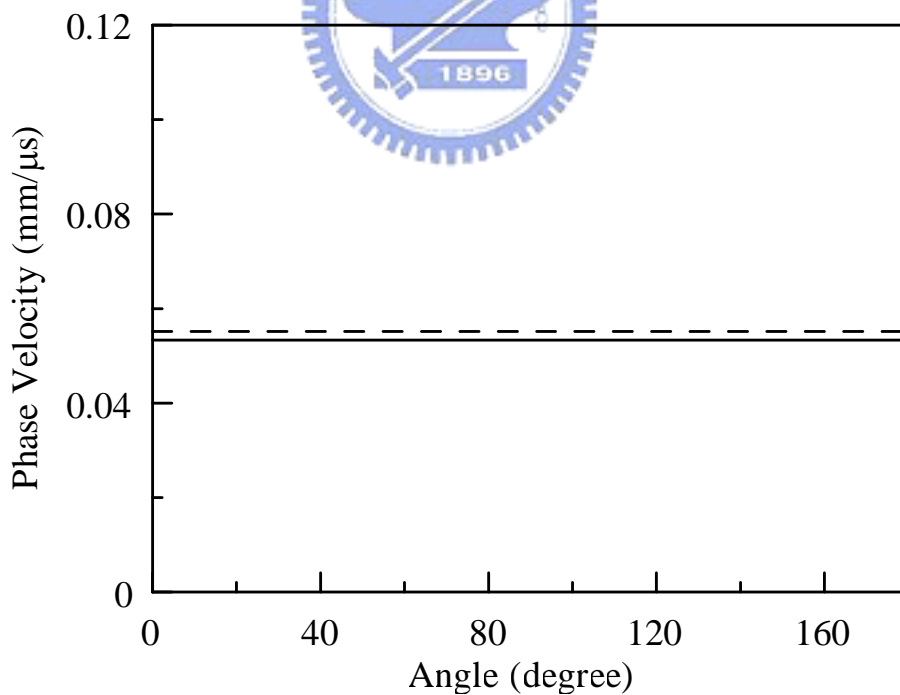


圖 4.34 矽的熱波相速度，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5 \text{ GPa}$

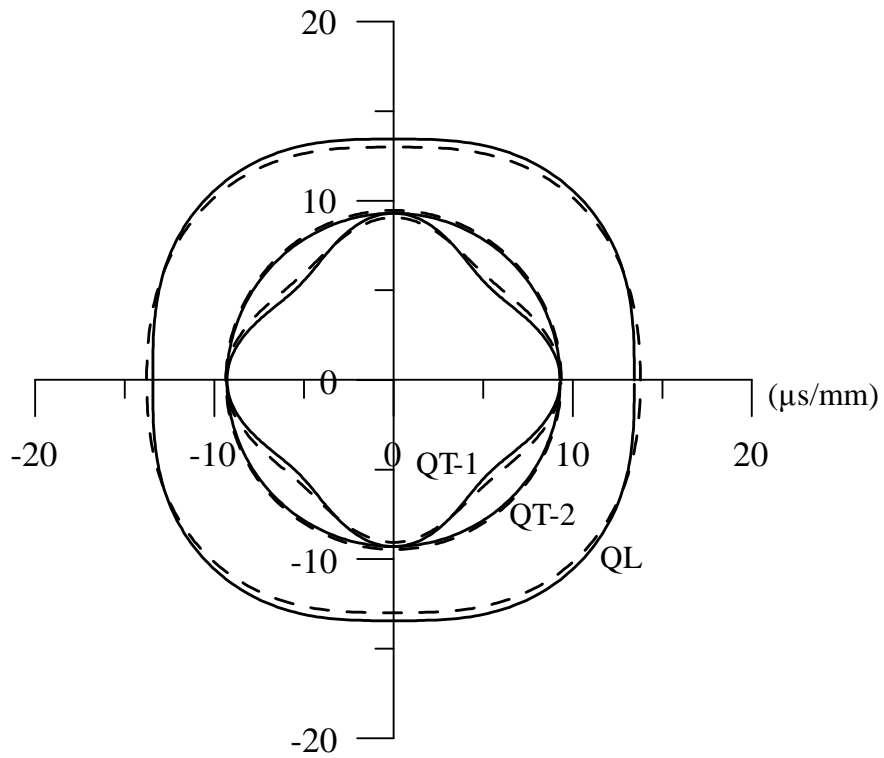


圖 4.35 矽的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

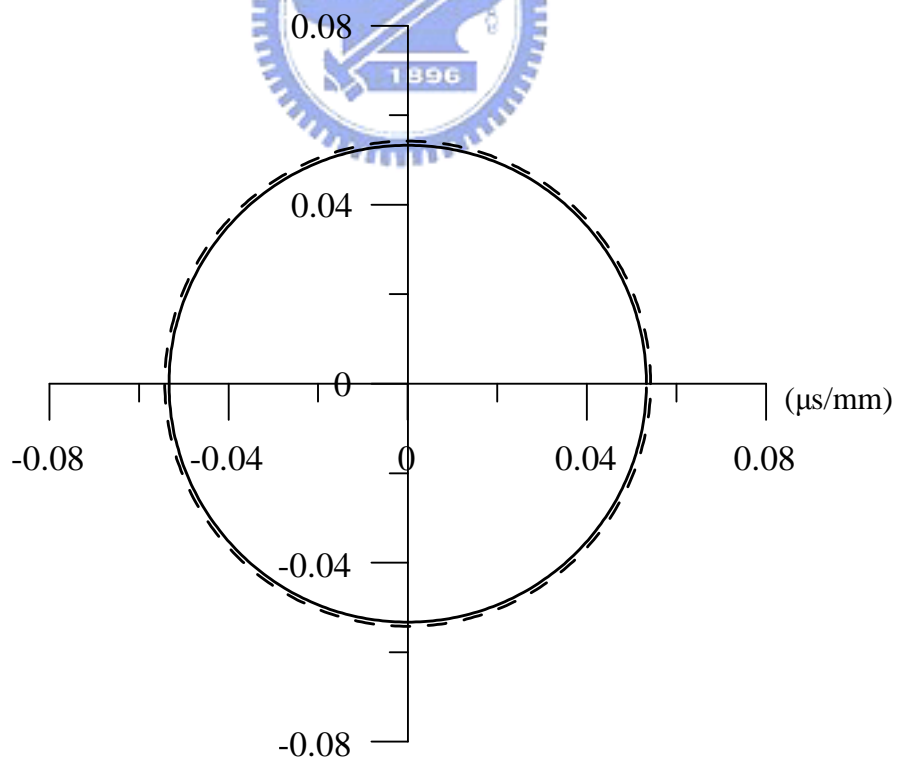


圖 4.36 矽的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_2 = 5GPa$

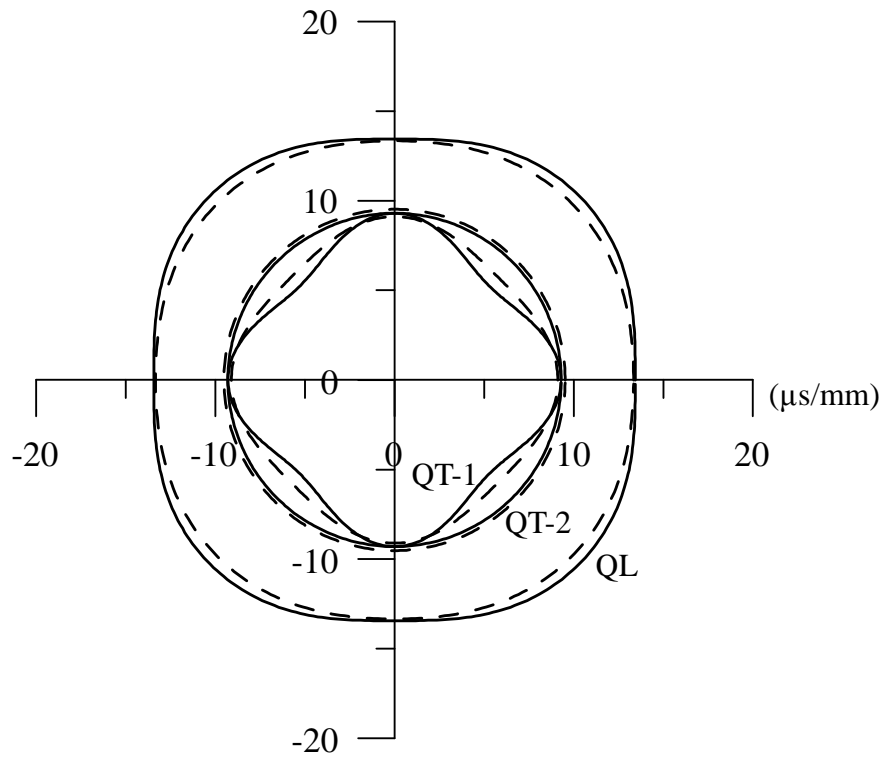


圖 4.37 矽的微體波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

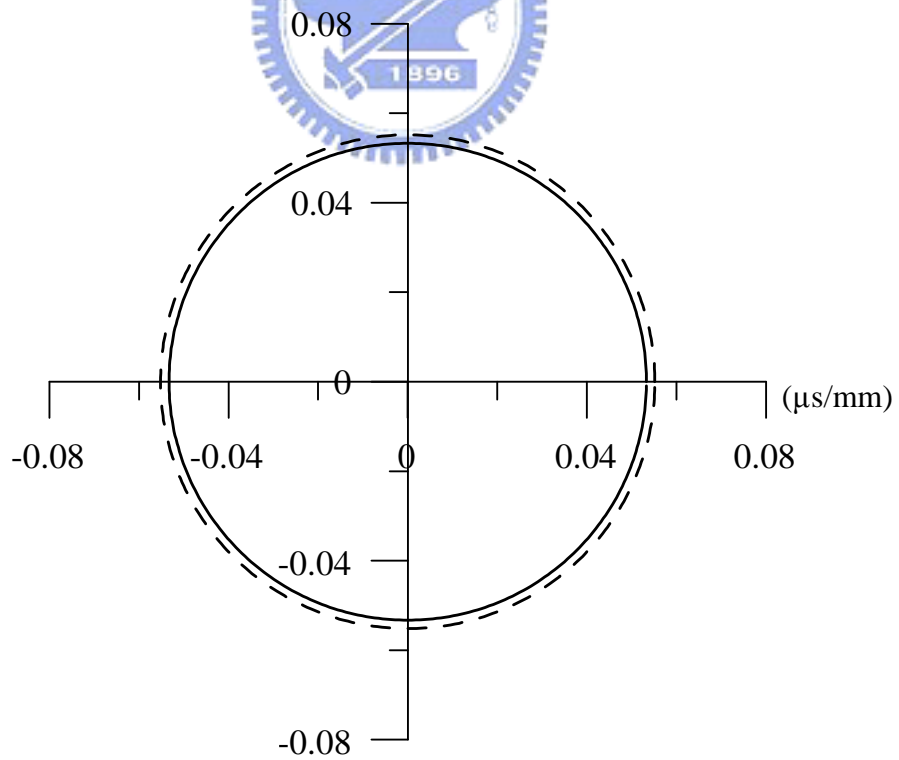


圖 4.38 矽的熱波相速度極圖，實線代表未受應力，

虛線代表 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

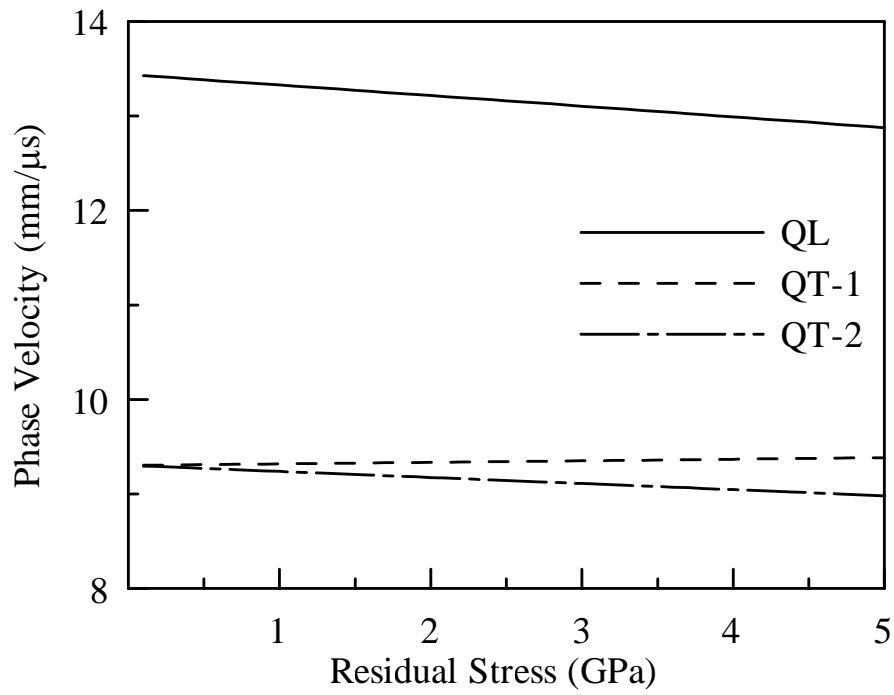


圖 4.39 矽[010]方向的微體波相速度與殘留拉應力關係圖

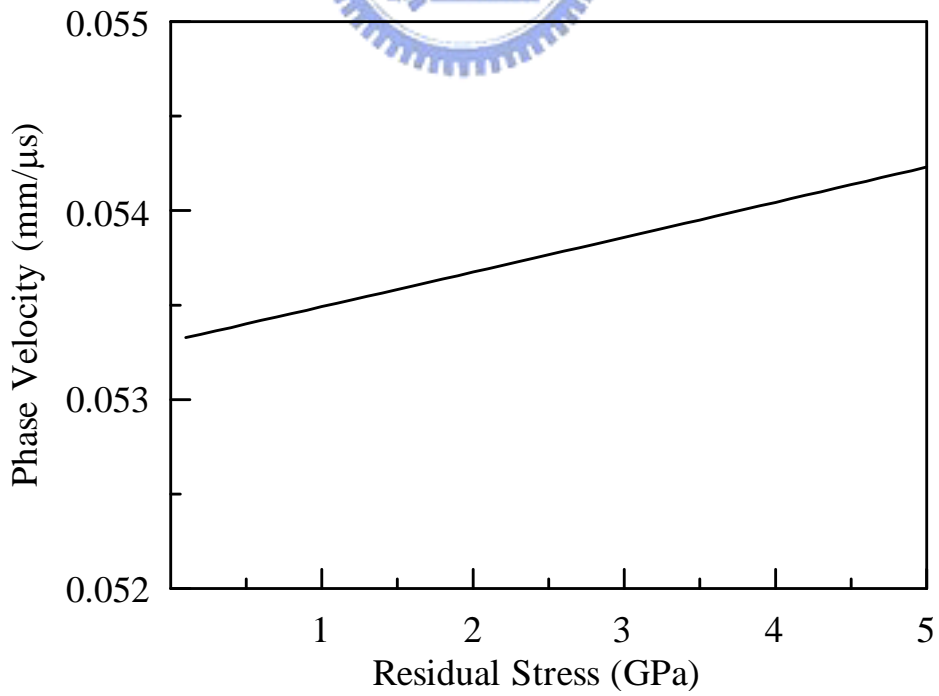


圖 4.40 矽[010]方向的热波相速度與殘留拉應力關係圖

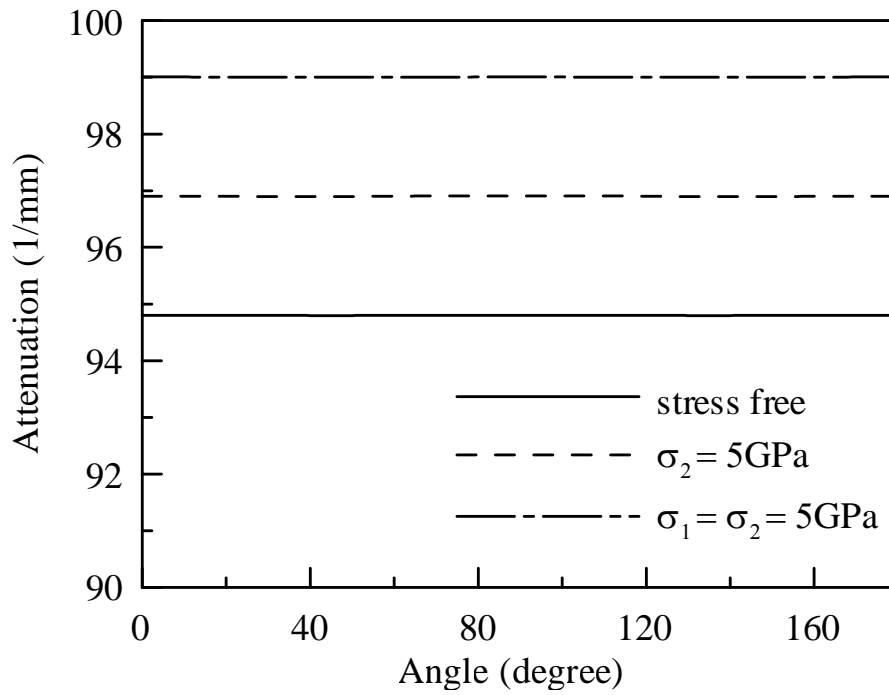


圖 4.41 鉻受單軸及雙軸壓應力的熱波衰減強度

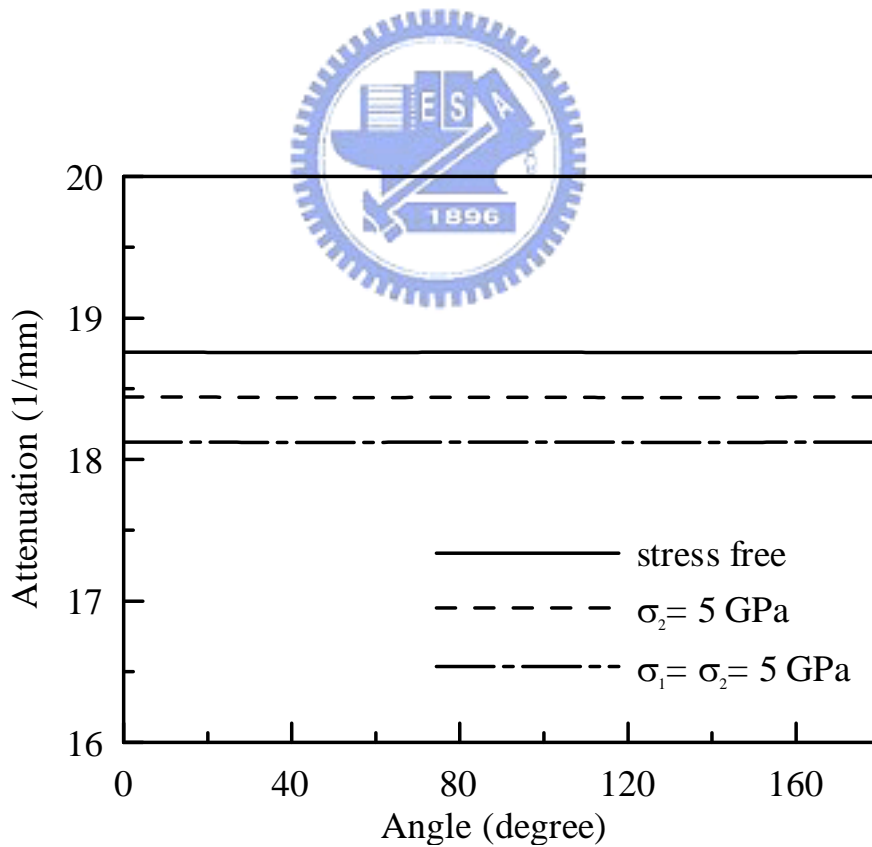
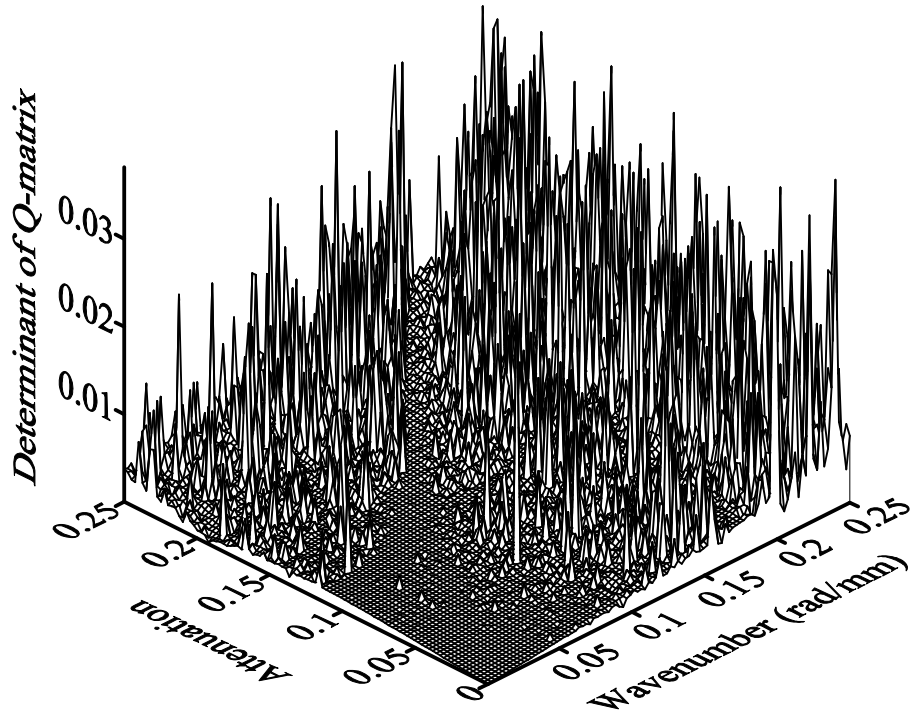
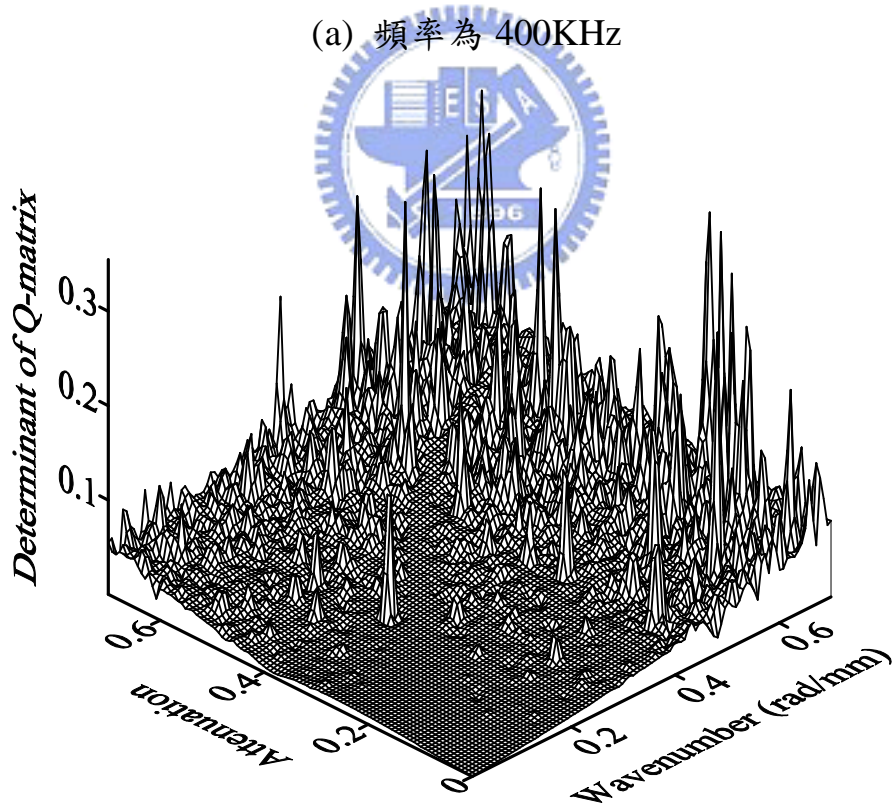


圖 4.42 矽受單軸及雙軸拉應力的熱波衰減強度

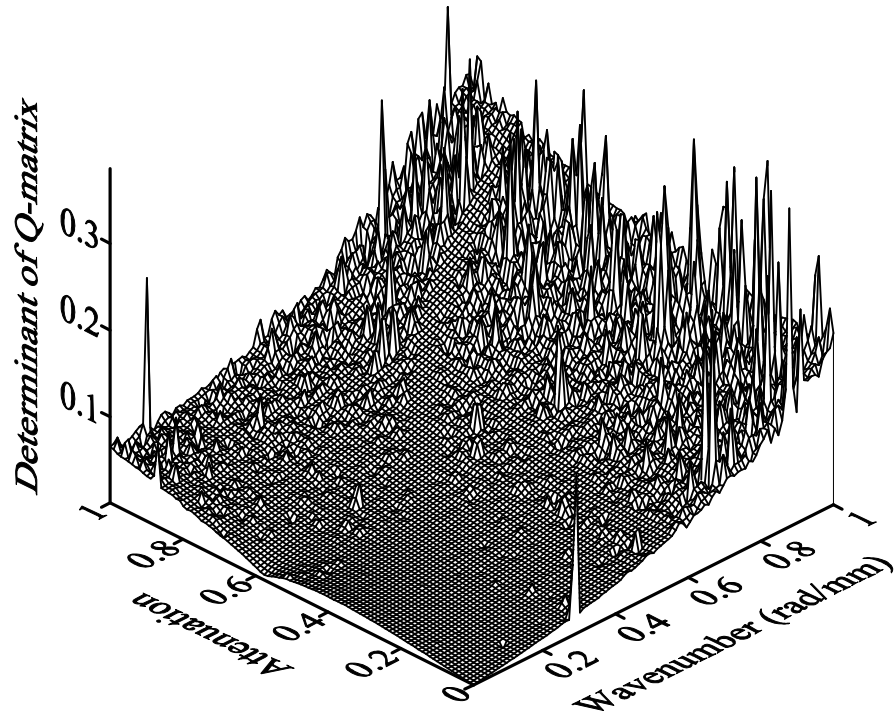


(a) 頻率為 400KHz

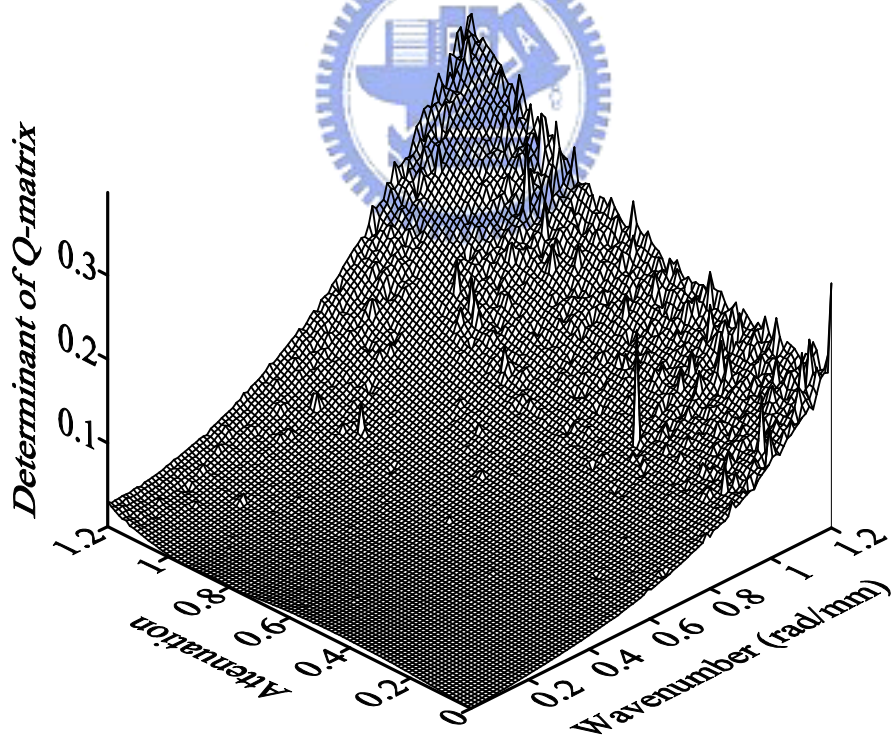


(b) 頻率為 800KHz

圖 4.43 鎢平板[110]波傳方向的 $|Q^S|$ 對波數、衰減值的變化



(c) 頻率為 1.2MHz



(d) 頻率為 1.6MHz

圖 4.43 (續)

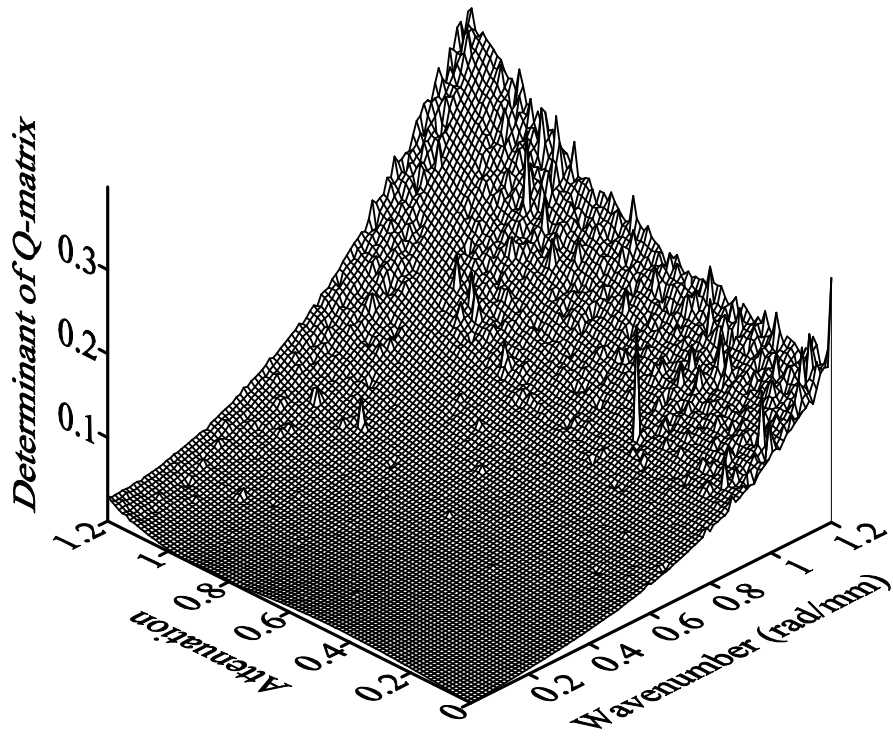


圖 4.44 鋸平板在頻率為 1.6MHz 時， $|Q^S|$ 對波數、衰減值的關係變化

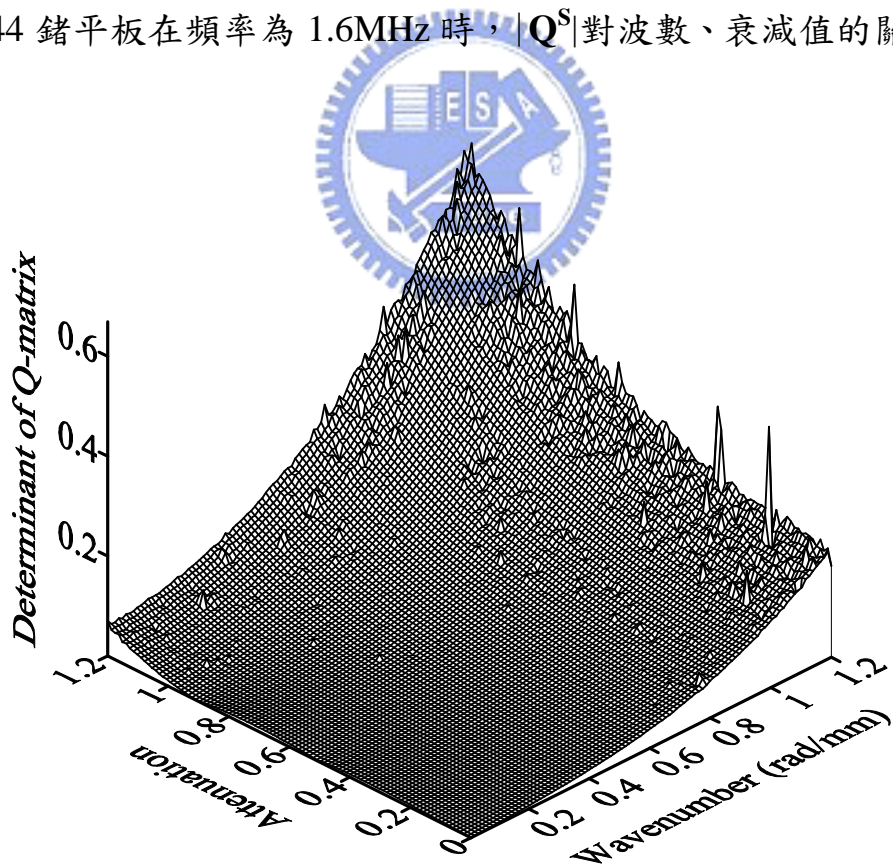


圖 4.45 同圖 4.44，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

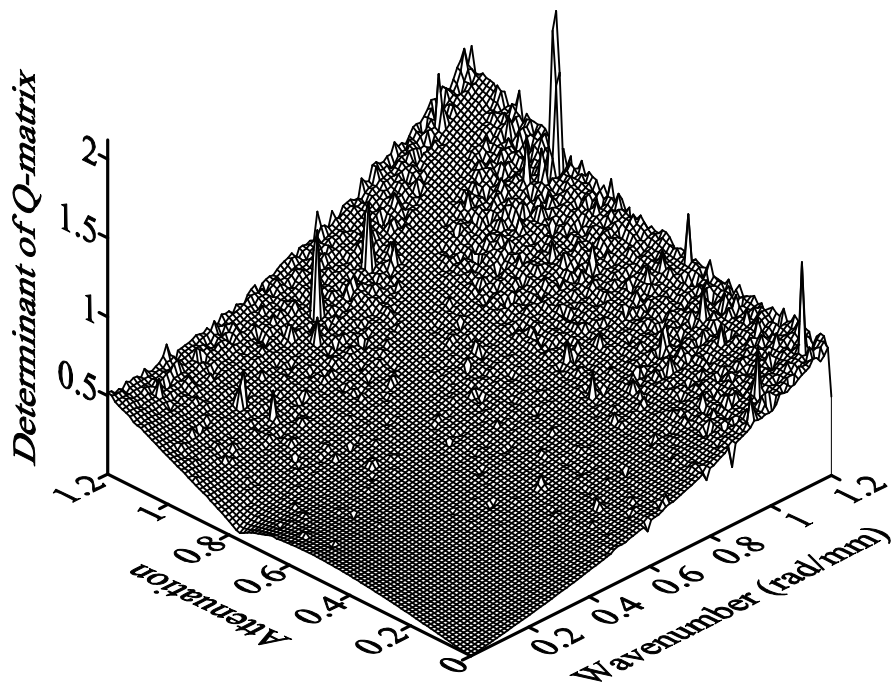


圖 4.46 鉛平板在頻率為 1.6MHz 時， $|Q^A|$ 對波數、衰減值的變化

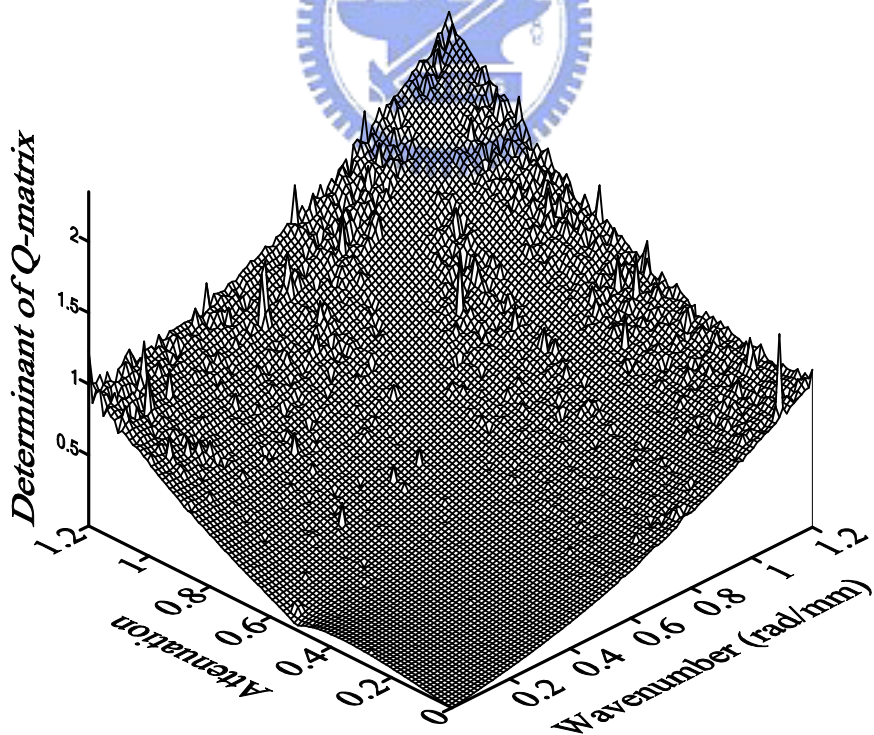


圖 4.47 同圖 4.46，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = -5GPa$

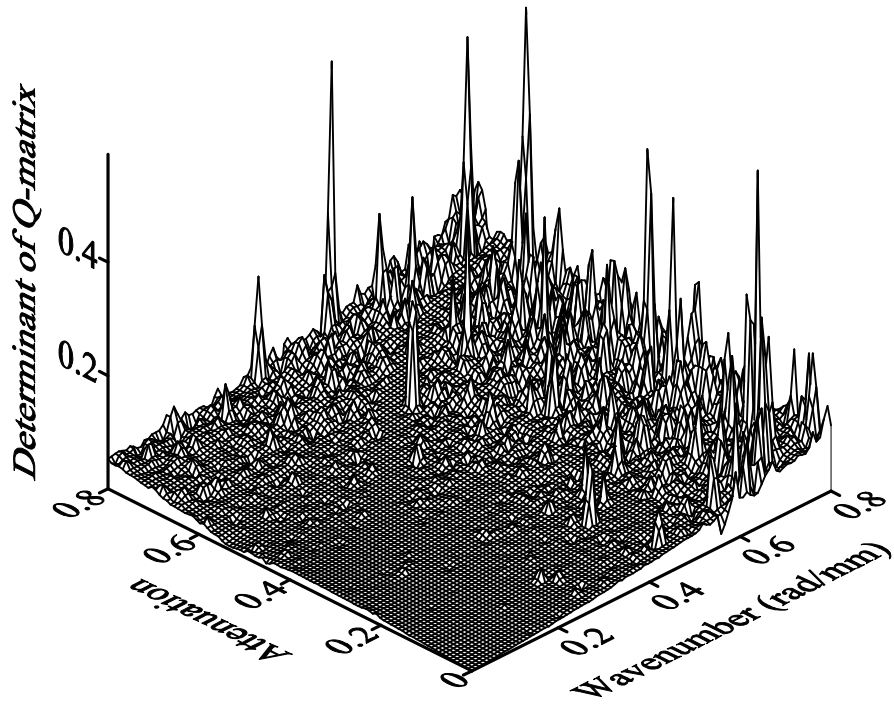


圖 4.48 矽平板在頻率為 1.6MHz 時， $|Q^S|$ 對波數、衰減值的變化

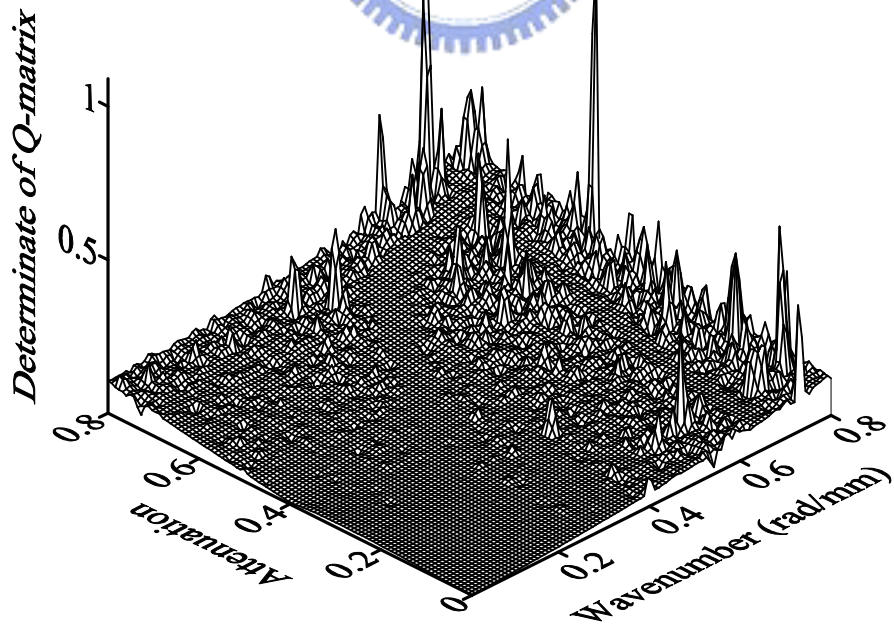


圖 4.49 同圖 4.48，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$

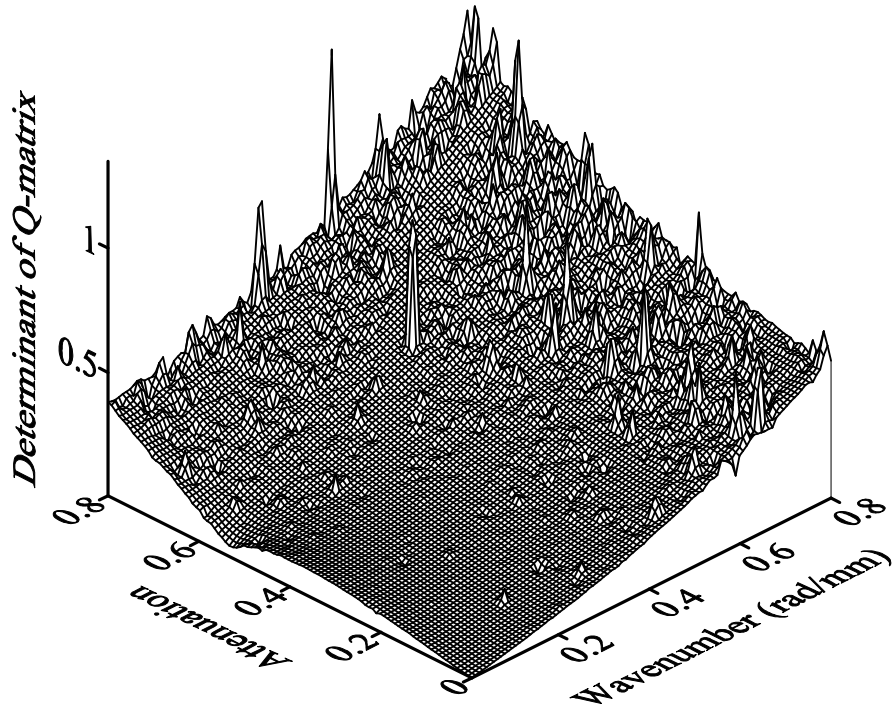


圖 4.50 矽平板在頻率為 1.6MHz 時， $|Q^A|$ 對波數、衰減值的變化

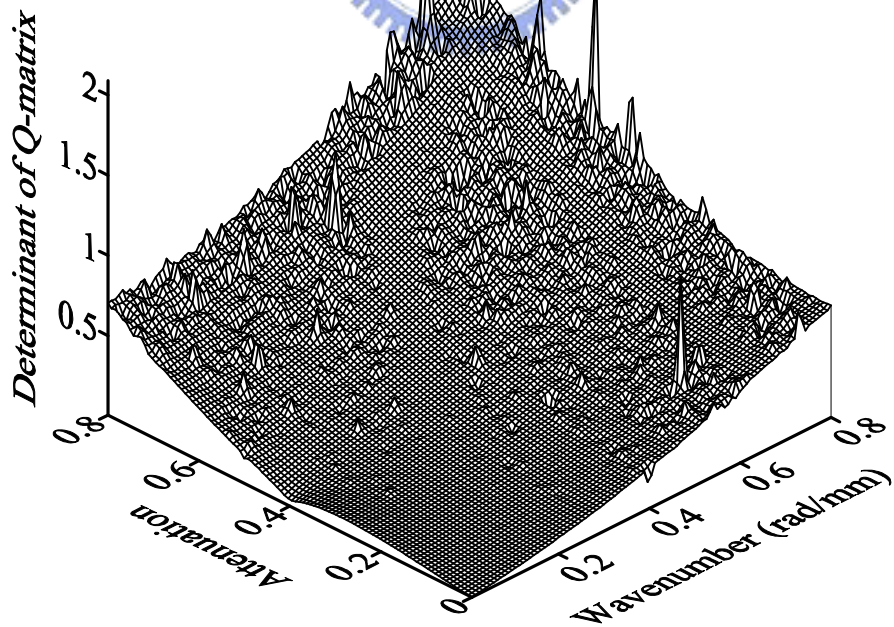


圖 4.51 同圖 4.50，但 $\sigma_1 = \sigma_2 = 5GPa$