


應用無網格 Galerkin 法於一維梁之靜力 與動力分析

研究生：詹志偉

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘要



無網格法為近十幾年來逐漸日趨成熟的演算法，相較於傳統的有限元素法，其具有不需使用網格建立形狀函數之特點，讓無網格法擺脫有限元素法在處理某些問題遭遇到的限制。但由於無網格法發展並未如有限元素法的歷史悠久並且成熟，在許多研究方面仍待拓展。一維梁是簡單的問題且有解析解，本研究利用無網格法分析一維問題，重點在於探討無網格法之參數對於分析誤差的影響，以便有利於日後將無網格法應用到更複雜之問題。

Application of Element Free Method to Static and Dynamic Analyses of beams

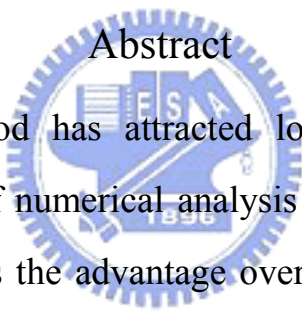
Student:Chih-Wei Chan

Adviser:C.S.Hanug

Department of Civil Engineering

National Chiao-Tung University

Abstract



The meshfree method has attracted lots of attentions from the researchers in the field of numerical analysis in the recent two decades. The meshfree method has the advantage over the finite element method on constructing shape function without predefining meshes. The development of the meshfree method is still far away from maturity. Accordingly, the main purpose of the work is to study comprehensively the convergence behaviors of the solutions obtained from the element free Galerkin method. The element free Galerkin method is applied to analyze a beam under static loading and to determine the natural frequencies of a beam. The used shape functions are constructed by the moving least squares method or radial basis function approach. The accuracy of the solutions influenced by the parameters such as the type of weighting function and basis function, the number of nodes is extensively investigated.

誌 謝

本論文得以完成，首先最感謝的是指導教授黃炯憲博士，由於老師的辛苦指導學生我正確的方向，使得我可以順利完成學業，加上老師的不時關切以及鼓勵，給予了學生莫大的鼓勵；並且在百忙之中，依然願意抽空對於論文當中一字一句的修改，讓學生感激肺腑。

論文口試期間，感謝洪士林博士、劉俊秀博士、鄭復平博士以及趙文成博士願意抽空審查與指正，使本論文能夠修正錯誤並讓內容更加完整齊全。

在論文研究期間，特別感激曾根王爺爺對我的照顧，讓我可以無後顧之憂的專心於研究方面。感謝明儒、威智、存峰學長們不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在有問題時指導我，也感謝同學加地、慎謙以及宇翔一起互相鼓勵；同時也感激研究室的增蔚、勝彥、佳穎以及小蓁學弟妹們帶給研究室所有人歡笑。

此外，謝謝思誼、雅婷、乃文以及佳慧在我論文撰寫期間，給予我的鼓勵。由於你們的打氣，在我孤單的時候讓我知道其實我並不是隻身一人；在我沮喪的時候，給我力量繼續走下去，謝謝你們。

最後，最感激的就是我的家人，爸媽、祖父母、外公以及哥哥。沒有爸媽的辛苦照顧我，並且為了讓我安心唸書，不辭辛苦的工作只為了讓我可以完成學業。你們的辛苦志偉都有銘記在心，志偉會繼續

努力不讓你們失望。

在研究過程中，只靠我自己一個人是沒辦法走完的，謝謝你們的陪伴，讓我在這條研究的路上，知道我的背後有你們，心中的感恩是沒辦法用幾個字可以形容的，只能再一次的說，謝謝你們。



詹志偉

謹誌於交通大學土木系碩士班

民國九十六年二月

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	v
表目錄.....	viii
圖目錄.....	x
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 內容概要.....	4
第二章 理論基礎.....	5
2.1 樑自然振動頻率以及靜力解之推導.....	5
2.2 移動式最小平方差法建構形狀函數.....	8
2.3 徑向基函數建構形狀函數.....	12
2.3.1 徑向基函數.....	12
2.3.2 建構形狀函數.....	14
2.3.3 徑向函數結合多項式.....	15
2.3.4 邊界條件處理方式.....	16
第三章 移動式最小平方差法分析結果.....	21
3.1 分析樑自然振動頻率問題之參數探討.....	21
3.1.1 權函數.....	22
3.1.2 節點數目以及佈點方式.....	26
3.1.3 基底多項式次方數.....	27
3.1.4 高斯積分點數目以及高斯積分區間.....	27

3.1.5	改變基底多項式以符合邊界條件	28
3.1.6	不同邊界梁之結果.....	29
3.2	分析樑靜力問題之參數探討.....	30
3.2.1	權函數	30
3.2.2	節點數目以及佈點方式.....	31
3.2.3	基底多項式項數.....	32
3.2.4	改變基底多項式以符合邊界條件	32
3.3	分析討論.....	33
第四章	徑向基函數分析結果	35
4.1	分析樑自然振動頻率問題之參數探討.....	35
4.1.1	徑向基函數種類對於誤差的影響	35
4.1.2	節點數目對於誤差之影響.....	36
4.1.3	添加多項式基底項次對於誤差之影響	37
4.1.4	邊界條件處理方式對於誤差之影響	38
4.1.5	不同邊界條件梁之誤差.....	39
4.2	分析樑靜力問題之參數探討.....	39
4.2.1	徑向基函數種類對於誤差的影響	39
4.2.2	節點數目對於誤差的影響.....	40
4.2.3	添加多項式次方數對於誤差的影響	40
4.2.4	邊界條件處理方式對於誤差之影響	40
4.2.5	不同邊界條件梁之誤差.....	41
4.3	分析討論.....	41
第五章	結論與建議	42
5.1	結論.....	42
5.2	建議.....	43

參考文獻.....	46
附表.....	48
附圖.....	62



表 目 錄

表 2.1	符合各種案例之基底函數 $p(x)$	48
表 2.2	符合邊界條件之徑向基函數 $\bar{R}(x)$	48
表 3.1	各種邊界條件之頻率方程式	49
表 3.2	不同權函數對於自然振動頻率之相對誤差	49
表 3.3	兩種權函數之比較	50
表 3.4	指數權函數參數 c 不同對於自然振動頻率相對誤差	51
表 3.5	不同權函數之相對誤差	51
表 3.6	不同節點數目之相對誤差(取 $c = L/6$)	51
表 3.7	不同節點數目之相對誤差(取 $c = L/4$)	52
表 3.8	隨機佈點以及均佈佈點之相對誤差	52
表 3.9	隨機佈點各節點座標 x/L	53
表 3.10	不同基底多項式次方數之相對誤差(取 $N = 15$)	53
表 3.11	不同基底多項式次方數之相對誤差(取 $N = 11$)	54
表 3.12	不同高斯積分點數目之相對誤差	54
表 3.13	不同高斯積分區間大小之相對誤差	54
表 3.14	不同基底多項式之相對誤差(取 $N = 7$)	55
表 3.15	不同基底多項式之相對誤差(取 $N = 11$)	55
表 3.16	不同邊界條件梁解之相對誤差(使用 Lagrange multiplier 滿足 邊界條件且取 $N = 11$)	56
表 3.17	不同邊界條件梁解之相對誤差(利用基底函數直接滿足邊界 條件且取 $N = 11$)	56
表 4.1	不同非全域徑向基函數之相對誤差	57
表 4.2	非全域徑向基函數(式(2.51))不同參數之相對誤差	57
表 4.3	全域徑向基函數(式(2.43))不同參數之相對誤差	57

表 4.4	不同徑向基函數之相對誤差	58
表 4.5	不同節點數目之相對誤差(取 $c = 5/L^2$).....	58
表 4.6	不同節點數目之相對誤差(取 $c = 10/L^2$).....	58
表 4.7	不同佈點方式之相對誤差	59
表 4.8	隨機佈點之各節點位置	59
表 4.9	不同添加多項式次方數對於懸臂梁之相對誤差(取 $N = 7$)	59
表 4.10	不同添加多項式次方數對於懸臂梁之相對誤差(取 $N = 8$)	60
表 4.11	不同邊界條件處理方式之相對誤差(取 $N = 7$).....	60
表 4.12	不同邊界條件處理方式之相對誤差(取 $N = 9$)	60
表 4.13	Hermite 函數之相對誤差	61
表 4.14	不同邊界條件梁解之相對誤差(使用全域徑向基函數)	61
表 4.15	不同邊界條件梁解之相對誤差(使用非全域徑向基函數)	61

圖目錄

圖 2.1	位場函數近似值 $u^h(x)$ 以及節點正確值 u_i 之關係.....	62
圖 3.1	節點以及目標點 x 之關係.....	62
圖 3.2	不同支撐半徑所構成之權函數.....	63
圖 3.3	不同支撐半徑所構成之形狀函數.....	63
圖 3.4	權函數支撐半徑對於自然振動頻率精確度之影響.....	64
圖 3.5	權函數支撐半徑對於自然振動頻率精確度之影響.....	64
圖 3.6	指數權函數支撐半徑對於指數權函數之影響.....	65
圖 3.7	指數權函數支撐半徑對於形狀函數之影響.....	65
圖 3.8	指數權函數參數 c 對於權函數之影響.....	66
圖 3.9	指數權函數參數 c 對於形狀函數之影響.....	66
圖 3.10	不同節點數目構成形狀函數之比較.....	67
圖 3.11	不同多項式次方數 (m) 構成形狀函數之比較.....	67
圖 3.12	高斯積分點以及高斯積分區間.....	68
圖 3.13	不同基底多項式所組成之形狀函數.....	68
圖 3.14	使用不同支撐半徑所得之位移誤差.....	69
圖 3.15	使用不同支撐半徑所得之彎矩誤差.....	69
圖 3.16	使用不同支撐半徑所得之剪力誤差.....	70
圖 3.17	使用不同坡度參數 c 所得之位移誤差.....	70
圖 3.18	使用不同坡度參數 c 所得之彎矩誤差.....	71
圖 3.19	使用不同坡度參數 c 所得之剪力誤差.....	71
圖 3.20	使用不同種類權函數所得之位移誤差.....	72
圖 3.21	使用不同種類權函數所得之彎矩誤差.....	72
圖 3.22	使用不同種類權函數所得之剪力誤差.....	73
圖 3.23	使用不同節點數目所得之位移誤差(取 $c = L/6$).....	73

圖 3.24	使用不同節點數目所得之彎矩誤差(取 $c = L/6$)	74
圖 3.25	使用不同節點數目所得之剪力誤差(取 $c = L/6$)	74
圖 3.26	使用不同節點數目所得之位移誤差(取 $c = L/4$)	75
圖 3.27	使用不同節點數目所得之彎矩誤差(取 $c = L/4$)	75
圖 3.28	使用不同節點數目所得之剪力誤差(取 $c = L/4$)	76
圖 3.29	不同佈點方式圖示	76
圖 3.30	不同佈點方式之位移誤差	77
圖 3.31	不同佈點方式之彎矩誤差	77
圖 3.32	不同佈點方式之剪力誤差	78
圖 3.33	使用不同多項式次方數所得之位移誤差(取 $N = 10$)	78
圖 3.34	使用不同多項式次方數所得之彎矩誤差(取 $N = 10$)	79
圖 3.35	使用不同多項式次方數所得之剪力誤差(取 $N = 10$)	79
圖 3.36	使用不同多項式次方數所得之位移誤差(取 $N = 15$)	80
圖 3.37	使用不同多項式次方數所得之彎矩誤差(取 $N = 15$)	80
圖 3.38	使用不同多項式次方數所得之剪力誤差(取 $N = 15$)	81
圖 3.39	使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)	81
圖 3.40	使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)	82
圖 3.41	使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)	82
圖 3.42	使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m = 3$ 、 $N = 10$)	83
圖 3.43	使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 3$ 、 $N = 10$)	83

圖 3.44	使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m = 3$ 、 $N = 10$)	84
圖 3.45	使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 15$)	84
圖 3.46	使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 15$)	85
圖 3.47	使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 15$)	85
圖 3.48	不同案例之位移誤差(使用 Lagrange multiplier).....	86
圖 3.49	不同案例之彎矩誤差(使用 Lagrange multiplier).....	86
圖 3.50	不同案例之剪力誤差(使用 Lagrange multiplier).....	87
圖 3.51	不同案例之位移誤差(使用滿足邊界條件之基底函數).....	87
圖 3.52	不同案例之彎矩誤差(使用滿足邊界條件之基底函數).....	88
圖 3.53	不同案例之剪力誤差(使用滿足邊界條件之基底函數).....	88
圖 4.1	不同非全域徑向基函數曲線.....	89
圖 4.2	非全域徑向基函數(式(2.51))參數不同之形狀函數曲線.....	89
圖 4.3	全域徑向基函數(式(2.43))參數不同之形狀函數曲線.....	90
圖 4.4	不同徑向基函數圖形.....	90
圖 4.5	徑向基函數不同之形狀函數.....	91
圖 4.6	節點數目不同之形狀函數.....	91
圖 4.7	一階節點數目(N_2)不同之形狀函數.....	92
圖 4.8	添加多項式次方數(m)不同之形狀函數.....	92
圖 4.9	處理邊界條件方法不同之形狀函數.....	93
圖 4.10	使用不同徑向基函數所得之位移相對誤差.....	93
圖 4.11	使用不同徑向基函數所得之彎矩相對誤差.....	94
圖 4.12	使用不同徑向基函數所得之剪力相對誤差.....	94

圖 4.13	使用不同節點數目所得之位移相對誤差(取 $c = 5/L^2$) 95
圖 4.14	使用不同節點數目所得之彎矩相對誤差(取 $c = 5/L^2$) 95
圖 4.15	使用不同節點數目所得之剪力相對誤差(取 $c = 5/L^2$) 96
圖 4.16	使用不同節點數目所得之位移相對誤差(取 $c = 10/L^2$) 96
圖 4.17	使用不同節點數目所得之彎矩相對誤差(取 $c = 10/L^2$) 97
圖 4.18	使用不同節點數目所得之剪力相對誤差(取 $c = 10/L^2$) 97
圖 4.19	使用不同添加多項式次方數所得之位移相對誤差(取 $N = 9$) 98
圖 4.20	使用不同添加多項式次方數所得之彎矩相對誤差(取 $N = 9$) 98
圖 4.21	使用不同添加多項式次方數所得之剪力相對誤差(取 $N = 9$) 99
圖 4.22	使用不同添加多項式次方數所得之位移相對誤差(取 $N = 7$) 99
圖 4.23	使用不同添加多項式次方數所得之彎矩相對誤差(取 $N = 7$) 100
圖 4.24	使用不同添加多項式次方數所得之剪力相對誤差(取 $N = 7$) 100
圖 4.25	使用不同處理邊界條件方法所得之位移相對誤差(取 $m = 0$) 101
圖 4.26	使用不同處理邊界條件方法所得之彎矩相對誤差(取 $m = 0$) 101
圖 4.27	使用不同處理邊界條件方法所得之剪力相對誤差(取 $m = 0$) 102
圖 4.28	使用不同處理邊界條件方法所得之位移相對誤差(取 $m = 3$) 100

圖 4.29	使用不同處理邊界條件方法所得之彎矩相對誤差(取 $m=3$)	103
圖 4.30	使用不同處理邊界條件方法所得之剪力相對誤差(取 $m=3$)	103
圖 4.31	不同邊界梁之位移相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)	104
圖 4.32	不同邊界梁之彎矩相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)	104
圖 4.33	不同邊界梁之剪力相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)	105
圖 4.34	不同邊界梁之位移相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)	105
圖 4.35	不同邊界梁之彎矩相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)	106
圖 4.36	不同邊界梁之剪力相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)	106