

第一章 緒論

§1.1 前言

無網格法(Mesh Free Method)為一種不以網格為基礎建立元素之數值分析方法，相較於傳統的有限元素法(Finite element approach, FEM)，無網格法以節點(node)取代網格為基礎建立形狀函數(shape function)；由此特性，無網格法跳脫傳統有限元素法容易遇到的問題以及缺點。

在裂縫成長的問題當中，由於裂紋形狀一直不斷成長改變，導致有限元素法必須不斷的重新建造網格，也就造成計算時間以及計算量大增；對於無網格法，只需要處理裂紋上的節點即可(Lu 等人(1994))。而在三維的案例中，無網格法僅需使用節點架構，而有限元素法則需使用三維的元素架構，計算量以及複雜度大幅增加。有限元素法需要考慮網格與網格之間位移以及轉角連續問題，而無網格法當中，節點與節點當中並無此問題。有限元素法在處理任何案例時，需要建立網格與節點之間的關係；無網格法僅需要建立節點資料。

但是，無網格法亦有其不如有限元素法之處。無網格法在處理邊界條件方面，並不像有限元素法處理起來簡單並且有規則，而是根據不同的方法有不同的處理方式。以無網格 Galerkin 法(the element-free Galerkin method, EFG)為例，由於所建立的形狀函數往往不滿足邊界

條件，需要加入 Lagrange multiplier 或是使用 Penalty method 處理。在勁度矩陣加入 Lagrange multiplier 後會使得矩陣非正定。Penalty method 則是加入一極大參數。以上兩種方法通常都會造成計算上之複雜性。有限元素法已經發展了幾十年，在各方面都已經相當多的研究以及支援的應用軟體，這方面都是無網格法所欠缺的。

本文就著重在無網格 Galerkin 法各種參數對於一維梁數值動力及靜力解收斂速度之影響，其中使用移動最小平方差法(moving least square, MLS)以及徑向基函數(radial basis function, RBF)兩種方法建立形狀函數。影響移動最小平方差法結果之參數有權函數(weight function)、節點數目以及基底多項式次方數等參數；而影響徑向基函數結果之參數為徑向基函數種類、節點數目等等。另外，本研究亦提出一滿足幾何邊界之形狀函數構築法，並與利用 Lagrange multiplier 法處理邊界條件之結果比較。

§1.2 文獻回顧

無網格法最初發展為 Lucy (1977)、Gingold 和 Monaghan (1977) 提出之平滑質點流體力學法(smoothed particle hydrodynamics approach, SPH)成功模擬了天體現象；其餘不同種類無網格法如：Nayroles 等人 (1992)將移動最小平方差法引入 Galerkin 法中，提出了擴散元素法(diffuse element method, DEM)。Belytschko 等人 (1994)將

擴散元素法加以改進，並將 Lagrange multiplier 代入邊界條件，提出了無網格 Galerkin 法。

由於無網格法是最近二十年才發展之數值分析法。於力學問題中，梁是常見之桿件而且其靜力或動力解均為較簡單的，故分析梁之相關問題常見於發展無網格分析法之相關論文，以做為驗證該分析法之正確性。

Ouatouati 和 Johnson (1999)使用無網格 Galerkin 法分析一維梁案例，其中顯示無網格法計算自然振動頻率時，並不一定由上限收斂，此點與有限元素法不同。Kim 和 Inoue (2004)使用 spectral stochastic element free Galerkin method 分析一維梁受拉力之情形，其中權函數採用多項式型。而 Xiang (1997)使用無網格 Galerkin 法對於一維梁進行改變邊界條件、斷面隨位置變化之分析。Wang 和 Liu (2002)利用徑向基函數組成逼近函數求解一維曲線，呈現出兩端誤差較大的結果。Raju 等人 (2004)利用徑向基函數以及 meshless Petrov-Galerkin method 求解 Euler-Bernoulli 梁，當中討論許多不同邊界條件以及部分參數對於計算誤差之影響。Liu (2002)使用 PIM(point interpolation method)以及 LPIM(local point interpolation method)分析不同邊界條件梁之自然振動頻率分析，其中亦顯示無網格法計算自然振動頻率時，並不一定由上限收斂之情形。

以上論文並未針對無網格法數值解之準確性作有系統之探討；故本論文之重點在於補足此方面之缺失。利用無網格 Galerkin 法配合兩種建立形狀函數的方法，有系統分析各種參數對於求解梁之動力及靜力問題精確度之影響。此外，在處理邊界條件的問題上，除了使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件外，本文將代入滿足邊界條件之基底多項式，並分析此法是否可減少誤差。

§1.3 內容概要

本論文共分為五章，其內容如下：

第一章 說明本研究之動機以及無網格法之發展過程。

第二章 簡述利用無網格 Galerkin 法分析梁靜力及動力問題之流程，並敘述利用移動最小平方差法和徑向基函數構築形狀函數之過程。

第三章 探討移動最小平方差法建立形狀函數之影響參數對梁靜動力解誤差控制。

第四章 探討徑向基函數建立形狀函數之影響參數對梁靜動力解誤差控制。

第五章 本論文之結論以及建議。

第二章 理論基礎

本章將介紹本研究所需之理論基礎。在本研究利用能量法分析梁靜動力問題，分析邏輯類似傳統之有限元素法，惟建構解之形狀函數迥異於有限元素者。本研究首先利用移動最小平方差法配合多項式函數建構形狀函數；另外，亦利用徑向基函數建構形狀函數。後者建構之形狀函數易於滿足邊界幾何條件，且滿足形狀函數於 x_i 點之值即為 x_i 之解。

§2.1 梁之自然振動頻率以及靜力解之推導

一維梁靜力問題之勢能可表示成：

$$\pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q u dx \quad (2.1)$$

u 滿足在 $x=0$ 及 $x=L$ 之變位邊界條件。若 u 不滿足該條件，則引入拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)，令：

$$\tilde{\pi} = \pi + \lambda_1 [u(0) - u_0] + \lambda_2 [u'(0) - u'_0] + \lambda_3 [u(L) - u_L] + \lambda_4 [u'(L) - u'_L] \quad (2.2)$$

其中 λ_i 為拉格朗日乘子，在此問題為待定常數； u_0 、 u_L 為在 $x=0$ 、 $x=L$ 處之位移邊界條件， u'_0 、 u'_L 為在 $x=0$ 、 $x=L$ 處之轉角邊界條件。將上式變分後可得：

$$\begin{aligned} & EI \int_0^l \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \delta u}{dx^2} dx - \int_0^l q \delta u dx + \delta \lambda_1 \cdot (u(0) - u_0) + \lambda_1 \cdot \delta u(0) \\ & + \delta \lambda_2 \cdot (u'(0) - u'_0) + \lambda_2 \cdot \delta u'(0) + \delta \lambda_3 \cdot (u(L) - u_L) + \lambda_3 \cdot \delta u(L) \\ & + \delta \lambda_4 \cdot (u'(L) - u'_L) + \lambda_4 \cdot \delta u'(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

令 $u(x)$ 之近似解可表示成：

$$u(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I \quad (2.4)$$

再將式(2.4) 代入式(2.3)，可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{I=1}^n \left[\int_0^l \left(EI \frac{d^2 \phi_I(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \phi_J(x)}{dx^2} \right) dx + \phi_I(0) + \phi_I'(0) + \phi_I(L) + \phi_I'(L) \right] \cdot u_I \\ & + \lambda_1 \phi_J(0) + \lambda_2 \phi_J'(0) + \lambda_3 \phi_J(L) + \lambda_4 \phi_J'(L) \\ & = \int_0^l q \phi_J(x) dx + u_0 + u_L + u_0' + u_L' \end{aligned} \quad (2.5)$$

將上式分解處理，可得：

$$[\mathbf{A}]_{(n+4) \times (n+4)} \cdot \{\mathbf{u}\}_{(n+4) \times 1} = \{\mathbf{B}\}_{(n+4) \times 1} \quad (2.6)$$

其中， \mathbf{u} 為 u_I 及 λ_i 組成之向量， \mathbf{A} 為對稱之矩陣。

當 $1 \leq i, j \leq n$ ，則

$$\mathbf{A}_{j,i} = \int_0^l \left(EI \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) dx + \phi_i(0) + \phi_i'(0) + \phi_i(L) + \phi_i'(L) \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{A}_{(n+1),i} = \phi_i(0) \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{A}_{(n+2),i} = \phi_i'(0) \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{A}_{(n+3),i} = \phi_i(L) \quad (2.7d)$$

$$\mathbf{A}_{(n+4),i} = \phi_i'(L) \quad (2.7e)$$

$$\mathbf{B}_i = \int_0^l q \phi_i(x) dx + u_0 + u_L + u_0' + u_L' \quad (2.7f)$$

當 $i, j > n$, 則

$$\mathbf{A}_{j,i} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{B}_{n+1} = u(0), \mathbf{B}_{n+2} = u'(0), \mathbf{B}_{n+3} = u(L), \mathbf{B}_{n+4} = u'(L) \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \lambda_1, \mathbf{u}_{n+2} = \lambda_2, \mathbf{u}_{n+3} = \lambda_3, \mathbf{u}_{n+4} = \lambda_4 \quad (2.8c)$$

對於一維梁自然振動，考慮可能之幾何邊界條件為

$u_0 = u_L = u'_0 = u'_L = 0$; 可以得到與式(2.5)類似的計算式：

$$EI \int_0^l \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \delta u}{dx^2} dx - \omega^2 \rho \int_0^l u \delta u dx + \delta \lambda_1 \cdot u(0) + \lambda_1 \cdot \delta u(0) + \delta \lambda_2 \cdot u'(0) + \lambda_2 \cdot \delta u'(0) + \delta \lambda_3 \cdot u(L) + \lambda_3 \cdot \delta u(L) + \delta \lambda_4 \cdot u'(L) + \lambda_4 \cdot \delta u'(L) = 0 \quad (2.9)$$

將式(2.4)代入式(2.9)，並進行變分；可得

$$([\mathbf{A}] - \omega^2 \cdot [\overline{\mathbf{A}}]) \cdot \{\mathbf{u}\} = 0 \quad (2.10)$$

因為所得解不全為零，故可得：

$$[\mathbf{A}] - \omega^2 \cdot [\overline{\mathbf{A}}] = 0 \quad (2.11)$$

其中， \mathbf{A} 與 $\overline{\mathbf{A}}$ 為對稱矩陣。可使用求特徵根之方式求得自然振動頻率 ω ; $\mathbf{A}_{j,i}$ 與式(2.7a)相同，其餘如下：

當 $1 \leq i, j \leq n$, 則

$$\overline{\mathbf{A}}_{j,i} = \int_0^l (\phi_i(x) \cdot \phi_j(x)) dx \quad (2.12a)$$

$$\overline{\mathbf{A}}_{(n+1),i} = \overline{\mathbf{A}}_{(n+2),i} = \overline{\mathbf{A}}_{(n+3),i} = \overline{\mathbf{A}}_{(n+4),i} = 0 \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{A}_{(n+1),i} = \phi_i(0) \quad (2.12c)$$

$$\mathbf{A}_{(n+2),i} = \phi_i'(0) \quad (2.12d)$$

$$\mathbf{A}_{(n+3),i} = \phi_i(L) \quad (2.12e)$$

$$\mathbf{A}_{(n+4),i} = \phi_i'(L) \quad (2.12f)$$

當 $i, j > n$, 則

$$\mathbf{A}_{j,i} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{j,i} = 0 \quad (2.13b)$$

§2.2 移動最小平方差法 (Moving least squares approach, MLS) 建構形狀函數

最小平方差法 (Least squares approach) 為一種曲線逼近法，其概念為，已知資料點 N 個，欲使用含有 M 項之函數來近似此些資料點，在所得誤差最小的情況下，可以求得一條最接近曲線。而移動最小平方差法則是將最小平方差法加入權函數 (Weight Function) 的影響後，使得距離目標點越近的資料點影響大於距離目標點較遠之資料點。

見圖 2.3，對於整個問題區域 (problem domain) 而言，任一點 x 處之位移可用 $u(x)$ 表示。如今定義 $u(x)$ 之近似值為 $u^h(x)$ ；而 $u^h(x)$ 可以由一個多項式基底函數以及一個係數向量所組成。對於一維問題，

$u^h(x)$ 可以表示成如下：

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a} \quad (2.14)$$

其中， m 為基底函數之階數；以及 \mathbf{a} 為一係數向量，可表示成：

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)^T \quad (2.15)$$

式(2.14)中， $\mathbf{p}(x)$ 為基底函數之向量。為了確保函數的完整性，通常都由多項式組成。但也可以依照不同邊界條件尋找不同的基底函數已滿足該邊界條件，如表 2.1 所示。藉由此方式，不但可以維持基底函數所組成之形狀函數之完整性，並且不需要拉格朗日乘子來處理邊界條件。對於一維問題之 m 階之基底函數可以表示如下：

$$\mathbf{p}^T(x) = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x) \} = \{ 1, x, x^2, \dots, x^{m-1} \} \quad (2.16)$$

見圖 2.1，本文在問題區域內挑選 N 個節點分別為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ 以及其對應之位移 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$ 。此對應位移之近似解依式(2.14)表示成

$$u^h(x_I) = \mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{a}, \quad I = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.17)$$

針對 x 點之位移，其與附近點之位移關係為：距離 x 點越近之位移對該點 x 點位移之影響越強；故定義一誤差函數：

$$\begin{aligned} J &= \sum_I^N \widehat{W}(x - x_I) [u^h(x_I) - u(x_I)]^2 \\ &= \sum_I^N \widehat{W}(x - x_I) [\mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{a} - u_I]^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中， $\widehat{W}(x-x_I)$ 稱作權函數，為恆正函數。其作用除了增加較近節點之權重之外，另一功能將距離超過影響範圍外的節點之權函數設定為 0。只計算影響範圍內的節點，藉此減少計算時間。欲求得最小之誤差值，可發現 \mathbf{a} 為 x 之函數；且

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

式(2.18)代入式(2.19)，

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{U}_s \quad (2.20)$$

其中，

$$\mathbf{A}(x) = \sum_I^N \widehat{W}(x-x_I)\mathbf{p}(x_I)\mathbf{p}^T(x_I) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B}(x) = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_N] \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B}_I = \widehat{W}_I(x-x_I)\mathbf{p}(x_I) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{U}_s = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \quad (2.24)$$

依式(2.20)可得

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)\mathbf{U}_s \quad (2.25)$$

式(2.25)代入式(2.14)，整理可得：

$$u^h(x) = \sum_I^N \sum_j^m p_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x))_{jI} u_I \quad (2.26)$$

上式亦可簡化表示成

$$u^h(x) = \sum_I^n \phi_I(x) u_I = (x) \mathbf{U}_S \quad (2.27)$$

其中

$$(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)) \quad (2.28)$$

$$\phi_I(x) = \sum_j^m p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{jI} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I \quad (2.29)$$

ϕ_I 對應於傳統有限元素法中之形狀函數。在上式的形狀函數中需注意到，假設基底函數 $\mathbf{p}(x)$ 之項數 m ，必須小於 $\widehat{W}(x-x_I) \neq 0$ 所涵蓋之節點數。意即， $N \gg m$ 必須成立，以確保最小平方差法形狀函數能夠存在。

在使用最小平方差法形狀函數時，常會遇到需要微分之情況。然而直接將形狀函數 $\phi_I(x)$ 直接微分，將會產生許多困擾；故需要使用一些技巧迴避直接微分帶來的問題。首先，先將式(2.28)加以改寫，表示成如下：

$$\phi_I(x) = \gamma^T(x) \mathbf{B}_I(x) \quad (2.30)$$

其中 $\gamma(x)$ 滿足

$$\mathbf{A}(x) \gamma(x) = \mathbf{p}(x) \quad (2.31)$$

將式(2.31)進行微分之後，可以得到下列式子：

$$\mathbf{A}_{,i} \gamma_i = \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \gamma_i \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A}_{,ij} \gamma_{ij} = \mathbf{p}_{,ij} - (\mathbf{A}_{,i,j} \gamma_j + \mathbf{A}_{,j,i} \gamma_i + \mathbf{A}_{,ij} \gamma_{ij}) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}_{,ijk} = \mathbf{p}_{,ijk} - (\mathbf{A}_{,i, ,jk} + \mathbf{A}_{,j, ,ik} + \mathbf{A}_{,k, ,ij} + \mathbf{A}_{,ij, ,k} + \mathbf{A}_{,ik, ,j} + \mathbf{A}_{,jk, ,i} + \mathbf{A}_{,ijk}) \quad (2.34)$$

將上列三式帶回式(2.30)，可以得到形狀函數 $\phi(x)$ 微分後之結果，如下：

$$\phi_{I,i} = ,i\mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{I,i} \quad (2.35)$$

$$\phi_{I,ij} = ,ij\mathbf{B}_I + ,i\mathbf{B}_{I,j} + ,j\mathbf{B}_{I,i} + \mathbf{B}_{I,ij} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \phi_{I,ijk} = & ,ijk\mathbf{B}_I + ,ij\mathbf{B}_{I,k} + ,ik\mathbf{B}_{I,j} + ,jk\mathbf{B}_{I,i} \\ & + ,i\mathbf{B}_{I,jk} + ,j\mathbf{B}_{I,ik} + ,k\mathbf{B}_{I,ij} + \mathbf{B}_{I,ijk} \end{aligned} \quad (2.37)$$

§2.3 利用徑向基函數(radial basis function, RBF)建構形狀函數



§2.3.1 徑向基函數

首先將求解區域用定義 N 個節點 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ 離散化，其對應之位移 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$ 。此對應位移之近似解可以由下式表示：

$$u^h(x) = \sum_{J=1}^N a_J R_J(x) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} \quad (2.38)$$

其中 a_J 為待定係數， \mathbf{a} 以及 $\mathbf{R}^T(x)$ 之定義如下：

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T \quad (2.39)$$

$$\mathbf{R}(x) = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_N(x))^T \quad (2.40)$$

其中 $R_I(x)$ 為徑向基函數，為以目標點 x 到節點 x_I 之距離 $d_I = |x - x_I|$

為變數之函數，最常被使用的全域徑向基函數如下：

$$\text{Multiquadrics(MQ)} : R_l(x) = (c^2 + d_l^2)^{1/2} \quad (2.41)$$

$$\text{Reciprocal multiquadrics(RMQ)} : R_l(x) = (c^2 + d_l^2)^{-1/2} \quad (2.42)$$

$$\text{Gaussians} : R_l(x) = \exp(-cd_l^2) \quad (2.43)$$

$$\text{Thin-plate splines(TPS)} : R_l(x) = d_l^{2\beta} \log(d_l) \quad (2.44)$$

上式參數中， c 為大於零之常數，而 β 為整數。

此外，近年來也有提出非全域型之徑向基函數，將導致系統矩陣具有稀疏之特點，有利於解決大型問題。Wu(1995)所提出的徑向基函數如下：

$$R_l(x) = (1-r)_+^4 \cdot (4 + 16r + 12r^2 + 3r^3) \quad (2.45)$$

$$R_l(x) = (1-r)_+^6 \cdot (6 + 36r + 82r^2 + 72r^3 + 30r^4 + 5r^5) \quad (2.46)$$

其中 $r = \frac{d_l}{d_{ml}}$ ，而 d_{ml} 為定義在節點 x_l 處的徑向基函數之支撐半徑，

其中 $(1+r)_+$ 定義如下：

$$(1-r)_+ = \begin{cases} (1-r) & , \text{當 } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases} \quad (2.47)$$

Buhmann(1998)提出的正定緊支徑向基函數為：

$$R_l(x) = \frac{1}{3} + r^2 - \frac{4}{3}r^3 + 2r^2 \ln(r) \quad (2.48)$$

$$R_l(x) = \frac{1}{15} + \frac{19}{6}r^2 - \frac{16}{3}r^3 + 3r^4 - \frac{16}{15}r^5 + \frac{1}{6}r^6 + 2r^2 \ln(r) \quad (2.49)$$

Wendland(1995)所提出之正定緊支徑向基函數為：

$$R_I(x) = (1-r)_+^6 (3 + 18r + 35r^2) \quad (2.50)$$

$$R_I(x) = (1-r)_+^8 (1 + 8r + 25r^2 + 32r^3) \quad (2.51)$$

§2.3.2 建構形狀函數

由式(2.41)至(2.51)當中之徑向基函數，選定任一代入式(2.38)。

令近似解函數 $u^h(x)$ 在節點 x_I 處的值等於函數 $u(x)$ 在 x_I 處的值 u_I ，並且代入 N 個節點 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ，可得到 N 條方程式，整理可得下式：

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{u} \quad (2.52)$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(x_1) \\ \mathbf{R}^T(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{R}^T(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \cdots & R_N(x_1) \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \cdots & R_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_N) & R_2(x_N) & \cdots & R_N(x_N) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \quad (2.54)$$

由式(2.53)可以得出代定係數矩陣 \mathbf{a} ，代入式(2.38)，可得：

$$u^h(x) = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \Phi(x)\mathbf{u} \quad (2.55)$$

其中， $\Phi(x)$ 稱為形狀函數向量，定義為：

$$\Phi(x) = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{A}^{-1} \quad (2.56)$$

形狀函數之微分可由下式求得：

$$(x)_{,i} = \mathbf{R}_{,i}^T(x) \mathbf{A}^{-1} = (R_{1,i}(x), R_{2,i}(x), \dots, R_{N,i}(x)) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (2.57)$$

$$(x)_{,ij} = \mathbf{R}_{,ij}^T(x) \mathbf{A}^{-1} = (R_{1,ij}(x), R_{2,ij}(x), \dots, R_{N,ij}(x)) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (2.58)$$

其中：

$$R_{I,x}(x) = \frac{\partial R_I(x)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.59)$$

$$R_{I,xx}(x) = \frac{\partial^2 R_I(x)}{\partial r^2} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_I}{d_I d_{mI}} \quad (2.61)$$

§2.3.3 徑向函數結合多項式

若僅使用徑向基函數建構形狀函數，無法滿足有限元素法中之 standard patch tests，即無法準確地重建線性位移場(Liu, 2002)。故需添加多項式基底來使得形狀函數能夠通過 standard patch tests。將式(2.38)添加多項式基底函數 $p_i(x)$ ，如下：

$$u^h(x) = \sum_{J=1}^N a_J R_J(x) + \sum_{i=1}^m b_i p_i(x) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x) \mathbf{b} \quad (2.62)$$

上式中：

$$\mathbf{p}(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x))^T \quad (2.63)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \quad (2.64)$$

式(2.62)中，共有 $N + m$ 個未知數，可由下列項式取得其對應之方程式：

$$\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

上式中， \mathbf{A} 同式(2.53)、 \mathbf{u} 同式(2.54)，其餘如下：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N) & p_2(x_N) & \cdots & p_m(x_N) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

由式(2.65)可求得係數矩陣 \mathbf{a} , \mathbf{b} ，並帶回式(2.62)可得：

$$u^h(x) = \left(\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x) \right) \mathbf{B}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x) \right) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u} = (x) \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

其中 (x) 為形狀函數

$$\bar{\mathbf{B}}_{ij} = \mathbf{B}_{ij}^{-1} \text{ for } i = 1, 2, \dots, N + m; j = 1, 2, \dots, N \quad (2.68)$$

$$(x) = \left(\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x) \right) \bar{\mathbf{B}} \quad (2.69)$$

(x) 之微分如下：

$$_{,i}(x) = \left(\mathbf{R}_{,i}^T(x) \quad \mathbf{p}_{,i}^T(x) \right) \cdot \bar{\mathbf{B}} \quad (2.70)$$

$$_{,ij}(x) = \left(\mathbf{R}_{,ij}^T(x) \quad \mathbf{p}_{,ij}^T(x) \right) \cdot \bar{\mathbf{B}} \quad (2.71)$$

§2.3.4 邊界條件處理方式

本文中，列出使用徑向基函數處理邊界條件之方法其中三種，分別為①使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件，②在建構形狀函數時，將邊界條件引入其中，組成滿足邊界條件之形狀函數，③選定滿足邊界條件之 $\phi(x)$ 。以下案例以懸臂梁為案例，其邊界條件如下：

$$u(0) = R_{x=0}(0) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x} = \frac{\partial R_{x=0}(0)}{\partial x} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (2.73)$$

①使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件，將式(2.72)及式(2.73)代入式(2.6)或式(2.11)即可。

②欲建立滿足懸臂梁邊界條件之形狀函數，需使用 Hermite 型函數，而採用 Hermite 內差可以明顯改善徑向基函數在邊界處之誤差 (Zhang 等人，2000)。Hermite 型函數表示如下：

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{J=1}^N a_J R_J(x) + \sum_{k=1}^{N_2} c_k \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial x} = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} + \mathbf{R}_{,x}^T(x) \mathbf{c} \\ &= \bar{\mathbf{R}}^T(x) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.74)$$

上式中，

$$\bar{\mathbf{R}}(x) = \left(R_1(x), R_2(x), \dots, R_N(x), \frac{\partial R_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial R_2(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial R_{N_2}(x)}{\partial x} \right)^T \quad (2.75)$$

$$\mathbf{d} = (a_1, a_2, \dots, a_N, c_1, c_2, \dots, c_{N_2})^T \quad (2.76)$$

令近似解函數 $u^h(x)$ 在節點 α_I 處的值等於函數 $u(x)$ 在 α_I 處的值 u_I ，並且代入 N 個節點 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$ ，可得到 N 條方程式；同理，令近似解函數之一次微分項 $u_{,x}^h(x)$ 在節點 γ_I 處的值等於函數 $u_{,x}(x)$ 在 γ_I 處的一階微分值 $u_{I,x}$ ，並且代入 N_2 個在邊界上的節點 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{N_2}$ ，可得到 N_2 條方程式，可表示成如下：

$$\mathbf{B} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}1 & \mathbf{B}2 \\ \mathbf{B}3 & \mathbf{B}4 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{u} \quad (2.77)$$

其中， \mathbf{d} 為式(2.76)之係數矩陣：

$$\mathbf{B}1_{jk} = R(d_I = |\alpha_j - \alpha_k|), \quad j, k = 1, 2, 3 \dots, N \quad (2.78)$$

$$\mathbf{B}2_{jk} = R_{,x}(d_I = |\alpha_j - \gamma_k|), \quad j = 1, 2, 3 \dots, N, k = 1, 2, 3 \dots, N_2 \quad (2.79)$$

$$\mathbf{B}3_{jk} = R_{,x}(d_I = |\gamma_j - \alpha_k|), \quad k = 1, 2, 3 \dots, N, j = 1, 2, 3 \dots, N_2 \quad (2.80)$$

$$\mathbf{B}4_{jk} = R_{,xx}(d_I = |\gamma_j - \gamma_k|), \quad j, k = 1, 2, 3 \dots, N_2 \quad (2.81)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2 \dots u_N, u_{1,x}, u_{2,x} \dots, u_{N_2,x})^T \quad (2.82)$$

由式(2.77)可求得係數矩陣 \mathbf{d} ，並帶回式(2.74)可得：

$$u^h(x) = \bar{\mathbf{R}}^T(x) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u} = (x) \mathbf{u} \quad (2.83)$$

其中， (x) 為形狀函數：

$$\Phi(x) = \bar{\mathbf{R}}^T(x) \mathbf{B}^{-1} \quad (2.84)$$

欲建立滿足邊界條件之形狀函數，先將式(2.74)改寫成如下，

$$u^h(x) = \sum_{J=1}^N a_J R_J(x) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} \quad (2.85)$$

其中 a_J 為待定係數，係數矩陣 \mathbf{a} 以及 $\mathbf{R}^T(x)$ 之定義如下：

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N, a_{x=0}, c_{x=0})^T \quad (2.86)$$

$$\mathbf{R}(x) = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_N(x), R_{x=0}(x), R_{x=0,x}(x))^T \quad (2.87)$$

令近似解函數 $u^h(x)$ 在節點 x_I 處的值等於函數 $u(x)$ 在 x_I 處的值 u_I ，並

且代入 N 個節點 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ，可得到 N 條方程式；外加式

(2.72)、式(2.73)兩個邊界條件，整理可得下式：

$$\mathbf{A}\mathbf{a}=\mathbf{u} \quad (2.88)$$

其中：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(x_1) \\ \mathbf{R}^T(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{R}^T(x_N) \\ \mathbf{R}^T(0) \\ \mathbf{R}_{,x}^T(0) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} R_1(x_1) & R_2(x_1) & \cdots & R_N(x_1) & R_{x=0}(x_1) & R_{x=0,x}(x_1) \\ R_1(x_2) & R_2(x_2) & \cdots & R_N(x_2) & R_{x=0}(x_2) & R_{x=0,x}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(x_N) & R_2(x_N) & \cdots & R_N(x_N) & R_{x=0}(x_N) & R_{x=0,x}(x_N) \\ R_1(0) & R_2(0) & \cdots & R_N(0) & R_{x=0}(0) & R_{x=0,x}(0) \\ R_{1,x}(0) & R_{2,x}(0) & \cdots & R_{N,x}(0) & R_{x=0,x}(0) & R_{x=0,xx}(0) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots, u_N, u_{x=0}, u_{x=0,x})^T=(u_1, u_2, \dots, u_N, 0, 0)^T \quad (2.90)$$

由式(2.88)可以得出代定係數矩陣 \mathbf{a} ，代入式(2.85)，可得：

$$u^h(x)=\mathbf{R}^T(x)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}=(x)\mathbf{u} \quad (2.91)$$

上式中， (x) 為符合懸臂梁邊界條件之形狀函數，其中 \mathbf{A}^{-1} 在整個過程中，只需計算一次。並且由於 \mathbf{u} 最後兩項為零，為了方便起見，可捨去 \mathbf{A}^{-1} 最後兩行元素。

③選定滿足邊界條件之徑向基函數：

以式(2.43)為例，為了符合懸臂梁之邊界條件，可將其改寫成如

下：

$$\bar{R}_I(x) = x^2 \cdot \exp(-cd_I^2) = x^2 \cdot R(x) \quad (2.92)$$

此外，對於其餘案例，可見表 2.2。其中， $R(x)$ 代表原本選定之徑向基函數， $\bar{R}(x)$ 代表符合邊界條件之徑向基函數。

除此之外，若使用徑向基函數配合多項式，式(2.63)當中之多項式，必須更換成表 2.1 中之多項式基底。



第三章 無網格 Galerkin 法之收斂性討論

本章將討論改變各種參數對於無網格 Galerkin 法收斂性的影響，以便使用此方法時，容易達到最佳收斂效果。無網格 Galerkin 法之求解步驟有四：①使用移動最小平方差法建立形狀函數，②利用 Galerkin weak form 建立系統方程式，③利用背景網格進行積分而建立系統矩陣，④求解系統方程式之解。所探討之參數有：①權函數、②節點數目以及佈點方式、③基底多項式次方數、④高斯積分點數目以及高斯積分區間大小以及⑤改變基底以符合邊界條件。本章將以梁之靜動態解，探討該等參數對解之影響。

§3.1 分析梁自由振動問題之參數探討

梁之自然振動方程式為

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 ; \quad (3.1)$$

很容易得到正確解。令 $v(x, t) = u(x) \cdot T(t)$

帶回式(3.1)可得：

$$-\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{EI}{\rho} \cdot \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \omega^2 \quad (3.2)$$

首先處理 x 函數， $u(x)$ 須滿足

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} - \beta^4 u(x) = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$\beta^4 = \frac{\rho\omega^2}{EI} \text{。式(3.3)之解為}$$

$$u(x) = C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) \\ + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \text{。}$$

代入邊界條件，以懸臂梁為例

$$u(0) = u'(0) = 0$$

$$EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3} = 0 \text{ , 當 } x=L$$

可得懸臂梁之頻率方程式

$$\tan \beta L - \tanh \beta L = -1$$

可使用牛頓法或是其他數值方法求得 βL ，帶回 β 與 ω 之關係式可得自然振動頻率 ω 。其他邊界條件之頻率方程式如表 3.1。

本文所使用的相對誤差以及誤差之定義如下：

$$\text{相對誤差} = \frac{(\text{近似解} - \text{精確解})}{\text{精確解}}$$

$$\text{誤差} = \text{近似解} - \text{精確解}$$

§3.1.1 權函數

在式(2.18)中之 $\widehat{W}(x-x_l)$ 為權函數，本研究使用之權函數分為多項式權函數及指數權函數。多項式權函數定義如下：

$$\widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \text{當 } \bar{d} \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{當 } \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1, \\ 0 & \text{當 } 1 < \bar{d}, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 $\bar{d} = \frac{|x - x_l|}{d_m}$ ； d_m 為支撐半徑，即為欲求目標點之位移可以由支撐半徑內的節點之位移所求得，如圖 3.1 所示。值得一提的是，權函數之支撐半徑內必須包括至少 m 個節點以上，才可使得式(2.20)中之

\mathbf{A}^{-1} 有解。因此，對於均佈佈點的情況， d_m 必須滿足

$$d_m \geq \frac{L(m-1)}{(N-1)} \quad (3.5a)$$

其中， L 為桿件長度， m 為基底函數項數 ($\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}\}$)， N 為節點數目。在本節，若無特別說明，即表示取 $m=3$ ， $N=15$ 。

關於權函數之支撐半徑，依 Belytschko 和 Chung(1998)之設定：

$$d_m = D_m \cdot h \quad (3.5b)$$

其中， D_m 為支撐半徑內所包含之節點數目， h 為節點間平均距離。

支撐半徑對於權函數以及形狀函數之影響可見圖 3.2 及圖 3.3，其中取 $m=4$ ， $N=31$ 。當 d_m 越小時，形狀函數之值越集中於某些小區域。

圖 3.4 所示為取 $m=4$ 且 $N=20$ ，不同 d_m 對懸臂梁前 5 模態振動

頻率解之影響。在權函數之支撐半徑在接近最小值($d_{m,\min} = \frac{L(m-1)}{(N-1)}$)

及支撐半徑為 $1.0L$ 時，誤差結果會有最小值的出現。取較大之 d_m 值將造成計算時間大幅增加。雖然將權函數之支撐半徑縮小到 $d_{m,\min}$ 附近，可得到誤差最小值，但是容易造成式(2.20)中 \mathbf{A} 接近病態矩陣 (ill-conditioned matrix)，使得 \mathbf{A}^{-1} 不易準確求得。此外，對於 $d_m < 0.75L$ 的情形下，在固定的 d_m ，誤差常隨著節點數目增加的反常情況(如圖 3.5 所示 $d_m = 0.4L$ 之結果)。

下式所定義多項式權函數亦常用於 Galerkin 法，

$$\widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \text{當 } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{當 } \bar{d} \geq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

表 3.2 所示為利用式(3.4)以及式(3.6)之權函數所得懸臂梁前五自然振動頻率相對誤差。明顯地，式(3.4)所得之相對誤差較低；故往後之多項式權函數取式(3.4)所示者。

常用之指數權函數為：

$$\widehat{W}(d) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d/c)^2) - \exp(-(d_m/c)^2)}{1 - \exp(-(d_m/c)^2)} & \text{當 } d \leq d_m, \\ 0 & \text{當 } d > d_m, \end{cases} \quad (3.7)$$

其中定義 $d = |x - x_l|$ 。式(3.9)中有兩個可調參數：支撐半徑(d_m)及坡度(c)。

表 3.3 比較多項式權函數(式(3.4)且 $d_m = 0.5L$)及指數權函數(式(3.7)且 $d_m = 1.0L$ 、 $c = 5L/24$)。其中值得注意的是，多項式權函數在三階微分之後不連續。而指數權函數三階之後依然連續，但在一階以及二階微分當中，在邊緣之值不為零，而邊界外之值為零，將產生不連續現象，使得計算結果產生誤差。

在指數權函數當中，對於同樣坡度參數 c ，支撐半徑過小將導致權函數在邊緣部分失去平滑性，如圖 3.6($c = L/6$)；亦使得權函數建立之形狀函數失去平滑性，如圖 3.7 所示。故本文將採取直接定義支撐半徑為 $1.0L$ 。

圖 3.8 及圖 3.9 所示為 c 對於權函數以及形狀函數之影響， c 越大的狀況下，則使得形狀函數坡度越平緩，並且涵蓋的區域也越大。

表 3.4 所示為懸臂梁前五自然振動頻率相對誤差，呈現出 $c = L/4$ 誤差最小，大於或小於 $L/4$ 者誤差則遞增，但大部分均已收斂至小數以下第四位。 c 越大使得涵蓋半徑增加，也使得計算的節點數目增加，計算時間也會大幅上升。

將多項式權函數當中收斂效果最佳者 $d_m = 1.0L$ (式(3.4))以及與其形狀類似之指數權函數 $c = 0.425L$ (式(3.7))作比較。表 3.5 所示為懸臂梁前五個自然振動頻率之相對誤差，其中取 $m = 5$ 及 $N = 15$ ，結果顯示：多項式權函數之誤差在前兩自然振動頻率比指數權函數來的

低，但是兩者之差距相當小，可視為計算位數所影響；而第三至第五模態的自然振動頻率，則是指數權函數的誤差比多項式權函數來的低。

§3.1.2 節點數目以及佈點方式

圖 3.10 及表 3.6 所示為節點數目對於形狀函數以及懸臂梁自然振動頻率之相對誤差之影響，其中取指數權函數($c = L/6$)。圖 3.14 可看出增加節點數目將使得形狀函數的坡度變的較為平緩；表 3.6 可得知增加節點數目，會使得誤差下降，但亦會使得計算時間大幅上升。

此外，為了驗證在不同參數 c 之下，增加節點數目是否有收斂性。表 3.7 所示者為取 $c = L/4$ ，結果顯示：對於不同的參數 c ，增加節點數目依然使得誤差下降。且比對表 3.6 之結果，有部分的誤差上升，此一現象與上小節之結果相反，可看出調整參數 c 並無法確定可使誤差下降。值得一提的是，表 3.6 及表 3.7 顯示：增加節點使得解收斂於真解，但並非從上限或下限直接收斂至真解。

表 3.8 所示為佈點方式對於懸臂梁自然振動頻率相對誤差之影響，其中取指數權函數($c = L/6$)；表 3.9 為表 3.8 各組隨機佈點所對應之節點座標。由結果顯示，隨機佈點之結果在前三個較低的自然振動頻率當中，均可收斂到小數以下三位左右；但在第四第五個較高的自然振動頻率當中，僅以均佈佈點的收斂效果較佳，故佈點方式依然

採用均佈佈點。

§3.1.3 基底多項式次方數

基底多項式次方數對於形狀函數之影響，如圖 3.11 所示，其中取指數權函數($c = L/8$)。由圖中可得，增加基底多項式會使得波峰值上升。

表 3.10 所示為懸臂梁自然振動頻率之相對誤差，其中取指數權函數($c = L/8$)。由結果可得，基底多項式次方數越高所得到的相對誤差有越低之趨勢。此外，為了驗證在不同節點數目當中，增加基底多項式次方數對解收斂情形之影響；將表 3.10 之節點數目改為 11，結果如表 3.11 所示。由結果可得在不同節點數目的狀況下，增加基底多項式次方數依然可使得誤差下降。以 16 位有效位數的計算精確度，若基底多項式次方數取過大，將使得式(2.20)中 \mathbf{A} 越容易接近病態矩陣之狀況。

§3.1.4 高斯積分點數目以及高斯積分區間

高斯積分為一種常使用的積分方式，其優點為簡單、快速且精確度高。高斯積分點數目以及高斯積分區間的關係，可以由圖 3.12 說明，不論提高高斯積分點數目或是高斯積分區間，都會使得計算時間大幅上升。

表 3.12 所示為取不同高斯積分點數對計算懸臂梁自然振動頻率

之相對誤差，其中取指數權函數($c = L/6$)、高斯積分區間 $L/100$ 。由結果可知提高高斯積分點的數目，對於精確度完全沒有影響，本文為了計算速度之考量，故取高斯積分點數目為 3。

表 3.13 所示為取不同高斯積分區間對計算懸臂梁自然振動頻率之相對誤差，其中取指數權函數($c = L/6$)；在此處各積分區間均取 3 個高斯積分點。結果可知將高斯積分區間切細至 $L/10$ 即可得到良好之收斂效果，繼續切細並不會使得收斂效果上升，反而導致計算時間呈現倍數上升，同上段，為了計算速度之考量，本文取高斯積分區間為 $L/20$ 。



§3.1.5 改變基底多項式以符合邊界條件

本節之前的結果均利用 Lagrange multiplier 處理邊界條件。吾人可使用表 2.1 直接滿足邊界條件之基底函數，此方法導致勁度矩陣(式 (2.11)中之 $[A]$)為正定，在計算特徵根時較容易。

圖 3.13 所示為不同基底多項式組成之形狀函數，其中取 $m = 3$ ， $N = 21$ ，指數權函數($c = L/6$)，取 $x/L = 0.25$ 處位移對應之形狀函數，其中 C-F 代表懸臂梁、S-S 代表兩端簡支端、C-C 代表兩端固定端。圖中三者 $x = 0$ 處的形狀函數值均為 0，而 S-S 以及 C-C 在 $x = L$ 處的形狀函數值亦為零以符合位移邊界條件；C-F 在 $x = L$ 處之值接近零但不為零。

表 3.14 所示為懸臂梁自然振動頻率之相對誤差，其中取 $m=3$ (即 $\{x^2, x^3, x^4\}$) 和 $N=7$ 。配合不同 c 值之指數權函數。滿足邊界條件之基底函數的相對誤差明顯較 Lagrange multiplier 低。此外，為了驗證在不同節點數目當中，滿足邊界條件之基底函數的相對誤差是否較使用 Lagrange multiplier 低，故將表 3.14 之節點數目改為 11，結果如表 3.15 所示。由表 3.15 可看出，在增加節點數目之後，使用滿足邊界條件之基底函數的相對誤差依然較使用 Lagrange multiplier 低。

在一維問題當中，尋找符合邊界條件之基底函數較簡單。但在二維問題以上，能夠符合邊界之基底函數較為難尋找。

§3.1.6 不同邊界梁之結果

本文針對四種邊界條件測試無網格 Galerkin 法之解，分別為懸臂梁、兩端自由端、兩端簡支端以及兩端固定端，表 3.16 所示為上述四種案例梁自然振動頻率相對誤差，其中取 $m=3$ 且 $N=11$ ，指數權函數 ($c=L/6$)、使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件，由結果可以看出四種邊界條件均收斂至小數以下三位左右。

由於不同案例中，符合各種邊界條件之基底函數不相同，為了驗證前節結論是否會發生收斂性與邊界條件有關的狀況，表 3.17 為利用滿足邊界條件之多項式基底所得簡支撐及兩端固定梁之自然振動頻率誤差。與表 3.16 之結果相比，發現前者之收斂效果較後者佳。

§3.2 分析梁靜力問題之參數探討

本節首先考慮長 L 之懸臂梁受均佈載重外力作用。數值分析所得結果與正確解比較，以相對誤差表示數值分析之準確性。但由於某些點位之正確解值等於或接近 0，導致相對誤差之放大，此些特殊點位之結果將不被顯示。若無特別說明，即表示該數值分析結果利用 $m = 5$ 且 $N = 10$ 所得者。

§3.2.1 權函數

對於靜力問題，首先討論多項式權函數(取式(3.4))支撐半徑對於相對誤差之影響。圖 3.14 至圖 3.16 所示為不同支撐半徑對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $N = 15$ 。由結果可得， $d_m = 1.0L$ 時，可得誤差最小；而 $d_m = 0.29L$ (接近支撐半徑理論最小值)、 $0.75L$ 以及 $1.25L$ 之各項結果，誤差均明顯偏大。

圖 3.17 至圖 3.19 所示為指數權函數(取式(3.7))坡度參數 c 對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $m = 3$ 、 $N = 15$ 且 $d_m = 1.0L$ 。由於 $c = L/12$ 以 $c = L/3$ 及之誤差相較 $c = L/6$ 以及 $c = L/4$ 高出許多，故不在圖中顯示。結果顯示， $c = L/4$ 在此懸臂梁案例中，可得較佳之收斂效果。

使用多項式權函數當中收斂效果最佳者 $d_m = 1.0L$ (式(3.4)) 以及與其形狀類似之指數權函數 $c = 0.425L$ (式(3.7)) 作比較。結果如圖

3.20 至圖 3.22 所示。與自然振動頻率之結果相反，多項式權函數的誤差反而比指數權函數來的低。

§3.2.2 節點數目以及佈點方式

圖 3.23 至圖 3.25 所示為節點數目對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $m=3$ 、指數權函數($c=L/6$)。由結果可得，節點數目增加五點，對於位移、彎矩或是剪力均有收斂的效果。

為了驗證在不同參數 c 之下，增加節點數目是否可使得誤差降低，故將上段參數 c 改為 $L/4$ ，結果如圖 3.26 至圖 3.28 所示，在位移以及彎矩圖當中，增加節點數目可使得誤差明顯下降；而在剪力的圖中，增加節點數目並沒有讓全部誤差降低，但在靠近自由端依然可使得誤差大幅下降。

移動最小平方差法對於邊界處會產生誤差放大之情形，為了改善此一狀況，本文嘗試如圖 3.29 不同佈點方法：(a)均佈佈點，(b)9 節點均佈佈點，邊界處兩節點中加入一節點，(c)7 節點均佈佈點，邊界處兩節點中加入兩節點。圖 3.30 至圖 3.32 所示為不同佈點方式對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $N=11$ 、 $m=3$ 、指數權函數($c=L/6$)。由圖可得，在邊界多加入一節點可使邊界處之誤差大幅下降，但是加入兩節點之結果卻不理想，並且使得中央部分節點分佈過於稀疏使誤差上升。

§3.2.3 基底多項式次方數

圖 3.33 至圖 3.35 所示為基底多項式之次方數對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取指數權函數($c = L/6$)。由結果可知，提高基底多項式次方數可讓誤差明顯地下降，尤其是剪力的相對誤差，因為剪力為形狀函數的三次微分，若基底多項式次方數過低，將無法完善地建立三次微分的形狀函數。

為了驗證在不同節點數目當中，增加基底多項式次方數對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，圖 3.36 至 3.38 所示為利用 $N = 15$ 所得者。由結果可看出，改變節點數目後，增加基底多項式次方數依然可使得相對誤差降低。



§3.2.4 改變基底多項式以符合邊界條件

圖 3.39 至圖 3.41 所示為滿足邊界條件不同方法對於計算位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $m = 4$ 、 $N = 10$ 及指數權函數 ($c = L/6$)。由圖可看出，利用滿足邊界條件多項式之結果明顯優於使用 Lagrange multiplier 者。

為了驗證對於靜力問題在不同基底多項式次方數以及不同節點數目之下，使用滿足邊界條件之基底函數是否較使用 Lagrange multiplier 低，圖 3.42 至 3.44 所示為利用 $m = 3$ 、 $N = 10$ 以及圖 3.45 至 3.47 所示為利用 $m = 4$ 、 $N = 15$ 計算位移、彎矩以及剪力之影響。

由結果可看出，在不同的基底多項式次方數或節點數目之下，使用滿足邊界條件之基底函數的相對誤差依然較使用 Lagrange multiplier 低。

§3.2.5 不同邊界梁之結果

圖 3.48 至圖 3.50 所示為對於計算兩端簡支撐以及兩端固定端位移、彎矩以及剪力之影響，其中取 $m=3$ 、指數權函數($c=L/6$)及使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件(圖中 S-S 代表兩端簡支端、C-C 代表兩端固定端)。由於兩者均為左右對稱，故由圖可看出，在接近 $x=L$ 處之誤差通常大於接近 $x=0$ 處之誤差。

為了驗證修正邊界條件之方法對於不同邊界條件的收斂性是否有影響，故將上段使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件改為使用滿足邊界條件之基底函數，結果如圖 3.51 至 3.53 所示；由結果可得，此兩個案例之誤差差異不大且收斂得相當優良，所以沒有案例依賴的問題產生。

§3.3 討論

無網格 Galerkin 法可以藉由增加節點數目或基底函數多項式次方數得到收斂效果。但增加節點數或多項式次方數也容易導致病態矩陣之出現，以致影響解之準確性。解決這問題可利用 64 位元撰寫較高精確度之電腦程式。

在此討論節可以看出，無網格 Galerkin 法在求解自然振動頻率時，會由於調整參數不同，收斂特性不是很一致。雖然使用位移函數近似法(displacement approach)，但並沒有從上限收斂至真解之現象。

多項式權函數的收斂性相當不穩定，既使增加節點數目或是基底多項式次方數並不一定能使誤差減少，故建議使用指數權函數。



第四章 徑向基函數之收斂性討論

本章介紹徑向基函數組成形狀函數各參數之收斂特性。參數包括：①徑向基函數的種類，②節點數目，③添加多項式基底次方數以及④滿足邊界條件不同處理方式。

§4.1 分析梁自由振動問題之參數探討

若無特別說明，本節所示之結果案例為懸臂梁，參數取 $N = 11$ 、 $N_2 = 1$ ， $m = 0$ 所得者；其中 N 代表節點數目、 N_2 代表分佈在邊界上之一階節點數目以及 m 代表添加多項式次方數，並且以式(2.85)修正邊界條件，其中一階節點設定在固定端以建立滿足邊界條件的形狀函數。



§4.1.1 徑向基函數種類對於誤差的影響

徑向基函數可概分成兩種：全域以及非全域。而非全域徑向基函數之優點為可將距離大於 d_{ml} 之節點捨去以減少計算量。

圖 4.1 所示為第二章所列不同非全域徑向基函數所構成之形狀函數，其中取 $d_{ml} = L$ 。式(2.46)以及式(2.50)所構築之形狀函數相當接近，在圖中無法分辨。由圖可看出四個徑向基函數曲線均相當接近，且均滿足其在 $x/L = 0.5$ 處等於 1，而在其他節點處等於零之特點。

表 4.1 所示為利用不同非全域徑向基函數所得懸臂梁自然振動頻率之相對誤差。結果顯示：除了式(2.45)所得者誤差較大之外，其他

三者誤差差異不大。此外，此結果與上章利用移動最小平方差法，所
得出低頻的誤差低於高頻的誤差之趨勢不同，而是低頻之誤差並不
一定低於高頻之誤差。

圖 4.2 所示為非全域徑向基函數之參數 d_{ml} 對於形狀函數之影
響，其中取 $N = 15$ 。由圖可看出改變 d_{ml} 對於形狀函數曲線之影響相
當小。表 4.2 所示為 d_{ml} 對計算懸臂梁自然振動頻率之影響。一般而
言， $d_{ml} = 1.0L$ 的誤差低於其他兩者，尤其是高模態者。

如第二章所列全域徑向基函數中，吾人於此僅針對式(2.43)者加
以探討，調整參數 c 可控制徑向基函數曲線之坡度。圖 4.3 所示為 c 對
於形狀函數之影響，可看出調整參數 c 對於中央部分影響極小，但對
於兩端邊緣影響較大。表 4.3 所示為 c 對於計算懸臂梁自然振動頻率
之影響。由表可以看出， c 的大小對於高模態者之誤差並沒有明顯的
影響，但對低模態者有明顯的影響。

此外，將全域徑向基函數(取式(2.43))以及非全域徑向基函數(取
式(2.51))作比較。圖 4.4 所示為式(2.51)取 $d_{ml} = 1.0L$ 以及式(2.43)取
 $c = 11/L^2$ ，兩者徑向基函數曲線相當接近；圖 4.5 所示為兩者所構成
之形狀函數。表 4.4 為不同種類徑向基函數對於計算懸臂梁自然振動
頻率之影響，由結果可得，全域徑向基函數之誤差較小。

§4.1.2 節點數目對於誤差之影響

圖 4.6 所示為節點數目對於形狀函數之影響，其中取全域徑向基函數($c=5/L^2$)。如圖所示，節點數目僅增加 2 點，將使得形狀函數相差相當大。表 4.5 為不同節點數目對於懸臂梁自然振動頻率之相對誤差，其中取全域徑向基函數($c=5/L^2$)。與使用移動最小平方差法之趨勢相同，增加節點數目可使得誤差下降。

表 4.6 者與表 4.5 具相同參數，唯取不同 c 值。表 4.6 者取 $c=10/L^2$ 。結果顯示，改變全域徑向基函數之參數後，增加節點數目依然可使得誤差下降。

表 4.7 所示為不同佈點方式對於計算懸臂梁自然振動頻率之影響，其中取 $N=7$ 、全域徑向基函數($c=5/L^2$)；而隨機佈點節點位置如表 4.8 所示。由此可得出，均佈佈點與隨機佈點之差異相差不大。

§4.1.3 添加多項式基底項次對於誤差之影響

在本節提到的添加多項式次方數與上章移動最小平方差法之基底多項式次方數並不相同，最小平方差法之多項式基底為建構最基礎之多項式，而本節所使用之多項式基底則是為了滿足 standard patch tests 所添加之多項式，兩者意義不同。

圖 4.7 所示為添加基底多項式不同之形狀函數，其中取 $N=7$ 以及全域徑向基函數($c=5/L^2$)。由此可知，增加添加的多項式次方數對於形狀函數中央部分無影響，只對兩旁形成影響。

表 4.9 與表 4.10 所示均為不同添加多項式次方數對於計算懸臂梁自然振動頻率之影響。表 4.9 取 $N=7$ 以及全域徑向基函數 ($c=5/L^2$)；表 4.10 取 $N=8$ 以及全域徑向基函數 ($c=5/L^2$)。由結果可得，添加多項式次方數在第一振態可使得誤差減少，但對於其他振態則不一定。

§4.1.4 邊界條件處理方式對於誤差之影響

第二章提到修正邊界條件的方法有三種，這三種方法都可在 RPIM 中處理幾何邊界條件，分別為：①使用 Lagrange multiplier 修正、②建構形狀函數時引入邊界條件以及③代入符合邊界條件之徑向基函數(表 2.2)及添加多項式(表 2.1)。

圖 4.8 所示為不同邊界處理方式組成的形狀函數。由結果可以看出，使用方法③所組成的形狀函數，其波峰值已經不在中央處；而方法②所組成的形狀函數，在自由端處的形狀函數值都被放大。

表 4.11 及表 4.12 所示均為不同邊界處理方式對於計算懸臂梁自然振動頻率之影響，其中表 4.11 取 $N=7$ 以及全域徑向基函數 ($c=5/L^2$)；表 4.12 取 $N=9$ 以及全域徑向基函數 ($c=5/L^2$)。由結果可得，方法①是三種方法當中誤差最大者，而方法③計算之誤差則稍微小於方法②者。

為了驗證在第二章提過，採用 Hermite 內差可以明顯改善徑向基

函數在邊界處之誤差。表 4.13 所示為採用 Hermite 函數對於計算兩端自由端之梁前五非零自然振動頻率之影響，而兩個一階節點分佈在梁的兩端邊界；而無使用 Hermite 函數者，也增加兩點節點以使得式(2.77)中之係數矩陣個數相同。由結果可以看出，使用 Hermite 函數者之誤差明顯降低。

§4.1.5 不同邊界條件梁之誤差

表 4.14 及表 4.15 所示為對於計算不同邊界條件梁自然振動頻率之影響，表 4.14 為取 $N = 9$ 、 $N_2 = 2$ 以及全域徑向基函數($c = 5/L^2$)；表 4.15 為取 $N = 9$ 、 $N_2 = 2$ 以及非全域徑向基函數($d_m = 1.0L$)。兩表均使用建構形狀函數時引入邊界條件以滿足邊界條件。結果顯示，三種邊界條件在自然振動頻率問題當中，均可使得誤差相當低。

§4.2 分析梁靜力問題之參數探討

與第三章相同，在本節所討論的加載外力為均佈載重，桿件邊長為 L 之懸臂梁，靜力問題取位移、彎矩以及剪力之相對誤差作比較；而參數部分，若無特別說明，取 $N = 11$ 、 $N_2 = 1$ ， $m = 0$ 。並且以式(2.85)修正邊界條件，其中一階節點設定在固定端以建立滿足邊界條件的形狀函數。

§4.2.1 徑向基函數種類對於誤差的影響

本節若無強調，則分別取式(2.43)以及式(2.51)作為全域及非全域徑向基函數之代表。圖 4.9 至圖 4.11 所示為不同徑向基函數對於計算懸臂梁位移、彎矩以及剪力相對誤差之影響，而參數分別取 $c = 11/L^2$ 以及 $d_m = 1.0L$ 。由圖可得知，全域徑向基函數所得誤差較低。

§4.2.2 節點數目對於誤差的影響

圖 4.12 至圖 4.14 及圖 4.15 至圖 4.17 所示為不同節點數目對於計算懸臂梁位移、彎矩以及剪力相對誤差之影響，其中分別取全域徑向基函數 $c = 5/L^2$ 及 $c = 10/L^2$ 。由結果可得，在不同的全域徑向基函數參數之下，增加節點數目均可讓誤差大幅下降。

§4.2.3 添加多項式次方數對於誤差的影響

圖 4.18 至圖 4.20 及圖 4.21 至圖 4.23 所示為不同添加多項式次方數對於計算懸臂梁位移、彎矩以及剪力相對誤差之影響，其中分別取 $N = 9$ 、全域徑向基函數 $c = 5/L^2$ 及 $N = 7$ 、全域徑向基函數 $c = 5/L^2$ 。由結果可看出，添加多項式之後，位移、彎矩以及剪力之誤差均明顯下降，此結果與自然振動頻率問題之結論不完全相同。

§4.2.4 邊界條件處理方式對於誤差之影響

圖 4.24 至圖 4.26 及圖 4.27 至圖 4.29 所示為不同邊界處理方式對於計算懸臂梁位移、彎矩以及剪力相對誤差之影響，其中分別取

$m=0$ 、全域徑向基函數 $c=5/L^2$ 及 $m=3$ 、全域徑向基函數 $c=5/L^2$ 。由結果可得，使用滿足邊界條件之徑向基函數所得之誤差明顯地低於建立滿足邊界條件之形狀函數者。

§4.2.5 不同邊界條件梁之誤差

圖 4.30 至圖 4.32 及圖 4.33 至圖 4.35 所示為不同邊界條件梁之靜力問題的相對誤差，其中分別取非全域徑向基函數 $d_m=1.0L$ 及全域徑向基函數 $c=5/L^2$ 。由結果可得，使用全域或非全域徑向基函數對於不同邊界條件梁，誤差有明顯之差別。

§4.3 分析討論

使用徑向基函數建立之形狀函數必符合 Kronecker delta conditions，此點與最小平方差法不同。使用徑向基函數建立形狀函數的方法，可藉由增加節點數目、使用 Hermite 型函數以及使用符合邊界條件之徑向基函數得到收斂效果。添加多項式次方數在計算自然振動頻率問題時，並無使誤差下降。

增加節點數目時，容易使得式(2.53)中 \mathbf{A} 越容易接近病態矩陣之狀況。解決這問題可利用 64 位元撰寫較高精確度之電腦程式。對於自然振動頻率的誤差大部分都是上限逼近，但還是有少部分是由下限逼近，此現象與有限元素法亦不相同。

第五章 結論與建議

本章針對兩種建立形狀函數之方法作比較，不論是在各參數的收斂特性、複雜度等等，以便日後將此兩種方法使用在更複雜的問題之上時，更容易提升收斂效果。

§5.1 結論

以下就移動最小平方差法以及徑向基函數兩者的參數特性作比較：

- 移動最小平方差法：


1. 指數權函數計算所得之誤差較多項式權函數低，而調整權函數之參數之收斂性不易掌握。
2. 增加節點數目對於減少誤差可得顯著的效果，但相對使得系統矩陣增大、計算時間上升。
3. 增加基底多項式次方數可讓誤差明顯下降，但亦使得構築形狀函數之計算時間上升。
4. 本文所採用兩種修正邊界條件之方式中，使用滿足邊界條件之基底多項式計算所得之誤差較使用 Lagrange multiplier 低。

- 徑向基函數：

1. 使用全域徑向基函數計算所得之誤差較使用非全域徑向基函數低，但計算時間較多。此外，調整徑向基函數參數之收斂

性不易掌握。

2. 增加節點數目對於減少誤差可得顯著的效果，但亦使得系統矩陣增大、計算時間上升。
3. 增加添加多項式次方數在自然振動頻率問題中，並無使得誤差明顯下降。但在求解位移、彎矩以及剪力的問題中，可使得誤差明顯下降。
4. 本文所採用三種修正邊界條件之方式中，使用滿足邊界條件之徑向基函數計算所得之誤差較使用 Lagrange multiplier 以及建立滿足邊界條件之形狀函數兩者低。



移動最小平方差法建立形狀函數之過程較使用徑向基函數複雜，且計算時間花費也較多。此外，無論使用移動最小平方差法或徑向基函數在計算自然振動頻率時，不一定是從上限收斂，此情形與有限元素法大不相同。移動最小平方差法在自然振動頻率問題中，誤差隨振態遞增；而徑向基函數則無此規律。使用滿足邊界條件之權函數以及使用滿足邊界條件之徑向基函數所構築之形狀函數，無法滿足 path tests。移動最小平方差法在邊界附近，支撐半徑所涵蓋的節點只有中央處的一半左右，所以會使得邊界處誤差上升；故增加邊界處節點分佈密度可使得該處誤差下降。但徑向基函數並無此問題。

§5.2 建議

本文於最後針對無網格 Galerkin 並未完善處理的問題，提出以下建議：

1. 本文所列舉的權函數僅列舉並使用三個權函數，實際上權函數類型相當多樣，可嘗試更換權函數減少誤差，此外，在一維問題當中，大部分的結果顯示將權函數影響範圍包含整個問題域的狀況下，會得到最小誤差。但在二維問題，如此作法將導致計算時間大幅增加，各可考慮縮小權函數範圍，改增加其他參數使得誤差縮小，並且減少計算時間。
2. 本文所採用之全域徑向基函數為 Gaussians 型(式(2.43))，可嘗試使用 TPS 型(式(2.44))或 MQ 型(式(2.41))徑向基函數減少誤差。
3. 在多項式方面，本文採用的均為多項式基底，在往後的研究中，可嘗試使用三角函數或對數函數所組成的基底函數。
4. 本文就佈點方式所得出的結果，均為均佈佈點可得最小誤差。但參考其他論文可得知，均佈佈點在二維問題當中並非最佳佈點方式，但本文在此方面並無多餘討論，日後可嘗試使用其他佈點方式改善誤差。
5. 無網格 Galerkin 法當中，增加節點數目、基底或是添加多項式次方數，均可使得誤差下降，但是也容易造成因為有效位數不足導致的錯誤；為了解決這個問題，可以利用 64 位元電腦以及較高

精度之電腦程式取代目前所使用的 32 位元系統。由於目前雙核心電腦日漸普及，也可嘗試使用多工系統來增加計算速度。



参考文献

- Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. (1994), "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 229-256.
- Chung, H. J. and Belytschko, T. (1998), "An error estimate in the EFG method," *Computational Mechanics*, 21, pp. 91-100.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1977), "Smooth particle hydrodynamics: theory and applications to nonspherical stars," *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 181, pp. 375-389.
- Kim, H. M. and Inoue, J. (2004), "A spectral stochastic element free Galerkin method for the problems with random material parameter," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp. 1957-1975.
- Liu, G.R. (2002), *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*, CRC Press, London.
- Lu, Y.Y., Belytschko, T. and Gu, L. (1994), "New implementation of the element free Galerkin method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113, pp. 397-414.
- Lucy, L. (1977), "A numerical approach to testing the fission hypothesis," *Astronomical Journal*, 82, pp. 1013-1024.
- Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. (1992), "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements," *Computational Mechanics*, 10, pp. 304-318.
- Ouatouati, A. El and Johnson, D. A. (1999), "A New approach for numerical modal analysis using the element-free method,"

International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, pp. 1-27.

Raju, I. S., Phillips, D. R. and Krishnamurthy, T. (2004), “A radial basis function approach in the meshless local Petrov-Galerkin method for Euler-Bernoulli beam problems,” Computational Mechanics, 34, pp. 464-474.

Wang, J. G. and Liu, G. R. (2002), “A point interpolation meshless method based on radial basis functions,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54, pp. 1623-1648.

Xiang, X. (1997), Element free Galerkin method in structural mechanics, Ph. D. dissertation, The University of Texas at Arlington, U.S.A.



表 2.1 符合各種案例之基底函數 $p(x)$

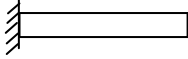
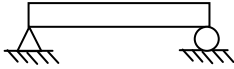
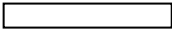

案例	$p(x)$
 clamped - free	$p_i = x^{i+1}$
 simple support - simple support	$p_i = x^i \cdot (L - x)$
 free - free	$p_i = x^{i-1}$
 clamped - clamped	$p_i = x^{i+1} \cdot (L - x)^2$

表 2.2 符合邊界條件之徑向基函數 $\bar{R}(x)$

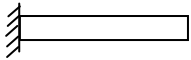
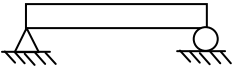
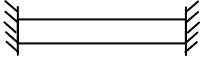
案例	$\bar{R}(x)$
 clamped - free	$\bar{R}(x) = x^2 \cdot R(x)$
 simple support - simple support	$\bar{R}(x) = x(L - x) \cdot R(x)$
 clamped - clamped	$\bar{R}(x) = x^2(L - x)^2 \cdot R(x)$

表 3.1 各種邊界條件之頻率方程式

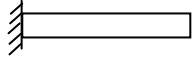
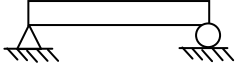
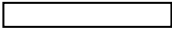
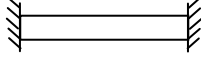
案例	頻率方程式
 clamped - free	$\tan \beta L - \tanh \beta L = -1$
 simple support - simple support	$\sin \beta L = 0$
 free - free	$\cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1$
 clamped - clamped	$\cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1$

表 3.2 不同權函數對於自然振動頻率之相對誤差

自然振動頻率	式 (3.4)	式 (3.6)
1 st	3.0870E-04	7.8300E-04
2 nd	3.0540E-04	1.7446E-02
3 rd	2.4194E-02	4.1011E-02
4 th	6.6285E-02	1.4941E-01
5 th	1.6491E-02	1.9489E-02

表 3.3 兩種權函數之比較

	多項式型權函數	指數型權函數
$\widehat{W}(x)$		
$\frac{d\widehat{W}(x)}{dx}$		
$\frac{d^2\widehat{W}(x)}{dx^2}$		

表 3.4 指數權函數參數 c 不同對於自然振動頻率相對誤差

自然振動頻率	$c = L/12$	$c = L/6$	$c = L/4$	$c = L/3$	$c = 0.425L$
1 st	1.2960E-04	-4.0040E-09	1.0980E-08	1.9820E-05	5.3452E-04
2 nd	1.5702E-03	1.3050E-07	-4.3840E-09	3.8830E-05	1.0693E-03
3 rd	4.3298E-03	5.1090E-07	7.5210E-08	1.1610E-04	-3.6858E-01
4 th	8.7436E-03	4.2180E-06	1.5580E-07	1.6470E-04	-6.7778E-01
5 th	1.4987E-02	6.7700E-06	3.9850E-07	1.9670E-04	-6.9020E-01

表 3.5 不同權函數之相對誤差

自然振動頻率	多項式權函數 $d_m = 1.0L$	指數權函數 $c = 0.425L$
1 st	6.9759E-07	-3.0431E-06
2 nd	1.8107E-05	-3.7486E-05
3 rd	7.8894E-03	7.3260E-04
4 th	4.9928E-03	1.5372E-03
5 th	1.2863E-01	2.4360E-03

表 3.6 不同節點數目之相對誤差(取 $c = L/6$)

自然振動頻率	節點數目 7	節點數目 11	節點數目 15
1 st	4.3935E-03	8.9030E-06	-4.0036E-09
2 nd	5.0621E-02	1.2340E-04	1.3050E-07
3 rd	1.4333E-01	2.5118E-04	5.1089E-07
4 th	2.9270E-01	6.5419E-04	4.2183E-06
5 th	3.9601E-01	1.1929E-03	6.7697E-06

表 3.7 不同節點數目之相對誤差(取 $c = L/4$)

自然振動頻率	節點數目 7	節點數目 11	節點數目 15
1 st	1.6051E-04	2.0416E-08	1.0978E-08
2 nd	2.1527E-03	6.3393E-07	-4.3839E-09
3 rd	1.1517E-02	1.2090E-06	7.5211E-08
4 th	1.9513E-02	2.0075E-05	1.5577E-07
5 th	7.5650E-01	5.0334E-04	3.9854E-07

表 3.8 隨機佈點以及均佈佈點之相對誤差

自然振動頻率	均佈佈點	隨機佈點 1	隨機佈點 2	隨機佈點 3
1 st	-4.0036E-09	1.9971E-04	5.0503E-03	1.8240E-04
2 nd	1.3050E-07	5.4197E-04	5.0852E-02	1.5606E-03
3 rd	5.1089E-07	1.6899E-03	7.5287E-02	4.2194E-03
4 th	4.2183E-06	8.3344E-03	8.2974E-02	7.3865E-03
5 th	6.7697E-06	1.0469E-02	1.1455E-01	1.5222E-02

表 3.9 隨機佈點各節點座標 x/L

節點編號	隨機佈點 1	隨機佈點 2	隨機佈點 3
1	7.8300E-06	3.9100E-04	7.7500E-04
2	3.4600E-02	1.7510E-01	2.2200E-02
3	4.7000E-02	3.5223E-01	2.0761E-01
4	5.3500E-02	5.4827E-01	2.5034E-01
5	1.3154E-01	5.7689E-01	2.6557E-01
6	2.1896E-01	6.3836E-01	2.9270E-01
7	3.8350E-01	6.7308E-01	4.0636E-01
8	4.5865E-01	7.2861E-01	4.2222E-01
9	5.1942E-01	7.3465E-01	4.2264E-01
10	5.3277E-01	7.8027E-01	5.3460E-01
11	6.7887E-01	9.3251E-01	6.5742E-01
12	6.7930E-01	9.4324E-01	6.7696E-01
13	7.5561E-01	9.4796E-01	7.4396E-01
14	8.3097E-01	9.6482E-01	8.0493E-01
5	9.3469E-01	9.7082E-01	9.6671E-01

表 3.10 不同基底多項式次方數之相對誤差(取 $N = 15$)

自然振動頻率	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1 st	1.0130E-04	1.6400E-06	3.6690E-08	4.6670E-08
2 nd	1.8470E-04	2.1280E-05	1.5490E-06	2.7930E-07
3 rd	2.6020E-04	5.0540E-05	1.1700E-05	6.6630E-06
4 th	3.9780E-04	1.2470E-04	4.3440E-05	4.1950E-05
5 th	4.5580E-04	1.9130E-04	1.2640E-04	2.1270E-04

表 3.11 不同基底多項式次方數之相對誤差(取 $N = 11$)

自然振動頻率	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1 st	7.2428E-03	2.1454E-04	6.5126E-06	-1.4389E-06
2 nd	1.0796E-02	2.6223E-03	1.1120E-04	6.2091E-05
3 rd	1.5049E-02	7.5328E-03	3.6944E-04	9.7380E-04
4 th	2.0377E-02	1.6063E-02	1.1275E-03	3.1776E-03
5 th	2.9779E-02	3.1165E-02	5.3282E-03	3.2089E-03

表 3.12 不同高斯積分點數目之相對誤差

自然振動頻率	高斯積分點數目		
	3	6	9
1 st	-4.0036E-09	-4.0036E-09	-4.0036E-09
2 nd	1.3050E-07	1.3050E-07	1.3050E-07
3 rd	5.1089E-07	5.1089E-07	5.1089E-07
4 th	4.2183E-06	4.2183E-06	4.2183E-06
5 th	6.7697E-06	6.7697E-06	6.7697E-06

表 3.13 不同高斯積分區間大小之相對誤差

自然振動頻率	積分區間大小		
	L/10	L/20	L/100
1 st	-4.0030E-09	-4.0036E-09	-4.0036E-09
2 nd	1.3050E-07	1.3050E-07	1.3050E-07
3 rd	5.1088E-07	5.1089E-07	5.1089E-07
4 th	4.2183E-06	4.2183E-06	4.2183E-06
5 th	6.7696E-06	6.7697E-06	6.7697E-06

表 3.14 不同基底多項式之相對誤差(取 $N = 7$)

	$c = L/12$		$c = L/6$	
	使用 Lagrange multiplier	基底函數直接滿足邊界條件	使用 Lagrange multiplier	基底函數直接滿足邊界條件
1 st	1.7069E-01	2.6377E-04	4.3935E-03	6.0641E-05
2 nd	1.1591E+00	8.8172E-03	5.0621E-02	5.5181E-03
3 rd	2.2651E+00	7.1719E-01	1.4333E-01	2.2442E-02
4 th	3.2398E+00	1.5500E+00	2.9270E-01	1.1250E-01
5 th	3.3951E+00	2.0945E+00	3.9601E-01	2.6422E-01



表 3.15 不同基底多項式之相對誤差(取 $N = 11$)

	$c = L/12$		$c = L/6$	
	使用 Lagrange multiplier	基底函數直接滿足邊界條件	使用 Lagrange multiplier	基底函數直接滿足邊界條件
1 st	6.8005E-03	4.5625E-05	8.9030E-06	4.1504E-07
2 nd	4.9043E-02	3.5092E-03	1.2340E-04	8.1698E-05
3 rd	1.1436E-01	3.5211E-02	2.5118E-04	1.6449E-04
4 th	1.9912E-01	8.4738E-02	6.5419E-04	4.7110E-04
5 th	2.8942E-01	1.4099E-01	1.1929E-03	1.0216E-03

表 3.16 不同邊界條件梁解之相對誤差

(使用 Lagrange multiplier 滿足邊界條件且取 $N = 11$)

自然振動 頻率	simple support- simple support	clamped- clamped	free - free
1 st	3.8530E-05	1.6022E-04	1.2489E-05
2 nd	2.3736E-04	5.5252E-04	1.4441E-04
3 rd	4.2431E-04	5.9290E-04	3.5032E-04
4 th	2.7499E-03	2.2719E-03	6.2552E-04
5 th	4.8566E-03	3.0600E-03	1.0190E-03

表 3.17 不同邊界條件梁解之相對誤差

(利用基底函數直接滿足邊界條件且取 $N = 11$)

自然振動頻率	simple support- simple support	clamped- clamped
1 st	1.6681E-07	1.6237E-08
2 nd	4.0825E-07	1.8657E-07
3 rd	1.8299E-06	5.6224E-07
4 th	1.0985E-04	1.9875E-05
5 th	3.3905E-04	6.7655E-05

表 4.1 不同非全域徑向基函數之相對誤差

自然振動頻率	式 (2.45)	式 (2.46)	式 (2.50)	式 (2.51)
1 st	7.0177E-01	2.6299E-01	5.9245E-01	3.7552E-01
2 nd	1.0579E-01	2.3530E-02	6.9761E-02	3.8612E-02
3 rd	1.1024E-02	7.6467E-03	1.5934E-02	8.9357E-03
4 th	9.7295E-03	2.1881E-04	2.9328E-03	2.8715E-03
5 th	5.5408E-03	2.4823E-04	4.0631E-04	4.0324E-04

表 4.2 非全域徑向基函數 (式 (2.51)) 不同參數之相對誤差

自然振動頻率	$d_{ml} = 0.75L$	$d_{ml} = 1.0L$	$d_{ml} = 1.25L$
1 st	2.5616E-01	4.1498E-01	7.5445E-01
2 nd	-3.3351E-01	4.3379E-02	5.8159E-01
3 rd	-4.1204E-01	9.9856E-03	5.6718E-01
4 th	-4.2818E-01	3.1701E-03	5.6344E-01
5 th	-4.3430E-01	4.2303E-04	5.6292E-01

表 4.3 全域徑向基函數 (式 (2.43)) 不同參數之相對誤差

自然振動頻率	c=5	c=7.5	c=10
1 st	4.7456E-03	9.1067E-02	4.4075E-01
2 nd	1.0818E-03	1.1605E-02	5.4961E-02
3 rd	2.9648E-04	1.8438E-03	9.2031E-03
4 th	1.2214E-03	1.7341E-03	4.3662E-03
5 th	5.0302E-03	1.4564E-03	2.7616E-03

表 4.4 不同徑向基函數之相對誤差

自然振動頻率	式 (2.43)	式 (2.51)
1 st	1.5182E-03	4.1498E-01
2 nd	1.8792E-04	4.3379E-02
3 rd	5.3094E-05	9.9856E-03
4 th	1.0198E-04	3.1701E-03
5 th	1.0724E-04	4.2303E-04

表 4.5 不同節點數目之相對誤差(取 $c = 5/L^2$)

自然振動頻率	7 個節點	9 個節點	11 個節點
1 st	5.0924E-03	4.0087E-05	1.4167E-05
2 nd	1.1285E-03	1.7160E-05	4.2490E-05
3 rd	3.0703E-04	1.2272E-05	-3.9870E-06
4 th	1.2192E-03	8.5446E-05	-2.1545E-05
5 th	4.8995E-03	1.2675E-04	2.5833E-05

表 4.6 不同節點數目之相對誤差(取 $c = 10/L^2$)

自然振動頻率	7 個節點	9 個節點	11 個節點
1 st	4.8242E-01	2.6420E-02	5.5147E-04
2 nd	6.0639E-02	2.9639E-03	7.8158E-05
3 rd	1.0286E-02	6.3144E-04	2.5131E-05
4 th	4.7614E-03	7.7799E-04	6.3167E-05
5 th	2.6090E-03	5.3549E-04	7.6243E-05

表 4.7 不同佈點方式之相對誤差

自然振動頻率	均佈佈點	隨機佈點
1 st	5.0924E-03	1.0089E-03
2 nd	1.1285E-03	6.6055E-04
3 rd	3.0703E-04	1.4807E-04
4 th	1.2192E-03	1.0696E-03
5 th	4.8995E-03	7.7773E-03

表 4.8 隨機佈點之各節點位置

節點編號	x/L
1	3.9132E-04
2	3.5223E-01
3	5.7689E-01
4	6.3836E-01
5	7.8027E-01
6	9.3251E-01
7	9.4796E-01

表 4.9 不同添加多項式次方數對於懸臂梁之相對誤差(取 $N = 7$)

自然振動頻率	添加多項式次方數			
	0	2	4	6
1 st	5.0924E-03	1.1054E-03	1.4823E-05	8.8762E-08
2 nd	1.1285E-03	1.2435E-04	3.6048E-05	2.0508E-04
3 rd	3.0703E-04	7.5008E-04	1.5817E-04	1.6292E-04
4 th	1.2192E-03	5.6424E-04	4.8582E-04	2.3611E-03
5 th	4.8995E-03	8.2372E-03	1.3609E-02	1.4155E-02

表 4.10 不同添加多項式次方數對於懸臂梁之相對誤差(取 $N = 8$)

自然振動頻率	添加多項式次方數			
	0	2	4	6
1 st	6.2441E-04	5.2738E-05	7.6874E-06	1.1618E-08
2 nd	6.3451E-05	3.5204E-06	1.2289E-05	7.1346E-06
3 rd	1.7199E-04	1.2094E-04	1.2963E-04	3.1384E-05
4 th	2.2980E-04	3.5643E-05	3.9139E-04	1.1157E-04
5 th	1.8320E-03	3.8168E-04	1.0924E-02	1.2708E-03

表 4.11 不同邊界條件處理方式之相對誤差(取 $N = 7$)

自然振動頻率	方法①	方法②	方法③
1 st	4.6779E-02	5.0924E-03	7.3068E-04
2 nd	2.5407E-02	1.1285E-03	6.2852E-04
3 rd	8.1318E-03	3.0703E-04	1.5025E-04
4 th	1.3444E-02	1.2192E-03	1.1143E-03
5 th	5.1474E-01	4.8995E-03	7.6641E-03

表 4.12 不同邊界條件處理方式之相對誤差(取 $N = 9$)

自然振動頻率	方法①	方法②	方法③
1 st	6.7313E-04	4.0087E-05	5.1416E-06
2 nd	8.5654E-04	1.7160E-05	1.1409E-05
3 rd	2.1854E-04	1.2272E-05	3.3567E-06
4 th	1.3258E-03	8.5446E-05	5.2545E-05
5 th	5.2166E-03	1.2675E-04	2.9696E-05

表 4.13 Hermite 函數之相對誤差

自然振動頻率	$N = 9, N_2 = 2$ (使用 Hermite 函數)	$N = 11, N_2 = 0$ (無使用 Hermite 函數)
1 st	9.8443E-07	3.6859E-03
2 nd	2.1215E-05	2.0763E-03
3 rd	1.0603E-05	5.7028E-04
4 th	1.3490E-04	1.1382E-03
5 th	5.8648E-05	1.0497E-03

表 4.14 不同邊界條件梁解之相對誤差(使用全域徑向基函數)

自然振動頻率	simple support- simple support	free - free	clamped- clamped
1 st	-4.2927E-08	9.8443E-07	1.2588E-06
2 nd	7.4558E-08	2.1215E-05	1.9514E-05
3 rd	-1.1320E-09	1.0603E-05	6.1605E-06
4 th	5.7921E-06	1.3490E-04	7.4229E-05
5 th	9.3739E-07	5.8648E-05	4.6667E-04

表 4.15 不同邊界條件梁解之相對誤差(使用非全域徑向基函數)

自然振動頻率	simple support- simple support	free - free	clamped- clamped
1 st	2.6489E-04	9.7900E-03	3.4508E-04
2 nd	2.1065E-05	3.2473E-03	5.6335E-04
3 rd	6.8990E-06	1.4991E-03	7.6900E-04
4 th	2.4571E-04	9.9495E-04	2.7059E-03
5 th	1.9620E-04	9.5575E-04	5.5576E-04

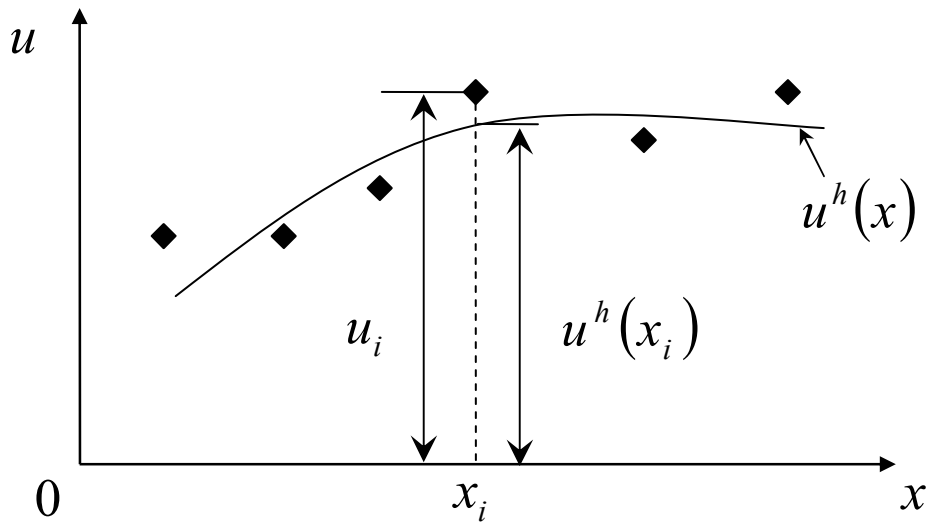


圖 2.1 位場函數近似值 $u^h(x)$ 以及節點正確值 u_i 之關係

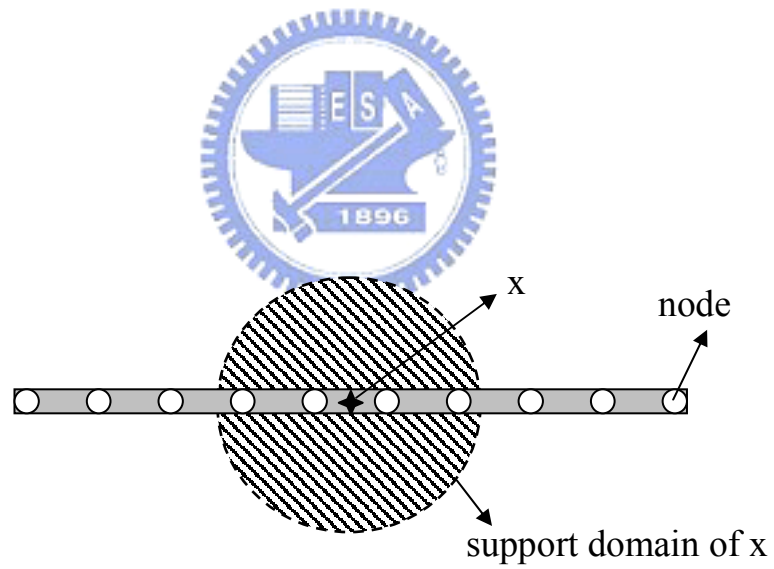


圖 3.1 節點以及目標點 x 之關係

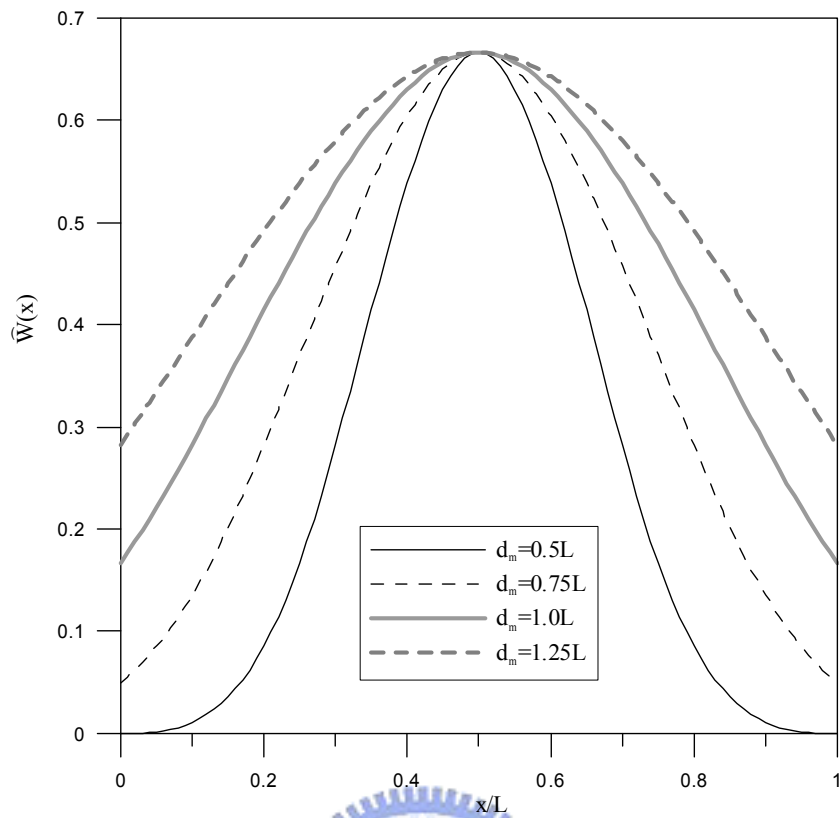


圖 3.2 不同支撐半徑所構成之權函數

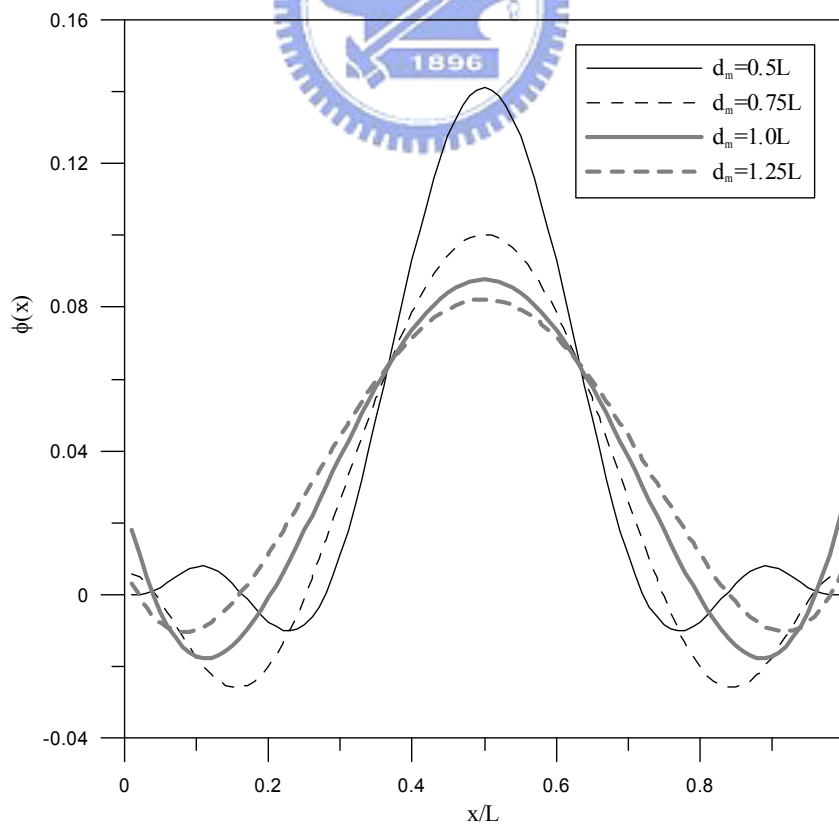


圖 3.3 不同支撐半徑所構成之形狀函數

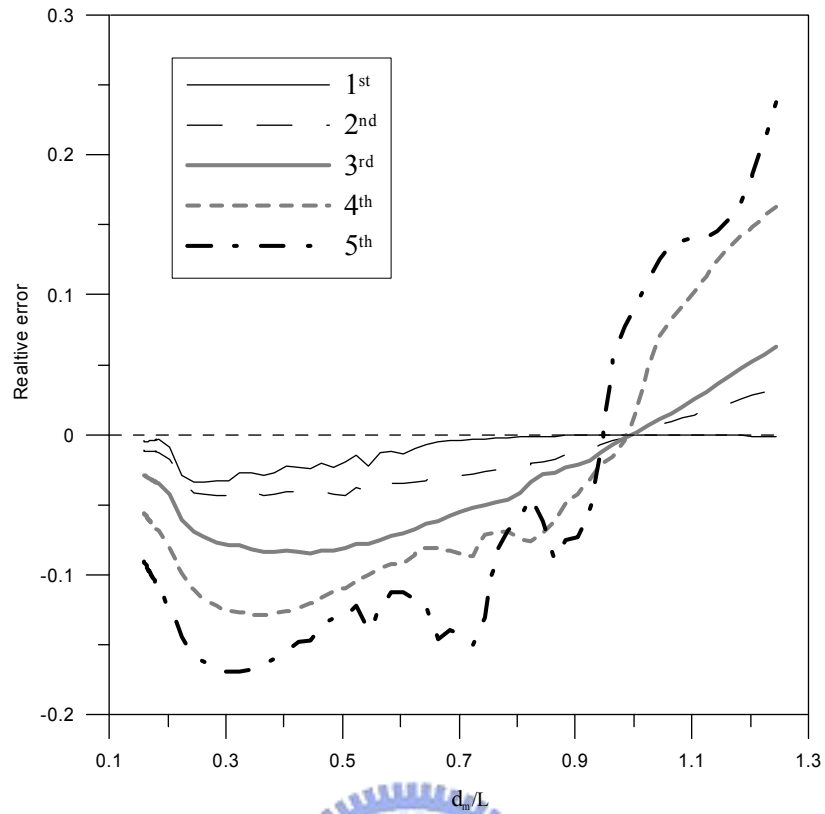


圖 3.4 權函數支撐半徑對於自然振動頻率精確度之影響

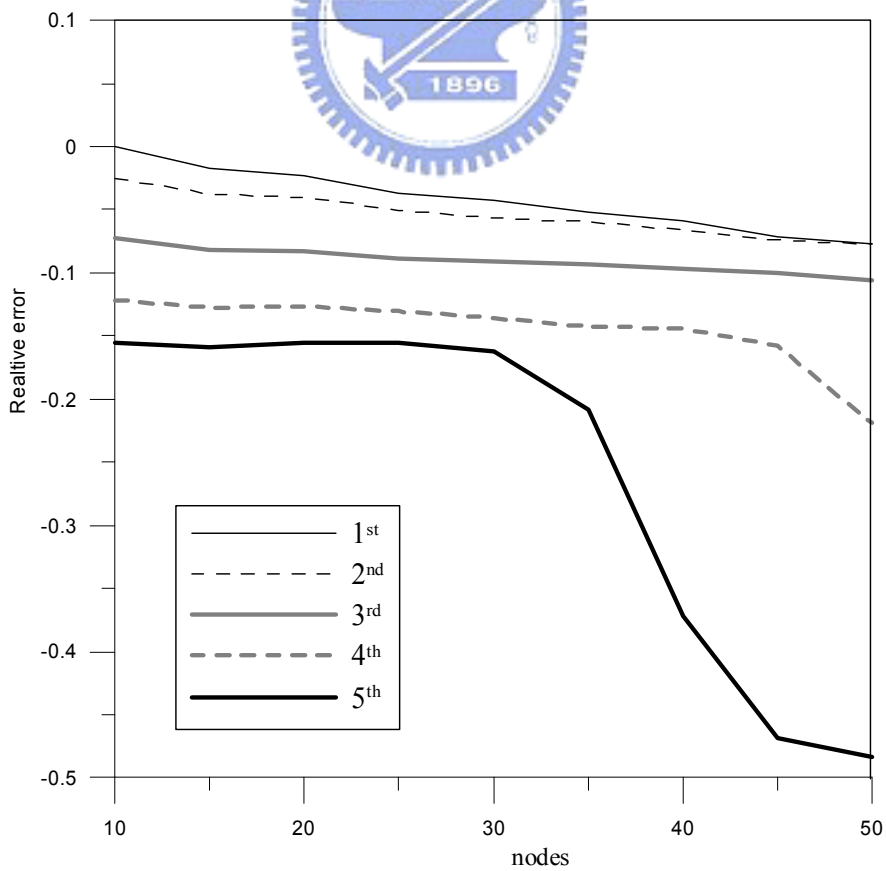


圖 3.5 節點數目對於自然振動頻率精確度之影響(取 $d_m = 0.4L$)

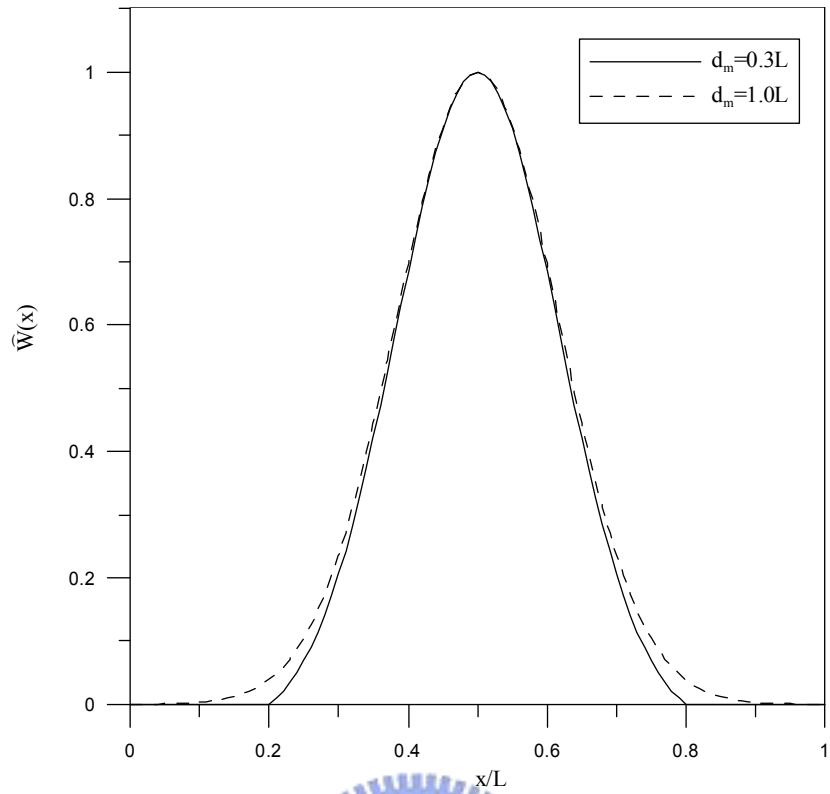


圖 3.6 指數權函數支撐半徑對於指數權函數之影響

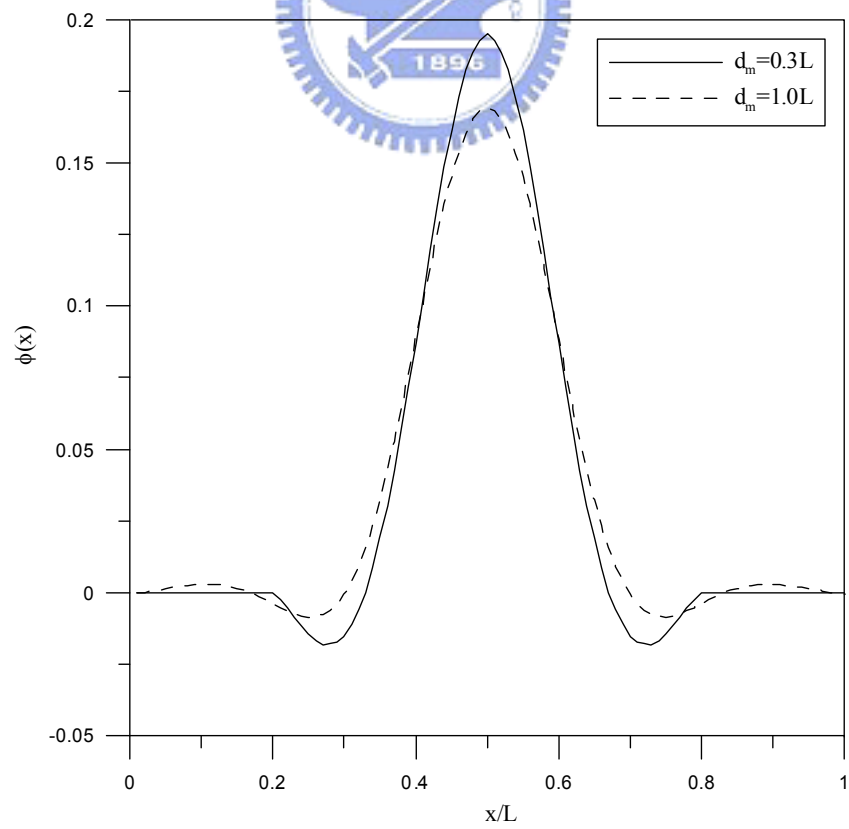


圖 3.7 指數權函數支撐半徑對於形狀函數之影響

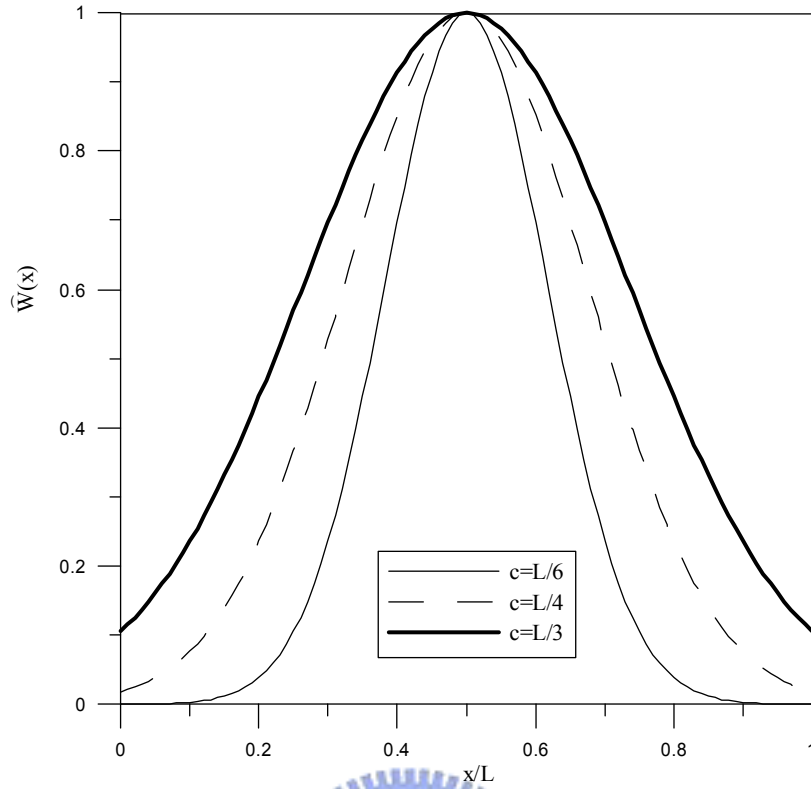


圖 3.8 指數權函數參數 c 對於權函數之影響

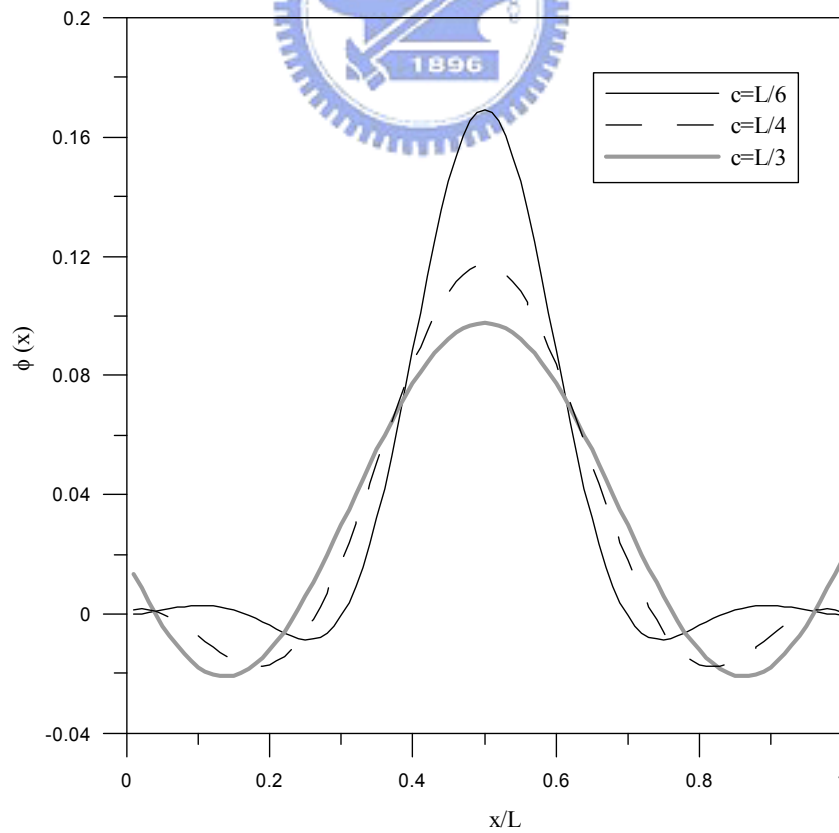


圖 3.9 指數權函數參數 c 對於形狀函數之影響

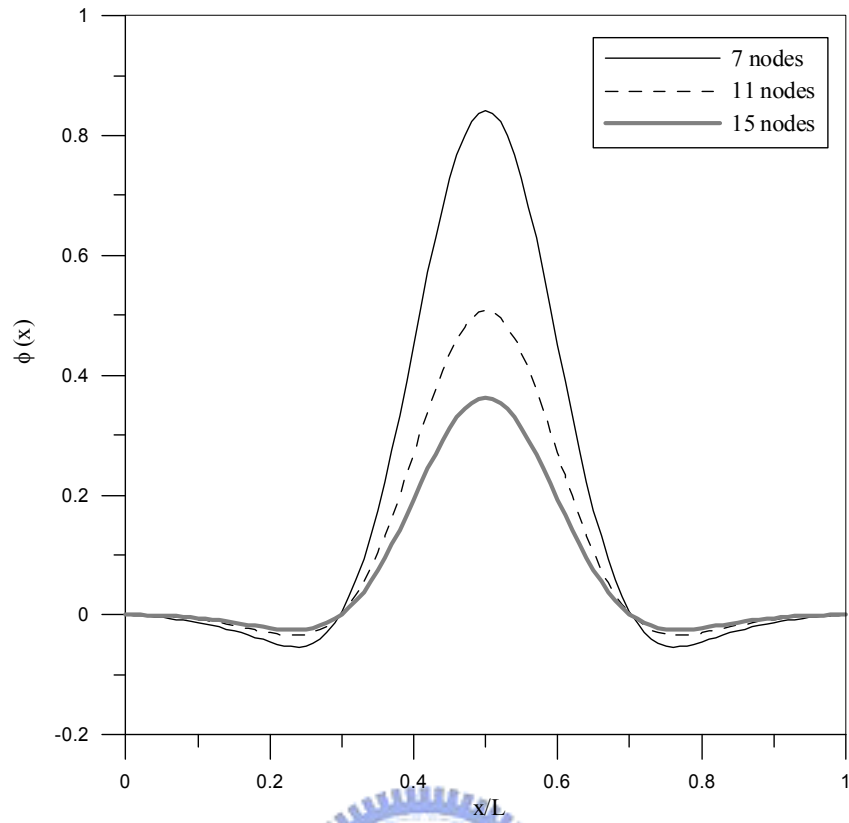


圖 3.10 不同節點數目構成形狀函數之比較

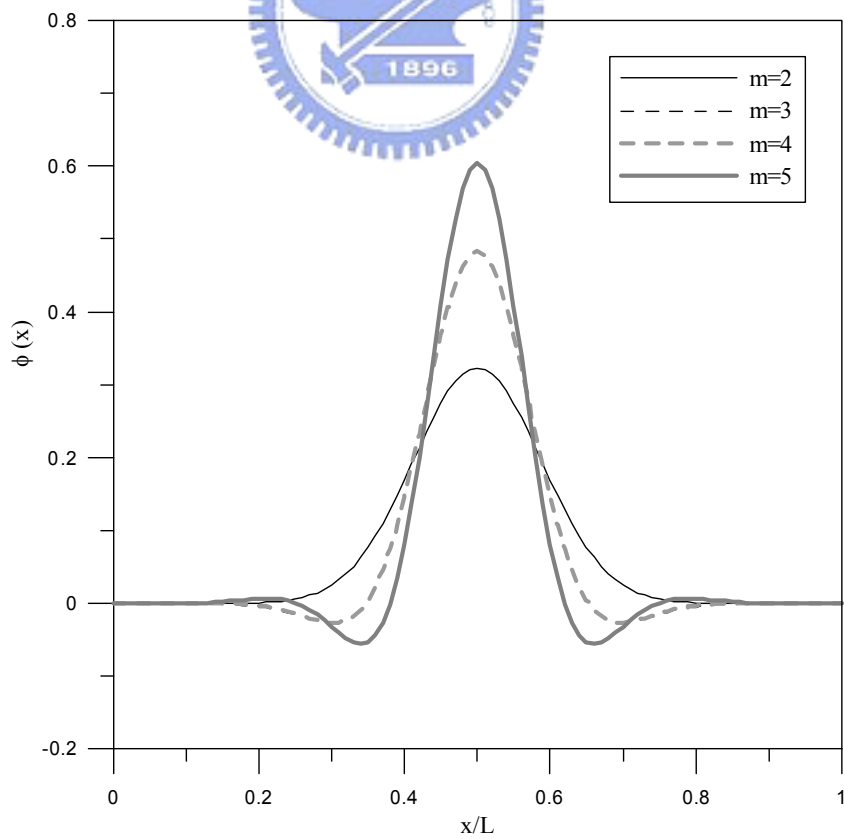


圖 3.11 不同多項式次方數(m)構成形狀函數之比較

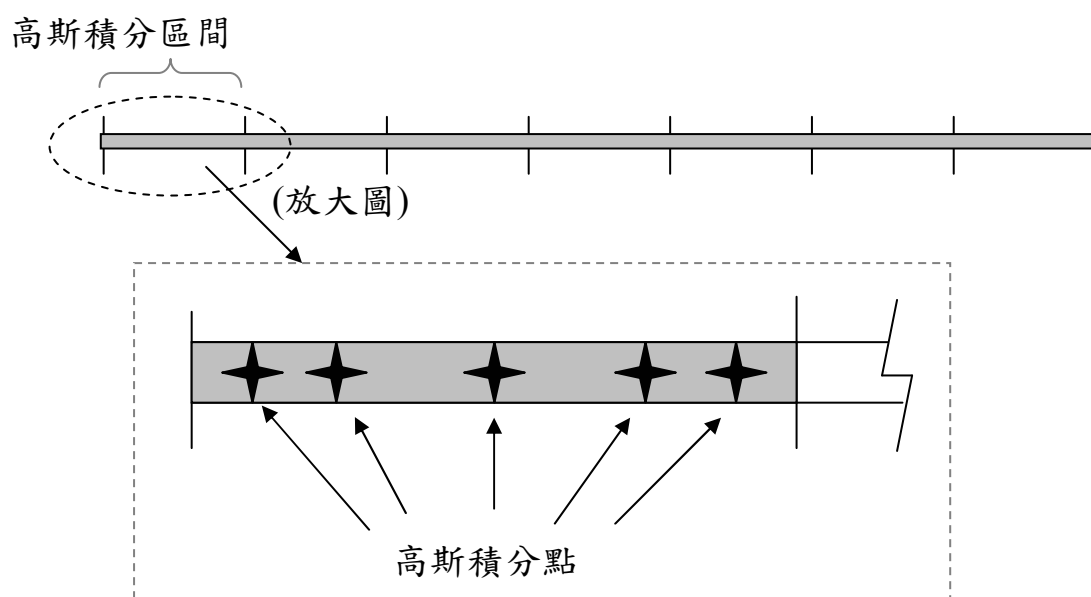


圖 3.12 高斯積分點以及高斯積分區間

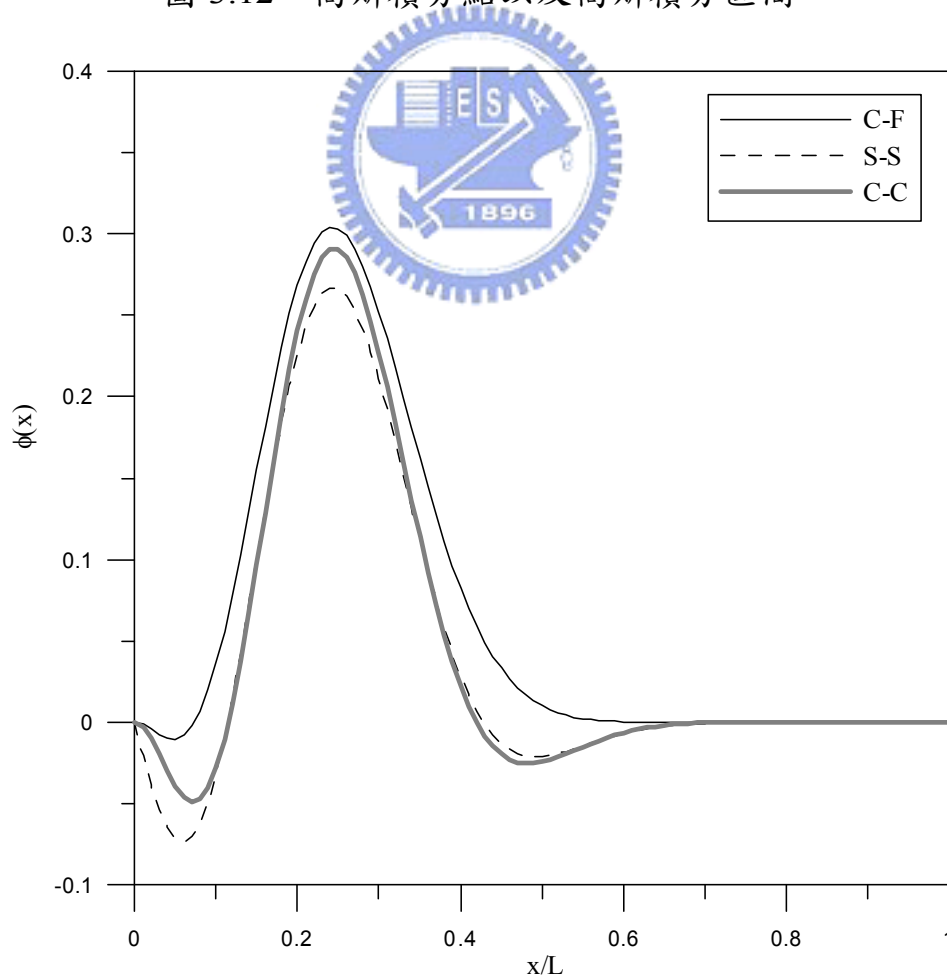


圖 3.13 不同基底多項式所組成之形狀函數

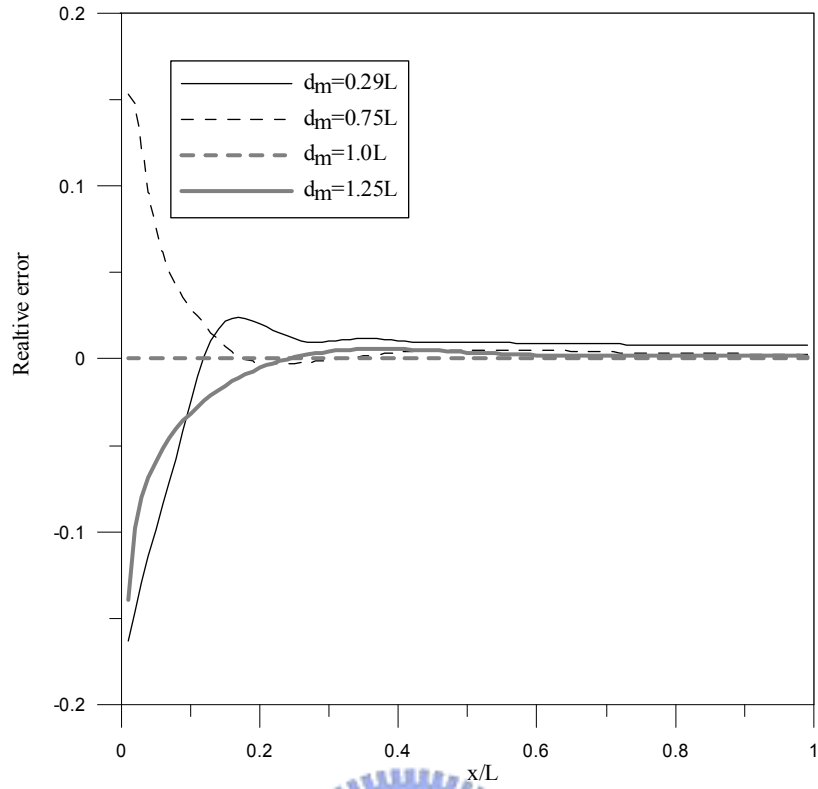


圖 3.14 使用不同支撐半徑所得之位移誤差

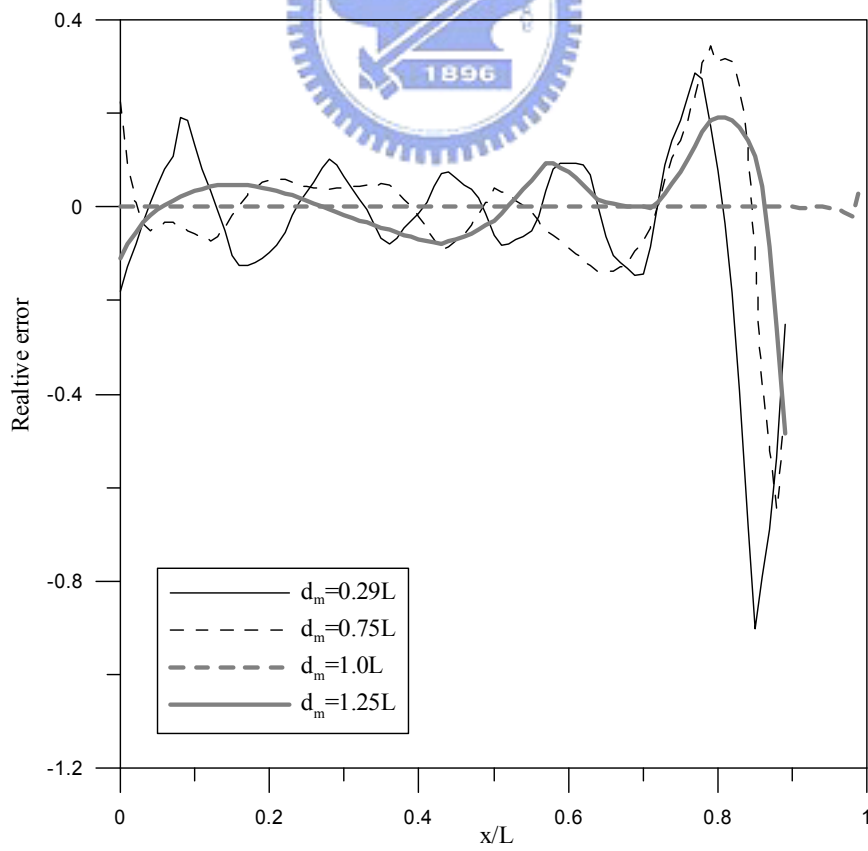


圖 3.15 使用不同支撐半徑所得之彎矩誤差

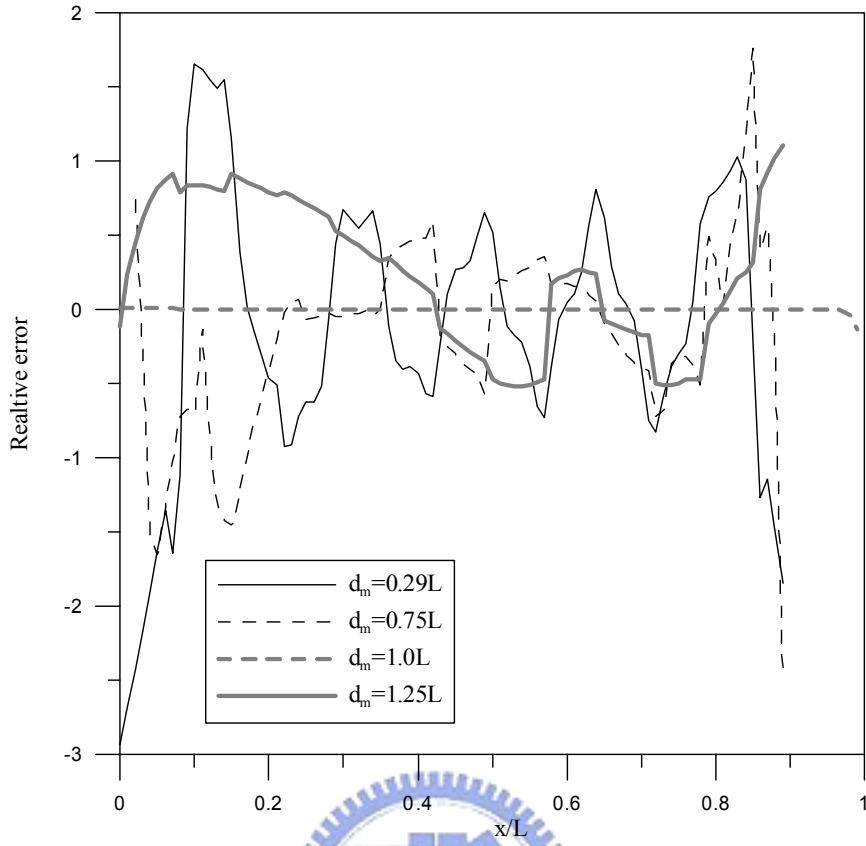


圖 3.16 使用不同支撐半徑所得之剪力誤差

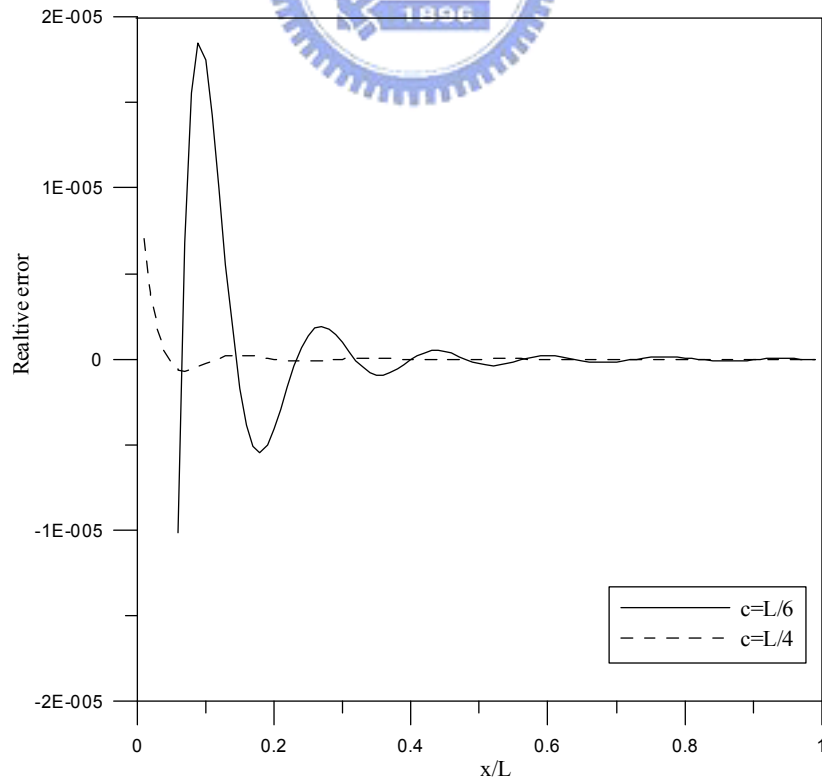


圖 3.17 使用不同坡度參數 c 所得之位移誤差

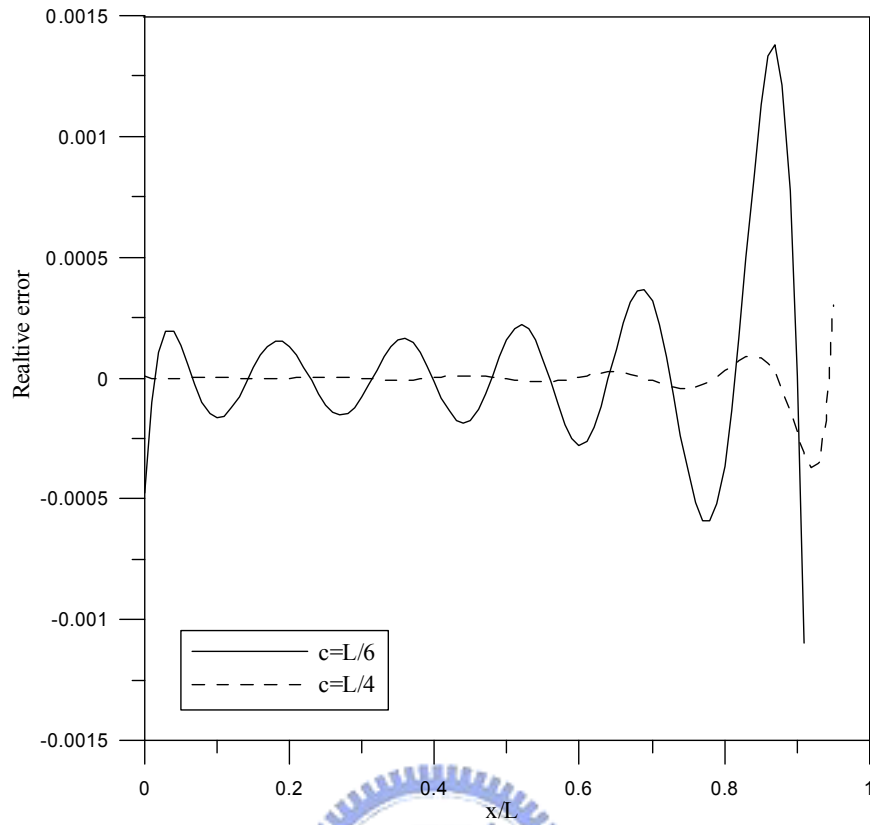


圖 3.18 使用不同坡度參數 c 所得之彎矩誤差

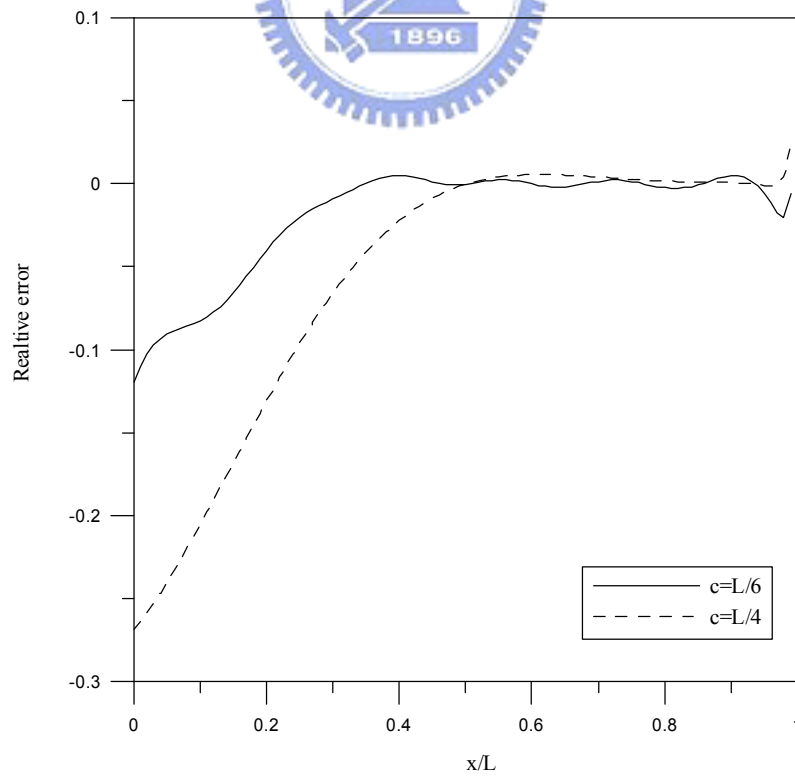


圖 3.19 使用不同坡度參數 c 所得之剪力誤差

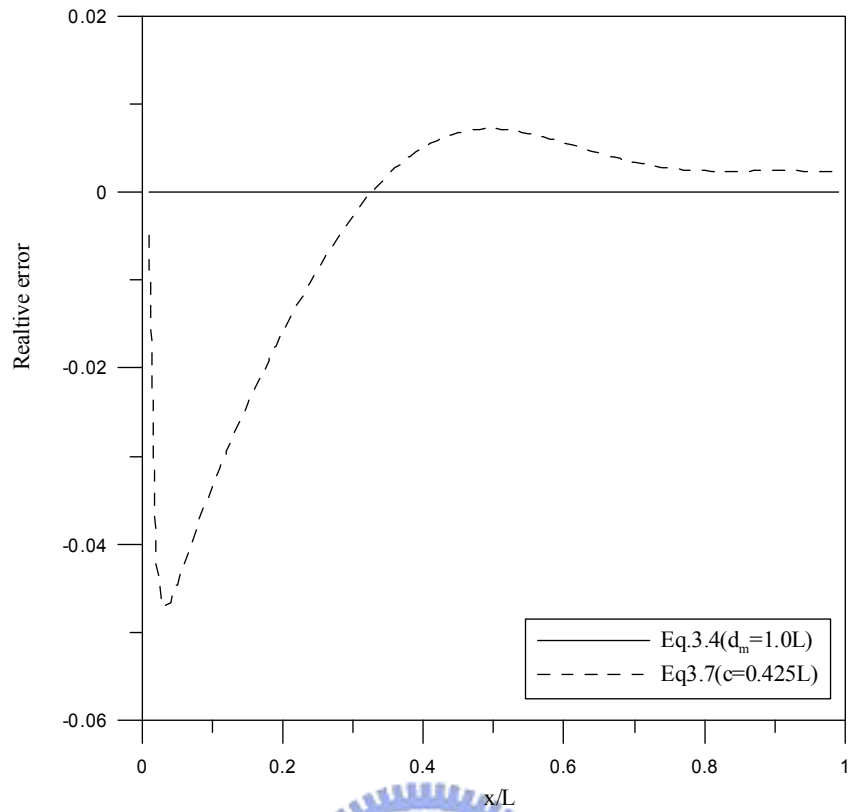


圖 3.20 使用不同種類權函數所得之位移誤差

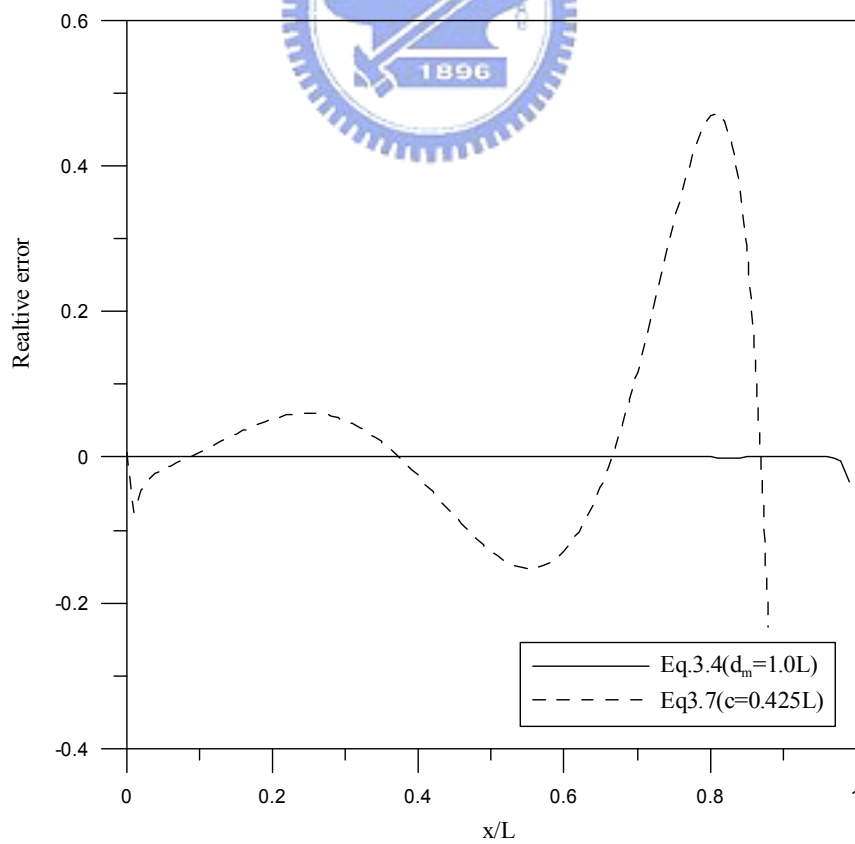


圖 3.21 使用不同種類權函數所得之彎矩誤差

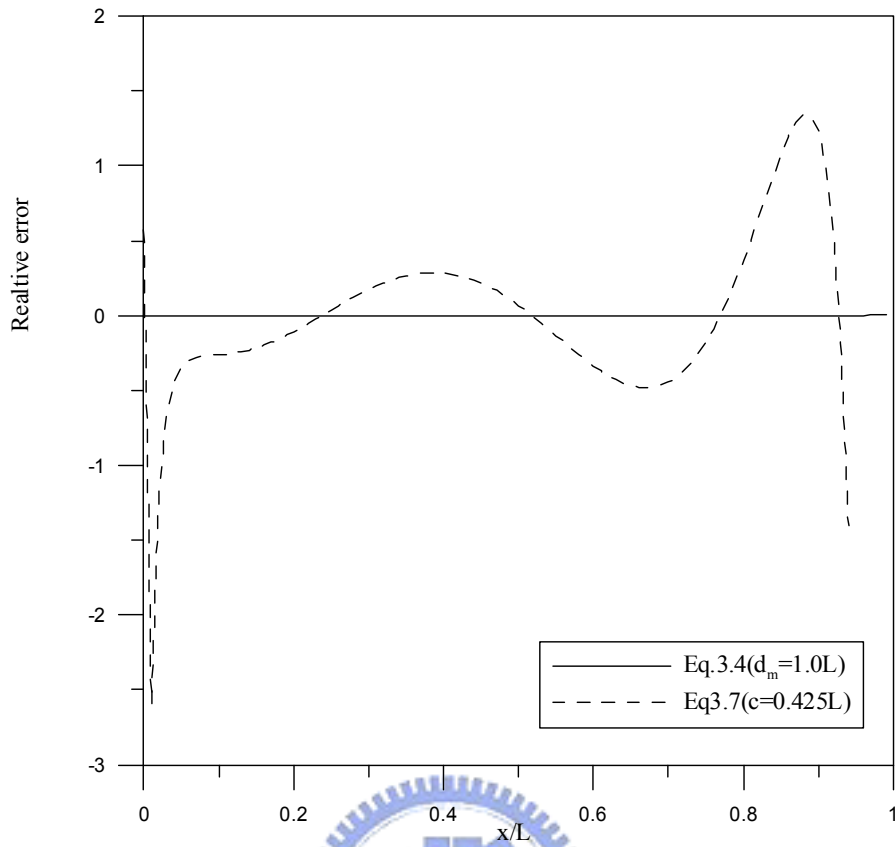


圖 3.22 使用不同種類權函數所得之剪力誤差

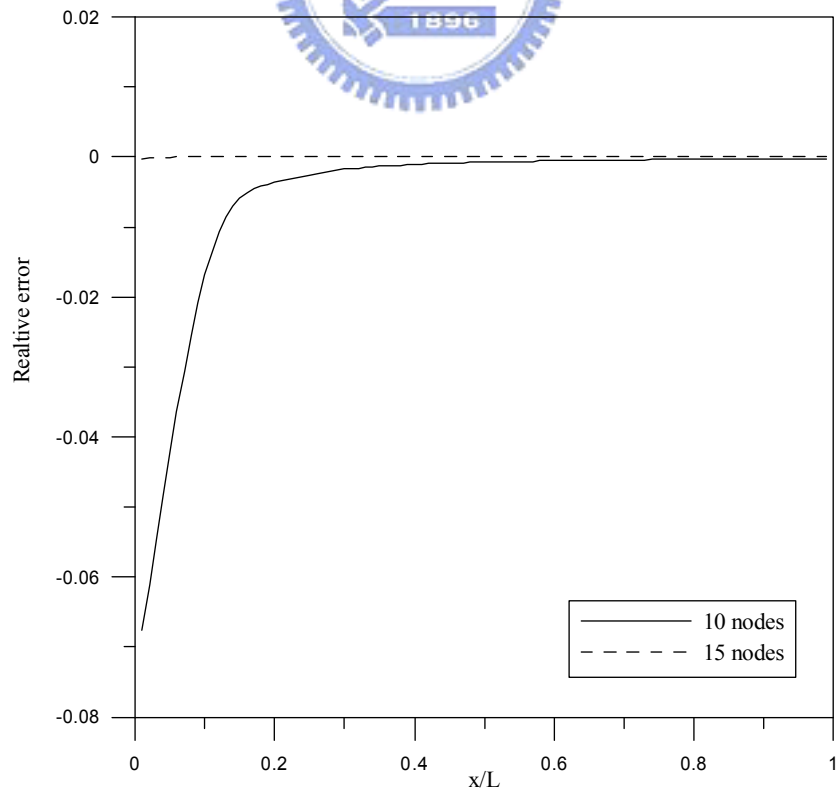


圖 3.23 使用不同節點數目所得之位移誤差(取 $c = L/6$)

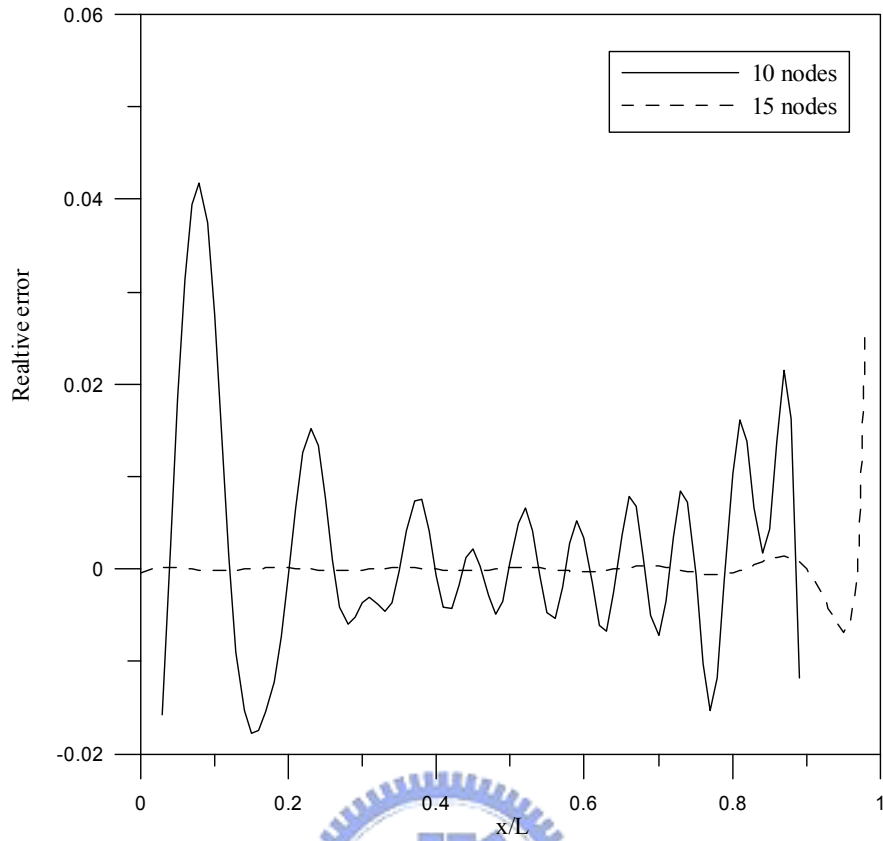


圖 3.24 使用不同節點數目所得之彎矩誤差(取 $c = L/6$)

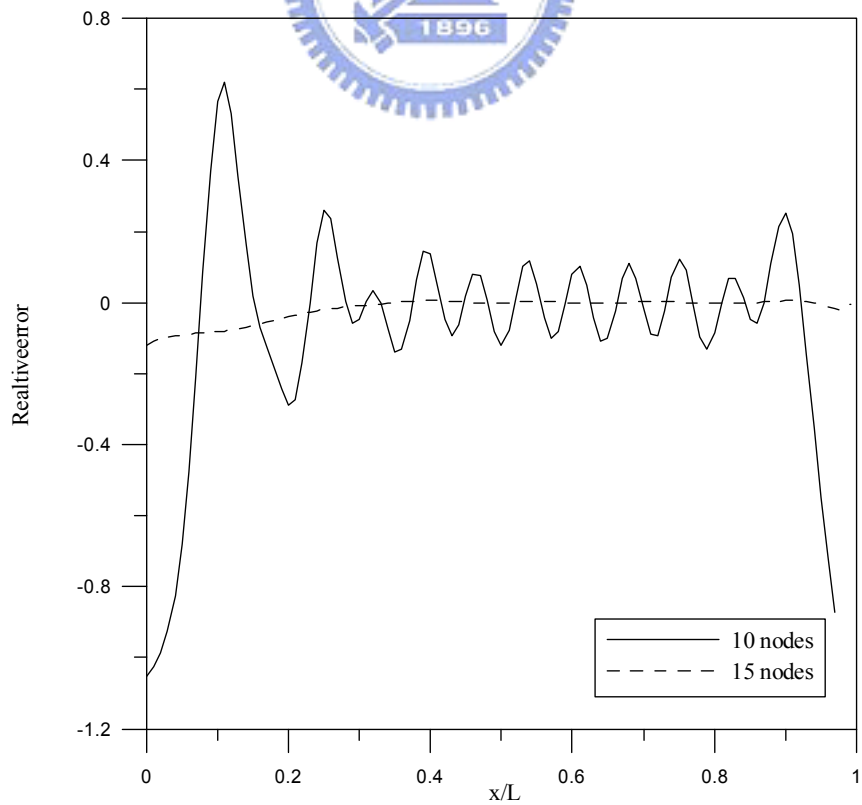


圖 3.25 使用不同節點數目所得之剪力誤差(取 $c = L/6$)

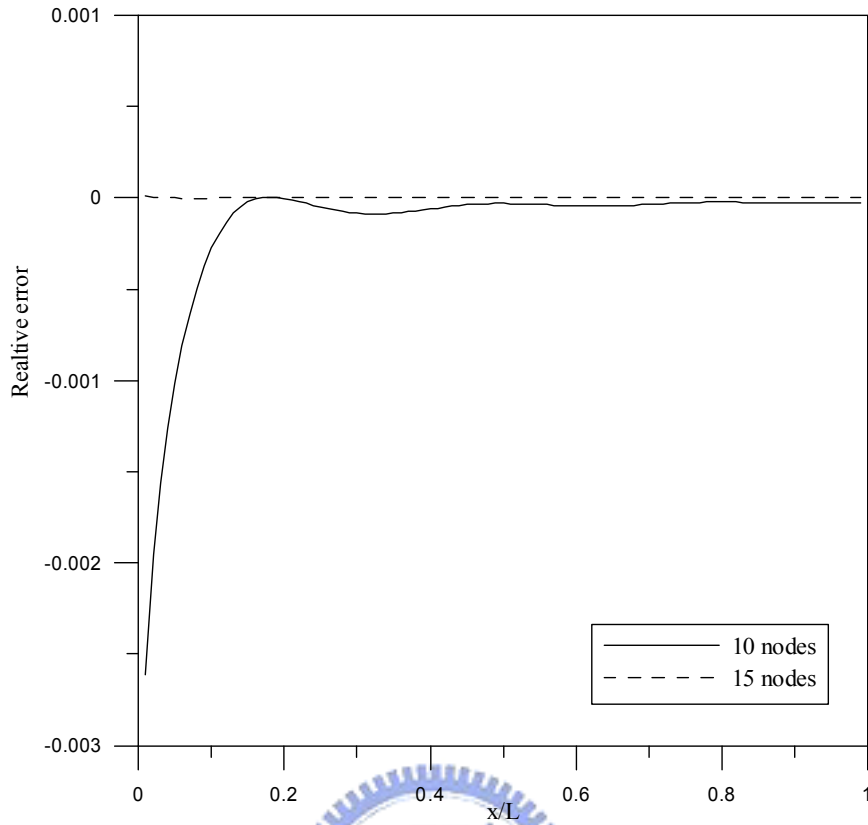


圖 3.26 使用不同節點數目所得之位移誤差(取 $c = L/4$)

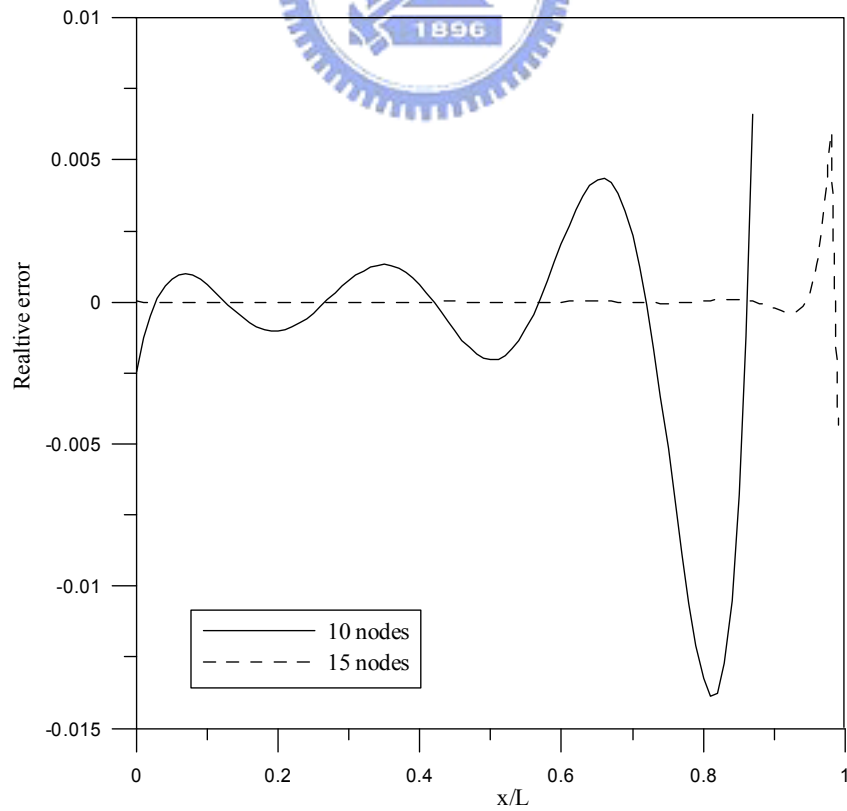


圖 3.27 使用不同節點數目所得之彎矩誤差(取 $c = L/4$)

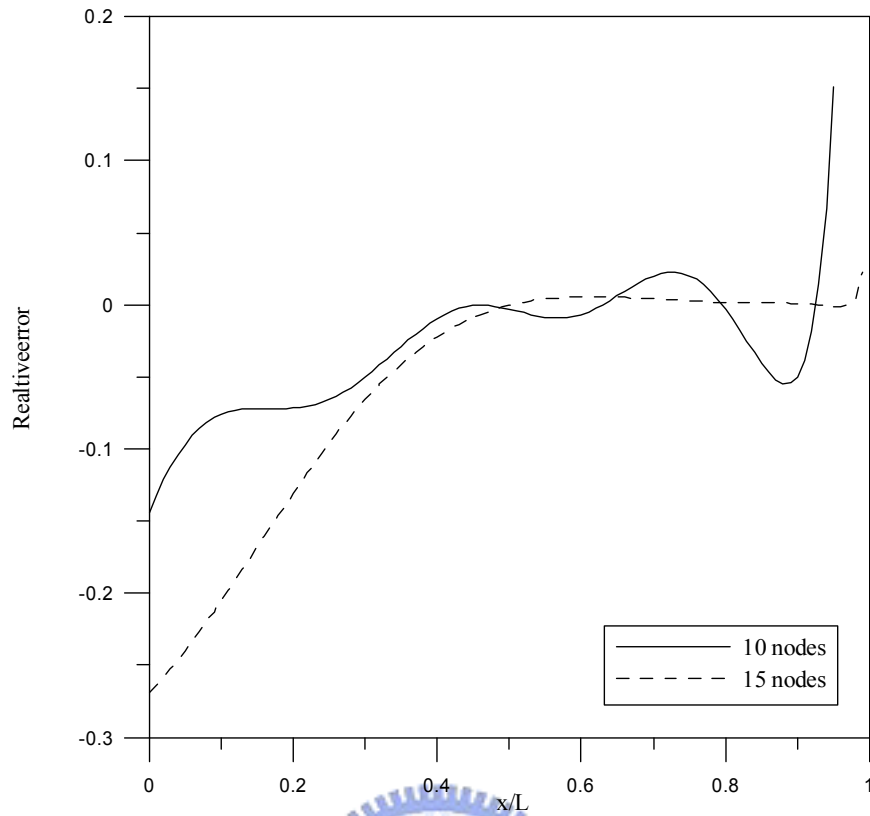


圖 3.28 使用不同節點數目所得之剪力誤差(取 $c = L/4$)



(a)



(b)



(c)

圖 3.29 不同佈點方式圖示

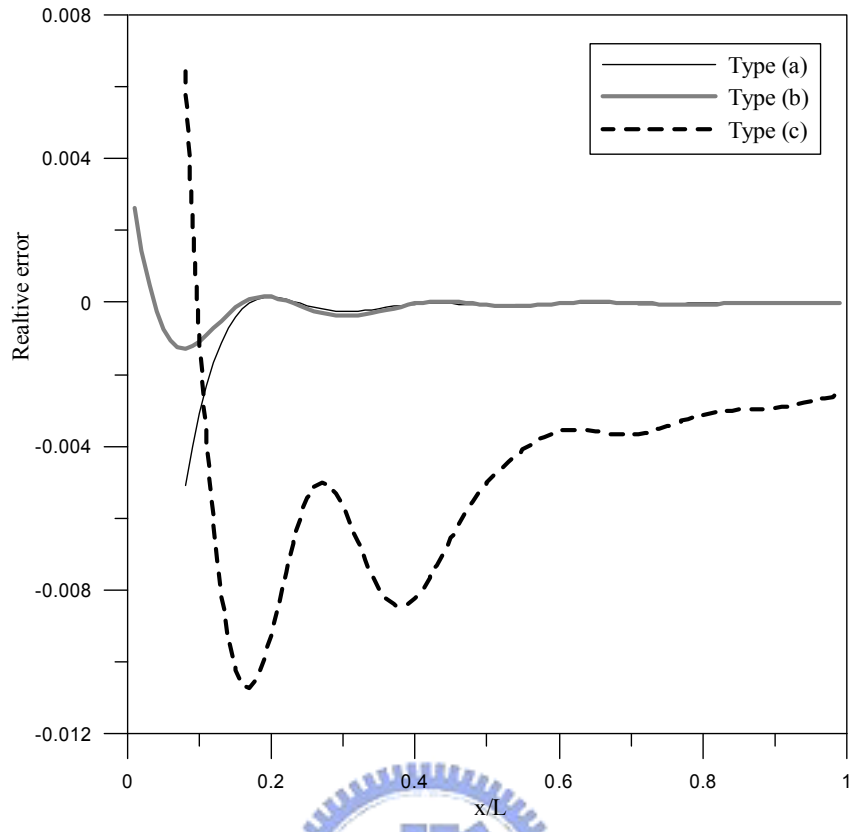


圖 3.30 不同佈點方式之位移誤差

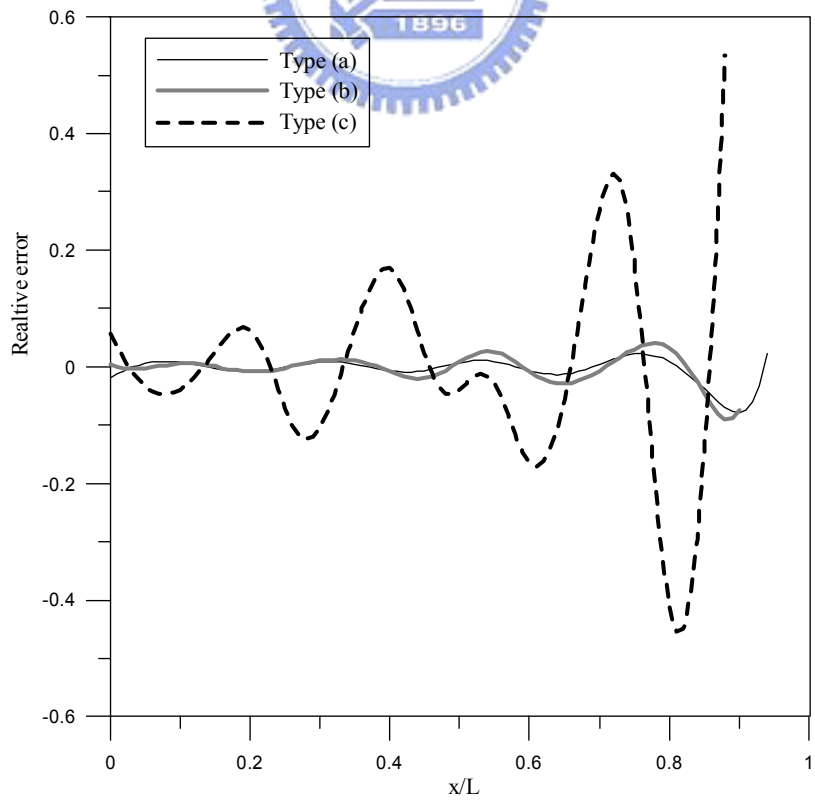


圖 3.31 不同佈點方式之彎矩誤差

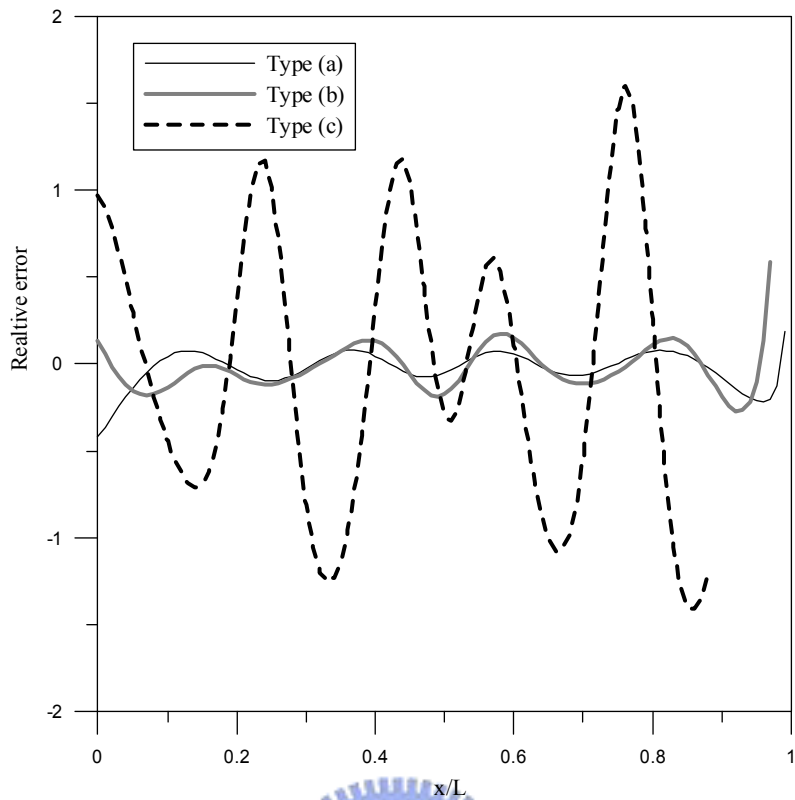


圖 3.32 不同佈點方式之剪力誤差

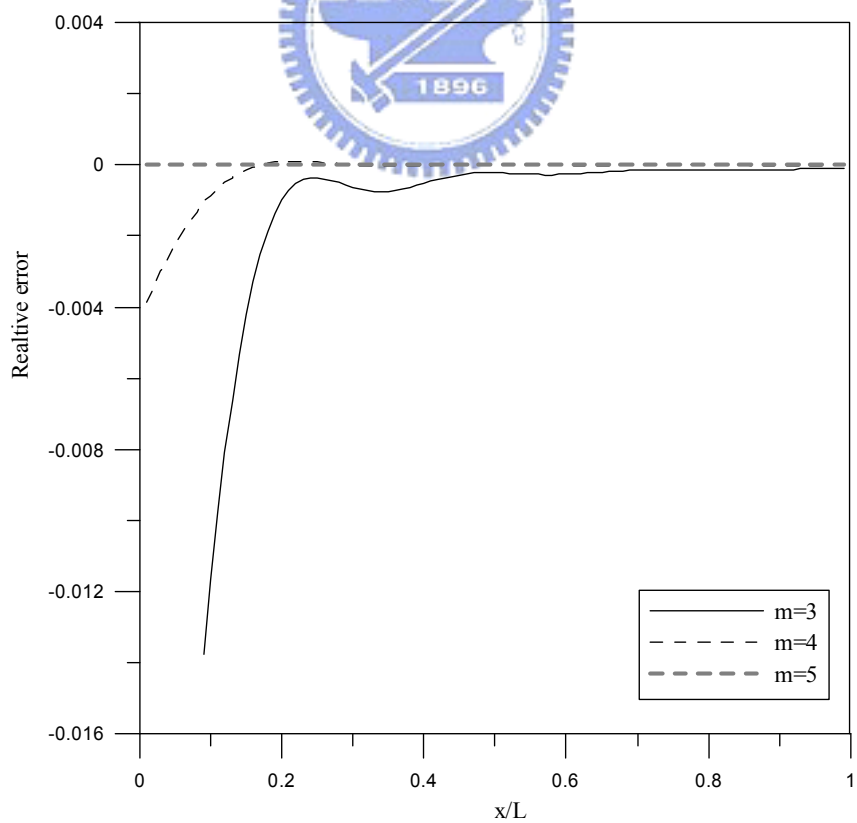


圖 3.33 使用不同基底多項式次方數所得之位移誤差(取 $N = 10$)

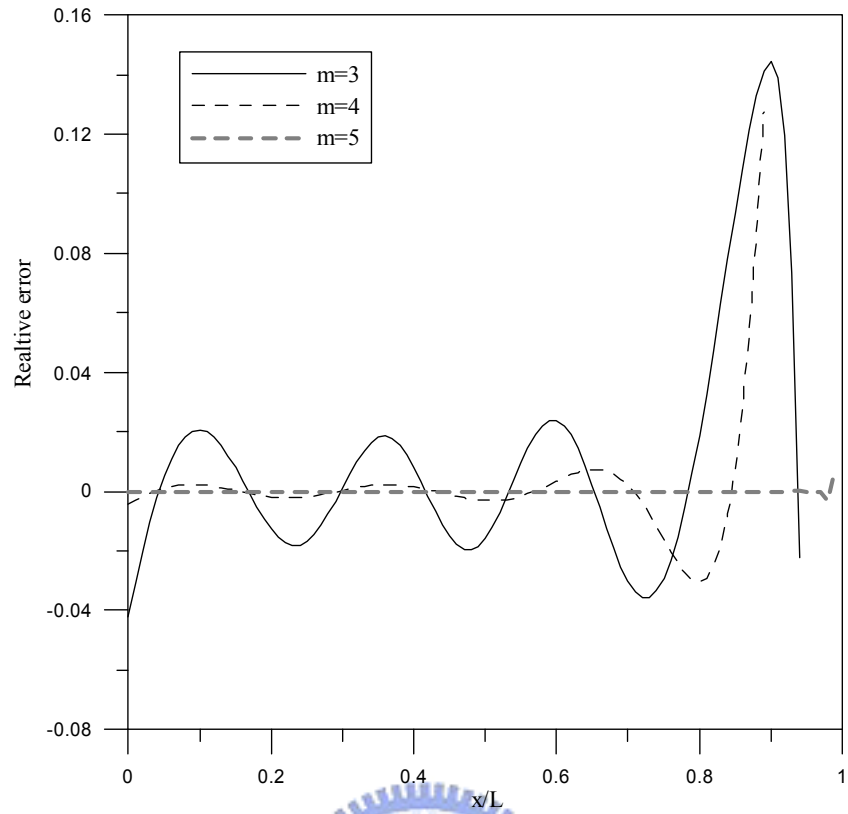


圖 3.34 使用不同基底多項式次方數所得之彎矩誤差(取 $N = 10$)

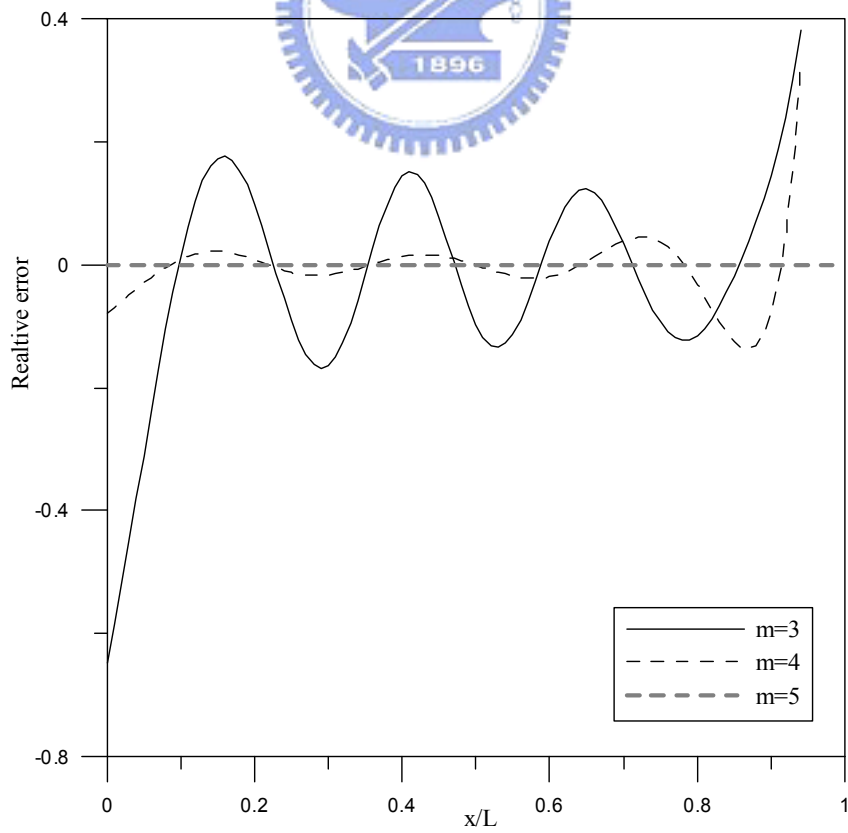


圖 3.35 使用不同基底多項式次方數所得之剪力誤差(取 $N = 10$)

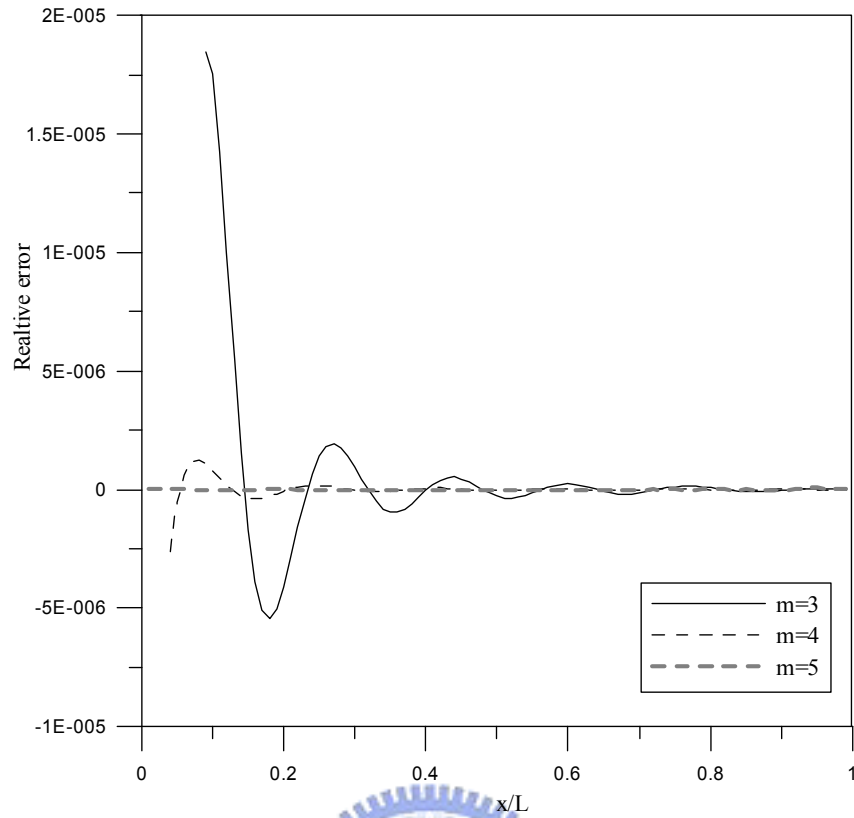


圖 3.36 使用不同基底多項式次方數所得之位移誤差(取 $N = 15$)

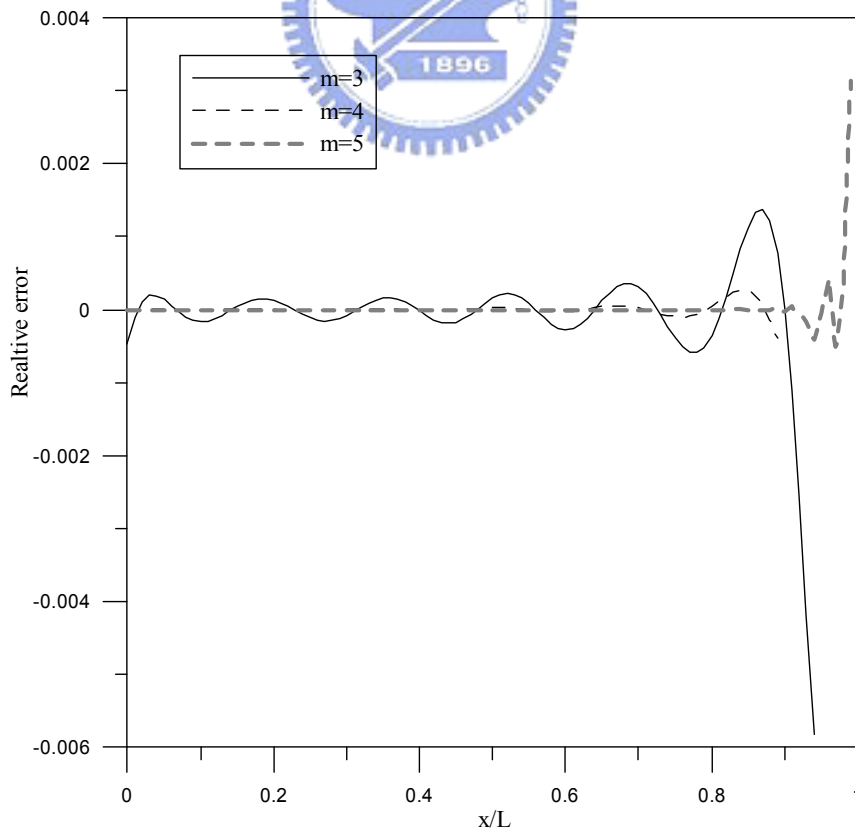


圖 3.37 使用不同基底多項式次方數所得之彎矩誤差(取 $N = 15$)

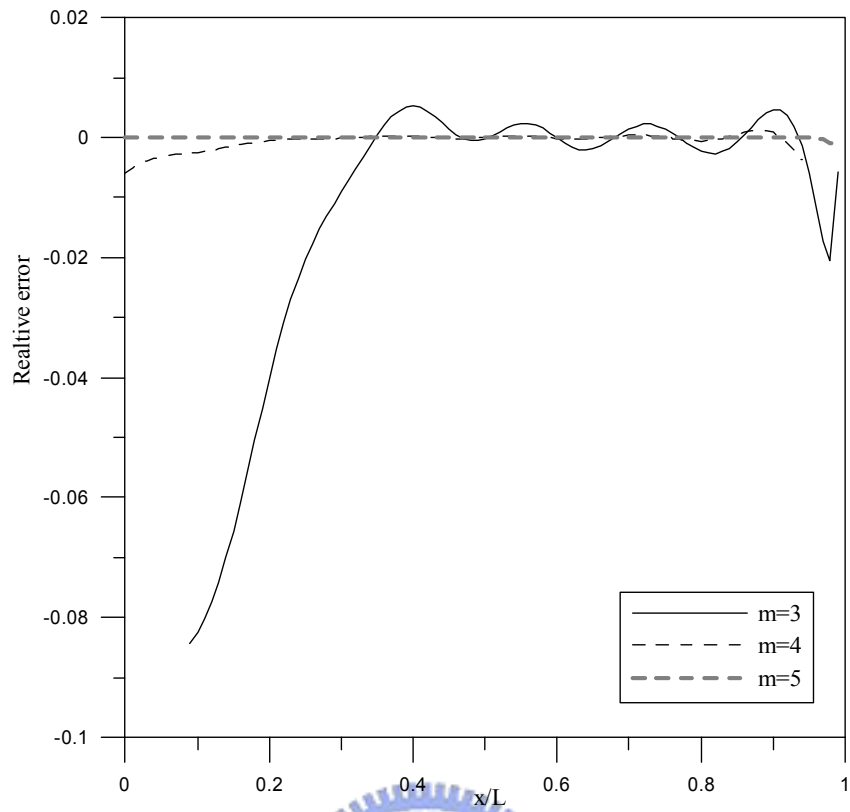


圖 3.38 使用不同基底多項式次方數所得之剪力誤差(取 $N = 15$)

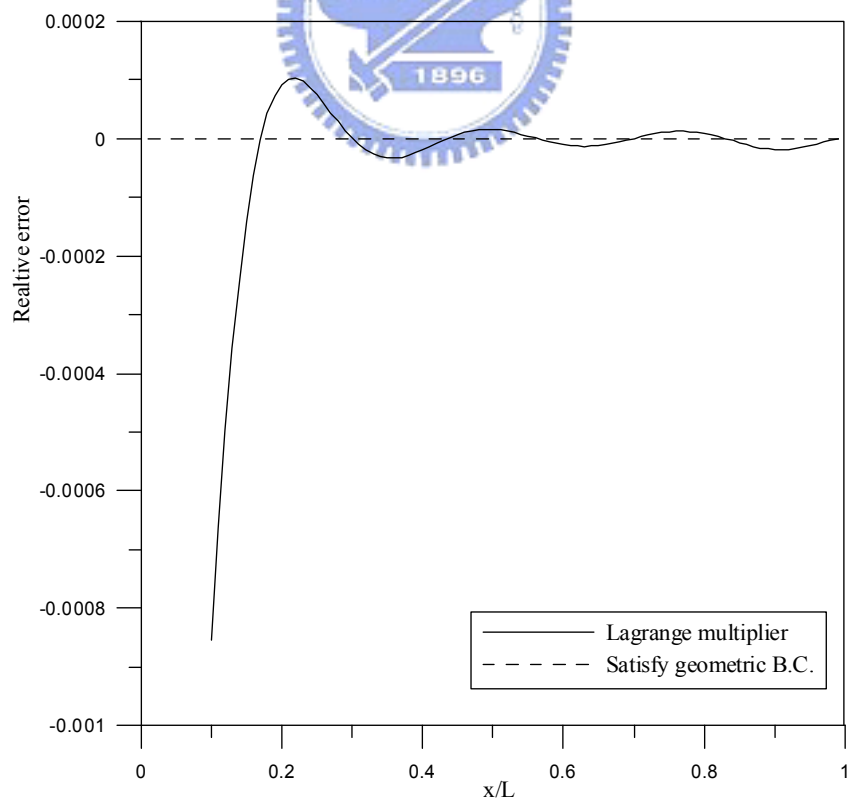


圖 3.39 使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)

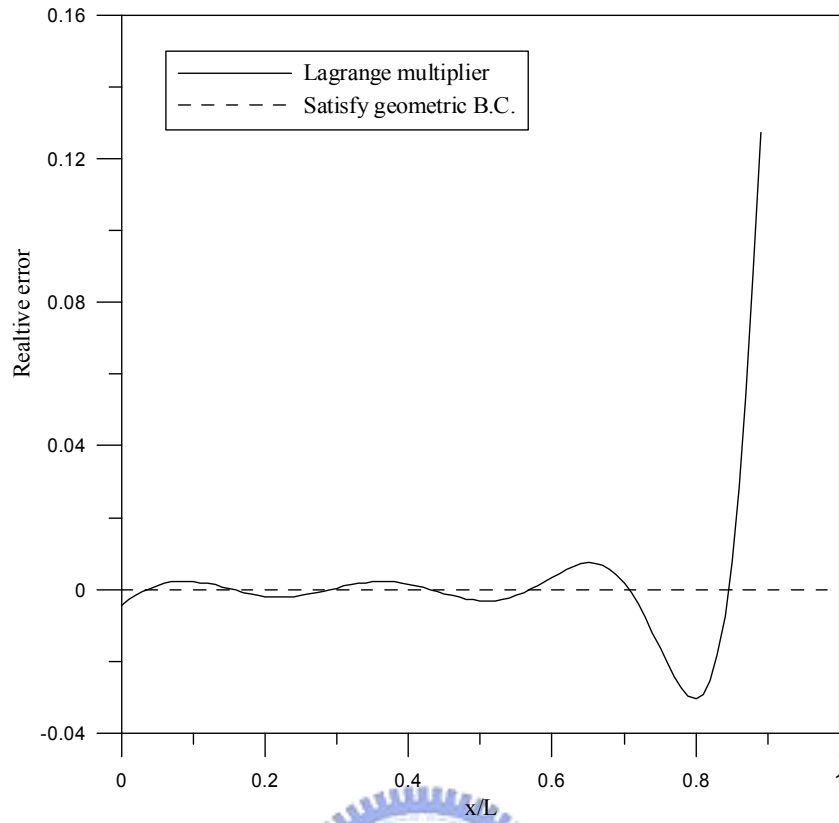


圖 3.40 使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)

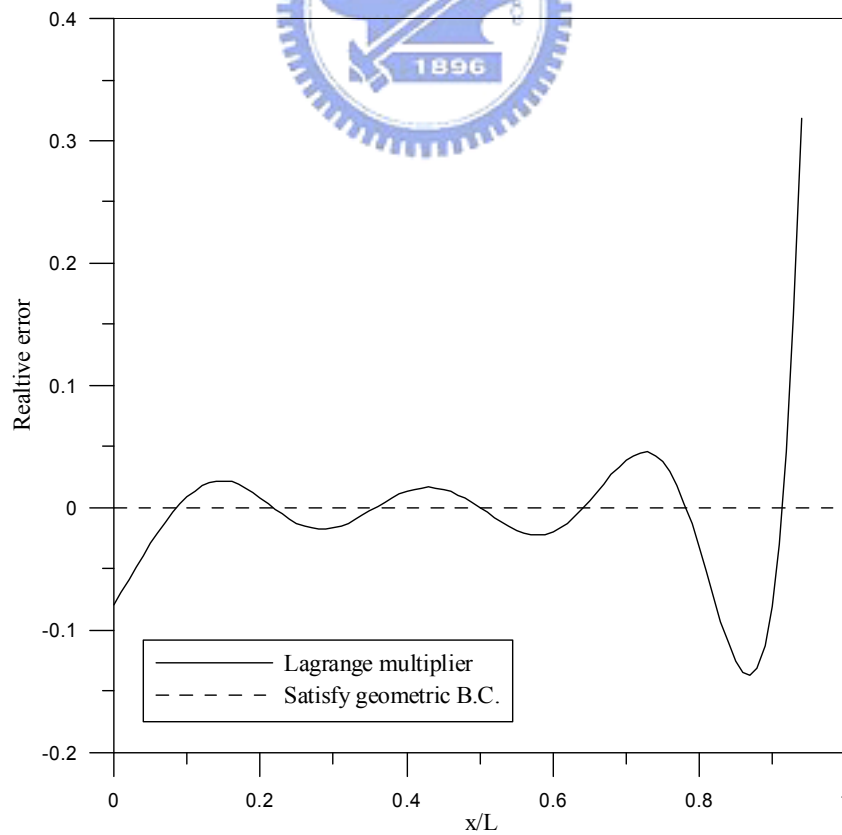


圖 3.41 使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 10$)

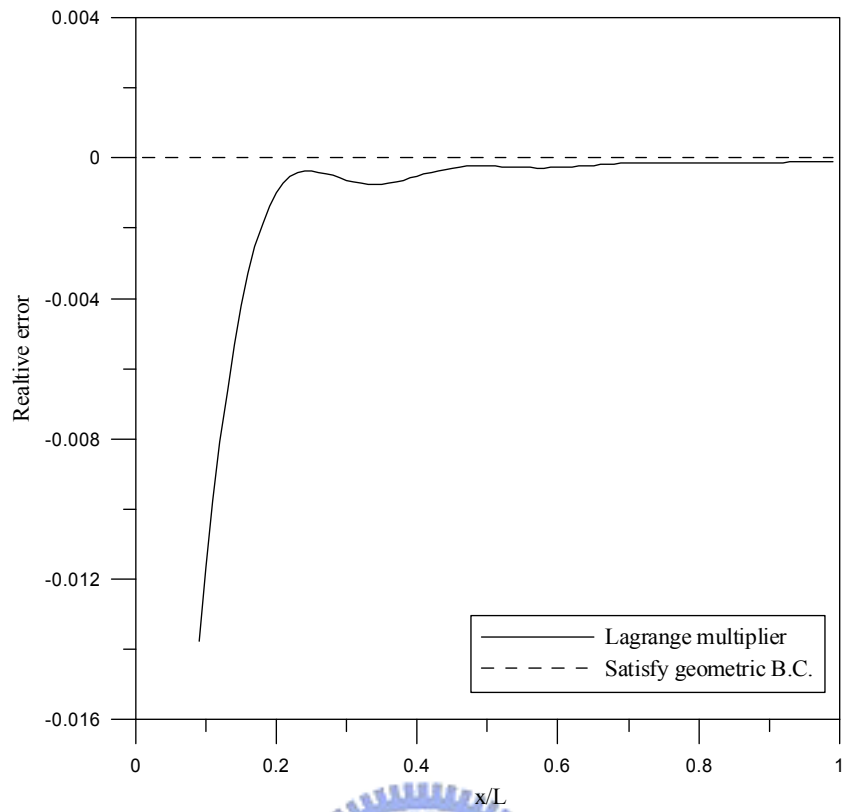


圖 3.42 使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m = 3$ 、 $N = 10$)

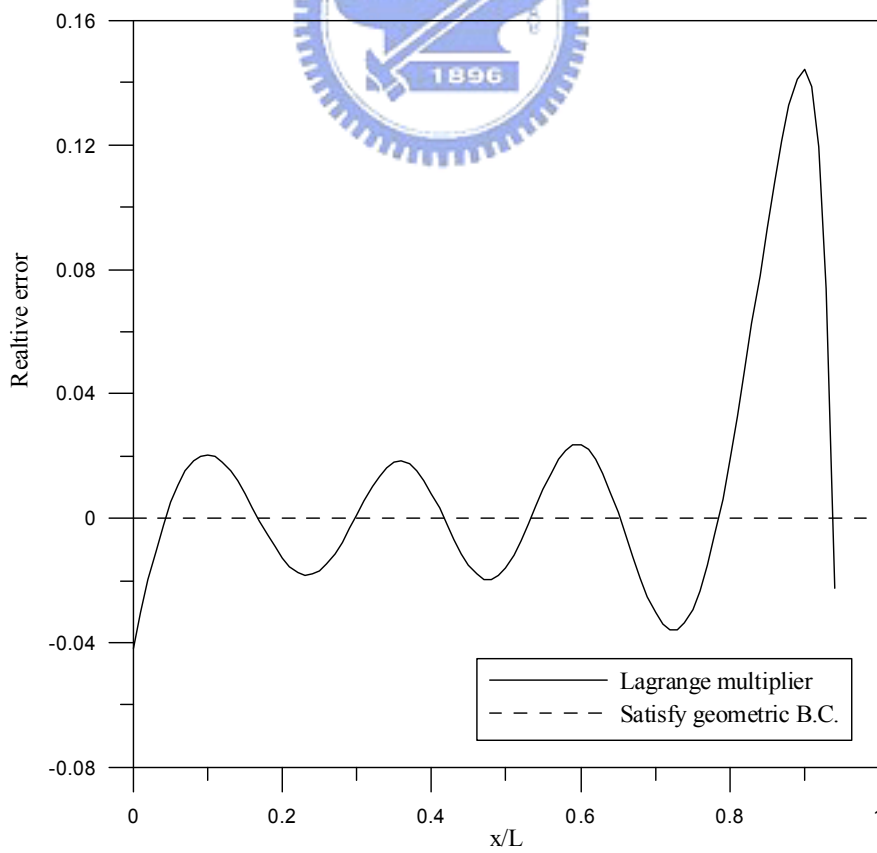


圖 3.43 使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 3$ 、 $N = 10$)

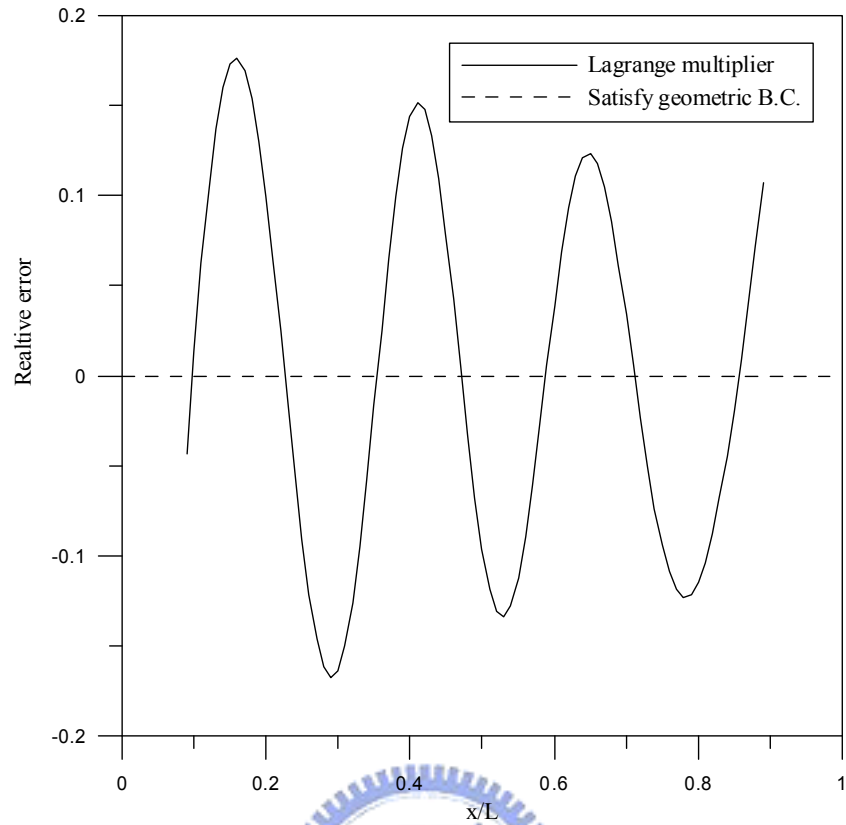


圖 3.44 使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m=3$ 、 $N=10$)

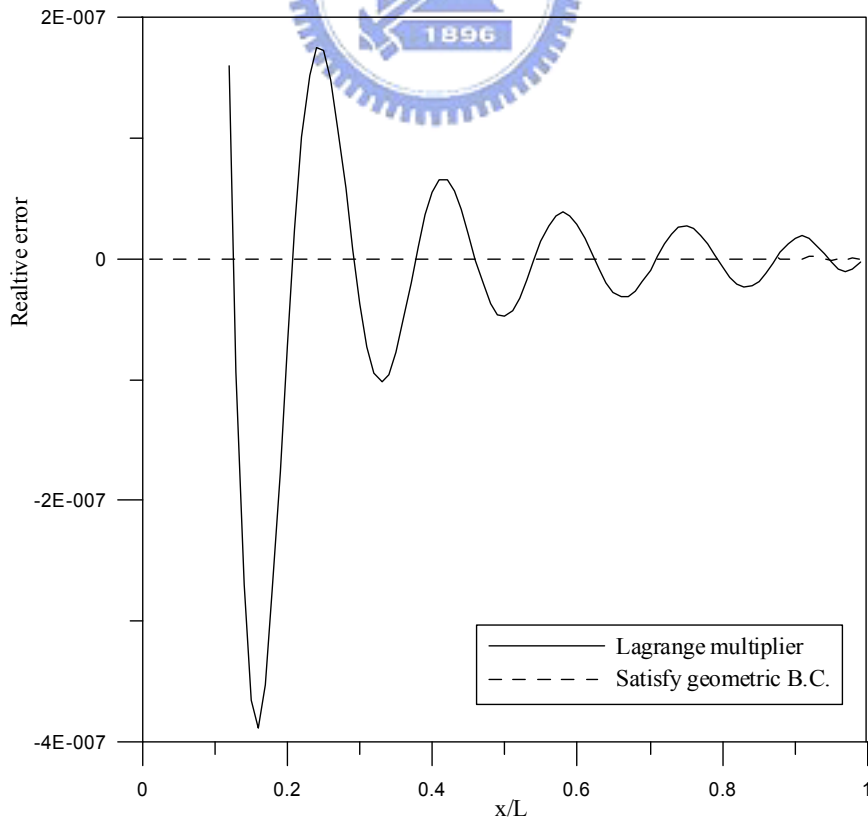


圖 3.45 使用不同基底多項式所得之位移誤差(取 $m=4$ 、 $N=15$)

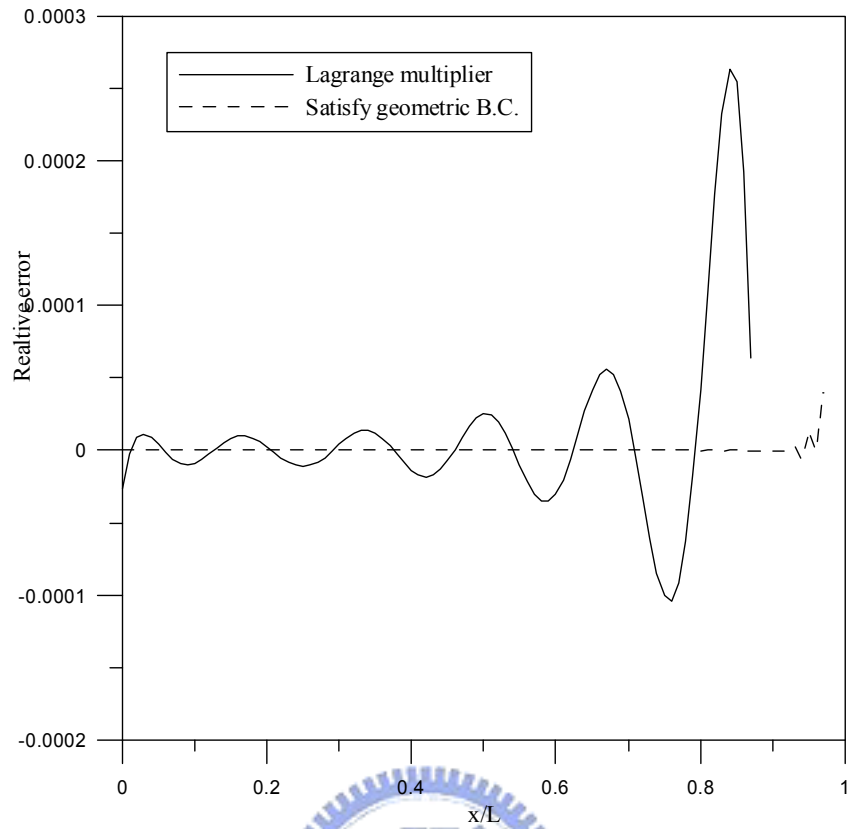


圖 3.46 使用不同基底多項式所得之彎矩誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 15$)

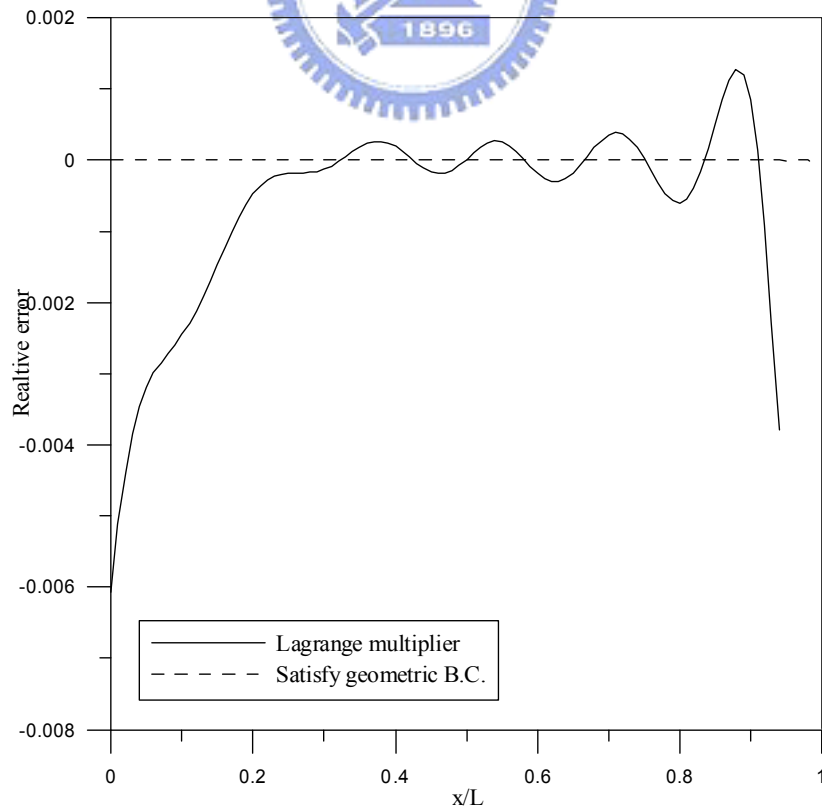


圖 3.47 使用不同基底多項式所得之剪力誤差(取 $m = 4$ 、 $N = 15$)

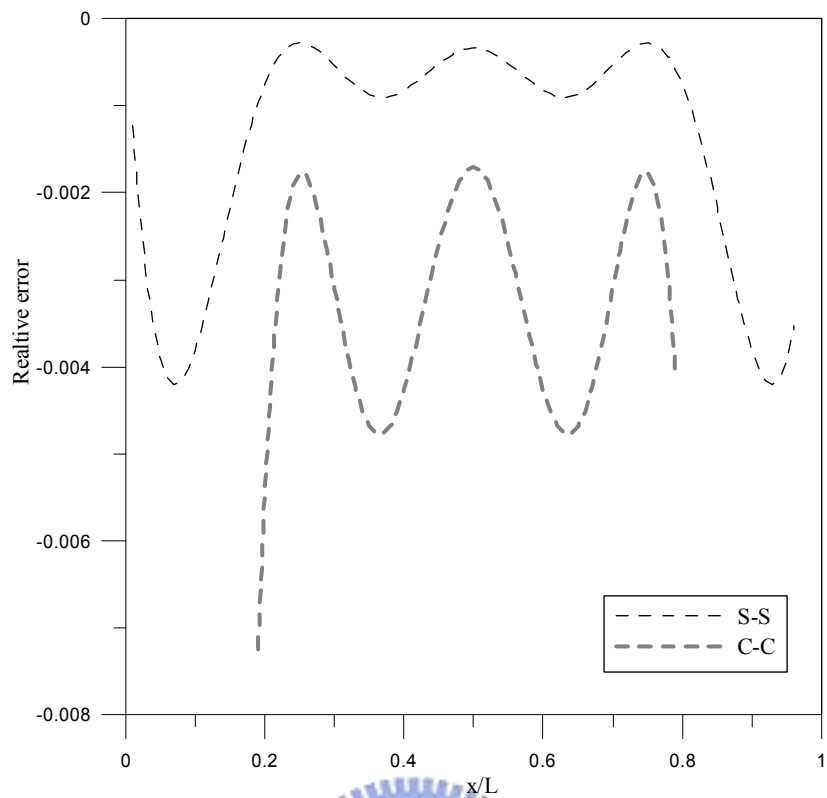


圖 3.48 不同案例之位移誤差(使用 Lagrange multiplier)

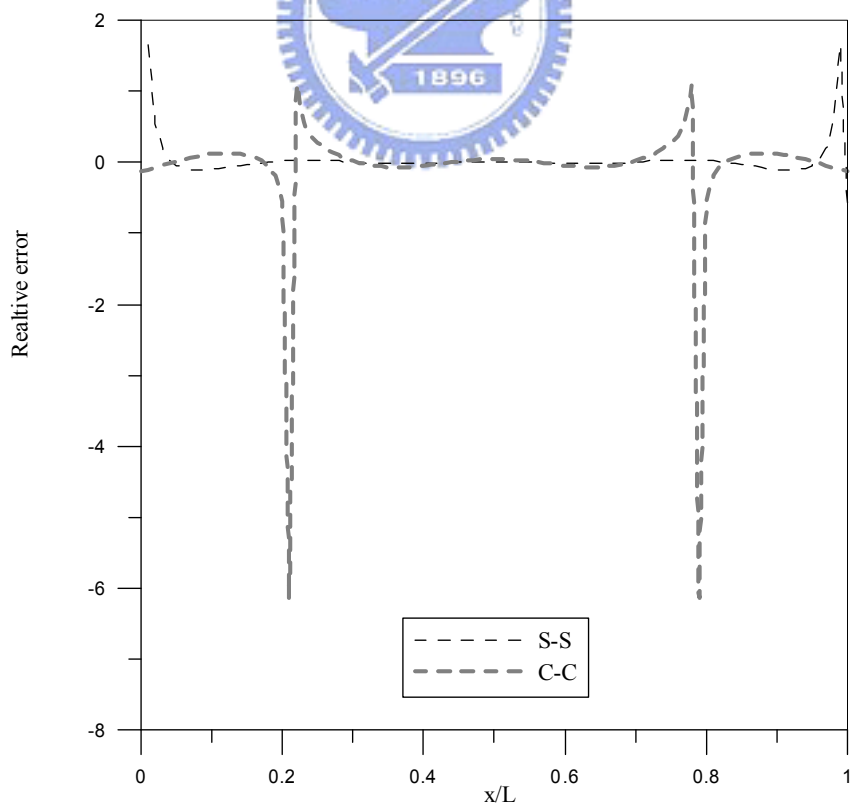


圖 3.49 不同案例之彎矩誤差(使用 Lagrange multiplier)

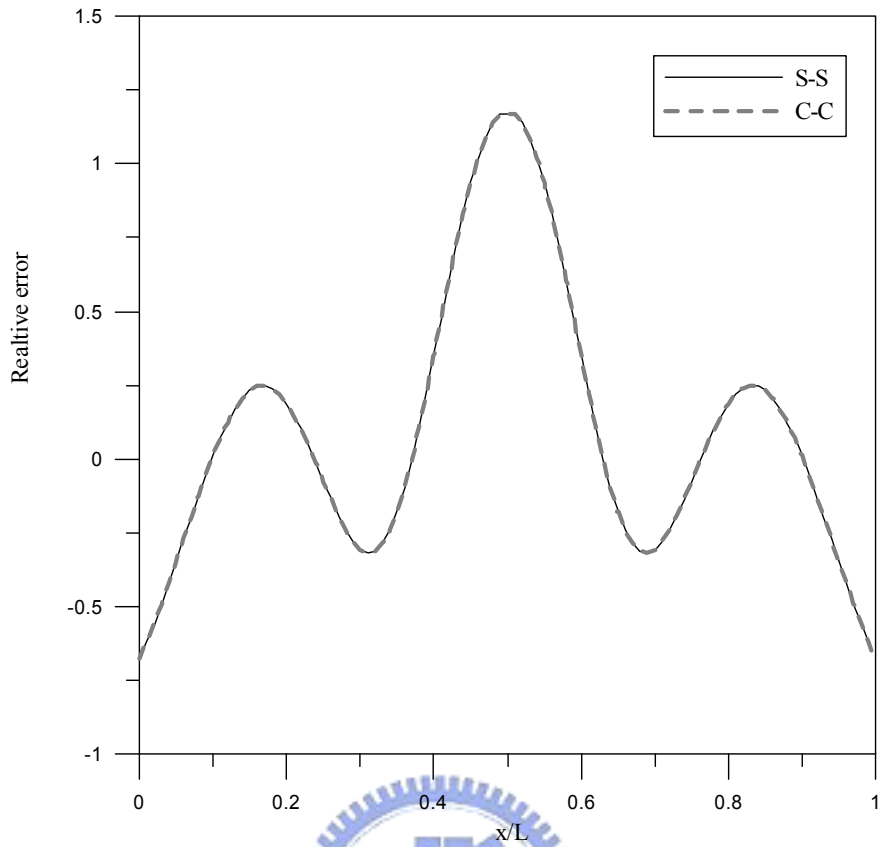


圖 3.50 不同案例之剪力誤差(使用 Lagrange multiplier)

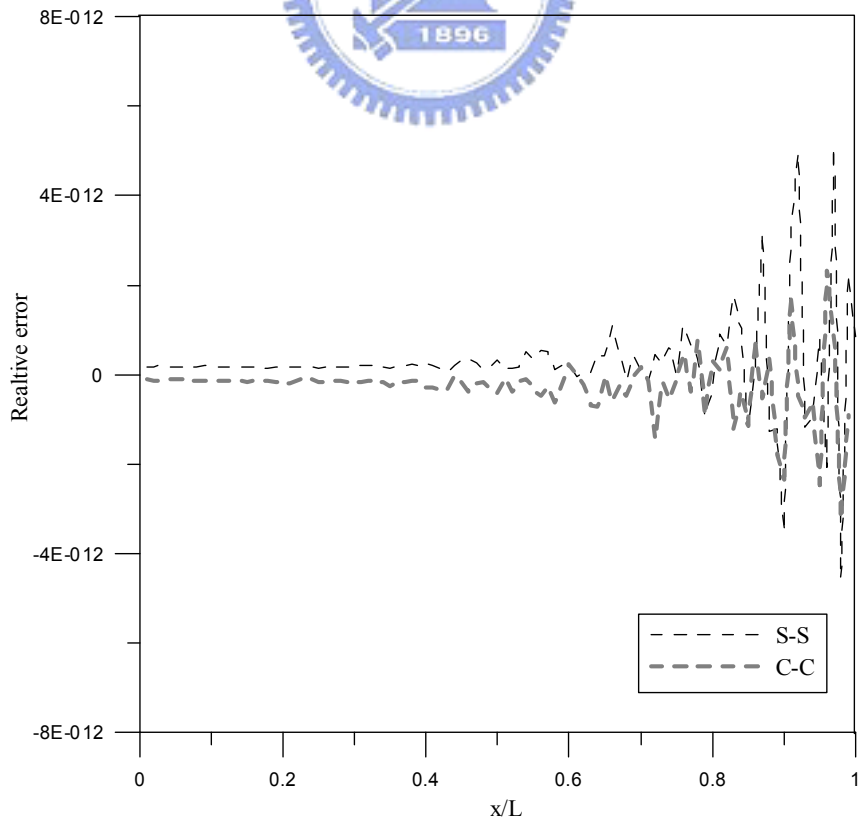


圖 3.51 不同案例之位移誤差(使用滿足邊界條件之基底函數)

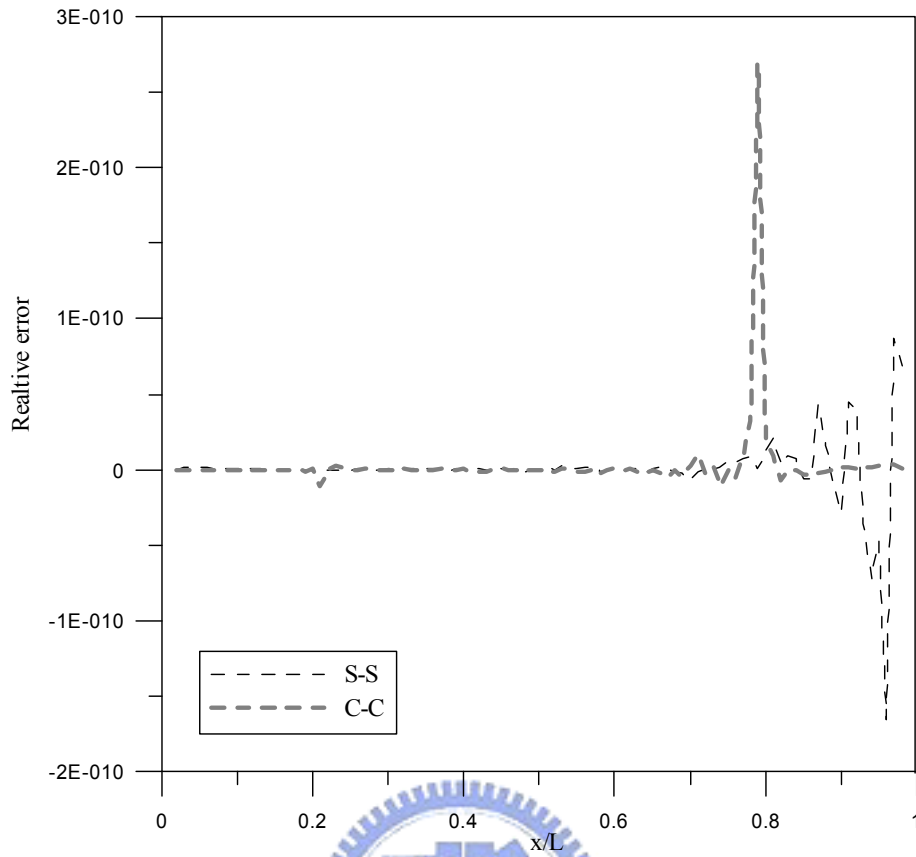


圖 3.52 不同案例之彎矩誤差(使用滿足邊界條件之基底函數)

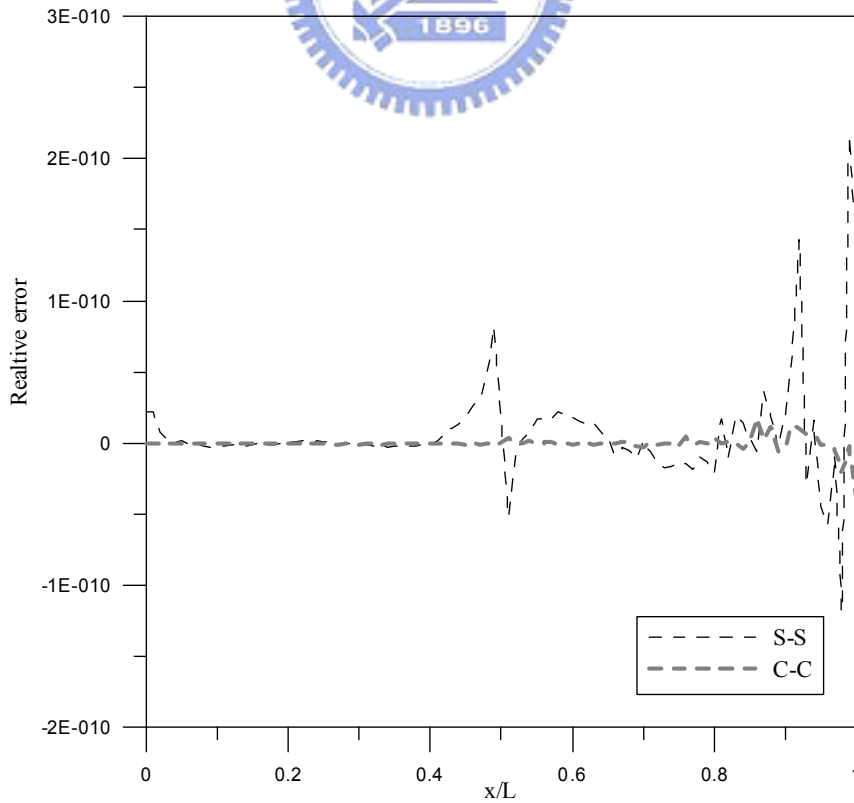


圖 3.53 不同案例之剪力誤差(使用滿足邊界條件之基底函數)

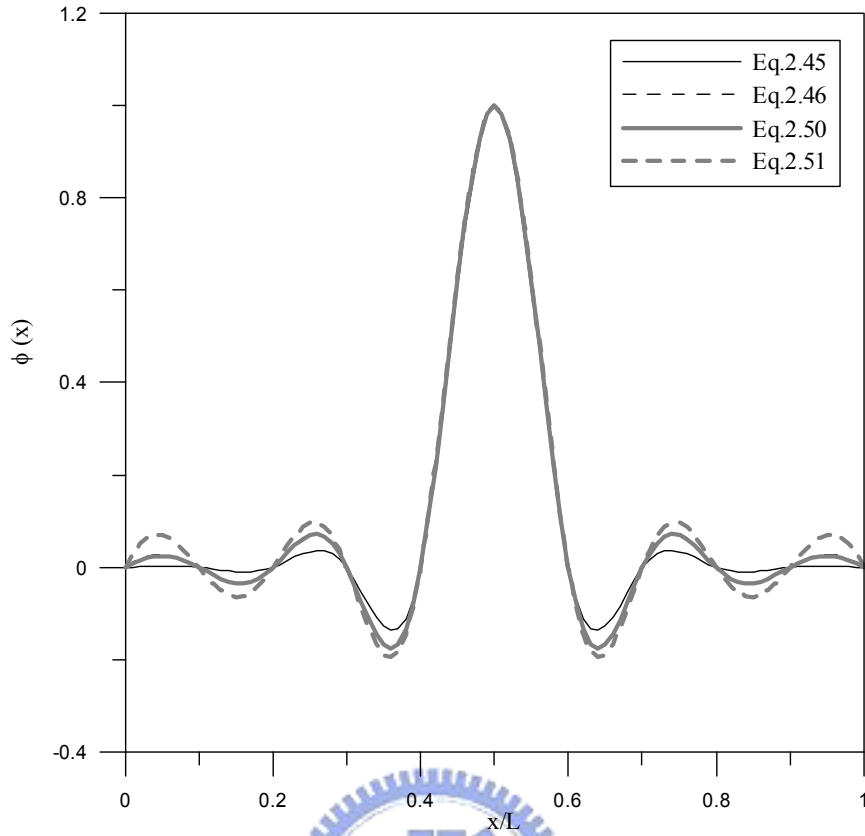


圖 4.1 不同非全域徑向基函數曲線

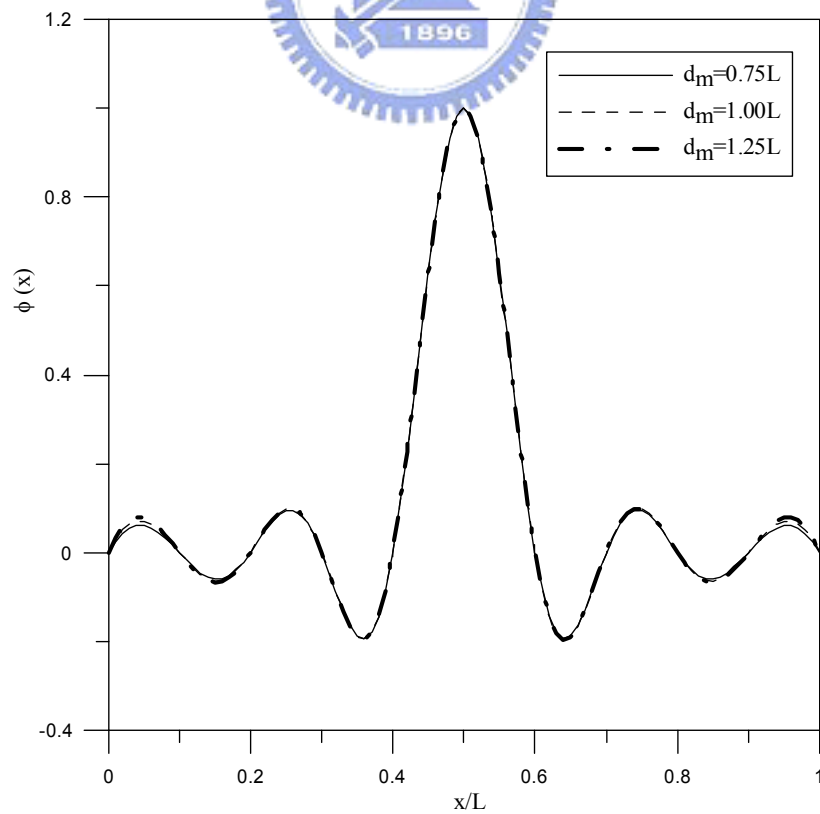


圖 4.2 非全域徑向基函數（式（2.51））參數不同之形狀函數曲線

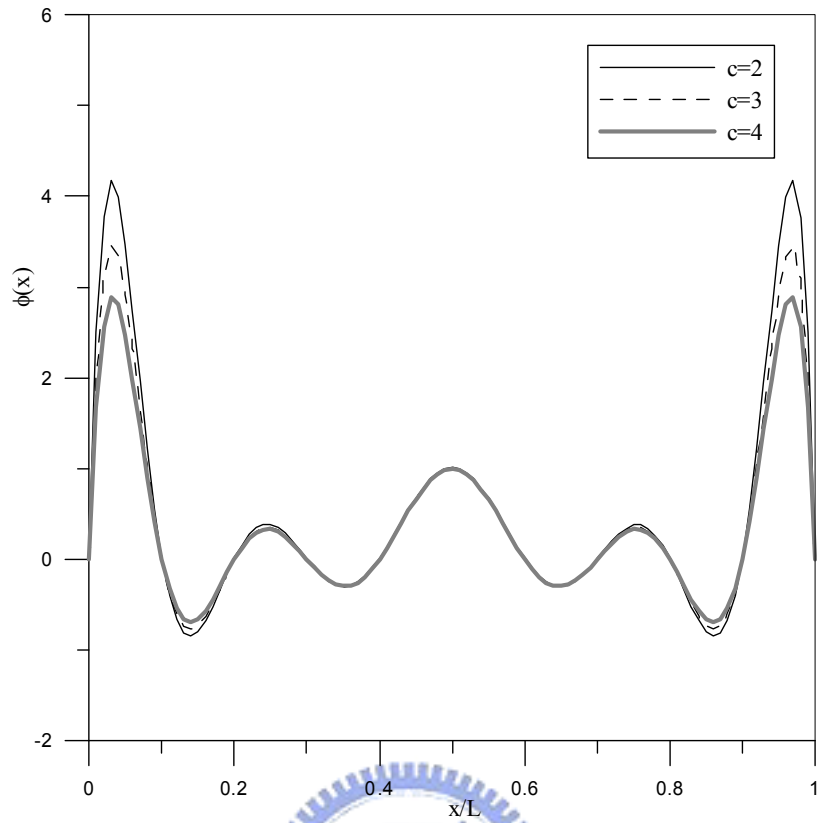


圖 4.3 全域徑向基函數 (式 (2.43)) 參數不同之形狀函數曲線

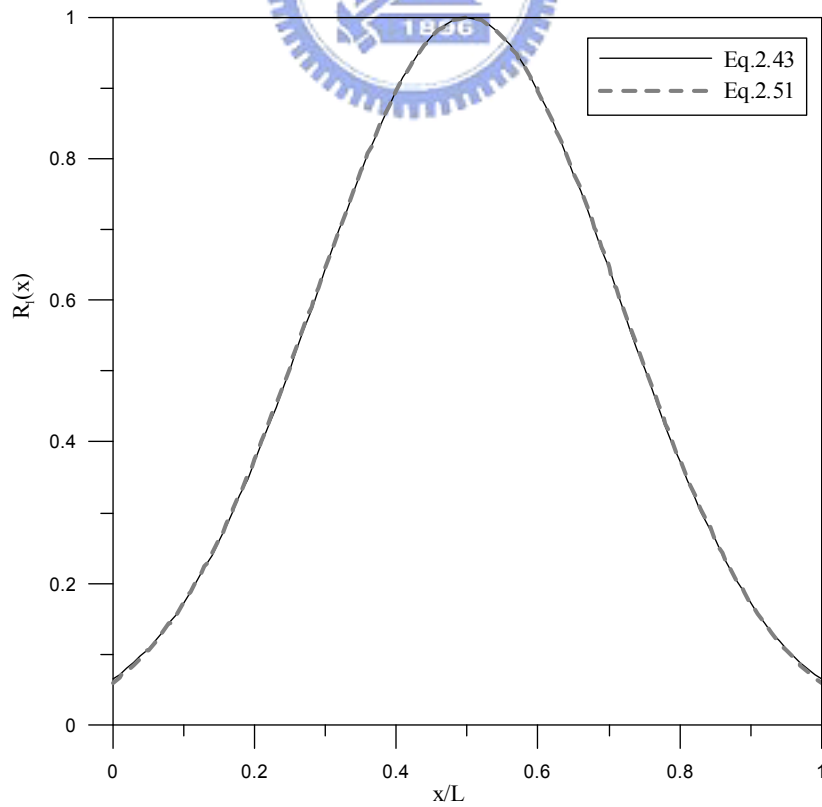


圖 4.4 不同徑向基函數圖形

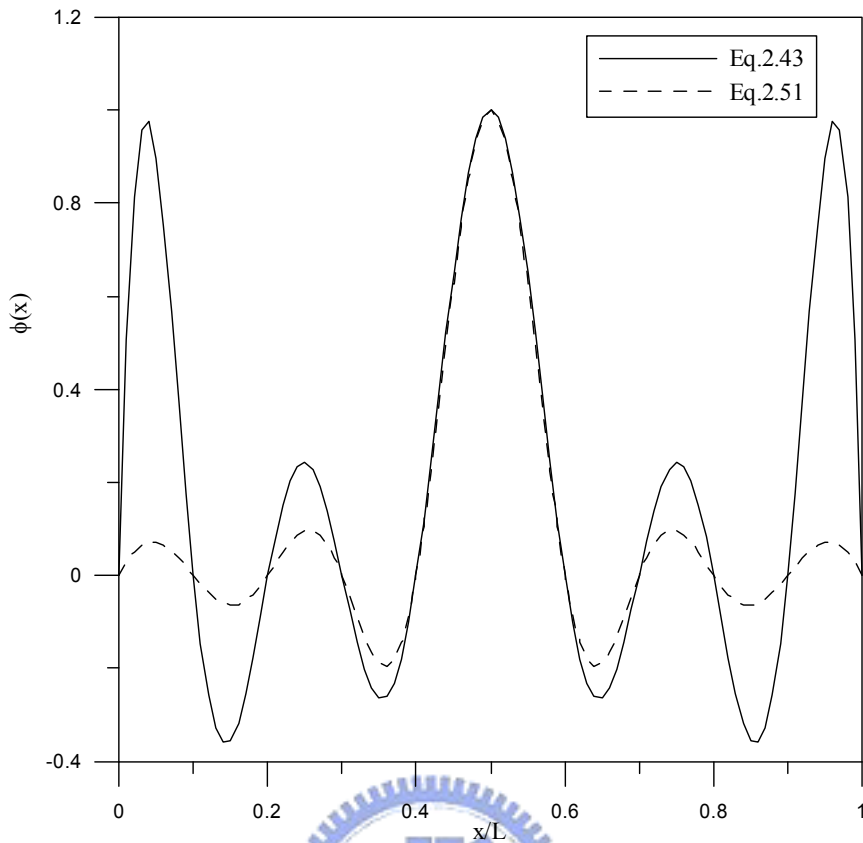


圖 4.5 徑向基函數不同之形狀函數

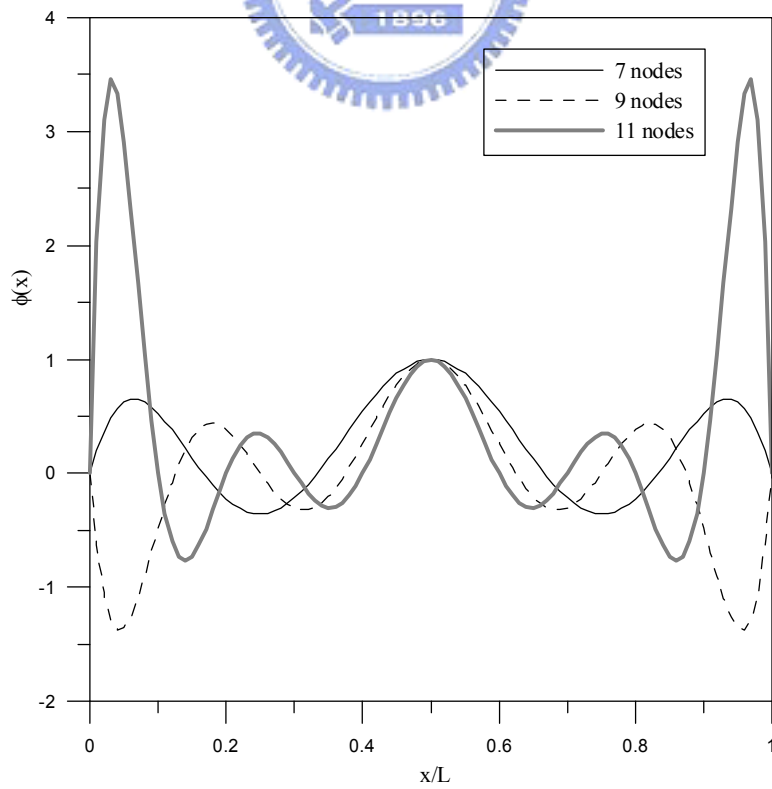


圖 4.6 節點數目不同之形狀函數

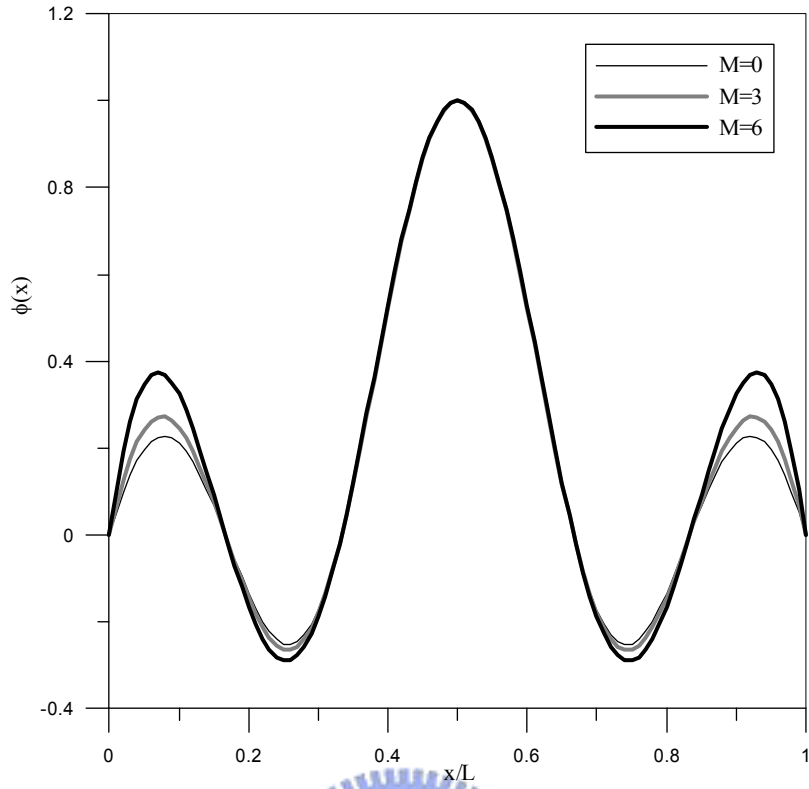


圖 4.7 添加多項式次方數 (m) 不同之形狀函數

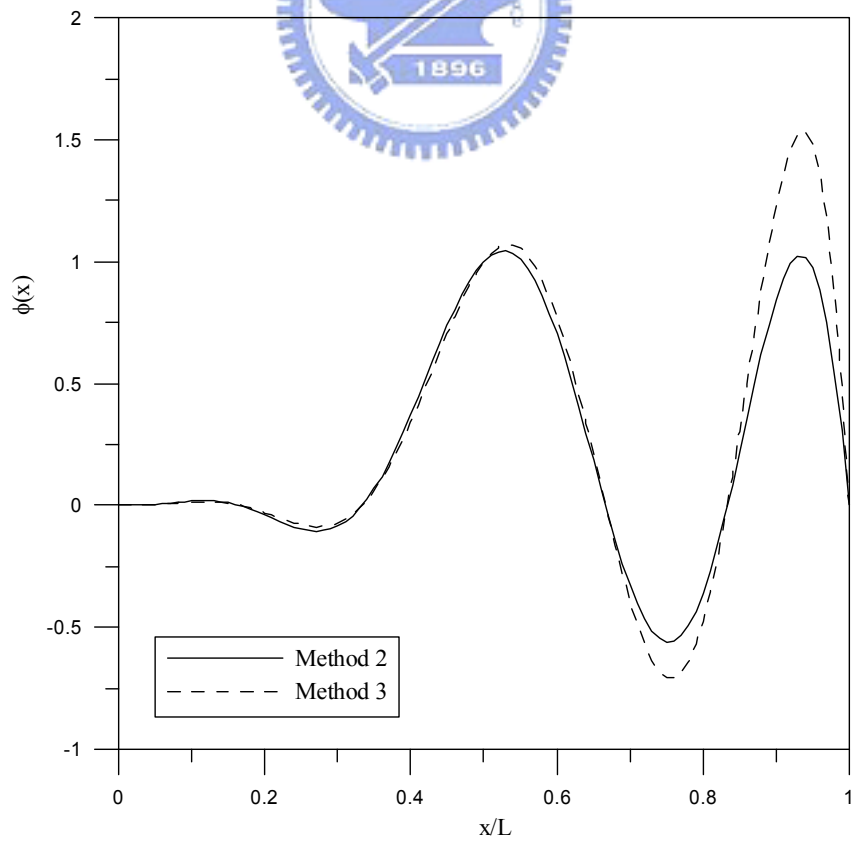


圖 4.8 處理邊界條件方法不同之形狀函數

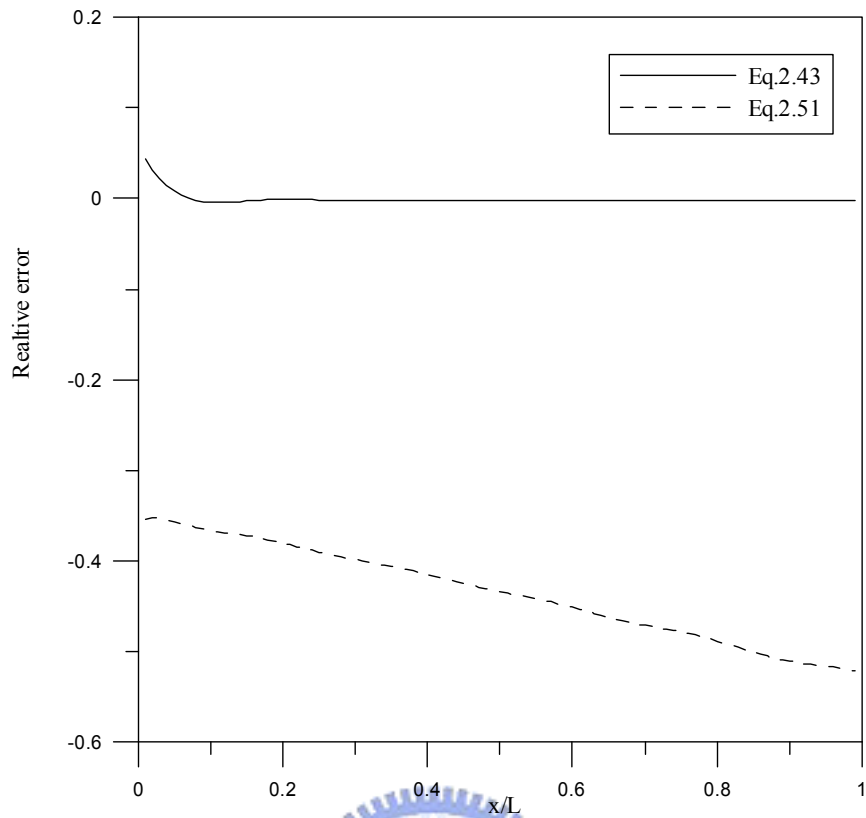


圖 4.9 使用不同徑向基函數所得之位移相對誤差

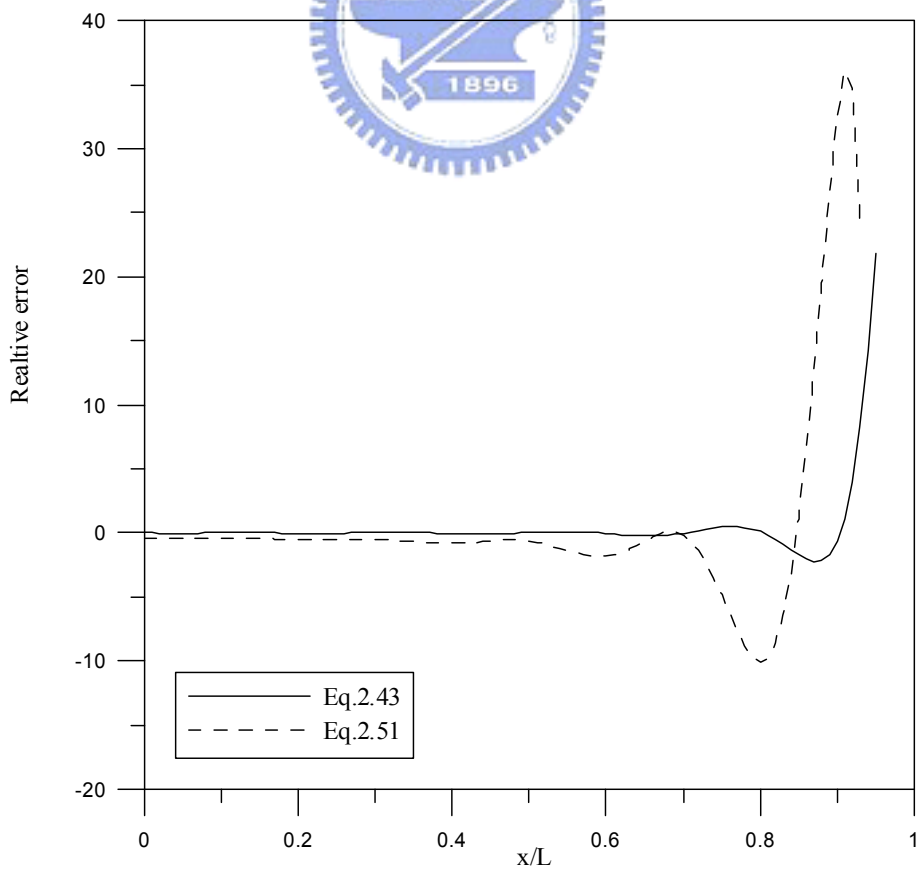


圖 4.10 使用不同徑向基函數所得之彎矩相對誤差

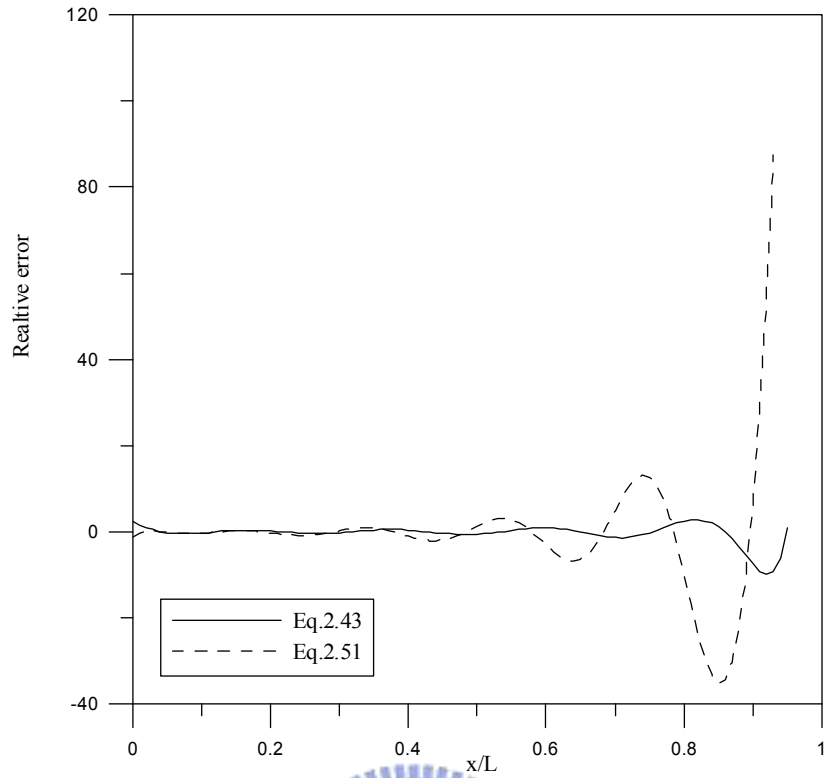


圖 4.11 使用不同徑向基函數所得之剪力相對誤差

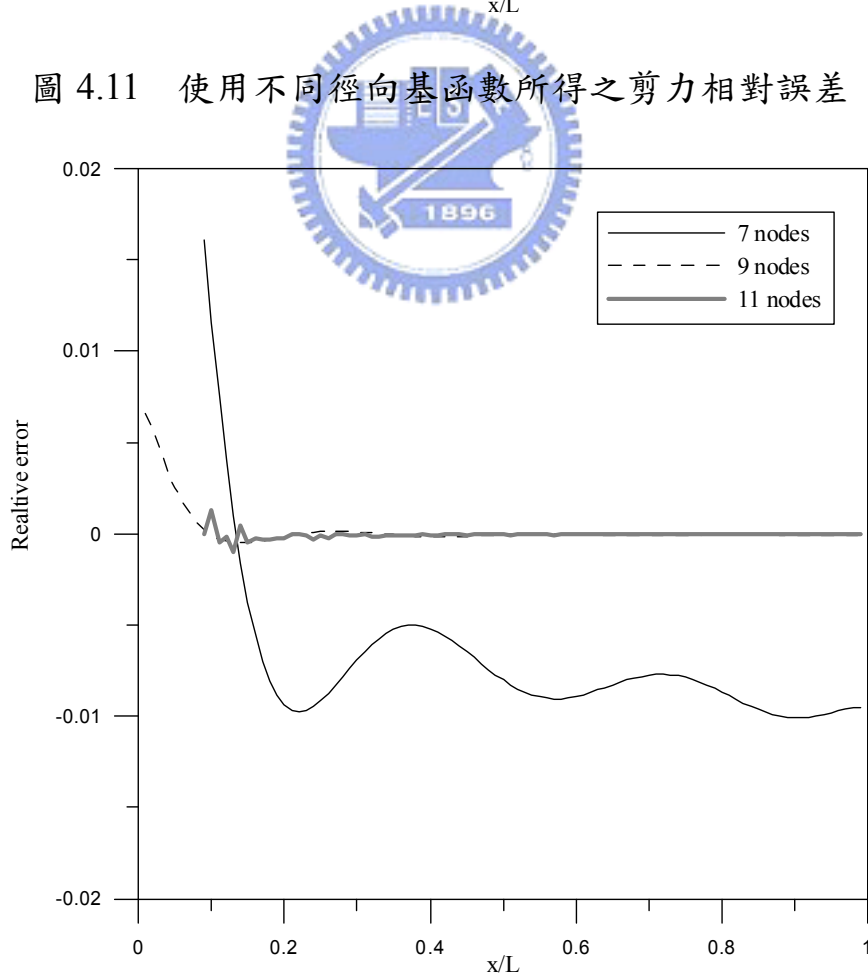


圖 4.12 使用不同節點數目所得之位移相對誤差(取 $c = 5/L^2$)

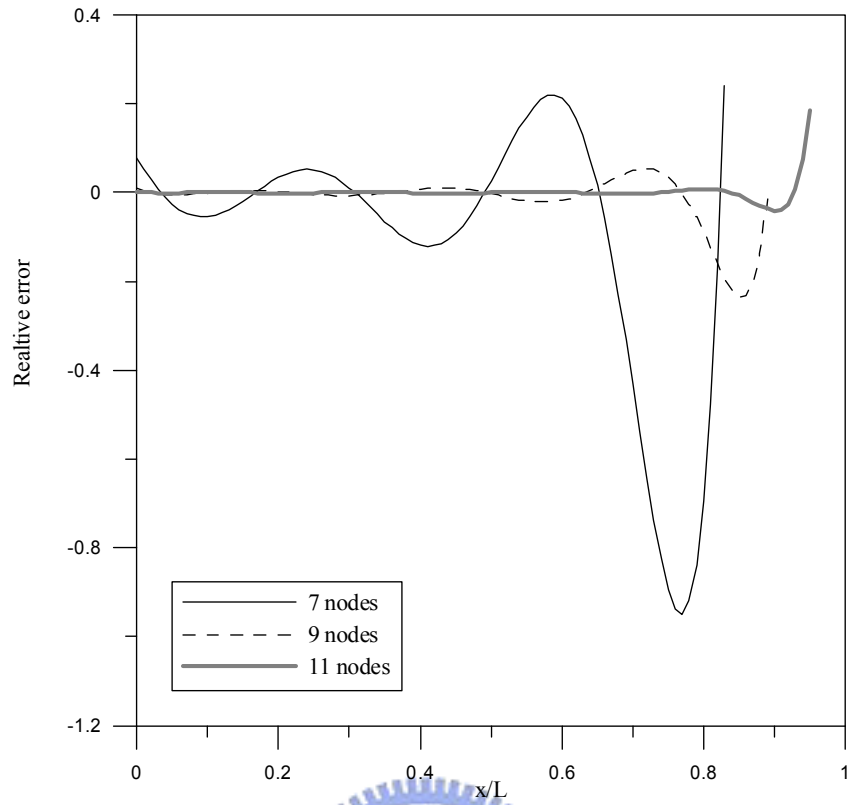


圖 4.13 使用不同節點數目所得之彎矩相對誤差(取 $c = 5/L^2$)

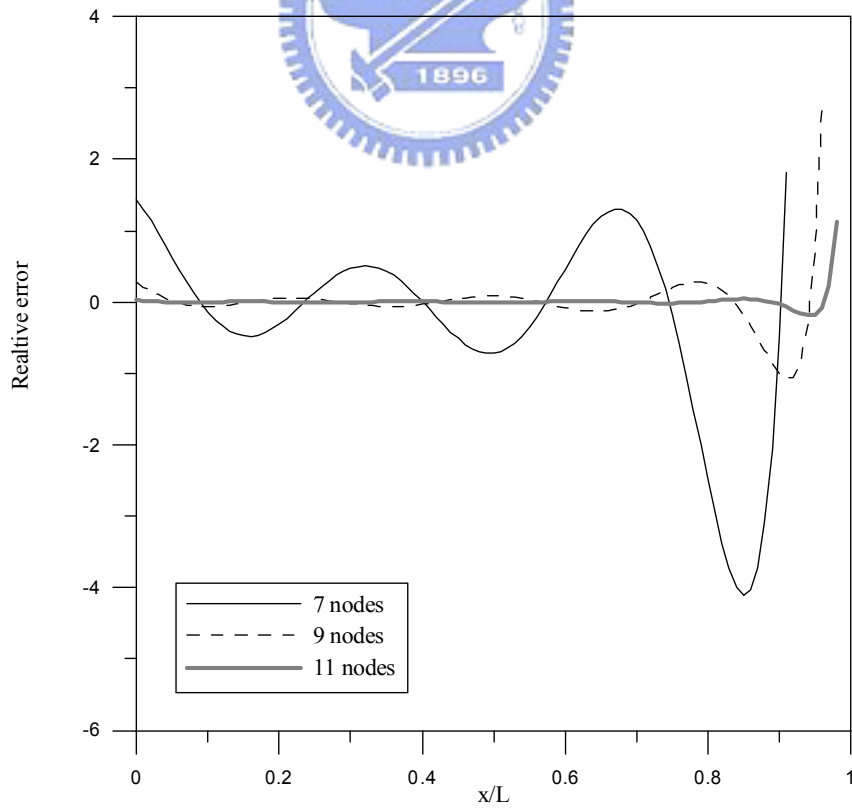


圖 4.14 使用不同節點數目所得之剪力相對誤差(取 $c = 5/L^2$)

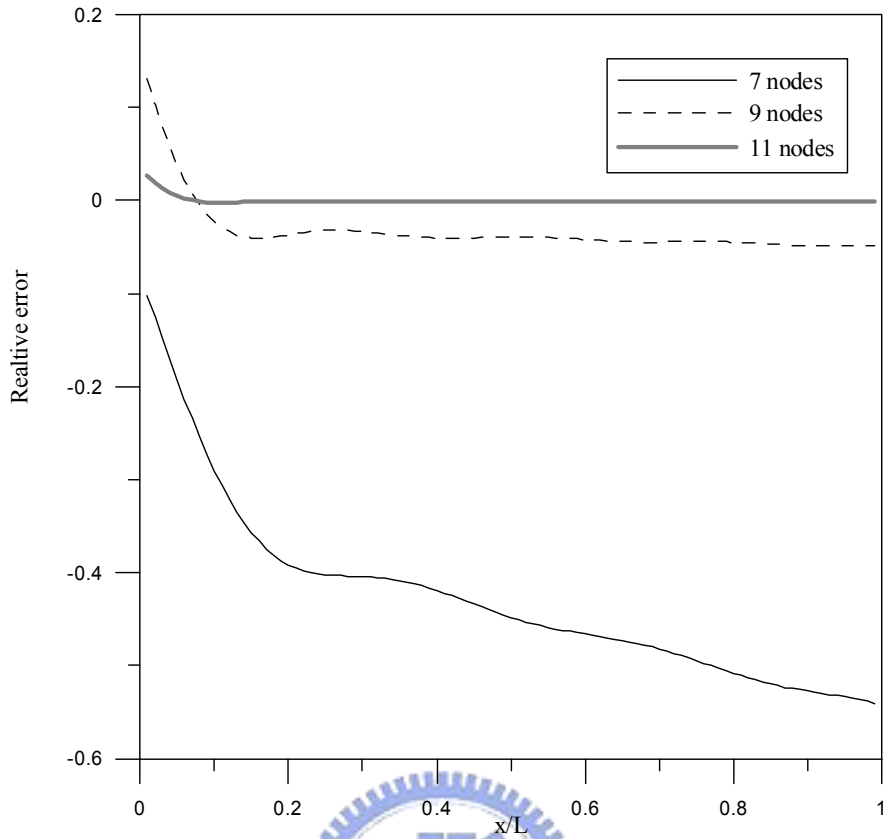


圖 4.15 使用不同節點數目所得之位移相對誤差(取 $c = 10/L^2$)

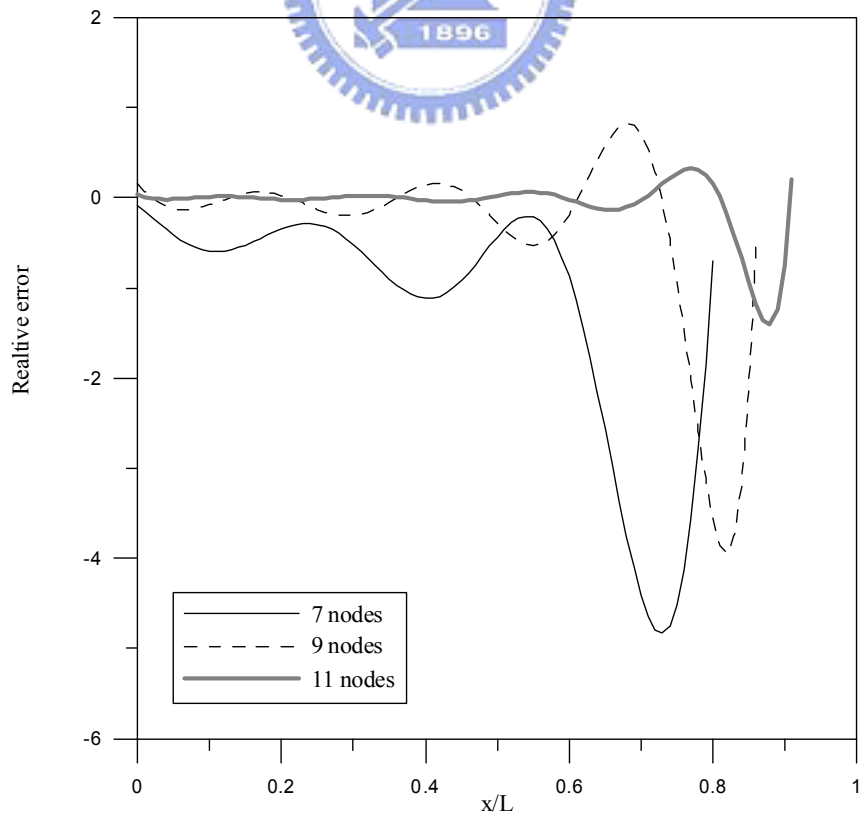


圖 4.16 使用不同節點數目所得之彎矩相對誤差(取 $c = 10/L^2$)

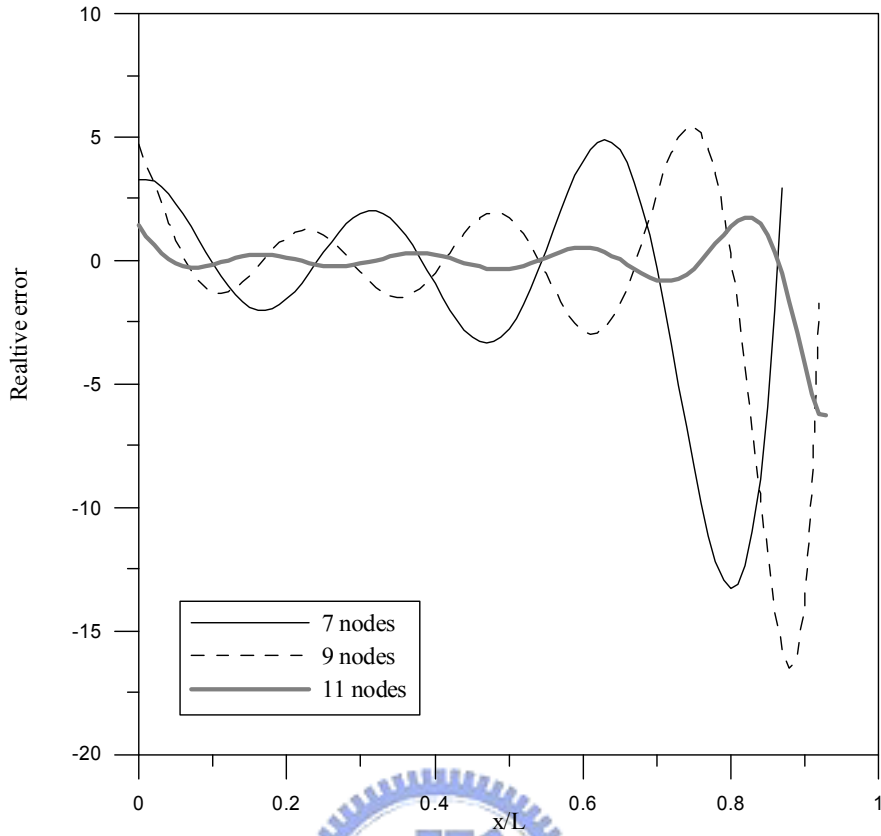


圖 4.17 使用不同節點數目所得之剪力相對誤差(取 $c = 10/L^2$)

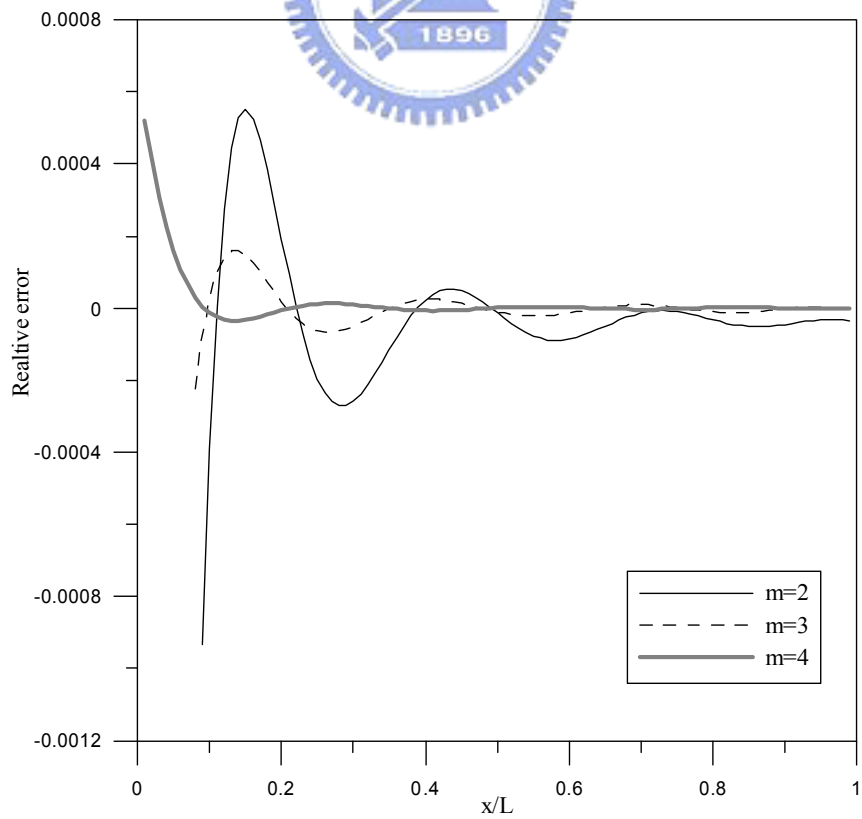


圖 4.18 使用不同添加多項式次方數所得之位移相對誤差(取 $N=9$)

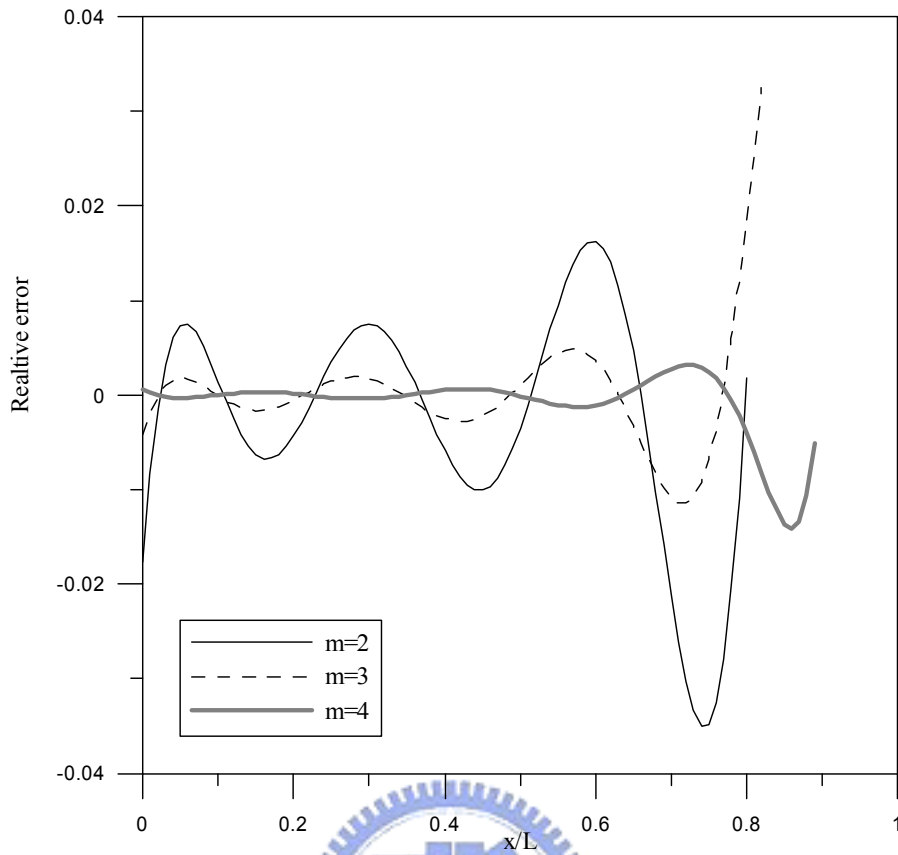


圖 4.19 使用不同添加多項式次方數所得之彎矩相對誤差(取 $N=9$)

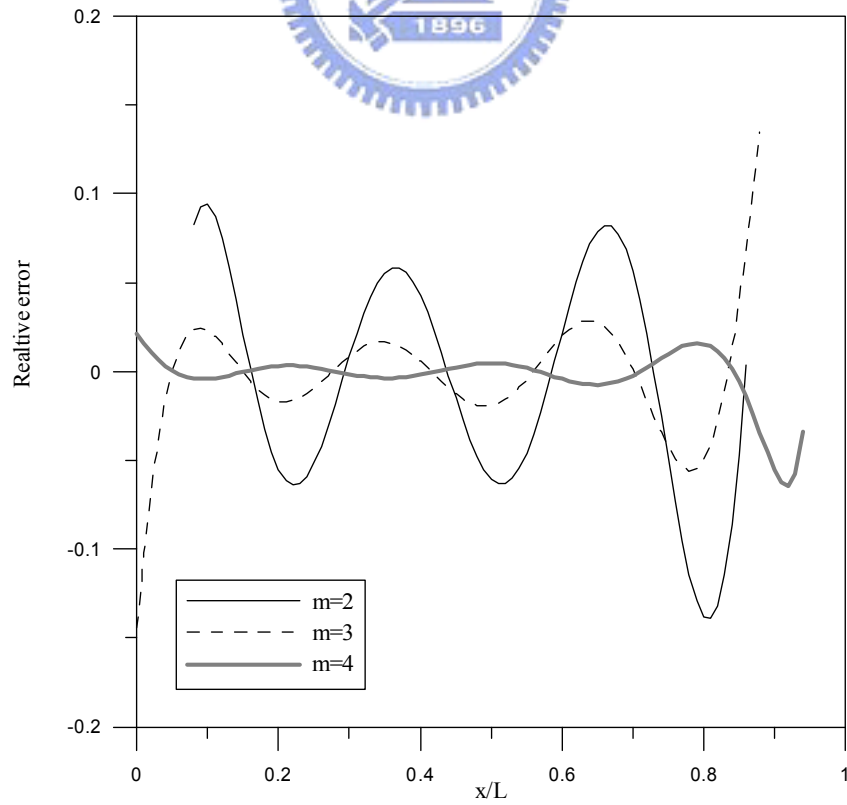


圖 4.20 使用不同添加多項式次方數所得之剪力相對誤差(取 $N=9$)

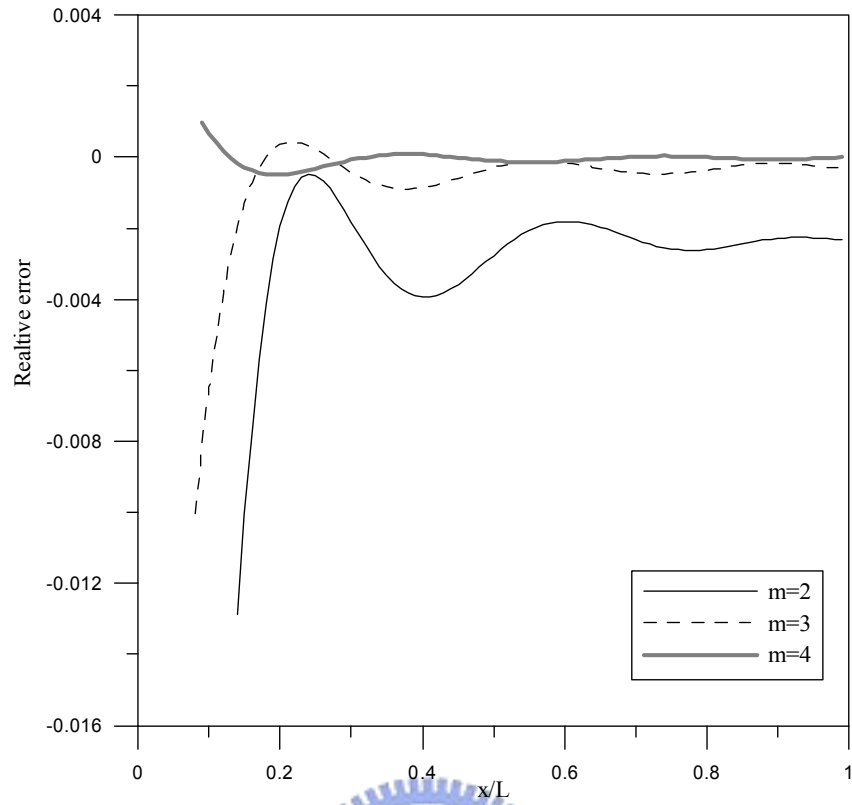


圖 4.21 使用不同添加多項式次方數所得之位移相對誤差(取 $N = 7$)

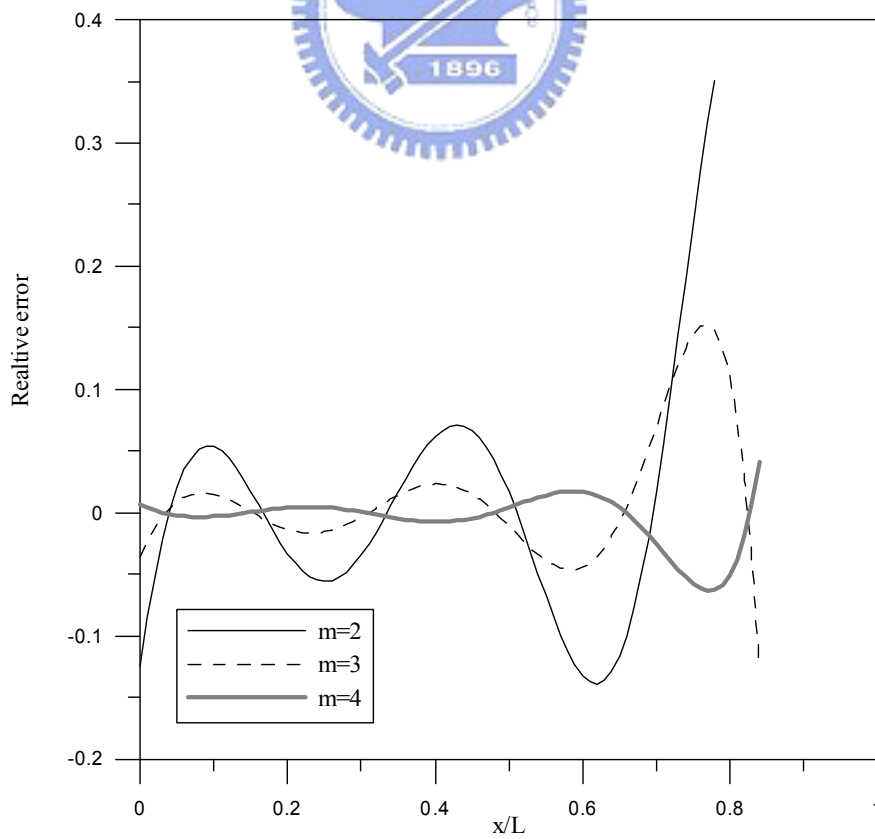


圖 4.22 使用不同添加多項式次方數所得之彎矩相對誤差(取 $N = 7$)

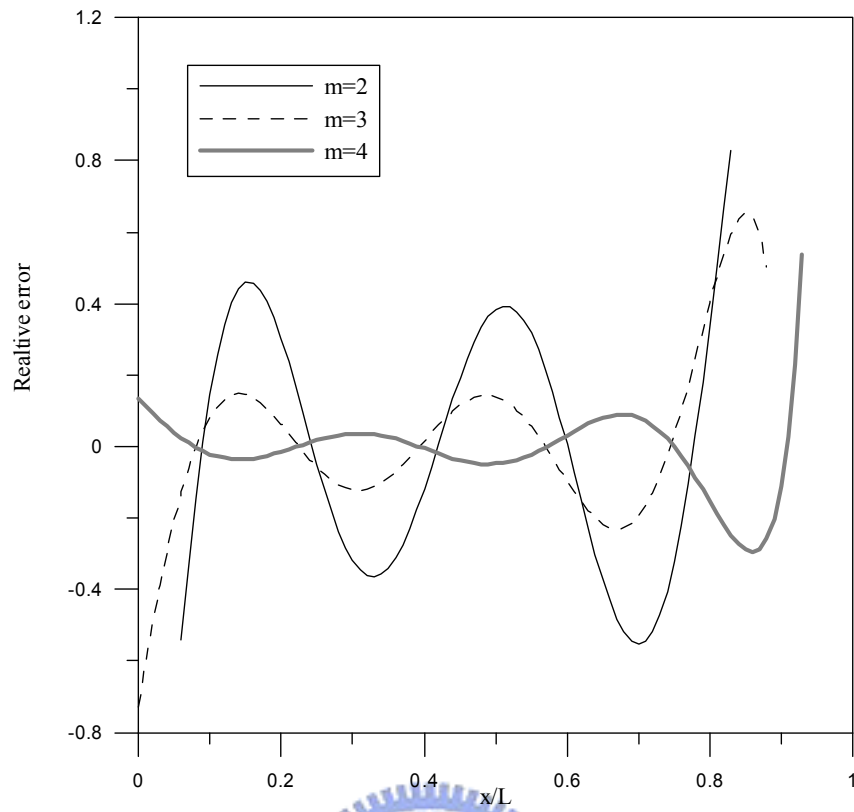


圖 4.23 使用不同添加多項式次方數所得之剪力相對誤差(取 $N = 7$)

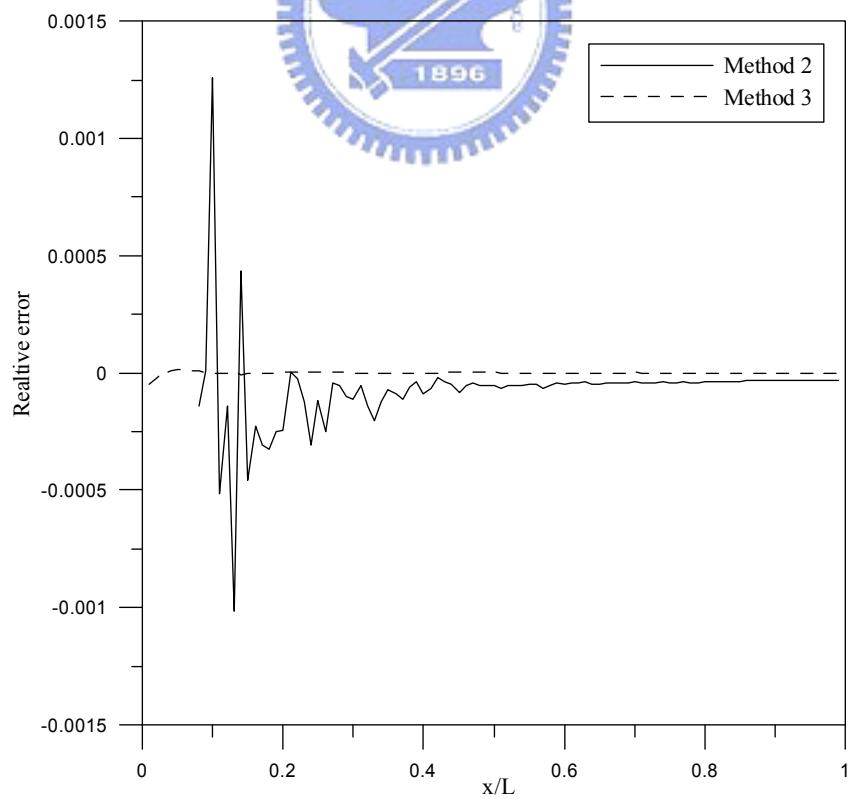


圖 4.24 使用不同處理邊界條件方法所得之位移相對誤差(取 $m = 0$)

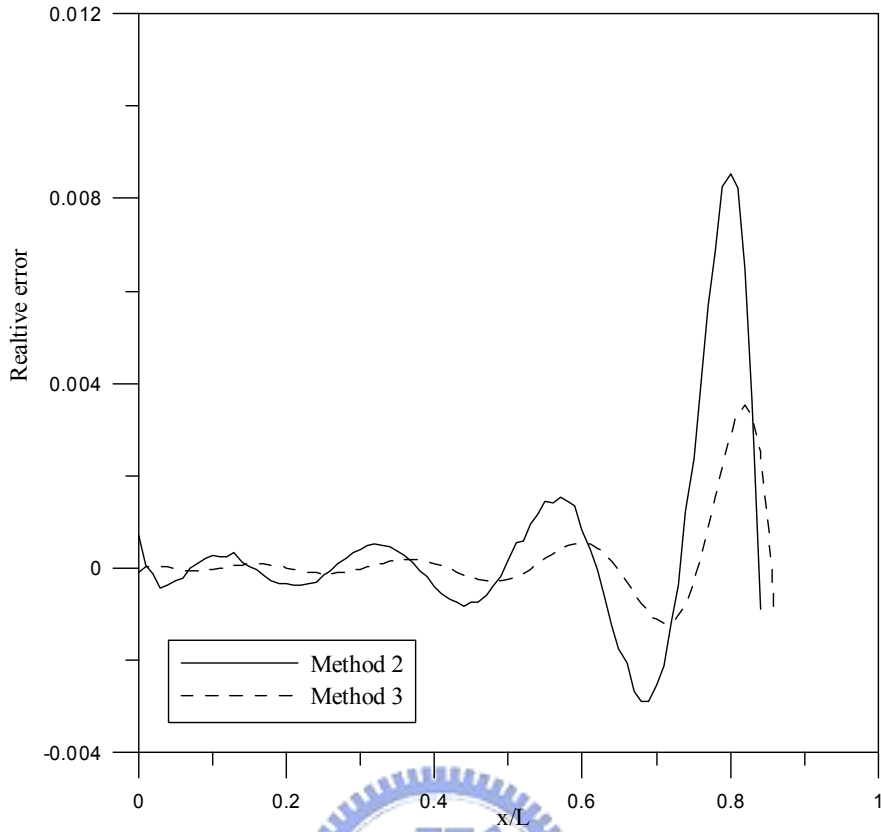


圖 4.25 使用不同處理邊界條件方法所得之彎矩相對誤差(取 $m = 0$)

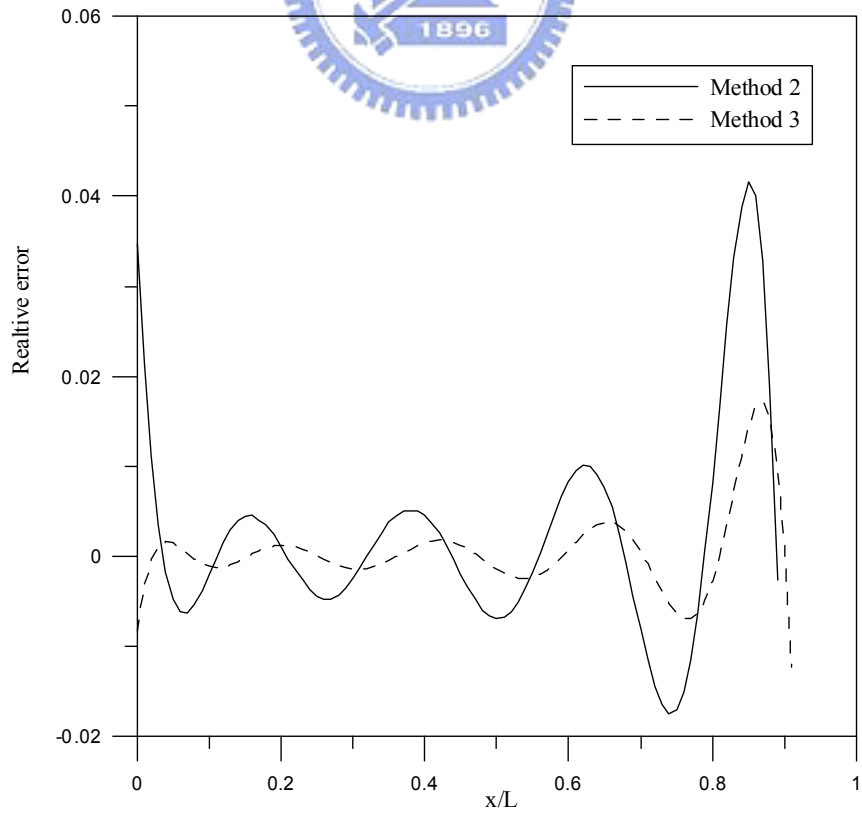


圖 4.26 使用不同處理邊界條件方法所得之剪力相對誤差(取 $m = 0$)

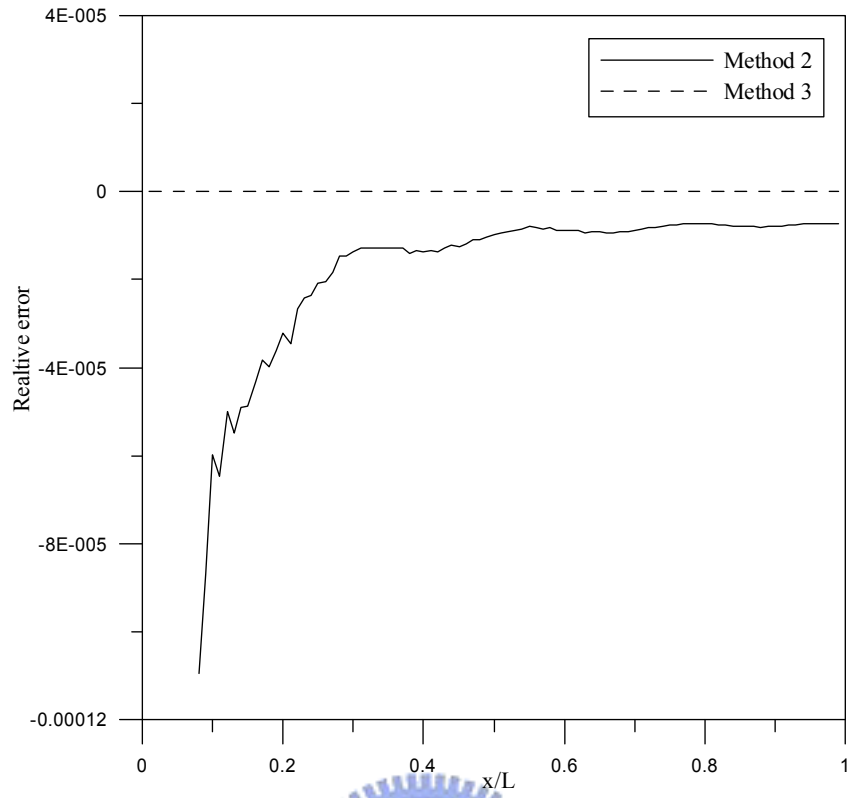


圖 4.27 使用不同處理邊界條件方法所得之位移相對誤差(取 $m=3$)

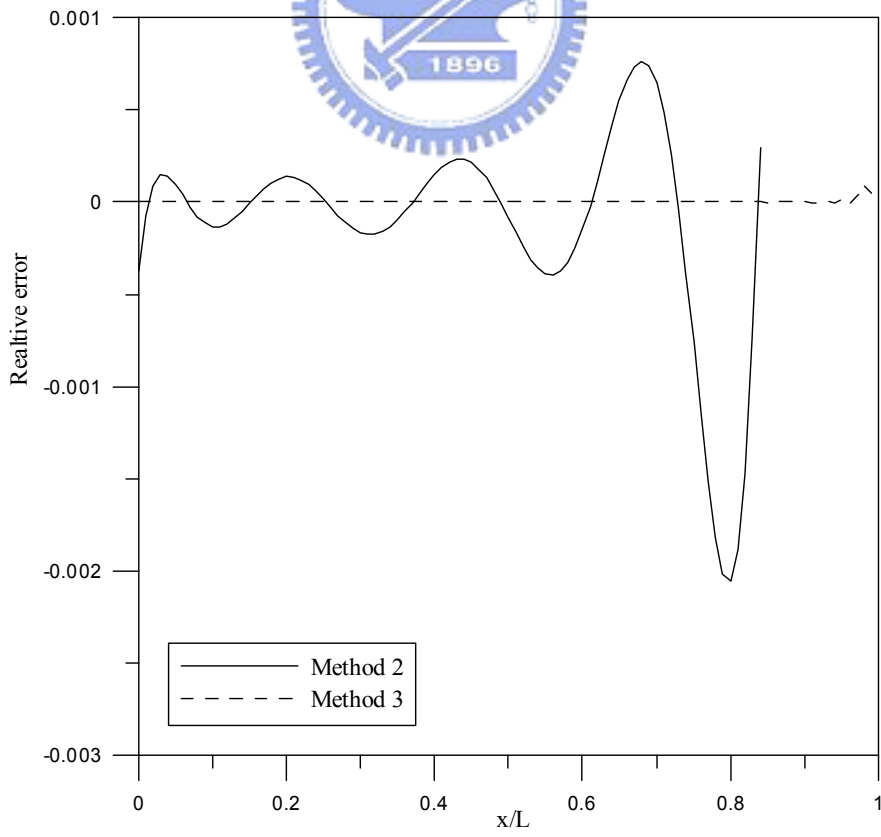


圖 4.28 使用不同處理邊界條件方法所得之彎矩相對誤差(取 $m=3$)

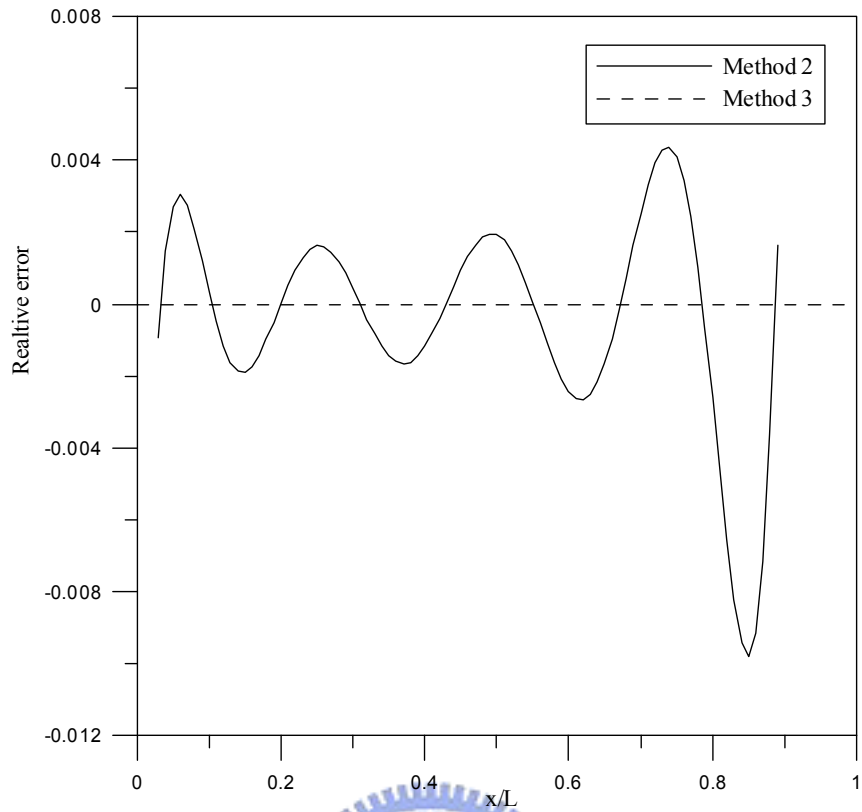


圖 4.29 使用不同處理邊界條件方法所得之剪力相對誤差(取 $m=3$)

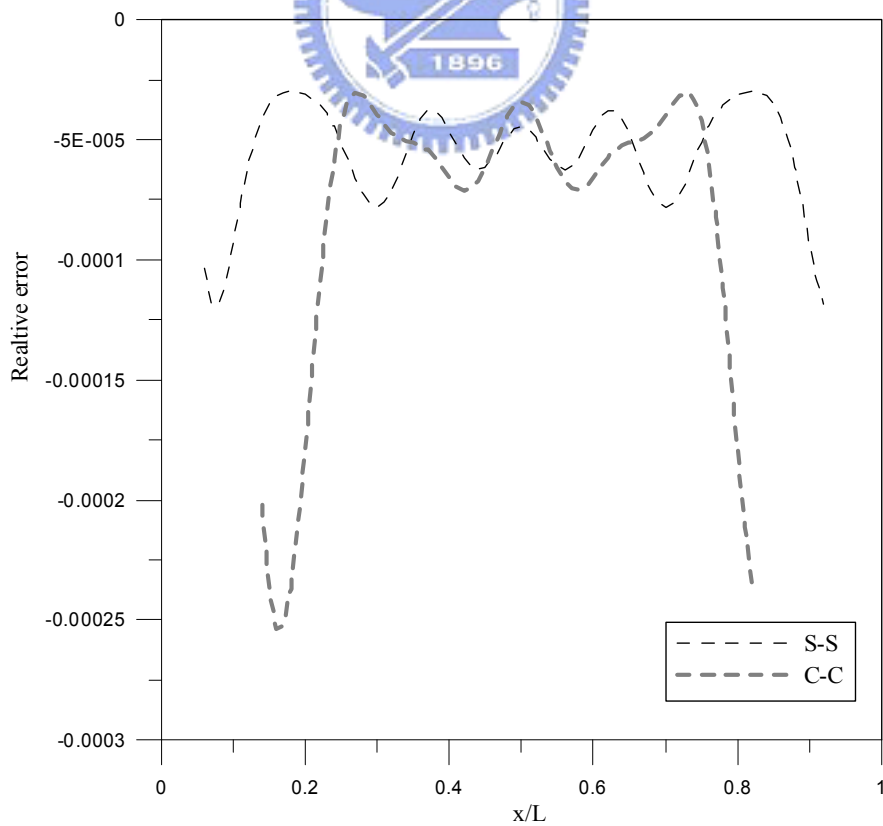


圖 4.30 不同邊界梁之位移相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)

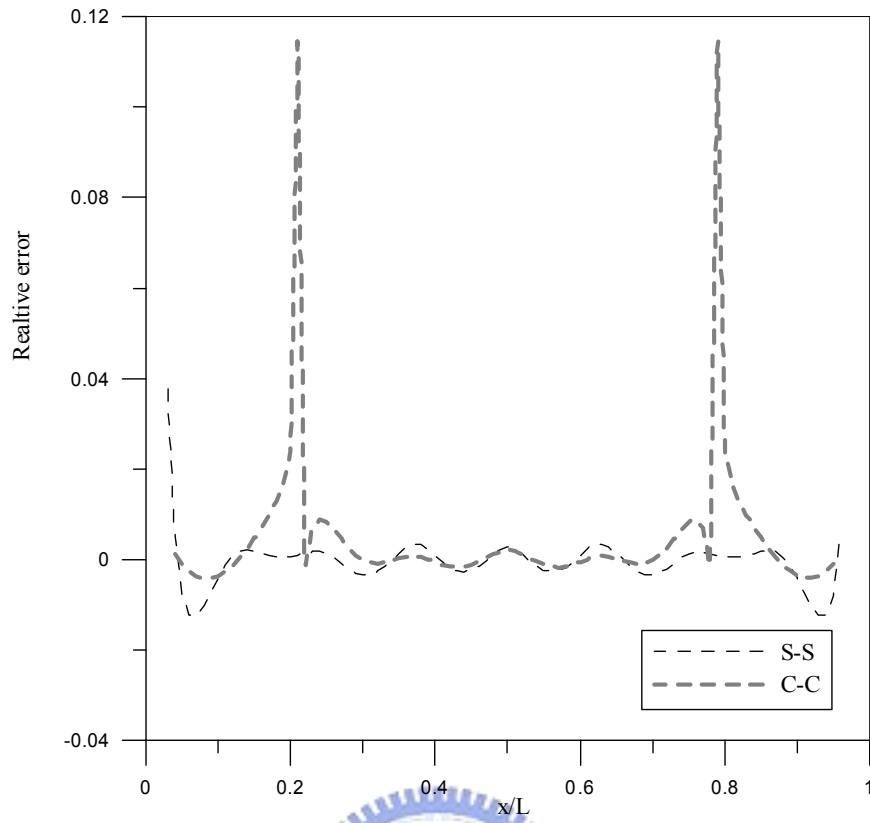


圖 4.31 不同邊界梁之彎矩相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)

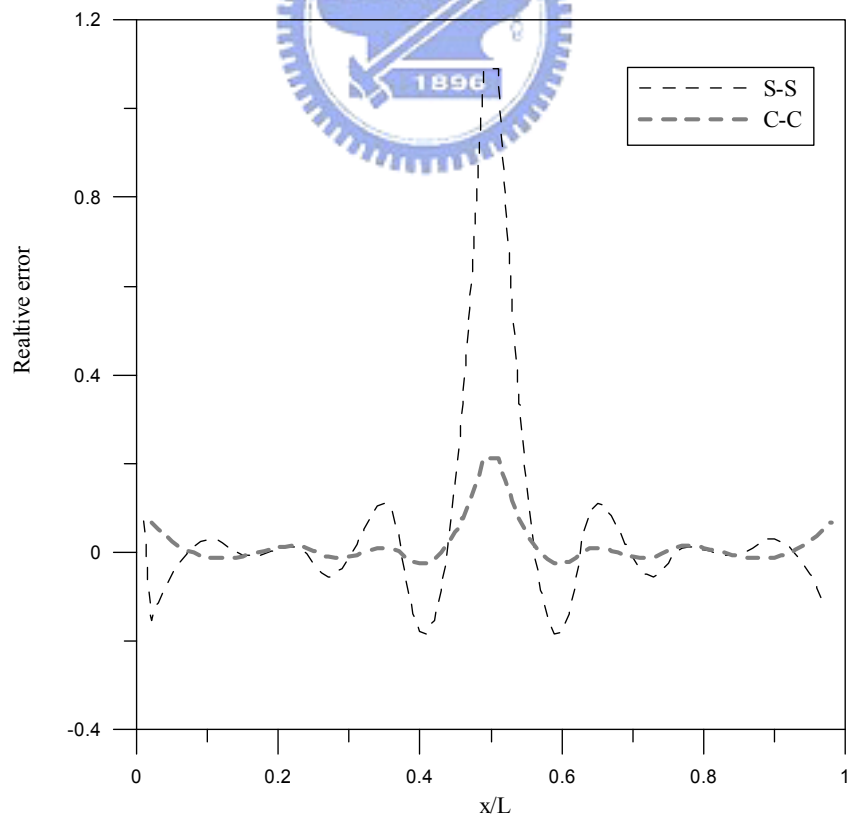


圖 4.32 不同邊界梁之剪力相對誤差(取非全域權函數 $d_m = 1.0L$)

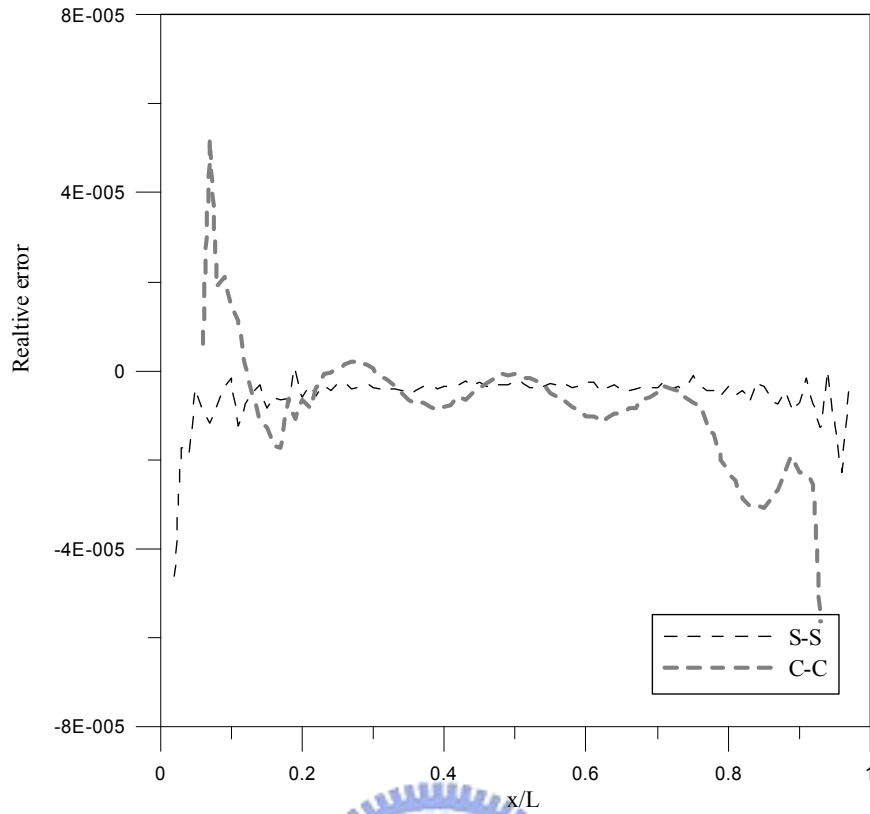


圖 4.33 不同邊界梁之位移相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)

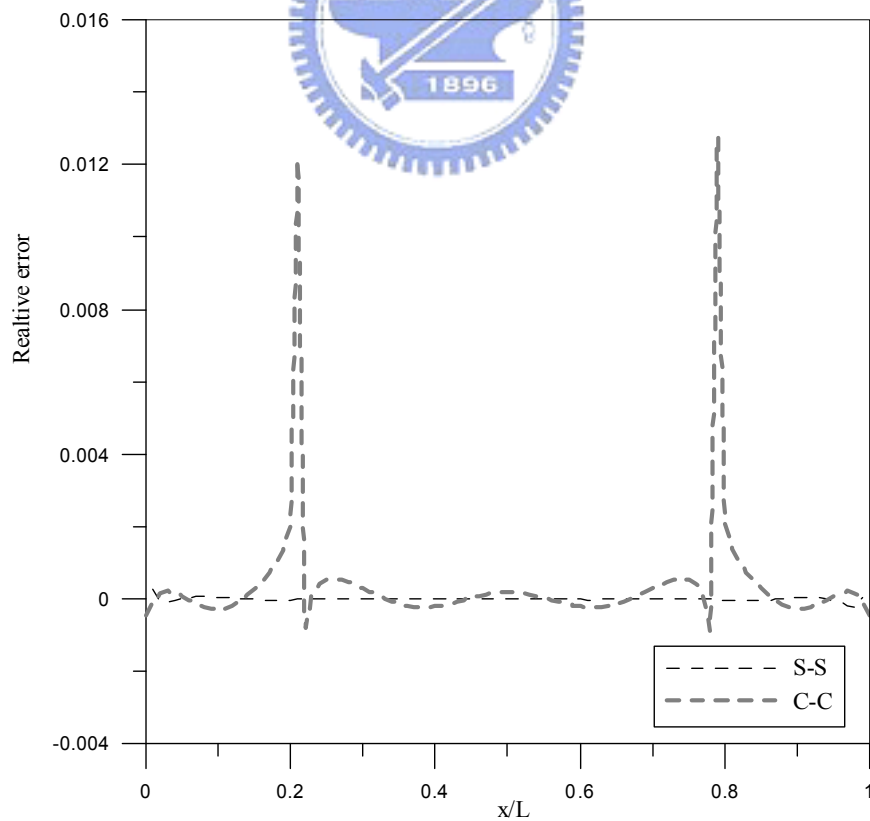


圖 4.34 不同邊界梁之彎矩相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)

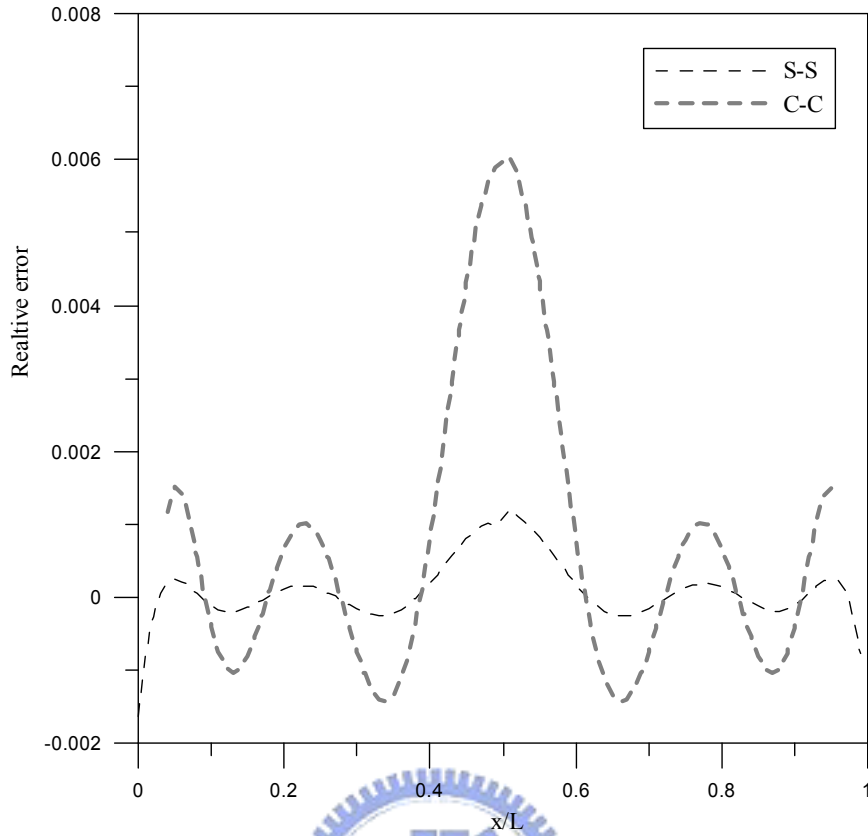


圖 4.35 不同邊界梁之剪力相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)

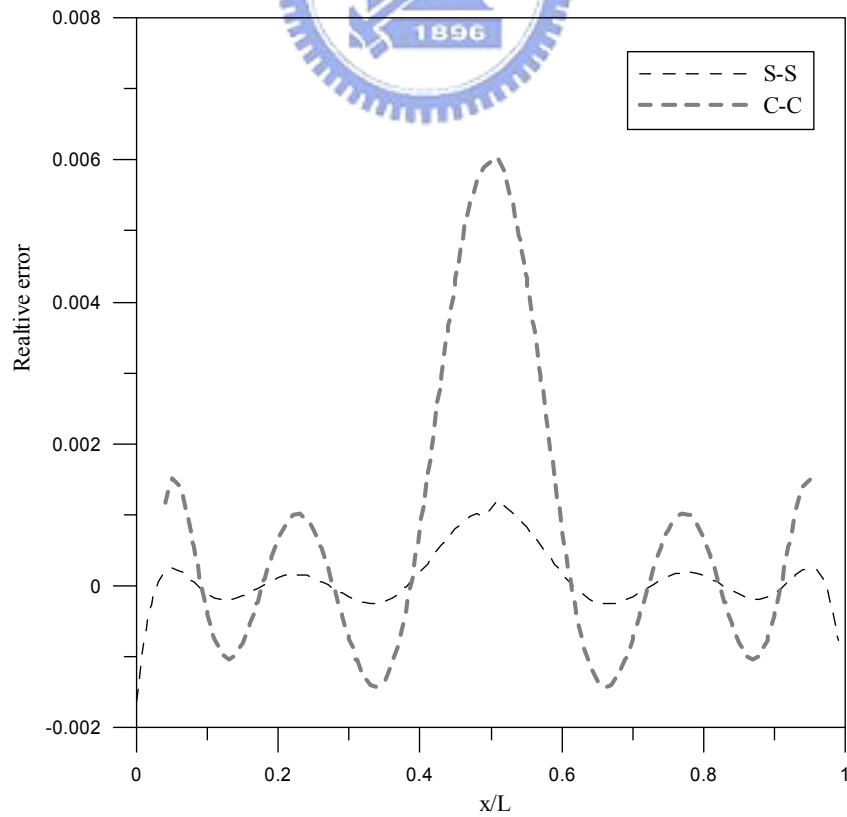


圖 4.36 不同邊界梁之剪力相對誤差(全域徑向基函數 $c = 5/L^2$)