附錄B　MODFLOW簡介

MODFLOW為美國地質調查局(U.S.G.S.)發展之程式。該程式可解二維及三維之地下水流問題，含水層之種類可為自由、受壓、半受壓含水層，依地質特性分類可為均質、非均質及等向性、非等向性含水層。MODFLOW 程式乃利用有限差分法(Block Centered Finite Difference Approach)解水流控制方程式，計算機數值求解方法乃採用兩種疊代技巧強制隱式法(SIP)及鬆弛疊代法(SSOR)。程式包括之重要單元有水井、區域性補注量、蒸發散、河川之滲流及定水頭邊界。以下就對MODFLOW程式發展作一介紹:

三維地下水流在孔隙介質中的運動行為可以下列之偏微分方程式來表示：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)-W=S_s\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{[附B.1]}$$

其中

K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}：沿主軸 X, Y, Z 方向的透水係數(Hydraulic Conductivity)(LT^{-1})

h：管壓水頭(Potentiometric Head)（L)

W：單位體積的體積流率(Volumetric Flux)，代表源匯項(Sources/Sinks)(T^{-1})

Ss：孔隙介質的比儲水量(Specific Storage)（L^{-1}）

t：表時間(T)

上述式（附B.1）若結合了含水層系統邊界情況、起始條件等資訊，可組成一地下水流系統的數學表示式。但由於其解析解難以求得，故必須用數值方法來作推導，MODFLOW以有限差分法求得其數值解。

若以有限差分方式來表達地下水流方程式，則必須利用連續性方程式（所有進入及流出 cell 的流量必定等於在cell中儲蓄量的改變率），且假設地下水流之密度(ρ)為一定值。所以對於一個cell(i,j,k)來說，若考慮本身及其鄰近的六個含水層的cells((i-1,j,k),(i+1,j,k),(i,j-1,k),(i,j+1,k),(i,j,k-1),(i,j,k+1))。如圖附B.1所示：

假設在列（row) 方向的 cell(j,j-1,k) 流進 cell(i,j,k) 的流量為：

$$q_{i,j-1/2,k} = KR_{i,j-1/2,k}\,\Delta c_i \Delta v_k \frac{\left(h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta r_{j-1/2}} \qquad [附B.2]$$

上式中：

$h_{i,j,k}$ 及 $h_{i,j-1,k}$ 分別代表在節點（i,j,k);(i,j-1,k)水頭。

$q_{i,j-1/2,k}$ 為通過介於cell(i,j,k)和(i,j-1,k) 間界面體積的流量（L^3t^{-1}）。

$KR_{i,j-1/2,k}$ 為在列（row)方向介於節點（i,j,k) 和 (i,j-1,k) 間的透水係數。

$\Delta c_i \Delta v_k$ 為垂直於列（row)方向的 cell 面的截面積。

$\Delta r_{j-1/2}$ 為節點（i,j,k) 和（i,j-1,k) 間的距離。

所以同理可求得其餘的五個面流進 cell(i,j,k)的流量：

$$q_{i,j+1/2,k} = KR_{i,j+1/2,k}\Delta c_i \Delta v_k \frac{\left(h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta r_{j+1/2}}$$

$$q_{i+1/2,j,k} = KR_{i+1/2,j,k}\Delta r_j \Delta v_k \frac{\left(h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta c_{j+1/2}}$$

$$q_{i+1/2,j,k} = KR_{i-1/2,j,k}\Delta r_j \Delta v_k \frac{\left(h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta c_{i-1/2}}$$

$$q_{i,j,k+1/2} = KR_{i,j,k+1/2}\Delta r_j \Delta c_i \frac{\left(h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta v_{k+1/2}}$$

$$q_{i,j,k-1/2} = KR_{i,j,k-1/2}\Delta r_j \Delta c_i \frac{\left(h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}\right)}{\Delta v_{k+1/2}}$$

若 $CR = KR \times \frac{\Delta A}{L}$，則連續性方程式可表示為：

$$\begin{aligned}
&CR_{i,j-1/2,k}\left(h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}\right) + CR_{i,j+1/2,k}\left(h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}\right) + CC_{i-1/2,j,k}\left(h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}\right) \\
&+ CC_{i+1/2,j,k}\left(h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}\right) + CV_{i,j,k-1/2}\left(h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}\right) + CV_{i,j,k+1/2}\left(h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}\right) \\
&= S_{s_{i,j,k}} \frac{\Delta h_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k
\end{aligned} \qquad \text{[附B.3]}$$

上式中：

$S_{s_{i,j,k}}$:cell(i,j,k) 的比儲水量

$\Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k$:cell(i,j,k) 的體積

現在若在多加以考慮源、匯（Sources、Sinks)，則連續性方程式變為：

$$\begin{aligned}
&CR_{i,j-1/2,k}\left(h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}\right) + CR_{i,j+1/2,k}\left(h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}\right) + CC_{i-1/2,j,k}\left(h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}\right) \\
&+ CC_{i+1/2,j,k}\left(h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}\right) + CV_{i,j,k-1/2}\left(h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}\right) + CV_{i,j,k-1/2}\left(h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}\right) \\
&+ QS_{i,j,k} = S_{s_{i,j,k}} \frac{\Delta h_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k
\end{aligned} \qquad \text{[附B.4]}$$

一般而言，$QS_{i,j,k} = \sum_{n=1}^{N} a_{i,j,k,n} = \sum_{n=1}^{N} P_{i,j,k,n}\, h_{i,j,k} + \sum_{1}^{N} q_{i,j,k,n}$

此處： $a_{i,j,k,n}$ ：第 n 個外在的源流進 cell(i,j,k) 的流量。

$P_{i,j,k,n}\left(L^2T^{-1}\right)$; $q_{i,j,k,n}\left(L^3T^{-1}\right)$ 均等於常數。

MODFLOW中所採用的為後向差分(Backward Difference)，所以對於 cell(i,j,k)來說，若以 t_m 和 t_{m-1} 之間來代表 Δt，則：

$$\left(\frac{\Delta h_{i,j,k}}{\Delta t}\right)=\frac{h^m_{i,j,k}-h^{m-1}_{i,j,k}}{t_m-t_{m-1}} \qquad \text{[附B.5]}$$

將方程式（附C.5）代入（附C.4）中，則可得：

$$\begin{aligned}&CR_{i,j-1/2,k}\left(h^m_{i,j-1,k}-h^m_{i,j,k}\right)+CR_{i,j+1/2,k}\left(h^m_{i,j+1,k}-h^m_{i,j,k}\right)+CC_{i-1/2,j,k}\left(h^m_{i-1,j,k}-h^m_{i,j,k}\right)\\&+CC_{i+1/2,j,k}\left(h^m_{i+1,j,k}-h^m_{i,j,k}\right)+CV_{i,j,k-1/2}\left(h^m_{i,j,k-1}-h^m_{i,j,k}\right)+CV_{i,j,k+1/2}\left(h^m_{i,j,k+1}-h^m_{i,j,k}\right)\\&+P_{i,j,k}h^m_{i,j,k}+Q_{i,j,k}=S_{s_{i,j,k}}\frac{(h^m_{i,j,k}-h^{m-1}_{i,j,k})}{t_m-t_{m-1}}\Delta r_j\Delta c_i\Delta v_k\end{aligned}$$

[附B.6]

所以將有含 $h^m_{i,j,k}$ 的項全移至左邊，而含 $h^{m-1}_{i,j,k}$ 的項移至右邊，則可得：

$$\begin{aligned}&CV_{i,j,k-1/2}h^m_{i,j,k-1}+CR_{i,j-1/2,k}h^m_{i,j-1,k}+CC_{i-1/2,j,k}h^m_{i-1,j,k}+(-CR_{i,j-1/2,k}-CC_{i-1/2,j,k}\\&-CR_{i,j+1/2,k}-CC_{i+1/2,j,k}-CV_{i,j,k-1/2}-CV_{i,j,k+1/2}+HCOF_{i,j,k})h^m_{i,j,k}+CV_{i,j,k+1/2}h^m_{i,j,k+1}\\&+CR_{i,j+1/2,k}h^m_{i,j+1,k}+CC_{i+1/2,j,k}h^m_{i,j,k}=RHS_{i,j,k}\end{aligned}$$

[附B.7]

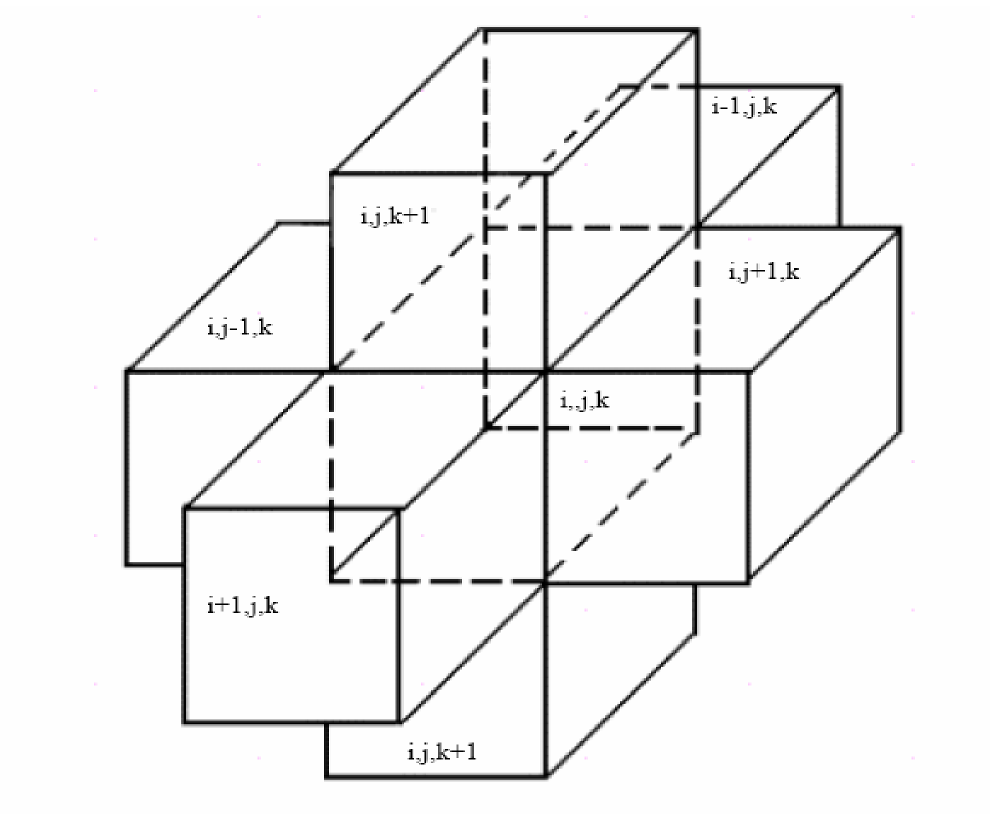
其中：

$$HCOF_{i,j,k}=P_{i,j,k}-SCl_{i,j,k}/\left(t_m-t_{m-1}\right)$$

$$RHS_{i,j,k}=-Q_{i,j,k}-SCl_{i,j,k}h^{m-1}_{i,j,k}/\left(t_m-t_{m-1}\right)$$

$$SCl_{i,j,k}=S_{s_{i,j,k}}\Delta r_j\Delta c_i\Delta v_k$$

而附B.7式即是MODFLOW程式所解之差分式。



圖附 B.1　cell(i,j-1,k)進入 cell 之地下水流