

# 國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

非線性波浪通過傾斜穿入式防波板的變形研究

The Deformation of Nonlinear Waves Pass Through Inclined

Thin Barriers

研究生：詹智為

指導教授：吳永照

中華民國九十六年六月

非線性波浪通過傾斜穿入式防波板的變形研究  
The Deformation of Nonlinear Waves Pass Through Inclined Thin  
Barriers

研究生：詹智為

Student : Chih-Wei Chan

指導教授：吳永照

Advisor : Yung-Chao Wu



A Thesis Submitted to Department of Civil Engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science  
in Civil Engineering  
June 2007  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

# 非線性波浪通過穿入式防波板的變形研究

學生：詹智為      指導教授：吳永照 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘要

本文以邊界元素法模擬直推式造波之非線性波浪數值水槽，除了消除造波板所造成的二階自由波，並配合輻射邊界條件，且於水槽末端設置海綿層吸收前進波，用以避免反射波造成分析上之困難。模式中以 Eulerian-Lagrangian 數值技巧來追蹤自由水面水粒子的非線性運動，並使用曲線近似法求得自由水面點各種物理量之切線方向的一階與二階微分值，再利用泰勒級數展開求得下一時刻的水位資料。本研究模式中同時使用合適條件(Compatibility conditions)和平滑技巧來增加模式的穩定性，進而在水槽中設置單一與兩穿入式防波板，利用數值方法探討非線性波與防波板之間的交互作用，並將數值結果與實驗值比較驗證。驗證結果顯示本模式計算之非線性波結果與實驗結果有相同的趨勢，但由於本研究並未考慮現實的流體具有黏滯性與實際上的底床和防波板皆存在摩擦效應此兩個因素，所以本模式求得之透射率結果較實驗值略大。數值結果發現防波板的寬度、沒水深度、傾斜角度及兩防波板間距皆會影響波浪的透射率。大致上，入射波的相對水深愈大，波浪通過穿入式防波板的透射率則愈低；入射波的尖銳度愈大，對應的透射率亦愈低。增加防波板的沒水深度、增長防波板寬度及增加防波板的傾斜角度，均會降低透射率。相同條件之入射波通過兩防波板的透射率較通過單一防波板時為低，並在特定之兩板間距情況下，波浪在兩防波板之間產生共振，且對應著極高的透射率。

# **The Deformation of Nonlinear Waves Pass Through Inclined Thin Barriers**

Student : Chih-Wei Chan    Advisor : Yung-Chao Wu

Institute of Civil Engineering National Chiao Tung University

## **Abstract**

Based on the boundary element method (BEM), a time stepping lagrangian technique is developed to simulate the generation of nonlinear water wave by a piston type wavemaker in a numerical wave tank. The second order free wave which generated by wavemaker, due to finite displacement, is eliminated in this study. Besides radiation condition, a sponge layer is set in front of the end of the wave tank to reduce wave reflection. To demonstrate the accuracy of the proposed numerical scheme, the surface elevation is computed and compared with the fifth order Stokes wave theory. The numerical scheme is also applied to study the interaction of nonlinear waves with vertical thin barriers. The transmissivity predicted by this study is compared to laboratory data and numerical results from other investigations.

After having verified the accuracy of the numerical scheme, the interaction of nonlinear waves with inclined thin barriers is investigated in detail. Our numerical results show that transmissivity is affected by the width, the submerged depth, the inclined slope of barrier, and the clearance between two barriers. Generally, the transmissivity decreases as the relative water depth increases; the transmissivity decreases as the wave steepness increases. Increasing the depth, the width and the inclined slope of barrier decrease the transmissivity. The numerical results indicate that the multiple barriers become more efficient than one barrier. Resonance occurs at a certain clearance between two barriers at which transmissivity becomes extreme.

## 誌 謝

首先由衷的感謝恩師 吳永照教授盡心盡力的指導，讓學生在學習及做研究上成長了許多，有著更多不同的體驗，老師對學生諄諄教悔，學生沒齒難忘。同時感謝口試委員徐虎嘯博士及陳筱華博士細心的批評指教，提供寶貴的意見，讓學生的論文內容更加完備，在此致衷心謝意。

研究室的學習生涯，感謝學長：生哥、宇文、貓哥、彬哥、朱老大、明穎、全佑、維珉、小晉晉、瑋哥、蘇哥、任馥、君儀；學窗：牛奶車、力瑋。學弟：柏成、為善、昱維、阿牛、瀚聖、韋圻等，多虧大家的陪伴，有苦有樂，增添了不少色彩，更要感謝 118A 的水資源團隊，借助電腦讓我執行不少程式。朋友：俊斌贊助電腦，讓我有更多資源，還有一些認識我的朋友們，謝謝你們的支持與鼓勵。

最後要深深的感謝我的家人，父母親、姐姐及姪女羽庭的全力支持及給我信心，諸位長輩過年給我壓歲錢繳學費，讓我可以無後顧之憂完成研究所的學業。

# 目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
謝誌.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
符號表.....	IX
第一章 緒論.....	1
1-1 前言.....	1
1-2 文獻回顧.....	1
1-3 研究目的.....	3
1-4 研究方法.....	4
第二章 理論模式.....	6
2-1 基本假設.....	6
2-2 控制方程式.....	7
2-3 邊界條件.....	7
2-4 各邊界之初始條件( $t=0$ ).....	10
第三章 數值方法.....	12
3-1 邊界元素法.....	12
3-2 自由水面之模擬.....	15
3-3 計算流程.....	20
3-4 模式之節點設定數.....	21
第四章 結果與討論.....	25

4-1 造波模式之驗證.....	25
4-2 波浪通過防波板模式之驗證.....	27
4-3 波浪通過單一防波板之模擬.....	28
4-4 波浪通過兩防波板之模擬.....	30
第五章 結論與建議.....	56
5-1 結論.....	56
5-2 建議.....	58
參考文獻.....	60
附錄 A 二階自由波之關係式.....	63
附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline).....	67
附錄 C 轉角處之合適條件.....	71
附錄 D 平滑技巧(Smoothing Technique).....	73
附錄 E 模式中能量的定義與推算.....	74



## 圖目錄

圖 2-1 造波模式之驗證示意圖.....	11
圖 2-2 非線性波通過單一防波板示意圖.....	11
圖 2-3 非線性波通過兩防波板示意圖.....	11
圖 3-1 邊界元素法示意圖.....	22
圖 3-2 模式之整個系統的計算流程.....	23
圖 3-3 各邊界線上節點設置分布圖.....	24
圖 4-1.1 造波模式在不同係數之海綿層情況下與 Stokes 五階波形比較.....	35
圖 4-1.2 造波模式在不同長度之海綿層情況下與 Stokes 五階波形比較.....	36
圖 4-1.3 消除二階自由波與包含二階自由波之水面波形比較.....	37
圖 4-1.4 造波模式質量變化與時間之關係圖.....	38
圖 4-1.5 造波模式能量變化與時間之關係圖.....	38
圖 4-1.6 振幅頻譜圖.....	38
圖 4-1.7 能量頻譜圖.....	38
圖 4-2.1 內置單一垂直防波板時，非線性波、線性波與實驗值之透射率比較圖.....	39
圖 4-2.2 內置單一垂直防波板時，非線性波、線性波與實驗值之透射率比較圖.....	40
圖 4-2.3 波浪通過兩穿入式防波板之透射率與相對水深關圖.....	41
圖 4-3.1(a) 非線性波通過單一垂直防波板之自由水面隨時間變化圖.....	41
圖 4-3.1(b) 非線性波通過單一垂直防波板之自由水面隨時間變化	



圖.....	42
圖 4-3.2 非線性波通過單一防波板剖面圖.....	43
圖 4-3.3 造波板產生二次反射示意圖.....	43
圖 4-3.4 波浪通過單一防波板之透射率與 $kh$ 及尖銳度關係圖.....	44
圖 4-3.5 非線性波通過防波板之透射率與尖銳度(H/L)關係圖.....	44
圖 4-3.6 波浪通過防波板之透射率與防波板寬度關係圖.....	44
圖 4-3.7 波浪通過防波板之透波率與防波板沒水深度關係圖.....	45
圖 4-3.8 非線性波通過單一防波板之透射率與防波板傾角關圖.....	46
圖 4-4.1(a) 非線性波通過兩平行防波板之自由水面隨時間變化圖...47	47
圖 4-4.1(b) 非線性波通過兩平行防波板之自由水面隨時間變化圖...48	48
圖 4-4.2 非線性波通過兩平行防波板剖面圖.....	49
圖 4-4.3 波浪通過兩平行防波板之透射率與 $kh$ 及尖銳度關係圖.....	50
圖 4-4.4 波浪透射率與兩平行防波板間距之關係圖.....	50
圖 4-4.5 最小透射率情況下，相對水深與兩板間距關係圖.....	51
圖 4-4.6 波浪通過兩防波板之自由水面比較圖.....	51
圖 4-4.7 波浪通過兩平行防波板之透射率與傾斜角度關係圖.....	51
圖 4-4.8 波浪通過兩防波板之透射率與傾斜角度關係圖.....	52

## 表目錄

表 4-1(a) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	53
表 4-1(b) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	53
表 4-1(c) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	53
表 4-1(d) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	53
表 4-1(e) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	54
表 4-1(f) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與防波板深度關係數 據表.....	54

## 符號表

$b$  : 防波板之寬度

$C$  : 海綿係數

$c$  : 前進波之相位速度

$d$  : 防波板之沒水深度

$G$  : 自由空間之 Green 函數

$g$  : 重力加速度

$h$  : 靜水深度

$k$  : 週波數

$L$  : 波長

$M$  : 靜止水槽內的總質量

$M^*$  : 造波中水槽內的總質量

$\bar{n}$  : 自由水面單位法線向量

$p$  : 大氣壓力

$q$  : 兩防波板之水平間距

$s_0$  : 造波板之衝程

$s_f$  : 消除二階自由波所需之衝程

$\bar{s}$  : 自由水面單位切線向量

$T$  : 造波板週期

$t$  : 時間

$TL$  : 水槽總長(造波板至輻射邊界之長度)

$u$  : 水粒子的水平速度

$w$  : 水粒子的垂直速度

$x$  : 卡式座標水平方向

$x_0$  : 造波板初始  $x$  座標值

$x_1$  : 海綿層之起始  $x$  座標值

$x_2$  : 海綿層之末端  $x$  座標值

$z$  : 卡式座標垂直方向

$\beta$  :  $\bar{s}$  和  $\bar{x}$  間的夾角

$\delta$  : Dirac Delta 函數

$\varepsilon$  : 區域座標(範圍-1~1)

$\Phi$  : 速度勢能

$\Phi_n$  : 法線速度

$\Gamma$  : 分析領域之邊界

$\varphi$  : 一階 Stokes 波與二階自由波之相位差

$\gamma$  : 邊界上奇異點的內角

$\mu$  : 海綿層之人造阻滯係數

$\pi$  : 圓周率

$\theta$  : 穿入式防波板之傾斜角度

$\rho$  : 流體的密度

$\Omega$  : 分析領域

$\sigma$  : 波浪的週頻率

$\omega$  : 造波板的週頻率

# 第一章 緒論

## 1-1 前言

臺灣地處四面環海，不論是從自然環境或是資源利用的觀點著眼，皆與海洋息息相關。海岸工程除了波浪的探討之外，用以保障沿海居民身家安全的海岸結構物同時也是一項重要的議題。近年，有不少以理論或實驗方法於有限水深中，探討不同類型結構物與波浪之交互作用的研究，但多著重在線性波與結構物之間的相互關係；然而在水深較淺的情況之下，探討波浪與結構物之間的交互作用時，非線性波之影響便成為不可忽視的重要因素。因此本文針對非線性波與穿入式防波板之間的交互作用以數值方法進行模擬，並對數值結果深入分析，同時以數值分析線性波之結果及部分前人實驗之成果加以比較。

## 1-2 文獻回顧

(1) 有關於造波方面之研究：

關於數值造波水槽之造波、傳遞及變形問題的研究，近年來有許多的突破與發展。早期有 Madsen (1970) 利用線性造波控制方程式來模擬活塞式造波機之週期性造波問題，Faltinsen (1978) 利用邊界積分法探討水槽內液體的擾動現象，而 Nakayama (1983) 以非線性邊界初值條件及邊界上之速度勢應用邊界元素法以 Green 函數解析非線性波浪，模擬由於海底抬升形成海嘯與孤立波溯上等問題。Brorsen 和 Larsen (1987) 以邊界積分法解析非線性重力波之造波問題。Chou 和

Shih (1996<sub>1</sub>;1996<sub>2</sub>)利用邊界元素法配合時間差分法之觀念模擬孤立波與有限振幅波之造波、傳遞與變形問題。

(2)有關於輻射邊界的處理方式之研究：

關於輻射邊界的處理方式，有許多種方法。最簡單的處理方式是假設水槽之末端邊界為不透水邊界，如 Chou 和 Shih (1996)。但是使用此種不透水邊界，必須增加水槽的長度及模擬時間，才能避免反射波所造成的影響。如此一來，除了計算節點大量增加外，數值計算的時間也相對增長許多，故 Brorsen 和 Larsen (1987) 便以 Sommerfeld 輻射邊界來做處理，然而此邊界條件是假設波場中的波速為定值，並不適合應用在非保守與不規則的波場中。Ohyama 和 Nadaoka (1991) 則是結合海綿邊界與開放邊界兩種方式來處理，此種處理方式便可被應用在任何非線性與不規則波場。

(3)有關於波浪通過單一穿入式防波板之研究：

關於波浪通過單一穿入式防波板的相關研究，早期有 Ursell (1946) 發展之解析解，探討在深水情況下，波浪通過防波板之透波率與反射率。Wiegel (1960)利用微小振幅波理論求得近似解，探討波浪通過垂直自由水面之穿入式防波板的透射率變化並配合實驗加以驗證，結果顯示波浪之透射率隨著防波板沒水深度的增加而遞減。Liu 和 Madjid (1982)使用邊界積分法探討穿入式防波板之沒水深度與傾斜角度對於線性波透射率及波高的影響，並與 Ursell 之解析解和 Wiegel 之實驗結果相互比較，結果發現以邊界積分法所求得之透射率，其趨勢與

Wiegel 之實驗結果頗為近似。同時也發現，透射率亦會受波浪之入射角度影響，在波浪之入射角為 25 度的情況下，假設防波板之沒水深等於 0.7 倍靜水深，可得到最佳的防波效果。Losada 等人(1992)根據線性波理論，以 Laplace 方程式配合邊界條件來解析線性波斜向入射一系列垂直自由水面之防波板後，波浪之透射率與波浪作用於防波板上之水平淨力的情形。結果顯示波浪入射的傾斜角度越大，則透射率越低。同時發現波浪作用於防波板上的水平淨力隨著防波板深度增加而遞增，且隨著波浪入射的傾斜角度增加而遞減。

(4)有關於波浪通過兩穿入式防波板之研究方面：

當入射波之波長遠大於防波板之寬度時，會使得防波效果消失，因而發展出使用兩個平行放置的穿入式防波板，用以增加防波效果。Wu 和 Liu (1988) 利用特徵方程式展開，配合數值方法發展一解析解，探討斜向入射之微小振幅波與兩垂直自由水面之防波板的相互關係。在研究中同時使用 Plane-wave 和 Wide-spacing 兩種近似法求得近似解，藉此與解析解作比較。結果發現使用 Plane-wave 近似法所求得之透射率結果並不準確，而使用 Wide-spacing 近似法之結果則與解析解非常接近。同時亦發現固定防波板條件之情況下，兩防波板之間在某特定頻率時會產生共振情形，且對應著極高的透波率。

### 1-3 研究目的

波浪與海岸結構物之間的交互作用是海洋工程中最實際的問題，過去對於結構物的研究多著重在結構物與線性波之間的交互作

用。然而隨著電腦高速計算能力的日漸提升，不僅克服了複雜繁瑣的計算，加上數值技巧的不斷更新，因而造成探討非線性波的新趨勢。非線性波對於整個波浪的變形效應有一定程度的影響，因此本研究將探討非線性波與穿入式防波板之間的交互作用。

本研究利用邊界元素法建立一數值水槽來模擬非線性造波問題，並在水槽內分別設置單一與兩穿入式防波板，用以分析非線性波與穿入式防波板之間的交互作用，透過本研究可瞭解非線性波效應對於波浪通過防波板的影響，並得到不同條件的波浪通過防波板之後，其透射率的變化情形，以提供海洋工程上設計之參考。

#### 1-4 研究方法

本研究是基於線性邊界元素法發展出一數值水槽模式，在時間領域(time domain)計算下模擬直推式(piston type)造波水槽所造出的非線性自由水面變動，並消除造波板產生之二階自由波。在此數值模式中，邊界分割成有限個直線元素，並假設各個元素裡的所有物理量皆呈線性變化，並使用 Eulerian-Lagrangian 混合模式來追蹤整個自由水面在不同時間的非線性運動，配合曲線近似法(Cubic spline)求得各個物理量在切線方向的一階和二階微分值，以泰勒級數展開求得下一時刻之自由水面波形，配合使用輻射邊界條件與於數值水槽末端設置海綿層用以吸收前進波。數值計算所求得的結果先與 Stokes 五階解驗證此造波模式之正確性，而後設置穿入式防波板於水槽中，模擬波浪通過防波板之現象。最後，對於在時間領域所求得的自由水面水位資料，以快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transfer)來分析其頻散關係，進而



求得波浪通過防波板的透射率，並與 Wiegel (1960)的實驗結果及吳與劉(1988)數值結果相互比較，用以驗證此模式的可行性，繼而分別在不同波高及相對水深的情況下，改變防波板之沒水深、寬度、傾斜角度與兩防波板間距，探討波浪與穿入式防波板之間的相互作用，並計算分析波浪通過防波板之透射率。



## 第二章 理論模式

### 2-1 研究範圍界定

本研究先以內部未放置防波板之水槽進行驗證造波板模式的可行性，如圖 2-1 所示，數值水槽之配置為固定水深  $h$ ，水槽之左方邊界為虛擬活塞式造波板邊界  $\Gamma_m$ ，上方邊界自由水面邊界  $\Gamma_f$ ，下方邊界為不透水底床邊界  $\Gamma_w$ ，右方邊界為輻射邊界  $\Gamma_r$ ，並在輻射邊界前方設置虛擬海綿層吸收前進波。卡式座標的原點定義在左方造波板邊界與上方自由水面邊界於初始時刻 ( $t=0$ ) 之交界處， $x$  軸以水平向右為正， $z$  軸以垂直向上為正。

本研究在內置單一穿入式防波板之水槽模式中，將單一防波板設置於水槽內，防波板之沒水深為  $d$ ，寬度為  $b$ ，傾斜角度  $\theta$  定義為正  $z$  軸與防波板之夾角，順時針為正，在穿入式防波板以角度  $\theta$  傾斜之情況下，假設其沒水深度仍然維持原本的沒水深度  $d$ ，為如圖 2-2 所示。此模式之計算領域由造波板邊界  $\Gamma_m$ 、自由水面邊界  $\Gamma_f$ 、不透水邊界  $\Gamma_w$  (包括底床與防波板)、輻射邊界  $\Gamma_r$  所圍成之封閉區間。

本研究在內置兩穿入式防波板之水槽模式中，將兩防波板設置於水槽內，兩防波板之沒水深分別為  $d_1$  與  $d_2$ ，寬度分別為  $b_1$  與  $b_2$ ，兩防波板隔間距為  $q$ ，兩防波板之傾斜角度分別為  $\theta_1$  與  $\theta_2$ 。在穿入式防波板以角度  $\theta_1$  與  $\theta_2$  傾斜之情況下，假設其沒水深度仍然維持原本的沒水深度  $d_1$  與  $d_2$ ，如圖 2-3 所示。此模式之計算領域亦由造波板邊界  $\Gamma_m$ 、自由水面邊界  $\Gamma_f$ 、不透水邊界  $\Gamma_w$  (包括底床與兩防波板)、輻射邊界  $\Gamma_r$  所圍成之封閉區間。

## 2-2 控制方程式

現實流體會讓問題變得複雜，為了簡化問題，本研究依據古典流體力學假設流體為不可壓縮、無黏滯性且為非旋性流，故存在一速度勢  $\Phi(x, z, t)$ 。配合勢能流理論，整個數值領域的控制方程式便滿足拉普拉斯方程式(Laplace equation)：

$$\nabla^2\Phi(x, z, t) = 0 \quad (2-1)$$

## 2-3 邊界條件

計算領域中的水平速度  $u$  和垂直速度  $w$  可以根據卡式座標定義為：

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (2-2)$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2-3)$$

沿著自由水面邊界，給予一區域座標  $(s, n)$ ，其中  $\bar{s}$  為單位切線向量， $\bar{n}$  為單位法線向量，將  $\bar{n}$  定義向外為正，故可將水平速度  $u$  和垂直速度  $w$  表示成：

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sin \beta \quad (2-4)$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \cos \beta \quad (2-5)$$

其中  $\beta$  為  $\bar{s}$  和  $\bar{x}$  的夾角，以逆時鐘方向為正。

### 1. 固定不透水邊界 $\Gamma_w$ ：

固定不透水邊界包括底床和防波板等不透水表面，其法線方向的流速於任何時刻皆為零，即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-6)$$

## 2. 虛擬造波板邊界 $\Gamma_m$ :

此邊界為一運動邊界條件(kinematic boundary condition, KBC)，即虛擬造波板邊界表面的法線方向運動速度與水粒子之水平速度必須連續，給予造波板上水粒子的位移為

$$x = \hat{S}(t; x_0) = \frac{s_0}{2} \sin \omega t + \frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi) + x_0 \quad (2-7)$$

則造波板之運動邊界條件為

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad (2-8)$$

其中  $x_0$  為造波板在初始時刻之水平位置， $s_0$  為造波板之衝程， $\omega$  為造波之週頻率， $s_f$  為消除二階自由波所需之衝程， $\varphi$  為一階 Stokes 波與二階自由波之相位差（附錄 A）。根據二階的非線性理論造波板所造出的之波浪除了二階 Stokes 波亦包括二階自由波，因此造波板之位移需加上修正項，用以消除造波板所產生的二階自由波（吳，1987），其修正項為  $\frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi)$ 。

## 3. 輻射邊界條件 $\Gamma_r$ :

假設水槽之右方邊界為一假想無窮遠邊界，輻射邊界條件為

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (2-9)$$

其中  $c$  為前進波的相位速度(phase velocity)。由於此輻射邊界條件為線性，仍會有些微反射波出現，故於輻射邊界前設置海綿層(Ohyama and Nadaoka, 1991)用來消滅入射波的波能並且減少波浪反射，其自由水面邊界可表示如下式：

$$\mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on\Gamma_r} dx = 0 \quad (2-10)$$

結合(2-9)與(2-10)式可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx \right) \quad (2-11)$$

$x_1$  為海綿層在  $x$  軸起始之座標， $x_2$  為海綿層在  $x$  軸末端之座標， $\mu$  為海綿層的人造阻滯係數 (artificial damping factor)，假設  $\mu$  在海綿層中呈線性分佈，在起始端  $x = x_1$  處阻滯係數為零，在海綿層末端處阻滯係數則為最大值  $\mu_{\max}$ 。

#### 4. 自由水面邊界 $\Gamma_f$ ：

必須符合兩個邊界條件，其一為表面運動邊界條件 (kinematic boundary condition at free surface, KFSBC)，另一為表面動力邊界條件 (dynamic boundary condition at free surface, DFSBC)。

A. 自由水面運動邊界條件表示水表面的水粒子速度等於表面速度，若給予表面水粒子一座標為：

$$x = \xi(t, x_0) \quad (2-12)$$

$$z = \zeta(t, z_0) \quad (2-13)$$

這裡  $x_0 = \xi(0, x_0)$  和  $z_0 = \zeta(0, z_0)$ 。故表面運動邊界條件為：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w \quad (2-15)$$

B. 自由水面動力邊界條件則可以由白努利方程式 (Bernoulli's equation)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{P}{\rho} = C(t) \quad (2-16)$$

假設水面大氣壓力為零，即  $P = 0$ 。因本文未考慮質量傳輸 (Mass transport)，所以常數項等於零，配合將假想海綿層置入數值水槽末端，其自由水面邊界可表示如下式：

$$\mu\Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x}\Phi \Big|_{on\Gamma_f} dx = 0 \quad (2-17)$$

結合(2-17)和(2-18)可以得到下列關係式：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu\Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x}\Phi \Big|_{on\Gamma_f} dx = 0 \quad (2-18)$$

## 2-4 各邊界之初始條件(t=0)

於起始造波時間 (t=0) 時，各邊界之起始邊界條件分別如下所述：

1. 虛擬造波板邊界  $\Gamma_m$  於 t=0 時，可由(2-8)及(2-9)式得到下列之關係：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = - \frac{d\hat{S}}{dt} \Big|_{t=0} = - \left( \frac{s_0}{2} \omega + s_f \omega \cos(-\varphi - \pi) \right) \quad (2-19)$$

2. 幅射邊界  $\Gamma_r$  於 t=0 時，水粒子屬於完全靜止狀態，其速度為零，即：

$$\Phi_n = 0 \quad (2-20)$$

3. 自由水面邊界  $\Gamma_f$  在初始 t=0 為完全靜止之液面，其速度勢為零，即：

$$\Phi = 0 \quad (2-21)$$

4. 不透水邊界(底床與防波板)  $\Gamma_w$ ，其法線方向之流速於任何時刻均為零即：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-22)$$

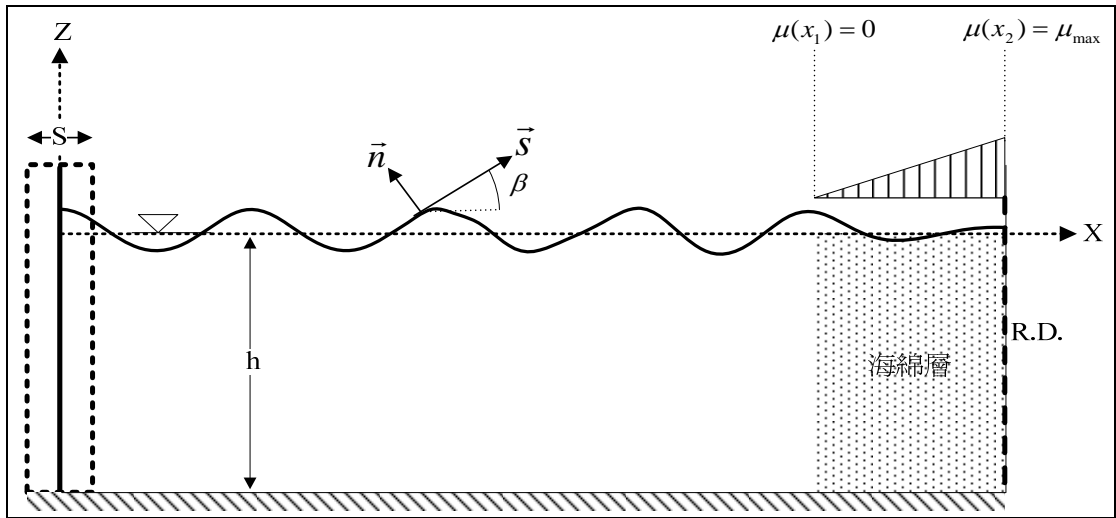


圖 2-1 造波模式之驗證示意圖

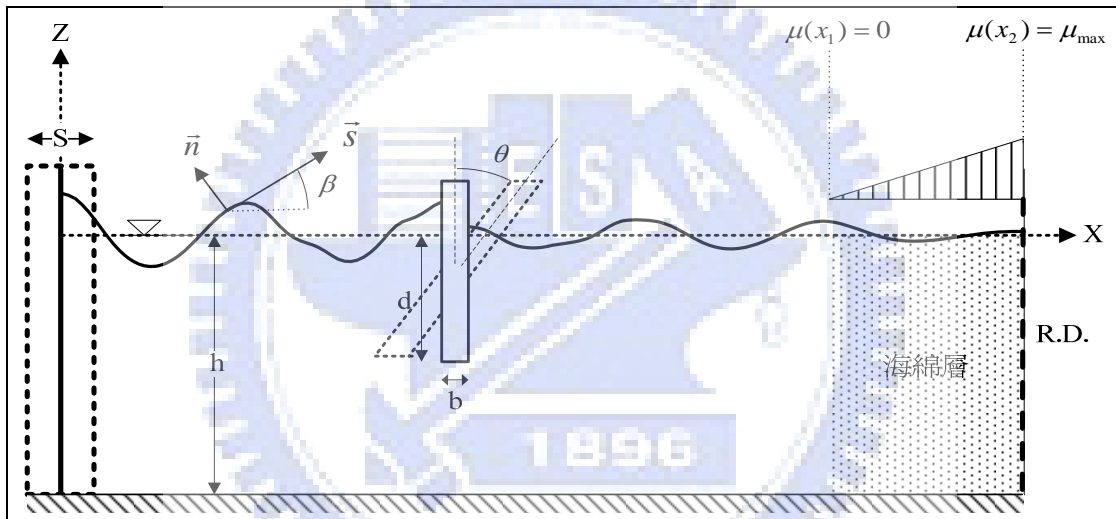


圖 2-2 非線性波通過單一防波板示意圖

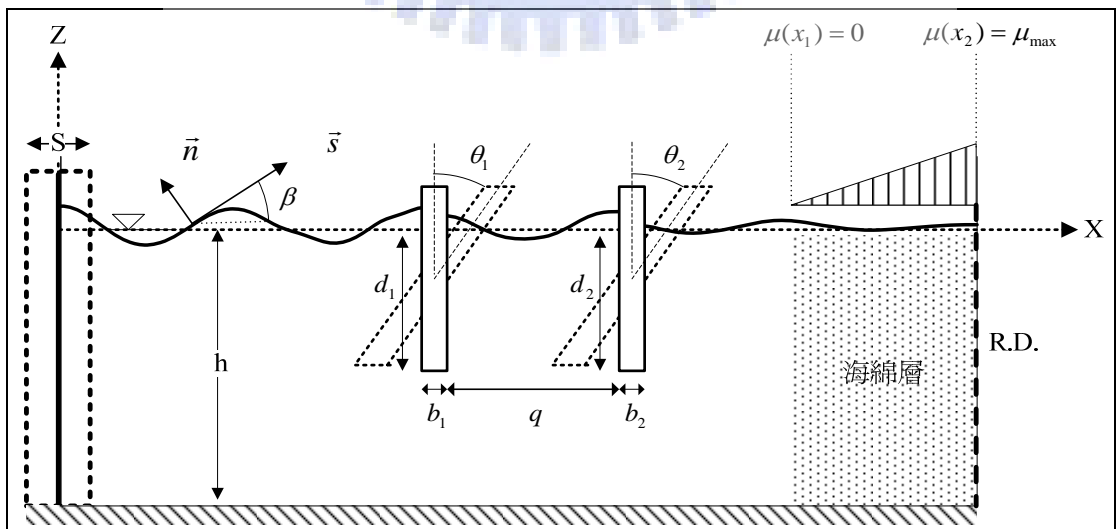


圖 2-3 非線性波通過兩防波板示意圖

## 第三章 數值方法

頻率領域(Frequency domain)的計算只適用於線性或者是弱非線性的自由水面邊界值問題，然而真實的水面波動現象是屬於非線性問題。因此在本文中，將針對一個完全非線性之自由水面邊界值問題，在時間領域裡以邊界元素法為數值模式的計算方式來解決問題。在水面點運動的模擬方面，則使用 Dold 和 Peregrine (1984)所建議的 Eulerian-Lagrangian 混合式數值技巧，自由水面點於下一時刻的新位置和新速度勢是由泰勒級數(Taylor series)展開所求得。

### 3-1 邊界元素法

邊界元素法(Boundary Element Method, BEM)在過去三十幾年之中，邊界元素法已經被廣泛的應用在水波的問題上。邊界元素法的理論基礎與勢能函數(Potential theory)相互輝映，並與奇異積分(Singular Integration)息息相關。

有限水深領域之中，海洋地形之變化所引起的波浪變形、透水性土壤，或者是水中結構物與波浪之間的交互作用等問題，可視為二維度問題，可由若干種解析方法得到解析解，但是都僅限於簡單之海底地形且結構物為矩形。而邊界元素法可以解析波浪通過複雜之海底地形所引起波浪的變形問題，或者是波浪與各種形狀結構物之間的交互作用問題。對一邊界值問題而言，如果已知其控制方程式在自由空間的 Green 函數(Free space Green function)，便可應用 BEM 來計算。對於同一維度的問題而言，使用 BEM 可以使其邊界元素之有效維度減少一維，避免領域內繁瑣的計算。

應用 BEM 解勢能流問題，首先要將待解的邊界值問題轉換為積



分方程式，BEM 的積分方程式是由 Green 第二恆等式推得：

$$\int_{\Omega} (\Phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n}) d\Gamma \quad (3-1)$$

其中  $\Omega$  為積分之區域(domain)， $\Gamma$  為分析領域  $\Omega$  之邊界，假設  $\Phi$  為速度勢滿足 Laplace equation，即

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3-2)$$

並令  $G$  為下列方程式的解

$$\nabla^2 G = \delta(x - x_i, z - z_i) \quad (3-3)$$

$G$  為自由空間之 Green 函數(Free space Green function)， $\delta$  為 dirac delta function。

在二維 Laplace equation 的問題中，基本解為(Greenberg, 1971)

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3-4)$$

式中  $r$  代表二維區域之奇異點  $p'$  (singular point) ( $r=0$ ) 至邊界上一點  $Q$  的距離，由於  $p'$  為奇異點，因此利用一小圓周半徑  $r_0$  將奇異點  $p'$  分離，可由(3-1)推導得下式：

$$\frac{\gamma}{2\pi} \Phi(p') = \int_{\Gamma} (G \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n} - \Phi(Q) \cdot \frac{\partial G}{\partial n}) \cdot ds \quad (3-5)$$

(3-6)式中  $\Phi(p')$  為奇異點  $P'$  的速度勢， $\gamma$  為  $P'$  之內角，如圖 3-1 所示。

上式為邊界元素法所應用的積分方程式。

將式分割成  $N$  段元素，每一個元素的兩端點稱為節點(node)，並假定未知值在節點之間作線性的變化，此即為線性元素(linear element)的定義，故可將(3-5)式離散化成：

$$\frac{\gamma}{2\pi} \Phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi}{\partial n} G d\Gamma \quad (3-6)$$

$\Gamma_j$  為邊界上第  $j$  段的元素，下標  $i$  代表  $p'$  點。

依照線性元素的分析， $\Phi$ 和 $\Phi_n$ 在各元素裡呈現性變化，故定義邊界上的速度勢為：

$$\Phi(\varepsilon) = u_1\Phi^1 + u_2\Phi^2 = [u_1 u_2] \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_n(\varepsilon) = u_1\Phi_n^1 + u_2\Phi_n^2 = [u_1 u_2] \begin{Bmatrix} \Phi_n^1 \\ \Phi_n^2 \end{Bmatrix}$$

式子中 $u_1$ 、 $u_2$ 是形狀函數(shape function)，

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$$

$\varepsilon$ 表示區域座標，其範圍從-1到1，下標1代表元素 $j$ 的第一個節點，下標2代表元素 $j$ 的第二個節點。所以邊界上各元素可表示如下：

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_j \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u_1 u_2] \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_j^1 \\ \Phi_j^2 \end{Bmatrix} = [h_1^{ij} h_2^{ij}] \begin{Bmatrix} \Phi_j^1 \\ \Phi_j^2 \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

$$\begin{cases} h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u_1 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \\ h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} u_2 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_{n_j} G d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u_1 u_2] G d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_{n_j}^1 \\ \Phi_{n_j}^2 \end{Bmatrix} = [g_1^{ij} g_2^{ij}] \begin{Bmatrix} \Phi_{n_j}^1 \\ \Phi_{n_j}^2 \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

$$\begin{cases} g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u_1 G d\Gamma \\ g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} u_2 G d\Gamma \end{cases}$$

將式代入式中，整理可得

$$\frac{\alpha}{2\pi} \Phi_i + [H^{i1} H^{i2} \dots H^{iN}] \begin{Bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ \Phi^N \end{Bmatrix} = [R^{i1} R^{i2} \dots R^{i2N}] \begin{Bmatrix} \Phi_n^1 \\ \Phi_n^2 \\ \vdots \\ \Phi_n^{2N} \end{Bmatrix} \quad (3-9)$$

$H^{ij}$ 係數矩陣表示為：

$$H^{ij} = h^{ij} + h^{i(j-1)}$$

$R^{ij}$  係數矩陣表示為：

$$\text{元素 } j=1 \rightarrow R^{i1} = g_1^{i1}, R^{i2} = g_2^{i1}$$

$$\text{元素 } j=2 \rightarrow R^{i3} = g_1^{i2}, R^{i4} = g_2^{i2}$$

⋮

若令

$$H^{ij} = \begin{cases} H_{ij} & \text{where } i \neq j \\ H_{ij} + \frac{\alpha_i}{2\pi} & \text{where } i = j \end{cases}$$

式可以改寫成

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} \Phi_j = \sum_{k=1}^{2N} R^{ik} \Phi_{nk} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3-10)$$

垂直速度於轉角處(corner point)時，元素  $j$  與元素  $j+1$  有不同的值。為了克服這種不合理的現象，需於趨近節點之左右各取一點，便可解決。若每一節點左右各取一點，則  $R$  矩陣的列(row)則會增加一倍為  $2N$  列。

各區之  $[H]$  和  $[R]$  是已知，且僅受幾何形狀的影響。將邊界條件代入式(3-10)，並將未知項移至等號左邊，已知項則移至等號右邊，便可得一聯立方程式：

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (3-11)$$

式中  $\{X\}$  為未知向量， $\{F\}$  為已知向量， $[A]$  是係數矩陣，便可解得未知項之  $\Phi$  和  $\Phi_n$ 。

### 3-2 自由水面之模擬

為了追蹤自由水面上之水粒子在每一時間間隔  $\delta t$  的移動軌跡，本文採用 Eulerian-Lagrangian 描述法的觀念(Dold and Peregrine, 1984)，利用各邊界的初始條件，配合邊界元素法可以求得同一時刻虛擬造波

板邊界之速度勢 $\Phi$ 、自由水面邊界之法線方向導函數 $\Phi_n$ 、底床邊界與防波板邊界之速度勢 $\phi$ 及輻射邊界之速度勢 $\Phi$ 與速度 $\Phi_n$ ，此為 Eulerian 描述法。然而對於下一時刻各個邊界之邊界值，唯有自由水面之邊界值無法直接求得，所以自由水面邊界在下一個時刻的新位置，則必須由適當的數值方法計算求得。藉由連接各個節點可以得到任意時刻之自由水面波形，若時間間隔 $\delta t$ 足夠細微，則任一節點從時間 $t$ 的位置 $(\xi, \zeta)$ 移動至下一時刻 $t + \delta t$ 的位置 $(\xi', \zeta')$ 及其對應之速度勢可用泰勒級數(Taylor series)展開計算，此為 Lagrangian 描述法。其泰勒級數(Taylor series)展開示可表示成：

$$\xi' = \xi + \frac{d\xi}{dt} \delta t + \frac{d^2\xi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-12)$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{d\zeta}{dt} \delta t + \frac{d^2\zeta}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-13)$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \delta t + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-14)$$

其中需先計算求得各項值對時間的一階全微分 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$ 、 $\frac{d\Phi}{dt}$ 與各項值對時間的二階全微分 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ ，代入上式方可求得新的位置 $\xi'$ 、 $\zeta'$ 及新的速度勢 $\Phi'$ ，而高階項(High Order Term) $O(\delta t)^3$ 則因影響較小，所以可以乎略。

一階全微分之求得如下：

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos\beta - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sin\beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-15)$$

$$w = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \cos\beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-16)$$

其中法線速度 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 由邊界元素法計算求得，切線速度 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 和水面波形角度 $\beta$ ，則需利用曲線近似法(附錄 B)計算求得。

而  $\Phi$  對時間全微分  $\frac{d\Phi}{dt}$  與偏微分  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  之關係式可表示成：

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\Phi \quad (3-17)$$

式(3-17)中之  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  可由 DFSBC 邊界條件(2-17)求得。在自由水面上接

觸到海綿層的部份可以下式表示：

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \\ &= -g\zeta - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on\Gamma_f} dx + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \\ &= -g\zeta + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on\Gamma_f} dx \end{aligned} \quad (3-18)$$

而自由水面上沒有接觸到海綿層部份的  $\mu=0$ ，故式(3-18)表示成：

$$\frac{d\Phi}{dt} = -g\zeta + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] \quad (3-19)$$

邊界上未知的  $\Phi$  和  $\Phi_n$  是由邊界上已知的  $\Phi$  和  $\Phi_n$  求得，各邊界上已知的條件為：

- A. 造波板邊界的法線方向流速  $\Phi_n$ ：由造波板運動邊界條件求得。
- B. 自由水面上的速度勢  $\Phi$ ：由(3-14)泰勒級數展開計算求得。
- C. 輻射邊界的法線方向流速  $\Phi_n$ ：由(2-11)求得，其中  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  時間導

數採用向前差分(forward difference)，原式改寫成：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\Phi - \Phi^*}{\delta t} + \mu_{\max} \Phi^* - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi^* \Big|_{on\Gamma_f} dx \right) \quad (3-20)$$

其中  $\Phi^*$  為輻射邊界節點上前一時刻之速度勢。

- D. 不透水邊界(即底床與穿入式防波板)上法線方向的流速  $\Phi_n$  於任何時刻皆為零。

上述已知條件配合邊界元素法，可求得同一時刻造波板邊界之速

度勢 $\Phi$ 、自由水面法線方向之流速 $\Phi_n$ 、輻射邊界之速度勢 $\Phi$ 和不透水邊界之速度勢 $\Phi$ 。切線方向之速度 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 與水面波形角度 $\beta$ 則由曲線近似法求得。

本文關於二階全微分 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 之計算，是採用 Grill et al.

於 1989 所提出的關係式：

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{du}{dt} = & \left[ \frac{\partial\Phi_t}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} \right] \cos\beta \\ & + \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \sin\beta \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = & \left[ \frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \cos\beta \\ & + \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_t}{\partial s} \right] \sin\beta \end{aligned} \quad (3-22)$$

在自由水面有接觸到海綿層部分的 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 為

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ -g\zeta + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx \right] \quad (3-23)$$

利用萊布尼茲法則(Leibniz rule)可將上式整理為

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} = & -g \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d^2\xi}{dt^2} + w \frac{d^2\zeta}{dt^2} \\ & - \mu \frac{d\Phi}{dt} + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{on \Gamma_f} dx - \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x} \end{aligned} \quad (3-24)$$

沒有接觸到海綿層部分的 $\mu=0$ ，故式(3-24)可以改寫為

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -g \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d^2\xi}{dt^2} + w \frac{d^2\zeta}{dt^2} \quad (3-25)$$

同樣的，邊界上未知的 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}$ 可由邊界上已知的 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}$ 透過邊

界元素法求得，各邊界上已知的條件為：

- A. 造波板邊界的  $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$  : 由(2-9)式造波板之運動邊界條件求得。
- B. 自由水面上的  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  : 由(2-17)式求得。
- C. 輻射邊界的法線方向流速  $\Phi_n$  : 由(2-11)求得，其中  $\frac{\partial \Phi_t}{\partial t}$  時間導

數採用向前差分，上式改寫成：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial n} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\Phi_t - \Phi_t^*}{\delta t} + \mu_{\max} \Phi_t^* - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial X} \Phi_t^* \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (3-26)$$

其中  $\Phi_t^*$  微幅射邊界節點上前一時刻之  $\Phi_t$  值。

- D. 不透水邊界(即底床與防波板)上的  $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$  : 於任何時刻皆為零。

上述已知條件配合邊界元素法，可求得同一時刻造波板邊界之速度勢

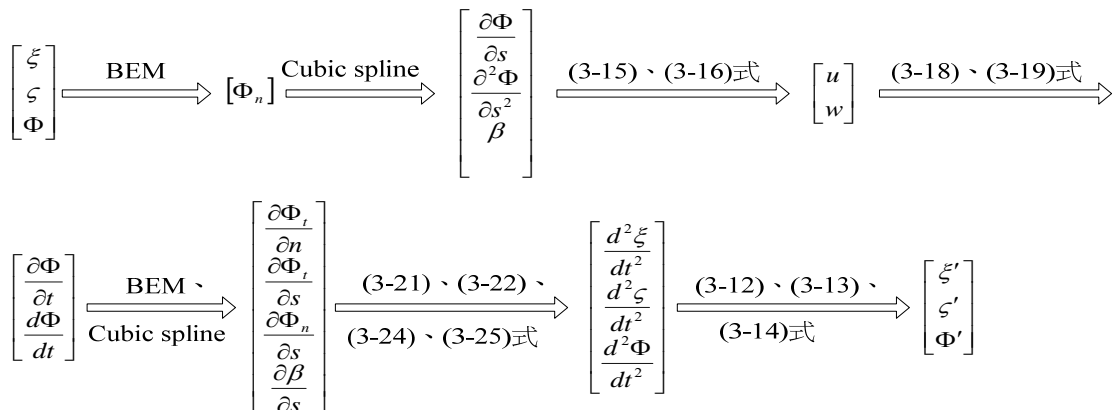
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}、自由水面之 \frac{\partial \Phi_n}{\partial t}、輻射邊界之 \frac{\partial \Phi}{\partial t} 和不透水邊界之 \frac{\partial \Phi}{\partial t}。 \quad (3-21)$$

式與(3-22)式中，切線方向之偏微分向量  $\frac{\partial \Phi_t}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$  與  $\frac{\partial \beta}{\partial s}$  則由曲線近似法求得。

求得各階全微分項後，便可由(3-12)、(3-13)、(3-14)得到  $\xi'$ 、 $\zeta'$

與  $\Phi'$  之值。整個系統的自由水面各節點之位置及速度勢隨時間變化計

算流程如下：



### 3-3 計算流程

本模式之計算流程如圖 3-2 所示，其流程說明如下所述：

1. 給訂初始值，即  $t=t_0=0$  時之  $\Phi$ 、 $\Phi_n$ 、 $\Phi_t$ 、 $\Phi_m$  及  $x$ 、 $y$ ，並包含自由水面之節點位置  $\xi$ 、 $\zeta$ 。
2. 令時刻  $t=t_0$ ，邊界上已知物理量為  $\Phi$ 、 $\Phi_n$ 、 $\Phi_t$ 、 $\Phi_m$  及  $x$ 、 $y$ 。
3. 由邊界上已知的  $\Phi$ 、 $\Phi_n$  及  $x$ 、 $y$  利用邊界元素法求得邊界上未知的  $\Phi$ 、 $\Phi_n$ ，並包含自由水面的  $\Phi_n$ 。
4. 由自由水面上的  $\Phi$  及  $\xi$ 、 $\zeta$  利用曲線近似法計算求得自由水面之  $\Phi_s$ 、 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$  及  $\beta$ 。
5. 由自由水面上的  $\Phi_s$ 、 $\Phi_n$  及  $\beta$  配合(3-15)及(3-16)式，求得  $u$  及  $w$  (即  $\frac{d\xi}{dt}$  及  $\frac{d\zeta}{dt}$ )。並由(3-17)式配合 DFSBC 求得  $\Phi_t$  及  $\frac{d\Phi}{dt}$ 。
6. 由邊界上已知的  $\Phi_t$ 、 $\Phi_m$  及  $x$ 、 $y$  利用邊界元素法求得邊界上未知的  $\Phi_t$ 、 $\Phi_m$ ，並包含自由水面的  $\Phi_m$ 。
7. 由自由水面上的  $\Phi_t$  及  $\xi$ 、 $\zeta$  利用曲線近似法計算求得自由水面之  $\frac{\partial \Phi_t}{\partial s}$ 。
8. 由自由水面上的  $\Phi_n$  及  $\xi$ 、 $\zeta$  利用曲線近似法計算求得自由水面之  $\frac{\partial \Phi_n}{\partial s}$ 。
9. 由自由水面上的  $\beta$  及  $\xi$ 、 $\zeta$  利用曲線近似法計算求得自由水面之  $\frac{\partial \beta}{\partial s}$ 。
10. 由自由水面上之  $\Phi_n$ 、 $\Phi_s$ 、 $\frac{\partial \Phi_t}{\partial s}$ 、 $\beta$ 、 $\frac{\partial \Phi_t}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial \Phi_n}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial \Phi_t}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial \beta}{\partial s}$ 、 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$  代入(3-21)、(3-22)、(3-24)或(3-25)式，計算求得  $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$  及



$$\frac{d^2\Phi}{\partial t^2}。$$

11. 將上述自由水面上已知的  $\xi$ 、 $\zeta$ 、 $\Phi$  及已求得的  $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\zeta}{dt}$ 、 $\frac{d\Phi}{dt}$ 、 $\frac{d^2\xi}{\partial t^2}$ 、 $\frac{d^2\zeta}{\partial t^2}$ 、 $\frac{d^2\Phi}{\partial t^2}$  代入 Taylor 級數展開式(3-12)、(3-13)及(3-14)式，求得下一時刻  $t = t + \delta t$  水位資料  $\xi'$ 、 $\zeta'$ 、 $\Phi'$ 。

12.  $t$  是否等於所需之模擬時間  $T$ ，「是」則進入流程 14；「否」則進入流程 13。

13. 令  $t_0 = t$ 。

14. 模式計算結束。

### 3-4 模式之節點數設定

圖 3-3(a)為純水槽各個邊界線上之節點分布圖，其各個邊界上節點數分佈為  $N_1$  是造波板上設定點分佈， $N_2$  是自由水面設定點分佈， $N_3$  是輻射邊界設定點分佈， $N_4$  是不透水底床設定點分佈。圖 3-3(b)為內置單一穿入式防波板之水槽各個邊界線上之節點分布圖，其中  $N_1$  是造波板上設定點分佈， $N_2$  與  $N_6$  是自由水面設定點分佈， $N_3$ 、 $N_4$  與  $N_5$  是防波板上設定點分佈， $N_7$  是輻射邊界設定點分佈， $N_8$  是不透水底床設定點分佈。圖 3-3(c) 為內置兩穿入式防波板之水槽各個邊界線上之節點分布圖，其中  $N_1$  是造波板上設定點分佈， $N_2$ 、 $N_6$  與  $N_{10}$  是自由水面設定點分佈， $N_3$ 、 $N_4$ 、 $N_5$ 、 $N_7$ 、 $N_8$  與  $N_9$  是防波板設定點分佈， $N_{11}$  是輻射邊界設定點分佈， $N_{12}$  是不透水底床設定點分佈。

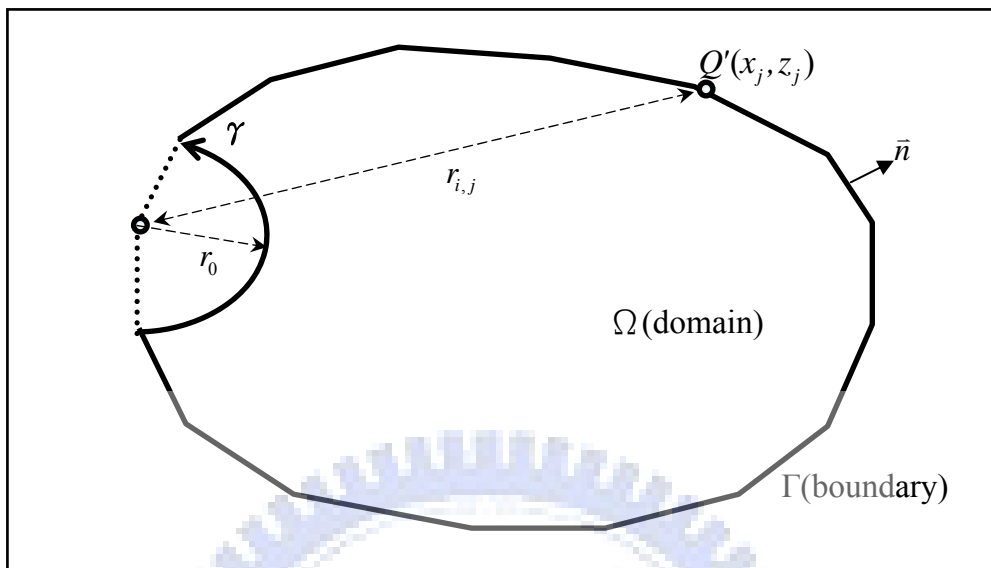
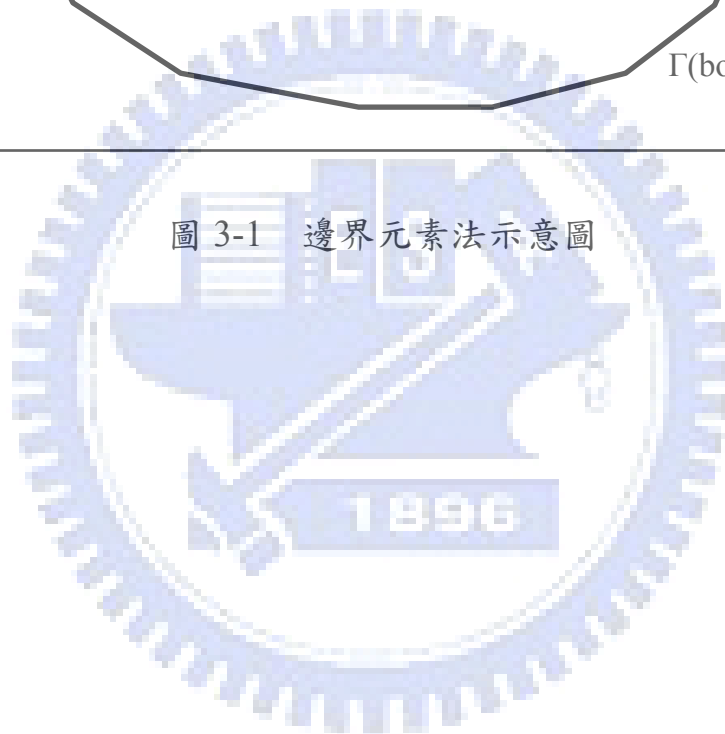


圖 3-1 邊界元素法示意圖



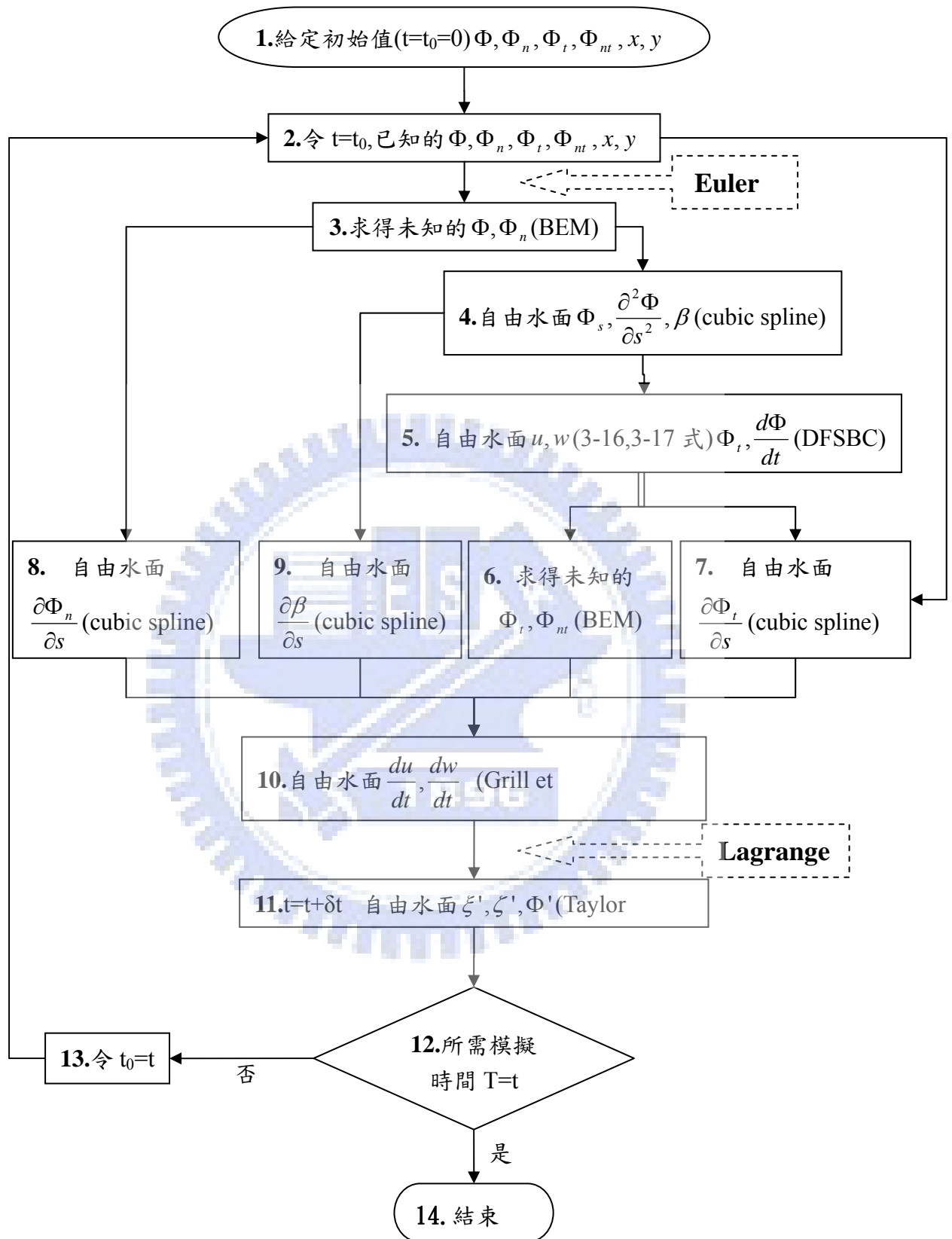
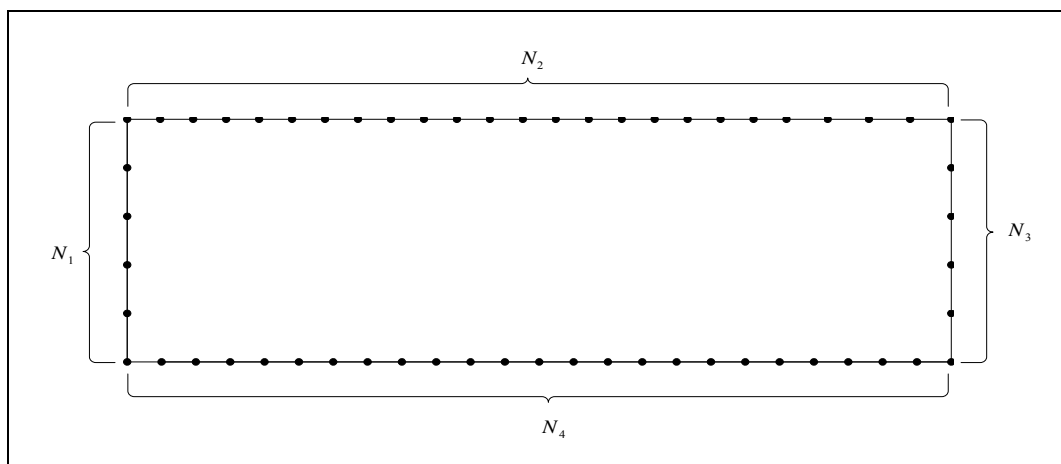
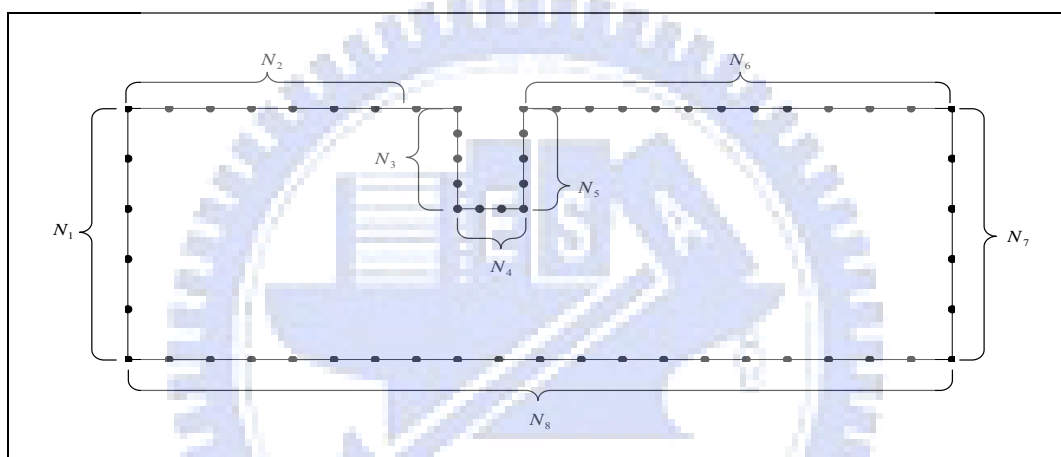


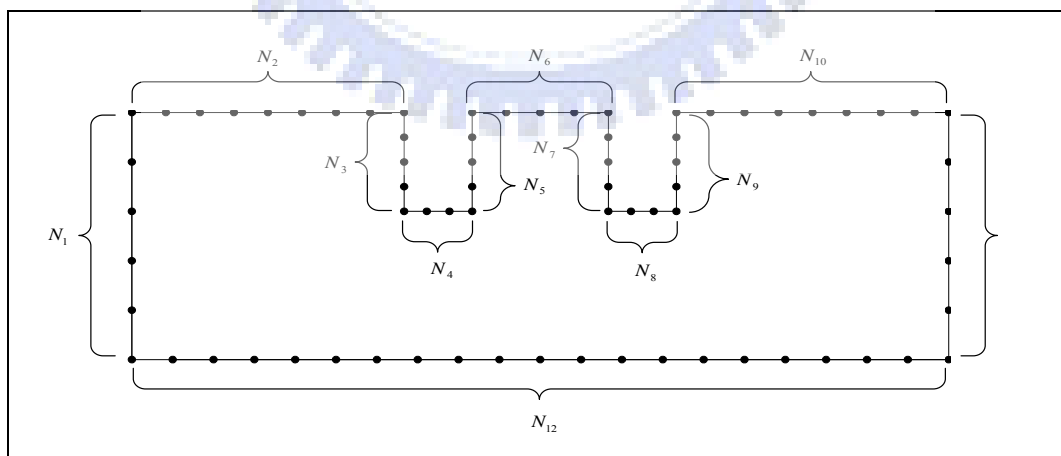
圖 3-2 模式之整個系統的計算流程



(a) 純造波水槽



(b) 內置單一穿入式防波板之水槽



(c) 內置兩平行穿入式防波板之水槽

圖 3-3 各邊界線上節點設置分布圖

## 第四章 結果與討論

本文主要是探討造波水槽內設置穿入式防波板之後，改變入射波之相對水深  $kh$  及尖銳度  $H/L$  與穿入式防波板的沒水深度  $d$ 、寬度  $b$ 、傾斜角度  $\theta$ 、兩防波板間距  $q$ ，針對波浪通過穿入式防波板的透射率之影響進行分析討論。本文利用邊界元素法發展一數值模式，模擬直推式造波水槽所造出之非線性 Stokes 波通過防波板後的波形變化。首先計算非線性波通過防波板後，其水位隨時間的變化，並利用快速傅立葉轉換(FFT)求得各頻成分波的波高及能量，分析討論在不同條件之入射波與改變穿入式防波板條件的情況下，波浪通過防波板之後的透射率變化。本文的數值模式在時間領域下計算，時間間距  $\delta t$  切割愈細微則能增加其穩定度及精確性，而元素長度大小  $\delta s$  愈細微則愈能提升精確性。本研究的數值計算裡，計算元素大小約為一個波長 30 點 ( $L/30$ )，時間間距為一週期 128 點 ( $T/128$ )，庫倫數(Courant number)控制在 0.275~0.337 之間。根據不同入射波與防波板條件之情況之下，每經過 1~32 個時間間隔便加入平滑技巧(Smoothing Technique)(附錄 D)，以提升模式的穩定性。

### 4-1 造波模式之驗證

在非線性數值水槽的驗證中，計算領域為尚未設置防波板之水槽，水槽右方邊界為輻射邊界條件，而該邊界條件為線性條件，無法完全滿足非線性之需求，仍會產生些微的反射波，因此在輻射邊界前方設置海綿層，用以消減波浪的能量並降低末端引起之反射(Ohyama and Nadaoka, 1991)。

根據 Ohyama 和 Nadaoka (1991)利用線性波來針對各種類型的海

綿層所做的反射率數值研究結果，假設海綿邊界的寬度小於等於一個波長，海綿的阻滯係數 $\mu$ 呈線性變化，海綿層起始端之阻滯係數 $\mu=0$ ，海綿層末端之阻滯係數 $\mu_{\max}=C\sqrt{g/h}$ 時，結果顯示係數 $C=0.2\sim 0.6$ 均能有效的減少反射波。依據此結果，本研究採用海綿寬度等於 3 倍波長，假設阻滯係數呈線性變化，分別使用 $C=0.1$ 、 $C=0.2$ 、 $C=0.3$ 與 $C=0.4$ 四組不同的係數來試驗。測試的水槽總長度(包含海綿層長度)為 10 倍波長，靜水深 $h=1.0\text{m}$ ，在相對水深 $kh=1.0$ 與波浪尖銳度 $H/L=0.04$ 之波浪條件下，入射波經過 40 個週期模擬後，擷取水槽中之自由水面波形與 Fenton(1985)所提出的 Stokes 五階理論波形相互比較，如圖 4-1.1 顯示開始造波後，經過長時間的模擬，當假設阻滯係數 $C=0.1$ 之情況下，其數值模擬波形與理論值有些微差距，表示有反射之現象。當假設 $C=0.3$ 與 $C=0.4$ 之情況下，水面波形則皆與 Stokes 理論波形相當接近，表示消波效果非常理想。

另外，在測試不同長度之海綿層的消波效果時，為了使每個測試之間有較明顯的區別，故以相同之海綿係數 $C=0.2$ ，分別配合海綿層長度為 1 倍、2 倍、3 倍與 4 倍波長進行測試，未含海綿層之水槽長度均為 6 倍波長，入射波條件為 $h=1.0\text{m}$ ， $kh=1.0$ ， $H/L=0.05$ ，經過 40 週期模擬後，擷取穩定之自由水面波形與 Stokes 五階理論波形比較，如圖 4-1.2 顯示海綿長度為 1 倍波長時，其自由水面波形無法非常吻合理論波形，而海綿長度增加為 2~4 倍波長時，則有理想的消波效果。

本模式分別比較消除造波板所產生之二階自由波與包含此二階自由波的自由水面波形。如圖 4-1.3 所示，水槽總長度為 10 倍波長，其中末端的海綿層長度為 3 倍波長，造波條件為 $h=1.0\text{m}$ ， $kh=0.8$ ，

$H/L=0.03$ ，擷取起始造波後穩定的第 40 周期之自由水面波形來做比較。圖 4-1.3(a)顯示該波形並不是常數值波形(Constant wave form)，表示其中包含了自由波，而圖 4-1.3(b)為消除自由波之自由水面波形，如圖所示該波形為常數值波形，表示已達到消除自由波之作用，證實消除二階自由波之必要性與可行性。

關於數值模擬過程中之質量守衡方面，如圖 4-1.4 質量與時間之關係圖顯示，在海綿長度為 3 倍波長，配合係數  $c=0.4$  之條件下，整個造波過程中，造波模式的總質量(M)和初始質量(M\*)的比值皆趨近於 1。在能量守衡方面，如圖 4-1.5 能量變化與時間之關係圖顯示水槽中之總位能(Total Potential Energy)、總動能(Total Kinetic Energy)與總能量(Total Energy)於造波起始後之 10 週期內隨時間逐漸增加，波形穩定之後的總位能、總動能與總能量亦達到穩定之狀態(能量的定義與推算，附錄 E)，顯示本研究之數值模式具準確性。

本研究中透射率的計算方法是紀錄穿入式防波板後適當位置的斷面水位變化情形，截取波形穩定後 4 個週期的波高資料作 FFT 分析，取頻率為  $\omega$ 、 $2\omega$  之入射波及透射波的振幅  $a_i^1$ 、 $a_i^2$  與  $a_T^1$ 、 $a_T^2$ ，則透射率  $T$  可由下式推求：

$$T = \frac{\sqrt{a_T^{1^2} + a_T^{2^2}}}{\sqrt{a_i^{1^2} + a_i^{2^2}}} \quad (4-1)$$

在(4-1)式中，透射波的振幅  $a_T^1$ 、 $a_T^2$  是由 FFT 計算求得，如圖 4-1.6(a) 為振幅頻譜圖，圖 4-1.6(b)為能量頻譜圖。

## 4-2 波浪通過穿入式防波板模式之驗證

關於波浪通過穿入式防波板的探討中，本研究與 Wiegel (1960) 的實驗數據相互比較來驗證本文數值模式之正確性。在 Wiegel 實驗的佈置方面，其波源為造波機，波浪水槽全長為 32.2 m，寬為 0.3 m，高 0.91 m，淨水深  $h=0.466$  m，水槽中設置一垂直自由水面的薄板，薄板之相對寬度  $b/h=0.1$ ，實驗之造波條件是波浪週期 0.95 秒配合尖銳度  $H/L$  分別為 0.082、0.022 及 0.011 與波浪週期 1.5 秒配合尖銳度  $H/L$  分別為 0.0244、0.0172 及 0.0105。如圖 4-2.1、圖 4-2.2 與表 4-1 顯示相同波浪條件之情況下，透射率與防波板之沒水深度的關係，由圖可以觀察出本模式計算之非線性波結果與實驗結果有相同的趨勢，波浪尖銳度越大則透射率越低，且透射率隨著防波板之沒水深度增加而降低，線性波結果亦有此趨勢。另外，由圖 4-2.1 與圖 4-2.2 亦能觀察出本模式之透射率結果較 Wiegel 的實驗值略大，其原因可能為現實的流體具有黏滯性，且實際上的底床與防波板皆存在摩擦力，而本模式並未考慮上述因素的影響。

關於波浪通過兩穿入式防波板的探討中，本研究與吳和劉 (1988) 的數值結果相互比較。在水槽的佈置方面，靜水深  $h=1$  m，第一面防波板的沒水深  $d_1/h=0.2$ ，寬度  $b_1/h=0.5$ ；第二面防波板的沒水深  $d_2/h=0.3$ ，寬度  $b_2/h=0.4$ ，兩板間距  $q/h=0.6$ 。圖 4-2.3 在相同的防波板條件下，利用數值造波水槽的方式固定入射波尖銳度分別為  $H/L=0.03$  與  $H/L=0.02$ ，探討相對水深  $kh$  與透射率的關係，並將結果與吳和劉的數值結果相互比較。由圖 4-2.3 中顯示本數值計算結果與吳和劉的數值結果有相似的趨勢，波浪通過防波板後的透射率在  $kh=1.0\sim 3.0$  間先升高而後迅速遞減。由圖中亦顯示出本模式以非線性波理論所模擬之透射率較吳和劉的數值結果小，其原因是當非線性波



之尖銳度愈大時，其非線性效應愈大，而對應的透射率則愈低。

### 4-3 波浪通過單一穿入式防波板之模擬

要瞭解波浪通過穿入式防波板後的變形，反射率與透射率為兩個重要的參考指標，因此本研究針對波浪通過防波板之透射率做分析討論。波浪的尖銳度  $H/L$ 、相對水深  $kh$ 、防波板的沒水深度、防波板的寬度及防波板傾斜的角度對透射率及波浪達到穩定時間都會有不同的影響。

圖 4-3.1 為非線性波通過單一防波板之自由水面波形隨時間之變化圖，如圖顯示在波浪條件  $h=1.0\text{m}$ 、 $kh=1.25$ 、 $H/L=0.04$  與防波板條件  $b/h=0.2$ 、 $d/h=0.4$  且造波板離穿入式防波板的水平距離為 12 倍波長之情況下，約略在第 32 週期後，防波板後方的自由水面便達到穩定。然而，如圖 4-3.2 所示波浪傳至防波板後產生反射，此反射波傳回造波板後，經由造波板再反射，即為造波板的二次反射。此部分研究設定造波板與防波板的距離為 12 倍波長，故二次反射通過防波板的時間點大約在第 36 週期後。配合不同條件之波浪達到穩定所需的模擬時間，此部分研究擷取約 32 週期至 36 週期之穩定波高資料作頻譜分析。圖 4-3.3 所示為在長度為 10 倍波長之數值水槽裡，模擬波浪通過傾斜角度  $\theta=60^\circ$  之單一穿入式防波板，波浪達到穩定後，第 14 個週期裡不同時間點的自由水面溯上剖面圖。

#### 1. 相對水深 $kh$ 對波浪透射率的影響

固定穿入式防波板及數值水槽之幾何形狀，僅改變相對水深  $kh$ ，配合尖銳度  $H/L$  分別為 0.02、0.03 與 0.04 進行模擬，結果如圖 4-3.4 所示，在固定波浪尖銳度情況下，在相對水深  $kh$  愈大之情況下，則

通過防波板的透射波高愈小，非線性效應也愈弱，所以非線性波在通過穿入式防波板後之透射率隨著相對水深  $kh$  的增加而呈現逐漸降低之趨勢。

## 2. 尖銳度 $H/L$ 對波浪透射率的影響

若僅改變波浪的尖銳度  $H/L$ ，並固定數值水槽與穿入式防波板之幾何形狀  $b/h=0.2$ 、 $d/h=0.4$ ，配合相同的相對水深  $kh=1.0$ ，以線性波理論求得之透射率  $T=0.7936$ ，再依相同的條件進行非線性波之模擬，模擬結果如圖 4-3.5 所示，透射率隨著波浪尖銳度增加而降低，其原因是入射波通過防波板之後，波高愈高之波浪非線性效應愈明顯，使得高頻波能量所佔的比率逐漸變大而主頻波能量逐漸減小，如(4-1)式，主頻波振幅  $a_T^1$  減小，而高頻波振幅  $a_T^2$  增加，而  $a_T^1$  遠大於  $a_T^2$ ，因此透射率  $T$  則逐漸遞減。

## 3. 防波板寬度 $b$ 對波浪透射率的影響

僅考慮改變單一垂直防波板之寬度  $b=0.125L \sim 1.125L$ ，固定非線性波條件及水槽之幾何形狀，並以線性波在相同波浪與防波板條件下所求得的透射率做比較，模擬結果如圖 4-3.6 所示，透射率隨著防波板寬度增加而降低，線性波亦有相同之趨勢。另外，由圖可觀察出當寬度  $b$  約小於 0.6 倍波長時，以非線性波理論求得之透射率較線性波理論所求得之透射率小；而當寬度  $b$  約大於 0.6 倍波長時，以非線性波理論求得之透射率較線性波理論所求得之透射率大。

## 4. 防波板之沒水深度 $d$ 對波浪透射率的影響

僅考慮改變單一垂直防波板之沒水深度  $d=0.2h \sim 0.8h$ ，固定防波板寬度，並配合  $kh=1.0$ 、 $1.5$  與  $2.0$  進行模擬，且與相同條件下之線性波所求得的透射率做比較，結果如圖 4-3.7 所示，波浪通過防波板之

透射率隨著沒水深度的增加而降低，線性波之趨勢亦同。另外由圖可觀察出防波板沒水深度較淺之情況下，線性波的透射率大於非線性波之透射率，沒水深度較深時則兩者較為接近，其原因應為防波板深度愈深之情況下，透過波愈小並且愈近似線性波。

#### 5. 防波板之傾斜角度 $\theta$ 對波浪透射率的影響

以相同波浪尖銳度，在 $kh=0.75$ 、 $1.0$ 、 $1.25$ 與 $1.5$ 之波浪條件下，固定防波板的中心點，轉動防波板，傾斜角度 $\theta$ 定義為正 $z$ 軸與防波板之夾角，順時針為正，垂直擺置時之角度 $\theta=0^\circ$ ，控制 $\theta=-45^\circ\sim 45^\circ$ 進行模擬。結果如圖 4-3.8 所示，不同條件波浪的透射率情形皆有約略相同的趨勢，隨著防波板傾斜的角度越大，波浪沿著防波板溯上的高度愈高，反射波亦愈大，因此透射率愈小。由圖亦可以觀察出當傾斜角度為正 $\theta$ 值時，波浪得以沿著穿入式防波板溯上，並形成較大的反射波，當 $\theta$ 為相同角度之負值時，則較無法沿著防波板溯上，形成的反射波亦較小，故其透射率較當 $\theta$ 為相同角度之正值時為大。

### 4-4 波浪通過兩平行防波板之模擬

當入射波的波長遠大於穿入式防波板寬度之情況，會使得防波效果消失，為了增強防波效果，因而發展出設置兩個平行穿入式防波板的方式。當數值水槽置入兩平行防波板後，波浪到達穩定所需的模擬時間也相對增加，因此必須增加水槽長度，以延後二次反射發生的時間。圖 4-4.1 為非線性波通過兩平行穿入式防波板之自由水面波形隨時間變化圖，如圖顯示在波浪條件 $h=1.0\text{m}$ 、 $kh=1.5$ 、 $H/L=0.04$ 與防波板條件 $b/h=0.2$ 、 $d/h=0.4$ 、兩板間距 $q/L=1.175$ 且造波板離穿入式防波板的水平距離為 14 倍波長之情況下，波浪約略在第 35 週期後便

達到穩定。此部分研究設定造波板與防波板的距離為 14 倍波長，故二次反射通過防波板的時間點大約在第 42 週期後。配合不同條件之波浪達到穩定所需的模擬時間，此部分研究擷取約 38 週期至 42 週期之穩定波高資料做頻譜分析。圖 4-4.2 所示為在長度為 12 倍波長之數值水槽裡，模擬波浪通過傾斜角度  $\theta=60^\circ$  之兩穿入式防波板，波浪達到穩定後，第 18 個週期裡不同時間點的自由水面溯上剖面圖。

### 1. 相對水深 $kh$ 對波浪透射率的影響

固定數值水槽與防波板之幾何形狀，分別以尖銳度  $H/L$  為 0.02、0.03 與 0.04 之波浪條件，僅改變相對水深  $kh$  進行模擬。結果如圖 4-4.3 所示，波浪通過兩平行防波板時之透射率與  $kh$  關係與通過單一防波板時有相同的趨勢，在相同尖銳度條件下，其透射率隨著相對水深  $kh$  的增加而降低，由圖亦可觀察出波浪經過兩平行穿入式防波板阻擋之後，其透射率較僅通過單一穿入式防波板時為低。

### 2. 尖銳度 $H/L$ 對波浪透射率的影響

若僅改變尖銳度，固定防波板之幾何條件  $b/h=0.2$ 、 $d/h=0.4$  與兩板間距  $q/L=0.675$ ，在相對水深  $kh=1.0$  之情況下，由線性波理論求得之透射率  $T=0.9548$ ，再以相同的條件進行非線性波之模擬，模擬結果如圖 4-3.4 所示，在非線性波通過兩平行防波板之情況下，波浪通過兩防波板時受到的阻擋較通過單一防波板時多，形成的反射波也較大，故透射率較僅通過單一防波板時為低，但是其透射率趨勢亦為隨著尖銳度的增加而遞減。

### 3. 兩防波板之間距 $q$ 對波浪透射率的影響

波浪通過兩平行防波板的透射率會隨著防波板之間距改變而有所不同，透射率隨著間距的增長而呈現類似周期性的變化，並在特定

的間距情況下，波浪在兩平行防波板之間會產生共振，造成極高的透射率。若僅考慮改變兩板間距，固定波浪條件與防波板之寬度與沒水深進行模擬，並且與線性波情況下之透射率作比較。結果如圖 4-4.4 非線性波與線性波結果相互比較，雖然相位上有些許差異，但是仍有相同的趨勢。圖 4-4.5 為藉由分析圖 4-4.4，討論在最小透射率之情況下，相對水深  $kh$  與兩板間距  $q/L$  之關係。如圖所示，隨著相對水深的增加，造成最低透射率的兩板間距愈小。

#### 4. 兩防波板之沒水深度對透射率的影響

根據先前單一防波板模擬結果得知，波浪透射率隨著防波板之沒水深度增加而降低。在此考慮改變兩沒水深度不同之防波板設置位置前後順序的情況，故進行兩組數值實驗，第一組實驗水槽是使第一面防波板之沒水深為  $d_1/h=0.3$ ，另一防波板之沒水深為  $d_2/h=0.6$ ，第二組實驗則是使第一面防波板之沒水深為  $d_1/h=0.6$ ，另一防波板之沒水深為  $d_2/h=0.3$ ，兩防波板之間距皆為  $q/L=0.425$ ，並在相同波浪條件下進行模擬，圖 4-4.6 所示為兩組實驗在第 42 週期時之自由水面波形，模擬結果第一組實驗與第二組實驗之透射率分別為  $T=0.3073$  與  $T=0.3128$ ，由結果得知改變兩沒水深度不同之防波板設置位置的前後順序，對於透射率的影響有限。

#### 5. 兩防波板之傾斜角度對透射率的影響

由先前單一防波板之模擬結果得知，隨著防波板之傾斜角度愈大，波浪通過防波板之透射率愈低。在此部分僅考慮改變兩平行防波板的傾斜角度，控制兩平行防波板傾斜角度  $\theta_1$  與  $\theta_2 = -45^\circ \sim 45^\circ$ ，分別在兩板間距為  $q=0.35L$  與  $q=0.625L$  情況下，以相同的波浪條件進行模擬，如圖 4-4.7 顯示在兩板間距  $q=0.625L$  之情況下，波浪在兩板之間

產生共振，所以波浪透射率較兩板間距  $q=0.35L$  時為高，但是由圖亦可觀察兩者皆有相同趨勢，即防波板傾斜角度越大，波浪通過防波板的透射率越低。另外，此部分研究中，在兩防波板間距  $q=0.625L$  且防波板傾斜角度  $\theta_1=\theta_2=45^\circ$  的情況下，波浪在溯上過程中發生碎波，故無法計算求得其透射率。

如圖 4-4.8 所示為探討兩防波板之傾斜角度  $\theta_1$  與  $\theta_2$  不相同的情況下，波浪通過兩穿入式防波板之透射率。在此部分進行兩組數值實驗，第一組實驗是固定防波板之傾斜角度  $\theta_1=0^\circ$ ，控制  $\theta_2=-45^\circ \sim 45^\circ$ ，第二組實驗則是固定傾斜角度  $\theta_2=0^\circ$ ，控制  $\theta_1=-45^\circ \sim 45^\circ$ ，兩組實驗在相同波浪條件下進行模擬。模擬結果如圖 4-4.8 所示，透射率在兩穿入式防波板之傾斜角度皆為  $0^\circ$  時最高，隨著增加其中一個穿入式防波板之傾斜角度  $\theta$ ，波浪通過防波板時所形成的反射波愈大，故透射率逐漸遞減。另外，此部分研究中，在防波板傾斜角度  $\theta_1=45^\circ$  配合  $\theta_2=0^\circ$  的情況下，波浪在溯上過程中發生碎波，故無法計算求得其透射率。

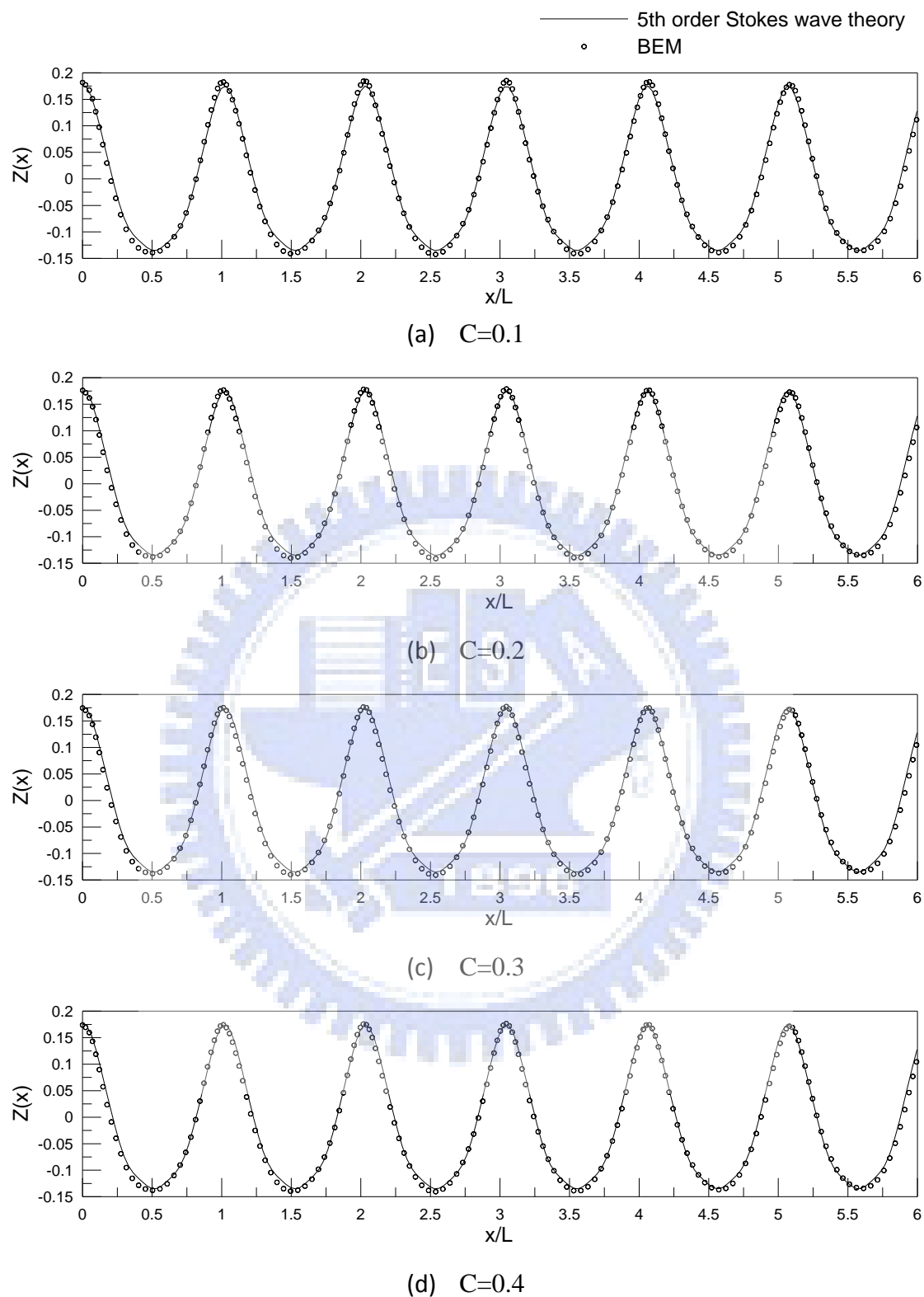
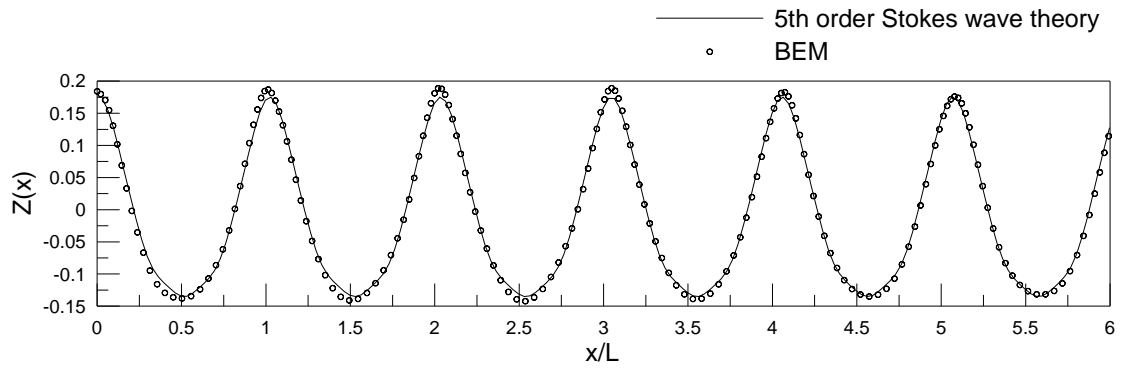
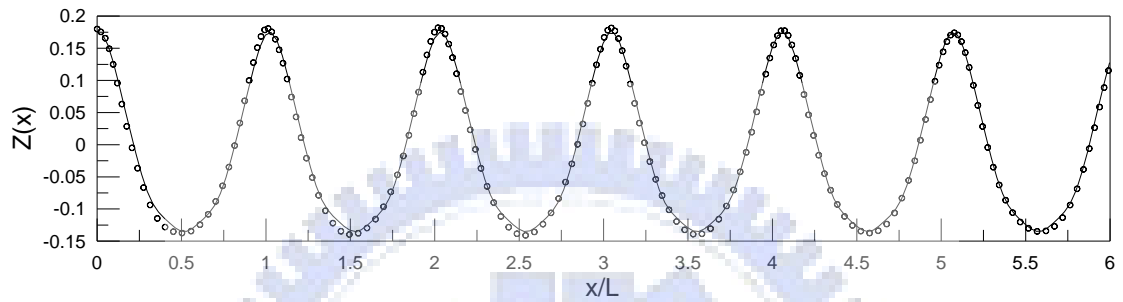


圖 4-1.1 造波模式在不同係數之海綿層情況下與 Stokes 五階波形比較

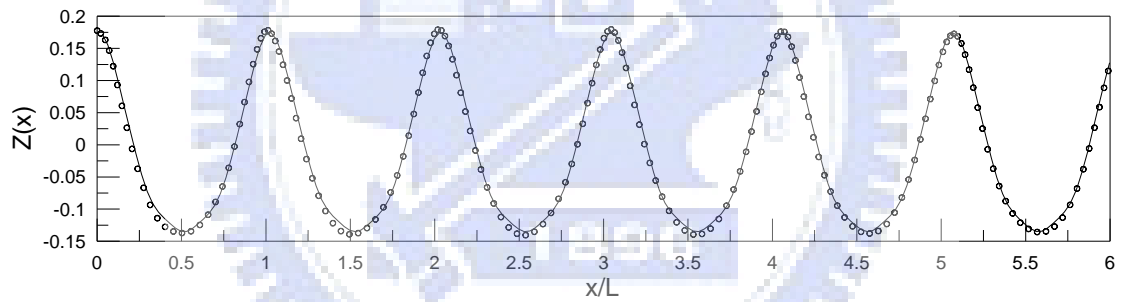
( $h=1.0m$   $kh=1.0$   $H/L=0.05$ )



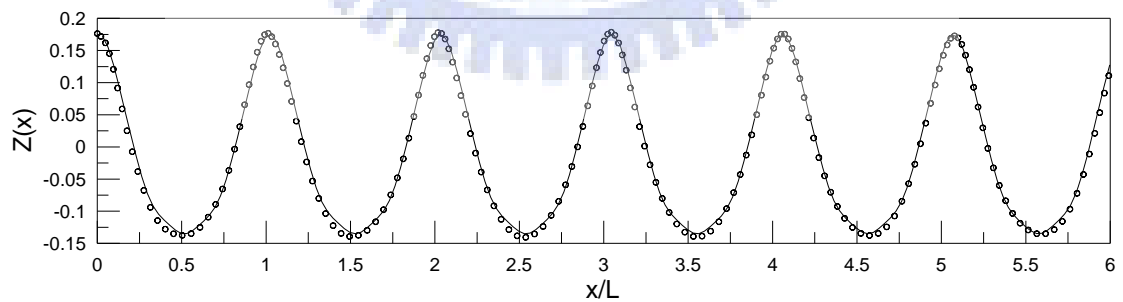
(a) 1 倍波長之海綿層



(b) 2 倍波長之海綿層



(c) 3 倍波長之海綿層

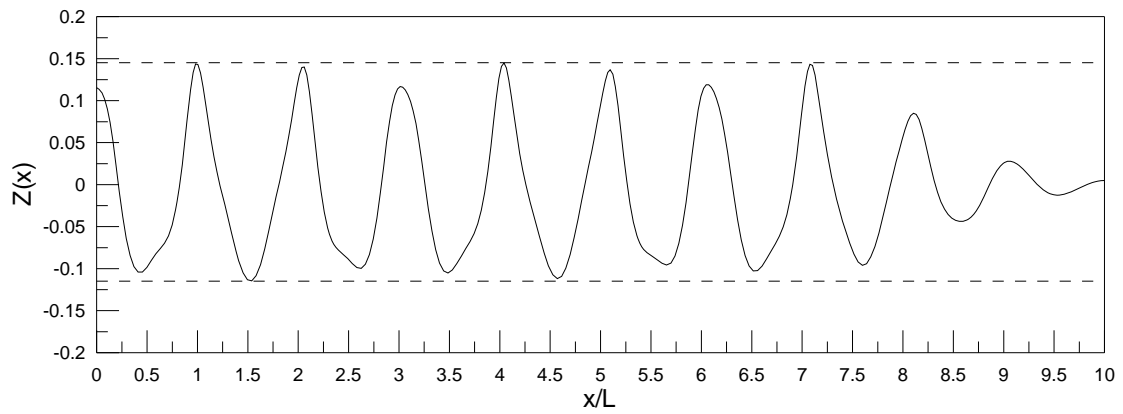


(d) 4 倍波長之海綿層

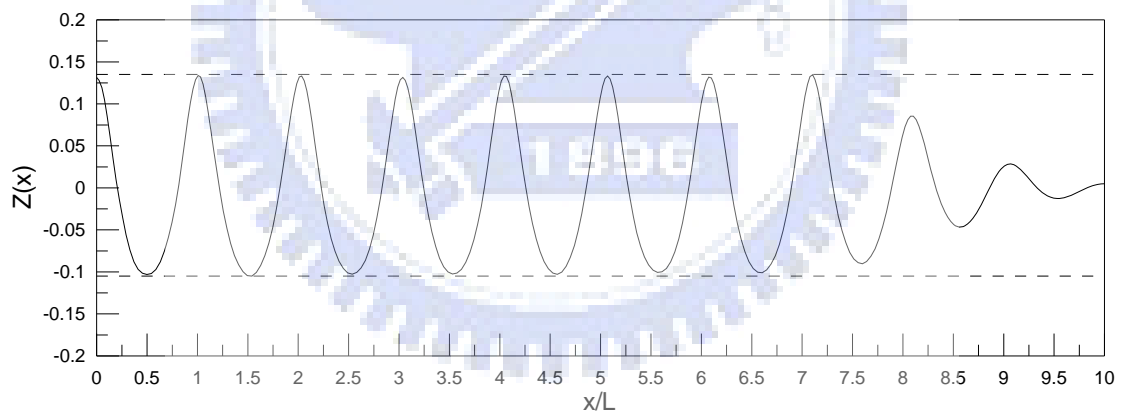
圖 4-1.2 造波模式在不同長度之海綿層情況下與 Stokes 五階

$$(h=1.0m \quad kh=1.0 \quad H/L=0.05)$$





(a) 包含自由波



(b) 消除自由波

圖 4-1.3 消除二階自由波與包含二階自由波之水面波形比較

( $h=1.0\text{m}$   $kh=0.8$   $H/L=0.03$ )

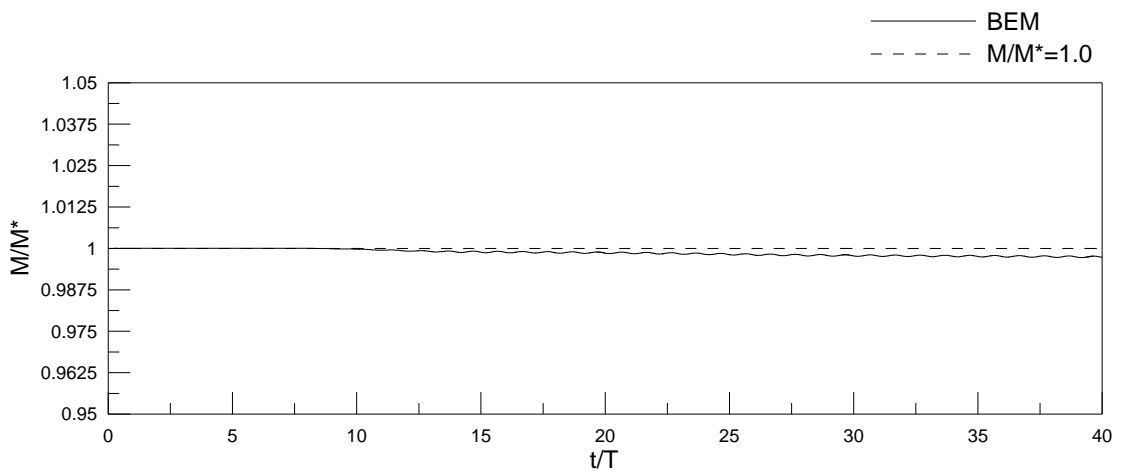


圖 4-1.4 造波模式質量變化與時間之關係圖

( $h=1.0\text{m}$   $kh=1.0$   $H/L=0.03$ )

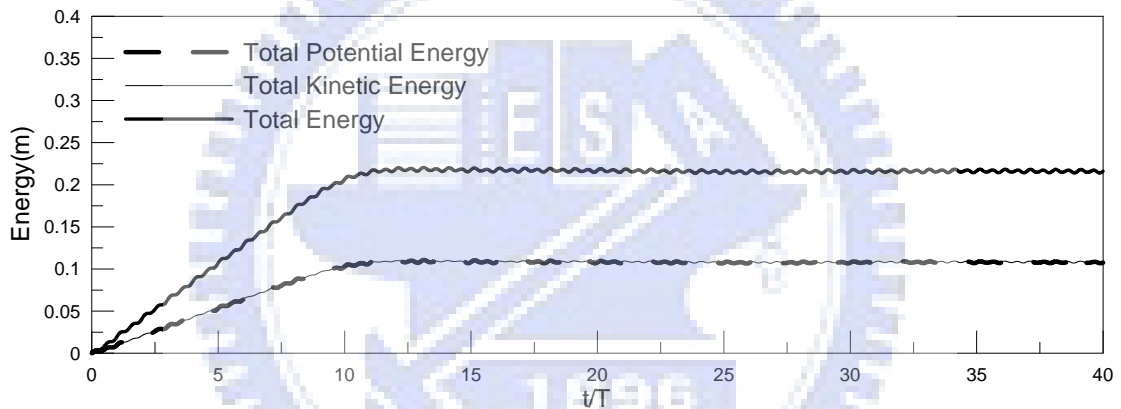


圖 4-1.5 造波模式能量變化與時間之關係圖

( $h=1.0\text{m}$   $kh=1.0$   $H/L=0.03$ )

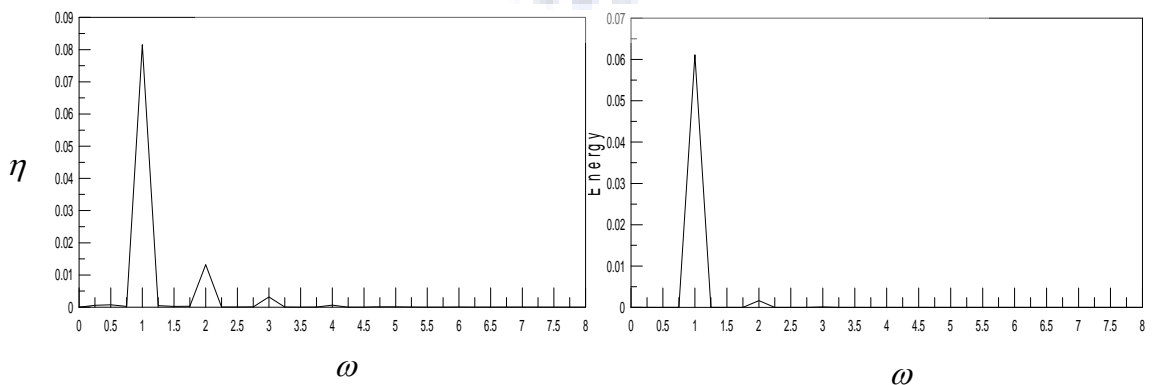
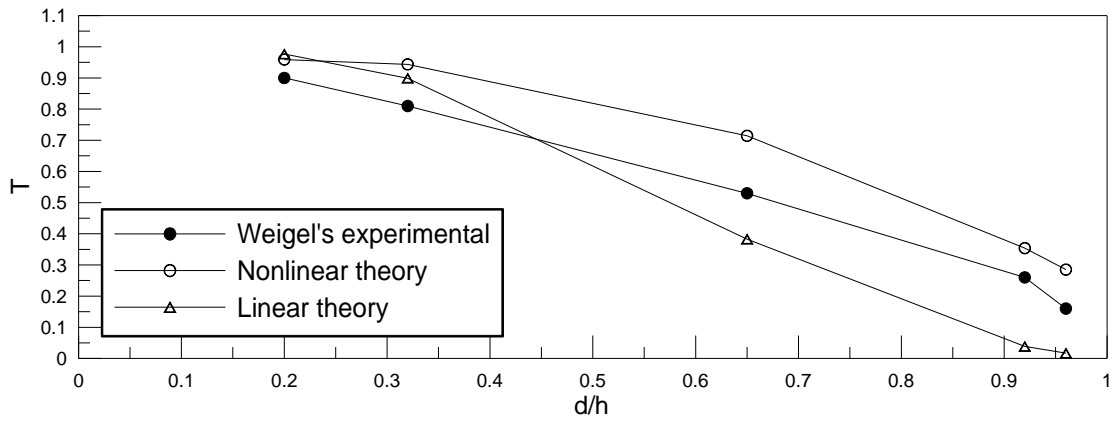


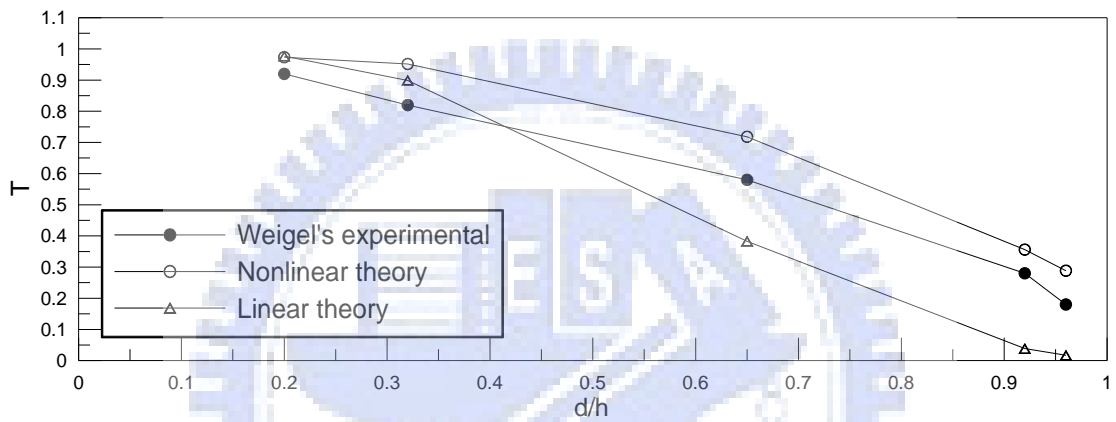
圖 4-1.6(a) 振幅頻譜圖

圖 4-1.6(b) 能量頻譜圖

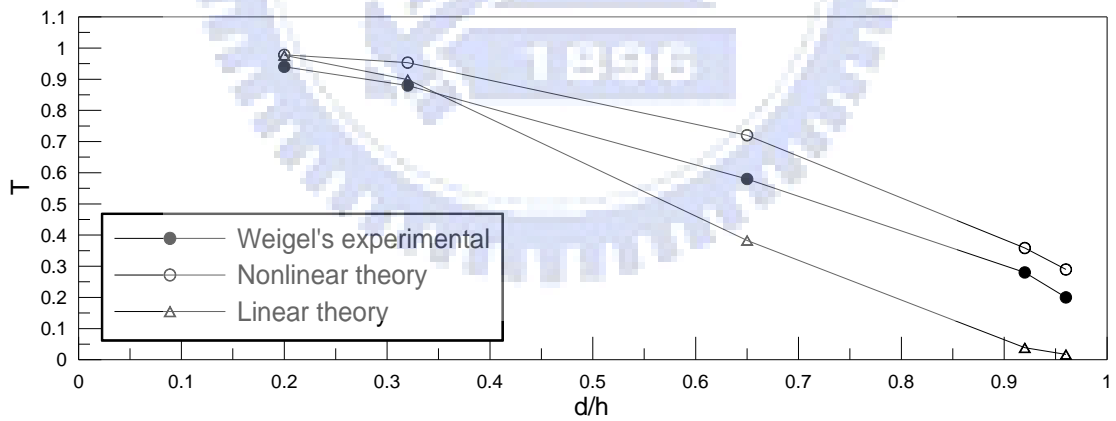
( $h=1.0\text{m}$   $kh=1.0$   $H/L=0.03$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$ )



(a)  $H/L = 0.0105$



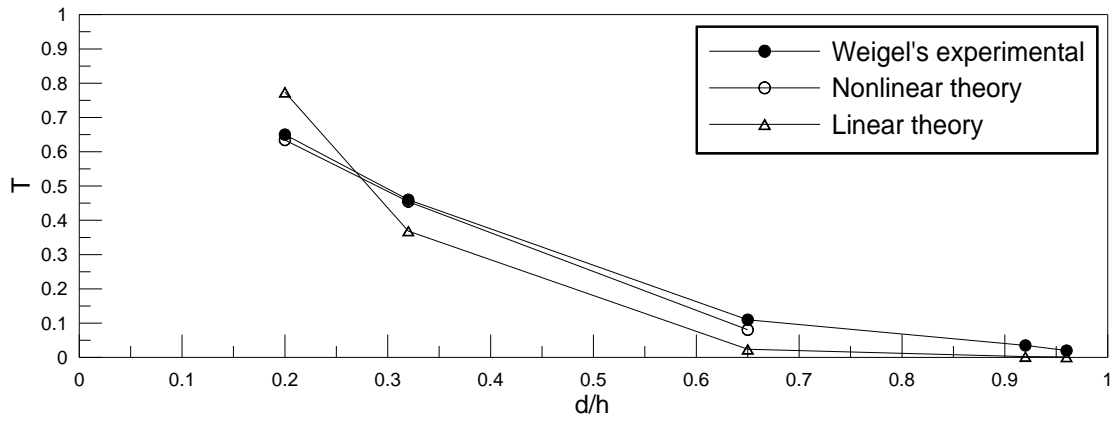
(b)  $H/L = 0.0172$



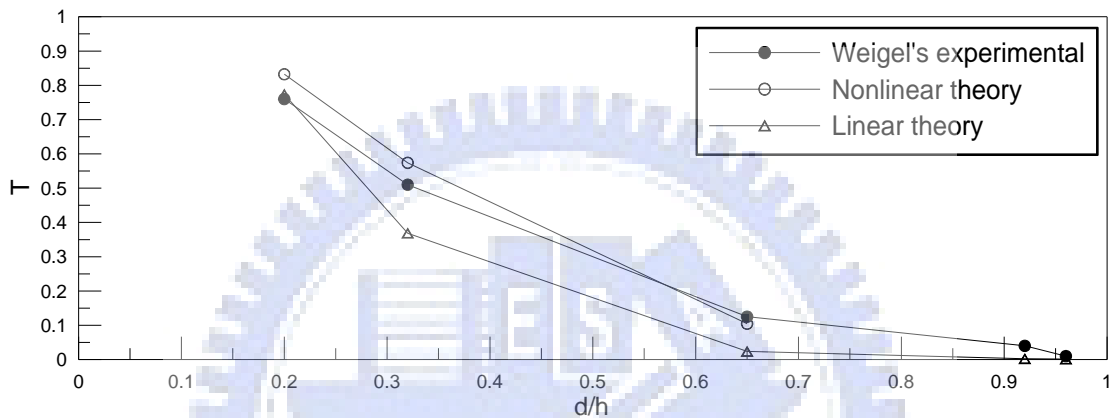
(c)  $H/L = 0.0244$

圖 4-2.1 內置單一防波板之非線性波、線性波與實驗值透射率比較圖

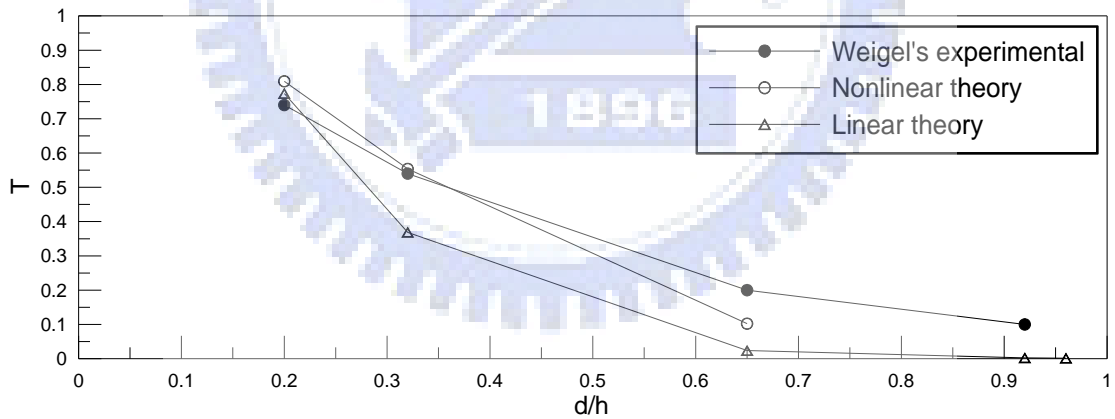
( $h = 0.466m$   $L = 2.743m$   $b/h = 0.1$   $\theta = 0^\circ$ )



(a)  $H/L = 0.011$



(b)  $H/L = 0.022$



(c)  $H/L = 0.082$

圖 4-2.2 內置單一防波板之非線性波、線性波與實驗值透射率比較圖

( $h = 0.466m$   $L = 1.375m$   $b/h = 0.1$   $\theta = 0^\circ$ )

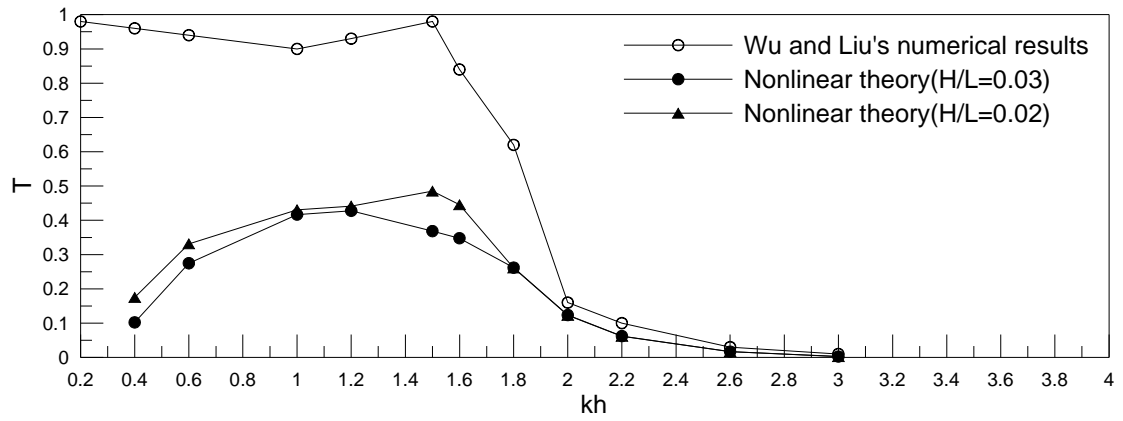


圖 4-2.3 波浪通過兩穿入式防波板之透射率與相對水深關係比較圖

$$(d_1/h=0.2 \quad b_1/h=0.5 \quad d_2/h=0.3 \quad b_2/h=0.4 \quad q/h=0.6 \quad \theta=0^\circ)$$



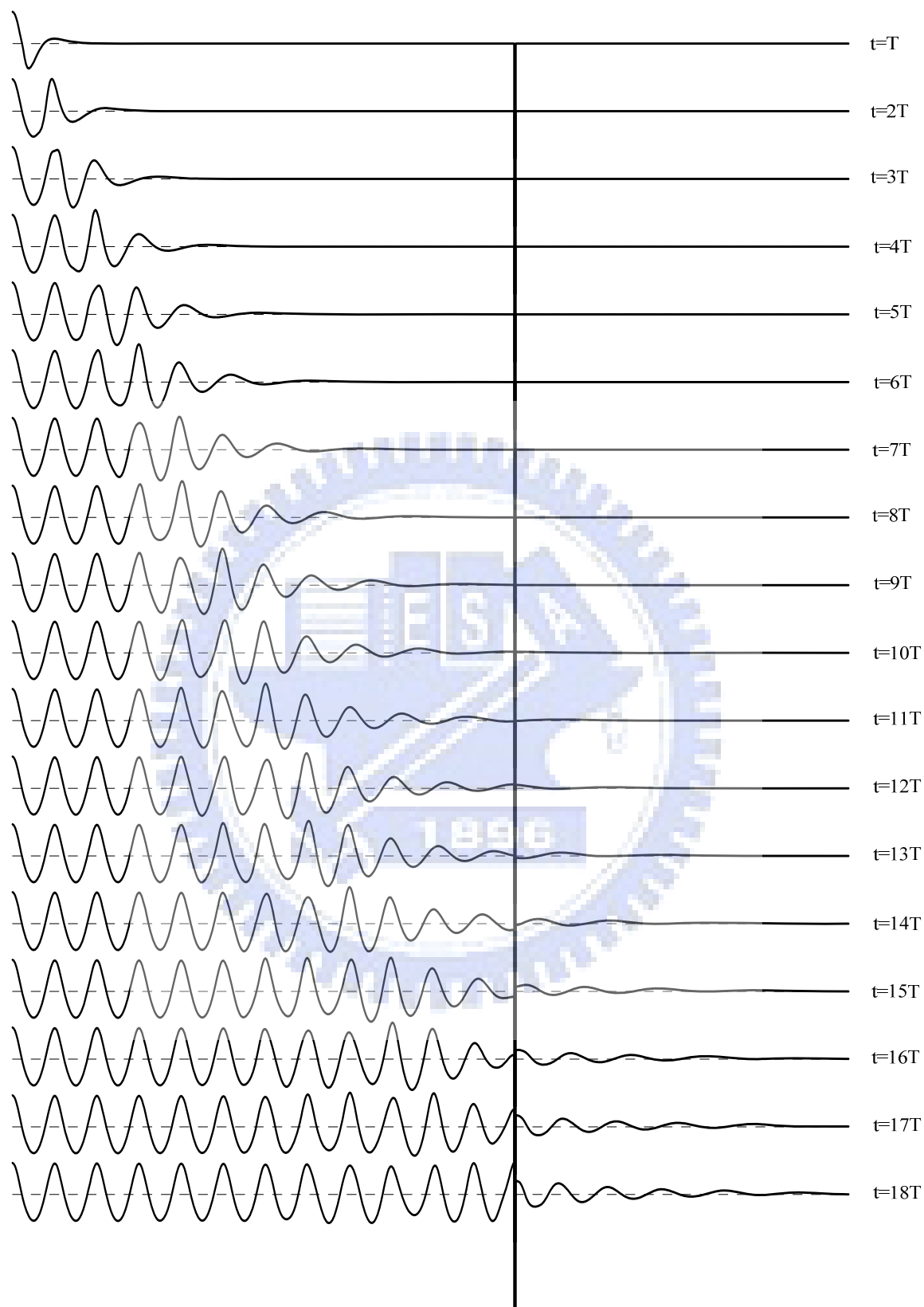


圖 4-3.1(a) 非線性波通過單一垂直防波板之自由水面隨時間變化圖

( $h=1.0m$   $kh=1.25$   $H/L=0.04$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$ )

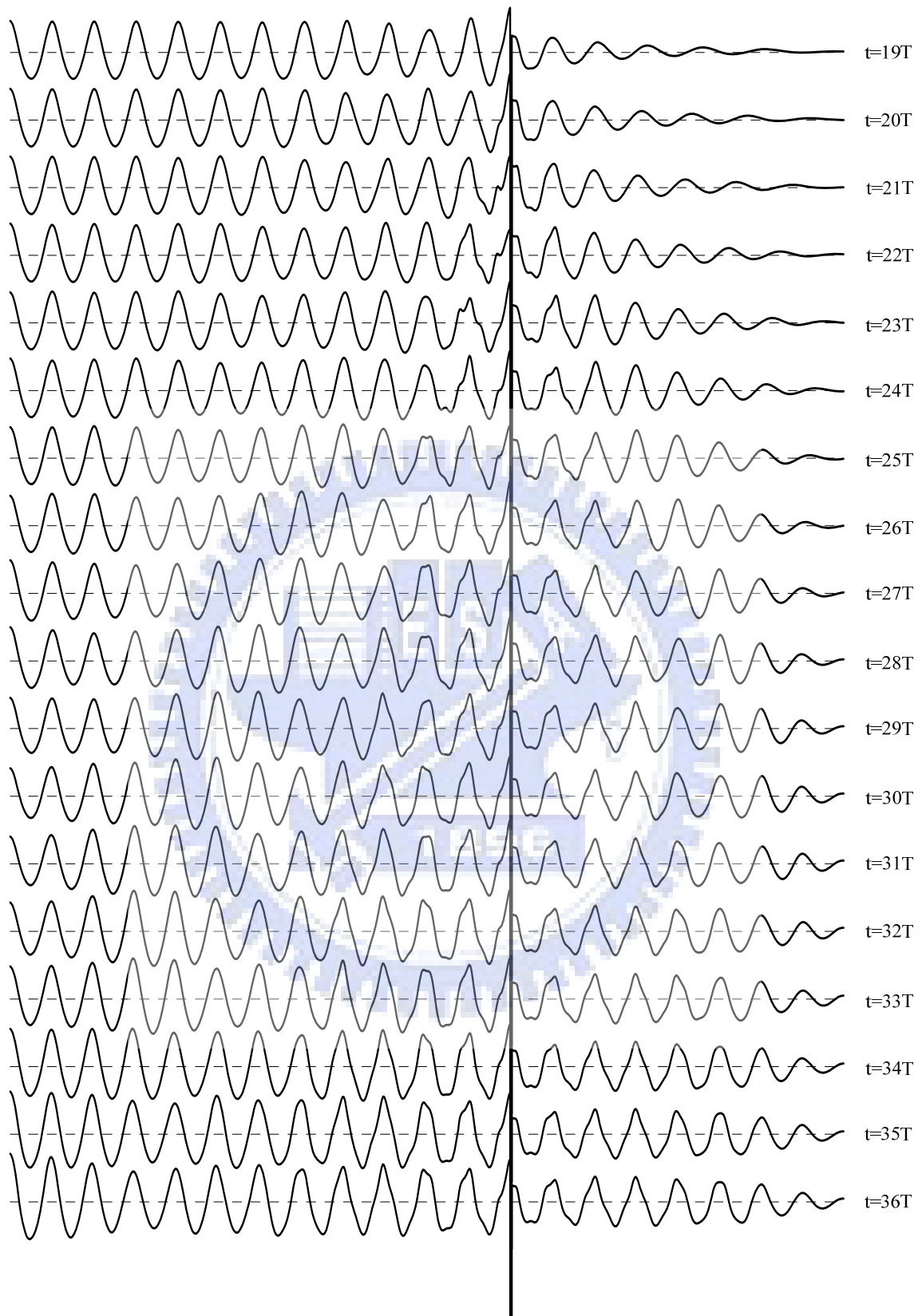


圖 4-3.1(b) 非線性波通過單一垂直防波板之自由水面隨時間變化圖

( $h=1.0m$   $kh=1.25$   $H/L=0.04$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$ )

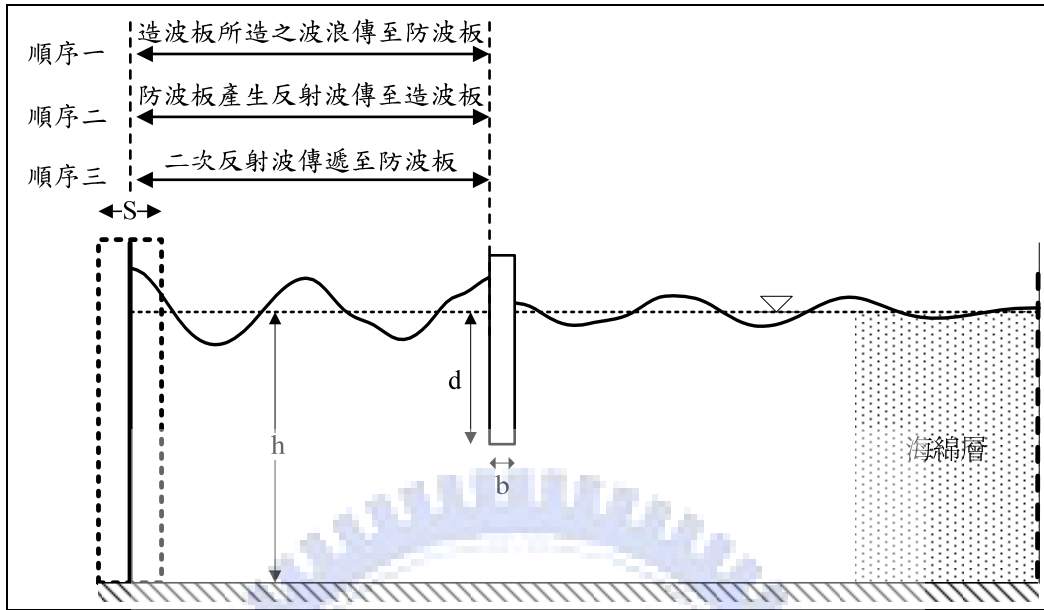


圖 4-3.2 造波板產生二次反射示意圖

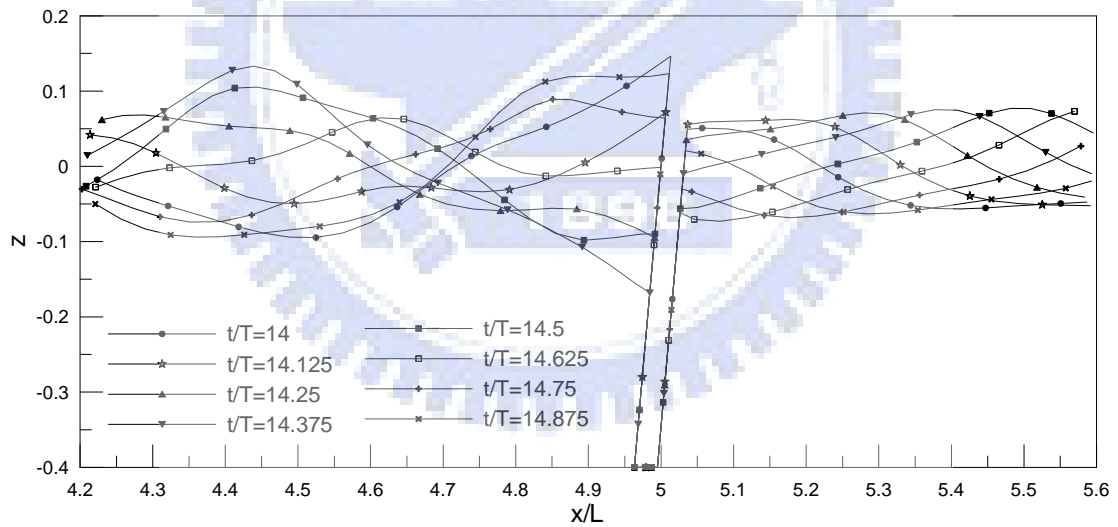


圖 4-3.3 非線性波通過單一防波板剖面圖

$$(kh=1.0 \quad H/L=0.025 \quad d=0.4h \quad b=0.2h \quad \theta=60^\circ)$$



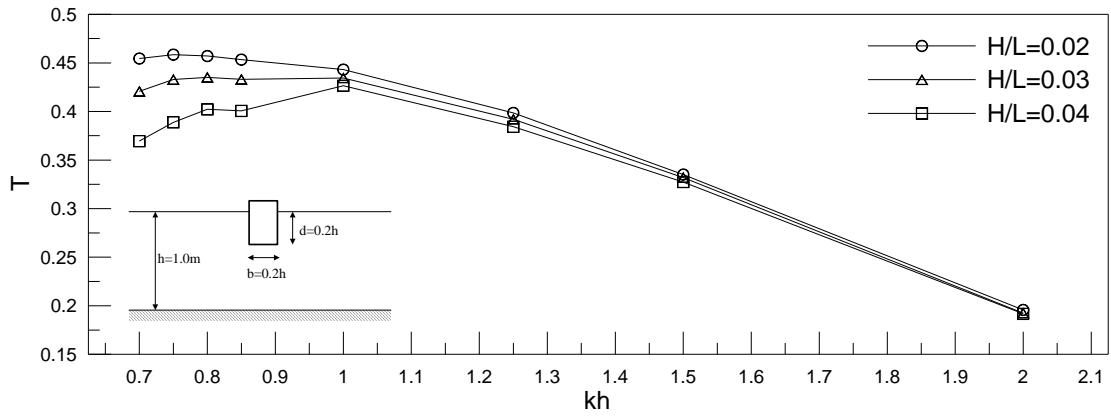


圖 4-3.4 波浪通過單一防波板之透射率與  $kh$  及尖銳度關係圖

$$(h=1.0m \quad b/h=0.2 \quad d/h=0.2 \quad \theta=0^\circ)$$

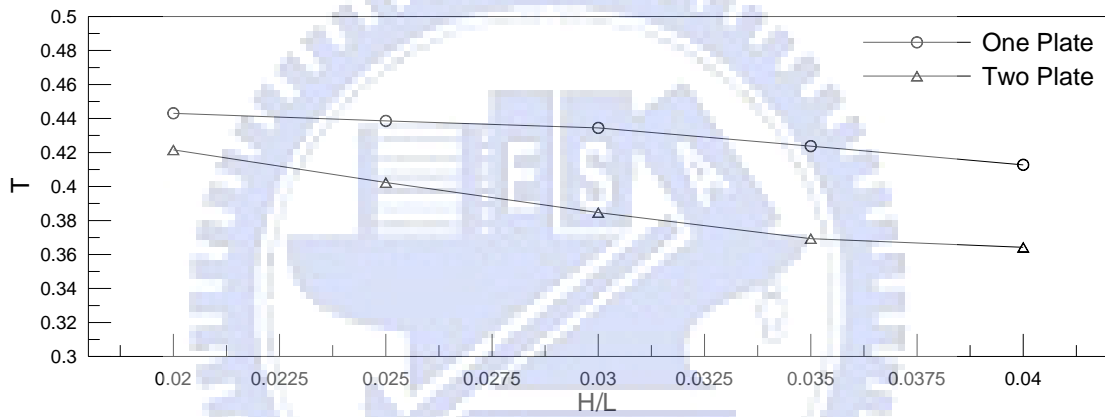


圖 4-3.5 非線性波通過防波板之透射率與尖銳度(H/L)關係圖

$$(h=1.0m \quad b/h=0.2 \quad d/h=0.2 \quad \theta=0^\circ)$$

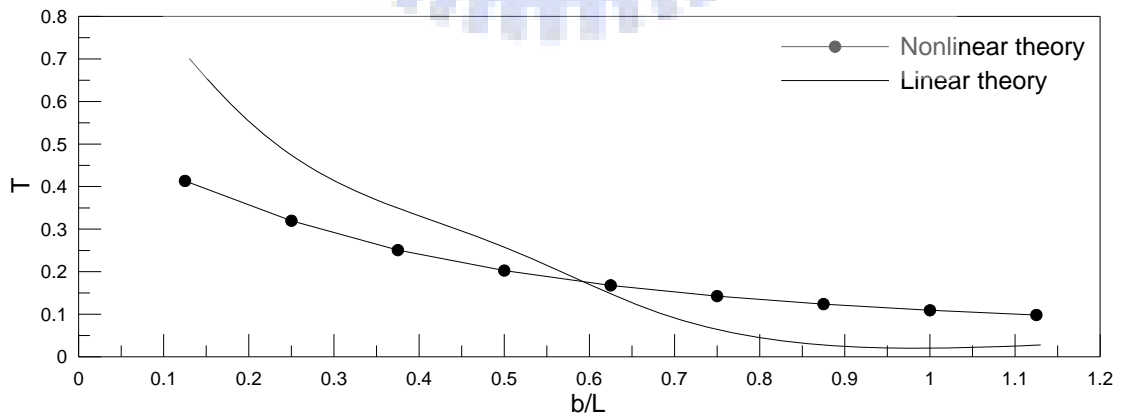
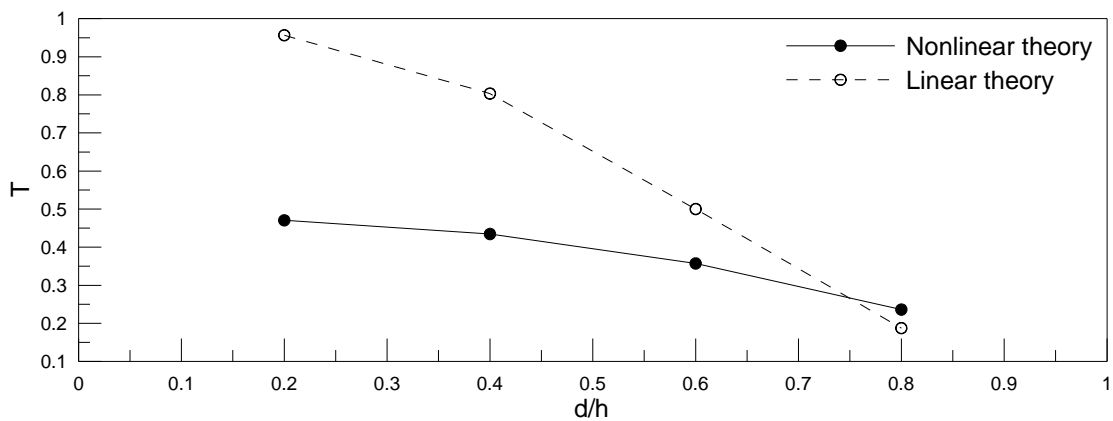
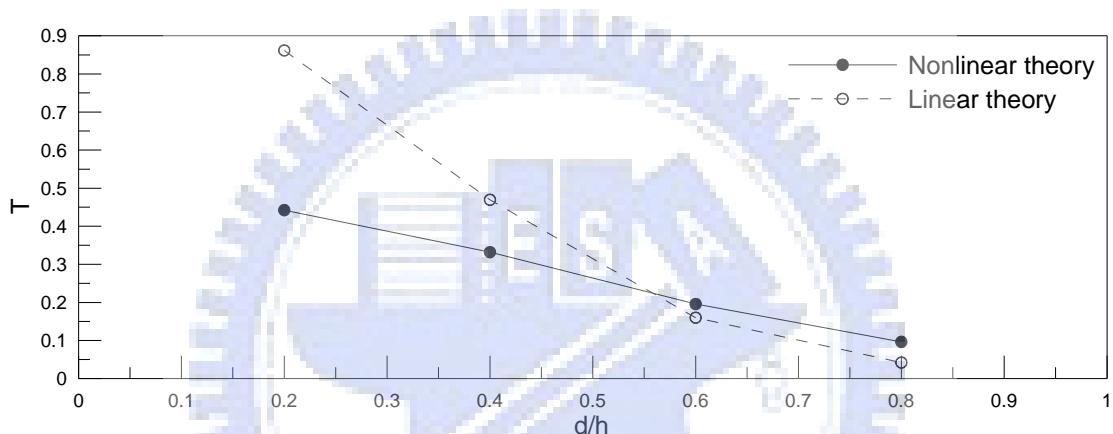


圖 4-3.6 波浪通過單一防波板之透射率與防波板寬度關係圖

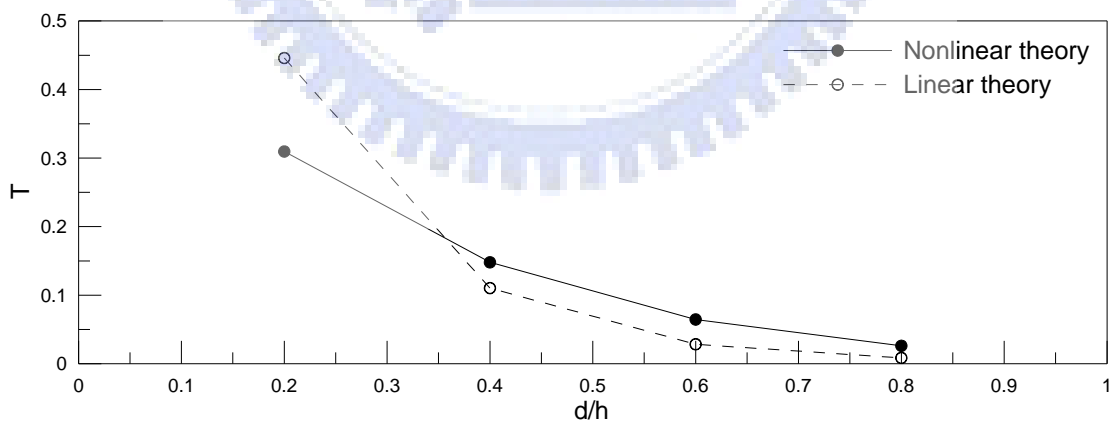
$$(h=1.0m \quad kh=1.0 \quad H/L=0.03 \quad d/h=0.2 \quad \theta=0^\circ)$$



(a)  $kh = 1.0$   $H/L = 0.03$



(b)  $kh = 1.5$   $H/L = 0.03$



(c)  $kh = 2.0$   $H/L = 0.03$

圖 4-3.7 波浪通過防波板之透波率與防波板沒水深度關係圖

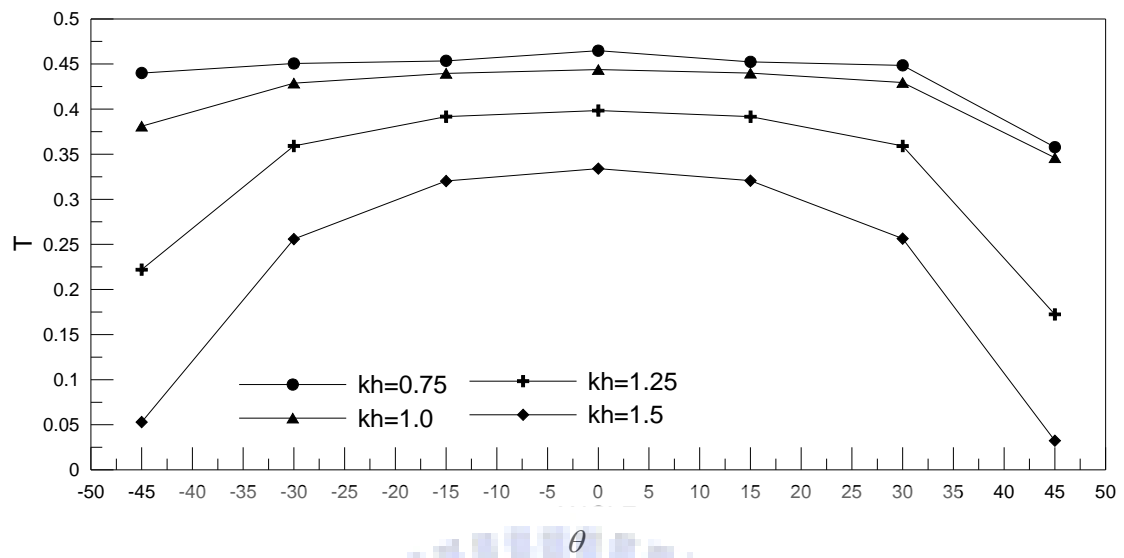


圖 4-3.8 非線性波通過單一防波板之透射率與防波板傾角關係圖

( $h=1.0m$   $H/L=0.02$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$ )



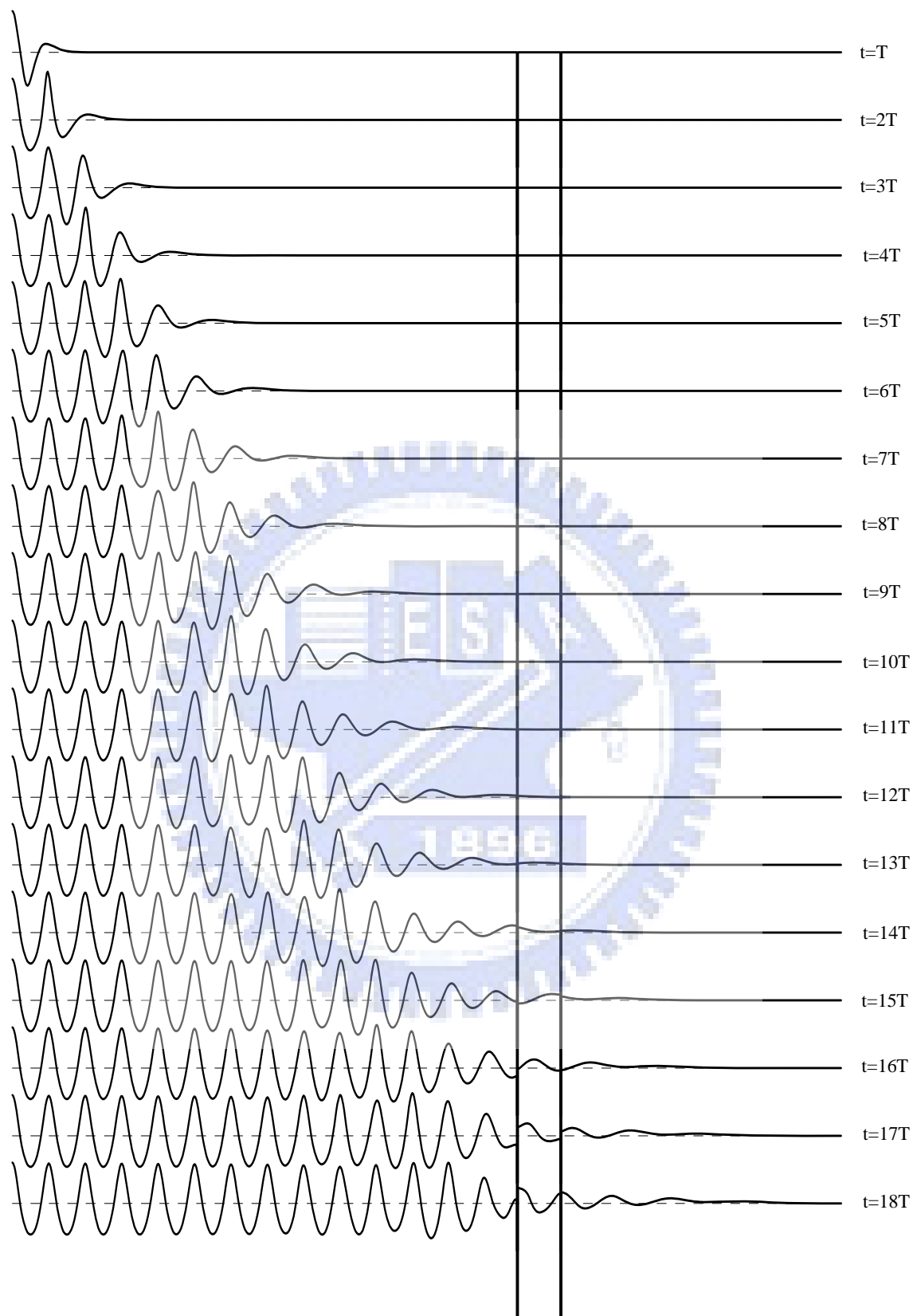


圖 4-4.1(a) 非線性波通過兩平行防波板之自由水面隨時間變化圖

( $h=1.0m$   $kh=1.5$   $H/L=0.04$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$   $q/L=1.175$   $\theta=0^\circ$ )

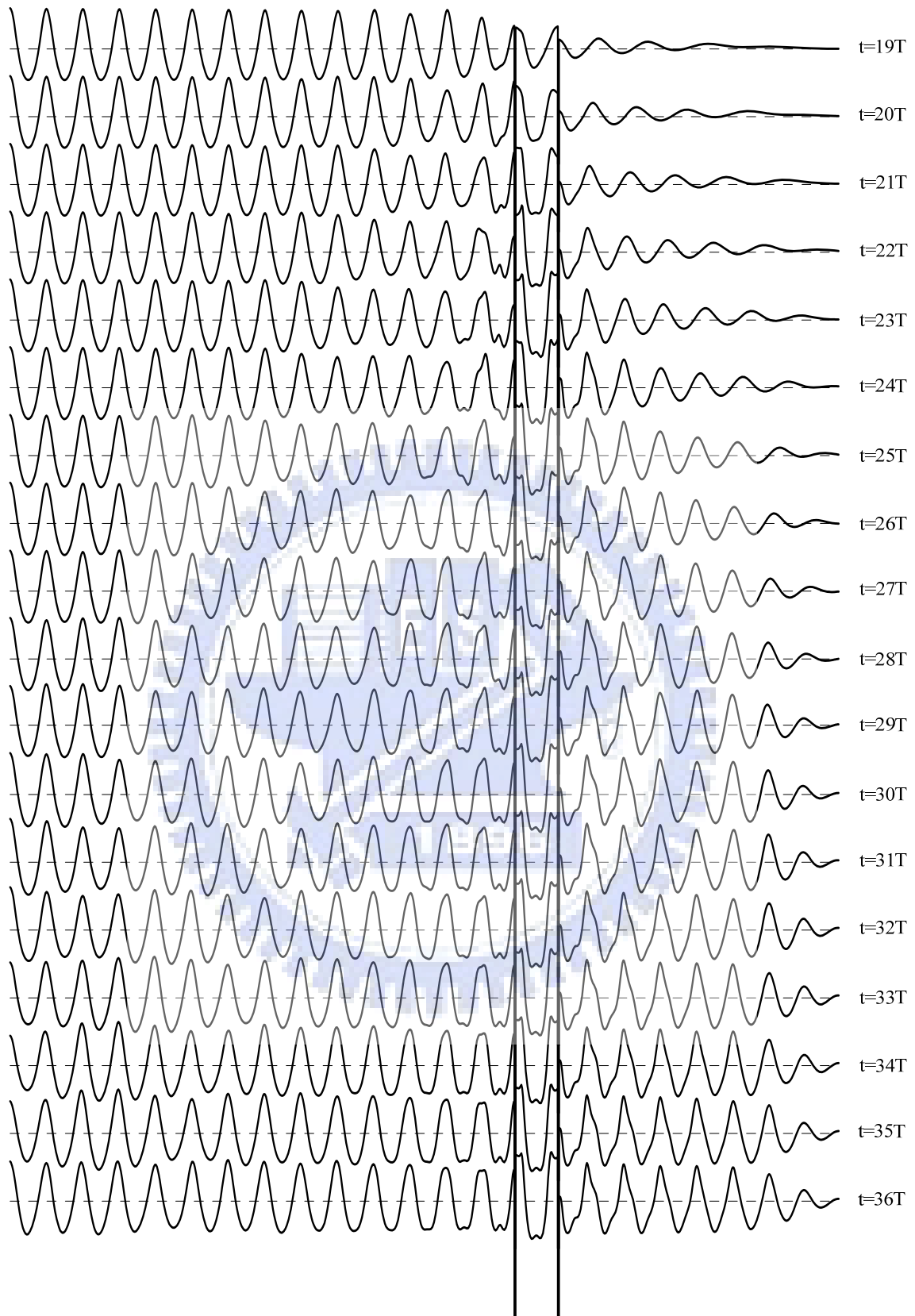


圖 4-4.1(b) 非線性波通過兩平行防波板之自由水面隨時間變化圖

( $h=1.0m$   $kh=1.5$   $H/L=0.04$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$   $q/L=1.175$   $\theta=0^\circ$ )

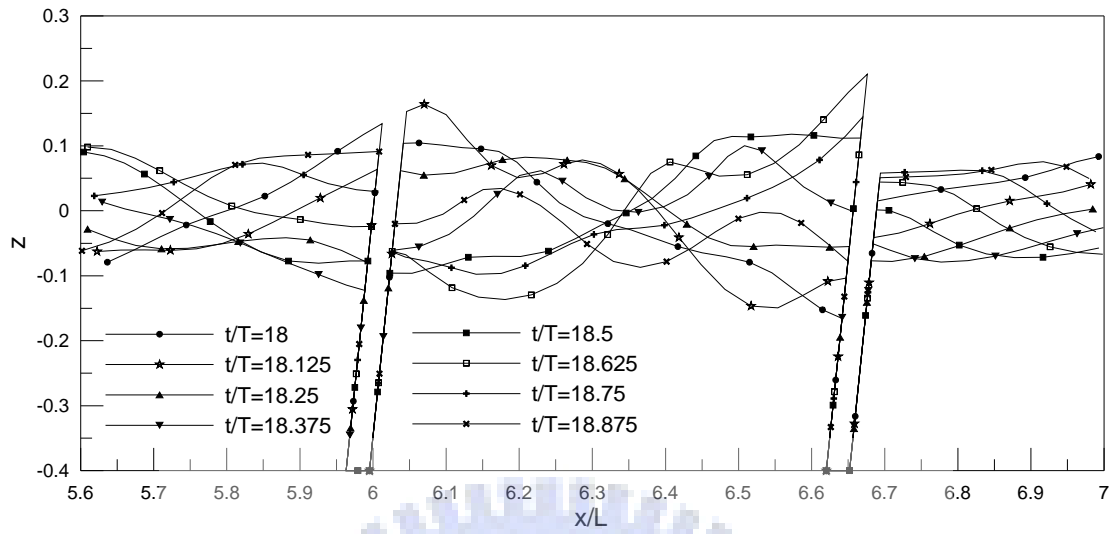


圖 4-4.2 非線性波通過兩平行防波板剖面圖

( $kh=1.0$   $H/L=0.025$   $d=0.4h$   $b=0.2h$   $q/L=0.625$   
 $\theta=60^\circ$ )

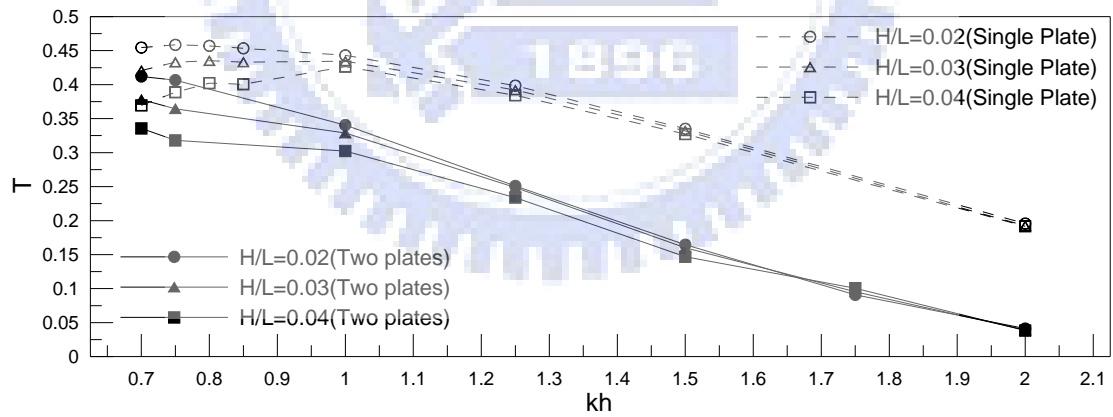
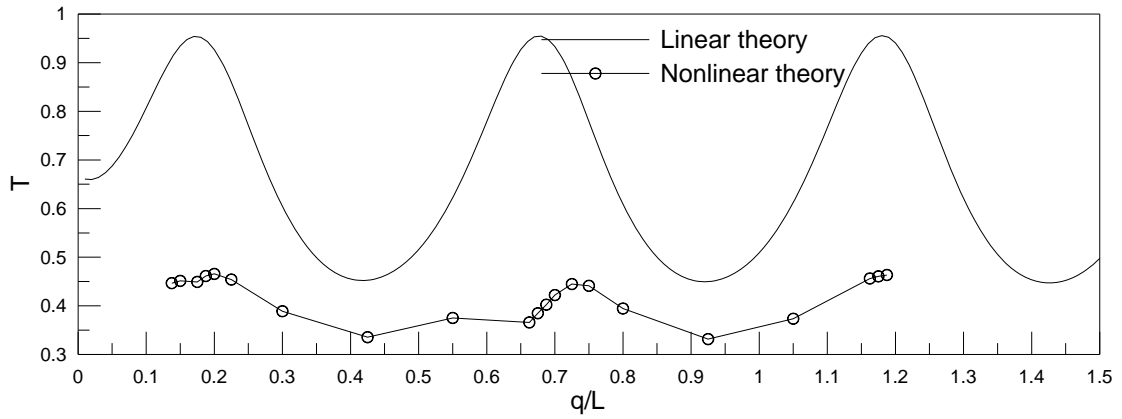
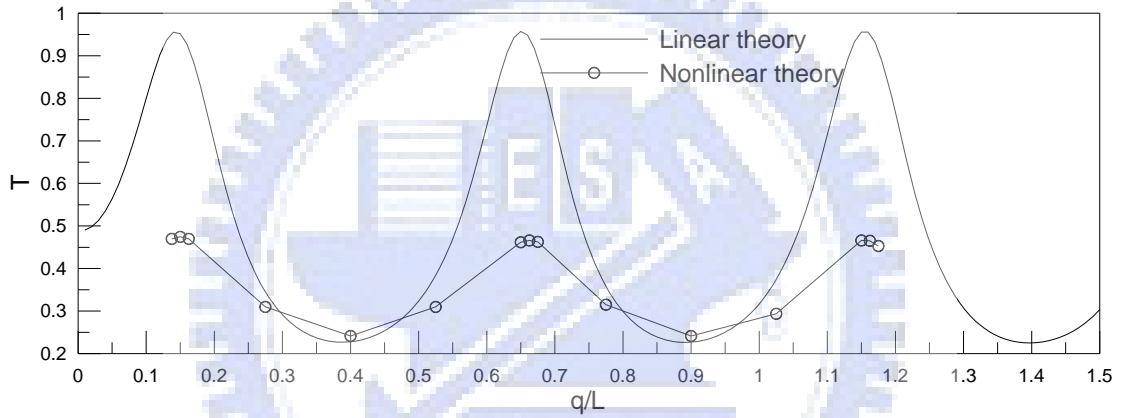


圖 4-4.3 波浪通過兩平行防波板之透射率與  $kh$  及尖銳度關係圖

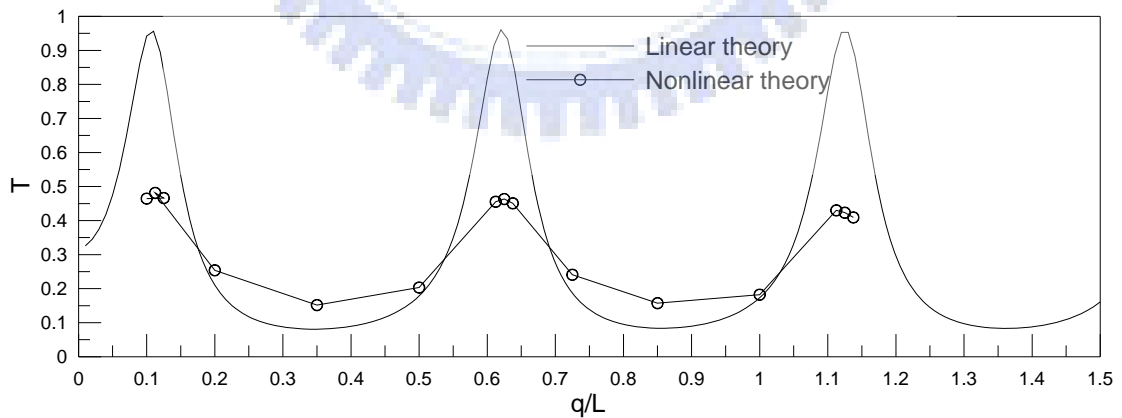
( $h=1.0m$   $b/h=0.2$   $d/h=0.2$   $q/L=0.925$   $\theta=0^\circ$ )



(a)  $kh=1.0$



(b)  $kh=1.25$



(c)  $kh=1.5$

圖 4-4.4 波浪透射率與兩板間距之關係圖

( $H/L=0.03$   $h=1.0m$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$   $\theta=0^\circ$ )

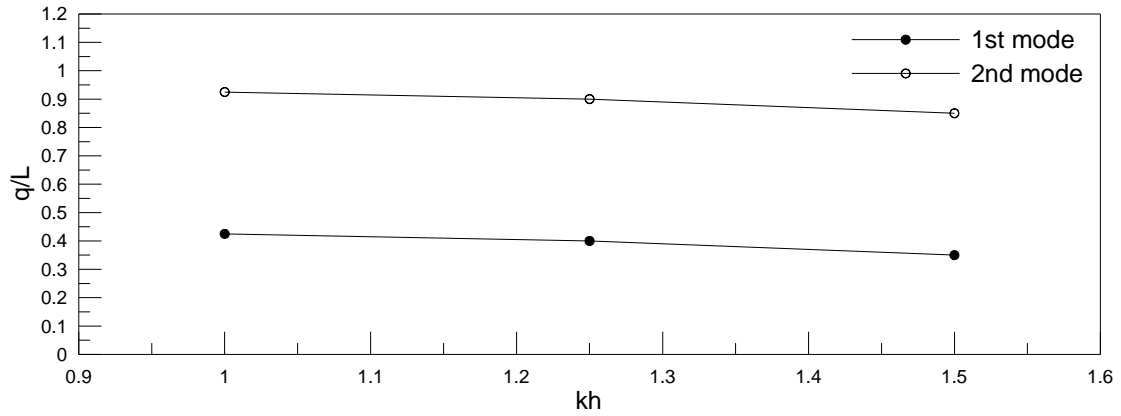


圖 4-4.5 最小透射率情況下，相對水深與兩板間距關係圖  
 ( $H/L=0.03$   $h=1.0m$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$   $\theta=0^\circ$ )

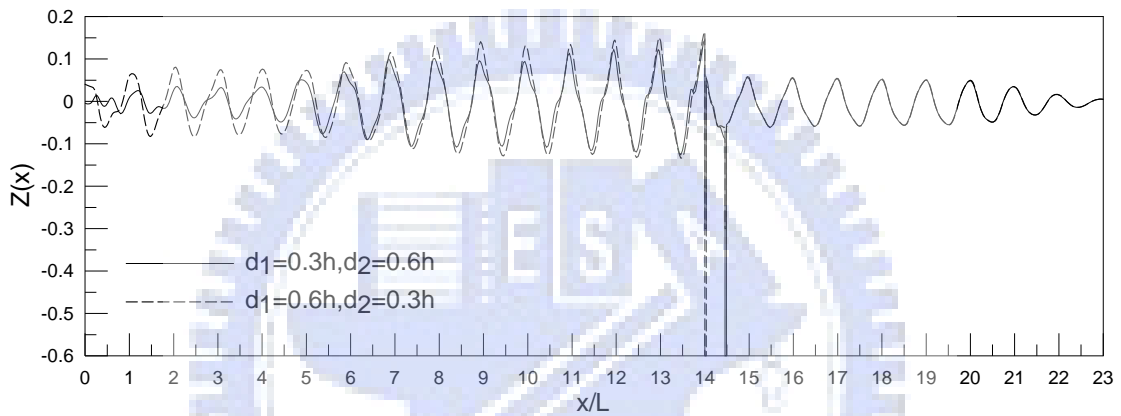


圖 4-4.6 波浪通過兩防波板之自由水面比較圖  
 ( $kh=1.0$   $H/L=0.03$   $b/h=0.2$   $\theta=0^\circ$ )

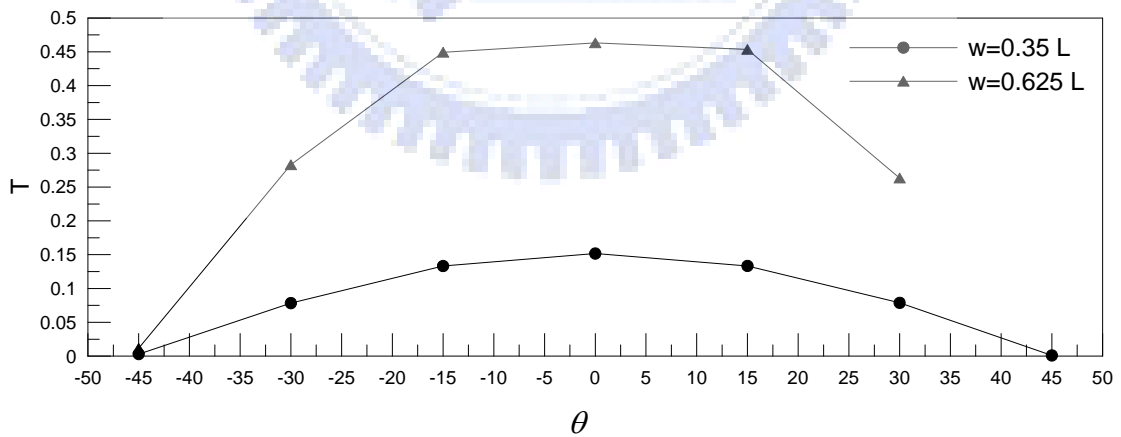


圖 4-4.7 波浪通過兩平行防波板之透射率與傾斜角度關係圖  
 ( $kh=1.5$   $H/L=0.02$   $b/h=0.2$   $d/h=0.4$ )



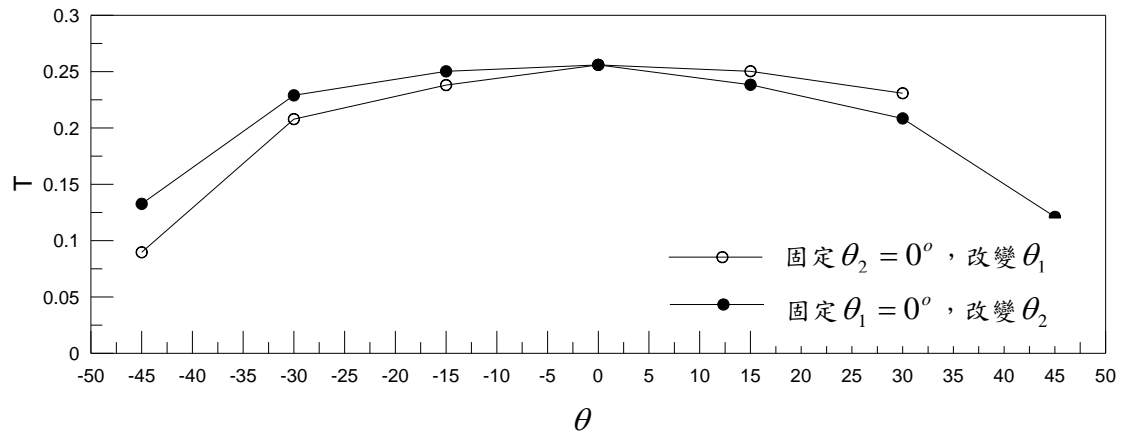


圖 4-4.8 波浪通過兩防波板之透射率與傾斜角度關係圖

( $kh = 1.25$   $H/L = 0.03$   $b/h = 0.2$   $d/h = 0.4$   $q/L = 0.35$ )

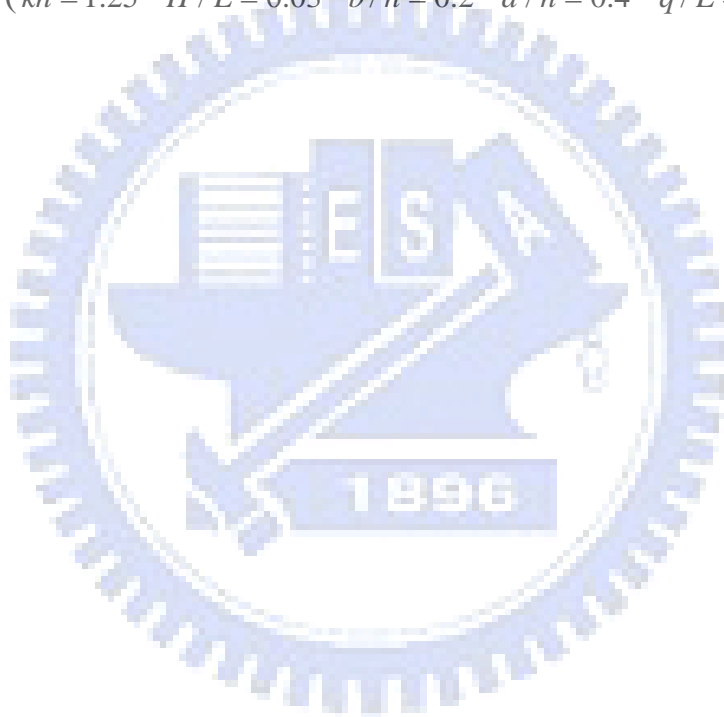


表 4-1(a) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=2.743m H/L=0.0105					
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>	<b>0.96</b>
Weigel's experiment	0.930	0.882	0.575	0.285	0.200
Nonlinear theory	0.978	0.953	0.720	0.358	0.289
Linear theory	0.977	0.899	0.383	0.038	0.017

表 4-1(b) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=2.743m H/L=0.0172					
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>	<b>0.96</b>
Weigel's experiment	0.938	0.845	0.575	0.301	0.180
Nonlinear theory	0.973	0.952	0.72	0.36	0.29
Linear theory	0.977	0.899	0.383	0.038	0.017

表 4-1(c) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=2.743m H/L=0.0244					
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>	<b>0.96</b>
Weigel's experiment	0.912	0.819	0.528	0.252	0.165
Nonlinear theory	0.959	0.944	0.714	0.354	0.285
Linear theory	0.977	0.899	0.383	0.038	0.017

表 4-1(d) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=1.375m H/L=0.011				
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>
Weigel's experiment	0.748	0.527	0.198	0.112
Nonlinear theory	0.809	0.554	0.102	
Linear theory	0.774	0.369	0.024	0.002

表 4-1(e) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=1.375m H/L=0.022				
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>
Weigel's experiment	0.761	0.501	0.152	0.001
Nonlinear theory	0.832	0.574	0.105	
Linear theory	0.774	0.369	0.024	0.002

表 4-1(f) 非線性波、線性波與實驗值之透射率與穿入式防波板深度關係數據表

波浪條件：h=0.466m b/h=0.1 L=1.375m H/L=0.082				
防波板相對沒水深(d/h)	<b>0.20</b>	<b>0.31</b>	<b>0.65</b>	<b>0.92</b>
Weigel's experiment	0.645	0.448	0.104	0.035
Nonlinear theory	0.634	0.454	0.081	
Linear theory	0.774	0.369	0.024	0.002

## 第五章 結論與建議

### 5-1 結論

本文以邊界元素法建立一非線性數值造波水槽，使用直推式造波板模擬非線性 Stokes 波，並且消除造波板引起的二階自由波，另外於水槽末端置入海綿層及幅射邊界條件，藉以降低波浪反射造成的影響，確保數值分析上的精確度，數值水槽所模擬之非線性 Stokes 波與五階 Stokes 理論波形相互比較，結果顯示兩者波形相當一致。確認數值造波模式可行後，在數值水槽內分別設置單一穿入式防波板與兩平行穿入式防波板，模擬波浪通過防波板後之變化，並利用頻譜分析計算其透射率，數值計算結果可歸納成下列幾點結論：

1. 本研究之數值模式是在時間領域的計算方式下進行模擬，時間間距  $\delta t$  的切割若愈細微，便能增加模式的穩定與精確度，而元素長度  $\delta x$  若能切割愈細微，模式也愈穩定，但相對都將增加模擬過程所需的時間。在此考量下，本模式取  $\delta t$  為  $T(\text{週期})/128$ ，單元長度  $\delta x$  為  $L(\text{波長})/30$ 。
2. 由數值造波板所造出的非線性波，除了 Stokes 波以外，還存在自由波。本模式在消除自由波後，比較消除前後之非線性波形，消除自由波後的波形呈現常數值波形，証實消除二階自由波的必要性與可行性。為了消除反射波，在水槽底端設置 3 倍波長長度的

海綿層並配合輻射邊界條件，使用適當的海綿阻滯係數，自由水面波形與 Stokes 五階理論波形非常穩合，表示本數值模式具有良好的準確性。

3. 本文於數值水槽造出非線性 Stokes 波，使波浪經過穿入式防波板作用，擷取防波板後方穩定 4 個週期的波高資料，利用頻譜分析計算求得其透波率，並與 Wiegel (1960) 的實驗結果作比較，驗證顯示雖然在透射率上有些微的差異，但是本文模式與 Wiegel 的實驗結果有相同之趨勢，表示本文數值模式具有良好的準確性。
4. 本研究之數值計算結果與吳和劉的數值結果相互比較後發現有相似的趨勢，波浪通過防波板後的透射率在  $kh=1.0\sim 3.0$  間先升高而後迅速遞減。本模式以非線性波理論所模擬之透射率較吳和劉的數值結果小，其原因是當非線性波之尖銳度愈大時，其非線性效應愈大，而對應的透射率則愈低。
5. 在單一或兩平行防波板之情況下，波浪通過防波板之透射率皆隨著相對水深  $kh$  的增加而降低。
6. 在單一或兩平行防波板之情況下，波浪通過防波板之透射率皆隨著尖銳度  $H/L$  的增加而降低。
7. 在相同條件的入射波情況下，考慮改變防波板的沒水深度，波浪通過防波板後之透射率會隨著沒水深度的增加而降低。

8. 在相同條件的入射波情況下，考慮改變防波板的寬度，波浪通過防波板之透射率隨防波板寬度的增加而遞減。
9. 不論在單一或兩平行穿入式防波板之水槽中進行模擬，波浪通過防波板之透射率會隨著防波板傾斜角度 $\theta$ 的不同而改變，傾斜角度愈大時，波浪沿著防波板溯上的高度愈高，反射波愈大，導致透射率亦愈低。
10. 在設置兩平行穿入式防波板之數值水槽模式中，透射率隨著兩板間距 $q$ 的增加呈現類似週期性之變化，在特定的間距情況之下，對應著極低的透射率，抑或是波浪在兩防波板之間產生共振，導致有極高之透射率。
11. 在設置兩平行穿入式防波板之數值水槽模式中，改變兩不同深度防波板前後擺放之順序，對於透射率之影響極為有限。

## 5-2 建議

本文對於今後之相關研究，條列出以下幾項建議：

1. 本文數值模式中，模擬經過一定時間後，會出現由造波板邊界所產生的二次反射。置入防波板之情況下，波浪需要更長的時間才能達到穩定，因此必須增加水槽長度，以延後二次反射發生時間。另外，可以發展其他方法模擬造波水槽，避免二次反射，方能不必增加水槽長度，亦能減短模擬所需時間。

2. 可考慮在防波板表面加上適當的粗糙度或孔隙率，以消滅波浪沿著防波板溯上過程中之能量，使透射率結果更接近實際情況。
3. 本文建議模擬時之計算元素大小約為一個波長 30 點( $L/30$ )，若點數不足則無法顯現非線性效應，造成模擬不真；若點數過多，則模擬時間相對增長，亦可能因為模擬過程中，質點間距過大或過於密集造成模擬過程中的不穩定。



## 参考文献

1. Brorsen, M. and Larsen, J., “Source generation of nonlinear gravity waves with the boundary integral equation method”, Coastal Eng., Vol.11, pp. 93-113, 1987.
2. Brebbia, C. A. and Dominguez, J., Boundary Element: An Introductory Course, McGraw-Hill, New York, 1989.
3. Chou, C. R. and Shin, R. S., “Generation and deformation of solitary waves”, China Ocean Eng., Vol.10, No.4, pp.419-432, 1996.
4. Chou, C. R. and Shin, R. S., “Numerical generation and propagation of periodical waves in time domain”, Coastal Eng. in Japan, Vol.39, No.2, pp.111-127, 1996.
5. Dold, J. W. and Perpgrine, D. H., “Steep Unsteady Water Waves : An efficient computational scheme”, Proc. 19<sup>th</sup> Intl. Conf. On Coastal Eng., pp. 955-967, 1984.
6. Faltinsen, O. M., “A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow”, J. of Ship Research, Vol.22, No.3, pp.193-202, 1978.
7. Fenton, J. D., “A Fifth-order Stokes Theory For Steady Waves” , Journal of Waterways and Harbors Division, ASCE, Vol.111, pp. 216-234, 1985.
8. Greenberg, M. D., “Application of Green’s functions in science and engineering”, Prentice-Hall, 1971.
9. Grilli, S.T., Skourup, J. and Svendsen, I.A., “An Efficient Boundary Element Method for Nonlinear Water Waves”, Eng. Analysis with



- Boundary Elements, Vol. 6, pp. 97-107, 1989.
10. Liu, P. L-F. and Abbaspour, M., “Wave Scattering By A Rigid Thin Barrier”, ASCE, Vol. 108, No. WW4, pp. 479-491, November, 1982.
  11. Losada, I.J., Losada, M.A., and Roldan, A.J., “Propagation Of Oblique Incident Waves Past Rigid Vertical Thin Barriers”, Applied Ocean Research, 14, pp. 191-199, 1992.
  12. Wu, J.k. and Liu Philip L.-F., “Interaction Of Obliquely Incident Water Waves With Two Vertical Obstacles”, Applied Ocean Research, Vol.10, No.2, pp. 66-73, 1988.
  13. Madsen, O. S., “Waves generated by a piston-type wavemaker”, Proc. 12th Coastal Eng. Conf., pp.589-607, 1970.
  14. Nakayama, T., “Boundary element analysis of nonlinear water wave problem”, Int. J. for Numerical Method in Eng., No.19, pp.953-970, 1983.
  15. Ohyama, T. and Nadaoka, K., ”Development of a numerical wave tank for analysis of nonlinear and irregular wave field”, Fluid Dynamics Research, 8, pp. 231-251,1991.
  16. Sugino, R. and Tosaka, N., “Large amplitude sloshing analysis in a container with multi-slopped wall by boundary element method”, Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA , pp. 307-316, 1990.
  17. Wiegel, R.L., “Transmission of Wave Past a Rigid Vertical Thin Barrier”, Journal of Water Port Coast and Ocean Engineering, ASCE, Vol.86, No.1, pp.1-12, 1960.
  18. 吳永照 , “ Constant wave form generated by a hinged wavemaker of

finite draft in water of constant depth.” ，第 9 屆全國海洋工程會議，  
第 552-569 頁，1987。



## 附錄 A 二階自由波之關係式

由於 Stokes 波並不包含自由波，造波板之位移需加上  $\frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi)$  項，消除造波板所產生的二階自由波，以確保造 Stokes 波之精確度。 $s_f$  為消除二階自由波所需之衝程， $\varphi$  為一階 Stokes 波與二階自由波之相位差，其關係式表示如下：

$$\phi_2^f = \frac{1}{2} \left[ B_p \cosh \beta_p (h+z) e^{i\beta_p x} + \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) (h+z) e^{-\beta_s(j)x} \right] e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-1})$$

$$\eta_2^f = \frac{\phi_2^f}{g} = -i \frac{\omega}{g} B_p \cosh \beta_p h \cdot e^{i(\beta_p x - 2\omega t)} - \frac{i\omega}{g} \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) h \cdot e^{-\beta_s(j)x} e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-2})$$

$\phi_2^f$  為複數，實數部份為  $R_e(\phi)$ ，虛數部份為  $I_m(\phi)$ ，一階 Stokes 波與二階自由波之相位差  $\varphi$  為：

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_m(\phi)}{R_e(\phi)} \quad (\text{A-3})$$

消除二階自由波所需造波板之衝程為：

$$s_f = 2 \left| \eta_2^f \right| \frac{\sinh(2\beta_p h) + 2\beta_p h}{2(\cosh 2\beta_p h - 1)} \quad (\text{A-4})$$

可由以下分散關係式計算得  $\beta_p$  與  $\beta_s(n)$ ：

$$(2\omega)^2 = g\beta_p \tanh \beta_p h \quad (\text{A-5})$$

$$(2\omega)^2 = -g\beta_s(n) \tan \beta_s(n) h \quad (\text{A-6})$$

以下為  $\phi_2^f$  及  $\eta_2^f$  式中各項係數：

$$B_p = \frac{i}{\beta_p} \frac{s_0 R}{2} \frac{Q_1}{Q_l} - \frac{1}{\beta_p} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{Q_3(n)}{Q_l} - \frac{i}{\beta_p} 4k_p B_1 \frac{Q_5}{Q_l}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{Q_6(n, m)}{Q_I} \\
& - \frac{1}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_7(n)}{Q_I} \\
& - \frac{i}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_8(n)}{Q_I} \\
B_s(j) = & \frac{s_0 R}{2} \frac{1}{\beta_s(j)} \frac{W_1(j) + W_2(j)}{W_I(j)} + \frac{i}{\beta_s(j)} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{W_3(j, n) + W_4(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{4k_p B_1}{\beta_s(j)} \frac{W_5(j)}{W_I(j)} - \frac{2i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{W_6(j, n, m)}{W_I(j)} \\
& + \frac{i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_7(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{1}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_8(j, n)}{W_I(j)}
\end{aligned}$$

$$Q_I = \int_{-h}^0 \cosh^2 \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_1 = k_p h \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_3(n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_5 = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p (h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_6(n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_7(n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_8(n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p (h+z) \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$W_1(j) = \int_{-h}^0 \cos^2 \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_1(j) = k_p \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_3(j, n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_5(j) = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_6(j, n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_7(j, n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cdot \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_8(j, n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p(h+z) \cdot \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$P_1(n) = g[k_p + ik_s(n)] [\sinh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \cosh k_p h \cdot \sin k_s(n)h] \\ - 4\omega^2 [\cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h]$$

$$P_2(n) = \frac{k_s(n)}{k_p} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h - \frac{k_p}{k_s(n)} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h \\ - 6 \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h - 4i \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h$$

$$T = \frac{\frac{\omega s_0}{2h} \int_{-h}^0 (h+z) \cos k_s(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_s(h+z) dz}$$

$$R = \frac{\frac{\omega s_0}{2} \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_p(h+z) dz}$$

$$B_1 = \frac{3R^2}{8\omega \sinh^2 k_p h}$$

$$B_2(n,m) =$$

$$\frac{\omega T_n T_m \left[ \frac{k_s(m)}{k_s(n)} \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 2 \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 3 \sin k_s(n)h \cdot \sin k_s(m)h \right]}{2 \{ g[k_s(n) + k_s(m)] \sin[k_s(n) + k_s(m)]h + 4\omega^2 \cos[k_s(n) + k_s(m)]h \}}$$



## 附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline)

在本文中，自由水面的波形角度及其他參數在切線方向的微分，皆是藉由 cubic spline 的方法來計算求得。Cubic spline 主要是以三次多項式的方式來將一系列之數據點連接起來，透過其計算將可以得到數據點的切線斜率及其曲率。以下簡單的說明這個模式方法：

若一曲線經過一系列之數據點  $(s_i, F_i)$ ，則可將  $F$  表示為

$$F = F(s) \quad (\text{B-1})$$

$s$  為曲線參數，此參數必須選擇一嚴格參數，即：

$$s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$$

在本文對於自由水面移動的問題中，選擇曲線的弧長來當作曲線參數，其值為：

$$s_0 = 0; \quad s_i = s_{i-1} + d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{B-2})$$

$$d_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2} \quad (i = 0, \dots, n-1) \quad (\text{B-3})$$

其中

$$\delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \delta z_i = z_{i+1} - z_i$$

$(x_i, z_i)(i = 0, 1, \dots, n)$  為自由水面邊界點的座標值。

假設總共有  $n+1$  個數據點，則會有  $n$  條小曲線存在。第  $i$  條小曲線，其會在  $(x_i, z_i)$  與  $(x_{i+1}, z_{i+1})$  之間，可令其曲線方程式為

$$F(s) = a_i(s - s_i)^3 + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i) + d_i \quad (\text{B-4})$$

因為曲線必須經過數據點，所以

$$F_i = d_i \quad (\text{B-5})$$

$$F_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (\text{B-6})$$

其中  $F_i = F(s_i)$ ,  $h_i = (s_{i+1} - s_i)$  為第  $i$  段曲線之弧長。而對  $s$  的一次及二次微分可表示成

$$F'(s) = 3a_i(s - s_i)^2 + 2b_i(s - s_i) + c_i \quad (\text{B-7})$$

$$F''(s) = 6a_i(s - s_i) + 2b_i \quad (\text{B-8})$$

現在再設定一個新參數  $S_i$ ，令  $S_i = F''$ ，故在點  $(x_i, z_i)$  及點  $(x_{i+1}, z_{i+1})$  之曲率為

$$S_i = 2b_i \quad \text{及} \quad S_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i \quad (\text{B-9})$$

由上式可得到

$$b_i = \frac{S_i}{2} \quad \text{及} \quad a_i = \frac{(S_{i+1} - S_i)}{6h_i} \quad (\text{B-10})$$

在此已可得到  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $d_i$ ，將已求得  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $d_i$  代入(B-4)式，可以解得

$$c_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad (\text{B-11})$$

現在已經可以把  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$ 、 $d_i$  的值用  $S_i$ 、 $h_i$ 、 $F_i$  來表示，其中只剩下  $S_i$  的值是未知數。解  $S_i$  的值需配合"相鄰曲線間的斜率必須連續"這個條件，所以  $F'_i(s_i) = F'_{i-1}(s_i)$ 。算式如下

$$F'_i(s_i) = 3a_i(s_i - s_i) + 2b_i(s_i - s_i) + c_i = c_i$$

$$\begin{aligned} F'_{i-1}(s_i) &= 3a_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + 2b_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \end{aligned}$$



把  $a_i, b_i, c_i, d_i$  的值用前面解出來的結果代入，會得到下面的式子：

$$\begin{aligned}
 F_i' &= \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \\
 &= 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h_i} \\
 &\quad - \frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6}
 \end{aligned} \tag{B-12}$$

再將上式簡化成可得

$$\begin{aligned}
 &h_{i-1}S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)S_i + h_i S_{i+1} \\
 &= 6\left(\frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{F_i - F_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = 6(f[s_i, s_{i+1}] - f[s_{i-1}, s_i])
 \end{aligned} \tag{B-13}$$

其中  $f[s_i, s_{i+1}]$  指  $f(s_i) \sim f(s_{i+1})$  間的平均值， $f[s_{i-1}, s_i]$  指  $f(s_{i-1}) \sim f(s_i)$  間的平均值。

(B-13)在  $n+1$  的點中只適合  $i=1$  到  $i=n-1$  的點來用，所以在  $n+1$  個未知數  $S_i$  中，只可得到  $n-1$  個方程式，因此還需要兩個方程式。若可利用任何的內插方法來得到在始末點的切線斜率，即  $F'(s_0) = A$  和  $F'(s_n) = B$ ，則可得到另外兩個方程式，在本文中使用了 Lagrangian polynomial 來估算起末端斜率，求得之後可由(B-11)得到

在起始端滿足

$$2h_0 S_0 + h_1 S_1 = 6(f[s_0, s_1] - A) \tag{B-14}$$

在最末端滿足

$$h_{n-1} S_{n-1} + 2h_n S_n = 6(B - f[s_{n-1}, s_n]) \tag{B-15}$$

最後再將對  $S_0, S_1, \dots, S_n$  之所有方程式(B-13)、(B-14)、(B-15)寫成矩陣程式，可得



## 附錄 C 轉角處的合適條件

在某些例子裡，轉角處(coner points)的 $\phi$ 及 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  (或是 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial n}$ )之間的幾何關係(合適條件)是可以知道的。且它們必須隨著時間而自動滿足數值解，否則隨著計算時間的增加，可能會因為誤差的累積造成對數值結果的不確定性。因此必須藉由在每個時刻裡，確定其確切的關係來減少整個誤差。在以下的敘述中，雖然是提出來用在 $(\frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{\partial\phi}{\partial n})$ ，然而其亦可適用在 $(\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial s}, \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial n})$ 。

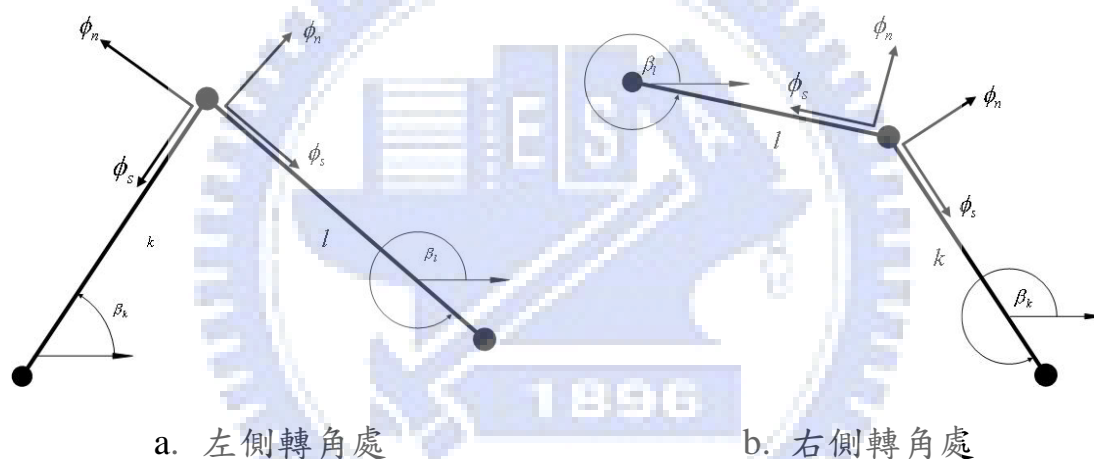


圖 C-1 轉角處合適條件

當部分邊界的速度勢為已知時，則 $\frac{\partial\phi}{\partial s}$ 亦可被計算求得，如圖 C-1 假如自由水面與固體邊界交接點在第 $k-l$ 段元素之間，當速度勢及 $\frac{\partial\phi}{\partial s}$ 求得之後，因為在轉角點兩側的速度向量會相等，所以

$$u = (\phi_s)_l \cos \beta_l - (\phi_n)_l \sin \beta_l = (\phi_s)_k \cos \beta_k - (\phi_n)_k \sin \beta_k \quad (C-1)$$

$$w = (\phi_s)_l \sin \beta_l + (\phi_n)_l \cos \beta_l = (\phi_s)_k \sin \beta_k + (\phi_n)_k \cos \beta_k \quad (C-2)$$

或寫成

$$(\phi_s)_l \cos \beta_l - (\phi_s)_k \cos \beta_k = (\phi_n)_l \sin \beta_l - (\phi_n)_k \sin \beta_k \quad (a)$$

$$(\phi_s)_l \sin \beta_l - (\phi_s)_k \sin \beta_k = (\phi_n)_k \cos \beta_k - (\phi_n)_l \cos \beta_l \quad (b)$$

將 (b)  $\times \cos \beta_k - (a) \times \sin \beta_k$  可得

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \csc(\beta_l - \beta_k) - \frac{\partial \phi_l}{\partial n} \cot(\beta_l - \beta_k) \quad (C-3)$$

在本文中，在造波板與自由水面的交接點， $\beta_k$  不會改變，且其值  $\beta_k = \frac{\pi}{2}$ ，因此可得

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \phi_l}{\partial n} \tan \beta_l - \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \csc \beta_l \quad (C-4)$$

如圖 C-2 所示，穿入式防波板面或輻射邊界與水平面形成一夾角  $\theta$ ，在輻射邊界之情況之下  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，可得知  $\beta_k = \pi + \theta$  及  $\frac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0$ ，所以

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \phi_l}{\partial n} \cot(\beta_k - \beta_l) = \frac{\partial \phi_l}{\partial n} \cot(\pi + \theta - \beta_l) \quad (C-5)$$

Grill et al.(1990)將應用此條件在數值計算中，並指出其可以有效地降低每個時刻由於數值誤差所造成的不確定性。

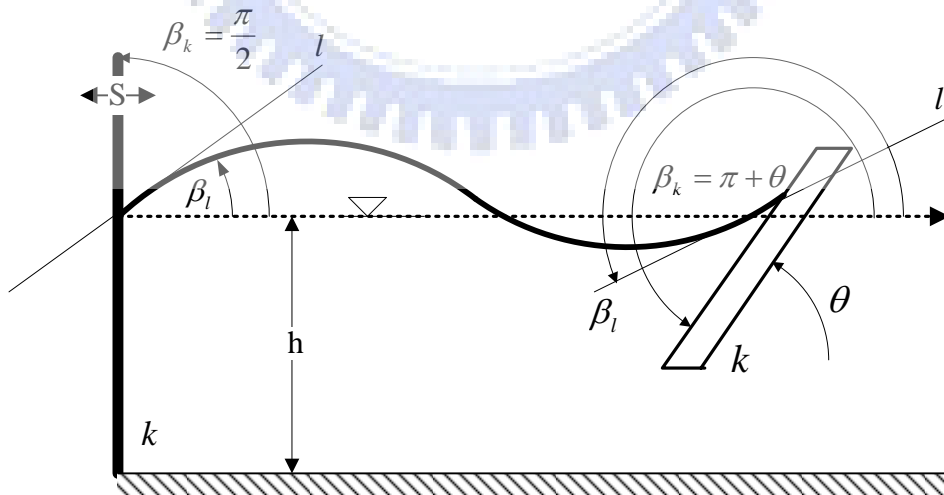


圖 C-2 轉角處示意圖

## 附錄 D 平滑技巧(Smoothing technique)

幾乎所有的計算，經過一段長時間的模擬後，波形會呈現鋸齒狀。經過計算的自由水面點位置會交替地位於光滑的曲線上方和下方。實驗結果顯示，這種不穩定的成長速率與模擬時間長短無關，由此可知產生鋸齒狀不穩定情形的原因並不單純由誤差累積所引起。在現實的環境裡，水的黏滯性可以降低此不穩定的狀況，由於本文已忽略水的黏滯性，故需適當處理方能得到平滑的自由水面波形。

為了維持模擬環境的穩定，必須使用數值方法有效地去除鋸齒狀的不穩定情形。本文採用 Longuet Higgins 和 Cokelet(1976)所提出的五點平滑公式，公式如下：

$$\bar{f}_j = \frac{1}{16}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-1})$$

因上述公式無法使用在自由水面的第二點與倒數第二點，故對於此兩點本文採用 Sugino 和 Tosaka(1990)所提出的平滑公式，如下所示：

於第二點使用以下公式：

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1}) \quad (\text{D-2})$$

於倒數第二點使用以下公式：

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-3})$$

利用上述公式來計算下一時刻的  $\xi$ 、 $\zeta$ 、 $\phi$ ，方能消除鋸齒狀的不穩定情形，並能維持模擬環境的穩定性。

## 附錄 E 模式中能量的定義與推算

水槽內之總能量(Total Energy)即總動能(Total Kinetic Energy)與總位能(Total Potential Energy)的和，而總動能及總位能的推算分別如下：

總動能為  $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$ ，即計算水槽內所有水粒子的動能。總動能可以簡化成  $\frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$  (即僅由邊界上之物理量來計算)，其推導如下：

$$\begin{aligned} \text{由 Green's 定理 } \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy &= \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) \\ \text{令 } F_1 &= -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad F_2 = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (\text{其中 } \nabla^2 \Phi = 0) \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \oint_{\Gamma} \left( F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left( -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left[ \Phi \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) \right] ds \end{aligned}$$

$$= \oint_{\Gamma} \left[ \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j \right) \cdot \left( \frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j \right) \right] ds$$

$$= \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

因此，總動能為  $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$

總位能為  $\frac{1}{2} \rho g \int_{free\ surface} \eta^2(x,t) dx$ ，即以平均水位為基準，波動時波

浪所增加的總位能，其中  $\eta(x,t)$  為波動時之水位。

