

第二章 衛星定軌理論

2-1 衛星運動理論

人造衛星在繞地球運行時所受的力可分為引力 (gravitational) 和非引力 (nongravitational) 兩部份。主要的引力包含地球引力場、太陽、月球和其他星體的影響，以及日月引力所引起的海潮、固體潮等。而作用在低軌衛星 (Low Earth Orbitor, LEO) 主要的非引力則包含太陽輻射壓、地球輻射壓和大氣阻力等。

在各種對衛星軌道作用力中，以地球引力場的影響為最大，其他作用力的影響，相對是很小的。就地球引力場來看，可先將地球視為一均質對稱的球體，若將均質球體視為一質點，則所受的引力稱為中心力。實際上衛星所受的力不只有地球中心引力，尚有日月引力、太陽輻射壓等等。除地球中心引力外，其餘則稱之為擾動力。所以依據牛頓萬有引力定理，在考慮各作用力對衛星影響下，衛星繞行地球的運動方程表示為 (Seeber, 1993)：

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{a}(t) \quad (2-1)$$

其中

$\ddot{\vec{r}}(t)$: 衛星在時刻 t 的運動加速度

$\vec{r}(t)$: 衛星在時刻 t 的位置

GM_E : 重力常數和地球質量 (包含大氣層質量) 之乘積

$-\frac{GM_E}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t)$ 項為地球質心引力於時刻 t 作用在衛星運動的加速度

$\vec{a}(t)$: 衛星在時刻 t 所受到的擾動力加速度總和，可表示如下式 (Seeber, 1993)：

$$\vec{a} = \vec{a}_{ns} + \vec{a}_{nb} + \vec{a}_{et} + \vec{a}_{ot} + \vec{a}_{drag} + \vec{a}_{srp} + \vec{a}_{erp} + \vec{a}_{grl} \quad (2-2)$$

其中， a_{ns} ：地球引力位引起之擾動加速度

a_{nb} ：多體引起之擾動加速度

a_{et} ：地球固體潮引起之擾動加速度

a_{ot} ：海潮引起之擾動加速度

a_{drag} ：空氣阻力引起之擾動加速度

a_{srp} ：太陽幅射壓引起之擾動加速度

a_{erp} ：地球幅射壓引起之擾動加速度

a_{grl} ：相對論效應引起之擾動加速度

將衛星所受到的主要擾動力與地球中心引力相比的粗略估計值列於表 2-1，由表可知其他擾動力與地球中心引力相比均小於 10^{-3} 量級。

表 2-1 衛星所受主要擾動力及其量級 (Reigber, 1989)

擾動力來源	衛星名字及軌道長軸半徑，加速度單位為(m/s ²)			
	STARLETTE	AJISAI	LAGEOS	GPS
	7337 km	7869 km	12266 km	26559 km
中心力	7.4	6.4	2.6	0.6
非球體引力場C ₂₀ 項	8×10 ⁻³	6×10 ⁻³	2×10 ⁻³	5×10 ⁻⁵
非球體引力場其餘項總和	1×10 ⁻⁴	9×10 ⁻⁵	5×10 ⁻⁶	3×10 ⁻⁷
多體擾動	1×10 ⁻⁶	1-2×10 ⁻⁶	2×10 ⁻⁶	5×10 ⁻⁶
固體潮擾動	2×10 ⁻⁷	1-2×10 ⁻⁷	3×10 ⁻⁸	1×10 ⁻⁹
海潮擾動	3×10 ⁻⁸	2×10 ⁻⁸	2×10 ⁻⁹	1×10 ⁻¹⁰
大氣阻力擾動	1-2×10 ⁻¹⁰	1-2×10 ⁻¹⁰	3×10 ⁻¹²	0
太陽輻射壓擾動	5×10 ⁻⁹	5×10 ⁻⁸	4×10 ⁻⁹	1×10 ⁻⁷
地球輻射壓擾動	5×10 ⁻¹⁰	8×10 ⁻⁹	7×10 ⁻¹¹	1×10 ⁻⁹

2-2 經驗力模式

福衛三號衛星在太空中運行時，會受到大氣層的阻力作用，而產生擾動加速度，大氣阻力對衛星的擾動模式不易模擬，原因有三，其一為在高空中，空氣密度的特性很複雜，很難精確的知道；其二是因為在計算空氣阻力產生的影響時，其作用力方程式必須考慮到衛星本體的幾何形狀；最後是空氣中各種氣體之間的相互影響，亦會改變大氣阻力(Montenbruck and Gill, 2001)。

本文在估計軌道參數時，常引入一些經驗參數來吸收大氣阻力以及其他量級較小之擾動力所造成的影響，並將大氣阻力所造成的加速度分徑向(radial)、沿軌跡方向(along-track)和跨軌跡方向(cross-track)。一般來說，在衛星軌道中非保守力或者無法以數學模式來描述的力，通常會造成one cycle-per-revolution (1-cpr)的現象，而經驗參數通常被用來吸收這種現象的影響。

$$\bar{a}_{empirical} = \begin{bmatrix} (C_R + R_C \cos u + R_S \sin u) \cdot \hat{u}_R \\ (C_T + T_C \cos u + T_S \sin u) \cdot \hat{u}_T \\ (C_N + N_C \cos u + N_S \sin u) \cdot \hat{u}_N \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

u: 衛星緯度角距

C_R, C_T, C_N : 分別為徑向、沿軌道方向和軌道法線方向的加速度常數

R_C 和 R_S 分別為徑向1-cpr的餘弦和正弦係數

T_C 和 T_S 分別為沿軌道方向1-cpr的餘弦和正弦係數

N_C 和 N_S 分別為沿軌道法線方向1-cpr的餘弦和正弦係數

在估計參數時，經驗力模式會吸收部份初始狀態向量誤差和力學模式的誤差。(2-3)式中含有正弦和餘弦二項為週期性的軌道誤差，與時間相依，其振幅不隨時間而增加；至於 C_R, C_T, C_N 為常數項之軌道誤差，亦不隨時間變化。在沿軌跡方向上的加速度常數 C_T ，是有效的吸收大氣阻力的影響；實際上，吾人並不需要去估計徑向和沿軌跡方向的週期項，因為當吾人在做參數估計的時候，這些項都會列入當成參數輸出。此外， C_R 和 C_N 通常不預估，因為對於低軌衛星，影響最大的就是大氣阻力，見Colombo(1989)和Tapley et al.(1994)。

2-3 減動力法定軌

減動力法(reduced dynamics)的概念與動力法(dynamics)一樣，只是將其力模式(2-2)式減少。在本研究中，使用了多體擾動模式、海潮模式、固體潮模式、地球重力場模型、太陽輻射壓，而不考慮大氣阻力、地球輻射壓、相對論效應，但以經驗力模式來吸收其影響。有了力學模式，再搭配數值積分，即可利用 Bernese 5.0 軟體裡面的積分器，進行軌道積分。為了增加軌道的準確度，吾人使用隨機參數(pseudo-stochastic pulses)在 6-15 分鐘的時候解一組速度參數，來修正其軌道的偏差量，以便提升軌道的品質(Svehla and Rothacher, 2003)。在進行減動力法定軌時，本研究必須有初始值方能進行數值積分，必須先進行 GPS 觀測量之平差計算方可得到起始值，即如

$$L_1 = \rho_1 + c(dt - dT) - I_1 + dtrop_1 + \lambda_1 N_1 + \varepsilon \quad (2-4)$$

$$L_2 = \rho_2 + c(dt - dT) - \frac{f_1^2}{f_2^2} I_1 + dtrop_2 + \lambda_2 N_2 + \varepsilon \quad (2-5)$$

$$L_3 = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 L_1 - f_2^2 L_2) \quad (2-6)$$

$$L_3 = \rho_3 + c(dt - dT) + \lambda_3 N_3 + dtrop + \varepsilon \quad (2-7)$$

$$L_3 + V = L_3^0 + \frac{\partial L_3}{\partial a} da + \frac{\partial L_3}{\partial e} de + \frac{\partial L_3}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial L_3}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial L_3}{\partial M} dM + \frac{\partial L_3}{\partial i} di + \frac{\partial L_3}{\partial N_3} dN_3 + \frac{\partial L_3}{\partial P_x} dP_x + \frac{\partial L_3}{\partial S} dS \quad (2-8)$$

$$V = AX - l \quad (2-9)$$

(2-4)式為GPS載波相位L1 之觀測量；(2-5)式為GPS載波相位L2 之觀測量；(2-6)和(2-7)式為載波相位L1 與L2 之無電離層線性組合L3；(2-8)式為L3 的零次差(zero-difference)觀測量針對 6 個起始未知數、週波未定值、S(隨機參數)和P_x(經

驗力參數) 進行微分；(2-9)式為平差模式。

由於係數矩陣中觀測量與參數並非明顯之函數關係，故觀測量對參數的偏微分 $\frac{\partial L_3}{\partial P}$ (P 為(2-8)式中所有的未知參數) 不易求解。可利用下列變數方程 (variational equation) 進行數值求解：

$$\frac{\partial L_3}{\partial P^T}(t) = \frac{\partial L_3}{\partial r^T} \frac{\partial r(t)}{\partial P^T} + \frac{\partial L_3}{\partial \dot{r}^T} \frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial P^T} \quad (2-10)$$

利用加速度積分求得位置及速度的觀念，亦可利用加速度對參數的偏微分來求得位置對參數的偏微分 $\frac{\partial r}{\partial P^T}$ 及速度對參數的偏微分 $\frac{\partial \dot{r}}{\partial P^T}$ 。再同樣地利用變數關係，加速度對參數的偏微分 $\frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^T}$ 可寫成 (GSFC, 1989)：

$$\frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^T} = \frac{\partial \ddot{r}}{\partial r^T} \frac{\partial r}{\partial P^T} + \frac{\partial \ddot{r}}{\partial \dot{r}^T} \frac{\partial \dot{r}}{\partial P^T} + \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^{*T}} \right)_{\text{explicit}} \quad (2-11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial r}{\partial P^T} \right) = \frac{\partial \ddot{r}}{\partial r^T} \left(\frac{\partial r}{\partial P^T} \right) + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{r}^T} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial P^T} \right) + \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^{*T}} \right)_{\text{explicit}} \quad (2-12)$$

其中參數 P^* 是參數 P 中與加速度有明顯函數關係的參數。

令 $Y = \frac{\partial r}{\partial P^T}$ ，再將 (2-12) 式經過整理後得到 (GSFC, 1989)：

$$\ddot{Y}_{3 \times l} = A_{3 \times 3}(t) Y_{3 \times l} + B_{3 \times 3}(t) \dot{Y}_{3 \times l} + C_{3 \times l}(t)$$

其中， l 為計算參數之總個數

$$\begin{aligned} A_{3 \times 3} &= \frac{\partial \ddot{r}}{\partial r^T} = \frac{\partial}{\partial r^T} (\ddot{R}_G + \ddot{R}_{NS} + \ddot{R}_{OT} + \ddot{R}_{ET} + \ddot{R}_{SR} + \ddot{R}_{EC}) \\ &= (A_G + A_{NS} + A_{OT} + A_{ET} + A_{SR} + A_{EC}) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned}
B_{3 \times 3} &= \frac{\partial \ddot{r}}{\partial \dot{r}^T} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}^T} (\ddot{R}_G + \ddot{R}_{NS} + \ddot{R}_{OT} + \ddot{R}_{ET} + \ddot{R}_{SR} + \ddot{R}_{EC}) \\
&= (B_G + B_{NS} + B_{OT} + B_{ET} + B_{SR} + B_{EC})
\end{aligned} \tag{2-14}$$

$$\begin{aligned}
C_{3 \times l} &= \left(\frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^T} \right)_{\text{explicit}} = \left[\frac{\partial \ddot{r}}{\partial r_0^T}, \frac{\partial \ddot{r}}{\partial \dot{r}_0^T}, \frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^{*T}} \right] = \left[O_3, O_3, \frac{\partial \ddot{r}}{\partial P^{*T}} \right] \\
&= (C_{NS} + C_{OT} + C_{ET} + C_{SR} + C_{EC})
\end{aligned} \tag{2-15}$$

式中，

\ddot{R}_G ：地球二體中心引力位造成之衛星加速度。 A_G 是 \ddot{R}_G 對衛星位置之偏微矩陣。

B_G 是 \ddot{R}_G 對衛星速度之偏微矩陣。

\ddot{R}_{NS} ：地球非球體擾動力造成之衛星加速度。 A_{NS} 是 \ddot{R}_{NS} 對衛星位置之偏微矩陣。

B_{NS} 是 \ddot{R}_{NS} 對衛星速度之偏微矩陣。 C_{NS} 是 \ddot{R}_{NS} 對正規化球諧係數之偏微矩陣。

\ddot{R}_{OT} ：地球海潮造成之衛星加速度。 A_{OT} 是 \ddot{R}_{OT} 對衛星位置之偏微矩陣。

B_{OT} 是 \ddot{R}_{OT} 對衛星速度之偏微矩陣。 C_{OT} 是 \ddot{R}_{OT} 對正規化球諧係數之偏微矩陣。

\ddot{R}_{ET} ：地球固體潮造成之衛星加速度。 A_{ET} 是 \ddot{R}_{ET} 對衛星位置之偏微矩陣。 B_{ET} 是 \ddot{R}_{ET}

對衛星速度之偏微矩陣。 C_{ET} 是 \ddot{R}_{ET} 對正規化球諧係數之偏微矩陣。

\ddot{R}_{SR} ：太陽輻射壓造成之衛星加速度。 A_{SR} 是 \ddot{R}_{SR} 對衛星位置之偏微矩陣。 B_{SR} 是

\ddot{R}_{SR} 對衛星速度之偏微矩陣。 C_{SR} 是 \ddot{R}_{SR} 對衛星表面反射係數係數之偏微矩

陣。

\ddot{R}_{EC} ：是透過經驗方程計算之衛星加速度。 A_{EC} 是 \ddot{R}_{EC} 對衛星位置之偏微矩陣。 B_{EC}

是 \ddot{R}_{EC} 對衛星速度之偏微矩陣。 C_{EC} 是 \ddot{R}_{EC} 對 9 個經驗係數之偏微矩陣。

O_3 ：秩為三的零矩陣。而透過

$$\int \ddot{Y} dt = \dot{Y}(t) = \left(\frac{\partial \dot{r}(t)}{\partial P^T} \right)_{3 \times \ell}, \quad \int \dot{Y} dt = Y(t) = \left(\frac{\partial r(t)}{\partial P^T} \right)_{3 \times \ell} \quad (2-16)$$

的方式，可利用加速度對參數的偏微分積分求得位置對參數的偏微分 $\frac{\partial r}{\partial P^T}$ 及速度對參數的導數 $\frac{\partial \dot{r}}{\partial P^T}$ 。一般衛星大地常用的觀測量（如 SLR 測距或 Doppler 速度變化率）之所需偏微分均可由 Y 及 \dot{Y} 以鏈微分方式求得。

再利用(2-9)式的平差模式，透過最小二乘法求得最小變方解的方式，所以有

$$\phi = V^T P V = \text{minimum}$$

故

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 = (A^T P A \hat{X} - A^T P L) = 0 \Rightarrow A^T P A \hat{X} = A^T P L \quad (2-17)$$

此即為法方程式（normal equation），其解算式則為

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (2-18)$$

有了起始坐標之後再加上力學模式就可進行軌道積分，以下數學式子為力學模式積分基本概念(Seeber, 1993)：

$$\ddot{r} = \frac{GM}{r^3} \bar{r} + a(t, r, \dot{r}, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \quad (2-19)$$

$$\dot{r} = \dot{r}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \quad (2-20)$$

$$r = r(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \quad (2-21)$$

(2-20) 和 (2-21) 式中， $C_1 \sim C_6$ 為 6 個積分常數， t 為時間函數。因此只要能決定出六個積分常數，此微分方程的解 r 和 \dot{r} 便可確定。而在 Bernese 5.0 所使用的積分方式是以最小二乘配置(least square collocation)的方式搭配 Euler 多項式進行

積分(Beutler et al., 2004) 其式為

$$r(t) = r_0 + (t - t_0) \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot (t - t_0)^2 \cdot f(t_0, r_0, v_0, \dots) \quad (2-22)$$

將(2-22)式對時間取導數，即可得出速度向量的多項式

$$v(t) = v_0 + (t - t_0) \cdot f(t_0, r_0, v_0, \dots) \quad (2-23)$$

Euler 多項式階數只取至二階，故 Euler 多項式僅能用於計算位置與速度；若要進行高階多項式的密合，則多項式之通式為

$$r(t) = \sum_{i=0}^q (t - t_0)^i \cdot r_{0i} \quad (2-24)$$

q 為多項式的階數， r_{0i} 為多項式的係數。求得多項式之係數是數值積分的主要核心。本文要求近似的起始座標與真值的起始座標相接近，且微分方程滿足 $q-1$ 時刻的多項式。此方程式為非線性，故須透過迭代方可進行求解。圖 2-1 為減動力法計算流程（劉展鵬，2005）。

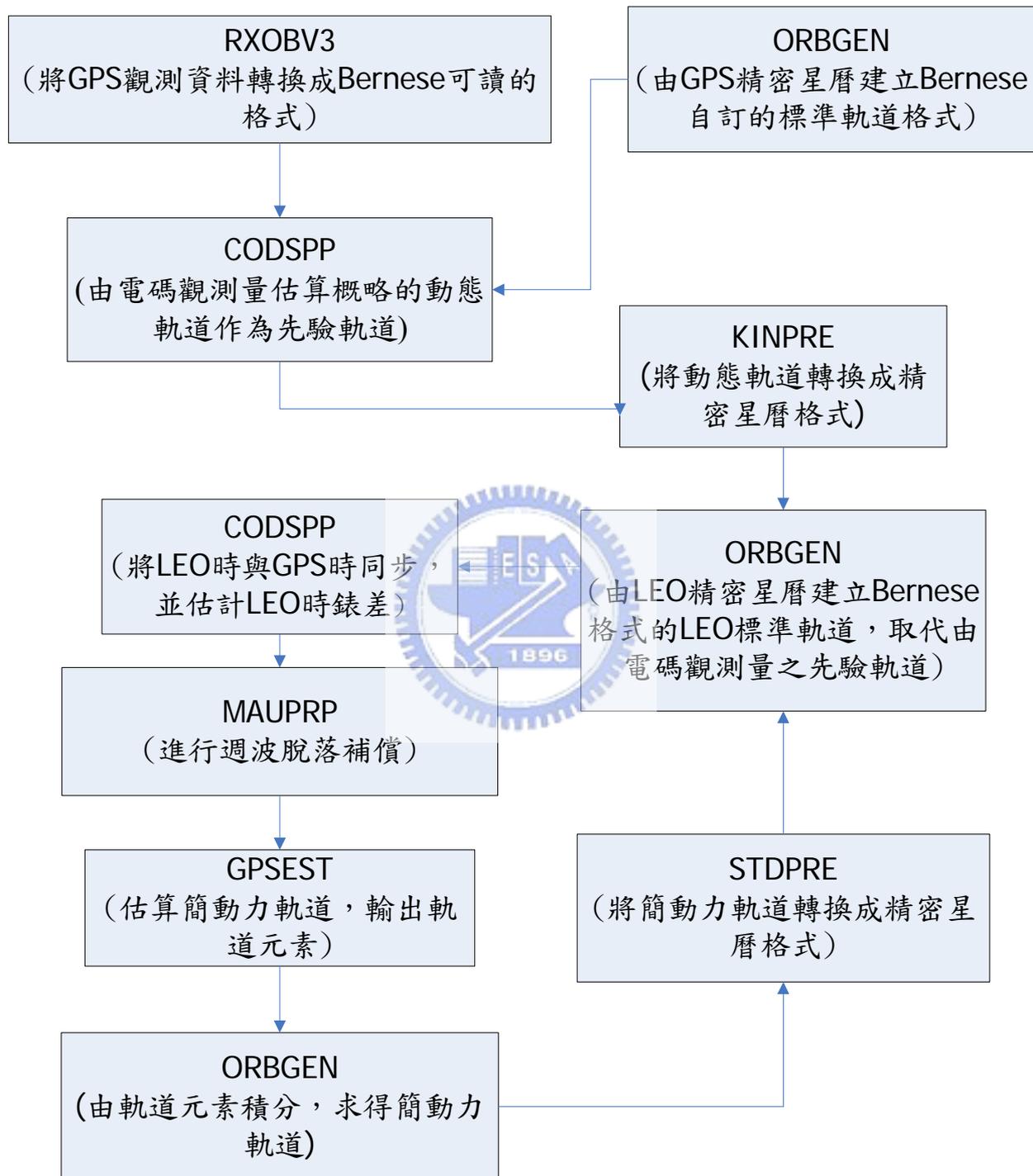


圖 2-1 Bernese 5.0 減動力法計算流程(劉展鵬，2005)

2-4 動態法定軌

動態法定軌不同於減動力法是因為動態法不加任何的力模式，單純的使用 GPS 觀測量進行三維坐標的解算，圖 2-2 為幾何法動態定位示意圖(劉展鵬，2005)。

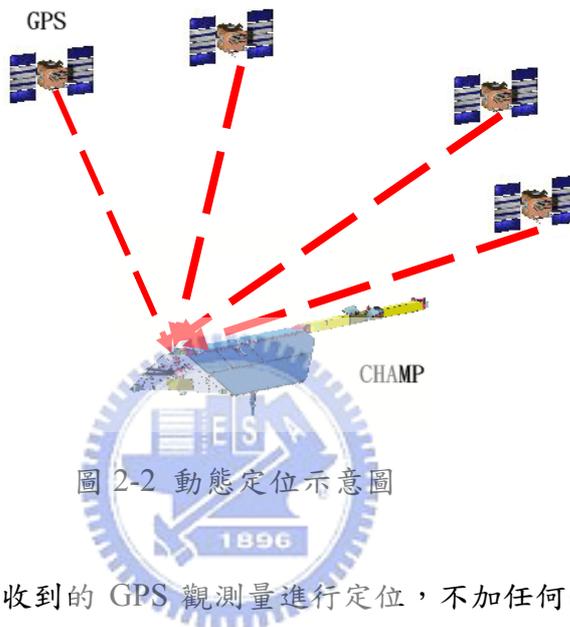


圖 2-2 動態定位示意圖

利用低軌衛星所接收到的 GPS 觀測量進行定位，不加任何的力學模式，故動態定位可以反應出地球重力場的變化；若加了力學模式，則重力場的效應有些會被力學的模式給吸收掉，故動態法的定位利於重力場的反行。以下以數學式子表示：將(2-7)式對 x, y, z, dt, N 做微分，可得：

$$L_3 + V = L_3^0 + \frac{\partial L_3}{\partial x} dx + \frac{\partial L_3}{\partial y} dy + \frac{\partial L_3}{\partial z} dz + \frac{\partial L_3}{\partial t} dt + \frac{\partial L_3}{\partial N} dN \quad (2-25)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_3^1}{\partial x}, \frac{\partial L_3^1}{\partial y}, \frac{\partial L_3^1}{\partial z}, \frac{\partial L_3^1}{\partial t}, \frac{\partial L_3^1}{\partial N} \\ \frac{\partial L_3^2}{\partial x}, \frac{\partial L_3^2}{\partial y}, \frac{\partial L_3^2}{\partial z}, \frac{\partial L_3^2}{\partial t}, \frac{\partial L_3^2}{\partial N} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial L_3^n}{\partial x}, \frac{\partial L_3^n}{\partial y}, \frac{\partial L_3^n}{\partial z}, \frac{\partial L_3^n}{\partial t}, \frac{\partial L_3^n}{\partial N} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \\ dN \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} L_3^1 - L_3^0 \\ L_3^2 - L_3^0 \\ \dots\dots\dots \\ L_3^n - L_3^0 \end{bmatrix}$$

再利用(2-9)式的平差模式，透過最小二乘法求得最小變方解的方式，所以有

$$\phi = V^T P V = \text{minimum}$$

故法方程式為

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 = (A^T P A \hat{X} - A^T P L) = 0 \Rightarrow A^T P A \hat{X} = A^T P L \quad (2-26)$$

其未知數解則為

$$\hat{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (2-27)$$

動態法的精度取決於所接收到 GPS 衛星顆數的幾何分布、觀測品質的好壞和高取樣率 GPS 時錶的改正精度好壞 (Byun and Schutz, 2001)。圖 2-3 為動態法定軌流程 (劉展鵬, 2005)。

減動力法定軌在求解未知數上並無太大的難處，因為減動力有著力學模式的支持，可藉由數值積分彌補觀測量的不足，故並不需仰賴 GPS 觀測量的多寡，只需求得起始位置，再加上力學模式，利用 Bernese 5.0 的積分器，即可積出一條軌道；然而動態法定軌在求解未知數方面，遇到相當大的問題，需仰賴 GPS 觀測量的多寡以及 GPS 衛星的幾何分佈。若觀測量太少，則可能造成某些時刻無法解算出位置，導致出現斷層。下表 2-2 為動態法與減動力法的比較。

表 2-3 動態法與減動力法之比較

	減動力法	動態法
相位觀測量	L3	L3
一天的觀測數 (30 秒一筆)	2880	2880
未知參數(a:橢球長半徑, e:橢球離心率, i:軌道傾角, M:真近地點角, ω :近地點偏角, Ω :昇交點赤經, N:週波未定值; X、Y、Z:地心地固三維座標, dt:衛星接收儀時錶差)	a, e, i, M, ω , Ω , N, 隨機參數, 9 個經驗參數	X, Y, Z, dt, N
力學模式	有	無
高取樣率衛星時錶改正	需要	需要
利於重力場的推求	不合適	合適

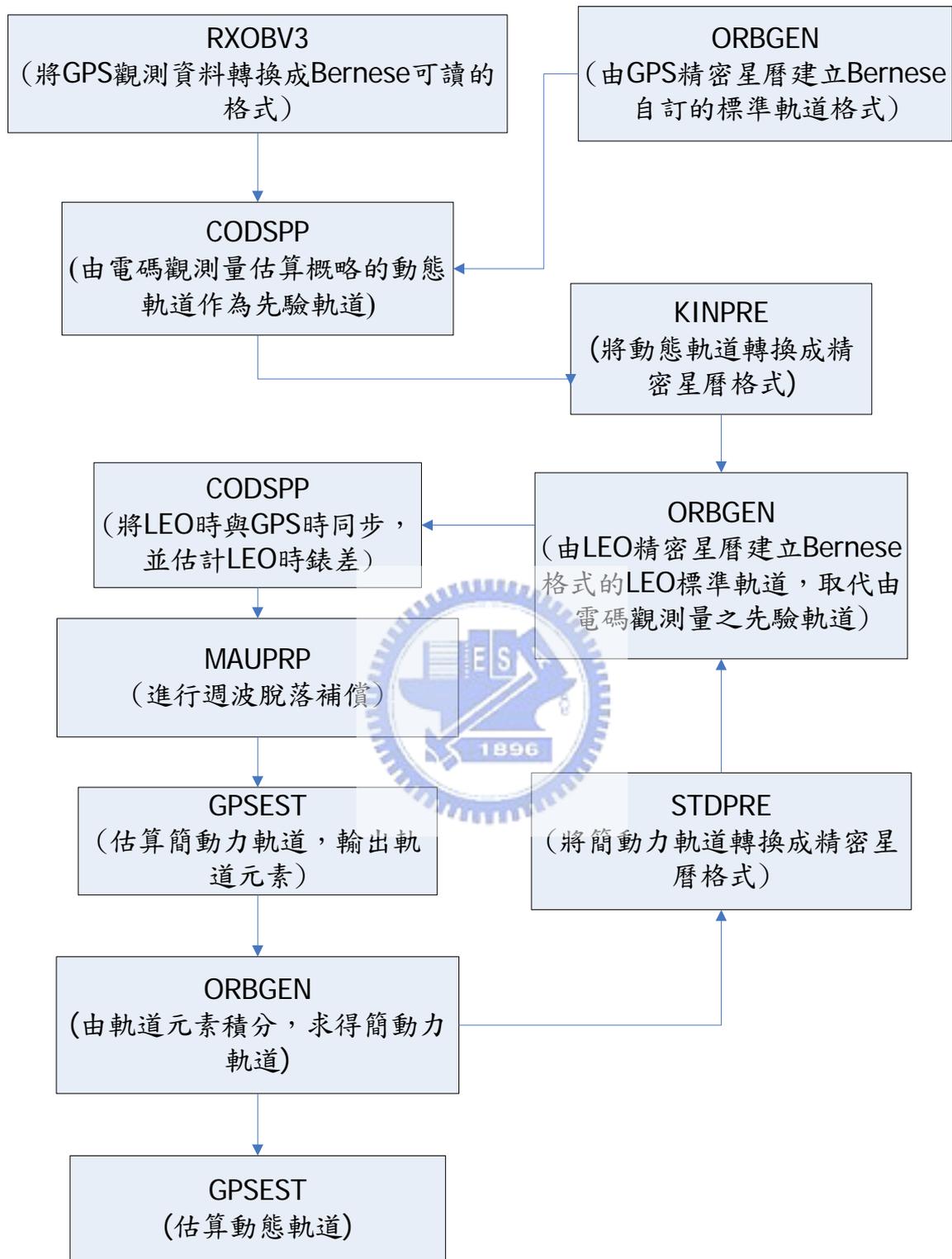


圖 2-3 Bernese 5.0 動態法計算流程(劉展鵬，2005)