第五章 福爾摩沙衛星三號之姿態資料

衛星姿態在衛星定軌中，扮演一個旋轉矩陣的角色，其用途是將慣性坐標轉換到衛星體固坐標，或將衛星體固坐標轉換到慣性坐標。鑒於目前國內關於衛星姿態描述的文獻相當稀少，故本文特地在此做衛星姿態相關原理的描述。

5-1 方向餘弦姿態參數

姿態角控制系統決定衛星在太空中航行的軌道方向，控制姿態角以維持衛星飛行時三軸之平穩，此三軸定義於衛星固定坐標系統，在衛星本體固定坐標系統中，原點為衛星的質量中心(Center of Mass，COM)，飛行方向為X軸，指向地心方向為Ｚ軸，Y軸與X、Z軸互成右旋坐標系統。繞X軸旋轉的姿態角稱為roll（φ_x），繞Y軸旋轉的姿態角稱為pitch（φ_y），繞Ｚ軸旋轉的姿態角稱為yaw（φ_z）。衛星姿態資料主要的目的是將慣性坐標系統轉成衛星本體固定坐標系統。

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

(5-1)式中，下標 b 是代表衛星體固坐標系；下標 i 是代表慣性坐標系。在衛星三軸姿態確定的問題中，因為矩陣 A 完全確定了衛星姿態在慣性坐標系中的狀態，故稱 A 為姿態矩陣。而姿態矩陣中的元素是由衛星體固坐標系與慣性坐標系的單位向量所組成。

$$A = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

假設 x、y、z 表示座標軸的單位向量，下標表示座標系的種類，例如 b、i 分別代表衛星體固坐標系和慣性坐標系。這兩種座標之間的方向餘弦共有九個。

$$x_b \cdot x_i = A_{xx} \quad y_b \cdot x_i = A_{yx} \quad z_b \cdot x_i = A_{zx}$$
$$x_b \cdot y_i = A_{xy} \quad \cdots \quad \cdots \tag{5-3}$$
$$x_b \cdot z_i = A_{xz} \quad \cdots \quad \cdots$$

利用這些方向餘弦，可將衛星體固坐標系的任一座標軸在慣性坐標系中的表達式為：

$$x_b = A_{xx} x_i + A_{xy} y_i + A_{xz} z_i \tag{5-4}$$

在(5-2)式中，由於慣性坐標和衛星體固坐標都是正交的坐標系統，所以此九個方向餘弦滿足六個約束條件。由各單位向量可以導出三個條件：

$$\begin{aligned} A_{xx}^2 + A_{xy}^2 + A_{xz}^2 &= 1 \\ A_{yx}^2 + A_{yy}^2 + A_{yz}^2 &= 1 \\ A_{zx}^2 + A_{zy}^2 + A_{zz}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{5-5}$$

由衛星體固坐標的正交特性可導出另外三個條件：

$$\begin{aligned} A_{xx}A_{yx} + A_{xy}A_{yy} + A_{xz}A_{yz} &= 0 \\ A_{xx}A_{zx} + A_{xy}A_{zy} + A_{xz}A_{zz} &= 0 \\ A_{yx}A_{zx} + A_{yy}A_{zy} + A_{yz}A_{zz} &= 0 \end{aligned} \tag{5-6}$$

因此只有三個姿態參數是獨立的。換言之，只要用三個獨立參數就能決定衛星三軸姿態在慣性坐標系中的狀態。根據(5-5)和(5-6)可以得知姿態矩陣 A 具有下列特性：

$$AA^T = I \tag{5-7}$$

I 為單位矩陣，(5-7)式表明矩陣 A 是正交矩陣。實際上，姿態矩陣也就是慣性坐標和衛星體固坐標之間的轉換矩陣。

5-2 尤拉軸(Euler axis)/角參數式姿態參數

然而應用姿態矩陣表示衛星姿態需用九個方向餘弦，在求解方向餘弦時，還要引入六個約束方程，如(5-5)和(5-6)，使用很不方便，這種方法沒有直觀的顯示

出衛星姿態的幾何圖像，且很有可能造成姿態矩陣奇異的問題出現。目前，在理論力學中有一個著名的尤拉定理(Euler theory)：剛體繞固定點的任一位移，可由繞通過此固定點的某一軸，旋轉一個角度而得到。此定理來自於正交矩陣 A 的一個性質：一個正交矩陣至少滿足一個特徵值為 1 的特徵向量，亦即存在一個滿足下面等式的單位向量 e：

$$e=Ae \tag{5-8}$$

(5-8)式表明剛體轉軸方向的向量 e 在衛星體固坐標中的分量與在慣性坐標中的分量相同，而任何姿態轉動都對應一個轉換矩陣 A。描述姿態的參數有四個；轉軸的單位向量 e 再慣性坐標系中的三個方向餘弦 e_x, e_y, e_z，以及繞此轉軸的轉角 Φ。下面將敘述四個姿態參數與九個方向餘弦的關係。參見圖 5-1，向量 a 與尤拉軸 e 夾 θ 角，繞 e 軸旋轉時，向量 a 在軸線 e 的圓錐面上移動，與 e 軸的夾角不變，轉過 Φ 角，向量 a 移至 a'。在垂直於 e 的向量上作坐標向量 v，u：

$$v=\frac{e\times a}{|e\times a|}=\frac{1}{a\sin\theta}(e\times a) \tag{5-9}$$

$$u=v\times e=\frac{1}{a\sin\theta}(e\times a)\times e=\frac{1}{a\sin\theta}[a-(e\cdot a)e] \tag{5-10}$$

過 a'的端點，作向量 u'

$$u'=\cos\Phi\cdot u+\sin\Phi\cdot v \tag{5-11}$$

利用這些坐標向量，可將向量 a 和 a'表示為

$$a=a\cos\theta\cdot e+a\sin\theta\cdot u \tag{5-12}$$

$$a'=a\cos\theta\cdot e+a\sin\theta\cdot u' \tag{5-13}$$

將(5-9)、(5-10)和(5-11)帶入(5-13)，有

$$a'=(1-\cos\Phi)(e\cdot a)e+\cos\Phi\cdot a+\sin\Phi\cdot(e\times a) \tag{5-14}$$

以(5-14)為例，慣性坐標x_i經尤拉轉動得出對應的衛星體固坐標x_b，可表示為

$$x_b = (1-\cos\Phi)(e\cdot x_i)e + \cos\Phi\cdot x_i + \sin\Phi\cdot(e\times x_i) \tag{5-16}$$

同理可得出y_b、z_b。

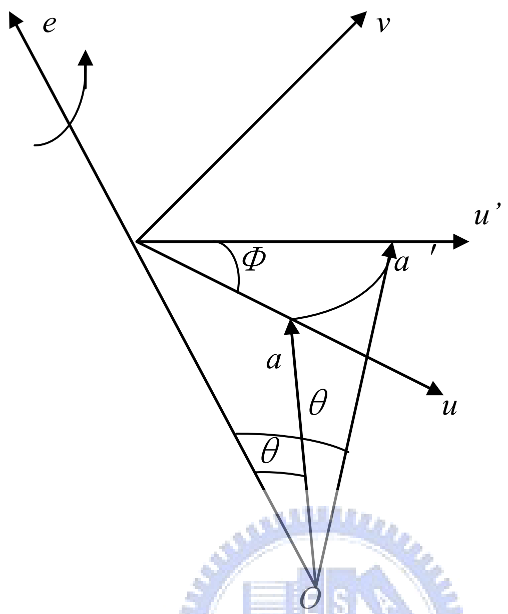

圖 5-1 歐拉軸轉角示意圖

令尤拉軸e在慣性坐標的向量式為

$$e = e_x x_i + e_y y_i + e_z z_i \tag{5-17}$$

將(5-17)代入(5-16)式及兩個類似的y_b、z_b，可得出e_x, e_y, e_z, Φ等四個姿態參數描述的姿態矩陣：

$$A(e,\Phi) = \begin{bmatrix} \cos\Phi + e_x^2(1-\cos\Phi) & e_x e_y(1-\cos\Phi) + e_z\sin\Phi & e_x e_z(1-\cos\Phi) - e_y\sin\Phi \\ e_x e_y(1-\cos\Phi) - e_z\sin\Phi & \cos\Phi + e_y^2(1-\cos\Phi) & e_y e_z(1-\cos\Phi) + e_x\sin\Phi \\ e_x e_z(1-\cos\Phi) + e_y\sin\Phi & e_y e_z(1-\cos\Phi) - e_x\sin\Phi & \cos\Phi + e_z^2(1-\cos\Phi) \end{bmatrix}$$
$$= \cos\Phi\cdot I + (1-\cos\Phi)\cdot ee^T - \sin\Phi\cdot\tilde{E} \tag{5-18}$$

ee^T為向量的外積，$\tilde{E}$為斜對稱矩陣

$$\tilde{E}=\begin{bmatrix}0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0\end{bmatrix} \tag{5-19}$$

轉軸 e 稱為尤拉軸，轉角 Φ 稱為尤拉轉角(Euler angle)，因此這種定義衛星姿態的方法稱為尤拉軸/角參數式。表面上共有四個參數，但仍然只有三個參數是獨立的，因此 $\|e\|=e_x^2+e_y^2+e_z^2=1$。對照(5-1)和(5-18)，可以根據尤拉軸/角參數式表示兩個坐標系之間的方向餘弦。如：已知方向餘弦，按下式計算歐拉參數：

$$e=\frac{1}{2\sin\Phi}\begin{bmatrix}A_{yz}-A_{zy} \\ A_{zx}-A_{xz} \\ A_{xy}-A_{yx}\end{bmatrix} \tag{5-18}$$

$$\cos\Phi=\frac{1}{2}[tr(A)-1] \tag{5-19}$$

$tr(A)=A_{xx}+A_{yy}+A_{zz}$ 是姿態矩陣 A 的跡，繞任意轉軸轉動的 Φ 角，姿態矩陣的跡不變。當姿態相對慣性座標的轉動很小時，尤拉軸/角參數式的姿態矩陣可寫為：

$$A(e,\Delta\Phi)=I-\Delta\Phi\cdot\tilde{E} \tag{5-20}$$

相當於繞尤拉軸轉動 $\Delta\Phi$ 。

尤拉轉角 Φ 反應兩種座標軸之間的幾何關係。參見圖 5-2，令 φ_x、φ_y、φ_z 是慣性坐標系和衛星體固坐標系中對應坐標軸之間的夾角，顯然，姿態矩陣中對角線上的元素可以表示成：

$$A_{mm}=\cos\varphi_m=\cos\Phi+e_m^2(1-\cos\Phi)，\quad m=x，y，z \tag{5-21}$$

將上式經過三角恆等式變換成：

$$\sin^2\frac{\Phi}{2}=(1-e_m^2)2\sin^2\frac{\Phi}{2}\quad，\quad m=x，y，z \tag{5-22}$$

將 $m=x$，y，z 分別代入(5-22)並將三式相加，得

$$\sin^2\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{2}(\sin^2\frac{\varphi_x}{2}+\sin^2\frac{\varphi_y}{2}+\sin^2\frac{\varphi_z}{2}) \tag{5-23}$$

當Φ角很小的時候，有

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2} \tag{5-24}$$

(5-24)適用於評定姿態的誤差。

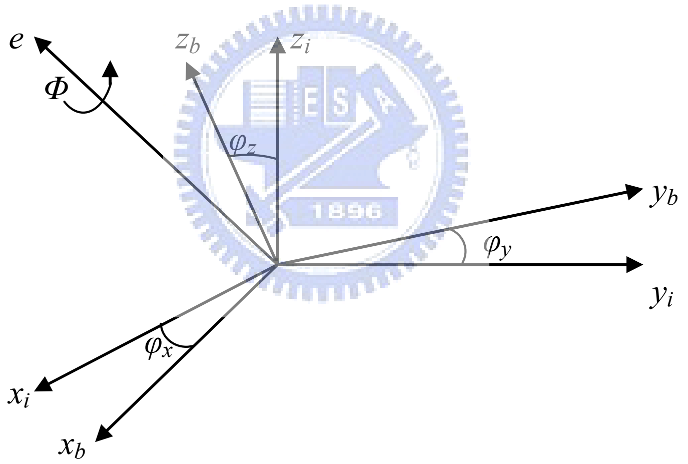

圖 5-2 尤拉轉角示意圖

5-3 尤拉四元素姿態參數

為了便於對姿態矩陣進行運算，由尤拉軸/角參數式組成另外四個姿態參數，前三個代表尤拉軸的方向，第四個尤拉轉角，定義q由三維向量$\hat{q}$和q_4組成，

$$q = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \sin\frac{\Phi}{2} \\ e_y \sin\frac{\Phi}{2} \\ e_z \sin\frac{\Phi}{2} \\ \cos\frac{\Phi}{2} \end{bmatrix} \tag{5-25}$$

此四個參數滿足約束方程

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{5-26}$$

利用三角公式：$\cos\Phi = 2\cos^2\frac{\Phi}{2} - 1, \sin\Phi = 2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}$ 可將尤拉軸/角姿態矩陣 $A(e,\Phi)$ 晝成四元素姿態矩陣 $A(q)$，

$$\begin{aligned} A(e,\Phi) = A(q) &= \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \\ &= (q_4^2 - \hat{q}^T\hat{q})I + 2\hat{q}\hat{q}^T - 2q_4\tilde{Q} \end{aligned} \tag{5-27}$$

(5-27)式中 $\tilde{Q}$ 為 $\hat{q}$ 的斜對稱矩陣，

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

以及四元素與方向餘弦的關係：

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{4q_4}\begin{bmatrix} A_{yz} - A_{zy} \\ A_{zx} - A_{xz} \\ A_{xy} - A_{yx} \end{bmatrix} \\ q_4 &= \pm\frac{1}{2}(tr(A) + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5-28}$$

與方向餘弦相比，尤拉參數僅含四個變量和一個約束方程；與歐拉軸/角參數式相比，姿態矩陣的元素不含三角函數。這是尤拉四元素法的一大優點(章仁為，

1998)。

目前福爾摩沙衛星三號所用的姿態參數矩陣為尤拉四元素。參見圖 5-3 為姿態檔的描述，姿態檔的時間記錄方式是以GPS時間分成年月日時分秒紀錄；而慣性坐標尤拉四元素則被紀錄在att項，q_x、q_y、q_z、q_w分別為(5-25)式中的q_1、q_2、q_3、q_4；sca項則紀錄衛星體固坐標系的尤拉四元素；sad項紀錄太陽能板的驅動角度；rat項紀錄衛星體固坐標三軸轉動的角速度；ang項則記錄了衛星體固坐標系的三軸尤拉角；pve項紀錄衛星地固三維坐標和三維方向的速度；pvi項紀錄了衛星再慣性坐標的三維坐標和三維方向的速度。圖 5-4 為姿態資訊格式及各項的紀錄情況。

目前由於尚在測試階段，NSPO 未有姿態角精度的評估。而從姿態檔案的資訊可發現尚有紀錄衛星的地固坐標和慣性坐標，但由於不知精度如何，況且有些時段出現三維坐標，有些時段卻無三維坐標，見圖 5-4，不過通常是不紀錄，初步判斷其三維坐標應是動態坐標，若是減動力軌道不應該會出現無坐標狀態，理應會藉由積分積出一個三維坐標，故判定是動態三維坐標。

```
*comment: COSMIC attitude data from ATT records and GOX NAV solutions
*comment: Attitude mode: +xAft
*comment: Data type:
*comment:  tim:  GPS time: yr, mon, day, hr, min, sec
*comment:  att:  Inertial attitude, as expected by Bernese:
*comment:        0000 qx, qy, qz, qw 0.00.  Quaternion to convert from Inertial True-of-Date (ITOD)
*comment:        frame to spacecraft frame (described below under sca). That is, a vector, v, in the
*comment:        ITOE frame has coordinates v' = q*vq (* is conjugated) in the spacecraft frame.
*comment:        The opposite transform: A vector, v, in the spacecraft frame, has coordinates
*comment:        v' = qvq* in the ITOE frame.
*comment:  sca:  Quaternion to convert Spacecraft reference frame:
*comment:          Z nadir (TIP) direction,
*comment:          X antenna direction (+X antenna, nominal anti-velocity direction)
*comment:          Y perpendicular to disk of satellite, to the left as one views the -X direction
*comment:            as one stands on top of the satellite
*comment:        to orbit local level frame:
*comment:          Z = nadir = -r/|r|       (where r is s/c position vector)
*comment:          Y = (r x v) / | r x v | (where v is s/c velocity vector)
*comment:          X = Y x Z                (where 'x' is vector cross product)
*comment:        r and v are the position and velocity in the ITOD frame.
*comment:        A vector, u, in the spacecraft frame, has coordinates u' = q*uq in the local
*comment:        level frame.
*comment:     All quaterions (type att and sca) are given in order: qx, qy, qz, qw
*comment:     where qw = cos(theta/2) and q(xyz) = ehat * sin(theta/2)
*comment:  sad:  Solar array drive angle (deg)
*comment:  rat:  Attitude rates:  rollRate, pitchRate, yawRate (deg/sec)
*comment:  ang:  Euler angles:  Bank (roll) angle (deg):      Angle about x-axis
*comment:                       Elevation (pitch) angle (deg): Angle about y-axis
*comment:                       Heading (yaw) angle (deg):     Angle about z-axis
*comment:                         If the yaw angle is close to zero, this means the
*comment:                         S/C is in normal yaw mode (+X antenna aft)
*comment:     All angles are in the right-hand sense and follows the so-called Aerospace sequence:
*commmet:        1) Heading (yaw): the angle about +Z local level axis counted positive from +X toward +Y
*commmet:        2) Elevation (pitch): the angle about new y-axis counted positive from new +z toward new +x
*commmet:        3) Bank (roll): the angle about new x-axis counted positive from new +y toward new +z
*comment:  pve:  Position and velocity in Earth Centered Fixed coordinates (km)
*comment:        X, Y, Z, Xdot, Ydot, Zdot
*comment:  pvi:  Position and velocity in Inertial True-of-Date coordinates (km)
*comment:        X, Y, Z, Xdot, Ydot, Zdot
```

圖 5-3 福衛三號姿態檔的描述

```
tim 2006  5 24 13 51 29.0089999
att 0000 -999.00000000 -999.00000000 -999.00000000 -999.00000000 0.00
sca -0.0044788439 -0.0079990719 -0.0111068469 -0.9998962910
rat    0.01330693    0.00045907    0.01201641
sad   60.0000
ang   -0.50307529   -0.92227133   -1.26878153
pve  -999.0000000  -999.0000000  -999.0000000 -999.00000000 -999.00000000 -999.00000000
pvi  -999.0000000  -999.0000000  -999.0000000 -999.00000000 -999.00000000 -999.00000000
tim 2006  5 24 13 51 39.0050000
att 0000    0.15193494   -0.85310483   -0.25142755   -0.43117527 0.00
sca -0.0050190101 -0.0075177335 -0.0098561813 -0.9999105705
rat    0.01019442    0.00255352    0.01524034
sad   62.0000
ang   -0.56666809   -0.86709350   -1.12521163
pve -3804.2576411  4502.5126148  3559.2205463    0.61442188   -4.31678618    6.06707226
pvi -4510.6001208 -3794.6740059  3559.2109634    4.59478521    0.27631709    6.06707977
```

圖 5-4 福衛三號姿態角的格式