

# 國立交通大學

電子物理學系

碩 士 論 文



單量子點電子傳輸的非馬可夫效應

Effect of non-Markovian coupling on electron transport  
through single quantum dot

研 究 生：吳耿榮

指導教授：褚德三 教授

中 華 民 國 九 十 五 年 七 月

單量子點電子傳輸的非馬可夫效應

Effect of non-Markovian coupling on electron transport  
through single quantum dot

研 究 生：吳耿榮

指導教授：褚德三

國 立 交 通 大 學

電 子 物 理 學 系



Submitted to Department of Electrophysics

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrophysics

July 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年七月

## 摘要：

以 Fujisawa 在 1998 年的 *Science* 所做的聲子的自發性放射現象可由量測量子點的穩態電流能譜分析來得到為開始，我就量子量測的問題提出說：一般考慮的電流都是在電極的化學位(chemical potential)遠低於或遠高於量子點的能階，因此可以用馬可夫近似來處理傳輸的問題；但是，若電極的化學位在量子點能階附近的話，則馬可夫近似就不適用了，其行為就只能用非馬可夫的方法來處理傳輸。而兩者在物理上最大的不同就是記憶效應(memory effect)，也就是說電子會因記憶效應而侷限在傳輸的能階間，馬可夫近似下無此效應，而非馬可夫效應則有此效應。因此，我藉由 Master equation 來計算相關的穩態電流以及平均衰減時間(average decay time)，並藉由改變 Lorentz 能譜的峰值以及其帶寬來探討上述的兩物理量的性質。最後，再與 Fujisawa 的實驗做比較，希望能類比到實際的物理實驗。



## 致謝：

首先感謝褚德三老師能給我這個機會當他的研究生，真的是蠻幸運的，能在好老師的身旁學習物理，真的受益良多；再來要感謝的是主要指導我的陳岳男學長，在論文的方面幾乎都是受益於與學長的討論以及他的指導，雖然過程有些曲折，但是最終依然可以順利完成學業，岳男學長著實助我良多；林高進學長與邱裕煌學長在我的論文中提出了深刻的問題，也是讓我有進一步的體會與認識；李哲明學長，周瑞雯學姊與光胤，奎霖的鼓勵與支持讓我能感受到大家的熱情與人情味，真的很感謝他們！

再來感謝口試委員本系的周武清教授，陳煜璋教授，以及物理系的張正宏教授，他們提出有價值的建議與修正使得論文更加的完善！



摘要.....	i
致謝.....	ii
目錄：.....	iii
 第一章：導論.....	 1
第二章：理論計算.....	3
2.1.節：模型.....	3
2.2.節：Master equation.....	4
2.3.節：Hamiltonian.....	4
2.4.節：Interaction Picture.....	5
2.5.節：對 electron reservoir 的微擾理論.....	5
2.6.節：對 electron reservoir 的能譜分析.....	8
2.6.1.節：馬可夫效應的分析.....	8
2.6.2.節：非馬可夫效應的分析.....	9
2.7.節：量子點能態期望值的運動方程.....	11
2.8.節：Laplace transform 與 inverse Laplace transform.....	12
 第三章：結果與討論.....	 13
3.1.節：穩態電流 ( stationary current ).....	13
3.2.節：平均衰減時間 ( average decay time ).....	13
3.3.節：在不同的情形下非馬可夫效應的分析與討論.....	14
3.3.1.節：含電源的情形.....	14
3.3.2.節：不含電源的情形.....	21
3.4.節：非馬可夫效應在寬能帶極限下與馬可夫效應的比較.....	27
3.5.節：與 Fujisawa 實驗的類比.....	30
 第四章：總結.....	 31
附錄：參考論文.....	32

## 第一章：導論

在 1998 年 Science 出版的一篇論文中[1]，Fujisawa 等人做出了在半導體量子點電子傳輸中，聲子( phonon )的自發性發射( spontaneous emission )造成了穩態電流的增益( enhanced )現象。原本在一般的想法裡，自發性發射只存在於光子場中，也就是愛因斯坦對輻射的量子詮釋：A, B 係數，A 為吸收係數，B 為受激放射係數或自發性放射係數。在 Fujisawa 的實驗中，他的模型為：左右兩量子點中間隔著一位能障壁 (potential barrier)，左量子點接 source 電源，右量子點接 drain 偵測器。由於庫倫阻礙 (Coulomb blockade) 的緣故，使得量子點的能態在三個狀態間變動： $|0\rangle = |N_L, N_R\rangle$ ， $|L\rangle = |N_L + 1, N_R\rangle$ ， $|R\rangle = |N_L, N_R + 1\rangle$ ，也就是僅有一顆額外的電子在左右量子點間變動。由於庫倫充放電能量 ( $\sim 4\text{meV}$  以及  $\sim 1\text{meV}$ ) 以及單量子點的平均能階間距 (大約在  $0.5\text{meV} \sim 0.25\text{meV}$ ) 的能量規模都大於調控的能量規模 (大約在  $\mu\text{eV}$ )，因此藉由調控量子點的偏壓來控制量子點的化學位勢來控制量子點系統只在這三種狀態間變化。

他們對左右兩量子點的化學位勢偏壓的分析如下圖所示：

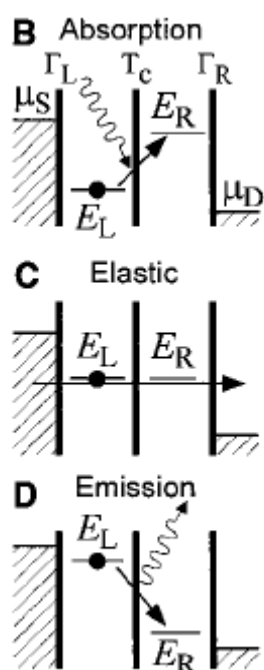


圖 1.1： 左右量子點各接一個 source 和 drain，兩者維持一穩定電流。當利用閘極控制兩量子點的化學位勢時，B 為左低於右，則因為能量守恆的關係而需要吸收一外來能量才會有向上躍遷的行為，如此一來才有電流流過量子點形成通路；C 則為左右位勢相等而直接量子穿隧，當中不吸收外來能量，為一共振穿隧；D 則為左高於右，因此電子由高能態掉到低能態時，同樣因能量守恆而放出能量。

由於穩態電流的能譜所顯示的正負偏壓的增益效果不同：

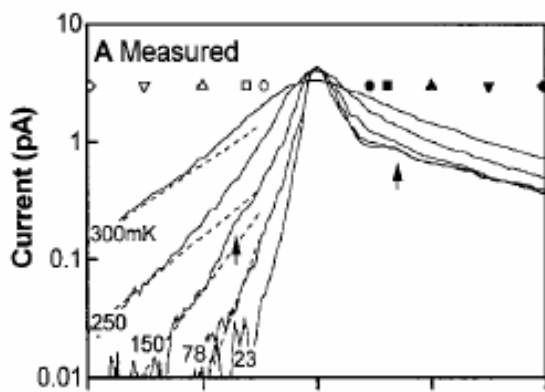


圖 1.2： 在低溫的情況下，很明顯的左右兩邊的偏壓所造成的穩態電流差異相當大:左邊負偏壓的情況即為上圖 B 部分，右邊正偏壓的情況即為上圖 D 部分，中間的峰值即為上圖的 C 部分，左邊電流相較於右邊電流有明顯的增益效果，溫度越低，效果越明顯。

若是依照 Fujisawa 的分析:

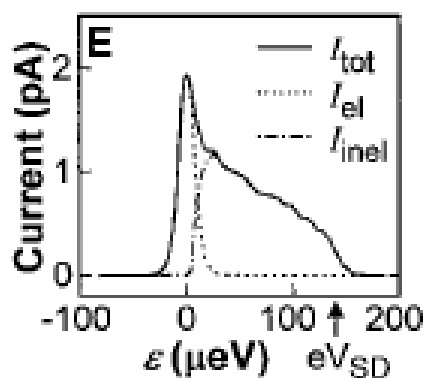


圖 1.3： 總電流可以分成兩部分:一為彈性耦合部分；另一為非彈性耦合部分，而此圖的溫度環境為 23mk。



因為右方偏壓部分為電子放射能量的部分，故結論為電子由高能態(左量子點)掉到低能態(右量子點)釋放出的能量造成聲子的自發性放射，進一步再造成電流的增益效果。

然而，若是考慮到此實驗為量子系統的量測，而量測中偵測器是無法忽略的一環，而一般都考慮到理想的偵測器(偵測器的化學位趨近於負無窮大，電子無法再從偵測器躍遷回量子點)，它的傳輸率為一定值。那麼如果考慮到實際的偵測器(偵測器化學位僅低於量子點能階一有限值)，偵測器的能譜性質是否會影響到所量測到的電流呢?而其影響程度又是多少?

為了回答這些相關的問題，我在此建構了一相似的模型，以簡單的方式來討論偵測器的性質(主要是能譜性質)對傳輸的影響。

## 第二章：理論計算

### 2.1 節：模型

考慮一量子點模型：一本身含有兩能階的量子點左右各銜接一電極，左邊為 source，右邊為 drain，能量比較分別為：source 化學位 (chemical potential) > 量子點激發態 > 量子點基態 > drain 化學位。因庫倫阻礙 (Coulomb blockade) 的原因，整個系統的能態只包含三種：一為量子點兩能階都不含電子，在此以 $|0\rangle$ 能態表示；另一為一電子佔據基態量子點能階，在此以 $|1\rangle$ 能態表示；三為一電子佔據激發態量子點能階，在此以 $|2\rangle$ 能態表示，而兩量子點能階皆被電子佔據的情形不存在。為了考慮非理想的 drain 的情形下（理想狀況為 drain 的化學位勢趨近於負無窮大，電子沒有機會躍遷回去；而非理想的情形為化學位勢與量子點基態能階相差一有限值），穩態電流受到 drain 能譜的影響，我將考慮一 Lorentz 形式的能譜形狀對電流的影響。

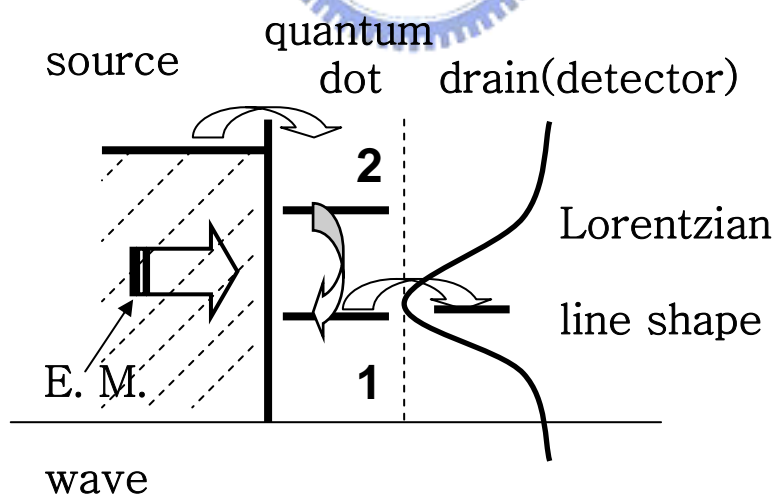


圖 2.1

量子點激發態因為自發性放射 (spontaneous emission) 的關係而衰減到基態，此可類比為 Fujisawa 實驗中的非彈性散射模型。若是再考慮頻率為量子點能



階差的外加電磁場的話，則會造成 Rabi 震盪。如此一來，量子點的兩個能態就可以類比為 Fujisawa 實驗中的彈性散射模型 (elastic coupling)。

## 2.2 節：Master equation

我們無法得到量子點能態的 exact 解，因此我們藉由導出系統量子點的 Master equation 來得到其隨時間的演化。而且我將假設對左右兩電極以及光子場對量子點的耦合是微弱的，因此在左電極和光子場上的運動方程展開使用 Born 和 Markov 近似是合理的。而右電極(偵測器)則因為要考慮非理想的 drain 電極的情形而僅在此做 Born 近似。以下會作更詳細的解釋。

Master equation 為一在密度矩陣法 ( Density Matrix Method )下得到的狀態的運動方程，其特點為將整個系統視為系統部分與 reservoir 部分：系統部分為量子點的能態；而 reservoir 部分則為外加場或其他大系統的部份的能態，並且通常都將 reservoir 視為在熱力學極限下平衡的穩定態，而只考慮系統內能態隨外場的影響下變化的微分方程，以下即是計算的步驟與方法，隨後再以各項參數代入而得到相應的結果。關於 Master equation 的部份可以參考相關的量子光學書籍[4]，[5]等。

## 2.3 節：Hamiltonian

$$H = H_0 + H_I + H_\gamma + H_R$$

$$H_0 = \varepsilon_1 a_1^\dagger a_1 + \varepsilon_2 a_2^\dagger a_2 + \sum_k \varepsilon_k^L c_k^\dagger c_k + \sum_k \varepsilon_k^R d_k^\dagger d_k + \sum_k \varepsilon_k e_k^\dagger e_k \quad (2.3.1)$$

$$H_I = \sum_k (W_k c_k a_2^\dagger + W_k^\dagger c_k^\dagger a_2) + \sum_k (V_{1k} d_k a_1^\dagger + V_{1k}^\dagger d_k^\dagger a_1) + \sum_k (V_{2k} d_k a_2^\dagger + V_{2k}^\dagger d_k^\dagger a_2) \quad (2.3.2)$$

$$H_\gamma = \gamma e^{i\omega t} a_1^\dagger a_2 + c.c. \quad (2.3.3)$$

$$H_R = \sum_k (\gamma_k e_k^\dagger a_1^\dagger a_2 + \gamma_k^\dagger e_k a_2^\dagger a_1) \quad (2.3.4)$$

$H_0$  為系統量子點與兩個 reservoir 的 Hamiltonian。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_1^\dagger a_1$  與  $\varepsilon_2, a_2^\dagger a_2$  分別為量子點基態與激發態的能量與 number operator。 $\sum_k \varepsilon_k^L c_k^\dagger c_k$  為 source 電極的 Hamiltonian,  $\sum_k \varepsilon_k^R d_k^\dagger d_k$  為 drain 電極 (偵測器) 的 Hamiltonian,  $\sum_k \varepsilon_k e_k^\dagger e_k$  為使激發態產生自發性發射的外圍光子場 reservoir 的 Hamiltonian。 $H_I$  為 drain(偵測器)與量子點兩能階的交互作用的 Hamiltonian。 $H_\gamma$  為外加電磁場, 使得電子在量子點產生 Rabi 震盪的 Hamiltonian。 $H_R$  為外圍光子場與量子點交互作用的 Hamiltonian。

系統態的密度算符 (density matrix operator of system) 的定義為：

$$a_i^\dagger \equiv |i\rangle\langle 0|, a_i \equiv |0\rangle\langle i|, a_i^\dagger a_j \equiv |i\rangle\langle j|, n_{ij} \equiv |i\rangle\langle j| = a_i^\dagger a_j, i, j \equiv 1, 2$$

系統態的完備性：

$$\sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i + |0\rangle\langle 0| = 1 \quad (2.3.5)$$



## 2.4 節：Interaction Picture

$$\tilde{O} \equiv e^{iH_0 t} O e^{-iH_0 t}, |\tilde{k}\rangle \equiv e^{iH_0 t} |k\rangle$$

$\tilde{O}$  為  $O$  算符(operator)的 Interaction picture,  $|\tilde{k}\rangle$  為  $|k\rangle$  態的 Interaction picture。

將所有的 Hamiltonian 轉換成在 Interaction Picture 下的形式, 如此一來便能大大地簡化運動方程的形式。

## 2.5 節：對 electron reservoir 的微擾理論

令一總密度矩陣  $\chi$ ：由系統與 reservoir 各自的密度矩陣所組成, 而它的運動

方程爲：

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dt} = -i[\tilde{H}_I + \tilde{H}_R + \tilde{H}_\gamma, \tilde{\chi}] \quad (2.5.1)$$

$\tilde{\chi}$  爲  $\chi$  的 Interaction picture，在此令  $\frac{\hbar}{2\pi} \equiv 1$  以簡化單位及符號表示。此方程可以對應到古典的 Liouville equation，而 J. von Neumann 又將 Liouville equation 推廣到量子力學系統上[6]，也就是(2.5.1)式，因此又被稱爲 Liouville-von Neumann equation。

爲了方便起見，因而將此運動方程中的 Hamiltonian 各自分開來討論：

$$1. \quad -i[\tilde{H}_I, \tilde{\chi}]$$

此項爲偵測器與電源對總密度矩陣的影響。因爲弱偶合作用的關係，因此對上式作二階微擾展開：

$$\begin{aligned} & -i[\tilde{H}_I, \tilde{\chi}] \\ & = -i[\tilde{H}_I, \tilde{\chi}_0] - \int_0^t dt [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\chi}(t')]] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

因爲討論的主體是系統的密度矩陣，而且 reservoir 的能態爲達到熱平衡的穩定態，系統與 reservoir 在初始狀態互不影響，因此總密度矩陣寫成下列近似：

$$\tilde{\chi}(t) \approx R_0 \tilde{\rho}(t) \quad \tilde{\rho}(t) \approx \text{Tr}_R(\tilde{\chi}(t)) \quad (2.5.3)$$

$\tilde{\rho}(t)$  爲系統的密度矩陣， $R_0$  爲 reservoir 的熱平衡下的密度矩陣，而系統的密度矩陣可以近似爲對總密度矩陣的 reservoir 分量取 trace，亦可稱爲 reduced density matrix。這是量子統計中對 reservoir 的處理方法。

因此，系統的密度矩陣的運動方程即可得出：

$$\begin{aligned}
 & -iTr_R(\left[\widetilde{H}_I, \widetilde{\chi}_0\right]) - Tr_R\left(\int_0^t dt \left[\widetilde{H}_I(t), \left[\widetilde{H}_I(t'), R_0 \widetilde{\rho}\right]\right]\right) \\
 & = -Tr_R\left(\int_0^t dt \left[\widetilde{H}_I(t), \left[\widetilde{H}_I(t'), R_0 \widetilde{\rho}\right]\right]\right)
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

以上方程式第一行第一項已令其為零，這是因為當中包含的 **reservoir** 項為非平衡態之故。(2.5.4)式最後一行即為 **Born** 近似 ( $\widetilde{\chi}(t) \approx R_0 \widetilde{\rho}(t)$ )。

將(2.5.4)再做進一步的展開：

$$\begin{aligned}
 & -Tr_R\left(\int_0^t dt \left[\widetilde{H}_I(t), \left[\widetilde{H}_I(t'), R_0 \widetilde{\rho}\right]\right]\right) \\
 & = -\int_0^t dt L_2(t, t') - \int_0^t dt R_1(t, t') - \int_0^t dt R_2(t, t')
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\begin{aligned}
 L_2(t, t') & = -\sum_k |W_k|^2 (1 - \bar{n}_k) e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} (\widetilde{a}_2^\dagger(t) \widetilde{a}_2(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_2(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t)) \\
 & \quad - |W_k|^2 \bar{n}_k e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} (-\widetilde{a}_2^\dagger(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t)) \\
 & \quad - |W_k|^2 (1 - \bar{n}_k) e^{i\varepsilon_k^L(t-t')} (-\widetilde{a}_2(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{a}_2(t)) \\
 & \quad - |W_k|^2 \bar{n}_k e^{i\varepsilon_k^L(t-t')} (\widetilde{a}_2(t) \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t))
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}
 R_1(t, t') & = -\sum_k |V_{1k}|^2 (1 - \bar{n}_{1k}) e^{-i\varepsilon_k^R(t-t')} (\widetilde{a}_1^\dagger(t) \widetilde{a}_1(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_1(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1^\dagger(t)) \\
 & \quad - |V_{1k}|^2 \bar{n}_{1k} e^{-i\varepsilon_k^R(t-t')} (-\widetilde{a}_1^\dagger(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1(t') \widetilde{a}_1^\dagger(t)) \\
 & \quad - |V_{1k}|^2 (1 - \bar{n}_{1k}) e^{i\varepsilon_k^R(t-t')} (-\widetilde{a}_1(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1^\dagger(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1^\dagger(t') \widetilde{a}_1(t)) \\
 & \quad - |V_{1k}|^2 \bar{n}_{1k} e^{i\varepsilon_k^R(t-t')} (\widetilde{a}_1(t) \widetilde{a}_1^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_1^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_1(t))
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

$$\begin{aligned}
 R_2(t, t') & = -\sum_k |V_{2k}|^2 (1 - \bar{n}_{2k}) e^{-i\varepsilon_k^R(t-t')} (\widetilde{a}_2^\dagger(t) \widetilde{a}_2(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_2(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t)) \\
 & \quad - |V_{2k}|^2 \bar{n}_{2k} e^{-i\varepsilon_k^R(t-t')} (-\widetilde{a}_2^\dagger(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t)) \\
 & \quad - |V_{2k}|^2 (1 - \bar{n}_{2k}) e^{i\varepsilon_k^R(t-t')} (-\widetilde{a}_2(t) \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t') + \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{a}_2(t)) \\
 & \quad - |V_{2k}|^2 \bar{n}_{2k} e^{i\varepsilon_k^R(t-t')} (\widetilde{a}_2(t) \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') - \widetilde{a}_2^\dagger(t') \widetilde{\rho}(t') \widetilde{a}_2(t))
 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

$L_2(t, t')$  為 source 接到量子點激發態的部份； $R_1(t, t')$  為偵測器耦合到量子點基態的部份； $R_2(t, t')$  為偵測器耦合到量子點激發態的部份。 $\bar{n}_k$ ， $\bar{n}_{1k}$ ， $\bar{n}_{2k}$  皆為 Fermi 分

布函數：  $\bar{n}_k = \text{Tr}_R(R_0 c_k^\dagger c_k)$  ,  $\bar{n}_{1k} = \text{Tr}_R(R_0 d_k^\dagger d_k)$  ,  $\bar{n}_{2k} = \text{Tr}_R(R_0 d_k^\dagger d_k)$  。因爲 source 爲一完美情形：source 的化學位勢趨近於無窮大， $\bar{n}_k$  趨近於 1；因爲討論的環境爲低溫的情況，所以 drain 的 Fermi 函數：  $(\mu_R - \varepsilon_k)$  爲一小於零的有限值，在低溫極限下：

$$f_k = \frac{1}{1 + e^{-\frac{(\mu_R - \varepsilon_k)}{kT}}} \rightarrow 0, \quad \mu_R \text{ 爲偵測器的化學位, } \varepsilon_k \text{ 爲偵測器的能態能量}$$

## 2.6 節：對 electron reservoir 能譜的分析

### 2.6.1 節：馬可夫效應的分析 ( effect of Markovian coupling )

由以上的運動方程 (2.5.5)~(2.5.8) 取與 source 相關的項來討論：

$$\sum_k |W_k|^2 \bar{n}_k e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon(t-t')} \quad (2.6.1)$$

$$\nu(\varepsilon) = \sum_k |W_k|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^L)$$

$\nu(\varepsilon)$  爲電子穿隧的狀態密度，亦爲著名的 Fermi Golden rule。當我假設它與能量無關：

$$\nu(\varepsilon) = \sum_k |W_k|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^L) \rightarrow \nu(\bar{\varepsilon}) = \sum_k |W_k|^2 \delta(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_k^L) \quad (2.6.2)$$

$\bar{\varepsilon}$  爲量子點基態或激發態能量  $\varepsilon_1$  或  $\varepsilon_2$ ，視處理的情形而定：例如，source 電源傳到量子點激發態，那處理 source reservoir 時  $\bar{\varepsilon}$  就是  $\varepsilon_2$ 。

最後得到的結果爲：

$$\begin{aligned} \sum_k |W_k|^2 \bar{n}_k e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} &\rightarrow \nu(\bar{\varepsilon}) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon e^{-i\varepsilon(t-t')} \\ &\rightarrow \Gamma_L \delta(t-t') \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\Gamma_L \equiv 2\pi\nu(\bar{\varepsilon}) = 2\pi \sum_k |W_k|^2 \delta(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_k^L)$$

$\Gamma_L$  爲 source decay rate。而運動方程中與 source 相關的項爲：

$$-\Gamma_L (\tilde{a}_2(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{\rho}(t) - \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2(t) + \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{a}_2^\dagger(t)) \quad (2.6.4)$$

### 2.6.2 節：非馬可夫效應的分析 (effect of non-Markovian coupling)

在此討論非馬可夫效應是爲了應付非理想狀態的 drain 的偵測器。因爲非理想狀態的 drain 會受到 drain 化學位與待測能階的能量差的影響，而導致 decay rate 的變化。而馬可夫效應與非馬可夫效應的差異反應在傳輸上的效果即在此。

在此同樣在運動方程中 (2.5.5)~(2.5.8) 討論與偵測器相關的項：

$$\sum_k |V_{ik}|^2 \bar{n} e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon(t-t')} \quad (2.6.5)$$

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \sum_k |V_{ik}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^L) \\ &\rightarrow \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon_k^L) |V_{ik}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^L) d\varepsilon_k^L \\ &\rightarrow \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (\varepsilon_k^L - u)^2)} |V_{ik}|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_k^L) d\varepsilon_k^L \\ &\rightarrow \sum_k |V_{ik}|^2 \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (\varepsilon - u)^2)} \end{aligned} \quad i=1,2 \quad (2.6.6)$$

由上式就可發現說它與馬可夫效應的能譜差異爲其能量的相依性。在此我取 Lorentz 形式的能譜分布做爲偵測器的能譜分布(Lorentz 分布與能帶的拓寬(band broadening)有關)。

最後得到的結果爲：

$$\begin{aligned} \sum_k |V_{ik}|^2 \bar{n} e^{-i\varepsilon_k^L(t-t')} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \bar{n}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon(t-t')} \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \sum_k |V_{ik}|^2 \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (\varepsilon - u)^2)} e^{-i\varepsilon(t-t')} \\ &\rightarrow \sum_k |V_{ik}|^2 e^{-\sigma|t-t'|} e^{-iu(t-t')} \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

則最後運動方程式中與偵測器相關的項爲：

$$\begin{aligned}
& -\sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt e^{-\sigma|t-t'|} e^{-iu(t-t')} (\tilde{a}_i^\dagger(t) \tilde{a}_i(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{a}_i(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t)) \\
& -\sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt e^{-\sigma|t-t'|} e^{iu(t-t')} (-\tilde{a}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t') + \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t') \tilde{a}_i(t))
\end{aligned} \quad i=1,2 \quad (2.6.8)$$

$$2. \quad -i[\tilde{H}_R, \tilde{\chi}]$$

此項為真空擾動(vacuum fluctuation)造成的自發性放射。其計算方式與上面的偵測器是相似的，其差異僅在自發性放射我以馬可夫效應來處理。因此其相關項為：

$$-\Gamma_{21}(\tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) \tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{\rho}(t) - 2\tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) + \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) \tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t)) \quad (2.6.9)$$

$$3. \quad -i[\tilde{H}_\gamma, \tilde{\chi}]$$

此項為外加電磁場造成的 Rabi 震盪項。因為此為單頻光，故不需要作微擾近似來計算。因此可以直接寫下相關項：

$$-i[\gamma a_1^\dagger a_2 + \gamma^\dagger a_2^\dagger a_1, \tilde{\rho}(t)]$$

此處外加電磁場頻率  $\omega = \frac{2\pi(E_2 - E_1)}{h}$ 。

最終的量子點密度函數的運動方程為：

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = & -\Gamma_L(\tilde{a}_2(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{\rho}(t) - 2\tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2(t) + \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{a}_2^\dagger(t)) \\
& -\sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt e^{-\sigma|t-t'|} e^{-iu(t-t')} (\tilde{a}_i^\dagger(t) \tilde{a}_i(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{a}_i(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t)) \\
& -\sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt e^{-\sigma|t-t'|} e^{iu(t-t')} (-\tilde{a}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t') + \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_i^\dagger(t') \tilde{a}_i(t)) \\
& -\Gamma_{21}(\tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) \tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{\rho}(t) - 2\tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) + \tilde{\rho}(t) \tilde{a}_2^\dagger(t) \tilde{a}_1(t) \tilde{a}_1^\dagger(t) \tilde{a}_2(t)) \\
& -i[\gamma a_1^\dagger a_2 + \gamma^\dagger a_2^\dagger a_1, \tilde{\rho}(t)]
\end{aligned} \quad (2.6.10)$$

等號之後的相關項為上述各種外加場的總效應項。

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0) = & -\Gamma_L \int_0^t dt' (\tilde{a}_2(t') \tilde{a}_2^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') - 2\tilde{a}_2^\dagger(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_2(t') + \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_2(t') \tilde{a}_2^\dagger(t')) \\
& - \sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{-\sigma|t'-t''|} e^{-iu(t'-t'')} (\tilde{a}_i^\dagger(t') \tilde{a}_i(t'') \tilde{\rho}(t'') - \tilde{a}_i(t'') \tilde{\rho}(t'') \tilde{a}_i^\dagger(t')) \\
& - \sum_k |V_{ik}|^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{-\sigma|t'-t''|} e^{iu(t'-t'')} (-\tilde{a}_i(t') \tilde{\rho}(t'') \tilde{a}_i^\dagger(t'') + \tilde{\rho}(t'') \tilde{a}_i^\dagger(t'') \tilde{a}_i(t')) \\
& - \Gamma_{21} \int_0^t dt' (\tilde{a}_2^\dagger(t') \tilde{a}_1(t') \tilde{a}_1^\dagger(t') \tilde{a}_2(t') \tilde{\rho}(t') - 2\tilde{a}_1^\dagger(t') \tilde{a}_2(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_2^\dagger(t') \tilde{a}_1(t')) \\
& - \Gamma_{21} \int_0^t dt' \tilde{\rho}(t') \tilde{a}_2^\dagger(t') \tilde{a}_1(t') \tilde{a}_1^\dagger(t') \tilde{a}_2(t') \\
& - i \int_0^t dt' [\gamma a_1^\dagger a_2 + \gamma^\dagger a_2^\dagger a_1, \tilde{\rho}(t')]
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

## 2.7 節：量子點能態期望值的運動方程

量子點能態的期望值的定義為：

$$\langle A \rangle_t = \text{Tr}_{d, \text{photon}} (\tilde{\rho}(t) \tilde{A}(t)) , \quad A \text{ 為量子點的能態密度算符} \tag{2.7.1}$$

由於先前已對 reservoir(不論是 electron 的或 photon 的)的能態取過 trace，因此在此只要對量子點能態取 trace 即可得到期望值。

經過運算後可得到四條聯立微分方程：

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle n_{11} \rangle_t}{dt} = & -2 \sum_k |V_{1k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} \cos((u - \varepsilon_1)(t - t')) \langle n_{11} \rangle_{t'} \\
& + 2\Gamma_{21} \langle n_{22} \rangle_t - i\gamma \langle n_{12} \rangle_t e^{i\varepsilon_0 t} + i\gamma^\dagger \langle n_{21} \rangle_t e^{-i\varepsilon_0 t}
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle n_{22} \rangle_t}{dt} = & 2\Gamma_L (1 - \langle n_{11} \rangle_t - \langle n_{22} \rangle_t) + i\gamma \langle n_{12} \rangle_t e^{i\varepsilon_0 t} - i\gamma^\dagger \langle n_{21} \rangle_t e^{-i\varepsilon_0 t} \\
& - 2 \sum_k |V_{2k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} \cos((u - \varepsilon_2)(t - t')) \langle n_{22} \rangle_{t'} - 2\Gamma_{21} \langle n_{22} \rangle_t
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(\langle n_{12} \rangle_t e^{i\varepsilon_0 t})}{dt} = & - \sum_k |V_{1k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} e^{i(u - \varepsilon_1)(t - t')} (\langle n_{12} \rangle_{t'} e^{i\varepsilon_0 t'}) \\
& - \sum_k |V_{2k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} e^{-i(u - \varepsilon_2)(t - t')} (\langle n_{12} \rangle_{t'} e^{i\varepsilon_0 t'}) \\
& - i\gamma (\langle n_{11} \rangle_t - \langle n_{22} \rangle_t)
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$



$$\begin{aligned}
\frac{d(\langle n_{21} \rangle_t e^{-i\varepsilon_0 t})}{dt} = & -\sum_k |V_{1k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} e^{i(u-\varepsilon_1)(t-t')} (\langle n_{21} \rangle_{t'} e^{-i\varepsilon_0 t'}) \\
& -\sum_k |V_{2k}|^2 \int_0^t dt' e^{-\sigma(t-t')} e^{-i(u-\varepsilon_2)(t-t')} (\langle n_{21} \rangle_{t'} e^{-i\varepsilon_0 t'}) \\
& -i\gamma(\langle n_{22} \rangle_t - \langle n_{11} \rangle_t)
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

## 2.8 節：Laplace transform 和 inverse Laplace transform

Laplace transform 可以將與 convolution integral 相關的微分方程簡化為純粹的代數運算：

$$n(z) = \text{Laplace}(n(t)) = \int_0^\infty dt e^{-zt} n(t) \tag{2.8.1}$$

因此就上述的四條聯立微分方程作 Laplace transform 之後，在解四組聯立四元一次方程式，最後再做 inverse Laplace transform：

$$n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz e^{zt} n(z) \quad \text{Contour integral} \tag{2.8.2}$$

最後即可得到量子點各能態的機率分布。



### 第三章：結果與討論

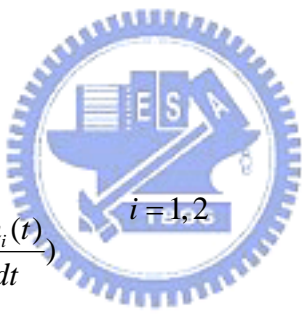
#### 3.1 節：穩態電流 ( stationary current )

穩態電流的定義為：在時間趨近於無窮大時所剩下的不隨時間變化的電流。  
此傳輸參數適用於有接穩定電源 source 的系統。而在上述計算的部份，若欲得到穩態電流，可以由以下的定義得出：

$$I(t \rightarrow \infty) = 2\Gamma_L \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - n_1(t) - n_2(t)) \quad (3.1.1)$$

$2\Gamma_L$  為電源傳輸率， $n_1(t)$  為量子點基態， $n_2(t)$  為量子點激發態。

而量子點能態的穩定態可由其能態  $n_i(t), i=1,2$  的 Laplace 轉換下的 Laurent series 中  $\frac{1}{z}$  的係數：

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} z \text{Laplace}(n_i(t)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} z \int_0^{\infty} dt e^{-zt} n_i(t) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt \left( -\frac{de^{-zt}}{dt} \right) n_i(t) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( -e^{-zt} n_i(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dt e^{-zt} \frac{dn_i(t)}{dt} \right) \\ &= n_i(0) + \int_0^{\infty} dt \frac{dn_i(t)}{dt} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} n_i(t) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$


#### 3.2 節：平均衰減時間 ( average decay time )

平均衰減時間的定義為：

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \int_0^{\infty} dt \left( -t \frac{dn_{ex}(t)}{dt} \right) \\ &= \int_0^{\infty} dt t n_{ex}(t) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$n_{ex}(t)$  為電子在時間  $t$  時佔據激發態的機率。

若是已一般的指數衰減的激發態機率  $n_{ex}(t) = e^{-\Gamma t}$  代入的話， $\Gamma$  為一常數衰減

率(decay rate)，則平均衰減時間就會得到： $\bar{T} = \int_0^{\infty} dt(-t \frac{d(e^{-\Gamma t})}{dt}) = \frac{1}{\Gamma}$ ，因此符合衰減時間的定義。但此系統的衰減率未必是一簡單的常數，因此我利用上述的定義來計算較複雜的平均衰減時間，以使用它來探討非平衡態且非含源(no source)系統的傳輸性質。

若是再進一步討論的話，平均衰減時間可以寫成激發態機率在 Laplace 轉換下在 0 的極限：

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} dt n_{ex}(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt e^{-zt} n_{ex}(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Laplace}(n_{ex}(t)) \quad (3.2.2)$$

### 3.3 節：在不同的情形下非馬可夫效應的分析與討論

在此，我就 Lorentz 能譜的性質：帶寬和能帶峰值與待測能階的能量差來分別討論穩態電流與平均衰減時間的變化。以下的作圖的單位為：電流為無量綱(dimentionless); 平均衰減時間  $T$  為能量的倒數( $\frac{1}{\Gamma_L}$ ); 能帶寬  $\sigma$ ，峰值  $u$  為能量( $\Gamma_L$ )。

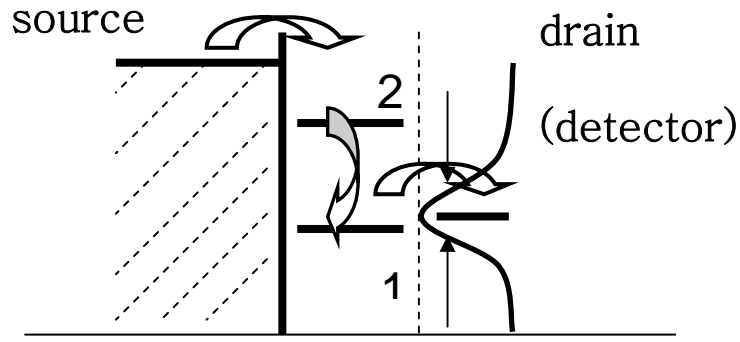
我要討論的系統主要分成兩大部份：

#### 3.3.1 節：含電源的部分

可以類比於 Fujisawa 的實驗，在此討論的物理量為穩態電流，偵測器量測量子點基態的穩態電流，此處又分成三個狀況：

- 1.1. 電子自電源躍遷到量子點激發態，再由激發態自發性發射到基態；

示意圖：



在不同的能帶峰值下，電流對能帶寬的變化：

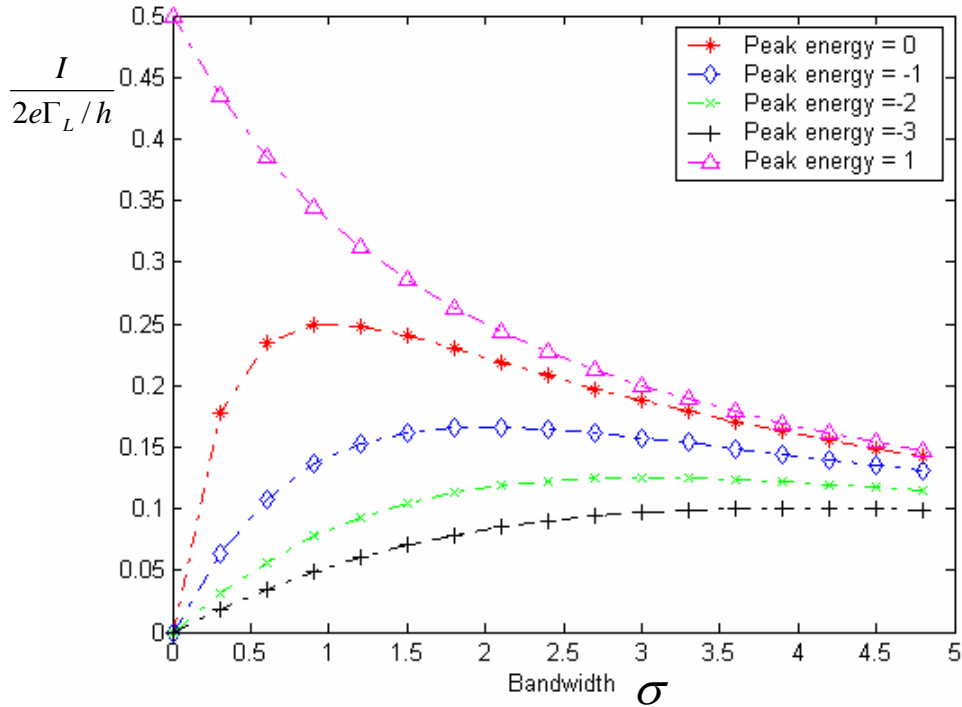


圖 3.1

很明顯的，峰值在基態能量時 (Peak energy = 1)，與其他四者不同：峰值在基態能量時，因為能譜分布的最大值與基態能量相同，因此電流隨能帶寬的增加而遞減： $I \propto \frac{1}{\sigma + C}$ ；其他四者的共同趨勢為：在能帶寬較小時，趨勢為： $I \propto \frac{\sigma}{\sigma + C}$ ，之後，當帶寬遠大於峰值與基態能量間的能量差時，其趨勢就與峰值在基態能量的情形下相同： $I \propto \frac{1}{\sigma + C}$ 。因此，結論是：當峰值偏離基態能量的程度小於帶寬時，帶寬的增加會削減因能帶峰值偏離基態能量的效應而

加速電流的衰減；當峰值與基態能量一致時，帶寬的增加會相對地增加峰值與基態能量的偏離程度而破壞共振穿隧的情況。

在不同的能帶寬的情形下，電流隨能帶峰值變化的情形：

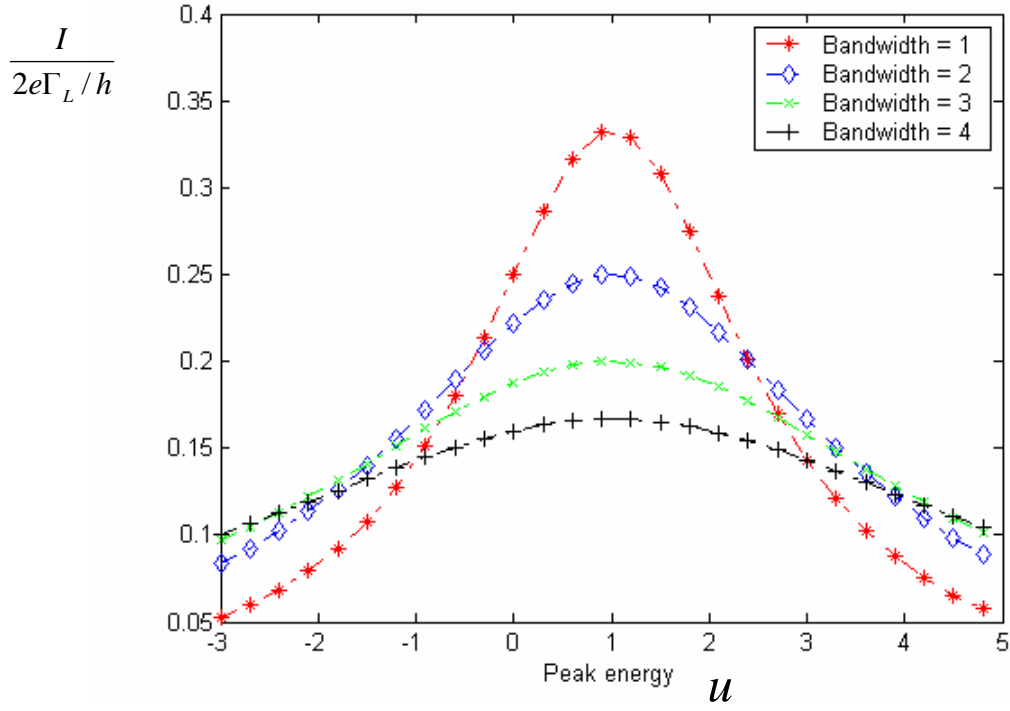


圖 3.2

不論能帶寬為何，穩態電流對 Lorentz 能譜峰值的變化都是以量子點基態能量為中心的 Lorentz 分布。

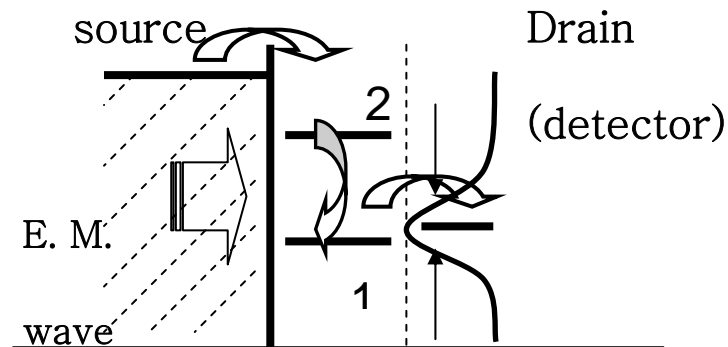
穩態電流的解析解：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L \Gamma_1 \Gamma_{21}}{\Gamma_L \Gamma_{21} + \Gamma_1 (\Gamma_L + \Gamma_{21})}, \quad \Gamma_1 \equiv \frac{W_1 \sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2} \quad (3.3.1)$$

而得到上述圖形的參數為： $W_1 = \sum_k |V_{1k}|^2 = 1$ ， $\Gamma_L = 1$ ， $\Gamma_{21} = 1$ 。以上的物理量皆為能量單位。

1.2. 電子自電源躍遷到量子點激發態，再受到外加電磁場影響與基態形成 Rabi 震盪以及自發性放射的影響；

示意圖：



在不同的能帶峰值下，電流對能帶寬的變化：

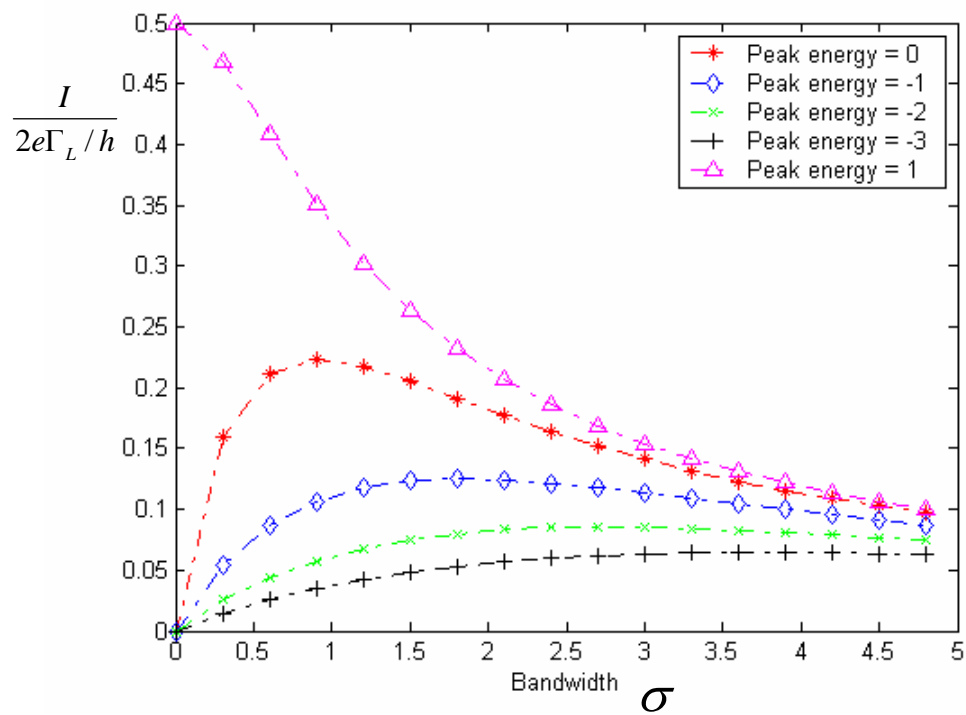


圖 3.3

上圖為在 Lorentz 分布能量峰值在量子點基態能量附近時，穩態電流隨能

帶寬變化的分布圖。此圖的分析與 1.1 情況的電流對能帶寬作圖的分析是相同的，但兩者的差別為：1.1 的情況無 Rabi 震盪所造成的電子侷限效應，因此電流強度較強；反之，1.2 的情況因 Rabi 震盪造成的電子侷限效應而電流強度較小。

在不同的能帶寬下，電流對能帶峰值的變化：

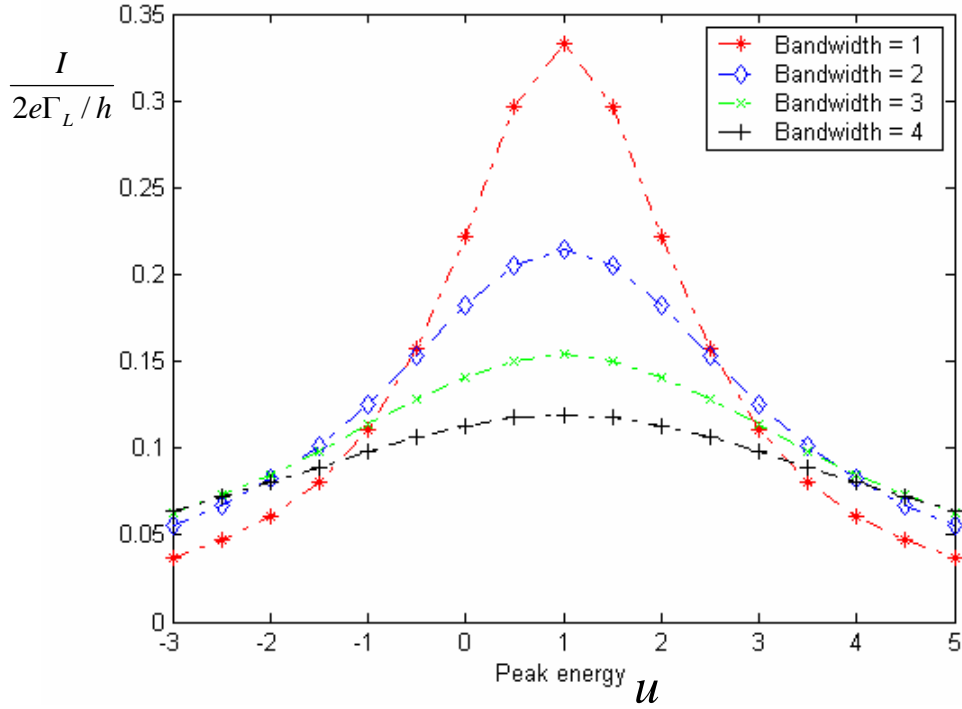


圖 3.4

趨勢與沒有 Rabi 震盪時的情形類似，但圖形較無 Rabi 震盪時有比較向中央集中的情形，原因是 Rabi 震盪有將電子侷限在震盪能階間的效應。

穩態電流的解析解：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L(\Gamma_1\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1\Gamma_{21})}{(\Gamma_1 + 2\Gamma_L)\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_{21}(\Gamma_1 + \Gamma_L) + 2\Gamma_1\Gamma_L} \quad (3.3.2)$$

$$\Gamma_1 \equiv \frac{W_1\sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2}, \quad S_1 + S_2 = \frac{2}{\Gamma_1(1 + (\frac{u - \varepsilon_1}{\sigma})^2)}$$

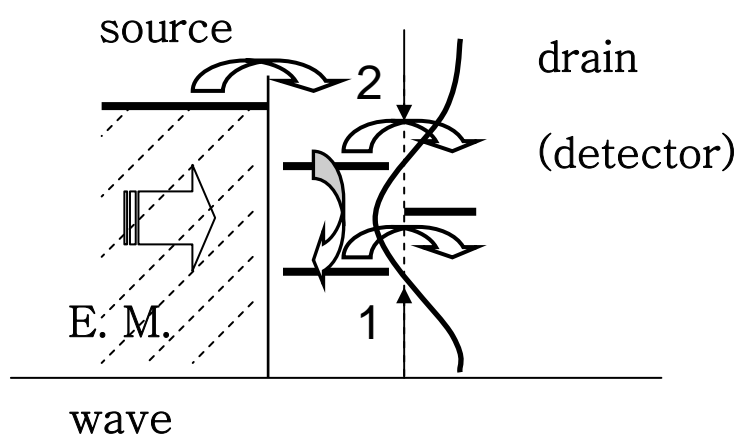
而上述圖形的相關係數為： $W_1 = \sum_k |V_{1k}|^2 = 1$ ， $\Gamma_L = 1$ ， $\varepsilon_1 = 1$ ， $\Gamma_{21} = 1$ 。以上的

物理量皆為能量單位。

1.3. 電子自電源躍遷到量子點激發態，除了自發性放射到基態以及與基態形成

Rabi 震盪外，偵測器耦合到兩量子點能態；

示意圖：



在外加電磁場以及自發性發射的影響下，偵測器的 Lorentz 能帶耦合到兩量子點能階，探討不同性質下的 Lorentz 分布能譜對電流的影響。

在不同的能帶峰值下，電流隨半能帶寬的變化：

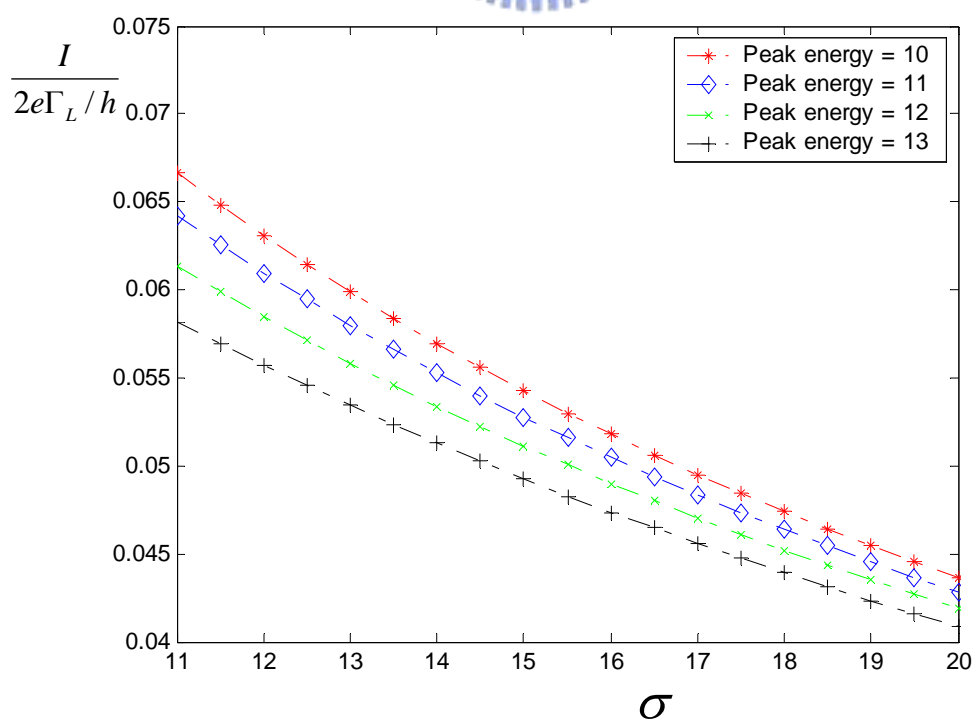


圖 3.5



上圖為在 Lorentz 分布能量峰值在量子點基態能量附近時，穩態電流隨能帶寬變化的分布圖。電流在不同的 Lorentz 峰值，在寬能帶近似 wild-band approximation 下，強度與帶寬成反比；而四者的相對強度與峰值偏離基態能量的程度成反比。

在不同的能帶寬下，電流隨能帶峰值的變化：

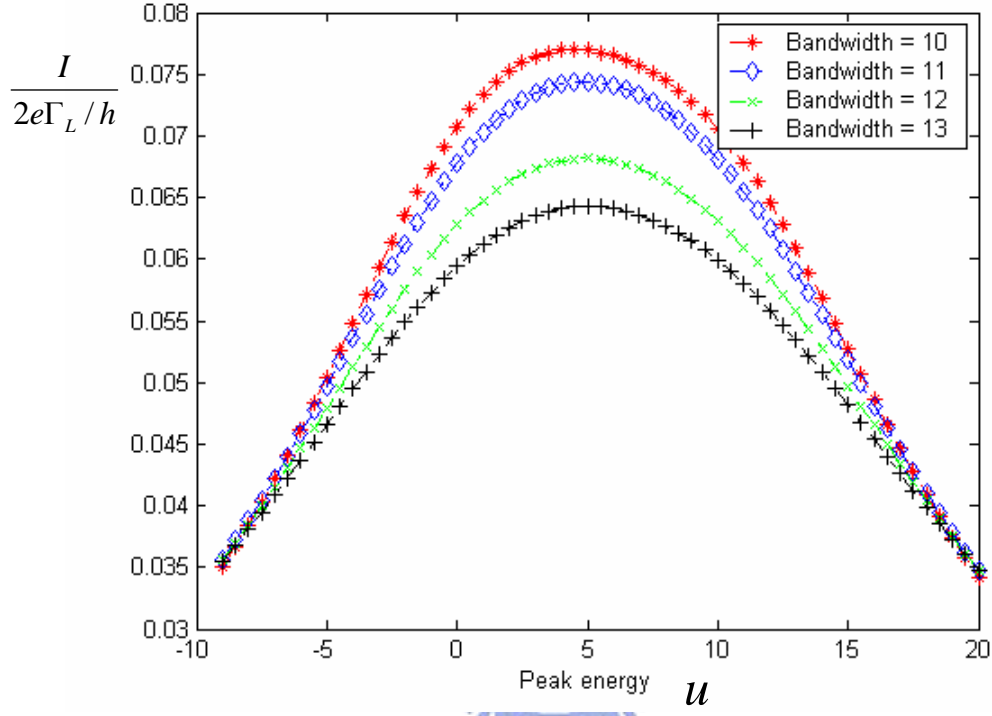


圖 3.6

上圖為不同的能帶寬下，電流對 Lorentz 峰值的變化作圖。電流因為 Lorentz 能帶耦合到兩量子點能階而使得兩能階的中央能量為電流的最大值，其分布亦為 Lorentz 分布。

穩態電流的解析解：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L((\Gamma_1 + \Gamma_2)\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_{21}))}{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\Gamma_L)\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_{21}(\Gamma_1 + \Gamma_L) + 2\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_L)} \quad (3.3.3)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + (\Gamma_1 \frac{(u - \varepsilon_1)}{\sigma} - \Gamma_2 \frac{(u - \varepsilon_2)}{\sigma})^2}, \quad \Gamma_1 \equiv \frac{W_1 \sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2},$$

$$\Gamma_2 \equiv \frac{W_2 \sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2}$$

而上述圖形的相關參數為： $W_1 = \sum_k |V_{1k}|^2 = 1$ ， $W_2 = \sum_k |V_{2k}|^2 = 1$ ， $\varepsilon_1 = 1$ ， $\varepsilon_2 = 10$ ，

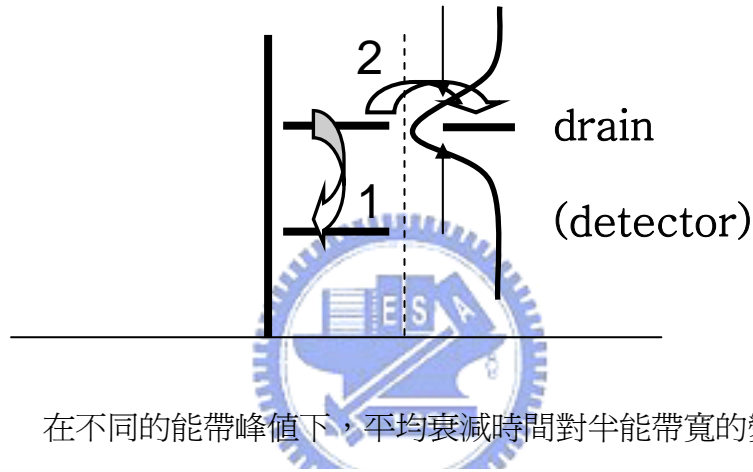
$\Gamma_L = 1$ ， $\Gamma_{21} = 1$ 。以上的物理量皆為能量單位。

### 3.3.2 節：不含電源的部分

純粹討論非平衡態電子自量子點激發態演化至偵測器的情形，因此偵測器量測量量子點激發態，而討論的物理量為平均衰減時間，此處又分成三個狀況：

2.1. 電子自量子點激發態自發性放射到基態；

示意圖：



在不同的能帶峰值下，平均衰減時間對半能帶寬的變化

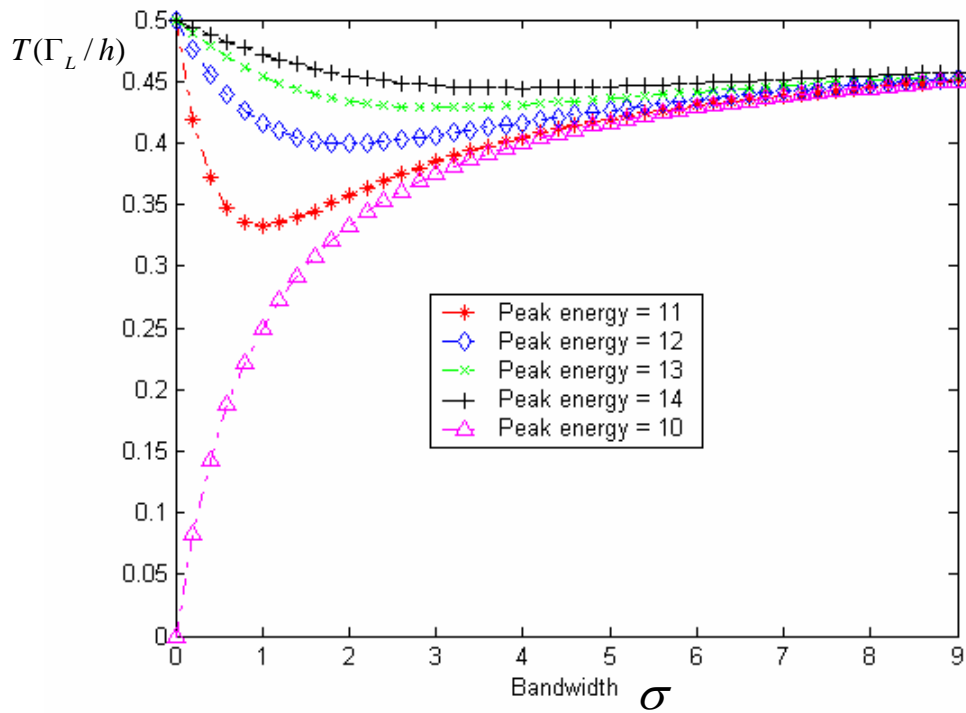


圖 3.7

Lorentz 峰值對準激發態能量的曲線與其餘四者不同：對準的曲線因為能量與激發態相同，因此產生共振穿隧，因此在帶寬為 0 時，平均衰減時間為 0，也就是電子不斷的由激發態流出，不會停留在激發態；其他四者則因不同程度的偏離激發態能量，因此在帶寬為 0 時，由於能量不同，電子無法穿隧到偵測器的能階，因此平均衰減時間的貢獻只來自自發性放射，也就是電子停留在激發態而無法躍遷出去。隨著能帶寬越大，衰減率越小，則平均衰減時間越長。

在不同的半能帶寬下，平均衰減時間隨能帶峰值的變化：

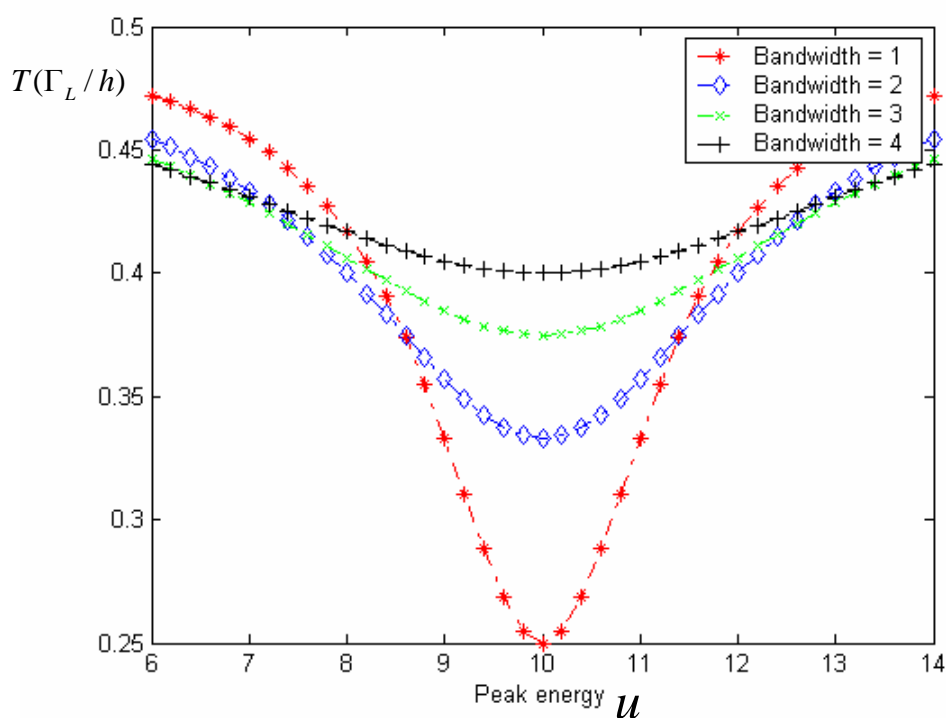


圖 3.8

平均衰減時間在 Lorentz 峰值在激發態能量時為最低值 (Peak energy = 10)，以此為中心向周圍遞增。若是將平均衰減時間對應到與此對應的穩態電流即可發現：平均衰減時間對 Lorentz 峰值的變化恰為穩態電流對 Lorentz 峰值的變化的反比。

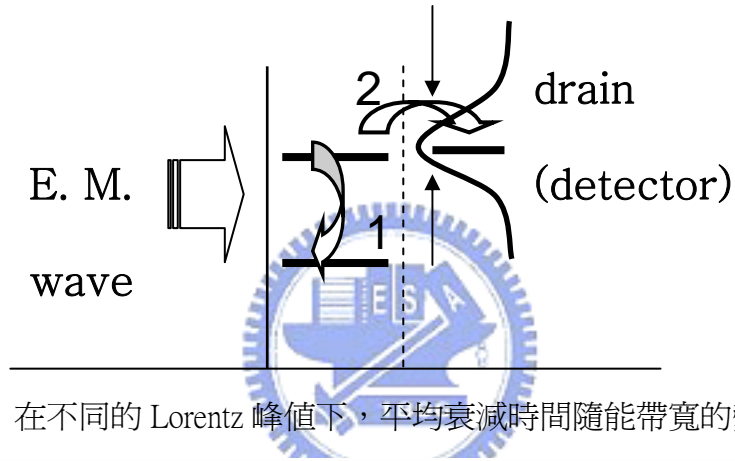
平均衰減時間的解析解：

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2}{2W_2\sigma + 2\Gamma_{21}(\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2)}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2} \\ &= \frac{1}{2(\Gamma_2 + \Gamma_{21})}\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

而上述圖形的參數為： $W_2 = \sum_k |V_{2k}|^2 = 1$ ， $\varepsilon_2 = 10$ 。以上的物理量皆為能量單位。

2.2. 電子自量子點激發態受到自發性放射到基態，以及外加電磁場的影響而在兩能態間形成 Rabi 震盪；

示意圖：



在不同的 Lorentz 峰值下，平均衰減時間隨能帶寬的變化

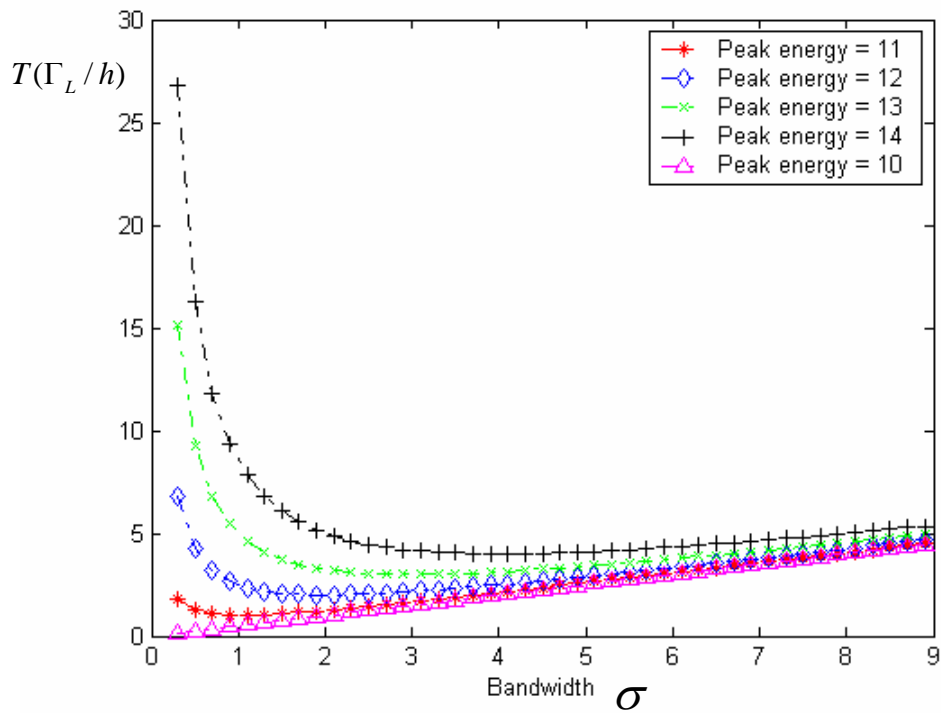


圖 3.9

與未加 Rabi 震盪的情形比較：Rabi 震盪使得自發性發射的效果消失，因此當偵測器的能階對準待測的激發態時，衰減時間為 0；若是偏離的程度越大時，能帶變寬所導致衰減時間的縮短的效應就會被減緩。當達到極小值之後，衰減時間就會趨近於帶寬的線性變化。

在不同的能帶寬下，平均衰減時間隨能帶峰值的變化：

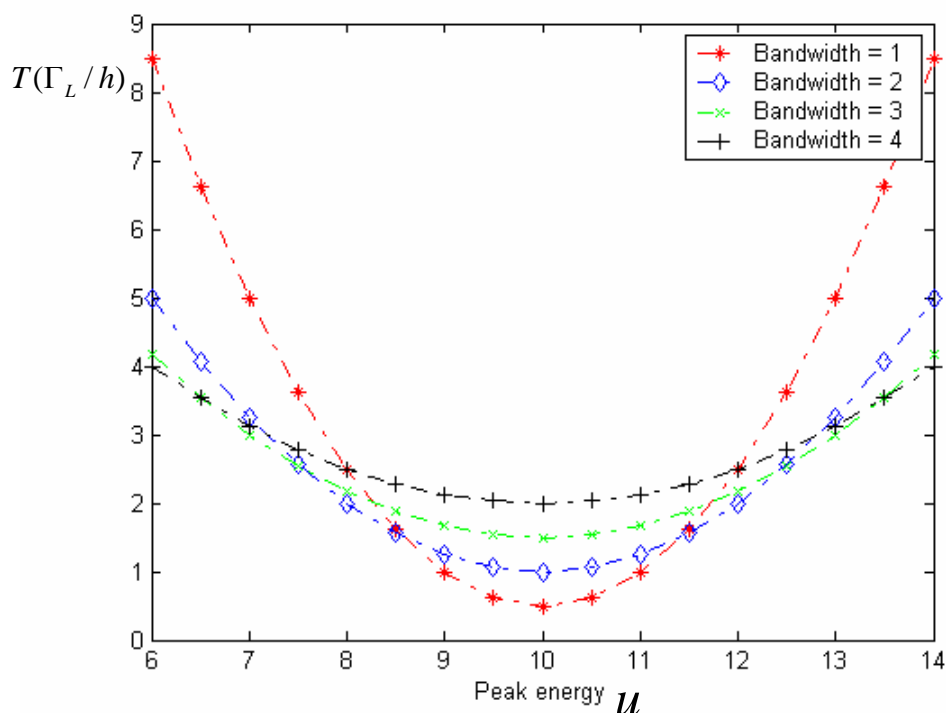


圖 3.10

與未加 Rabi 震盪的情形相較：Rabi 震盪導致自發性放射的效果消失，因此衰減時間在不含自發性放射率  $\Gamma_{21}$  下而延長，趨勢為二次函數，而非 Lorentz。

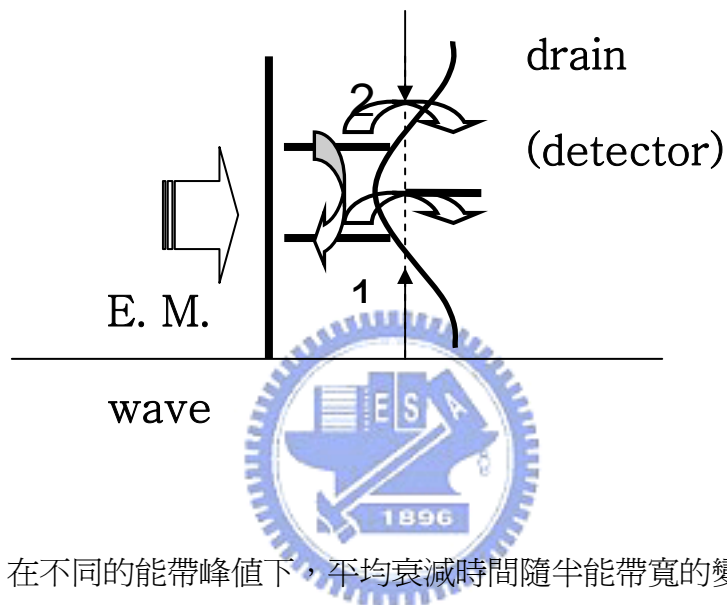
平均衰減時間的解析解：

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2}{2W_2\sigma} \\ &= \frac{1}{2\Gamma_2} \end{aligned} \quad , \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2} \quad (3.3.5)$$

而上述圖形的相關係數為： $W_2 = \sum_k |V_{2k}|^2 = 1$ ， $\varepsilon_2 = 10$ 。以上的物理量皆為能量單位。

2.3.電子自量子點激發態受到了自發性放射以及 Rabi 震盪的影響外，偵測器由僅耦合到激發態至耦合到基態與激發態；

示意圖：



在不同的能帶峰值下，平均衰減時間隨半能帶寬的變化：

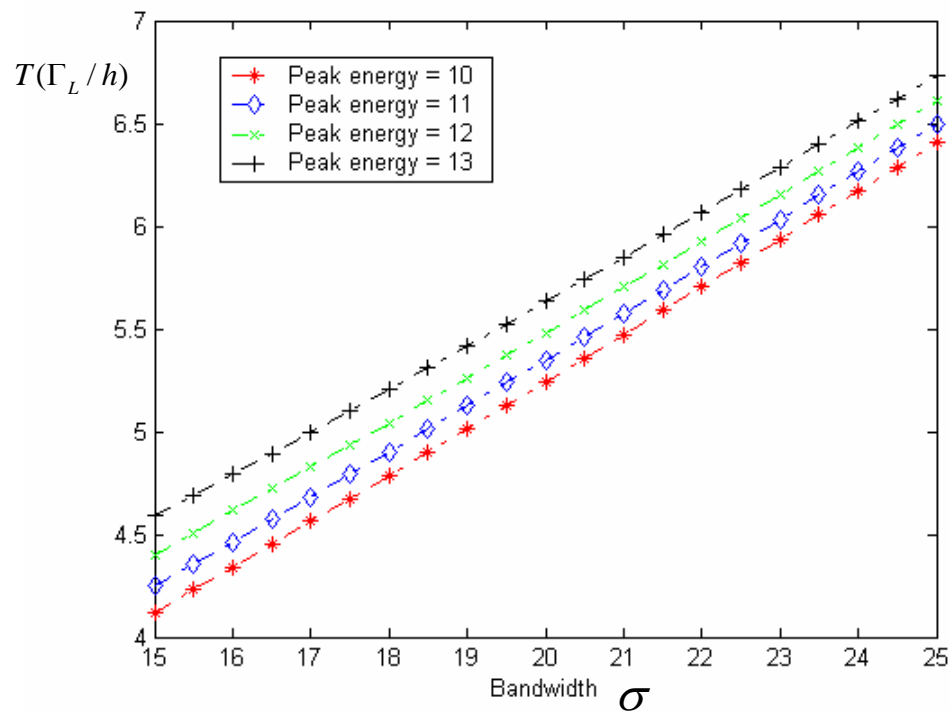


圖 3.11

隨著能帶寬的增加，平均衰減時間與半能帶寬成正比，恰與穩態電流對半能帶寬的變化成反比。

在不同的能帶寬下，平均衰減時間隨 Lorentz 峰值的變化：

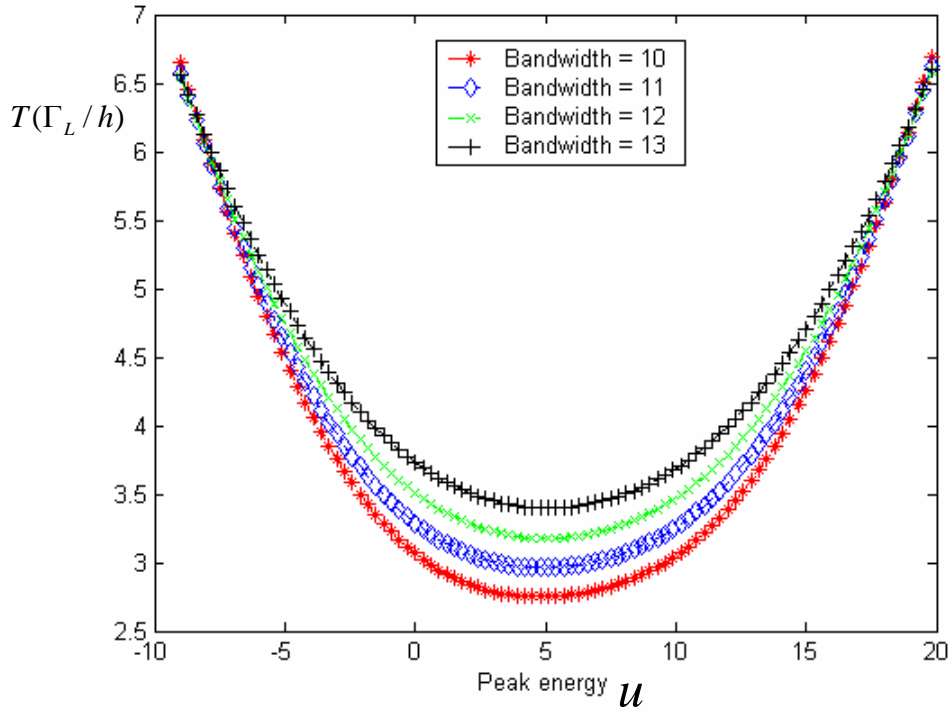


圖 3.12

由於 Lorentz 能譜偶合到量子點的激發態與基態，使得衰減率(decay rate)在兩能態的中間值為最大，因此平均衰減時間為最小。其趨勢為以此為中心，向兩側以反 Lorentz 分布的形狀展開。

平均衰減係數的解析解：

$$\bar{T} = \frac{\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1}{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1(2\Gamma_{21} + 2\Gamma_2)} \quad (3.3.6)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + (\Gamma_1 \frac{(u - \varepsilon_1)}{\sigma} - \Gamma_2 \frac{(u - \varepsilon_2)}{\sigma})^2}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2 \sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2},$$

$$\Gamma_1 \equiv \frac{W_1 \sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2}$$

而上述圖形的相關係數爲： $W_1 = \sum_k |V_{1k}|^2 = 1$ ， $W_2 = \sum_k |V_{2k}|^2 = 1$ ， $\gamma = 1$ ， $\varepsilon_1 = 1$ ，

$\varepsilon_2 = 10$ ， $\Gamma_{21} = 1$ 。以上的物理量皆爲能量單位。

### 3.4 節：非馬可夫效應在寬能帶的極限下與馬可夫效應的比較

在寬能帶的近似 (wild-band approximation) 下，穩態電流對偵測器 Lorentz 峰值的相依性將消失而近似到馬可夫效應，在此，我謹就非馬可夫效應與馬可夫效應的解析解來比較：

穩態電流部份：



1. 僅自發性放射發生：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L \Gamma_1 \Gamma_{21}}{\Gamma_L \Gamma_{21} + \Gamma_1 (\Gamma_L + \Gamma_{21})}, \quad \Gamma_1 \equiv \frac{W_1 \sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2} \quad (3.4.1)$$

在寬能帶的近似下：

$$\Gamma_1 \rightarrow \frac{W_1}{\sigma}$$

由此可得到馬可夫效應的電流：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L \Gamma_1 \Gamma_{21}}{\Gamma_L \Gamma_{21} + \Gamma_1 (\Gamma_L + \Gamma_{21})}, \quad \Gamma_1 = \frac{W_1}{\sigma} \quad (3.4.2)$$

2. 自發性放射加上外加電磁場：



$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L(\Gamma_1\gamma^2(S_1+S_2)+2\Gamma_1\Gamma_{21})}{(\Gamma_1+2\Gamma_L)\gamma^2(S_1+S_2)+2\Gamma_{21}(\Gamma_1+\Gamma_L)+2\Gamma_1\Gamma_L}, \quad (3.4.3)$$

$$S_1+S_2 = \frac{2}{\Gamma_1(1+(\frac{u-\varepsilon_1}{\sigma})^2)}, \quad \Gamma_1 \equiv \frac{W_1\sigma}{(u-\varepsilon_1)^2+\sigma^2}$$

在寬能帶的近似下：

$$\Gamma_1 \rightarrow \frac{W_1}{\sigma}, \quad S_1+S_2 \rightarrow \frac{2}{\Gamma_1}$$

$$I(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{2\Gamma_L(\gamma^2\Gamma_1+\Gamma_1^2\Gamma_{21})}{2\gamma^2\Gamma_L+\Gamma_{21}\Gamma_L\Gamma_1+\gamma^2\Gamma_1+(\Gamma_L+\Gamma_{21})\Gamma_1^2} \quad (3.4.4)$$

回到馬可夫效應的結果。

3. 2.的情況時偵測器耦合到兩量子點能階：

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{2\Gamma_L((\Gamma_1+\Gamma_2)\gamma^2(S_1+S_2)+2\Gamma_1(\Gamma_2+\Gamma_{21}))}{(\Gamma_1+\Gamma_2+2\Gamma_L)\gamma^2(S_1+S_2)+2\Gamma_{21}(\Gamma_1+\Gamma_L)+2\Gamma_1(\Gamma_2+\Gamma_L)} \quad (3.4.5)$$

$$S_1+S_2 = \frac{2(\Gamma_1+\Gamma_2)}{(\Gamma_1+\Gamma_2)^2+(\Gamma_1\frac{(u-\varepsilon_1)}{\sigma}-\Gamma_2\frac{(u-\varepsilon_2)}{\sigma})^2}$$

$$\Gamma_1 \equiv \frac{W_1\sigma}{(u-\varepsilon_1)^2+\sigma^2}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u-\varepsilon_2)^2+\sigma^2}$$

在寬能帶近似下，

$$\Gamma_1 \rightarrow \frac{W_1}{\sigma}, \quad \Gamma_2 \rightarrow \frac{W_2}{\sigma}$$

$$I(t \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{2\Gamma_L(\delta^2+\Gamma_1(\Gamma_{21}+\Gamma_2))(\Gamma_1+\Gamma_2)}{\delta^2(2\Gamma_L+(\Gamma_1+\Gamma_2))+\Gamma_{21}(\Gamma_L+\Gamma_1)(\Gamma_1+\Gamma_2)+\Gamma_1(\Gamma_1+\Gamma_2)^2} \quad (3.4.6)$$

近似到馬可夫效應的結果。

平均衰減時間部分：

1. 僅自發性放射發生：

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2}{2W_2\sigma + 2\Gamma_{21}(\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2)}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2} \\ &= \frac{1}{2(\Gamma_2 + \Gamma_{21})}\end{aligned}\quad (3.4.7)$$

在寬能帶近似下，平均衰減時間將會近似到馬可夫結果：

$$\bar{T} \rightarrow \frac{1}{2\Gamma_{21}} \quad (3.4.8)$$

2. 自發性放射加上外加電磁場：

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\sigma^2 + (u - \varepsilon_2)^2}{2W_2\sigma}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2} \\ &= \frac{1}{2\Gamma_2}\end{aligned}\quad (3.4.9)$$

在寬能帶近似下，將會近似到馬可夫效應的形式：

$$\bar{T} \rightarrow \frac{\sigma}{2W_2} = \frac{1}{2\Gamma_2}, \quad \Gamma_2 \rightarrow \frac{W_2}{\sigma} \quad (3.4.10)$$

3. 外加電磁場的情況以及激發態自發性放射到基態的情形下，偵測器偶

合到兩量子點能階：

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1}{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)\gamma^2(S_1 + S_2) + 2\Gamma_1(2\Gamma_{21} + 2\Gamma_2)} \\ S_1 + S_2 &= \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + (\Gamma_1 \frac{(u - \varepsilon_1)}{\sigma} - \Gamma_2 \frac{(u - \varepsilon_2)}{\sigma})^2} \\ , \quad \Gamma_1 &\equiv \frac{W_1\sigma}{(u - \varepsilon_1)^2 + \sigma^2}, \quad \Gamma_2 \equiv \frac{W_2\sigma}{(u - \varepsilon_2)^2 + \sigma^2}\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

在寬能帶近似下，將會近似到馬可夫效應的形式：

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &\rightarrow \frac{W_1}{\sigma}, \quad \Gamma_2 \rightarrow \frac{W_2}{\sigma}, \\ \bar{T} &\rightarrow \frac{\gamma^2 + \Gamma_1(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\gamma^2(\Gamma_1 + \Gamma_2) + 2\Gamma_1(\Gamma_{21} + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_2)}\end{aligned}\quad (3.4.12)$$

### 3.5 節：與 Fujisawa 實驗的比較

再討論的各種情形中，能與 Fujisawa 的實驗做類比的，就是 2.2 的情形，但是必須不考慮自發性放射。因為 Fujisawa 實驗中兩量子點的化學位等高時產生電子的共振穿隧情形，可與模型中外加電磁場造成的 Rabi 共振類比，但此時卻無自發性放射的情形發生。因此可藉由模型來驗證說雙量子點在共振穿隧時，穩態電流受偵測器能譜的影響。

再者，我參考 T. Brandes 的論文[2]中對 Fujisawa 實驗所做的理論分析，並將論文中的相關參數代入作比較：

$$\begin{aligned}\Gamma_L &= 1\mu eV, \quad \gamma = T_c(T.Brandes) = 1\mu eV, \quad \Gamma_R(T.Brandes) = 1\mu eV \\ \Gamma_{21} &= \pi T_c^2 \rho(\varepsilon) = 8.573 \times 10^{-4} \mu eV\end{aligned}$$

因為能量的維度都在  $\mu eV$ ，因此假設

$$\varepsilon_1 = 1\mu eV, \quad \varepsilon_2 = 10\mu eV, \quad W_1 = 1(\mu eV)^2, \quad W_2 = 1(\mu eV)^2$$

電流的單位即可確定：

$$[I] = \left[ \frac{2e\Gamma_L}{h} \right] \sim 38.7 p(Amp) \text{ (安培)}$$

因此在電流對能帶寬的作圖(圖 3.3)以及對 Lorentz 峰值能量變化的作圖(圖 3.4)即可與實驗做比較，只要將原先電流無量綱的值乘上  $38.7 p(Amp)$  就能估計電流的大小。

## 第四章：總結

1. 穩態電流與平均衰減時間同樣可檢驗非馬可夫效應，但實驗上穩帶電流是較為可行的。

2. 穩態電流與平均衰減時間的性質，表現在能譜分布的能帶寬與能譜峰值和待測能階的偏離程度的趨勢上，兩者恰是互為倒數的性質。這可由兩者的物理量來比較，就可以很清楚的明白：電流可視為能量單位，與時間單位恰為倒數關係。例如：在第二類情況下，穩態電流對能帶峰值的分布為 Lorentz 分布；而平均衰減時間對能帶峰值的分布恰為 Lorentz 函數的倒數的分布。

3. 就一個有能帶分布的非馬可夫效應的偵測器而言，他的性質可以用一單能階量子點再加上馬可夫效應的偵測器來類比，這可以參考 Gurvitz 的論文(3)。因此整體就可以用一個雙能階的量子點接上一單能階的量子點，再接上馬可夫效應的偵測器。

4. Fujisawa 實驗中，左右量子點的 Fermi level 各自可類比為模型中量子點的激發態能階與基態能階，因此可以類比到 Fujisawa 實驗中的自發性發射的情形(激發態能量永遠高於基態能量)。而自發性發射率(spontaneous emission rate)的大小可以類比於 T. Brandes 的論文[2]中模型所得到的非彈性穿隧率 (inelastic tunneling rate)：與聲子的密度能譜以及兩能態的能量差與耦合常數的強度有關。藉著自發性發射率又可以得到非彈性耦合的電流(current of inelastic coupling)：

$$I_{in}(t \rightarrow \infty) \sim 2e\gamma = 2e\pi T_c^2 \rho(\varepsilon)$$
， $\rho(\varepsilon)$  為在能階差是  $\varepsilon$  的情況下的聲子密度， $T_c$  為兩能階的耦合常數，相當於模型中 Rabi 震盪的耦合常數。但是，我的模型卻是外加單頻電磁場以及量子點與光子場耦合，兩者並非同一個玻色子場；Fujisawa 的實驗卻是同一個玻色子場造成，即聲子場造成的。不過卻可以以此模型來模擬非馬

可夫效應在 Fujisawa 實驗中可能出現的影響。

5. 關於 Rabi 震盪對穩態電流與對衰減時間的影響，主要決定在 Rabi 的強度  $\gamma$  與偵測器的量測強度  $W_1$ ， $W_2$  間的角力：若是 Rabi 強度遠大於偵測器強度的話，會造成電子更為侷限在量子點中；反之，若是 Rabi 強度遠小於偵測器強度的話，則會回到上面所討論的自發性放射的情形。自發性放射率  $\Gamma_{21}$  與 Rabi 震盪的強度  $\gamma$  關係到電子侷限在量子點的強度；而  $W_1$ ， $W_2$  等偵測器的強度則關係到電流的強度，兩者相互拉距而影響到電流。

### 參考論文：

- [1]. T. Fujisawa etc., 'Spontaneous Emission Spectrum in Double Quantum Dot Devices', Science, Vol.282, No.5390, 932-935, 1998.
- [2]. Tobias Brandes, 'Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems', Physics Reports, Vol.408, Issues 5-6, 315-474, March 2005.
- [3]. B. Elattari, S. A. Gurvitz, 'Influence of measurement on the lifetime and the line-width of unstable systems', P. R. A, Vol.62, No.03212, 2000;
- [4]. Scully, M. O.; Zubairy M. S., 'Quantum Optics', Cambridge University Press, Sep. 4, 1997.
- [5]. Carmichael, H., 'An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Universite Libre De Bruxelles October 28 to November 4, 1991', Springer, Aug., 1993.
- [6]. von Neumann, J. 'Mathematical Foundations of Quantum Mechanics', Princeton University press, 1996.