CAS 實驗活動的學習環境下極限概念之建構歷程

研 究 生：黃誌偉　　　　Student：Chih-Wei Huang

指導教授：白啟光　　　　Advisor：Chi-Kaung Pai

國 立 交 通 大 學

應 用 數 學 系

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Applied Mathematics

College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Applied Mathematics

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 五 年 七 月

CAS 實驗活動的學習環境下極限概念之建構歷程

The Constructive Process of Limit Concept under the CAS Laboratory Learning Environment

研究生：黃誌偉　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：白啓光

國立交通大學應用數學系碩士班

摘　　要

本研究旨在探討 CAS 實驗活動的學習環境下，大學生極限概念之建構歷程及其迷思情形，並進一步說明在此環境下數值與圖形對極限概念之影響。本研究採質性研究方式，針對國立交通大學微積分實驗班 40 名大一學生進行教室觀察及晤談，並以紙筆測驗和問卷等資料作爲分析詮釋之參考。

研究結果發現：極限概念主要的外在表徵有語意表徵、數值表徵、圖形表徵及代數符號表徵，學生在建構極限概念歷程中，先備知識會影響後續形式概念之發展，在此一學習環境下，學生仍具有傳統模式下之迷思概念。概念視覺化有助於學生極限概念的建立，但先決條件是能夠正確地解讀 CAS 所產生的圖形。

關鍵字：極限概念、電腦代數系統、多重表徵、視覺化

The Constructive Process of Limit Concept under the CAS Laboratory Learning Environment

Student: Chih-Wei Huang **Advisor:** Chi-Kaung Pai

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University

Abstract

The purpose of this study was to investigate the representation structure of college students' limit concept, and their misconceptions under the CAS laboratory learning environment. Especially, how the numerical and graphical aspects of CAS help students to develop their limit concept.

Upon analysis of 40 freshmen students' laboratory recording, laboratory reports, questionnaires responses, and interview details, we found that

1. The main external representations of limit concept were verbal, numerical, graphical, and algebraic-symbolic representations.
2. Students' pre-knowledge affected a great deal on the development of their limit concept.
3. Students in the CAS laboratory learning environment still tended to have the same misconceptions as those of students in traditional classrooms.
4. Under the assumption that the graphs generated by CAS are correctly interpreted, visualization does help in students' conceptual understanding.

Keywords: Limit concept, Computer algebra system (CAS), Multiple representations, Visualization

誌　謝

又見鳳凰花開時，轉眼間即將結束兩年的學習生涯，回首來時路，從懵懂無知到略有所悟，百感交集，點滴在心頭。論文在親手一字一斧的雕琢之下終於完成，步出口試會場，讓我兩年來極度緊繃的精神頓時轉為感恩與喜悅，也讓我有邁入人生下一個里程碑的自信與期許。

首先，感謝白啓光老師的諄諄教誨，讓我體會到質性研究之美，在遭遇許多挫折的時刻給予關懷與鼓勵，使我更有力量與韌性向前邁進。老師亦師亦友的情誼，實為我人生中最珍貴難得的緣分，讓我心中對老師充滿感激之意。

感謝口試委員羅昭強老師、莊重老師及陳明璋老師對論文提供精闢的指導，且不吝提出他們許多的寶貴建議，彌補論文中的缺失使我的碩士論文能更加的完善。

最後，感謝一直在背後支持我的家人與朋友。得知於人者多，己付出者卻少，經過研究所的學習與錘鍊，增長的不僅是知識，還有更多的感恩之心，將本論文獻給所有關心我的師長和親友們。

黃誌偉　謹誌

民國九十五年　夏

目　　錄

圖目錄

表目錄

第壹章 緒論

本章共分爲四節，主要說明本研究之研究動機、研究目的與待答問題、研究範圍與限制，並對本研究中所提及之重要名詞給予定義與解釋。

第一節 研究動機

長久以來，數學就是學生最感困擾的科目之一，不僅在學習興趣方面，在學習成就上都是最受挫折感的科目。而微積分爲大專院校的數學基礎課程，極限的概念扮演著重要的角色，它是學習許多重要概念的基礎。在古代中國，《莊子・天下篇》記載的「一尺之棰，日取其半，萬世不竭」。以及劉徽所創的割圓術，用圓內接正多邊形與圓接近，意謂「割之彌細，所失彌少。割之又割以至於不可割，則與圓合體而無所失矣」，都包含著極限的概念。若學生沒有完整的極限概念，將無法完全地了解微積分課程中連續、微分與積分等概念 (Orton, 1983)。當學生面對極限概念時，常有著認知上的困難，而這個複雜的概念，在教學上亦產生困難 (Cornu, 1992; Li & Tall, 1993; Monaghan, Sun & Tall, 1994; Szydlik, 2000; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991)，特別是從極限的直觀概念進入到$\varepsilon-\delta$形式概念。

Skemp (1987) 認爲概念的形成需要先有實際的經驗，再經過抽象化的歷程，也就是抽取出經驗中的相似性、共通性後才形成概念。Dienes (1960) 根據 Piaget 認知發展階段─具體操作期 (concrete operational stage)，發展能操弄抽象數學概念的物件；Bruner & Kenney (1965) 修改「丹尼斯積木」(Dienes blocks)，發展能教導因式分解的具體教材 (林清山，1997)。Tall (1986) 延續 Dienes 的想法，將電腦視爲被操作的物件，提供學習者探索數學上的過程和概念；透過操弄示例，它們共同的特徵可能被抽象化，而給出具體例子的一般性概念。Goldenberg (1998) 指出：數學課程必須含有允許學生實驗的活動並建立模型來幫助解釋數學概念。因此，學習數學應從給學生能操作的實物開始，最後再進步到使用符號表徵方式來表示。

在數學學習中，「表徵」(representation) 可用來具體呈現數學概念與思維；數學概念的表徵方法，在學習者形成概念的理解與使用上，扮演著重要的角色。Vergnaud (1987) 指出：表徵系統不僅是數學概念結構具體呈現的工具，亦是將數學基本結果分類的方法。要有效地學習數學概念，學生不僅要能彈性運用這些特定的表徵，還必須要能做表徵與表徵之間的轉換；表徵轉換的過程及轉換的結果，對學生獲得及使用數學概念具有影響力 (Behr, Lesh & Post, 1987)。因此，對於數學概念學習，有效運用這些表徵是重要的。

資訊科技的日新月異，「電腦輔助學習」(Computer-Assisted Learning, CAL) 已能成功地運用到許多教學領域；對數學教學而言，利用電腦設計「多重表徵」(multiple representations) 學習環境爲目前教學活動的趨勢。Pierce, R. & Stacey, K. (2001) 研究發現透過表徵之間的轉換有助於知識的概念性發展；而電腦環境所提供的表徵方式，可作爲數學概念教學時，呈現多重表徵的一種有力工具 (Kaput, 1987)。學生利用電腦呈現微積分概念的多重表徵，所獲得的知識更是個別化而有意義的 (Rochowicz, 1996)。在科技整合教學環境中，除了能將一般教室中，教師、教科書、板書等文字、語言、圖形、符號等表徵方式呈現出來以外，也可以將課堂教室中無法做到的「外在動態表徵」(dynamic external representation) 方式，利用電腦科技來詮釋抽象的概念 (左台益、蔡志仁，2001)。江紹祥 (1999) 指出：透過電腦動畫的演示，可幫助學生處理抽象的數學概念，亦可運用演示的特別效果加強處理學生常犯錯誤，鞏固學生未能掌握的重要數學概念 (謝哲仁，2003)。

傳統講述式教學模式爲教師在講台上講述數學概念與解題方法，學生則負責聽講與解題，教師教學的重點在將數學概念與解題技巧進行清晰的描述，學生的責任則是在測驗時複製上課時教師傳授的知識。NCTM (2000) 指出：若學生能快速算出答案並不保證他已經達到高階的數學概念理解。然而，這種上對下單向式的教學常常不易引發學生對數學學習的興趣，數學學習也變得毫無樂趣可言。在未經學生自己探索嘗試之際，即將答案告訴學生的教學方式，不是囫圇吞棗半知半解，就是因知之不詳而迅速遺忘 (Burner, 1964)。學生若未了解數學概念本身的意義，其所學到的知識

是不完整的 (Dubinsky, 1991)。Duffy, Lowyck & Jonassen (1993) 指出：當學習者主動參與各種學習活動時，給予更多探索的空間活動，將使學習者的學習更加具有效果。Dubinsky (1991) 將 Piaget 的認知發展理論應用在高等數學，並提出 APOS 理論描述大學階段數學概念的認知發展。Dubinsky 認為數學概念的發展，必須透過行動 (action)、過程 (process)、物件 (object) 和反思抽象 (reflective abstraction) 這一連串的認知歷程。而教學的目的是要讓學生能參與有意義的學習，如此才能使學習更有效率，學習後記憶保留得更長久，也才不致於僵化知識而不會運用。Ausubel (1968) 強調「有意義的學習」(meaningful learning) 才是真正的學習，並指出有意義的教學必須以學生的先前知識及經驗作為新的學習起點。依據 Ausubel「意義學習」的觀點探討科技融入教學時，教師須考慮如何藉由科技讓學生主動學習 (active)、建構學習 (constructive)、意圖學習 (intentional)、真實學習 (authentic) 及合作學習 (cooperative) (Jonassen, Howland, Moore & Marra, 2003)；學習活動和教學活動的設計能同時包含上述五個屬性，將比單獨一個屬性出現，更能產生有意義的學習 (沈中偉，2004)。

學習者將電腦科技當作認知學習環境的工具，可以提升解決問題能力與擴展思考力，進而提升學習者知識建構與認知的能力 (Jonassen, 1996)。教學科技媒體只是一個做為訊息承載的資訊呈現工具之一，故對教學上並不會產生實質的學習效果；只有符合教學策略與學習活動的設計基礎下，才會對學習者產生學習影響。認知理論學者認為：學生是主動的訊息處理者，而非被動的接受者，亦即學習是學習者建構知識的過程。在已有充分準備的教師引導下，學生可以自行嘗試各種試驗，建構數學基本原理。對數學概念的教學而言，「形式定義」常常讓人無法了解，但若透過電腦科技「形式定義」的數學意義就可以呈現出來。

微積分這門學科的許多主題均可藉由圖形來闡明其意義，電腦代數系統相當適合做為這門學科的配套教學。利用此系統繪圖與符號演算的功能，學生得以將思考邏輯轉化成一序列的指令，並經由電腦的運算與圖形的輸出修正先前的推論與思考方向，形成學習上的回饋。因此，學習效果是立即、直接且具思考性的，同時更可增廣學生的思考空間。藉由圖形介面與電腦的高速運算，誘導學生回歸學習微積分的本質

「從思考與發掘問題著手」。有鑒於此，本研究將使用電腦代數系統 Maple 設計實驗活動，輔助學生學習極限概念，並提供學習極限概念所須具體操作的情境。透過電腦的視窗環境，將教學內容以「多重表徵」(multiple representations) 的方式呈現，提供學生概念性的思考，進而從學生外在表徵的表現情形，建構極限概念的表徵結構，並從中探查學生 CAS 之使用情形與態度。

第二節 研究目的與待答問題

依據上述的研究動機，可發現學生在學習極限概念時遇到了許多困難，本研究探討在 CAS 實驗活動的學習環境下，學生如何從極限的直觀概念進入 $\varepsilon-\delta$ 形式概念，以及 CAS 之使用情形與態度。本研究的研究目的有下列三項：

(一) 探討在 CAS 實驗活動的學習環境下，大學生極限概念的表徵結構及其建構歷程。

(二) 瞭解在 CAS 實驗活動的學習環境下，大學生處理極限問題的思考方式，以及概念之迷思情形。

(三) 瞭解在 CAS 實驗活動的合作學習 (cooperative learning) 環境中，大學生學習的態度及對於使用 CAS 的看法。

本研究主要透過分析學生學習模式、習題作業、成就測驗回答方式及晤談資料等，回答下列問題從而達成研究目的。

(一) 在 CAS 實驗活動的學習環境下，學生極限概念之「表徵結構」具有哪些表現內容？極限概念之「學習路徑」又爲何？

(二) 在 CAS 實驗活動的學習環境下，學生極限概念之迷思情形爲何？

(三) 在學習歷程中，學生如何解讀 CAS 所產生的數值及圖形？此外，所產生之圖形又對學生極限概念有何影響？

第三節 研究範圍與限制

因考量研究時間、人力及物力，故無法對全國大學生做分層隨機取樣測試，本研究以國立交通大學微積分實驗班的 40 名學生進行分析，樣本可能缺乏母群體的代表性，因此研究結果只能推論到與樣本背景相當的學生，不宜過度加以延伸。此外，研究者對高中生所習得的極限概念並不十分清楚，只能藉由請教現職高中任課教師，透過口述方式進行瞭解；或於晤談中詢問學生高中學習經驗，推敲學生「起點行為」之輪廓。

第四節 名詞釋義

(一) 極限概念 (limit concept)

極限出現在許多不同的數學脈絡 (context)，例如：函數的極限、數列的極限、級數的極限等。此外，連續、微分與積分等概念也涉及到極限。本研究指的極限概念是「函數的極限」(limit of a function)，其中又包含下列三種陳述方式：

1. 直觀概念

設 $f: D \to R$ 是一實函數，其中 D 為 R 的一個子集。若 $a \in R$，則 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的意義是，當 $x \in D$ 且 $x \neq a$，而 $|x-a|$ 非常小時，$|f(x)-L|$ 會隨著 $|x-a|$ 變小而逐漸變得非常接近零 (余文卿等人，2001)。

2. 非形式定義 (informal definition)

We write $\lim_{x \to a} f(x) = L$ and say "the limit of $f(x)$, as x approaches a, equals L", if we can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L (as close to L as we like) by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a (Stewart, 2003).

3. 形式定義 (formal definition)

Let f be a function defined on some open interval that contains the number a, expect possibly at a itself. Then we say the limit of $f(x)$ as x approaches a is L, and we write $\lim_{x \to a} f(x) = L$, if for every number $\varepsilon > 0$ there is a number $\delta > 0$ such that $|f(x)-L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x-a| < \delta$ (Stewart, 2003).

(二) 表徵 (representation)

本研究的「表徵」是指 Behr, Lesh & Post (1987) 所述：外在具體化已內在概念化的知識，即：將「極限概念」視為內在概念化的表徵對象，將所觀察到的呈現方式作為外在具體化之表徵形式。由於外在具體化表徵具多樣的呈現方式，而組成多重表徵之表徵結構。

首先，研究者參考諸位研究者 (Lesh et al., 1987; Janvier, 1987; 左台益、蔡志仁, 2001) 所設計的數學概念表徵形式，進行傳統 (不涉及 CAS) 學習模式下，極限概念表徵形式之設計，最後擴增原先設計完成的表徵形式之表現內容，孕育出 CAS 實驗活動的學習環境下之表徵形式。研究者所設計的表徵形式 (不涉及 CAS) 如下：

1. 語意表徵

極限概念的語意表徵是指：將概念意涵以口語方式敘述或以文字呈現；以下說明直觀及形式概念之語意表徵內容。

- 直觀概念：學生說出或寫下「當 x 夠靠近 a 時， $f(x)$ 會夠靠近極限值 L 」、「當 x 越來越靠近 a 時， $f(x)$ 越來越靠近 L 」與「當 x 接近 a 時， $f(x)$ 接近 L 」等。
- 形式概念：學生說出或寫下「給定誤差 ε ，找尋 x 與 a 的可行距離 δ ，讓所有滿足前者條件 x 的函數值與極限值，在誤差 ε 範圍之內」等。

2. 數值表徵

透過觀察教科書上以「數值表列」(numerical table) 呈現函數的方式，揣測極限的存在性，進而臆測可能的極限值。極限概念之數值表徵是指：學生藉由電算器或徒手計算一些函數值 (數值形式)，揣測極限的存在性，進而臆測可能的極限值；以下說明直觀及形式概念之數值表徵內容。

- 直觀概念：學生只選取「一個」數列並計算函數值，從函數數值之行為，揣測極限的存在性，進而臆測可能的極限值。
- 形式概念：學生選取「多個」數列並計算函數值，從函數數值之行為，揣測極限的存在性，進而臆測可能的極限值。

例如：觀察 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 附近的數值表列，在此引用指定教科書上之數值表，如表 1-1 所示，學生會猜測 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$。若學生以徒手方式計算，可能選取表 1-2 之 x，計算所對應之函數值，以 $\pi\approx 3.14$、$\sqrt{2}\approx 1.414$ 與 $\sqrt{3}\approx 1.732$ 估算大略的數值後，觀察這些數值行爲並猜測極限值。

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

表1-1 教科書之數值表 Stewart (2003)

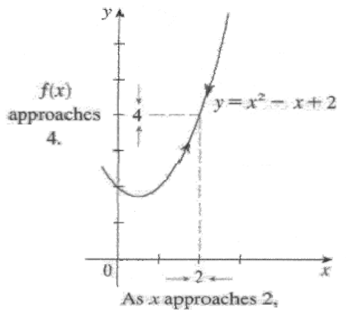
x	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$
$\dfrac{\sin x}{x}$	$\dfrac{2}{\pi}\approx 0.6369$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0.8274$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\approx 0.9006$	$\dfrac{3}{\pi}\approx 0.9554$

表1-2 徒手計算之數值表

3. 圖形表徵

極限概念之圖形表徵是指：以圖形或圖示的方式表達極限概念。極限涉及直觀與形式概念，故引用二張指定教科書上的圖示，如圖 1-1、圖 1-2 所示，分別表示極限的直觀與形式概念。

- 直觀概念：學生以徒手描繪方式，呈現與圖 1-1 相類似之圖形爲圖形表徵之表現內容，亦即尋找 $\lim\limits_{x\to a}(x, f(x))$。



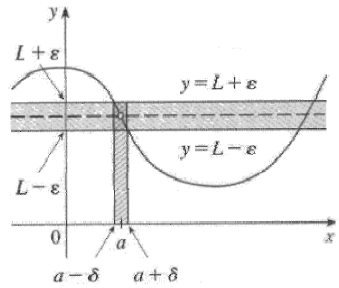


圖 1-1 圖形表徵直觀概念 Stewart (2003)　　圖 1-2 圖形表徵形式概念 Stewart (2003)

- 形式概念：將極限的$\varepsilon-\delta$程序 (process) 以「人工動態」方式呈現，也隸屬於圖形表徵之內。學生透過操弄繪圖視窗，不斷重複地表現出「畫二條水平線 (給定ε)，畫二條鉛直線 (尋找δ)」之行為模式，使得 $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$，步驟分解如圖 1-3 所示。

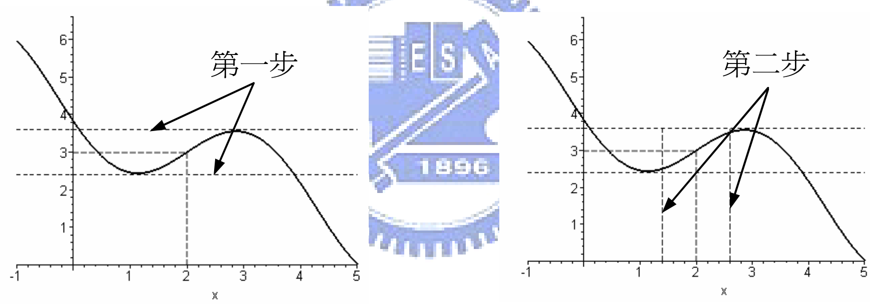


圖1-3 人工動態$\varepsilon-\delta$程序之步驟分解

4. 代數符號表徵

在數學教育裡使用代數符號表徵數學概念為終極的目標，從獲得符號初步意義、使符號成為溝通工具後，要逐步提升學生對此表徵的使用，使符號成為解題工具。極限概念的符號表徵是指：以數學語言表達極限概念，包含著一般常用的數學算式、約定俗成的數學符號與記號 (notation) 等。例如：對於所有「$\forall$」、存在「$\exists$」、無窮大「∞」及極限形式定義所使用的不等式等。

- 直觀概念：學生將ε視為一固定的數，找尋可行之δ並檢驗其正確性。
- 形式概念：學生將ε視為可操弄之文字符號，找尋可行之δ並檢驗其正確性。

以上四種形式為傳統模式下所具有的表徵內容，本研究欲探討 CAS 實驗活動的學習環境下，表徵結構之相關議題；有鑒於 CAS 能提供數值、圖形及代數等多種呈現方式，讓學習者能透過 CAS 呈現概念之各種表徵形式。研究者以「CAS 表徵」表示透過 CAS 呈現數學概念之各種表徵形式，以 $rep(\mathrm{CAS})=(N,G,D,A)$ 表示所呈現之結果，也就是 $rep(\mathrm{CAS})$ 涉及到數值計算 (N)、圖形呈現 (G)、動態展示 (D) 和代數運算 (A)。以下說明「CAS 表徵」的四種模式：

- 數值模式 (numerical model)：CAS 提供快速且大量的數值計算，透過 CAS 能立即建立若干函數數值表，提供學習者觀察大量函數數值行為，揣測極限存在性，進而臆測可能的極限值。因此，引進 CAS 後較能體驗「對於所有」之意涵，並增加學生從數值取向探索極限之可能性。
- 圖形模式 (graphical model)：CAS 協助學生處理圖形的描繪，進而改變傳統模式下概念教學的次序。因此，引進 CAS 後增加從函數圖形探索極限之可能性。
- 動態模式 (dynamic model)：透過 CAS 呈現動態 $\varepsilon-\delta$ 視窗*，以不斷拉近 (zoom in) 之動作，表現極限存在時「$\forall\varepsilon$ 皆能 $\exists\delta$」之情境。
- 代數模式 (algebraic model)：透過 CAS 符號計算功能，計算出相對於 ε 之可行 δ 並檢驗其正確性。

因此，引進 CAS 後形式概念之數值表徵增加了數值模式、圖形表徵增加了圖形及動態模式、代數符號表徵則增加了代數模式，亦提供學生表徵與表徵之間之轉換情境。研究者參考 Lesh 等人 (1987) 表徵系統的互動模式，以「金字塔」(pyramidal) 模型呈現 CAS 實驗活動的學習環境中，極限概念之表徵轉換關係。CAS 位於金字塔最頂端，若去除此頂點 (CAS) 將形成與 Lesh 等人相類似的平面網絡，亦即傳統學習模式 (不涉及CAS) 的表徵轉換系統，如圖 1-4 所示。

* 微積分教學網頁
http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/lab91_1/maple/lab_limit2003/lab_limit_intro.html

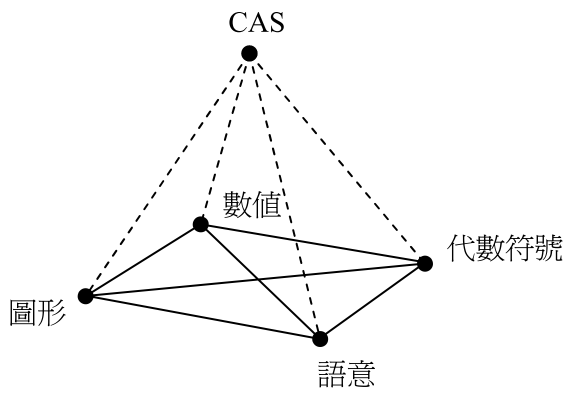


圖 1-4 極限概念表徵系統的轉換模式

(三) 迷思概念

學生進入學習情境前已有許多先入爲主的概念，學生也會利用這些概念來學習知識或解釋教師授課的內容，但這些概念若與專家學者的概念有所不同，這時這個所形成的概念被稱爲「迷思概念」(misconceptions)。

(四) 概念心像與概念定義

Vinner (1975) 定義個體概念的「心像」(mental picture)，爲關於此概念所有的視覺及符號表徵；Vinner (1980) 定義個體的「概念心像」(concept image)，包括心像及在個體頭腦中所有相關概念的性質 (Tall, 1980)。Tall & Vinner (1981) 延續此一想法將「概念心像」定義爲包括心像、性質及概念相關過程的認知結構，也就是本研究所指的「概念心像」。而「概念定義」(concept definition) 是指：用來具體說明此概念的文字形式，也就是數學家所接受的定義。此外，概念定義所產生的概念心像稱爲「概念定義心像」(concept definition image)。

(五) 認知衝突

Tall & Vinner (1981) 使用「潛在衝突因子」(potential conflict factor)，表示概念心像的任何部分或概念定義的任何含意，與其它部分或其它的含意相衝突。本研究所提及的「認知衝突」(cognitive conflict) 是指：用以描述心智中喚起相互矛盾概念心像或概念定義心像之情境。

第貳章 文獻探討

本研究旨在探討 CAS 實驗活動的學習環境中，大學生極限概念與表徵二者之間的相關議題。因此，本章文獻探討主要區分為五個部份，第一節介紹認知學習理論；第二節是 APOS 理論相關研究；第三節將表徵相關研究做綜合性的論述；第四節是與 CAS 相關的議題；而第五節則是極限概念相關研究。

第一節 認知學習理論

(一) 學習理論

認知取向學習理論主要是探討知識的習得與使用，這牽涉到兩個層面：一是知識在記憶中是如何儲存，亦即知識與記憶的心智結構；一是知識是如何被使用或處理的心智運作歷程。對認知取向的學者而言，所謂學習是將既有的「認知結構」(cognitive structure) 予以重新組織，即：將新知識內化為認知結構的一部份。以下將 Bruner 發現學習論、Ausubel 意義學習論及訊息處理模式做概略性說明。

1. Bruner 發現學習論

在 Bruner (1961)《發現的行動》(The Act of Discovery) 一文中，鼓舞了現代人對發現學習的興趣。Bruner 所指的「發現學習」(discovery learning) 為學生在學習情境中，經由自己主動探索尋找，從而獲得問題答案的一種學習方式。此外，「發現學習」只在具有結構性的學習情境下才會產生。根據 Bruner 的說法，結構是指知識構成的基本架構，在此架構中，包括著某些彼此相關連的概念。Bruner 曾列舉四點說明學習情境結構的重要性，其中一點是學生從結構中學到的原理原則，將有助於以後在類似情境中，產生正向的學習遷移。根據 Burner 的說法，原理原則的發現造成較好的學習效果，因為學習者已將這些教材組織成有用的形式；原理原則的發現也使學生成為較好的學習者和問題解決者，因為學生在處理訊息時得到了實際練習之機會 (林清山，1997)。

「回饋」(feedback) 是指學生發現問題答案時，從錯誤調整到正確的認知歷程。在學生發現答案之前，Burner 鼓勵學生根據自己的知識和經驗，對問題情境先作一

番直覺思維 (甚至不按邏輯推理方式的思維)。在發現學習論者看來，「發現自己的錯誤」與「發現正確答案」，是同樣的重要。在 1960 年代，有過一陣疾風似的研究，探討在發現學習中教師應給予學生多少指導的問題。雖然這些研究所使用的名詞之意義不同，但仍可界定教學時教師使用引導的三種基本層次 (林清山，1997)：

(1) 純發現式 (Pure Discovery)：學生在解決問題時，只獲得教師最少的引導。

(2) 引導式發現 (Guided Discovery)：學生在解決問題時，教師提供暗示和有關如何解題的指導語，使學生的問題解決保持在教師的注意範圍內。

(3) 說明式 (Expository)：教師告知最後的答案或原則給學生，學生不需花太多時間學習，缺點是學生不會分析思考。

Burner 倡導「引導式發現」學習法，希望學生不僅僅只是閱讀或專心傾聽老師的講課或記憶一些由老師呈現的原則而已，而是鼓勵學生去發現問題、蒐集資訊、探索、提出假設、驗證假設、分析、歸納與演繹，以擴展知識與經驗 (沈中偉，2004)。許多研究結果顯示，接受引導式發現學習比傳統教學法有顯著的學習效果。沈中偉 (2004) 指出：發現學習理論適合於科技融入教學環境，若教學目標要培育學生分析、綜合、問題解決與創造力時，發現學習是很適當的教學方法。

2. Ausubel 意義學習論

「有意義的學習」(meaningful learning) 是 Ausubel 理論中的主要核心理念：只要學習者有意識地將新知識與其已經知道的概念或命題 (既有的舊知識和舊經驗) 相連結時，有意義的學習便告誕生 (余民寧，1997)。然而「有意義的學習」，只能產生於學生已有充分的「先備知識」(preknowledge) 基礎上。換言之，只有配合學生能力與經驗的教學，學生們才會產生有意義的學習。Gagne 指出學習者之所以無法學習某教材，可能是因為尚未具備學習此教材的先備知識或技能 (沈中偉，2004)。因此，「有意義的學習」有二個先決條件：

(1) 學生表現出一種意義學習的傾向，即：學習者必須為自己的學習負起責任，願意主動嘗試將新知識與既有的概念作聯結。

(2) 學習內容對學生具有潛在意義，即能夠與學生已有的知識結構聯繫起來。

Ausubel 的「意義學習論」(theory of meaningful learning) 對影響學習的重要因素所持的看法，後來也獲得學者們 (Hegarty-Hazel & Prosser, 1991; Prosser, 1987; Prosser & Millar, 1989) 的證實與支持 (余民寧，1997)。依據這些研究結果顯示，先備知識是影響學生學習什麼及如何學習的重要因素；先備知識豐富的學生會傾向採用較為深度且較有意義的學習策略來學習；反之，欠缺先備知識的學生，則傾向採用較為膚淺的策略來學習 (余民寧，1997)。因此，先備知識會影響學生所採取的學習策略，進而間接影響到學生所習得的知識。

Ausubel 將概念視為一個層次性的結構，居於結構上層者為要領 (superordinate) 概念，代表個人對事物的整體認識，居於下層者為附屬 (subordinate) 概念，代表個人對事物特徵的細部記憶。要領概念可持久不忘，但附屬概念則多為短暫性的 (張春興，1996)。Skemp (1987) 將概念分成表面結構 (surface structure) 與深層結構 (deep structure) 兩種。所謂表面結構是指：文辭表面句型的傳達，寫或說出符號等表面的操作。而深層結構則是指這些文辭底下所代表的意涵，也就是概念本身。概念結構重要的部分當然是指深層結構的部分 (陳澤民，1995)。依據 Ausubel 的解釋，要領概念就是個人的先備知識。先備知識就是個人吸收新知識的基礎，在意義上，也就是一般認知心理學家所指的認知結構。在學生學習新概念形成新知識時，首先用自己既有的要領概念去核對新概念，並試圖將其納入自己的認知結構之內，從而同化為自己的知識，即：要領概念具有吸收同化新概念的功能。Ausubel 將此種結合舊新概念而利於學習的教學步驟，稱之為「前導組織」(advance organizer)。學生使用「前導組織」，並不能保證一定能將一般概念抽象化。為了幫助學習者充分地使用系統及形成適當的概念圖像，需要一個外部的組織媒介 (organizing agent)，這些媒介可能從教師的引導、教科書或恰當的電腦教材的形式出現。

在學習成果上，亦有許多研究 (Rivard & Yore, 1992) 指出：若所用來測量學習成就的試題傾向於記憶性的題目，則使用有意義學習取向的學生在表現上，比傳統機械式學習法的學生差一點；但所使用的評量工具是用來測量高層次認知能力，則使用有意義學習的學生表現要明顯地高出傳統機械式學習法的學生 (余民寧，1997)。

3. 建構主義學習論

建構主義者認爲學習就是一種學習者建構知識的歷程，透過新經驗與舊知識相融合，學習者不斷修正原本舊有的知識。因此，學習者並非等待注入的空瓶，而是像杯子裡的冰塊 (具先備知識) 與倒進杯子裡的水 (新教材) 融入在一起，是主動尋求意義的有機體 (Driscoll, 2000)。在建構主義的信念中，認爲學生應由思考產生學習，思考自己的學習歷程，學習源於思考，而思考也影響學習 (Jonassen, Peck & Wilson, 1999) (引自沈中偉，2004)。換言之，建構教學必須透過學習者主動參與及有意義的去建構新、舊知識的活動，教師應使用適當的教學策略，安排學習情境、激發學生積極參與，使學生重組、整合並建構其知識。

複雜的數學概念問題，著重在概念思考與解題過程，結果反而不是那麼的重要，因此建構主義較適合複雜的數學概念問題。將建構主義應用於學習活動時，可知教師的「教」不等於學習者的「學」。因此，教學活動不應該爲「教」而設計，而是應該爲「學」而設計。沈中偉 (2004) 指出：建構主義學習觀的特點，強調主動性、有意義的學習及合作學習。因此，建構主義學習方式能達成主動、有意義且合作之學習效果。

綜合本節所述，可將 Bruner 發現學習論、Ausubel 意義學習論及建構主義學習論視爲三個兩兩相交之集合，如圖 2-1 所示，即各個學習理論皆有部分共同特質。本研究之教學活動設計理念涉及：Bruner 所倡導之「引導式發現」學習法、Ausubel 主張新舊知識相結合之「有意義學習」、建構主義之主動積極與合作學習精神。

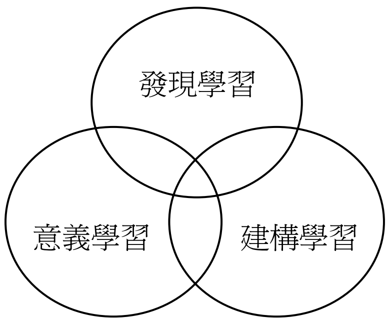


圖 2-1 教學活動設計理念

(二) 訊息處理模式

訊息處理論爲解釋人類環境中，如何經由感官察覺、注意、辨識、記憶等內在心理活動。數學是處理人類從環境中發現的訊息，尤其是數、量、形的訊息，然而數學教育是研究人類如何思維、傳達、處理或學習這些外來或是外置的訊息。依據此一觀點，數學所運用之訊息處理歷程 (information processing) 和人類日常大部分思維並沒有太大的差異，也就是爲何認知學家時常以研究數學思維，瞭解人類一般思維的主要原因。

訊息處理爲無法直接觀察的內在心理運作歷程，認知學家認爲此歷程包括三個心理特徵：

(1) 訊息處理具階段性。

(2) 各階段的功能不一，居於前者屬暫時性，居於後者屬永久性。

(3) 訊息處理不是單向直進式，而是前後交互作用的。

根據上述三點之假設，一般同意採用類似與下圖的圖解，說明訊息處理的內在心理歷程 (張春興，1996)。

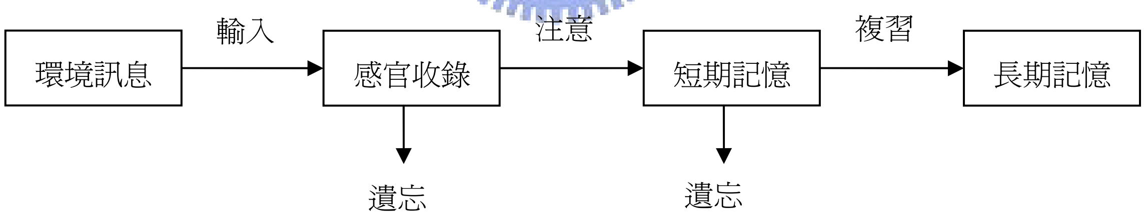


圖 2-2 訊息處理心智歷程

圖 2-2 說明環境中的訊息，經由感覺器官收錄外界刺激，引起短暫的記憶。若個體注意到此一訊息，將給予編碼轉換爲另一種形式。否則予以放棄，形成感官收錄過後的遺忘。感官收錄後的訊息再經過注意，訊息將進入短期記憶 (short-term memory, STM)。若個體認爲所處理的訊息是重要的，將採用複習 (rehearsal) 的方式，使得能保持較長久的時間，進而輸入至長期記憶 (long-term memory, STM)。

在訊息處理時，個人透過心理運作進行編碼 (encoding)，將外在刺激的物理屬性(例如：聲音、形狀、顏色等) 轉換成另一種抽象的形式，並將它貯存於記憶中，以供日後檢索提取 (張春興，1996)。此抽象的形式就稱為「心理表徵」，它的形式有以聲音為主的「聲碼」(acoustic code)、以形狀為主的「形碼」(visual code)、以意義為主的「意碼」(semantic code) 等。這些心理表徵就被貯存在記憶中，當需要將輸入的訊息輸出時，就需要解碼 (decoding)，而從記憶中解碼的過程稱為提取 (retrieval)。一般而言，提取並非每次都能成功，記憶內容是否能有效地被提取，涉及當初訊息被處理的程度及在回想這些內容時，是否有相關的回憶線索等。

Anderson (1995) 認為訊息處理的研究主旨在於探討個體察覺、組織和記取相關訊息的各種方式，從而描繪出當個體從事認知活動時的心智運作歷程和訊息產物。Margaret (1986) 認為可以利用訊息處理論來解釋學習之歷程。學生主要是透過感官收錄接觸他們要學習的訊息和知識 (Henson & Eller, 1999)。要保留感官收錄中的訊息其先決條件是要先注意到該訊息的存在，而且個體必須要有足夠的時間才能知覺所有刺激的存在 (Slavin, 1997)。訊息從短期記憶進入長期記憶的過程是整個學習過程的核心階段。Margaret (1986) 認為可藉由編碼的歷程使新的訊息能貯存到長期記憶裡，而影響訊息儲存的兩個主要編碼策略為「維持性覆誦」(maintenance rehearsal) 和「精緻性覆誦」(elaborative rehearsal)。反覆背誦訊息，如名字、電話號碼和定義，就是維持性覆誦，不過它通常只有一時的效果 (Mckeown & Curtis, 1987)。維持性覆誦對概念理解沒有幫助，並且這樣得到的訊息很快就會被遺忘 (吳幸宜，1994)。而精緻性覆誦則是利用某些方式將訊息加以轉換，其方式為：

(1) 修改訊息使它能夠與已存在記憶中的訊息產生關聯。

(2) 以符號取代該訊息 (Madigan & Tulving, 1970)。

(3) 添加訊息來幫助回憶。

Margaret (1986) 指出：編碼最重要的功能是使學習的訊息能更容易記憶，以及遷移訊息到學習者以後方便找得到的地方。Tulving (1970) 認為有效的編碼必須提供日後提取的線索，這其中一部份的意義是指編碼策略必須提供突出而顯著的線索，

另一部份的意義則是編碼策略必須「深入處理」訊息，如此才能夠建立新訊息與既有知識之間的各種關係，使日後提取相關訊息的過程能更加容易。為了使編碼的工作更有效率，則必須考慮兩個重要的問題 (Mayer, 1979)：

(1) 如何由長期記憶中提取出相關知識。

(2) 如何將這些相關知識轉移到短期記憶中以便與新知識相整合。

訊息處理論運用在教學上，首先應將學習者的注意力引導到欲學的相關訊息上，並提供學習者喚起相關基模的訊息。換言之，教學首先要回答的問題是：該項訊息是否已被接受到學習者的運作記憶裡？及學習者是否已回想起貯存在長期記憶中的相關訊息？(吳幸宜，1994)。

在感官接收訊息方面，視覺資訊能使抽象的觀念變為具體，支援整體的認識與意義，如此也能提高學習者的學習動機 (Hodes, 1992; Meskill, 1996)。短期記憶中的運作功能會對學生的學習產生影響，包括學生使用訊息的內在連結、編碼與解碼的工作，因此如何建立學生能掌握的知識組織，是認知學習上的重點之一 (左台益、蔡志仁，2001)。訊息處理論強調在知識形成的過程中，學習者的先備知識和經驗是吸收新知的重要條件。因此，提供學習者豐富的刺激源或環境，讓新知能與認知結構結合、同化或融入知識記憶中 (Ayserman, 1993)。Resnick & Ford (1981) 表示學生無法適當地運用先備知識，歸咎於學生數學知識的貧乏。Lawson & Chinnappan (1994) 指出：良好的組織與整合知識，不但能幫助學生提取相關訊息，也能在解題過程中，決定如何使用所得到的訊息。

第二節 APOS 理論

數學概念並非在教學的瞬間就能完整地建立，必需要靠時間逐漸累積才能完成。要瞭解學生極限概念的發展情形，必須先找出一個適合的理論分析此概念，以探測出學生概念的發展。本節介紹 Dubinsky 等人的 APOS 理論，並利用此理論分析函數的極限概念。

(一) APOS 理論

Dubinsky (1991) 認爲數學知識的本質是人的一種「傾向」(tendency)，這種傾向反應在一個人能確實瞭解數學問題的描述、以及該如何解答這問題的過程。也就是說，思考如何將數學問題與社會的脈絡 (social context) 結合，然後建構或重建構出解決問題的行動 (action)、過程 (process) 和物件 (object)，然後將整個過程組織爲一個解題的基模 (schemas)，最後在使用基模來解決問題。一個人是不可能直接學習到數學概念的；更確切的說，人們是透過「心智結構」(mental structure) 來使所學習的數學概念產生意義。如果一個人對於給予的數學概念擁有適當的心智結構，那他幾乎是自然就學到了這個概念；相反的，如果一個人無法建立起適當的心智結構，那學習數學概念幾乎是不可能的。因此，教學的目的就在於如何幫助學生建立適當的心智結構。

在數學教學中，不僅要幫助學生掌握數學知識，更要幫助學生理解和運用數學思想方法。Dubinsky (1991) 將 Piaget 的認知發展理論應用在高等數學，孕育出用來處理概念發展的 APOS (Action Process Object Schema, APOS) 理論，用以描述大學階段數學概念的認知發展。此理論強調用數學的方法組織和建立數學概念，讓學生透過活動親身經歷、體驗完整的學習過程，這樣建立的數學概念有著豐富的內涵，其中包含概念的抽象過程、數學思想方法和概念的形式化。這是以建構主義爲基礎的數學教學理論，它的核心是引導學生在探索中學習數學知識，分析數學問題情境，從而建構他們自己的數學思想。根據上述想法，Dubinsky 成功地幫助大學生們學習了一系列與微積分、離散數學與抽象代數等學科分支有關的概念。

Piaget 的認知發展理論指出：當個體接受到外界的刺激時，會主動以本身的認知結構爲基礎，經「同化」(assimilation)、「調適」(accommodation) 的過程，內化成個體認知結構的一部份，使得個體的認知結構達到「新平衡」(equilibrium)。Piaget 稱此思維歷程在新知識的同化及舊知識適應重新整理在一起；若調適不滿意可能是新知識與舊知識產生衝突 (conflict)，但二者仍同時存在。

Piaget 指出：「反思抽象」(reflective abstraction) 過程，是數學概念在認知建構上的關鍵。再此，反思抽象的意義與 Piaget 認知理論的所使用的相同，Dubinsky 並將反思抽象的建構歷程再細分如下：

(1) 內化 (Interiorization)：學習者透過低階的數學物件操作逐漸熟悉，最後產生新的概念。當整個活動過程已被內化時，學習者實際上不需要執行它，而是透過心智表徵來執行。

(2) 協調 (Coordination)：當個體在不同的情境中使用這樣的過程，並且加以整合成另外一種過程。

(3) 壓縮 (Encapsulation)：過程被其他活動加以轉換，那麼就說該過程被壓縮成物件。學習者能將過程視爲整體的階段，且並非總是注意在細節上，且能將一長串的處理流程縮短，看成一個較易處理的單位。

(4) 類推 (Generalization)：個體以現有的基模、概念，推廣到新情境中，並且加以應用。將一個抽象的數學概念看成一個物件，並進而去操作此物件。

(5) 逆反 (Reversal)：個人反思已經存在的內部過程去建構新的過程。

Dubinsky 的 APOS 理論的運作模型如圖 2-3 所示，行動透過「內化」運作成過程；物件的產生透過過程的「壓縮」。概念首先要處理的是行動，行動意指學習者做此動作，但不知道實際上發生什麼事情。行動可能藉由一個關鍵詞觸發，也可能是個演算法，當學習者已經做此行動若干次且深思熟慮，行動可轉變爲過程。此時，學習者意識到行動的用意，可透過心智表徵來執行此一行動，而不需要外界刺激。當學習者將過程視爲整體，了解在過程使用的操作而且能遷移時，將可視過程爲一個物件。

在基模裡，物件和過程被綑綁在一起，它們像「心智網絡」(mental network) 且能用許多方式變化。單一基模不同部分之間、不同的基模之間，它們的連結次數可能改變，這些連結可能是強而有力的、薄弱的甚至有錯誤的；若既有基模裡存有概念迷思，當新概念和操作 (operations) 添加在基模時可能會產生問題，因此學習者必須改變心智結構。

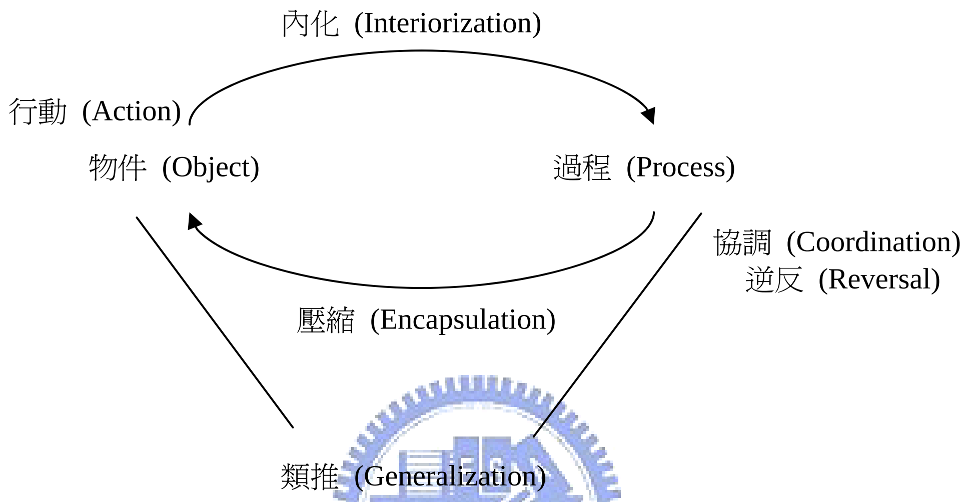


圖 2-3 基模及其建構物

類推不像抽象化那麼困難，因爲抽象化時常意味著個人再度建立「心智表徵」(mental representation) (Dreyfus, 1991)。物件的性質 (properties) 必需被組織，才具有在其它情境中應用的可能性。心像能使重要的結構和關係更佳清楚，竟可能地視覺化 (visualization) 將助於組織及建構。抽象化除了類推之外還包括「整合」(synthesis)，整合是從部份中產生整體的形式，當整合完成時，超出本身的部份將聚集在一起。許多小且不相干 (disjoint) 的部分連結在一起，許多東西突然地逐漸被理解，這是種有受益的感觸 (rewarding feeling) 且個體已經越過了此過程。不久之後，所有瑣碎重要的整合過程片段被遺忘，且個體理解了這個結果，也就是說了解此概念。

(二) 基因分解—函數極限概念

Cottrill 等人 (1996) 以「基因分解」(genetic decomposition) 描述個體如何建構出行動、過程和物件，用來理解某個數學概念的心智模式。概念的基因分解可作為教學設計及分析學生學習的架構。某個特定概念的基因分解並非唯一，它只是暫時性的，可由實徵性的研究加以修改、調整，再作為下回教學實驗的設計架構。

Dubinsky 及其所屬之數學教育研究團體 RUMEC 中的成員，利用 APOS 理論配合「基因分解」(genetic decomposition)，深入探討學生如何建構微積分課程中的重要概念。他們指出以 APOS 的理論架構所做出的基因分解，不僅可作為自身理解數學概念的架構，也可作為分析學生如何建構概念的基礎 (白啓光，2005)。

Cottrill 等人 (1996) 利用 APOS 理論建構極限概念的行動、過程及物件，也就是將此數學概念用「基因分解」加以描述。在白啓光 (2005) 的教學研究中，修改 Cottrill 等人所提出 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 概念的基因分解，修改結果如下，並根據此基因分解設計探索極限的電腦實驗活動。

1. 選定在某些點，這些點愈來愈靠近 a，計算這些點的函數值。
2. 利用步驟 1 中的數值建極限的動態逼近程序“$x\to a$，$f(x)\to L$”。
3. 了解極限的非形式定義。即：
   We can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a.
4. 將步驟 3 重新以區間和不等式，即引入 $0<|x-a|<\delta$、$|f(x)-L|<\varepsilon$ 符號的方式加以建構。
5. 應用量詞化 (quantification) 基模將步驟 3 重新建構，以獲得一個極限的形式定義。
6. 將 $\varepsilon-\delta$ 形式定義應用到特定的情境。

第三節 表徵

(一) 雙碼理論

Paivio (1986) 提出解釋人類對訊息表徵和處理的雙碼理論 (Dual-Coding Theory, DCT)，認爲人類的心智結構與訊息處理過程中皆包含文字 (verbal) 與圖像二種不同類型的訊息。當感覺器官接受到文字訊息時，這些文字訊息將經由文字編碼歷程 (verbal encoding process) 在運作記憶* (working memory) 中轉換爲文字系統的心智表徵，此過程爲建立文字表徵連結；感覺器官接受到視覺訊息時，這些視覺訊息將經由視訊編碼歷程 (visual encoding process) 在運作記憶中轉換爲視覺系統的心智表徵，此過程爲建立視覺表徵連結；而參照連結 (referential connection) 則是將兩種呈現的訊息連結在一起，如圖 2-4 所示 (Mayer & Sims, 1994)。

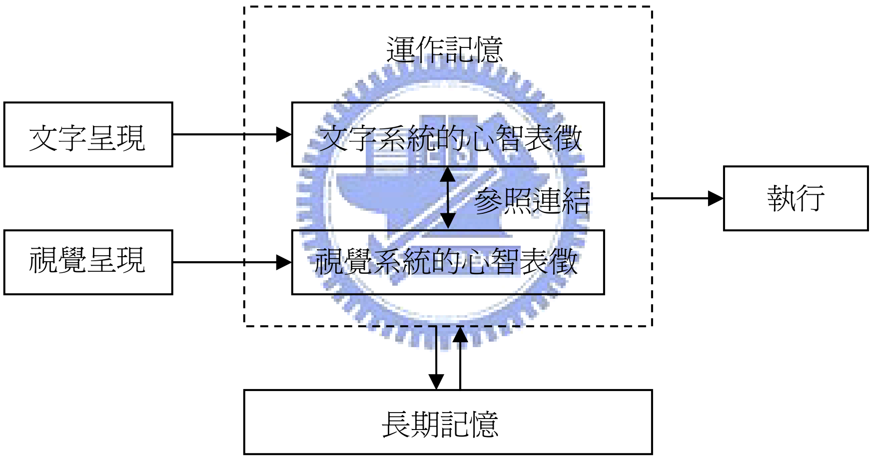


圖 2-4 雙碼理論的學習示意圖 Mayer & Sims (1994)

學習者的學習成效則視文字表徵連結、視覺表徵連結及參照連結三種連結建立的品質而定。Mayer & Sims (1994) 發現同時呈現文字訊息與視覺訊息比先後呈現更能有效地幫助建立參照連結。因此，依據雙碼理論，學習者需要同時使用心智文字系統與心智視覺系統來有效處理訊息，如果能促進這三種連結的建立，就能有效地提昇學習的成效。

* 訊息處理中短期記憶在有限時間內，除接受從感官收錄輸入進來的訊息，並適時作出反應之外，另具有運作記憶的功能 (張春興，1996)。

(二) 表徵的意義

在認知心理學上，表徵是指「將外在現實世界的事物，以另外一種較爲抽象或符號化的形式來代表的歷程」；而在訊息處理取向上，則是指「訊息處理過程中，將訊息經譯碼 (coding) 而轉換成另一種形式，以便貯存或表達的歷程」(張春興，2006)。廣義言之，表徵乃是指「用以代表某些事物或事件的東西或現象」。例如：古人結繩記事，乃是用繩結來代表所欲記載之事，因此繩結可當作是所欲記載之事的表徵；此外，剛從樹上摘下來的三個蘋果，可用筆寫出「三個蘋果」、用圖形畫出「」或「3」來代表這具體的三個蘋果，或者在心中留存一幅三個蘋果的景象 (黃永和，1997)。當我們使用一個符號代表一組經驗時，我們所使用的符號便是該組經驗的表徵；所用的符號可以是動作、聲音、圖畫或者是心像 (image)，也可以是抽象的文字 (劉秋木，1996)。

Mayer (1987) 以認知心理學觀點看「數學解題」的過程，當我們面對一個新的問題情境時，會將所接收到的訊息轉譯成自己所能理解的形式，這種問題轉譯的過程也就是一種內化的心理表徵 (mental representation)；接著再經由問題整合、監控解題計畫、執行解題之四項數學解題成份，將內部思考過程轉譯爲外在解題的表徵，作爲溝通數學想法的工具 (林清山，1997)。因此，數學表徵是內部數學思考的歷程，以及外在數學形式的展現。

就數學領域而言，許多學者 (Kaput, 1987; Lesh et al., 1987; 蔣智邦, 1994) 對表徵的定義也有著不同的見解。Kaput (1987) 指出：表徵系統有「表徵」(representing) 及「被表徵」(represented) 兩個面向；本研究被表徵面向爲極限概念，而表徵面向爲表徵結構之表現內容。Lesh 等人 (1987) 將「表徵」視爲模式化 (modelizes) 各種心智過程 (mental processes) 所使用的符號系統，如圖表、符號及文字等，也就是外在具體化已經內在概念化的知識。蔣智邦 (1994) 認爲「表徵」是用某一種形式 (物理或心理)，將一種事、物或想法，重新表現出來，以達成溝通的目的。由上述可知，表徵具有運思及溝通的功用。

(三) 表徵的分類方式

Carpenter & Hiebert (1992) 以外在及內在的觀點將表徵區分爲兩類；而 Bruner (1966) 由運思的觀點探討表徵的分類；Lesh 等人 (1987) 則以溝通的觀點，重新描述了表徵的類別，以下說明上述各觀點分類的結果。

1. 外在與內在觀點

Carpenter & Hiebert (1992) 將表徵分爲「內在表徵」(internal representation) 及「外在表徵」(external representation) 兩類：

(1) 內在表徵：指存在個人心中或腦海裡，他人無法直接觀察的「心智表徵」。透過內在表徵，個體可進行想像、構思、推理等思考活動。

(2) 外在表徵：指語言、文字、符號、圖片、具體物、活動或實際情境等形式存在的表徵。透過外在表徵，個體可表達出自己的想法並與他人溝通。

羅素真 (1996) 認爲解題者會將問題的「內在表徵」，以「外在表徵」形式呈現，藉此達到溝通、解題之目的。以個人反思知識層面來看：個人「外在表徵」的應用，反應出知識的「內在表徵」；以教師教學層面來看：個人知識的「內在表徵」也受到「外在表徵」的影響；亦即：外在的教學情境與表徵形式影響內在的認知結構。

黃家鳴 (1997) 指出：「內在表徵」不能直接被觀察，只能從學習者在處理數學概念、解決數學問題時的種種表現推斷其輪廓。因此，當我們要探討學習者對某個數學概念的「內在表徵」時，仍須借助某些「外在表徵」形式才能加以描述。

然而，有些「外在表徵」形式並不單純只作爲符號或記號，本身亦蘊涵著一些操作的可能性，協助學習者思索相關數學概念。如： $f'(x)$ 與 $\frac{d}{dx}f(x)$ 皆表示 $f(x)$ 的微分記號，若以 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 表示時，較能突顯出微分的意義 (sense)；而 $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ 這樣子的運算方式卻又是這個簡單的符號，在運算上帶來了方便的可能性。

2. 運思觀點

Bruner (1966) 由運思觀點認爲人類智慧成長期間，有三種表徵系統在起作用，這三種表徵系統的相互作用，是認知發展與智慧成長的核心，這三種表徵分別爲：(林清山，1997)

(1) 動作 (enactive) 表徵：利用動作來表徵訊息。例如：兒童用手指數數。

(2) 圖像 (iconic) 表徵：利用視覺影像來表徵訊息。即：個體藉由操作具體物的經驗，而在腦海中留下了心像，因而在運思的過程當中不需要實際操作具體物，只要憑著心像即可進行內在運思。例如：比較分數大小時，大腦所浮現的圖示。

(3) 符號 (symbolic) 表徵：利用語言或其他符號來表徵訊息。例如：數學上以「π」表示圓周率。

這三類均代表著運思的抽象程度，較抽象的表徵 (圖像表徵、符號表徵) 是在學習經驗中發展出來的，在活動中先獲得圖像或符號的意義，當其意義穩固後，才可進一步地使用圖像或符號材料，進行運思活動 (楊雅捷，2002)。即：學生從具體活動中了解抽象數學表徵的意義，才能運用符號來進行運思。由於數學思考方式的多樣性，用來呈現數學想法的表徵方式，也會出現多樣的風貌。

3. 溝通觀點

Lesh 等人 (1987) 以解題溝通的觀點提出：實物情境 (real scripts)、操作具體物 (manipulative models)、圖形影像 (static pictures)、口語符號 (spoken language)、書寫符號 (written symbols)。Lesh 等人認爲數學的學習，除了 Bruner 表徵理論強調在深度的提昇外，加強廣度的學習有助於深度的提昇。因此，他們增加了「實物情境」和「口語符號」兩種表徵。這五種表徵分別爲 (Behr, Lesh & Post, 1987)：

(1) 實物情境 (real scripts)：由「真實世界」的情境或知識組織而來，可做爲解釋或解決類似問題的情境脈絡。

(2) 可操作模型 (manipulative models)：使用具體物顯示數學情境的內在關係與操作，這些表徵中的元素本身沒有多少意義，而在這些模型中所加入的關係與操作，可適用於許多日常情境。

(3) 圖形影像 (static pictures)：一種靜態的圖形模式，包括可操作模型所內化成的心像。

(4) 口述語言 (spoken language)：包含數學或其它相關領域 (邏輯) 的用語。

(5) 書寫符號 (written symbols)：像口述語言一樣，含有專門的用語和語句。例如：$x+3=7$ 、 $A'\cap B'=(A\cup B)'$ 等。

這種分法雖與 Bruner 不同，但「可操作模型」與「圖形影像」可歸屬於圖像表徵，「口述語言」與「書寫符號」可視爲符號表徵，至於「實物情境」可能含有 Bruner 所謂的三種表徵 (劉秋木，1996)。

綜合以上所述，從 Bruner (1966) 與 Lesh 等人 (1987) 對表徵形式的分類，可察覺表徵模式多以「外在表徵」作爲分類依據，因爲「內在表徵」是心智活動，它無法觀察亦無法表達，必須藉由「外在表徵」才能讓他人理解，因此這些分類的來源都是「外在表徵」。

從文獻的探討可知，不同的數學概念具有不同的表徵形式。例如：左台益、蔡志仁 (2001) 以語意、圖形、軌跡、方程、結構五種作爲「橢圓概念」之表徵結構；Janvier (1987) 使用物件、語文描述、表格、圖形、式子五種作爲「函數概念」之表徵結構。而某個特定概念也因研究者的不同有著相似的表徵形式，以下列舉兩位學者說明此一現象：Dreyfus & Eisenberg (1982) 指出函數表徵的形式有表格、集合映射圖、圖形、式子、語意敘述等五種；Even (1990) 提出函數表徵的形式有式子、圖形、表格、文氏圖、序對集合及生活情境等。因此，不同研究者區分同一個概念的「外在表徵」形式亦不相同。

(三) 表徵轉換與數學概念

數學概念本身有許多的表徵方式，而這些表徵之間不完全是獨立的，而是相互有關連且可以加以轉換。NCTM (2000) 強調數學表徵的重要性，並期望學生具有數學表徵轉換的能力。根據文獻探討，許多學者 (Davis, 1984; Lesh, Post & Behr, 1987) 認為：能夠利用多種表徵來表達同一個概念，並在表徵之間順利的做轉換，甚至懂得選擇適合的表徵來協助解題，皆表示具有穩固的概念理解。

Even (1990) 認為：在某種表徵形式中理解某個概念，並不意味著在其它的表徵形式中也理解此一概念。數學概念的理解包括兩個面向：一個是能夠以一套符號或系統來表徵數學概念，另一個是能夠以「多重表徵」呈現某一概念，並在不同的表徵系統之間作「轉換」(Davis, 1984)。Lesh 等人 (1987) 認為學生必須具有下列條件才具有概念理解：

(1) 能將此概念放入各種不同的表徵系統之中；

(2) 在給定的表徵系統內，必須能很有彈性地處理這個概念；

(3) 能精確地將此概念從一個表徵系統轉換到另一個表徵系統。

他們研究發現學生僅用單一表徵學習數學，很少使用多重表徵，因此強調區分不同表徵系統的重要性，而表徵之間的轉換與整合對學習者更重要。Lesh 等人以平面網狀圖形呈現表徵系統的轉換關係，如圖 2-5 所示。

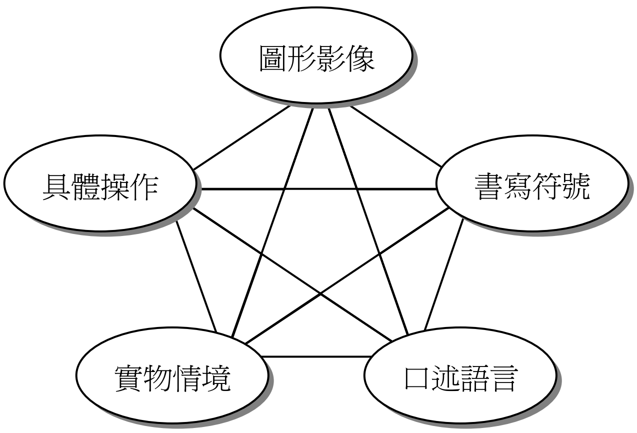


圖 2-5 表徵系統的轉換模式 Lesh 等人 (1987)

(四) 多重表徵與教學

Bruner 將人類認知表徵發展分爲三個階段，但在實際教學時，他並不主張按年齡或年級，而是採取三種表徵方式去教學生求知。原因是即使是同年級學生，在知識經驗上尤其是求知方式上，彼此間也存有很大的個別差異 (張春興，1996)。從訊息處理論可知，所有的學習都與訊息呈現的多樣化形式有關。因此，教學時常以各種不同的表徵方式呈現，以利學生在訊息處理的過程中，能對教材建立概念性結構。

Lesh 等人 (1987) 提到「多重表徵系統」(multiple representation system) 對學習的重要性，並指出系統與系統之間的「轉譯」(translations)、系統本身內部的「轉換」(transformations) 同等重要。因此，在表徵系統中必須要做到單一表徵的完整建構，也要做到表徵之間互相連結的工作。

Janvier (1987) 以「星形冰山」描述數學概念的多重表徵，冰山中心蘊含著此一概念，每個尖端代表著一種表徵形式；數學學習的理想方式是能在同一概念上運用數個表徵形式。在教學上使用多重表徵所具有的動機與目的如下：

(1) 教學時會期望學生察覺固有的慣用數學表徵，並能在問題情境中選擇適當的表徵；獲得表徵的同時也知道它的限制和效果。

(2) 可局部地用來降低特定的困難。

(3) 使數學學習變得更具吸引力，進而使用多重表徵發展不同的解題方式。

然而，研究中發現多重表徵若只是單獨地與概念作對應，學生可能會將相同題目以不同表徵方式解決的情形，視爲不同題目解決的情形，因而喪失在不同情境下轉換概念的機會。

多重表徵與概念學習關係相當密切，單一表徵只能強調出觀念或概念結構特定的部分，而其它部分可能無法完全顯現出來。教學時期望學生對問題的情境或概念，形成多種化表徵並給予連結，以增進對於問題的理解與解題能力。因此，多重表徵的引進彌補單一表徵的缺陷，以多重表徵呈現同一個概念，並注重表徵間互相的連結及轉換，乃學習數學最理想的方法。

第四節 CAS 整合學習環境

電腦科技讓學生在學習的過程中，經由猜想的探索與檢測達到主動學習，實踐透過概念衝突來建構知識，不僅增加學生的學習興趣亦增進學習之參與感。然而，任何的工具皆有它的使用方式，使用電腦科技也必須要注意到此問題，才能得到最佳的學習效果。本節簡介電腦代數系統及其教學上的應用與限制性。

(一) 電腦代數系統

電腦代數系統 (Computer Algebra System, CAS) 為一套能提供學習者操弄符號及觀察圖形和表格的軟體。此系統最讓人稱道的是「符號運算」，也就是我們在數學課室所演算的方式，不像一般的計算機系統只能做數值上的計算。現今較為普遍的 CAS 有 Maple、Mathematica 及 Mathcad 等。CAS 能提供「數值的」(numerical)、「圖形的」(graphical) 及「符號的」(symbolic) 多種呈現方式，能使學習者較完整地分析數學知識。即：提供學生迅速地試驗大量的例子，並得到軟體技術限制下的結果 (outcome)。因此，CAS 在學習上是個理想的工具，它能同時呈現各種表徵並提供連結之機會。也就是說，CAS 提供學生從不同的角度思考相同的問題，扮演著數學學習上多重表徵之間轉換的媒介。此外，有大多數地學生將 CAS 視為「數學專家」(Pierce & Stacey, 2001)。

(二) 使用 CAS 的微積分教學

在傳統的微積分課程，學生必須先學會微分法則 (rules) 才能進一步解決最佳化 (optimization) 問題，以至於他們必須在發展微分技巧後，才能學習其它相關的應用問題 (極值問題、繪圖、線性近似等)。Orton (1983) 指出：複雜的「代數運算」會影響數學概念的學習。Davis 等人 (1992) 指出：CAS 在數學學習上能減緩艱辛的符號 (symbol) 操弄過程，將學生的心思花費在解決問題上 (Pierce & Stacey, 2001)。因此，CAS 能協助學生處理微分的運算，只要將鍵入正確地指令，微分後的結果將顯示出來，進而改變傳統微分概念教學的次序。

在「黎曼和」(Riemann sums) 的單元裡，更能突顯 CAS 符號運算之強大功能。傳統的微積分課程，學生使用紙筆計算黎曼和，花費相當多的時間在處理數值計算或符號運算，因而喪失對積分的「概念性理解」。因此，引進 CAS 不僅能提供學生在技巧操作前，概念的學習與應用的機會，還能將目光聚焦在「概念性理解」上。

Orton (1983) 指出：許多學生能熟練地應用積分與微分的技巧，但缺乏「概念性理解」。他提到極限概念會影響微分與積分的學習，但一般傳統的微積分教學沒有較多的時間讓學生仔細思考極限的概念。而在使用 CAS 的教學環境中，學生不僅擁有對知識的「概念性理解」，亦保有傳統學習下的「操作技巧」(manipulative skills) (Heid, 1988; Dubinsky & Schwingendorf, 1991)。

Heid (1988) 將 CAS 使用在微積分的教學，主張在學習操作技巧前，先學習微積分的概念與應用。Heid 認為一但有穩固的概念理解，學生能迅速地學會必要的操作技巧。依據上述觀點，Heid 使用「概念性理解」教微積分，他的學生使用微分、積分及 muMATH 所產生的圖形，回答問題並解決相關的應用問題，只於學期末最後三週教授微積分的操作技巧。學生參與以技巧導向 (skills-oriented) 命題的期末測驗 (傳統教學模式教師命題)，測驗結果發現在二種不同教學模式下成績無顯著差異，但對於 Heid 的學生而言，顯示出較優越的「概念性理解」。

Dubinsky & Schwingendorf (1991) 使用與 Heid 相似的方法在微積分教學上，其研究結果與 Heid 相同。Rochowicz (1996) 微積分學習的研究報告指出：電腦教學環境能夠減少強調計算技巧與計算方法記憶的學習；學生也可以在此環境中，從圖形取向思索問題而非僅從代數計算的方法去學習微積分。因此，使用 CAS 整合微積分教學環境，不僅增添學生概念理解與應用能力，亦保有傳統學習下的操作技巧。

(三) 圖形視覺化

在 80 年代初期，高解析度 (high-resolution) 圖形的誕生，帶給學習者使用圖形的方法學習微積分，幫助學生將數學概念視覺化。Heid (1988) 指出：圖形視覺化的方法幫助學生獲得更多的概念理解，而不需要以所對應的符號表示 (symbolization)。

楊維哲 (1994) 認爲「視覺化」是理解的一大部分，學生心中若缺少「圖像化」，就談不上真正的學習。認知心理學家 Piager 與 Bruner 都強調在「符號」思考及運算前，必須經過「圖像」(icon) 階段。因此，許多微積分教科書也增加不少圖示，提供學習者建構心像及了解概念之涵義，但這些圖形都是「靜態的」(static)，只能說明 (illustrate) 圖形裡有什麼。而 CAS 能提供學習者以「外在動態表徵」(dynamic external representation) 方式，詮釋抽象數學概念。因此，這些「外在動態表徵」將提供學習者建構「動態心像」。

Piaget 指出：學習具有階段性，具體操作期必須發生在形式操作期之前，如果將數學的學習視爲具有階段性，就如 Piaget 所言，那麼視覺化、情境化及數値化的電腦環境設計，實有其重要性；而動態本身就可視爲一個情境；另外爲了解決特殊化與一般化的爭議，若能夠以動態呈現各種可能變化，那麼圖形就不止是一份靜態成果的展現 (demonstration) 而已 (謝哲仁，2003)。鄭晉昌 (1997) 指出：透過視覺可以擴大個人的知覺經驗，對學習者而言有下列三點益處：

(1) 視覺經驗較爲具體，尤其是動態的視覺經驗可以讓人瞭解整個事件發生的歷程。
(2) 因爲視覺訊息較易處理，因此視覺思考可以讓學習者在學習的過程中，容許有更多的短期記憶的空間進行資訊的處理。
(3) 視覺經驗較具可探索性，讓學習者更具想像空間，擴展學習的深度。

許多使用 CAS 的微積分課程，除了傳統的符號表徵外，還強調了視覺 (visual) 與數值 (numeric) 表徵。在 Porzio (1995) 的研究中，比較了三種教學模式：傳統課程、使用圖形計算器及使用 CAS (Calculus & Mathematica)，發現使用 CAS 課程的學生在圖形與符號表徵之間的連結能力比其它二者課程強。因此，CAS 能迅速地產生大部分函數的精確圖形，提供學習者使用圖形或幾何方法學習微積分。

(四) 使用 CAS 的學習模式

CAS 提供學生探索數學想法的工具，引發了利用「建構」的方式學習微積分。建構主義者認為學習是一種學習者建構知識的歷程，透過新經驗與舊知識相融合，學習者不斷修正既有的知識。因此，將原本以教師為主 (teacher-centered) 的教室，轉變成以學生為主 (student-centered) 的實驗室，在實驗室裡學生嘗試他們自己的想法並探索數學真理。

依據建構主義的數學學習觀點，強調學生的概念性理解需要經歷個人和群體商討的過程 (Vygotsky, 1978)。同儕討論使得想法前後交互作用，提供學生精練 (refine) 語言和其它經驗的思維。這樣的過程能導致學生「同化」新知識到現有的基模，或強迫改變當他們「調適」矛盾的經驗。Drouhard (1997) 把 CAS 視為教室裡的另一個成員 (player)，將 Joshua & Dupin (1993)「教學三角模式」(didactic triangle model)，如圖 2-6 所示，擴增為金字塔型，如圖 2-7 所示 (Pierce & Stacey, 2001)。

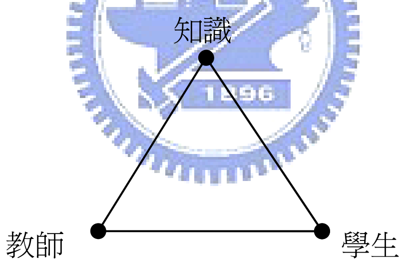


圖 2-6 教學三角模式 Joshua & Dupin (1993)

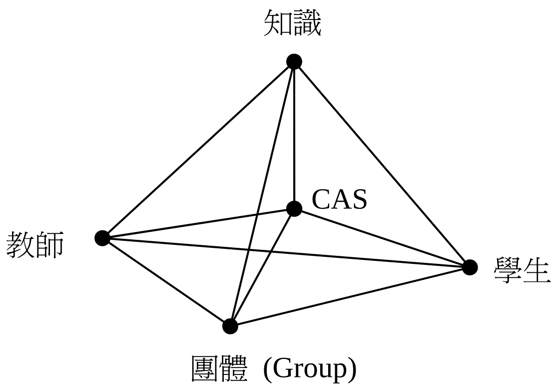


圖 2-7 教學三角模式 Drouhard (1997)

Drouhard (1997) 指出：每個成員能產生不同的作用，如：學習者、訊息提供者、教導者 (tutor)、神諭 (oracle) 與對話者 (interlocutor)；將 CAS 視為古希臘「神諭」(oracle) 相似的角色，因為實際上 CAS 並沒有回答問題，它做出的動作及執行的結果可能與預期不同，這需要充分地解釋 (Pierce & Stacey, 2001)。

Tall (1989) 描述在教室使用 CAS 所發生的互動 (interactions) 情形，為了建構及試驗基模，學生四種可能的互動環境類型如下：

(1) 無生命 (inanimate)：學生透過操弄具體物件獲得訊息的環境。

(2) 人工頭腦 (cybernetic)：CAS 依據「既定規則」(pre-ordained rules) 提供學生答覆的系統。

(3) 人與人之間 (interpersonal)：與其他人溝通討論的環境。

(4) 個人 (personal)：自我反思知識的結果。

Pierce & Stacey (2001) 指出：「人工頭腦」與「人與人之間」這二種互動類型，能幫助學生擴增數學思維及修正數學基模。在傳統數學教室裡 CAS 增加「人工頭腦」的環境，學生的猜想能透過電腦來「試驗」，也能鼓勵他們探索及試驗他們數學上的想法。

(五) 使用 CAS 的限制

資訊科技能突破某些層面上的教學，但不當地使用科技可能會使學生產生學習方法上或概念上的謬誤，這是因為科技上虛擬實體 (virtual reality) 與數學概念實體 (mathematics conceptual reality) 的偏差所導致。科技軟體的運算多以近似值表達，學生在這種學習情況之下，可能會將電腦結果的近似值與表達的真實數值混為一談(郭禮賢，1999)。因此，在教學上必須釐清兩者之間的關係，必要時可避開這類產生誤解的例子。此外，Sanders & Wilcocks (1994) 提到：如果學生發現學習使用某個課程軟體是困難的，他們會不想去使用 (謝哲仁，2003)。因此，困難的軟體操作介面會降低學習意願，亦影響課程知識本身的學習。

Wain (1993) & Thomas (1994) 探討教師與學生使用 CAS 所遭遇的一些困難，這些困難包括數學上慣用的「表示法」(notation) 與 CAS 語法的困惑及 CAS 產生錯誤結果。雖然 CAS 在技術限制下呈現的結果有時困擾著學生，但實際上引起學生與教師之間的進一步討論 (Pierce & Stacey, 2001)。此外，學習如何使用 CAS 也可能造成學習上的負擔。

然而，學生使用 CAS 可能只學到「如何做」(how to do)，而不是「爲什麼做」(why to do)。使用者正確地輸入語法指令時，CAS 以「既定規則」回應可能的結果，例如：輸入 Maple 指令「limit(f(x),x=0);」即可得到極限值，但 CAS 並未告知學習者任何極限概念。像這種以「目的取向」(goal-oriented) 的 CAS，中間似乎忽略了數學教學過程所需過程的學習。因此，使用 CAS 教學前必須先了解軟體本身的效能，並設計符合學生概念發展的活動，才能產生較佳的學習效果。若未將目光聚焦在概念學習上，那麼學生只學習到如何敲擊鍵盤或使用 CAS (Monaghan, Sun & Tall, 1994)。此外，CAS 的使用態度也會對學習產生影響，學生若過份依賴它的運作而沒有足夠的運算操練，將導致演算能力低落。

(六) 使用 CAS 產生的誤解

使用 CAS 描繪圖形有相當多微妙的 (subtle) 技巧，選擇適當的定義域與值域才能呈現合適的圖形。例如：使用圖形計算器 (TI-92) 繪圖時，x 軸與 y 軸的比例會改變原有圖形的風貌。此外，螢幕上所呈現的圖形，可能造成意義上嚴重的「誤解」(misinterpretations)。Goldenberg (1988) 指出：學生在自主地 (freely) 學習情境下，探究變數 “b” 對 $y = ax + b$ 圖形之影響，可能建構出複雜 (complex) 的數學概念。以下配合視窗圖形說明 Goldenberg 所發現之現象。

學生從操弄變數之經驗上得出「左右移動原理」(left-right theory)，這並非教師所預期的學習目標。 $y = -2x - 2$ 向上平移 4 個單位，得出 $y = -2x + 2$ ，在相同尺度視窗下所呈現的圖形如圖 2-8 所示。

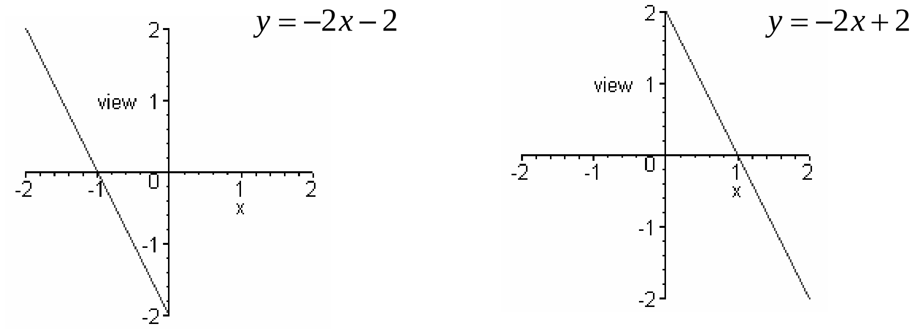


圖 2-8 直線往右移之錯覺

學生可能會產生 $y=-2x-2$ 的圖形向右平移 2 個單位的錯覺 (illusion)。若進一步操弄變數 “a”，將產生 “$|a|\gg 1,\ a>0$ 圖形左移” 與 “$|a|\gg 1,\ a<0$ 圖形右移” 之結論，如圖 2-9 所示。

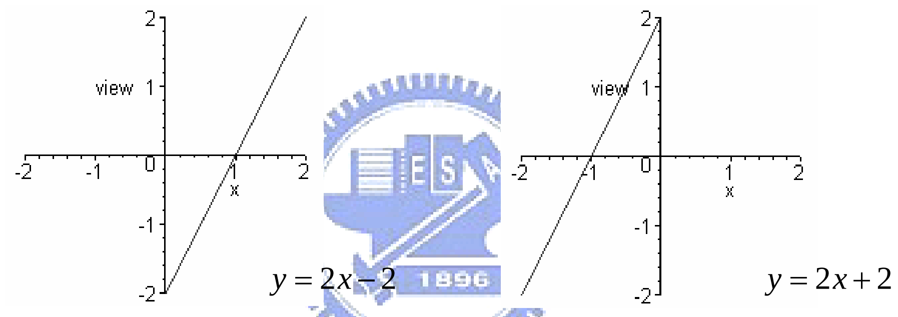


圖 2-9 直線往左移之錯覺

然而，不同尺度視窗亦影響圖形判讀，例如：認為圖 2-10 為「兩平行直線」。學生將視窗中直線的「視角」(visual angle)，視為數學上所定義之「斜率」(slope)，因而產生「兩平行直線」之錯覺。因此，使用 CAS 必須注意視窗尺度 (scale) 對圖形所產生之影響，才能正確地解讀圖形所傳達的訊息。

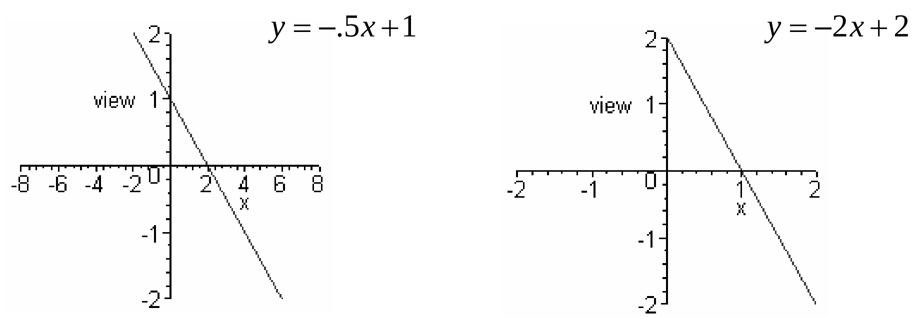


圖 2-10 兩直線平行之錯覺

若以相同的方向多變化的距離看同一個物體時，物體本身的「角度」會保持原狀而與視窗中心 (center) 之「距離」則否。從圖 2-11 可知，右圖視覺高度大於左圖，學生可能認爲直線 $y = ax + b$ 中 “b” 的變數有改變，進而影響「截距」之判讀。

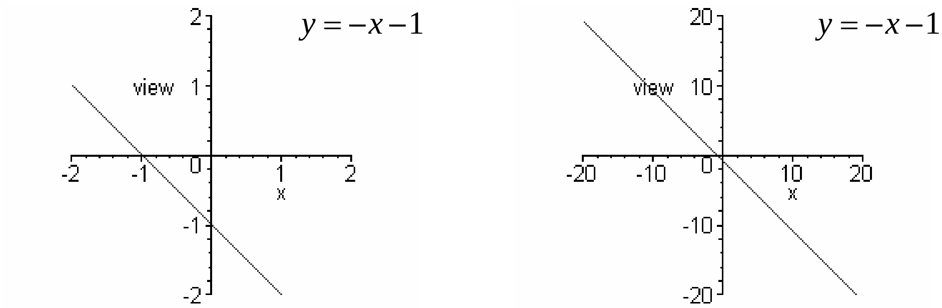


圖 2-11 近看與遠看圖形不變

「拋物線」(parabola) 有著與直線不同的體驗，從圖 2-12 可知近看與遠看似乎改變了拋物線之「形狀」(shape)，學生主要由拋物線之「形狀」判別 x^2 的係數，因此了解「尺度」與「形狀」之互動情形是重要的。

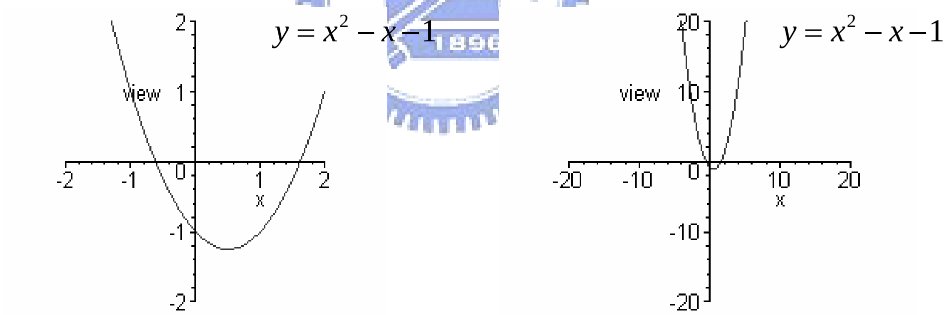


圖 2-12 近看與遠看圖形改變

此外，同一圖形在視窗中不同的「位置」(position) 也可能產生錯覺，如圖 2-13 所示，學生認爲上方拋物線之頂點處較「鈍」(blunter)，且認爲「隨著 x 增大，圖形對應 y 之差距越小」。

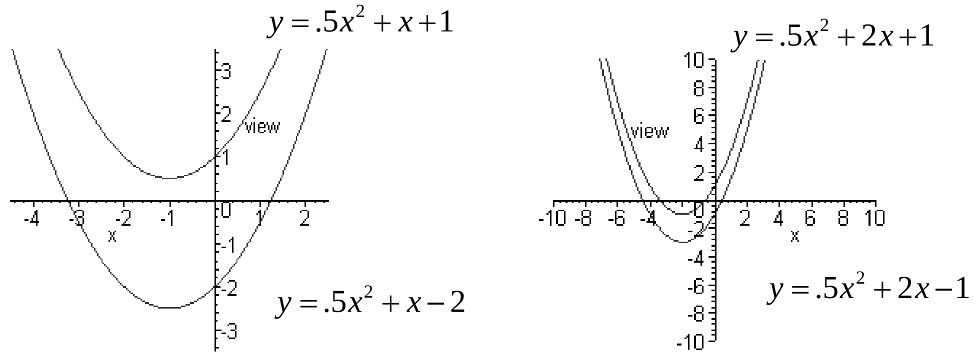


圖 2-13 拋物線圖形之錯覺

由上述討論可知，CAS 具有很強大的「圖形」生成功能，在一定的程式控制下幾乎能作出數學中所有的函數圖形，使得教學環境中時常使用 CAS 輔助函數圖形之生成，因此如何解讀 CAS 所產生的圖形，成爲使用上不可或缺的重要課題。

第五節 極限概念相關研究

(一) 極限概念的學習

Monaghan (1986) 研究 16~17 歲學生的實數、極限及無窮的概念，發現他們的實數概念裡，透露出能適當操作整數、分數及 $\sqrt{2}$ 、π這類的數，但較沒把握處理無限小數；在此基礎下所建構出的極限概念，必定包含認知衝突的種子，這些種子將散播困惑在學生的心智上。Davis & Vinner (1986) 建議：剛開始學習這項主題時，學生必須面對不可避免的障礙 (Monaghan, Sun & Tall, 1994)。

Sierpinska (1987) 指出：極限概念主要的學習障礙在實數、無窮及函數這三個具體的層面上 (Monaghan et al., 1994)。Monaghan (1991) 研究關於極限教學上使用的言語，發現學生將「極限」與生活中具體的言詞相提並論；學生有著含糊的措辭，將影響極限概念的學習。Szydlik (2000) 研究學生函數極限的概念性理解及數學信念，察覺學生無法給出一致的極限定義，或說明解題時所使用的算式及程序是可行的，並提到學生具有極限是「不可橫渡」(cross) 之迷思。Cornu (1992) 談論到極限概念發展史上四種主要在知識論的 (epistemological) 障礙，其中二項爲「無窮大及無窮小」的概念及「極限是否到達極限值」的問題。研究者認爲：當這些障礙被挖掘出來後，教學法應有相對應地改變，才能幫助學生克服困難，而不是排除困難的學習內容。

Maurer (1987) 指出：學生常像有創造力的科學家，自我一般化所學的課程，但可惜的是學生一般化方法經常是有錯誤的；學生往往著重在表面特徵而非意義 (引自謝哲仁，2003)。Tall (1991) 提到「一般性擴增原理」(generic extension principle)，當個體在只有遇到明確性質的問題，如果沒有出現「反例」，心智上會認爲該性質在所有的情境是有效的，即使它沒有被明確地陳述出來。例如：學生看到極限值會到達的收斂數列，他們會認爲收斂數列不會到達極限值。學生剛開始以直觀方式接觸極限概念，容易產生「極限無法到達」的情境，但較能產生控制的感覺 (Tall, 1991)。學生產生控制的感覺後，會認爲他們已經知道極限概念，既使他們不能解決必須掌握定義完整意思的問題 (Cornu, 1992)。

Tall & Vinner (1981) 指出：許多我們使用自如地概念，並非概念本身的形式定義 (formal definition)，而是透過經驗習得並使用於適當的情境中。不久之後，這些概念用他們的想法被精鍊，而解釋漸漸變得細緻。在此過程中，給概念一個具有傳遞功能的符號或名稱，將有助於心理操作。Gray & Tall (1993) 提到「符號」(symbol) 能同時呈現數學的「過程」(process) 及「概念」(concept)，這些符號稱爲「過程概念」(procept)；而 $\lim_{x \to a} f(x)$ 就是一個「過程概念」符號，它能表示函數趨近於某定值的過程及函數的極限值。在學習函數極限概念時，引進符號 $\lim_{x \to a} f(x)$，將有助於與他人溝通及心理操作，但整體認知結構仍然著重於概念本身的意義而不是符號。

在數學活動裡，數學概念不僅根據他們的正式定義被使用，而且不同的人透過不同的心智表徵。這些來自「自發性模式」(spontaneous model) 中的「個人模式」，阻礙了數學上的定義發展。Tall & Vinner (1981) 指出：學生在「對於所有」(for all) 和「存在」(some) 的意思上及量詞的操作上會產生問題。極限的形式定義不僅涉及到量詞的使用，還牽扯了邏輯演繹的先後次序，因此在學習與教學上皆產生困難。然而，記得極限的形式定義，並不表示完全地了解概念本身的含意。

實際認知衝突 (actual cognitive conflict) 有助於精煉「概念心像」(concept image) 或「概念定義心像」(concept definition image)。但有研究指出：當出現「實際認知衝突」的例子時，學生用懷疑的心態看待這個例子，以維護他們的認知平衡，因此無法改變迷思概念。例如：數列 $\left\{0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{12}, \cdots\right\}$ 有許多項 (terms) 等於極限值，但學生斷言它不是一個數列也不是二個，數列偶次項趨近於 0 且奇次項的每一項皆爲 0，因爲有些項等於極限值所以它不是個數列 (Tall & Vinner, 1981)。由此例可知，這些學生在認知結構裡的「概念定義心像」是薄弱的。雖然給定數列符合「形式定義」，但無法符合學生的「概念心像」，因此堅持說它不是個數列。這是個典型的現象，發生在堅固的「概念心像」和薄弱的「概念定義心像」，尤其是兩者之間存在潛在性衝突因子。

(二) 極限迷思概念

極限首先被以直觀的方式介紹，形式定義很久才會出現，這意指在出現概念的形式定義前，「直觀概念」之心像被建立了許久。因此，極限的概念心像很可能包含與形式概念的衝突因子。例如：若剛開始教學時有強調「逼近過程」的傾向，則概念心像包含許多與形式定義衝突的因子，這些衝突因子爲「不能通過」(cannot pass)、「逼近但無法到達」(approaches but cannot reach)。由此可知，學生所產生的極限、無窮心像，與「漸漸逼近」(getting close)、「逐漸變大」(growing large) 的迷思概念有關 (Cornu, 1992)。根據文獻探討可知，學生有著下列二項極限概念之迷思：

(1) 極限實際上是否能到達。

(2) 極限的靜態的還是動態的。

(三) 使用 CAS 學習極限概念

Cornu (1992) 指出：提供學生增加建構極限概念適合的經驗環境，必須反思學生在新環境中的體驗，以了解學到了什麼及什麼樣的知識形式被貯存在記憶中。Cornu (1992) 學習者與電腦互動 (interaction) 學習時，可能涉及到程式 (programming)。個體能從建構電腦程式之過程，獲得和掌握所對應的數學想法。因此，電腦環境將容許學生操作物件及建構知識。

Orton (1983) & Rochowicz (1996) 指出：利用電腦學習微積分，能減少強調計算技巧與計算方法記憶的學習。學生也可以在此電腦環境中，從圖形取向的策略上而非僅從代數計算的方法去學習微積分 (Rochowicz, 1996)。因此，在使用 CAS 的學習環境下較能發展完整的數學概念。

然而，科技並非萬靈丹。使用 CAS 學習極限概念，可能讓學生誤認爲極限無法到達 (attain)，或極限必須單調地 (monotonically) 靠近且極限值是個有界值，甚至只學會如何敲擊鍵盤。以下對此現象加以說明：

Dubinsky (1991) 提出過程壓縮成物件的理論 (a theory of encapsulation of process as object)，並使用 ISETL 語言設計程式建構數學上的效果，提供概念性數學思考良好的環境。但 ISETL 語言計算有理數是使用浮點 (floating point) 計算，無法計算出精確的極限值，在此環境下建構極限概念的想法仍有缺陷。

Tall (1981) 指出：「動態的概念」(dynamic conception) 對學生剛開始發展極限概念是容易且自然的。依據此一觀點可知，學生主要的困難在「如何從動態的概念進入極限的形式化理解 (formal understanding)」(Williams, 1991)。此外，有些研究者 (Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991) 認爲：學生的動態概念可能會阻礙形式概念 (formal conception) 的發展。Li & Tall (1993) 使用 BASIC 語言設計程式，成功地給予學生級數可視爲「數列項相加」的函數概念，進而幫助學生分辨數列與級數的差異，但數列的極限過程無法成功地轉移至物件，大部分的學生失敗於將極限過程壓縮成物件。

Monaghan, Sun & Tall (1994) 研究指出：若學生從原始的式子透過「敲擊鍵盤」(key stroke) 得到極限值，未將注意力置於概念學習上，這與小孩子敲擊鍵盤執行代數計算相類似，他們可能只學會如何敲擊鍵盤，對極限概念的學習毫無助益。在他們的研究中，實驗組學生 (使用 DERIVE 學習) 只會使用 CAS 求極限值，而不知還有其它的方法。這些學生在解釋 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的意義時，皆無使用理論方式說明意義，僅兩名學生提到「斜率」或「微分」的詞語，他們以多項式取代 $f(x)$，描述用 DERIVE 執行或鍵盤敲擊的方式去計算極限值。

第參章 研究方法

依據研究目的及第貳章的文獻探討，本章針對研究方法作詳細的說明，第一節說明研究架構與流程；第二節討論研究樣本；第三節說明教材來源與分析及測驗工具；第四節闡述研究資料的蒐集方法及處理方式。

第一節 研究架構與流程

(一) 研究架構

本研究採用 Lesh 等人 (1987) 對「表徵」(representation) 意義的詮釋，探討大學生在 CAS 實驗活動的學習環境下，極限概念之建構歷程，並陳述學生解題過程常出現之錯誤類型，以提供教學者及教材編輯者作爲極限概念教學之參考依據，進而對學生的學習有所助益。

「表徵」可用來具體呈現數學概念與思維，本研究以表徵觀點探討在 CAS 實驗活動的學習環境下，極限概念之建構歷程。由於外在具體化表徵具多樣的呈現方式，因而組成多重表徵之表徵結構，研究者參考國內外相關文獻，並與指導教授討論出極限概念之表徵形式包括：語意表徵、數値表徵、圖形表徵、代數表徵，各表徵之表現內容陳述於本章之測驗工具。

由學生所回答之結果，無法確實得知學生真正的想法，因此必須藉由晤談尋求學生真正想法研究者從實驗活動、成效評量之表現，抽取樣本加以訪談，以求更能深入瞭解學生的想法、作答原因及探討出學生的錯誤類型與迷思概念。晤談時緊扣極限概念並順著學生回答的方向進行探討，以錄音方式記錄晤談過程，再將晤談內容逐字轉成文字稿，以進行事後分析。最後將實驗活動、紙筆測驗及晤談等結果，綜合分析出學生極限概念之建構歷程。

(二) 研究流程

質性研究在研究過程中與量化研究有所差異，質性研究的歷程並非單向直線式，而是個循環的歷程。研究期間會不停地回溯與重複，並無一定的研究流程，例如：資料蒐集、整理與分析並非漸進的過程，而是不停重複校正的歷程。本研究主要分為三個步驟：第一步驟為探討相關文獻並對實驗活動教材作分析，第二步驟則是蒐集學習歷程之相關文件資料，並進行分析討論，而第三步驟為選取晤談對象，再由晤談內容及結果了解學生真實的想法，最後綜合分析與整理資料，並撰寫研究報告。依據研究架構，將整個研究過程繪成研究流程圖來表示，如圖 3-2 所示。

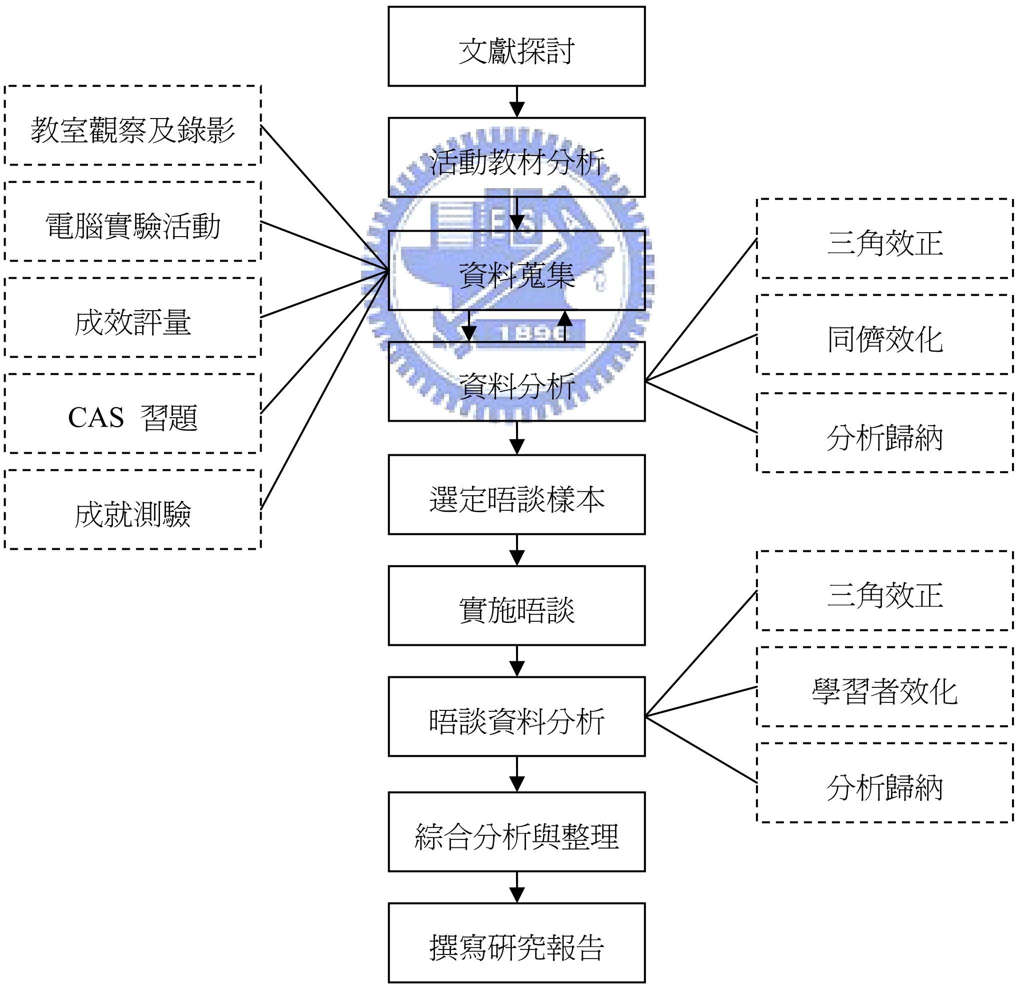


圖 3-1 研究流程

第二節 研究樣本

本研究之研究樣本取自國立交通大學微積分實驗班的學生，全班有 40 名學生，年齡大約在 19 歲。修讀此門課之前，僅有 1 名學生具使用 Mathematica 學習經驗，但所有學生皆不具使用 Maple 學習經驗。

學院	人數	性別人數 (男 / 女)	
工學院	7	6	1
理學院	30	27	3
其它學院	3	3	0
總計	40	36	4

表 3-1 樣本基本資料次數分配

微積分實驗班之教學方式為 ACE 教學環 (ACE teaching cycle) 模式，即：首先以實驗活動 (Activity, A) 引導極限概念，再進行課堂討論 (Classroom discussion, C)，最後指定習題 (Exercise, E) 給學生演練。授課前教師 (指導教授) 設計實驗活動，並與助教 (研究者) 討論進行修改。

實驗活動在電腦教室進行，學生兩個人一組使用一台電腦，透過網路取得學習教材，並使用 Maple 數學軟體進行探索學習。活動時間約為 100 分鐘，學生自行操作、探索及相互討論，教師與助教們則扮演著協助的角色，課後學生必須將解題推論過程和結果，以組別為單位進入作業繳交系統繳交。課堂討論則是以實驗活動問題為引導，參考指定微積分教科書[*]以 Maple 編寫教材，利用投影幕呈現並搭配講述方式進行。教材方面強調概念「視覺化」(visualization) 展示或「動態」呈現，以輔助學生學習；並將此教材放置於教學網頁上，以供學生課後複習之參考。教師常在課堂中適時提出問題，一方面評估學生的學習狀況，適時澄清可能的迷思概念，另一方面也藉此解題過程增進師生互動。此外，每週備有一小時的習題課，學生分組上台演練課本習題，以了解學生數學論述的能力。

[*] Calculus - Early Transcendentals

第三節 研究設計

(一) 教材來源與分析

Duffy, Lowyck & Jonassen (1993) 指出：學習者主動參與各種學習活動時，給予更多探索的空間活動，將使學習者的學習更加具有效果。同時也指出：學生的學習成效與電腦學習環境的設計之間有極大的相關存在。Jonassen (1996) 認為學習者將電腦科技當作認知學習環境的工具，可以提升解決問題能力與擴展思考力，進而提升學習者知識建構與認知的能力。同時也指出：教學科技媒體，只是一個做為訊息承載的資訊呈現工具之一，故對教學上並不會產生實質的學習效果，但是只有符合教學策略與學習活動的設計基礎下，才會對學習者產生學習效果的影響 (沈中偉，2004)。

Ausubel 有意義學習的觀點探討科技融入教學時，教師須考慮如何藉由科技讓學生主動學習 (active)、建構學習 (constructive)、意圖學習 (intentional)、真實學習 (authentic) 與合作學習 (cooperative) (如圖 3-3，五項有意義學習的屬性)；上述有意義學習的屬性都是有相互關係與相互作用的 (Jonassen, Howland, Moore & Marra, 2003)；學習與教學活動的設計能同時包含上述五個屬性，將比單獨一個屬性出現，更能產生有意義的學習 (沈中偉，2004)。

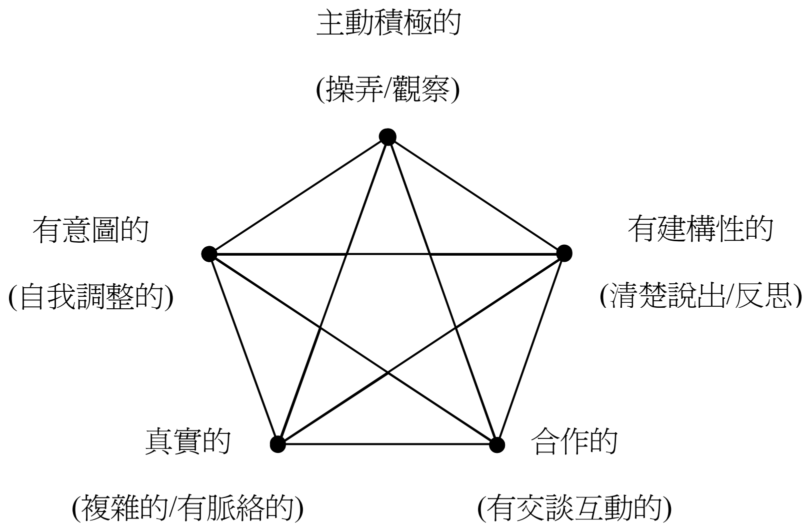


圖 3-2 五項有意義學習的屬性
(Jonassen, Howland, Moore & Marra, 2003)

白啓光 (2005) 參考 Cottrill 等人 (1996) 所提出 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的基因分解，並根據修改後之基因分解 (genetic decomposition)，設計極限探索之實驗活動。本研究將延用此實驗活動及其成效評量，探究與研究問題相關的議題，以下分別說明此實驗活動及成效評量之設計原理。

1. 實驗活動

讓學生利用數值及圖形的觀察、探索及分析，討論下列四個極限問題：

$$\text{(i)} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \text{；(ii)} \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \text{；(iii)} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}} \text{ 及 (iv)} \lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x}$$

藉由活動引導學生了解極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ 的動態逼近程序、建立非形式的極限概念和 $\varepsilon - \delta$ 定義的形式概念之間的轉換。實驗活動教材所探索的極限問題可分成兩類：

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ；所對應之試題爲(i)、(ii)。

(2) $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ ；所對應之試題爲(iii)、(iv)。

依據 Jonassen 等人 (2003) 的觀點，進一步分析電腦實驗活動，探查此活動是否具有上述五種屬性，各屬性與實驗活動細節之對應關係，如表 3-2 所示。

屬性	內容	實驗活動
主動積極的	提供學生主動操弄物件及觀察現象的機會，並建構對此一現象的詮釋。	學生透過觀察數值及操弄圖形建構極限概念。
有建構性的	讓學生反思觀察到的現象，將新經驗融入知識架構，並提供清楚表達使用策略的機會。	學生反思圖形及數值結果，重新整合極限概念。
有意圖的	活動具明確的學習目標，使學生較願意思考且學習更多知識。	活動一開始已告知學生欲學習極限之非形式定義。
真實的	活動所習得的知識與經驗，能應用於新的或複雜的情境脈絡。	學生將(i)、(ii)及(iii)之探索經驗，應用到較複雜的極限問題(iv)。
合作的	活動提供學生與他人相互討論學習的機會。	學生兩個人一組以合作學習方式進行學習。

表3-2 各屬性與實驗活動細節之對應關係

活動試題引導步驟如下 (白啓光，2005)：

(a) 計算並觀察在一些越來越靠近 $x=a$ 之函數值。

(b) 由(a)猜測極限值或極限不存在，並了解極限的動態逼近程序。

(c) 引入誤差及距離的概念。即：給定誤差之後，適當的選取 x 範圍，使得範圍內 x 所對應之 $f(x)$ 與極限值 (猜測) 的距離，在給定的誤差範圍之內。

(d) 對於不同的誤差，利用繪圖視窗的調整及觀察，了解教科書及課堂上所述 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 之非形式定義。

(e) 了解 $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ 之非形式定義，解決問題(iii)。

(f) 藉由步驟(d)、(e)的反思，內化 $\lim_{x \to a} f(x)$ 的極限概念成爲一個物件，進一步探討較複雜的極限問題(iv)。

上述步驟(a)至(d)爲探索 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 之主要引導步驟；步驟(e)至(f)爲探索 $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ 之主要引導步驟。此引導方式採用 Bruner 所倡導的「引導式發現」學習法，學生在解決問題時，教師提供有關如何解題的指導語，使學生的問題解決保持在教師的注意範圍內。訊息處理論強調知識形成的過程中，學習者的先備知識和經驗是吸收新知的重要條件。由步驟(a)、(b)喚起學生「動態逼近」之概念心像，亦即從長期記憶中提取與極限概念相關之舊知識；當學生探索到步驟(c)、(d)問題時，非形式定義將於短期記憶中與舊知識產生連結，亦即 Ausubel 所言「學習者產生了有意義學習」。

2. 成效評量

成效評量的設計除了針對實驗活動所要傳達之極限概念做考察外，並對於使用 CAS 繪圖時可能產生之迷思概念 (P-1.a) 及如何解讀 CAS 產生之圖形等議題提問 (P-1.bc)，藉此探查學生是否了解 CAS 使用方法及其限制性。認知學習部分包含：如何由函數數值及圖形解釋極限 (P-3)、能否深入了解形式定義並將完整的概念應用到特定情境 (P-2)。

(二) 測驗工具

在學生的學習歷程中 (實驗活動→成效評量→ CAS 習題→成就測驗→期中考)，以下方所呈現的試題為主軸，透過學生解題時所呈現的外在表徵，探索極限概念之表徵結構。而其它出現在測驗中而未提及之試題，將用來提供資料判讀的準確性。

● 第一階段：實驗活動 (Laboratory, L) 及其成效評量 (Performance, P)

如附錄一、附錄二。

● 第二階段：CAS 習題 (Exercise, E)

(a) For the limit $\lim_{x\to 1}(x^3+x+1)=3$, use a graph to find a value of δ that corresponds to $\varepsilon=0.4$.

(b) By using a computer algebra system to solve the cubic equation $x^3+x+1=3+\varepsilon$, find the largest possible value of δ that works for any given $\varepsilon>0$.

(c) Put $\varepsilon=0.4$ in your answer to part (b) and compare with your answer to part (a) .

● 第三階段：成就測驗 (Achievement tests, A)

(a) For showing that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$, find the largest possible δ that works for any given $\varepsilon>0$.

(b) Given $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, find the largest possible δ for showing that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$.

● 第四階段：期中考 (Midterm, M)

In using the $\varepsilon-\delta$ definition to prove that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$, when ε is 1, what is the largest value that δ can be ? (A) $\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $\sqrt{3}$ (D) 1 (E) 3

第四節 資料蒐集與處理

一般而言，教育研究實徵資料的蒐集途徑有三：一是蒐集現成的文件及檔案資料；二是直接觀察；三是應用問卷、晤談及測驗，由研究對象自我陳述。由於每個途徑可以蒐集到不同性質的資料，因此本研究採取多元方式進行資料蒐集。研究者所蒐集的資料包括：實驗活動錄影、教室觀察、習題作業、成就測驗、診斷晤談及問卷的方式蒐集。

關於質的資料是利用錄影、錄音器材將電腦實驗活動、晤談過程加以記錄，並蒐集相關文件資料，而後進行分析討論。文件及影音資料的收集，在於保留紀錄學生學習時的各種行為模式；並可和其他資料互相驗證。而量的資料根據討論問題的需要選擇適當的統計方法，並依據統計結果加以詮釋說明。以下根據資料蒐集程序與處理的方式加以說明。

(一) 活動錄影：學生在活動進行時，電腦操作的畫面及相互討論的聲音。活動後將學生畫面操作及討論紀錄轉成腳本，以便進行分析討論。

(二) 教室觀察：旨在了解教室中的師生互動、同儕互動及學習情形之紀錄。

(三) 習題作業：學生上習題課時的數學論敘及指定的 CAS 作業。

(四) 紙筆測驗：成就測驗及期中考關於極限部份學生的回答情形。

(五) 診斷晤談：旨在了解學生實驗活動、習題作業及紙筆測驗時的真正想法，並挑選合適的特定對象進行半結構式*晤談。晤談後將對話紀錄轉成逐字稿，以便進行分析討論。

(六) 期末問卷：旨在描述群體的普遍特徵，而不分析群體中的個體特質。本研究問卷設計欲了解學生對活動學習態度、CAS 的看法及極限概念等。

研究者針對各表徵形式蒐集不同的試題，例如：以 L-1.ac 與 L-2.ab 探查學生極限存在時數值表徵情形，透過相關資料的交叉比對，以檢驗研究發現的一致性。研究者常諮詢指導教授的意見，並詢問學生的看法，同時也常與研究所的同學討論與交換意見，經多次討論且達成共識後才撰寫研究發現。

* 半結構式晤談是指研究者無須事先決定其訪談題目與固定選項，但需要有晤談大綱，晤談的指導語與進行順序也是不固定的。

第肆章 研究結果與討論

本研究透過實驗活動、成效評量、成就測驗、晤談及問卷等方式，了解學生極限表徵表現的情形。以下將研究結果分爲二小節來討論，第一節探討極限表徵運用的情形與迷思概念；第二節說明 CAS 之使用情形與態度。

本文中研究者以 S_i 表示編號 i 的學生，以 *D-N.M* 表示測驗 *D* 中試題 *N* 之子題 *M*，而測驗 *D* 是指：實驗活動 (Laboratory, L)、成效評量 (Performance, P)、CAS 習題 (Exercise, E)、成就測驗 (Achievement tests, A)、期中考 (Midterm, M) 及問卷 (Questionnaire, Q)，例如：L-1.a 表示電腦實驗活動第 1 題第 a 小題，各測驗試題之詳細內容需參閱附錄一至附錄五。此外，若於說明文字後加上 (S_i, *D-N.M*)，則表示編號 i 學生在 *D-N.M* 所回答之內容。

第一節 表徵運用與迷思概念

(一) CAS 對各表徵之影響

學習者在 CAS 實驗活動的環境中，需透過 CAS 來表達數學概念，因此學生於實驗活動及 CAS 習題所呈現的外在表徵，皆涉及相關程式之表現方式，以下說明程式對各表徵形式內容之影響：

1. 數值模式表現情形

Tall (1981, 1992) 指出：動態的概念 (dynamic conception) 對學生發展極限概念是容易且自然的。因此，實驗活動探索之極限問題，皆由計算靠近 limiting point 之函數值開始。活動中涉及以 CAS 呈現數值表徵部分有：L-1.ac、L-2.ab、L-3.ab,de 及 L-4.ab；以下先分別探討學生於各試題之表現情形，最後再推測表徵結構中數值表徵大致的輪廓。

學生在 L-1.a 觀察到靠近 $x=0$ 左右兩側之函數值具單調性 (越來越接近 1)，一致地猜測極限值爲 1，這與學生的起點行爲*是一致的。而 L-1.b之表現情形也

* 起點行爲 (entry behavior) 是指開始學習時學生既有的先備知識或技能，例如：學習乘法前必先會加法；而終點行爲 (terminal behavior) 是指預定學生經過練習後能學到的知識或技能 (張春興，1996)。

具一致性，學生皆以函數的奇偶性說明數值表上 $f(\frac{1}{2^n})=f(-\frac{1}{2^n})\quad \forall n=1,2,\ldots,10$，以第 21 組學生的回答爲例：$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin(x)}{-x}=\frac{\sin(x)}{x}=f(x)$。再此，值得注意的是：Maple 計算後之數值以有限位值 (預設 10 位) 方式呈現，因此無法判讀是否相等，只能說明 $\left|f(\frac{1}{2^n})-f(-\frac{1}{2^n})\right|<10^{-10}$，必須進一步用數學論證才能解釋。各類科技軟體的運算多以近似值方式呈現，郭禮賢 (1999) 指出：學生在這種學習情境下，會把電腦結果的近似值與其表達的真實數值 (exact value) 混爲一談。根據活動錄影 V_2-34:36~V_2-35:15 片段，發現學生確實存在此一現象。因此，如何解讀 CAS 計算後的數值，也是學習歷程中一項重要的課題。

L-2.a 只呈現靠近 $x=0$「右側」的函數值，此時的數值結果不具單調性，但學生們仍一致地猜測極限值爲 0。學生回答結果，依據考慮「兩側」(both-side) 與否給予分類，分類結果如下：

- 類型 *I* 觀察 L-2.a 執行後的數值結果 (僅考慮 $x>0$)，察覺 $|g(x)-0|$ 逐漸減小，認爲 $\lim_{x\to 0} g(x)$ 存在且猜測極限值爲 0。
- 類型 *II* 觀察 L-2.a 執行後的數值結果 (考慮 $x=0$ 左右兩側)，察覺 $|g(x)-0|$ 逐漸減小，認爲 $\lim_{x\to 0} g(x)$ 存在且猜測極限值爲 0。
- 類型 *III* 認爲 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$，但未說明原因。

他們以「$|g(x)-0|$ 漸漸變小」的觀點，臆測極限值爲 0，這與學生的起點行爲也是一致的；有些學生會再撰寫程式計算靠近 $x=0$「左側」的函數值，這些學生尚未意識到 L-1.b 所提供的經驗，但可確定他們知道要觀察靠近 $x=0$ 兩側函數值之行爲。從活動錄影 V_{21}-62:06~V_{21}-64:40 片段可知，學生知道要考慮「兩側」函數值之行爲，討論時提到函數「對稱」之說法，但未以代數方式檢驗 $g(x)=g(-x)$ 而是繪圖後才意識到「$g(x)$ 對稱 y 軸」。

由上述討論可知，學生於實驗活動之數值表徵具有「當 x 越來越靠近 a 時，$|f(x)-L|$ 越來越小，則推測 $\lim_{x\to a} f(x)=L$」，且以語意「$f(x)$ 越來越靠近 L」表徵 $|f(x)-L|$ 越來越小。

L-3.a 只呈現靠近 $x=0$「右側」的函數值，察覺數值具單調性且漸漸靠近 0；L-2.b 類型*II* 之學生，未以同樣的方式 (考慮兩側) 探索此題，但所有學生最後皆推測 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$。進一步查看這組考慮兩側的學生在 L-3.ab,de 之表現情形，可確定他們僅以單側考慮極限。此外，L-2.b 類型*I* 學生在此題的表現情形，亦發現學生不了解 $x\to 0$ 是要考慮左右兩側的。因此，學生在電腦實驗活動時，對於 $x\to 0$ 的意思是模糊地。而 L-3.d 則是呈現靠近 $x=0$「左側」的函數值，這時學生的看法將出現分歧，整理分析後可區分為下列三類：

類型 *I* 當 x 從 0 的右方趨近於 0 時，$h(x)$ 趨近於 0，但 x 從 0 的左方趨近於 0 時，$h(x)$ 無法確定趨近於 0，故認為 $\lim_{x\to 0} h(x)\neq 0$。

類型 *II* x 從 0 的左方趨近於 0 與從 0 的右方趨近於 0 時，$h(x)$ 趨近於不相同的數，故認為極限不存在。

類型 *III* 觀察 L-3.d 執行後的數值結果，察覺到「當 x 漸漸靠近 0 時，$h(x)$ 漸漸靠近 1」，認為 $\lim_{x\to 0} h(x)$ 存在且極限值為 1。

類型*I* 及類型*II* 學生比對 L-3.a 之數值表，發現逼近不同的值，認為極限值不存在。因此，學生的數值模式具有「已知由 $x=a$ 右側越來越靠近 a，$|f(x)-L_1|$ 越來越小，且由 $x=a$ 左側越來越靠近 a，$|f(x)-L_2|$ 越來越小，若 $L_1\neq L_2$，則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在」。也就是說，學生心中具有「$\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$」概念的影子，即：當兩側逼近不同值時，學生以此觀點說明極限不存在。此一現象能以認知心理學之「心向作用」解釋，即：個人長久經驗累積下來的結果，所偏好的心思運作方向，這與物理學所言「慣性」(inertia) 相類似。因此，學生會以「左、右極限」觀點判別極限存在性，這與學生的起點行為也是一致的。

在 L-4.a 中 $x=0$ 兩側所呈現的函數值皆為 0，無「越來越靠近 0」之現象，學生對此現象稟持著不同的想法。有些學生認為 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在，因為函數值沒有「越來越靠近 0」；有些認為 $\lim_{x\to 0} k(x)=0$；而有些則需藉助圖形才能判別。將 L-4.b 整理分析後，分類結果如下：

類型 *I* 觀察執行後的數值結果，察覺 $n=1,2,3,...,10$ 時，$k(\frac{1}{2^n})=0$ 且 $k(-\frac{1}{2^n})=0$。

I_a：無法判別極限是否存在，需配合觀察圖形。

I_b：認為 $\lim_{x\to 0} k(x)=0$。

I_c：圖形與 $\sin x$ 相類似，介於 -1 與 1 之間不斷上下起伏，並非所有函數值皆爲 0，認爲 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在。

I_d：$k(x)$ 無漸漸靠近 0，認爲 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在。

類型 II 未作答。

類型I_a 學生觀察了函數圖形後，以動態逼近方式尋找極限值，發現圖形越靠近 $x=0$ 處越複雜，無法判斷極限值是否爲 0，進而認爲極限不存在；類型I_d 學生認爲函數數值必須「逐漸靠近 0」，極限值才存在。從文獻探討可知，學生具有類型I_d 迷思概念時，會認爲極限值只能「靠近且無法達到」(approaches but cannot reach) 或「不能通過」(cannot pass)。Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 指出：提供產生認知衝突 (cognitive conflict) 的示例，能改變學生既有的概念 (引自余民寧，1997)。晤談中以「常數函數」(constant function) 爲示例，使學生在認知上產生衝突，藉此改變極限是無法到達之迷思，以 S_3、S_4 的回答爲例：

T： 什麼叫做越來越靠近，有多靠近？可不可以等於？

S_3： <u>不可以等於啊...應該不會等於</u>。

T： 你覺得呢？

S_4： <u>它會非常靠近，但是不會等於</u>。

T： 喔，真的。<u>那如果 g 是常數函數 L 呢</u>？

S_3： <u>那就等於啊</u>。

T： 這跟它等不等於沒什麼關係嘛。你剛剛說非常靠近，等於當然很靠近啊，它完全貼在一起，為什麼不靠近，是不是？你說你們兩個很像，你自己當然跟自己很像囉，你這樣懂我意思？

S_3： 嗯。

依據 L-3.ab,de、L-4.ab 分析結果，將 $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ 之表現情形說明如下：若僅呈現單邊 (one-side) 函數值行爲，學生會配合另一側的數值，判別極限值是否存在，當兩側逼近不同值時，幾乎都回答極限不存在，這與學生所喚起 (evoke) 的概念心像有關。若學生此時喚起了「$\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$」之概念心像，將回答極限不存在；學生若是喚起極限「非形式定義」之概念心像，應將回答極限值既不是 1 也不是 0。

數值表提供學生從數值行爲猜測可能的極限值，這牽涉到下述數學定理：

Assume a be a limit point of $D \subseteq R$ and $L \in R$. Then $\lim_{x \to a} f(x) = L$ if, and only if, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ for every sequence $\{x_n\}$ of points in $D \setminus \{a\}$ which converges to a.

由上述定理可知，極限存在須判別所有收斂於 a 之數列 x_n。因此，如何讓學生體驗 (experience) 到「對所有」(for all) 收斂於 a 之數列爲重要課題。由於 CAS 能提供快速且大量的數值計算，在此學習環境下較能體驗到「對所有」之情境。以下探討學生如何挑選欲計算函數值之取樣點 x，從晤談中可知，學生以「等比數列」方式選取 x，但必須基於方便計算函數值之條件下。以 S_9 回答爲例：

T： ...數值會提供你什麼？

S_9： 參考判斷啊！

T： 嗯嗯，什麼時候你會需要數值去做參考判斷？

S_9： 就是如果你沒有這種程式可以幫你畫圖的話，可以就是用代數值去計算，比較容易觀察吧。

T： 如果你要帶數值的話，你會怎麼樣去選你的點，代值進去看，你會帶什麼樣子的點？

S_9： 因為我蠻懶的，大概就 0.1，0.01，...然後這樣下去。

T： 所以你的策略是...算 $\frac{1}{10^n}$，能算幾個就算幾個，然後去做觀察，那你呢？

S_{10}： 差不多吧！

若不借助 CAS 數值計算之功能，學生會挑選函數值較好計算之 x 點，但很有可能無法選取夠多 limiting point (a) 附近之 x 點，以 S_8 回答爲例，這可能無法讓學生體驗到「對所有」之情境，故引進 CAS 讓學生大量嘗試多樣化的逼近方式，可逐漸產生出「對所有」之效果。

T： 如果你沒有 Maple 你要去看 x 趨近於 0 的值的時候，你會去試一些點嘛，你會試什麼？就告訴我你會試什麼？

S_8： $\frac{1}{2}$。

T： $\frac{1}{2}$，你只試一個點嗎？

S_8： 不會啊...再多試幾個。

T： 好，那你還會試什麼？

S_8： $\frac{2}{3}$，嗯...然後...。

T： 可是$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$，你越取越遠了。

S_8： 我是想要越取越小，可是我就在想...就是要取那比較好算一點的那個。

在 L-4.c 中僅有一組學生撰寫程式嘗試其它逼近方式，他們觀察 $x=\frac{\pi}{3^n}$ 及 $x=-\frac{\pi}{3^n}$ 之函數值，察覺$k(x)$似乎沒有越來越靠近某定值，無法判斷出極限值，因此改從圖形取向探究極限問題。從文獻探討可知，能夠利用多種表徵來表達同一個概念並在表徵之間順利的做轉換，甚至懂得如何選擇適合的表徵來協助解題，都表示擁有更穩固的概念理解 (Davis, 1984; Even, 1998; Putman, Lampert & Peterson, 1990; Lesh, Post & Behr, 1987)。

綜合以上所述，學生於實驗活動中所具有的數值表徵如下：

(1) 對於 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的情形，學生觀察函數值之行爲，以「$|f(x)-L|$ 越來越小」的觀點，猜測 L 爲可能的極限值。

(2) 學生觀察到左、右二側逼近不同之數值，回答極限不存在，因爲他們喚起「$\lim_{x\to a} f(x)$不存在$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$」之概念心象。因此，喪失了關於 $\lim_{x\to a} f(x)\neq L$ 情形之學習。

2. 圖形模式表現情形

在 CAS 環境中，學生可從圖形取向的策略上，而非只是代數計算的方法去學習微積分。例如：本研究使用「$\varepsilon-\delta$視窗」呈現極限程序。活動中涉及以 CAS 呈現圖形表徵部分有：L-1.def、L-2.cde、L-3.cf、L-4.c，而 CAS 習題 (E-35.a) 也涉及此一表徵形式，以下將分別探討學生各題之表現情形。此外，學生在實驗活動所使用及呈現的視窗圖形，整理分析後以圖 4-2、圖 4-3、圖 4-4、圖 4-5、圖 4-7、圖 4-8 作代表，並討論其表現情形。活動進行過程教師已對 L-1.def 作進一步指導，因此不探查此題所涉及的圖形表徵，將於後續的成效評量 (P-1.abc) 再探討與 L-1.def 相關之議題。

給定誤差爲ε時 (ε爲 0.5、0.1 及 0.01)，學生必須更改繪圖指令 plot 的控制項「view」，即：將 view 的範圍設定在 $L-\varepsilon$ 與 $L+\varepsilon$ 之間。從活動錄影 V_{21}-54:14~V_{21}-55:27 片段，可看出學生不了解「view」之涵義，雖然最後呈現之圖形能說明「函數值與猜測極限值的差，在給定誤差之內」，但尚未與非形式定義「誤差」涵義作連結。相較之下，以$\varepsilon-\delta$視窗說明的學生，與非形式定義具有較強的連結。晤談中可見學生對「view」之涵義不是很了解，以 S_1、S_4 的回答爲例。

T： ...你改了 view 所以知道這個東西是在做什麼，...view 是改變哪裡的，是 x 軸還是 y 軸？

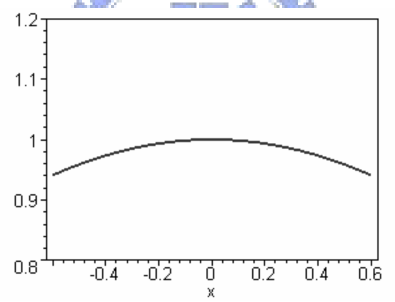
S_1： <u>x 軸吧</u>。

T： view 是改變 x 軸？...你還記不記得這在講什麼。

S_1： 啊！我知道了，view 是改變這個點 (指 y 軸刻度 1 位置)，是說這個點上下的範圍吧。

T： 要求它誤差在 0.1 ($|f(x)-1|<0.1$)，當初你們為什麼要把它改成 0.8 和 1.2？

S_4： 因為<u>它剛好都在 0.9 跟 1.1 之間啊</u>。(如下圖)



T： 對。

S_4： <u>然後我就…就剛好 x 是在-0.6 跟 0.6，剛好可以在 0.1 之內</u>。

T： 當然這個圖也沒錯，所以你告訴我 0.6。請你告訴我你這邊 view 選成 0.8 到 1.2 的話，其實在這個範圍裡頭，y 跟 1 的誤差是多少？

S_4： 0.2。

T： 是啊，我原來是要看 0.1 啊。

S_4： 喔，因為<u>我想說它圖在 1.1 跟 0.9 之間啊</u>。

從上述晤談紀錄可知，仍有學生尚未將 plot 指令之控制項「view」，與極限概念之 ε 作連結，雖然能滿足題目需求，但未完成所需學習的課題。研究者繼續比對問卷試題 Q-2 可知，只有 5 名學生提到「view」在極限定義中扮演著誤差的角色。由此可知，學生傾向使用如圖 4-1 所示之「繪圖視窗」來描述「$\varepsilon-\delta$ 視窗」。

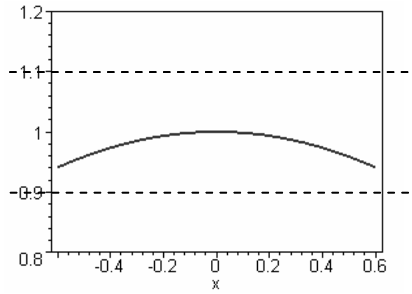
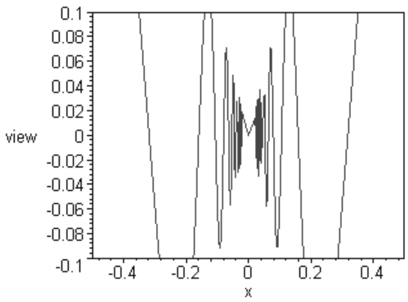


圖 4-1 以繪圖視窗描述 $\varepsilon-\delta$ 視窗

探討完「view」之表現情形後，以下針對學生如何選取 δ 之過程作進一步探討，依據問卷試題 Q-3 可知：有 82.9% 勾選「會先限定 plot 指令中 view 的範圍，從圖形中觀察，並適時地調整 plot 中 x 的範圍」；有 11.4% 勾選「觀察圖形，亂槍打鳥式地去試」。從活動錄影 V_{11}-111:08~V_{11}-111:45 片段，可看出學生會有技巧地利用已繪圖形選取 δ。研究者仔細觀察 plot 指令控制項輸入之先後次序，即：x-range 與 view 先後次序；先輸入 x-range 再輸入 view 之學生，所使用的繪圖視窗與 $\varepsilon-\delta$ 視窗略有差異，多半是設定不適當 view 之範圍，可從 V_{21}-54:14~V_{21}-55:24、V_9-31:49~V_9-34:41 察覺此一現象。由此可見，先輸入 x-range 再輸入 view 之學生不了解極限程序之先後次序。

學生在 L-2.cde 所呈現之圖形，以圖 4-2 與圖 4-3 為代表探查「圖形模式」之表現情形。根據活動錄影 V_2-94:30~V_2-96:20 片段，學生對視窗內函數的解讀情形如下：當 CAS 呈現如圖 4-2 相類似圖形時，學生能觀察到「存在 $x\in[-0.5,0.5]$，使得 $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|\geq 0.1$」之現象，並以口語方式說明；而當 CAS 呈現如圖 4-3 相類似圖形時，學生能觀察到「$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<0.1$，對所有 $x\in[-0.1,0.1]$」。此時，學生皆以語意表徵上述之現象，尚未使用數學語言 (不等式) 表達此一現象。



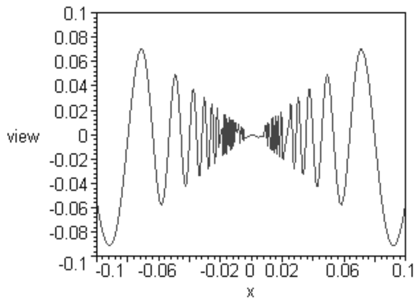
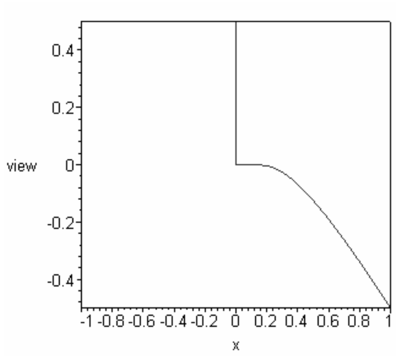


圖 4-2 $x\sin\frac{1}{x}$ 在 $[-0.5, 0.5]\times[-0.1, 0.1]$ 圖形　圖 4-3 $x\sin\frac{1}{x}$ 在 $[-0.1, 0.1]\times[-0.1, 0.1]$ 圖形

學生在 L-3.cf 所呈現之圖形，以圖 4-4 與圖 4-5 爲代表探查其「圖形模式」之表現情形。此時，學生是否發現 Maple 呈現之圖形與數學事實不符之現象？



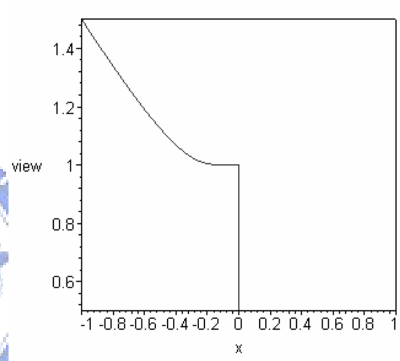


圖 4-4 $\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 在 $[-1,1]\times[-0.5, 0.5]$ 圖形　圖 4-5 $\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 在 $[-1,1]\times[0.5, 1.5]$ 圖形

根據活動錄影 V_{21}-73:40~V_{21}-77:48 片段，該組學生未察覺圖形與數學事實不符之現象，導致一些荒謬之說法 (函數在 $x=0$ 有很多個値)，進而影響極限之判讀。從活動錄影 V_2-99:56~V_2-101:12 片段，亦可發現圖 4-4、圖 4-5 喚起學生心智中左、右極限的概念心象，進而以動態逼近方式回答極限不存在。

從對 Maple 看法之問卷結果可知，有 34.3% (勾選非常同意或同意) 會對執行結果產生質疑，這 34.3% 中有 91.7% 會適時地檢查是否指令有誤，這 91.7% 中所有學生發覺指令無誤時，會進一步思考原因及所傳達的訊息，相關試題勾選情形如表 4-1 所示。上述統計結果顯示，約有 30 % 學生以正確的態度使用 Maple。

	非常同意	同意	沒意見	不同意	非常不同意
● 我會對 Maple 執行的結果產生質疑。	2	10	17	3	3
● 當我會對 Maple 執行的結果產生質疑的時候，我會檢查指令是否有錯。	11	21	3	0	0
● 當我會對 Maple 執行的結果產生質疑，而且指令也檢查無誤時，我會思考其原因及所傳達的訊息。	6	23	3	2	1

表 4-1 對 Maple 看法問卷

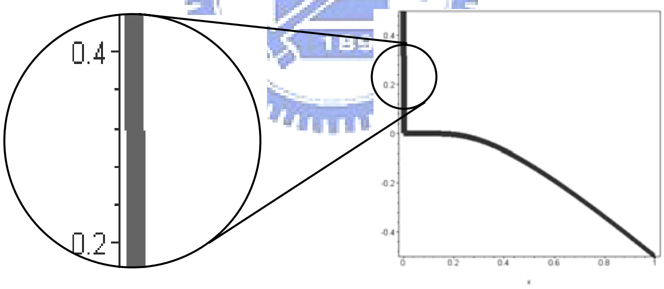
研究者進一步探究思考詭異處 ($x=0$處) 學生之反應，以下節錄晤談部分資料，藉以說明不了解 (misunderstand) 詭異處傳達訊息之現象。晤談對話紀錄如下：

T： ...那條直直的線應該還是不應該在那裡？

S_1： 對的啊。

T： 真的唷！垂直線會是函數圖形？

S_1： 可是我們取 0 取很多的時候，它 (指直直的線) 就會有偏了啊，就是真的會有偏了啊 (下圖圈選處)。



T： 不，你應該仔細想一下，我還特別跟你們講 Maple 是怎麼畫圖的。

該組學生將繪圖指令 plot 控制項「thinkness」設定為 10，發覺函數曲線變粗，且該直線有稍微偏斜的現象，因此認為該直線是存在的，S_1、S_2 未回到式子上思考圖形的正誤。Goldenberg (1988) 指出：螢幕上所呈現的圖形，可能造成意義上的誤解 (misinterpretations)。CAS 在技術限制下呈現的結果有時困擾著學生，但實際上引起學生與教師之間的進一步討論 (Pierce & Stacey, 2001)。研究者認為：CAS 實驗活動的學習環境下，不可迴避圖形產生之詭異處，應適時地讓學生思考這些類似的現象，進而牽引學生以多面向思索、觀察及比對並強化函數表徵之間的連結。

研究者從活動錄影中，發現學生複製「計算數值」程式碼，修改函數後未更改 evalf(f(x)) 中的 f(x)，因而呈現出非欲探索之函數數值。當 CAS 呈現函數圖形後，學生似乎沒有察覺到數值與圖形「不符合」之現象。有此可見，該組學生未交錯比對 CAS 所呈現之結果。然而，以「多面向」思考問題的學生，會將滑鼠游標移至捲動軸，以上下拉動的動作進行資料的交錯比對。

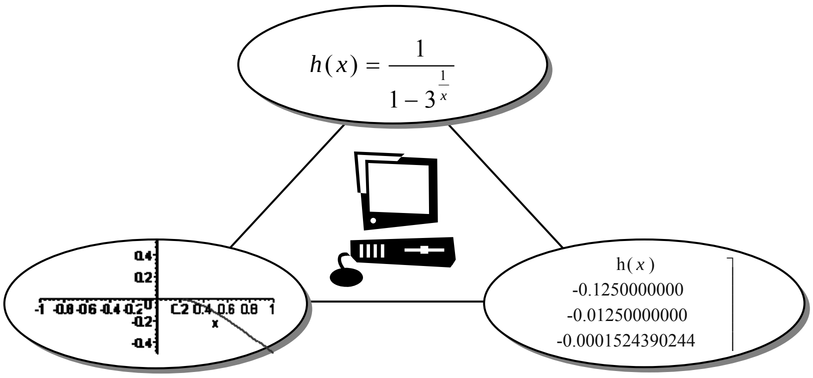


圖 4-6 多面向思索網絡

從晤談中可見，S_9 這組學生會配合式子作觀察，意識到該直線不應該存在，進而增加 plot 指令之控制元「discont = true」，相較之下 S_1 這組學生缺乏多面向思索與函數表徵之間的連結，介於這兩組之間的學生表現情形，以 S_8 爲例，學生幾乎都以既有的左、右極限概念回答問題。

T： 所以告訴我 x 是負的時候，這 $\left(\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\right)$ 函數值是不是通通大於 1。

S_8： 嗯...對。

T： 你們看了圖以後沒有要去看一下式子喔。

S_8： 嗯，我們好像沒有...就是在做的時候不會想到...，就都沒有想到這邊，就是很單純看到圖感覺好像不符合我的...。

T： 直觀的定義？...

S_8： 然後就...那就不是這樣子...就寫個幾句話代表不是這樣子，不會說再回去...在去想他原本的式子。

學生在 L-4.c 所呈現之圖形，以圖 4-7 與圖 4-8 爲代表探查其「圖形模式」表現情形。學生如何解讀如此撲朔迷離之圖形？研究者從學生繳交之活動作業作探查，並與成效評量 P-3.c 校正，發現學生對圖 4-7 之反應爲：複雜、不斷在 -1 與 1 之間起伏，因此產生縮小 *x*-range，欲看清楚 $x=0$ 附近圖形之行爲，僅有一組學生給定其它誤差 ε，表示該組學生已將 L-1、L-2 之行動內化成過程。

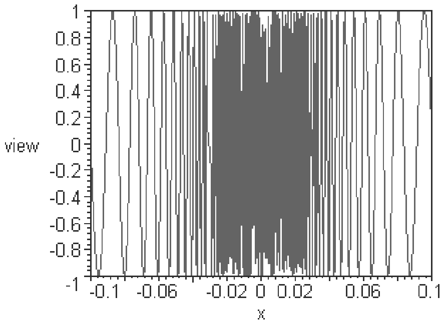


圖 4-7 $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $[-0.1,0.1]\times[-1,1]$ 圖形

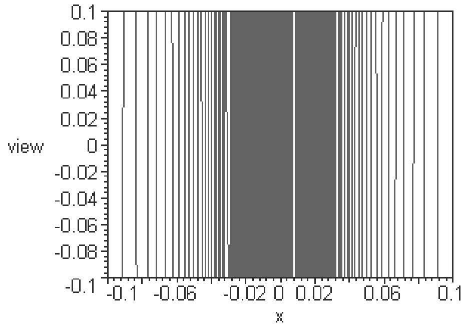


圖 4-8 $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $[-0.1,0.1]\times[-0.1,0.1]$ 圖形

在 E-35.a 中，學生解題模式可分成圖形與代數取向：圖形取向學生以 ε−δ 視窗選取 δ；代數取向學生透過解方程式（$x^3+x+1=3.4$ 及 $x^3+x+1=2.6$）選取 δ，再從圖形上驗證 δ 之可行性。E-35.a 整理分析後，分類結果如下：

類型 *I* 使用 plot 指令繪圖，嘗試操弄圖形來選取 δ。

I_a：view 範圍設定在 2.6 和 3.4 之間，並選取正確的 δ。

I_b：view 範圍設定在 2.6 和 3.4 之間，所選取的 δ 無法滿足極限定義。

I_c：view 範圍設定在 2.6 和 3.4 之間，尚未選取 δ。

I_d：view 範圍設定不在 2.6 和 3.4 之間，所選取的 δ 無法滿足極限定義。

類型 *II* 使用 solve 指令解 $x^3+x+1=3.4$ 與 $x^3+x+1=2.6$ 之 x 值，並計算 $|x-1|$ 選取較小者視爲 δ。

由於此題要求學生由圖形取向思索問題，因此類型 *II* 的學生極限概念的多重表徵上缺乏圖形表徵。以下進一步探查 view 範圍設定正確，即：「view=2.6..3.4」，且選取不適當 δ 之成因。透過 ε−δ 視窗選取 δ，且呈現出不可行之 δ，如圖 4-9 所示，研究者推測其原因爲：未了解欲求之 δ 須滿足之必要條件。

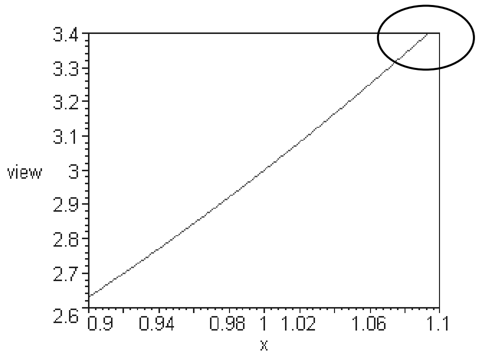


圖 4-9 選取不可行之 $\varepsilon-\delta$ 視窗

活動單 (worksheet) 明確地說明所找之距離需滿足的條件，以 L-1.d 爲例：

> ... , can you determine how close to 0 (from either side of 0) x has to be to ensure that $f(x)$ $(x \neq 0)$ is close to the limit you get in (c) within 0.5. ...

而 E-35.a 問題表徵方式爲「找出 $\varepsilon = 0.4$ 所對應之 δ 」。由此可見，此類學生有著含糊的形式定義，或者尚未將電腦實驗活動之過程壓縮成物件。從晤談中可知，學生時常未以 δ 所需滿足之必要條件檢驗其正確性，以 S_7 的回答爲例：

T： ...，什麼叫做 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ？

S_7： 基本上就是...給一個誤差範圍啊，給一個誤差範圍...然後一定可以找到...，找到它的 δ 。

T： 嗯。

S_7： 嗯，<u>對啊...這就是定義啊</u>。

T： 找到 δ 以後呢？

S_7： 就它滿足在這裡面的 $(0<|x-a|<\delta)$ 都會小於...，就是都會在這裡面。

T： 在哪裡面？

S_7： 在這裡面的值會小於...都會在...，跟它的差都會小於 ε $(|f(x)-L|<\varepsilon)$。

綜合以上所述，學生於實驗活動中所具有的圖形表徵如下：

(1) 若 $x = a$ 附近能找到一個明確的位置，則認爲極限存在且極限値爲該明確位置點之 y 座標。

(2) 若無法掌握 $x = a$ 附近圖形或察覺圖形錯開 (jump)，則認爲極限不存在。

(3) 當給定 ε 後，能藉由操弄圖形選取 δ ，判別「 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 」是否成立。

3. 動態模式表現情形

在感官接收訊息方面，視覺資訊能使抽象的觀念變為具體，支援整體的認識與意義，也能提高學習者的學習動機。活動一開始教師示範極限 $\varepsilon-\delta$ 程序 (process) 之動畫，以說明極限存在時，給定 ε 後可找到與其對應之 δ。活動中未要求學生撰寫此一程式，而是透過多次的圖形操弄，呈現數個 $\varepsilon-\delta$ 視窗，使學生在心智中產生「動態的」極限 $\varepsilon-\delta$ 程序。當學習者做某行動若干次且深思熟慮，意識到行動的用意後，可在心智中執行此一行動而不需外界的刺激 (Dubinsky, 1991)。當學習到「形式定義」時，若學生已經將行動內化之過程壓縮成物件，必能將 view、*x*-range 分別與形式定義之 ε、δ 作連結。也就是說，此類學生具有較佳的圖形、動態模式及語意表徵。以 S_9 的回答為例：

T： 所以說說這裡畫了三個圖 (L-1.def 執行結果) 在幹嘛？

S_9： 就是拉近看。

T： 拉近看，你怎麼拉近看，你「拉近」的程序是怎麼樣做的？譬如說這個問題 (L-1.e) 要求跟它的極限的誤差是小於 0.1。

S_9： 我是會先調整這個 view，然後再去看他的線最後會落在這附近...，這裡 *x* 軸上那附近，然後調整這邊 *x* (指令中 *x*-range) 的值去看。

T： 你有沒有想過這個動作，實際上它的數學意義在做什麼？

S_9： 就是減少 ε...就是誤差越來越小，然後看能不能繼續找到可以對應的 δ 距離。

以下探討學生上述行動與極限存在性之關係。當誤差給定 ε 後 (ε 為 0.5、0.1 及 0.01)，題目要求尋找一個距離 d，使得 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 當 $0<|x-0|<d$。針對題目所給定的誤差 ε，重覆操作同樣的動作：尋找一個適當的距離 d，滿足題目的需求。學生多半能透過操弄圖形找出適當的距離 d，察覺只要誤差給定後皆能找到一個適當的距離 d 滿足題目的需求。以 S_1 的回答為例：

T： 你從圖形上調，發覺你能做到這件事，然後再來呢？ 0.1 也可以，然後 0.01 也可以，所以你在做什麼事啊？你這三件事情是不是一模一樣的。

S_1： 對啊。

T： 差別在哪裡？

S_1： 那個 *y*...範圍一直減小，就 *y* 不管多小就是可以找到一個 *x* 的範圍。

學生從執行後之圖形結果，思考這些重複操作的動作，認爲這些不斷重複操作的動作，可能與極限的存在性有關。以 S_5 的回答爲例：

T： ...，這些動作告訴你們什麼？...，其實是要告訴你這三個ε會對，還是其它的數也要對，還是你不確定？

S_5： 後面還是會對。

T： 後面是什麼意思？

S_5： 就是這個取了 (取ε)...，再取別的值還是會對。

T： 嗯，當然你對於不確定的時候，你是不是可以再試其它的值看它對不對？

S_5： 可是這樣試不完。

T： 對，這樣試不完。所以你試了 0.5、0.1、0.01，假設說你試了三個值你還不滿意，你可以試 30 個、300 個，你發覺都對的時候，其實你會比較有信心，可是你還不確定，對不對？

S_5： 嗯。

學生大多不了解「任意靠近」(arbitrarily close) 之「任意」涵義，從晤談中可知，學生將「任意」解讀成「無限可數」(countably infinite)。以 S_1、S_2 的回答爲例：

T： 你就是不斷的做這件事，當然這三件事情 (指 L-1.def) 有沒有給你證明？

S_1： 哦...算是有吧。

T： 你覺得有沒有給你證明？

S_2： 有啊，用歸納法。

T： 歸納法只能用在正整數唷，其他東西不能用歸納法唷。

S_2： 喔。

由於 L-1、L-2 及 L-3 試題已引導學生考慮多個ε，故無法探查出學生是否具有「動態模式」之傾向。因此，研究者分析 L-4.c 之表現情形，探查學生是否考慮多個ε，回答結果也依據此一關鍵點 (keypoint) 給予分類，分類結果如下：

類型 *I*　從 $\varepsilon-\delta$ 視窗中無法找到 $x=0$ 左右兩側之 x 範圍，滿足要求條件，認爲 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在。

類型 *II*　縮小 x 範圍察覺 $k(x)$ 仍在 -1 與 1 之間不斷變動。

　II_a：認爲 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在。

　II_b：認爲 $\lim_{x\to 0} k(x)=0$。

類型 *III*　未作答。

由上述分類結果可知，類型 I 學生找不到 x-range 滿足條件，認為極限不存在而不是 $\lim_{x\to 0} k(x) \neq 0$；類型 II 學生只考慮 $\varepsilon = 1$，以動態逼近方式尋找極限值，欲從圖形上看到一個確定的點，他們選取 δ 企圖看清楚 $x = 0$ 附近之函數圖形，因此不斷尋找更小的 δ，發覺越靠近 $x = 0$ 圖形越撲朔迷離，由於無法找到一個確定的點，認為 $\lim_{x\to 0} k(x)$ 不存在；有些則認為此函數為 $\sin x$ 擠壓而成，只是函數在 $x = 0$ 處沒有定義，因此認為極限值為 0。

綜合以上所述，學生於實驗活動中所具有的「動態模式」如下：在試題引導下，學生被迫給定多個 ε 選取 δ，但不具引導時，只有二組學生會考慮多個 ε，而且給定 ε 後若無法找到 δ，將認為極限不存在。

4. 代數模式表現情形

當 ε 由數值變數轉為符號變數時，學生如何取得適當的 δ？在 E-35.b 中，學生使用 solve 指令解方程式：$x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$ 之實數解 x，有 36% 學生將此 x 值視為最大可行之 δ；而 16% 學生只列出 δ 與 ε 關係式：$\delta^3 + 3\delta^2 + 4\delta = \varepsilon$，比對 A-7.a 可確定學生具有解一般方程式之能力，因此這些學生缺乏「代數模式」。

E-35.c 需將符號變數 ε 以 0.4 代入，晤談中可見一趣事，學生 S_8 用「電算機」將 $\varepsilon = 0.4$ 代入計算數值，從對話中可知學生以慣用工具解決問題。這與多數學生較常使用左右極限、動態逼近方式說明極限相似。由此可見，學生對 Maple 指令之熟析度會影響以 CAS 表達數學概念之能力。

S_8： 我只有用 Maple 做到這裡 (E-35.b)，這邊 (E-35.c) 我是把數字代進去自己算出來的。

T： O.K. 這個你們也可以代進去 (將下方式子以 $\varepsilon = 0.4$ 代入計算)。

$$\frac{(216 + 108\,\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\,\varepsilon + 81\,\varepsilon^2})^{(1/3)}}{6} - \frac{2}{(216 + 108\,\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\,\varepsilon + 81\,\varepsilon^2})^{(1/3)}}$$

S_8： 就用電算機按啊。

T： 唉呦…有 Maple 你還要用計算機。

S_8： <u>有些指令還是搞不懂，那乾脆還是習慣用電算機</u>。

困難的軟體操作介面會降低學習意願，亦影響課程知識本身的學習。依據問卷統計結果，有 51.4 % 認爲 Maple 操作介面是容易使用的；68.9% 認爲 Maple 對學習是有幫助的；61.8 % 認爲都能理解活動單 (worksheet) 裡所給的指令，且學會如何使用它。由上述統計結果可知，學生願意使用 Maple 來學習，且軟體操作上不至於構成學習上的障礙。

綜合以上所述，學生於實驗活動中具有的代數表徵如下：學生能推演出δ與ε關係式，並利用 CAS 解此代數方程式，但未深入了解欲達此目的應如何選取。因此，未深入了解的學生在成就測驗 A-7.a 選取了錯誤的δ。

(二) 語意表徵

語意理解是概念學習的第一道關卡，其中的重要性不言而喻。研究者從蒐集的資料中，尋找學生「語意表徵」之表現情形，可得出下列結果：學生以「動態逼近」方式說明 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 時，涉及到的語意字詞如下：

趨近、越來越靠近、要有多近就有多近、慢慢靠近等

以 S_1、S_6 及 S_{10} 的回答爲例。

T： ...$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ，它是什麼意思？

S_1： ...就是 <u>x 慢慢趨近</u>，就是一直逼...，啊都還沒到那個點 (limiting point)，但是 <u>y 都會趨近於...慢慢趨近於 L</u>。

T： ...，函數 f 當 x 趨近於 a 的時候，它的極限是 L，它是什麼意思？

S_6： <u>就 x 趨近於 a 嘛，就 x 要有多靠近 a 啊</u>，就就…就反正<u>要有多靠近就有多靠近 a</u>，然後它 $f(x)$ 的值就<u>要有多靠近就有多靠近</u>啊。

T： 你們覺得什麼叫做 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ，這是什麼意思？

S_{10}： 就是 $f(x)$ 它要<u>越來越靠近 L</u>，<u>要有多靠近就可以有多靠近</u>。

此外，$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ 與 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 有著相似的語意表徵方式，以 S_3 的回答爲例。

T： $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ 的極限我們已經學過了嘛，...，這是什麼意思？

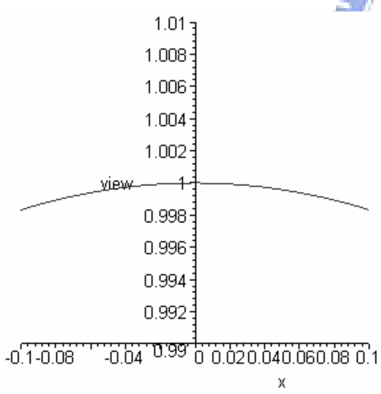
S_3： <u>就是x越來越大的時候，然後它的值會越來越靠近 L</u>。

若學生以口語或書寫文字方式表述「形式定義」時，涉及到的語意字詞有「誤差」、「距離」、「範圍」等。以 S_9 的回答爲例：

S_9： 哦…定義就是如果有人給一個誤差ε嘛，那我要找到一個…這個 x 與 a 的距離大概要有多近就有多近，然後…怎麼講，然後你可以再讓 x 跟 a 的距離大概小於…一個，找出一個值小於δ的時候，就可以讓我們的極限在誤差ε的範圍之內。

(三) 圖形表徵

學習過程中只涉及「圖形表徵」部分包括：成效評量 (P-1.abc; P-2.b) 及 CAS 習題 (E-35.a)。P-1.bc 以不同繪圖視窗呈現函數圖形，如圖 4-10、圖 4-11 所示，藉此探查學生是否掌握「不同視窗選取下，將產生不同的圖形」，例如：繪圖視窗選取在 $[-0.1, 0.1]\times[0,1]$，所呈現的函數圖形似乎是條「直線」；並進一步了解學生如何從圖 4-11 說明此函數之極限值。



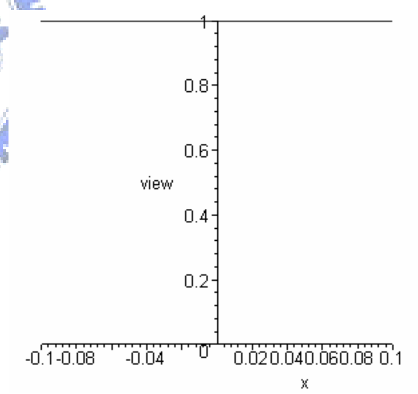


圖 4-10 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[-0.1, 0.1]\times[0.99, 1.01]$ 圖形

圖 4-11 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[-0.1, 0.1]\times[0,1]$ 圖形

從 P-1.b 之表現情形可知，學生看到圖 4-10 喚起以下兩種概念心像：$\varepsilon-\delta$ 視窗、動態逼近程序，分別以 S_{13}、S_{19} 的回答爲例，如圖 4-12、圖 4-13 所示。此外，研究者發現到學生回答的方式，大多以語意表徵爲主較少使用符號表徵。

當x的範圍在-0.1~0.1之間時，
y的範圍距離極限值1小於0.002

圖 4-12 圖形表徵喚起 $\varepsilon-\delta$ 視窗 (S_{13}, P-1.b)

當x越小時，f(x)越接近1.

圖 4-13 圖形表徵喚起動態逼近程序 (S_{19}, P-1.b)

Drouhard (1997) 將 CAS 視爲古希臘「神諭」(oracle) 相似的角色，因爲實際上 CAS 並沒有回答問題，它做出的動作及執行的結果可能與預期不同，這需要充分地解釋 (Pierce & Stacey, 2001)。Goldenberg (1988) 指出：改變繪圖視窗尺度 (scale)，可能產生圖形上的視錯覺 (illusion)。研究者藉由試題 P-1.c，探討學生對尺度了解的程度。依據學生的回答約有 36.8% 學生由圖 4-10 察覺到「當 x 介於 -0.1 到 0.1 時，函數值與 1 之距離小於 0.002 」，且由圖 4-11 察覺到「view 範圍設定過大，無法顯示圖 4-10 之弧形特徵」，以 S_7 的回答爲例。因此，如何解讀圖形所傳達的意義、如何選取適當繪圖範圍、尺度選取後產生之種種現象，皆爲學生於 CAS 學習環境中不可缺少的知識。雖然學生解釋圖形爲何看似一條「直線」略有差異，但皆以動態逼近方式說明極限值爲 1。

由(4),(5)小題的圖可知：此圖可能是一張錯誤的圖，
又可能是因為Maple作圖時，沒有辦法畫得很細，
使得此小題所取的y的範圍太大時，maple無法正確畫出
原有的曲線。

圖 4-14 選取尺度問題 (S_7, P-1.c)

極限概念之直覺思維，使學生較能掌握知識脈絡，但這些直觀的想法無法處理所有的極限問題。例如：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 、$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ 等。有些直覺思維可能與數學知識相互矛盾，例如：直覺思維線段長與實數點的關係，會認爲 $[0,2]$ 比 $[0,1]$ 具較多實數點。在 P-1.a 有學生認爲 $(0,1)$「應該」在 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的圖形上，從晤談中可知該名學生以直覺思維回答問題，晤談內容如下：

T： …，這個圖形有沒有通過$(0,1)$這個點，你說應該有，因為 x 在 1 和-1 的時候 $y<1$，但隨著 x 範圍越小 y 會漸漸往 1 靠近，那所以你覺得它會越來越靠近它，會到還是會怎樣？

S_1： 我是覺得應該會，就是順著一個數線那樣子啊。假如說你前面都是1到…，就像數列一樣前面是1、2、3、4、5、6、7、8、9啊，你要猜最後一個是什麼，大部分都會猜10啊，就是在定義還沒有完全搞清楚的時候，我都會這樣子想吧！我是覺得這樣子比較合理。

直覺思維與既有的概念心像，如何影響學生在 L-3.cf、L-3.c 之表現，以下對此一問題作綜合性的論敘。觀察 $h(x)$ 在 $[-1,1]\times[-0.5,0.5]$ 圖形後，如圖 4-4 所示，有些學生仍認為 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$；而有些則推翻了 L-3.b 之猜想 ($\lim_{x\to 0} h(x)=0$)。L-3.c 依據學生所喚起之概念心像給予分類，分類結果如下：

類型 *I* 察覺「當$-1<x<0$時，$|h(x)-0|>0.5$」，無法滿足題目的要求。

I_a：不支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測。

I_b：仍支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測。

I_c：支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測，但認為 $\lim_{x\to 0} h(x)$ 不存在。

類型 *II* 無論要求 $|h(x)-0|$ 有多麼小，皆可找到一個對應的 x 範圍，滿足題目要求的條件，仍支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測。

類型 *III* 察覺「當 x 從 0 的右方趨近 0 時，$h(x)$ 趨近於 0，但無法判別 x 從 0 的左方趨近 0 時，$h(x)$ 是否趨近於 0」，無法支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測。

類型 *IV* 察覺「x 很靠近 0 時，$h(x)$ 的值不唯一」，無法判斷極限值是哪個數，不支持 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 的猜測。

當圖形介入時，推翻先前猜想的學生 (I_a、*III* 及 *IV*) 中，類型 *III*、*IV* 之學生使用動態逼近方式；而 I_a 則是使用$\varepsilon-\delta$視窗。從分類結果可見一趣事，類型 *IV* 學生未加以思索 CAS 所呈現之圖形，進而回答出有趣的結果，從活動錄影 V_{21}-76:45~V_{21}-77:20 片段發現此一現象。再此，研究者深信 CAS 呈現之結果，雖提供學習者加以思索的機會，但不適當的使用態度會動搖不穩固之概念。

使用$\varepsilon-\delta$視窗之學生 (I、II)，對先前 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ 之猜想秉持著不同的想法，但從回答中可看出二種模式：一類爲考慮$x=0$左右兩側，另一類只考慮$x=0$單側。從晤談中深入了解類型I_a 學生之表現情形，以 S_9 回答爲例：

T： 所以這個圖形 (圖4-4) 告訴你說你沒有辦法做到這件事情，沒有辦法做到這件事情的話，它的結論是什麼？

S_9： 就是極限不存在。

T： 是嗎？你現在是猜極限是0喔，對不對？

S_9： 嗯。

T： 所以如果這個函數極限是0的話，那麼不管我要求它多靠近0，在那樣的誤差範圍之內我都能做到。這個圖表示說函數值不會在0的兩邊都靠近你猜測的極限0嘛，對不對？

S_9： 對，因為0.5的誤差就不對了。

T： 所以它只能告訴你一件事情是什麼？

S_9： 極限不是0。

當圖 4-5 介入時，學生承繼 L-3.c 之想法 (iedal) 探索 L-3.f。有些學生認爲 $\lim_{x\to 0} h(x)=1$；而有些則推翻了 $\lim_{x\to 0} h(x)=1$ 之說法，但最後皆以「極限不存在」回答 L-3.g，以下對此一現象作進一步說明。爲何從 L-3.cf 之行動，學生得出「極限不存在」之結果？經由分析、比對蒐集到的資料後，研究者推斷出學生使用既有知識 (左、右極限概念) 於 L-3，因而回答「極限不存在」，從晤談中亦可驗證推論之正確性。晤談內容如下：

T： 你看看前面兩個問題中所做的事情，我們還特別在問題上面強調你要兩邊都取到嘛！...，所以你在這裡就分開看了，x 是正的和 x 是負的是分開。

S_9： 嗯。

T： 所以在那個時候腦子裡頭一定有一個很特定的想法，...讓你只去看一邊。

S_9： 嗯。

T： 所以你在那個時候想的是左右極限嗎？

S_9： 哦...有點類似啦！

T： 所以...所以你會把左右極限的這個 idea 放進來嗎？

S_9： 嗯。

對於 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 的問題，學生 (I、II) 藉由操弄圖形察覺：當猜測極限值爲 0 時，無論選取的 x-range 爲何皆無法滿足題目要求；猜測極限值爲 1 時亦然。依據極限非形式定義或形式定義，只能說明 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\neq 0$ 且 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\neq 1$，但學生大多會認爲 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 不存在。以 S_7、S_8 的回答爲例：

T： ...，我剛剛已經看到，對於所有的 $x<0$，它是不是都比 1 還大。

S_8： 對。

T： ...，所以不管你這邊縮的多小，你有沒有辦法讓你的函數值跟 0 點的誤差小於 0.5，...，那告訴你什麼？

S_8： 就找不到...就不會存在了啊。

T： 嗯，慢一點再想清楚一點...，因為我剛剛說函數值跟 0 點的值唷。

S_7： 它的極限不是 0。

T： 對很好，所以它極限不是 0。

對於極限不存在的探討，學生多半使用尚未學習的左、右極限，成效評量中以極限存在的必要條件 (P-2.a)，探查學生對「極限不存在」之表現情形。從測驗回答中可知，學生多半無法論述此一命題，但有 7 名學生能使用此一命題，配合圖 4-16 意識到「當 $xy<0$，$\left|f(x)-f(y)\right|>1$」，進而解釋「極限不存在」，以 S_{14} 回答爲例；其他學生仍以左、右極限解釋極限不存在。

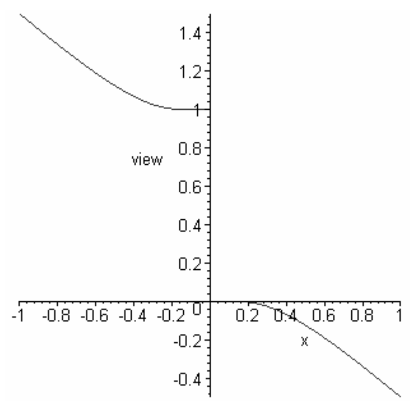
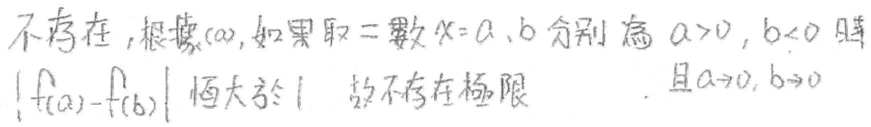


圖 4-15 $\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 在 $[-1,1]\times[-0.5,1.5]$ 圖形



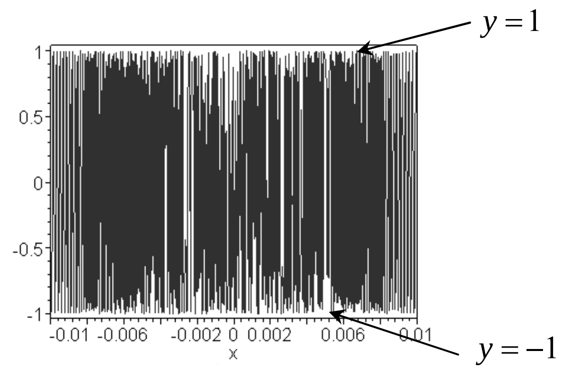
不存在，根據(a)，如果取二數 $x=a$、b 分別為 $a>0$，$b<0$ 時
$|f(a)-f(b)|$ 恆大於1　故不存在極限　且 $a\to 0$，$b\to 0$

圖 4-16 以必要條件說明極限不存在 (S_{14} , P-2.b)

從晤談中可知，學生經過引導後能了解 P-2.a 之涵義：極限存在時，在 limiting point 附近之函數值也很靠近，進而以 P-2.a 解釋 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ 不存在，以 S_9 的回答爲例：

T： ...，為什麼上下跳，它極限就不存在？ L-2 也上下跳啊！

S_9： 因為它就沒有辦法符合這邊這個條件，就是它附近的值可能剛好一個在這邊 ($y=1$)，一個在這邊 ($y=-1$)，然後距離就是...哦...1。(如下圖)



T： 所以呢？

S_9： 所以它的誤差值就沒有辦法取小於 $\frac{1}{2}$，然後就不能要有多靠近就有多靠近。

T： 所以你想說：不管怎麼縮小定義域，總會找到波峰和波谷對不對？

S_9： 對。

由上述討論可知，學生遇見圖形錯開 (jump) 時，易喚起左、右極限之概念，進而使用此概念解釋極限不存在。因此，學生大多無法將極限概念應用到其它情境上。

(五) 符號表徵

學習過程涉及「符號表徵」部分包括：成效評量 (P-2.a)、CAS 習題 (E-35.bc)、成就測驗 (A-7.ab)，以下將分別探討學生符號表徵之表現情形。首先，探討 CAS 習題之表現情形，學生在 E-35.b 的表現情形可分成兩類，分類方式如下：

類型 *I* 使用 solve 指令解方程式，並求出正確δ。

I_a：解出方程式 $x^3+x+1=3+\varepsilon$ 之 $x(\varepsilon)$ 後，取 $\delta=x-1$，但未說明所取之 δ 為何最大。

I_b：解方程式 $\delta^3+3\delta^2+4\delta=\varepsilon$，解出 $\delta(\varepsilon)$ 後即為所求。

I_c：僅導出 $\delta^3+3\delta^2+4\delta=\varepsilon$ 關係式，尚未回答試題。

類型 *II* 使用 solve 指令解方程式，但未求出正確之δ。也就是說，解出方程式 $x^3+x+1=3+\varepsilon$ 之 $x(\varepsilon)$，並將此 x 值視為δ。

類型 *III* 使用其他方式 (如：指定教科書 Section 2.4 Example 4) 以 $\varepsilon-\delta$ 定義證明 $\lim_{x\to 1}(x^3+x+1)=3$，並未依照引導回答問題。

從 E-35.b 回溯 E-35.a，可得下列連結關係：

(1) E-35.a 屬於類型 I_a 的 8 名學生中，有 5 名學生能從"ε 為 0.4 找尋 δ"的歷程中，進入到"ε 為任意正數找尋 δ"的歷程。

(2) E-35.a 屬於類型 I_c 的 5 名學生中，顯然皆無法正確地完成 E-35.b。

(3) E-35.a 在類型 *II* 的學生中，雖然圖像表徵與極限概念間連結較薄弱，但仍然有部份學生能操控 ε 為任意正數的情形，進入到"ε 為任意正數找尋 δ"的歷程。

然而，E-35.b 之 $\delta(\varepsilon)$ 求出後，學生如何得出 $\varepsilon=0.4$ 所對應之最大δ？E-35.c 學生的表現情形可分成以下兩類：

類型 *I* 將 $\varepsilon=0.4$ 代入 E-35.b 所求出的解，得最大的 δ。

類型 *II* 將 $\varepsilon=0.4$ 代入方程式 $x^3+x+1=3+\varepsilon$ 或 $\delta^3+3\delta^2+4\delta=\varepsilon$，再度重複演算求出最大的 δ。

從上述分類結果可看出二種解題模式：一類是將 $\varepsilon=0.4$ 代入先前已經演算完成的結果，另一類是將 $\varepsilon=0.4$ 代入方程式，再度重複 E-35.b 演算過程求取最大的δ。依據 APOS 理論的觀點可知，此類學生尚未將過程壓縮成物件。E-35.b 類型 I_a 與 I_b

的學生能進入到 E-35.c 類型 I 時，表示具有圖形與符號表徵之間的轉換能力。而 E-35.b 從 II 或 III 進入此題類型 I 的學生，知道將 $\varepsilon=0.4$ 代入 E-35.b 之結果，但在圖形與符號表徵之間連結不當，產生「視 x 爲 δ」之錯誤。此類學生導正 δ 概念後，便能順利建構圖形與符號表徵之間的連結。

以下探查學生是否了解「解方程式 $x^3+x+x=3+\varepsilon$」之原因？從晤談中，發現學生知道要選取較小部分，但不知其原因，以 S_7、S_8 的回答爲例：

T： 這邊是 3 這邊是 1...你現在 ε 給了...所以 $x^3+x+1=3+\varepsilon$ 這在解什麼？...那我為什麼不解這個（$x^3+x+1=3-\varepsilon$）？

S_7： 應該是...就是因為這個吧...就是它取的最小...比較小的在這邊，所以要取這邊...如果不知道的話...。

T： 對...可是不知道的時候怎麼辦，你是不是還是要選，那可不可以告訴我一個你覺得不是選這個（$x^3+x+1=3-\varepsilon$）的原因。

S_8： 題目不是說要最大...加的應該會最大。

T： 是喔。

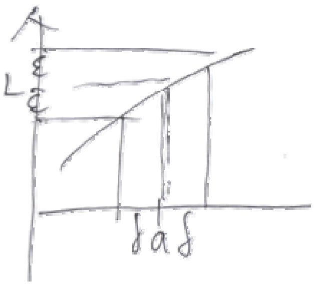
S_8： 感覺。

S_7： 是不是因為它是遞增，所以它在這邊會上升的比較快。

T： 不見得...。

研究者繼續探查上述 δ 之選取問題，從繳交之 CAS 習題中可見另一現象。學生將 $x=1$ 左右二側產生之 δ 視爲相等，再後續之晤談亦發現此一現象，以 S_5 的回答爲例：

S_5： 嗯…可能它函數這樣，然後它就 y 軸的值 L…這裡 ε，然後…譬如說它的 x 趨近於 a 啊，這是 δ。(如下圖)



實驗活動所探究之試題，可能影響學生對δ的認知，此現象能以 Tall (1991) 所提的「一般性擴增原理」(generic extension principle) 解釋。實驗活動後續，教師已教授過與 E-35.b 之類似問題，教材部分內容陳述如下：

> Show that $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. ... , we should take δ to be the minimum of $1-\sqrt{1-\varepsilon}$ and $\sqrt{1+\varepsilon}-1$. ...

因此，學生已見過「兩側δ不相等」的問題，由 A-7.a 之表現情形可知，學生未將此一示例至於心智中。由此可見，學習者主動參與學習活動時，產生之學習效果具較多的影響力。此外，有些學生把「相對ε之最大δ」的涵義，誤解成「選取最大δ」，即：$\max\{\delta_1,\delta_2\}$。若學生以δ所需滿足之必要條件檢驗，必可察覺其正確性。由此可見，學生的「概念定義心像」缺乏δ所需滿足之必要條件。學習過程後續之成就測驗，以試題 A-7.ab 再度探查學生「符號表徵」之表現情形。學生 A-7.a 的表現情形主要可分成三類，分類方式如下：

類型 *I*　利用解方程式求出δ。

I_a：解出$\sqrt{x}=1-\varepsilon$與$\sqrt{x}=1+\varepsilon$的x後，選取$|x-1|$較小者視爲最大的δ。

I_b：解出方程式$\sqrt{x}=1+\varepsilon$的x後，將$x-1$視爲最大的δ。

類型 *II*　並未依照引導回答問題，使用其他方式 (如：指定教科書 Section 2.4 Example 4) 以$\varepsilon-\delta$定義證明 $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$。

類型 *III*　ε與δ之意義解讀錯誤或混淆不清。

如：Given any $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ If $0<|x-1|<\varepsilon$, then $|\sqrt{x}-1|<\delta$.

如：Given any $\varepsilon>0$ $\exists$ a $\delta>0$ then $0<|\sqrt{x}-1|<\delta$

So that $-\delta<\sqrt{x}-1<\delta$ $\quad -\delta+1<\sqrt{x}<\delta+1$

$\therefore \varepsilon=-\delta+1$ or $\delta+1$

類型 *IV*　無作答。

而 A-7.b 的表現情形分類方式如下：

類型 *I*　將$\varepsilon=\frac{1}{2}$代入 A-7.a 推演結果，得最大的δ。

I_a：由 A-7.a 推演結果得$\delta=\varepsilon(2-\varepsilon)$，將$\varepsilon=\frac{1}{2}$代入求出正確的最大$\delta$。

I_b：由 A-7.a 推演結果得$\delta=\varepsilon(2+\varepsilon)$，將$\varepsilon=\frac{1}{2}$代入求出錯誤的最大$\delta$。

I_c：由 A-7.a 推演得出其他錯誤 δ，不含 $\delta=\varepsilon(2+\varepsilon)$，將 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 代入求出錯誤的最大 δ。

類型 *II*　取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 代入方程式，得最大的 δ。

II_a：求出正確的最大 δ。

II_b：重複 A-7.a 演算過程，求出錯誤的最大 δ。

如：$\sqrt{x}=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\quad \sqrt{x}=\frac{3}{2},\ x=\frac{9}{4}\quad \frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$ 故 $\delta=\frac{5}{4}$

II_c：重新計算，求出錯誤的最大 δ。

如：$\sqrt{x}=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\quad \sqrt{x}=\frac{3}{2},\ x=\frac{9}{4}\quad \frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$ 故 $\delta=1$

類型 *III*　無作答。

比對 E-35.b 與 A-7.a 之表現情形，以下列三點說明彼此之間的關係：

(1) E-35.b 類型 I_c 學生在成就測驗之表現，可看出不了解最大δ之意思，只能回答δ與ε之關係。因此，這類學生具薄弱的代數模式。

(2) E-35.b 類型 *II* 學生有 2 名能正確回答出最大δ。也就是之前所述：導正學生δ概念後，便能順利建構圖形與符號表徵之間的連結。

(3) E-35.b 類型 I_a 學生在 A-7.a 不是落在 I_b 就是落在 *II*。因此，這些學生未了解最大δ的涵義，或未以δ所需滿足之必要條件檢驗其正確性。

此外，透過圖形操弄後，有些學生仍需要在教師的引導下，才能將「非形式定義」與「形式定義」作連結。以下將晤談時學生屢次出現之「迷思概念」作探討。以 S_1、S_2 所寫下「形式定義」為例。當 $\varepsilon=0.5$ 時，學生寫下：

$$\text{“Given } \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \text{ s.t. if } |x-a|<\delta \text{ then } 0<|f(x)-L|<0.5\text{”}$$

從二生所寫下的定義可知，有著“$0<|f(x)-L|<0.5$”與“$|x-a|<\delta$”的迷思，以下進一步探討這二種迷思概念。從晤談中可知，S_2 生認為距離應該大於 0，因而寫出“$0<|f(x)-L|<0.5$”，另一種較常出現的錯誤原因是極限只能「逼近但無法到達」(approaches but cannot reach)。諸如此類現象，在晤談中皆可察覺，以 S_2、S_3、S_4 的回答為例：

T： ...，$f(x)-L$ 一定會大於 0 嗎？

S_2： 哦...。

T： ...，你選到 1.9 那麼 1.9 是幹麻用？讓函數值跟 L 之間的誤差怎麼樣？小於 0.5 只有這樣子 ($|f(x)-L|<0.5$) 對不對？有沒有說別的事？沒有喔，沒有的就不能說喔，不能隨便說啊，它 ($|f(x)-L|$) 會不會大於 0？不見得唷。

S_2： 距離不是大於 0。

T： 大於等於 0。

T： $\lim_{x\to\infty} g(x)=L$ ，...，什麼叫做越來越靠近 L，有多靠近？可不可以等於？

S_3： 不可以等於啊...應該不會等於。

T： 你覺得呢？。

S_4： 它會非常靠近，但是不會等於。

上述之現象能以 Tall (1991) 所提的「一般性擴增原理」(generic extension principle) 解釋，當個體只有遇到明確性質的問題，如果沒有出現反例 (counterexample)，心智上會認爲該性質在所有的情境是有效的，即使它沒有被明確地陳述出來。若學生只看到極限值不會到達的例子，會認爲極限是不會到達的。若學生剛開始以直觀方式接觸極限概念，容易產生「極限無法到達」的情境 (Tall, 1991)。若以「直覺思維」角度看待此一現象，即 Monaghan (1991) 研究中所提到：學生將「極限」這個字，與生活中具體的言詞相提並論；當學生有著含糊的措辭時，將影響極限概念的學習。

以下繼續探查另一迷思處 “$|x-a|<\delta$”，可發現大部分學生皆無意識到 $x\neq a$。在實驗活動中，所探究之函數皆在 $x=0$ 無定義，但學生似乎沒有意識到此一現象，因而產生「形式定義」上的錯誤。晤談時學生所書寫的「形式定義」，亦可發現此一現象。以 S_2、S_6 的回答爲例：

T： 這邊 x ($|x-0|<\delta$) 是不能等於 0 的，因為函數在 0 點沒有定義，所以這邊 ($|x-0|<\delta$) 要怎麼樣？可不可以等於 0。

S_2： 不行。

T： 所以這邊要大於 0 ($0<|x-0|<\delta$)，是不是？

S_2： 嗯。

T： ...，當 x 趨近於 a，$f(x)$ 它的極限是 L，那麼你們可以給我一個 definition 是直觀的，你當然也可以給我一個 formal definition，...。

S_6： $x-a$ 吧！ (寫下 $|x-a|<\delta$ $|f(x)-L|<\varepsilon$)

除了上述二種常見迷思之外，學生時常誤用「極限算則」(limit laws)，以下藉由「求極限」試題說明此一現象。所涉及的試題如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\ \text{(A-2.a)、}\ \lim_{u\to\infty}(\sqrt{u^2+u}-u)\ \text{(A-2.b)、}\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}\ \text{(A-2.c)}$$

答對率分別爲 82.5%、90.0%、47.5%，以下探討學生答錯的情形。A-2.a 答錯的學生皆認爲極限值爲 0；A-2.b 有些學生將 ”∞” 視爲一個數，因而產生 ”$\infty-\infty=0$” 之迷思；A-2.c 可發現常見兩種錯誤：任意使用「極限算則」(limit laws)，再此指的是「積法則」(product rule)，即：$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{\pi}{x}=0\cdot\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{\pi}{x}=0$；或以 $0\cdot\sin\frac{\pi}{x}=0$ 說明極限爲 0。

將上述「求極限」試題與 A-1.a 做比對，探查學生是否也誤用「極限算則」，發現學生使用時忽略檢查極限是否存在，因而產生誤用極限算則之情形，以 S_3、S_{13} 的回答爲例，如圖 4-17、圖 4-18 所示。

圖 4-17 誤用極限算則 (S_3 , A-1.a)

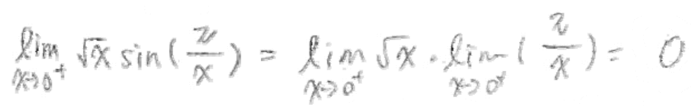


圖 4-18 誤用極限算則 (S_{13} , A-2.c)

除了上述的迷思概念外，學生在「量詞」的意思與概念上亦產生困難。Tall & Vinner (1981) 指出：學生會在「對於所有」(for all) 及「存在」(for some) 的意思上及操作上產生問題。極限的形式定義不僅涉及到「量詞」的使用，還牽扯了「邏輯」演繹的先後次序。研究者從 A-1.e 探索出的「量詞」與「邏輯」問題如下：學生以繪圖、舉例方式說明 A-1.e，以 S_2、S_{18} 的回答爲例，如圖 4-19、圖 4-20 所示。

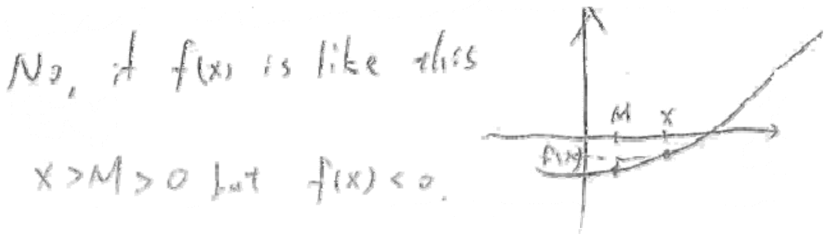


圖 4-19 圖形表徵 (S_2 , A-1.e)

否，如二次曲線：$f(x)=(x-2)^2-2$：
當 $M=1>0$ 時 $x=2>M$，$f(x)=-2$ 不合

圖 4-20 符號表徵 (S_{18} , A-1.e)

上述兩種表徵方式皆說明了找到一個 $M>0$，但不滿足「if $x>M$ then $f(x)>0$」，認爲此命題不成立。從 S_2、S_{16} 的回答可知，學生對「存在」(for some) 的意義是模糊的；而在使用「對於所有」(for all) 上仍有缺陷，以 S_7 的回答爲例。此一現象有如前面所述：學生以「無限可數」(countably infinite) 詮釋「對於所有」(for all)。

T： ...，你覺得我叫你們畫了三個圖，第一個誤差在 0.5 範圍之內，再來我要求在 0.1，再來我要求在 0.01，所以你們做三個圖的動作是在確定什麼，跟這個極限存不存在有什麼關係？

S_7： ε要有多小就有多小。

T： 要有多小就可以多小，我只叫你畫三個圖，所以第一個要你確定什麼，ε等於多少？

S_7： 0.5。

T： 所以這三個動作你都辨的到對不對？

S_7： 嗯。

T： 所以告訴你說有機會但不確定，因為後來我這個地方只問你說是不是confirm 你的 answer，至少跟你原來的假設沒有衝突。

成就測驗中亦有學生能以「符號表徵」說明 A-1.e，以 S_{15} 的回答爲例，該生具有較佳的「符號表徵」能力，研究者回朔該生成就測驗前之表現，可知此時該生已將過程壓縮成物件，並應用「量詞化」(quantification) 基模重新建構非形式定義，獲得極限之形式定義；相較之下 S_{16} 則缺乏「符號表徵」能力，該生於 M-II2.b 仍以語意表徵回答問題。

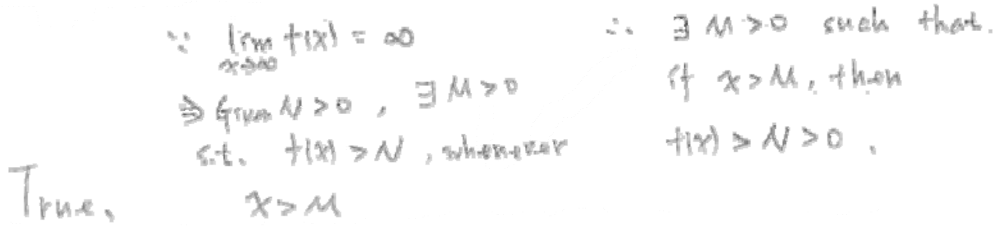

∵ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
⇒ Given $N > 0$, $\exists M > 0$
s.t. $f(x) > N$, whenever $x > M$
∴ $\exists M > 0$ such that.
if $x > M$, then
$f(x) > N > 0$.
True.

圖 4-21 符號表徵 (S_{15} , A-1.e)

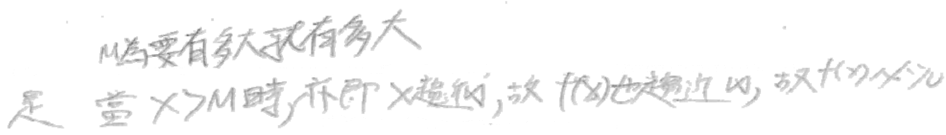

M為要有多大就有多大
是 當 X>M時,亦即 X趨近∞,故 f(x)也趨近∞,故f(x)>1

圖 4-22 語意表徵 (S_{16} , A-1.e)

研究者以 M-II2.b 再度探查學生「形式定義」之表現情形，從 S_{11} 的回答上仍可見「量詞」上的問題，由此推斷出大多數學生無法以「量詞化」(quantification) 基模表示形式定義。


If $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, then $\forall M > 0$ $\exists N > 0$
when $x > M$, then $f(x) > N$.
If M is large enough, then $f(x) > 1$ is reasonable.
∴ True.

圖 4-23 符號表徵 (S_{11} , M-II2.b)

(六) 表徵運用綜合性論述

研究者從學生在數值模式之表現情形，得出學生具有「動態逼近程序」的概念。從活動錄影片段，可知學生能夠從數值表之數值行爲 (behavior) 猜測可能的極限值。當數值表只出現一個數值時，有些學生會認爲極限不存在。在 CAS 學習環境中，可透過 CAS 表徵之數值與圖形模式，提供學生探索極限之方法，教材活動設計上誘使學生從數值、圖形多次的交錯比較，希冀提升數值表徵與圖形表徵之連結。在此學習環境下，學生遇到其它極限問題，會以何種方式探索？以 S_9 回答爲例：

T：　...坐在電腦面前，我都沒有給你提示或什麼，我就只有要你們自己去做，譬如說我隨便給你另外一個函數，你自己去玩玩看，你覺得它極限存不存在？你會做什麼事？

S_{10}：畫圖。

T：　畫圖，還有呢？

S_9：　哦，差不多啊，就是畫圖啊，然後跑一些數值看一下。

T：　跑一些數值...。

S_9：　嗯。

T：　你會去從數值先看還是先從圖形上去看？

S_9：　不一定啊，都會看一看做參考啊！然後也會拉近看。

從上述晤談紀錄可知，學生能將活動所學習到的策略，應用於其它的情境中。亦可從 Q-1 勾選情形了解學生如何猜測極限值，有 80.0% 勾選「數值和圖形做比對」；8.6% 勾選「只由函數圖形」；5.7% 勾選「只由數值資料」。

以下研究者以函數 $k(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ (L-4.abc、P-3.abc)，對數值模式與圖形模式作綜合性探討，函數圖形如圖 4-25 所示。

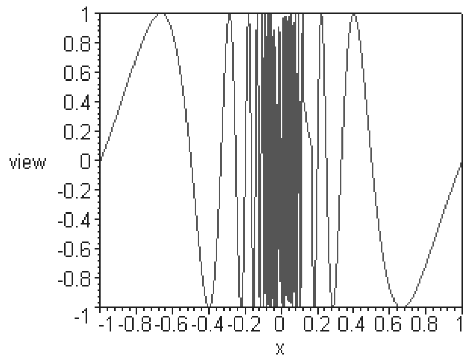


圖 4-24 $\sin\frac{\pi}{x}$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]$ 圖形

學生從圖 4-25 是否察覺視窗中函數圖形與數學真理有些不符之現象？在 P-3 學生看到函數「數值表」及其「視窗圖形」，詢問學生「數值表」是否與函數圖形相矛盾？學生將表上數值以序對“$(x,k(x))$”方式連結函數圖形，也就是心智中具有與圖 4-26 相類似之心像。

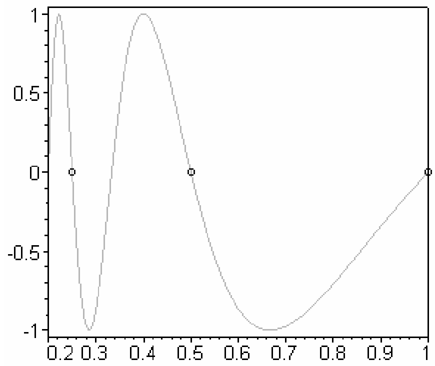


圖 4-25 數值表於圖形上之對應關係

學生從「數值」與「圖形」二個面向思考極限問題，最後回答結果有二種：極限不存在、極限存在且極限值爲 0。認爲極限存在的學生，以「動態逼近」方式說明存在性，也就是考慮 $\lim_{x\to 0}(x,k(x))$ 之問題。這些學生心智中有著與 S_4 在 P-3.c 所呈現之心像，如圖 4-26 所示。若學生不具上述之心像，將認爲極限不存在，因爲他們使用「動態逼近」方式，無法找到一個確定的點。

圖 4-26 動態逼近方式說明極限 (S_4 , P-3.c)

此外，有兩名學生以 $\varepsilon-\delta$ 視窗之方式說明極限不存在，如圖 4-27 所示。

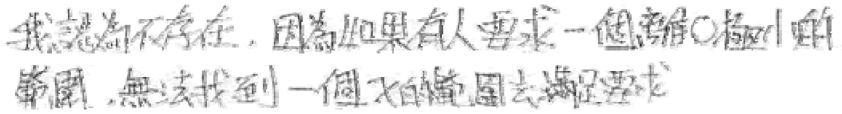

我認為不存在，因為如果有人要求一個離0極小的範圍，無法找到一個x的範圍去滿足要求

圖 4-27 具 $\varepsilon-\delta$ 視窗輪廓 (S_{20} , P-3.c)

以下依據 Kinnear (1994) 的觀點，將上述討論結果作一說明。Kinnear 指出：學習者都是帶著某種程度的「先備知識」來到學習情境裡，並且這種知識會影響到往後的學習。學生以既有「直觀概念」思索 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$，必認爲極限值爲 0。成效評量中可見此一現象，某生觀察函數的行爲，並約略描繪圖形，在 $x=0$ 處以空心點表示，由於 $\sin\frac{\pi}{x}$ 與 $\sin x$ 的行爲非常類似，皆在 -1 與 1 來回震動，$\sin\frac{\pi}{x}$ 越往 0 靠近震動的越厲害，學生將此圖形思索爲 $\sin x$ 去掉 $x=0$ 處且經過擠壓產生的圖形，由直觀概念認爲極限值爲 0。

高中階段幾乎都是探討多項函數的極限問題，而多項函數爲連續函數，使得學生有著 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 的迷思概念，認爲：若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 f 在 $x=a$ 連續。以 S_1 的回答爲例：

T： ...你覺得極限 ($\lim_{x\to a} f(x)=L$) 是什麼意思？

S_1： 我是...就是以前是覺得代進去而以啊...。

T： 什麼叫做代進去？

S_1： 就是 a 值代進去 (將 a 代入 $f(x)$) 而以啊。

倘若無法將 $x=a$ 代入 $f(x)$ 時，將採取何種策略解決極限問題？例如：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，學生回答「化簡」、「拆開」與「夾擠」等。在處理極限問題時，化簡與夾擠是時常使用的技巧，但並非所有的極限問題都能適用。大多數學生學習極限時，只了解如何求極限值，不了解極限的概念性知識。當此類學生遇到陌生的問題，較無法提出解決問題的想法 (idea)。

“ 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 f 在 $x=a$ 連續 ”

考慮上述命題的「逆否命題」，即：若 f 在 $x=a$ 不連續，則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在。學生仍然具有相同的迷思概念，以 S_8 的回答爲例。此外，從問卷 Q-4 回答亦可發現此一現象，該生以圖形不連續說明極限不存在。

S_8： 所以像它在 0 這邊不是錯開了，那它就不連續，在 0 這個...就 0 的附近取一個地方附近，在沒有連續的地方...就它極限不存在。

T： 可是不能這樣講啊對不對，我如果畫一個函數圖形是這樣子，它也錯開啦，它這點跳掉啦，它是不是不連續。

S_8： 嗯。

研究者藉由 L-2.f 再度探討數值與圖形皆介入時，學生極限的思維模式。從分析 L-2.f 表現情形過程中，探索出的思維模式有：

(1) 從操作「$\varepsilon-\delta$視窗」上，認爲極限值爲 0，且與數值表上猜測出的極限值是一致的。也就是說，學生將目光聚焦於所操作的行動上。

(2) 從各題「$\varepsilon-\delta$視窗」中呈現的圖形，看出「當 x 靠近 0，y 亦靠近 0」。也就是說，學生將目光聚焦在 $\lim_{x\to 0}(x, x\sin\frac{1}{x})$ 上。

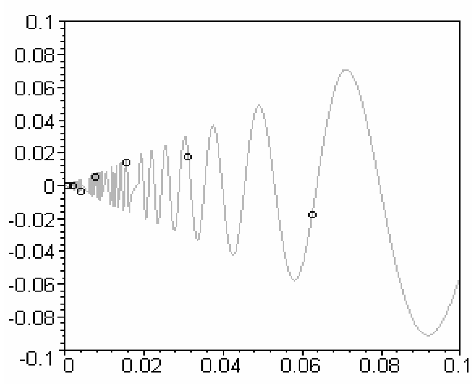


圖 4-28 數值表於圖形上之對應關係

由上述各表徵之探討，研究者所發現結果如下：

(1) 從「數值模式」發現學生心智中具有極限「逼近但無法到達」、「不能通過」之迷思概念。

(2) 從「圖形模式」發現學生遇到撲朔迷離的圖形，會以心智中較穩固之概念心像思考問題，進而影響非形式定義之學習。

(3) 學生慣用「語意表徵」回答問題，較少使用「符號表徵」。研究者推斷可能的原因爲：「符號表徵」熟析度不佳，而以較熟析之「語意表徵」回答。

(4) 從「動態模式」發現學生若以動態逼近方式思索問題，將目光聚焦在 $\lim_{x\to a}(x, f(x))$；以非形式定義思索之學生，將目光聚焦在所操作的行動上。

(七) 學習路徑

每個人的學習軌道可能有所不同，但通常會沿著相似的學習路徑進行。研究者根據學生在 CAS 環境下之表現情形，構築研究樣本之「學習路徑」，說明在 CAS 學習環境下，學生如何由直觀概念演變至形式概念，以提供教師教學上「假設性學習軌道」(Hypothetical Learning Trajectory, HLT) 之參考。

從「直觀概念」進入到「非形式定義」涉及下列行爲：尋找距離或 x 範圍 (Fx)；設定 view 範圍 (Sv)、設定 x 範圍 (Sx)；調整 view 範圍 (Av)、調整 x 範圍 (Ax)；從圖形驗正適切性 (V)。

從活動錄影可知，學生操作程序有下列四種模式，並依據各種操作程序說明所建構出的「形式定義」。

(1) 操弄指令程序與形式定義相同，例如：Fx→Sv→Sx→V→Ax→V。此類學生能建構出「形式定義」輪廓，由於操弄程序未達深思熟慮地步，因此所建構出的形式定義缺乏「量詞化」基模。

(2) 操弄指定程序與形式定義相反，例如：Fx→Sx→Sv→V→Ax→V。此類學生由於操弄程序與形式定義相反，因此建構形式定義時在量詞上會產生問題。此一模式較常出現在使用繪圖視窗、亂槍打鳥學生修正後之表現情形。

(3) 將 view 設定爲非誤差範圍，例如：Fx→Sx→Sv→V→Ax→V→Av→V。此類學生由於將 view 設定爲非誤差範圍，因此較無法產生「給定ε」之情境。

(4) 亂槍打鳥地操弄指令程序，例如：Fx→Sx→Sv→V→Av→Ax→V。此類學生無法建構出「形式定義」，最多只了解δ所須滿足之必要條件。

由此可見，影響學生後續「形式定義」之完整性原因有三：一是指令設定程序；二是繪圖視窗；三是操弄次數。研究者依據此三項因素，加以修正實驗活動教材，修正情形如下：(1)以距離替代範圍並於 plot 指令外鍵入，透過由上而下鍵入次序，強化操弄程序；(2)以 y 替換 view，並於活動前提醒學生微觀ε−δ視窗與巨觀圖形 (如圖 3-5) 之關係；(3)單一試題考慮更多個ε。

第二節 CAS 使用情形與態度

資訊科技能突破某些層面上的教學，但不適當地使用科技可能會使學生產生學習方法上或概念上的謬誤，這是因爲科技上虛擬實體 (virtual reality) 與數學概念實體 (mathematics conceptual reality) 的偏差所導致 (郭禮賢，1999)。研究者從教室觀察、電腦實驗活動、CAS 習題及問卷，將學生 CAS 之使用情形與態度作以下之探討：

(一) 使用情形與態度

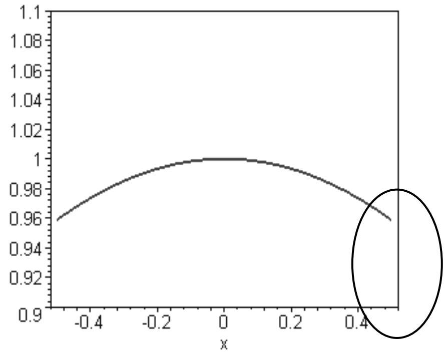
CAS 能提供數值、圖形及符號多種呈現方式，使學習者較能完整的分析數學知識。從 Pierce & Stacey (2001) 研究結果可知，大多數學生也將 CAS 視爲數學專家 (expert)，因此不太質疑軟體技術限制下的結果 (outcome)。從問卷統計結果可知，有 54.3% 學生認爲「Maple 是個數學專家，因爲它能解決許多問題」；有 34.3% 會對執行結果產生質疑。從 Wain (1993) & Thomas (1994) 研究結果可知，數學慣用表示法 (notation) 與 CAS 語法可能產生連結上的障礙 (Pierce & Stacey, 2001)。從問卷統計結果可知，有 25.7% 學生認爲在「Maple 語法與數學表示法 (notation)」之間的轉換上有困難。

(二) 圖形視覺化問題

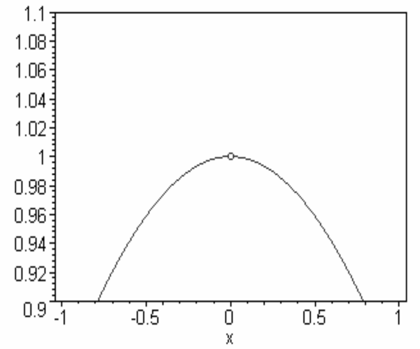
CAS 可做動畫模擬、數值計算及 3D 空間圖形之描繪，因此課堂上無法表達之觀念或無法描述之現象，皆可善加利用電腦「動態」(dynamic) 的功能特性，來呈現某些無法以講授或黑板的靜態表現方式來表達的題材。從文獻探討可知，概念視覺化方法對微積分學習有所助益，但須注意如何充分地解釋圖形所傳達之意涵。CAS 描繪圖形亦有相當多微妙的 (subtle) 技巧，選擇適當的定義域與值域的範圍，才能呈現合適的圖形 (Goldenberg, 1988)。以下說明活動中學生對圖形產生誤解之情形。

電腦實驗活動中，若未仔細觀察思索 CAS 所呈現的圖形，將影響數學概念的學習，甚至產生迷思概念。以探索 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 之極限問題爲例，當給定誤差 0.1，學生透過 CAS 表徵尋找適切的距離，某生使用的指令及其執行後結果如下：

```
> plot(f(x),x=-0.5..0.5,view=-0.1..0.1,thickness=2,axes=boxed);
```



從上圖中發現函數圖形並非與繪圖視窗的兩條「縱向」直線相交，學生誤以爲顯示視窗的兩條縱向直線爲 $x=-0.5$ 與 $x=0.5$。因此，繼續尋找更小的適切距離，但仍發現無法與顯示方框兩條「縱向」直線相交。由此可知，學生觀察 Maple 呈現的圖形時，未細查顯示視窗之刻度，以至於產生上述問題。此外，$f(x)$ 在 $x=0$ 無定義，學生心智中是否具有下圖之圖像？從 P-1.a 可知，學生大多都知道圖形不通過 $(0,1)$，但所回答之 x-range 包含 $x=0$。



由上述諸多討論可知，CAS 呈現 $h(x)=\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 圖形對學習影響較大，活動單上詢問圖形 (圖 4-4) 中的「鉛直線」是否存在；從回答中可見，存在著無意識此一現象之學生，即：學生將此「鉛直線」視爲函數圖形的一部分。CAS 呈現的圖形，可能造成意義上嚴重的誤解，學生必須了解如何解讀 CAS 所呈現的圖形，才能屏除一些不適切的想法 (Goldenberg, 1988)。例如：$h(x)$ 不是函數圖形、此鉛直線可能有稍微傾斜、$h(0)$ 爲鉛直線上的任意值等。

研究者分析問卷 Q-4，再次探討學生對 CAS 圖形解讀情形，有 64.7% 學生勾選「$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在」；勾選「Maple 把圖形畫錯了」有 8.8%；而勾選「其它」者有 26.5%；無人勾選「$\lim_{x\to 0} f(x)\neq 1$」。從學生說明可得下列結果：

(1) 不了解$x\to 0$之意義，如：$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ / 圖形與猜測相同 (N18 , Q-4)。

(2) 利用「極限的$\varepsilon-\delta$定義」來判別極限是否存在，如：$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在 / 因為找不到δ (N24 , Q-4)。

從問卷 Q-5、Q-6 及 Q-7，整合分析「ε−δ視窗」對非形式定義與形式定義之影響；有 71.4% 認為對非形式定義有幫助；31.4% 認為對形式定義有幫助。針對這 31.4% 學生進一步探查是否了解ε與δ所代表的意義，整理分析後可得下列結果：

(1) ε表函數值與極限值之誤差；δ表滿足要求條件下所選取之距離，以下呈現一些學生回答之結果。

N20 ε表給定的誤差，δ表 $|x-a|<\delta$

N23 Given $\varepsilon>0$ s.t. $|f(x)-L|<\varepsilon$ $\exists\delta$ s.t. $|x-a|<\delta$

N24 ε是誤差，δ是x的範圍

N27 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ $\exists\varepsilon,\delta>0$ s.t. $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$給定誤差ε就可找到對應的值域

N34 ε代表$f(x)$給定的誤差範圍，δ代表誤差範圍內對應的x範圍

(2) 未能正確說明ε和δ所代表的意義，以 N28 回答為例。

N28 given ε, $\exists\delta$ such that $|L-\delta|<\varepsilon$

剔除說明不正確之學生數後，約略可知只有 20.0% 了解ε與δ所代表的意義。由上述學生回答結果可知，存在量詞與數學論述之問題。此外 Q-7 勾選情形如下：14.7% 勾選「有很大的幫助」；76.5% 勾選「有，但幫助不大。不過在活動之後，經老師的講解才使我更了解」；8.8% 勾選「有，但幫助不大。即使在活動之後，老師的講解也是無法幫助我了解」。由上述統計結果可知，學生仍需要教師講解後，才能從「非形式定義」進入到「形式定義」。以下將問卷 Q-8 中，學生所寫出的形式定義整理分類如下：

(1) 能寫出 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的形式定義。

N09　give an ε and we can find an δ for $\delta - a \le x \le \delta + a$ we can find $|f(x) - L| < \varepsilon$

N13　當給定一誤差 ε，都能找到一 δ 值使 x 代入 $x-\delta$ 至 $x+\delta$ 數時為 $L-\varepsilon$ 至 $L+\varepsilon$

N20　Given $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x - a| < \delta$

(2) 寫出的極限定義有量詞上或語法上的問題。

[語法上]

N23　Given $\varepsilon > 0$ s.t. $|f(x) - L| < \varepsilon$ $\exists \delta$ s.t. $|x - a| < \delta$

N24　If $\lim_{x \to a} f(x) = L$ exist, then given $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - L| < \varepsilon$, $0 < |x - a| < \delta$

N33　$\forall \varepsilon > 0$ there exist δ s.t. $0 < |x - a| < \delta$ for all $|f(x) - L| < \delta$

[量詞上]

N27　$\exists \varepsilon, \delta > 0$ s.t. $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

N29　as $|f(x) - L| < \varepsilon$ $\exists \delta$ s.t. $|x - a| < \delta$

(3) 不正確的形式定義。

N05　存在 x 只要 $|x - a| < \delta$ 即可令 $|\lim_{x \to a} f(x) - L| < \varepsilon$

N26　$|\lim_{x \to a} f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $|x - a| < \delta$

N34　$\forall \varepsilon > 0$ s.t. $|\lim_{x \to a} f(x) - L| \le \varepsilon$ whenever $|x - a| \le \delta$

由上述學生回答結果可知，N05、N26 及 N34 呈現相似的回答，學生將語意表徵順其自然地轉換成符號表徵，因而出現「$|\lim_{x \to a} f(x) - L| < \varepsilon$」之符號，此符號表示「極限值與 L 的誤差小於 ε」；N29、N23 之回答方式也具此一現象。此外，從 N27 依然可見量詞上的問題。研究者認為：對大一而言，以量詞化 (quantification) 基模完整地表示形式定義是困難的。因此，教學時不宜貿然引入 $\varepsilon-\delta$ 之極限概念。

研究者認為：CAS 圖形本身沒有對錯可言，它只是個技術限制下的產物。當所呈現的圖形造成觀察者知覺上衝突時，就會產生視錯覺 (visual illusion)，此一現象為觀察者知覺所產生的。Maple 繪圖的方式為：在指定的 x-range 內選取一些點，計算其函數值並連接相鄰 (x, y)，使學生誤以為該直線存在，造成部分學生學習上的困擾。因此，使用時須了解軟體的限制性 (limitation) 與呈現方式，且態度上也不能盲目相信 CAS 執行之結果。

(三) 概念視覺化

在「微型世界」(microword) 裡，學生可利用「圖形」來判別函數之可微分性。以分析學常見函數 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ 及 $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ 爲例，分別說明微型世界中「不可微」與「可微」之情形。倘若欲探討函數在 $x=a$ 之可微分性，將 $(a, f(a))$ 至於繪圖視窗中心，並以「等軸」方式繪圖，即：x 軸與 y 軸之比例爲 1:1，以 Maple 繪圖指令爲例：plot(f(x), x = a−h..a+h, y = f(a)−h..f(a)+h)。

圖 4-29 呈現 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可微之情形，無論多麼拉近看皆無法呈現「直線」，由此可知在 $x=0$ 無切線，也就是微分不存在之意。圖 4-30 則呈現 $g(x)$ 在 $x=0$ 可微之情形，以繪圖視窗 $[-0.01,0.01]\times[-0.01,0.01]$ 呈現時，圖形似乎已是條「直線」，該直線也就是 $g(x)$ 在 $x=0$ 之切線。

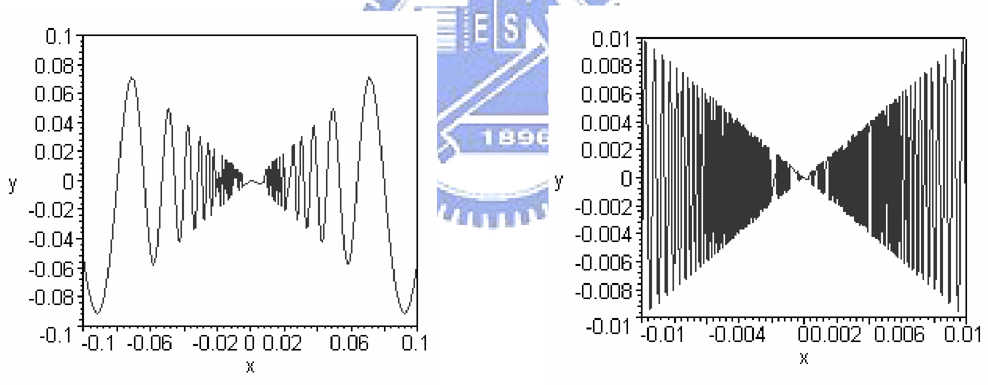


圖 4-29 不可微處之圖形微觀情形

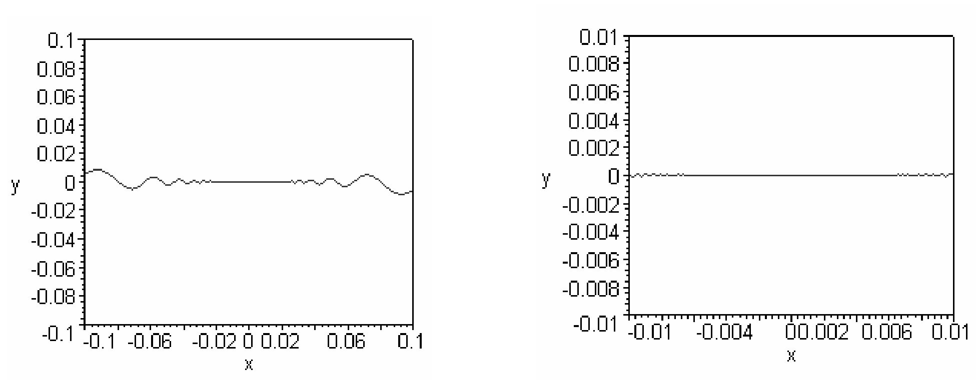


圖 4-30 可微處之圖形微觀情形

當 x 軸與 y 軸之比例不為 1:1 時，圖形將產生不同效果。從 Goldenberg (1988) 研究報告可知：「尺度」(scale) 會產生斜率之視錯覺現象，因此適當地選取繪圖視窗將可呈現函數極限存在之情形，以直線 $y = x + 1$ 為例，相同尺度下以 (0,1) 為視窗中心之函數圖形如圖 4-31 所示。首先，固定 y 範圍逐漸縮小 x 範圍，圖形之變化情形如圖 4-32 所示；若固定 x 範圍逐漸放大 y 範圍，圖形之變化如圖 4-33 所示。

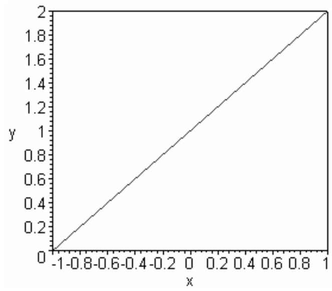


圖 4-31 $y = x + 1$ 函數圖形

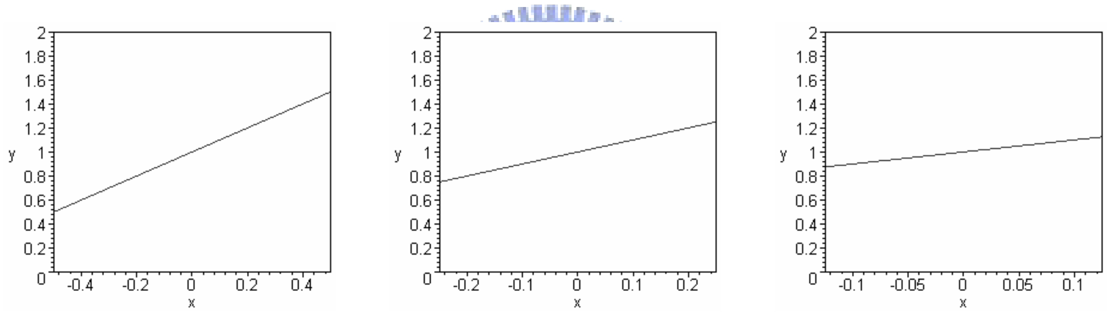


圖 4-32 繪圖視窗尺度之影響 (固定 y-range)

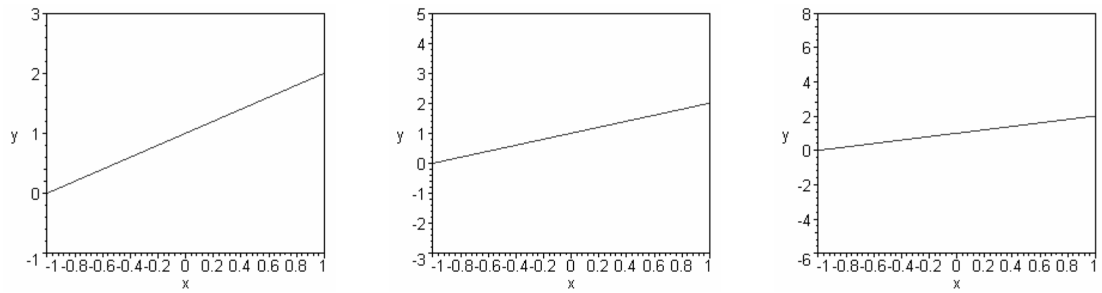


圖 4-33 繪圖視窗尺度之影響 (固定 x-range)

從以上圖形之變化情形可知：不論是「固定 y-range，逐漸縮小 x-rnage」或「固定 x-range，逐漸縮小 y-range」，皆能讓非水平直線產生「水平」之視錯覺。此一現象能說明極限在 $x = 0$ 存在且極限值為 1。

研究者用數學方法說明上述之現象，說明所使用之繪圖視窗如圖 4-34 所示。假設繪圖視窗 $[a,b]\times[c,d]$ 爲正方形視窗，且直線斜率爲 m，則繪圖視窗之視角爲 $m\cdot\dfrac{b-a}{d-c}$。因此，「固定 x-range，增加 y-range」或「固定 y-range，增加 x-range」皆會讓非水平直線產生「水平」之視錯覺。即：$\lim_{\Delta x\to 0} m\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=0$ 或 $\lim_{\Delta y\to\infty} m\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=0$，其中 $\Delta x=b-a$ 且 $\Delta y=d-c$。

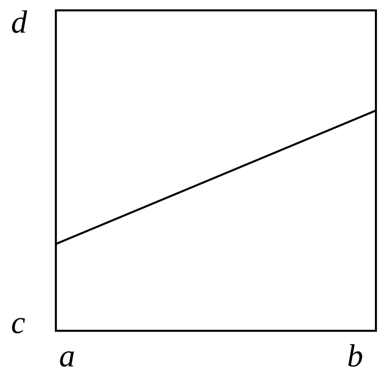


圖 4-34 繪圖視窗 $[a,b]\times[c,d]$

(四) 數值產生之問題

使用數值方法估計極限值，會因爲浮點數的有限位值產生計算誤差。研究者以 Maple 所具「調整浮點數精確度」之功能，說明數值結果產生之誤解情形。Maple 以符號計算方式算出 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$，而數值計算方式在預設精確位數 10 位下，所算出之極限值爲 0.3333333333。然而，由數值表上猜測極限時，可能會猜測極限值爲 0。

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0.1000000000 & 0.3346721 \\ 0.01000000000 & 0.33335 \\ 0.001000000000 & 0.333 \\ 0.0001000000000 & 0.3 \\ 0.00001000000000 & 0. \\ 0.1000000000\ 10^{-5} & 0. \\ 0.1000000000\ 10^{-6} & 0. \end{bmatrix}$$

圖 4-35 $y=\dfrac{\tan x-x}{x^3}$ 之數值表

然而，不同的理論值可能產生相同的浮點數值，例如：$8721\sqrt{3}$ 與 $10681\sqrt{2}$，在 8 位精確位數下之數值皆為 15105.215。當利用浮點數表示實數時，若該浮點數表示法無法表示，會進行「進位」(rounding) 的動作，進位後難免產生「捨位誤差」(rounding error)。此外，以有限的計算時間與空間近似理論精確值時，必須引入的截斷問題會造成「截斷誤差」(truncation error)。例如：Taylor 展開之嚴格定義乃一函數之無窮項的級數和，然而實際以計算機來運算時，必須終止於某一有限的項數，如此便截斷了高階對理論值的精確性。因此，利用 CAS 進行數值運算可能遭遇數值誤差，使用者對於計算結果需作審視與分析。

第伍章 研究結論與建議

對於大學生極限概念表徵結構、各表徵之表現情形及 CAS 對極限概念之影響，根據第肆章研究發現及分析討論之結果，分別於第一節提出本研究之結論，第二節提出相關研究之建議。

第一節 結論

本研究旨在探討大學生在 CAS 實驗活動的學習環境下，極限概念與表徵二者之間的相關議題。進而提供教師們極限概念教學時，使用表徵探查學習終點行爲之依據。將極限概念表徵結構、概念心像及 CAS 對學習之影響，提出以下四點結論。

(一) 極限概念表徵結構

Cornu (1992) 指出：學習者與電腦互動 (interaction) 學習時，可能涉及到程式 (programming)。在 CAS 實驗活動的學習環境下，表徵方式必涉及相關程式，因此產生數值、圖形、動畫及代數四種模式，以表示實驗活動中學生表現之行爲模式。研究發現學生以 CAS 表徵 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的概念時，各種模式之表現情形如下：

(1) 數值模式：選定某些點讓這些點愈來愈靠近 a，計算這些點的函數值。若函數值與定値 L 之距離漸漸縮小，學生猜測極限值爲 L。程式碼示例如下：

```
> f:=x->sin(x)/x;
  N:=10:
  M:=matrix(N+1,2,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='f(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/3^i:
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(f(x1)):
  od:
  eval(M);
```

(2) 圖形模式：若 limiting point 附近能找到一個明確的位置，則認爲極限存在且極限值爲該明確位置點之 y 座標；當給定 ε 後，能藉由操弄圖形選取 δ，判別命題 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 是否成立。程式碼示例如下：

```
> L:=1:
  plot(f(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

(3) 動態模式：透過多次操弄$\varepsilon-\delta$視窗，即：不斷拉近 (zoom in) 之動作，表現極限存在時「$\forall\varepsilon$皆能$\exists\delta$」之現象。試題文字具引導時學生會考慮多個ε，藉圖形模式選取δ；不具引導時學生幾乎不考慮多個ε。程式碼示例如下：

```
> L:=1:
  plot(f(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
> plot(f(x),x=-0.5..0.5,view=L-0.1..L+0.1,axes=boxed);
> plot(f(x),x=-0.1..0.1,view=L-0.01..L+0.01,axes=boxed);
```

(4) 代數模式：能推演出δ與ε關係式，並利用 CAS 解此代數方程式，但未深入了解應如何選取才能達成目的。此外，有少部分學生在使用 CAS 作代數運算能力上較弱。程式碼示例如下：

```
> with(RealDomain):
  assume(epsilon>0):
> f:=x->x^3+x+1:
  a=1: L=3:
> sols_R:={solve(f(x)=L+epsilon,x)};
  sols_L:={solve(f(x)=L-epsilon,x)};
> convert(min(abs(sols_R[1]-a),abs(sols_L[1]-a)),piecewise);
```

而以 CAS 表徵 $\lim_{x\to a} f(x)\neq L$ 之概念時，僅發現學生具有數值與圖形模式，因此之表現情形如下：

(1) 數值模式：選定某些點讓這些點愈來愈靠近 a，若觀察到從左、右側愈來愈靠近 a 之函數值趨近於不同之數值，說明極限不存在。程式碼示例如下：

```
> h:=x->1/(1-3^(1/x));
> N:=10:
  M:=matrix(N+1,4,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='h(x)': M[1,3]:='x': M[1,4]:='h(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/2^i: x2:=-1/2^i
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(h(x1)):
  M[i+1,3]:=evalf(x2):  M[i+1,4]:=evalf(h(x2)):
  od:
  eval(M);
```

(2) 圖形模式：若 $x=a$ 附近圖形撲朔迷離或錯開 (jump)，則認爲極限不存在。當給定ε後，能藉由操弄圖形選取δ，判別命題 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 是否成立，若不成立則認爲極限不存在。程式碼示例如下：

```
> L:=0:
  plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

從「圖形模式」可發現學生遇到撲朔迷離圖形，會以心智中較穩固之概念心像思考問題，進而影響非形式定義之學習。從「動態模式」可發現以動態逼近方式思索問題之學生，將目光聚焦在尋找 limiting point 附近的一個明確位置；而以非形式定義思索之學生，將目光聚焦在所操作的行動上。

Posner, Strike, Hewson & Gertzog (1982) 指出：利用各種方式 (如：口語、數字、圖畫等) 幫助學生將知識由某種形式轉變成另一種形式，可有效地產生概念的改變 (余民寧，1997)。對大一學生而言，以量詞化 (quantification) 基模完整地表示形式定義是困難的，即缺乏符號表徵與各表徵之間的連結。

(二) 概念心像對學習之影響

本研究指出：學生的極限概念受「先備知識」之影響，也就是學生易喚起既有概念心像 (concept image)；若所提供的示例無法打破非相關屬性所建立的基模，反而有機會讓學生穩固這個錯誤的基模。研究發現學生解題時，常常使用既有概念心像：「動態逼近」及「左右極限不相等則極限不存在」。例如：以動態逼近說明 L-4 之函數極限；以左右極限不相等說明 L-3 等。這些都將有礙於非形式定義及後續形式定義之學習。

研究者參考 Vinner (1991) 所使用之圖示，說明 CAS 學習環境下學生概念定義與概念心像互動情形，如圖 5-1 所示。學生以既有「動態逼近」之概念心像啓蒙，若以「直覺思維」輸出之學生，即：路徑 1→2→5→7，經常產生不自覺地迷思概念；實驗活動讓學生透過「$\varepsilon-\delta$ 視窗」建構非形式定義，將既有概念心像轉化成非形式概念定義，即：路徑 1→2→3→6→7；若學生對非形式概念定義產生心像時，將以非形式概念定義心像輸出，即：路徑 1→2→3→4→5→7；引進形式定義後，透過非形式概念定義心像產生形式定義而輸出，即：路徑 1→2→3→4→3→6→7。

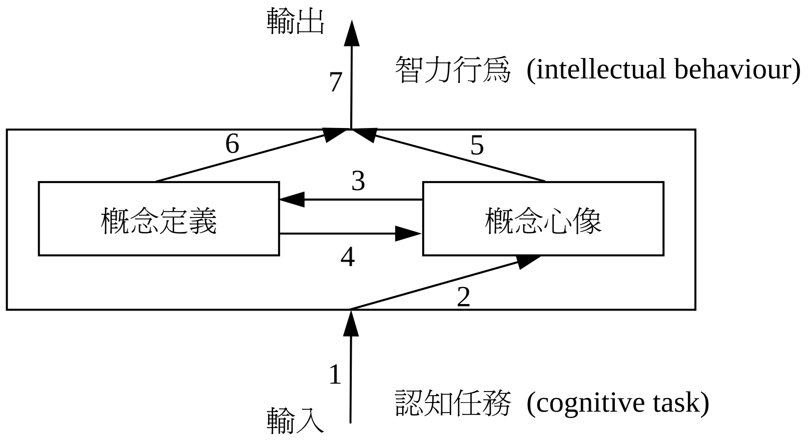


圖 5-1 概念定義與概念心像互動情形

(三) 學生極限概念之迷思

從 Monaghan (1991) 與 Cornu (1992) 研究結果可知，學生以「直覺思維」極限概念或將數學上「極限」一詞與生活上「限制」之義相混淆，產生極限無法達到及橫渡之迷思；由研究結果可知，在 CAS 實驗活動的學習環境下，學生仍具此迷思概念。此外，學生常常將所學知識或所見例題，自行擴增於其它情境中，產生錯誤之結果。例如：學生從例題 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ (L-2) 上察覺 $0\cdot\sin\frac{1}{x}=0$，並與既有知識「0 乘任何數皆爲 0」相結合，近而以此方式回答 $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}=0$ (A-2.c)。另一常見錯誤爲數學語言與邏輯錯誤之問題，例如：$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=x+2=4$，此一錯誤時常出現於紙筆測驗中。

學生在「極限法則」(limit law) 的使用上，幾乎不考慮極限之「存在性」。依據 Mayer (1985) 在數學解題錯誤類型之分類可知，此種錯誤類型屬於「遺漏的錯誤」(omission error)，即：對命題不能完整地回憶。此外，形式定義中「$0<|x-a|<\delta$」大於零部份也是學生常犯錯的地方。學生以口語表達「x 趨近於 a，x 不等於 a」，但書寫時常常寫成「$|x-a|<\delta$」，此種屬於「轉換的錯誤」(conversion error)，此類學生在語意與符號表徵轉換能力較弱；從整體樣本看來，學生普遍都缺乏以符號表徵概念之能力。

(四) 電腦代數系統對學習之影響

概念視覺化的方法幫助學生獲得更多的概念性理解，而不需要以所對應的符號表示 (symbolization) (Heid, 1988)。CAS 整合教學環境中，透過「ε−δ視窗」使學生在「給定ε，存在δ」之多次操弄上，意識到非形式定義，即：藉由 CAS 外在動態表徵 (dynamic external representation) 方式詮釋抽象數學概念，最後使用量詞化基模將非形式定義轉換爲形式定義。學生掌握數學概念的結構關係並不難，難的是符號表徵的學習。從問卷結果可知，實驗活動對「非形式定義」具較多的影響力，但學生由「非形式定義」轉換爲「形式定義」，仍需要藉助教師之幫助。由此可知，學生掌握概念的結構關係後，仍須進一步反思活動歷程才有助於抽象出「形式定義」。

由於 CAS 具有強大的數值計算及圖形生成功能，因此許多教學活動以 CAS 作爲輔助學習之工具。但 Goldenberg (1988) 研究指出：運用電腦展示圖形或模擬，對學習者從圖形上理解概念，並不一定有所幫助。針對極限概念而言，CAS 所呈現之數值及圖形結果，可能讓學生產生誤解，如：研究發現所例舉之數值問題、實驗活動試題 L-3 所呈現之圖形等。因此，學生在 CAS 實驗活動的學習環境下，必須了解如何解讀 CAS 執行後之結果，才不至於影響主要概念之學習。教師若要使用 CAS 教導極限概念，需要先熟悉 CAS 所呈現之結果，其次學生必須對函數概念有基本的了解，才能在圖形的操弄中了解極限概念，否則 CAS 只是個作數學的機器，而不是學習的工具 (Adams, 1997)。

第二節 建議

本研究使用的實驗活動教材是以學生學習爲主要考量，這樣的教材設計方式，不但有別於以往傳統以形式數學知識爲主、以專家的觀點來進行教學。在教學實驗活動中，教師是教學內容和任務的決策者，必須瞭解學生的思維模式，以及思索如何幫助學生發展預期的數學概念。

從文獻探討可知，若能夠利用「多重表徵」來表達同一個概念並在表徵之間順利的做轉換，甚至懂得如何選擇適合的表徵來協助解題，都表示擁有更穩固的概念理解 (Davis, 1984; Even, 1998; Putman, Lampert & Peterson, 1990; Lesh et al., 1987)。從活動錄影片段可知，學生會拉動捲動軸進行資料的交錯比對，即進行表徵之間連結，但仍存在著以單一表徵思索問題之學生。研究者認爲：學習者的學習態度會影響表徵之間的連結，因此將於活動中增加表徵連結相關試題，進一步探究學生表徵連結之表現情形，以提升極限概念之廣度。

Tall (1991) 指出：教師教學時常只呈現最後的結果，而沒有讓學生參與整個生產的過程。學習極限概念不應只爲了求極限値，而是了解極限程序與意涵。當學習者主動參與各種學習活動時，給予更多探索的空間活動，將使學習者的學習更加具有效果 (Duffy, Lowyck & Jonassen, 1993)。也就是 Dewey 所言「做中學」(learning by doing) 之理念。CAS 整合教學環境配合教師的引導，既可學到應有的知識，亦拓展學生多面向思維；實驗活動之學習環境真正實踐了「做中學」的精神。但使用 CAS 時需教導學生如何解讀 CAS 技術限制下之結果，亦不可迴避圖形產生之詭異處，應當適時地讓學生思考這些類似的現象，也必須注意到學生使用之態度。

針對極限概念而言，強化「量詞」與操作行動密切的結合，有助於使用「量詞化」基模完整地表示形式定義。因此，在活動設計上必須考慮「量詞」問題，才能確保學生將操作行動內化爲正確的過程。此外，教學時須提供反思抽象化的情境，幫助學生連結非形式定義與形式定義。有鑒於此，將進一步思考如何設計「量詞」融入極限概念之實驗活動，進而幫助學生學習形式概念。

參考文獻

中文部分：

Davis (1984/1990) 劉秋木(譯)。數學學習。台北：五南圖書公司。

Margaret E.Gredler (1986/1994). Learning and Instruction: Theory into Practice. 吳幸宜(譯)。學習理論與教學應用。台北：心理出版社。

Mayer R. E. (1987/1997). Educational Psychology. 林清山(譯)。教育心理學—認知取向。台北：遠流出版社。

Skemp, Richard R. (1987/1995). The Psychology of Learning Mathematics. 陳澤民(譯)。數學學習心理學。台北市：九章出版社。

左台益、蔡志仁 (2001). 動態視窗之橢圓教學實驗。師大學報，第 46 卷 2 期，21-42。

白啓光 (2005). 使用 CAS 之微積分實驗教學之成效研究。國科會專題研究計畫報告。NSC93-2521-S-009-002。

余文卿、吳志揚、翁錫伍、李善文、丁村成 (2001). 高級中學數學甲(下)。台北：龍騰文化。

余民寧 (1997). 有意義的學習—概念構圖的研究。台北：商鼎文化出版。

沈中偉 (2004). 科技與學習：理論與實務。台北：心理出版社。

張春興 (1996). 教育心理學—三化取向的理論與實踐。台北：東華書局。

張春興 (2006). 張氏心理學辭典。台北：東華書局。

郭禮賢 (1999). 資訊科技在下一世紀中學數學教育所扮演的角色及其潛在危機。香港數學教育學會，第 9 期。

黃家鳴 (1997). 淺談數學概念表象在數學教學上的一些問題(上)。香港數學教育學會，第 5 期。

楊維哲 (1994). 對微積分教學的一些小建議。數學傳播季刊。第 18 卷第 3 期。

劉秋木 (1996). 國小數學科課程研究。台北：五南圖書公司。

蔣治邦 (1994). 由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說 (低年級)，60-76。台北：台灣省國民教師研習會。

謝哲仁 (2003). 動態微積分基本概念之電腦教學設計。美和技術學院學報，第 22 卷 1 期，233-253。

謝哲仁 (2003). 無窮等比級數概念與運算錯誤類型之研究。美和技術學院學報，第 22 卷 1 期，255-281。

羅素真 (1996). 問題表徵與問題解決。國立屏東師院學報，第 9 期，149-176。

英文部分：

Adams, T. L. (1997). Addressing Students' Difficulties with the Concept of Function: Applying Graphing Calculators and a Model of Conceptual Change. *Focus on learning problems in mathematics*, 19(2), 43-57.

Behr, M., Lesh, R. & Post, T. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claude Janvier (ed.): Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. 33-40.

Carpenter, T. & Hiebert, J. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: Grouws, D. A. (ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 65-97.

Cornu, B. (1992). Limit. In: Tall, D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 153-166.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme, *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 167-192.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 25-41.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for research in Mathematics education*, 13, 360-380.

Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1991). Constructing Calculus Concepts: Cooperation in a Computer Laboratory. In L. C. Leinbach (ed.): *The laboratory approach to teaching calculus*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 47-70.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 95-123.

Duffy, T. M., Lowyck, J., & Jonassen, D. H. (1993). Designing Environment for Constructive Learning. Heidelberg: Springer-Verlag.

Even, R. (1990). Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(2), 135-173.

Gray, E. & Tall, D. (1993). Success and Failure in Arithmetic and Algebra, *New Directions in Algebra Education*, Queensland University of Technology , Brisbane, 232-245.

Heid, M. K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 3-25.

Janvier C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claude Janvier (ed.): Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. 67-71.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claude Janvier (ed.): Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. 19-26.

Li, L. & Tall, D. (1993). Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming, *Proceedings of PME 17*, Japan, 2, 41-48.

Mayer, R. & Sims, V. (1994). For Whom is a Picture Worth a Thousand Words? Extensions of a Dual-coding Theory of Multimedia Learning. *Journal of Educational Psychology*, 86(3), 389-401.

Mayer, R. E. (1985). Implications of Cognitive of Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives*. In A. Silver (ed.), Hallsadale, N.J: Lawrence Erbaun Associates.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limit, *For the Learning of Mathematics*, 11(3).

Monaghan, J., Sun, S. & Tall, D. (1994). Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System, *Proceedings of PME 18*, Lisbon, III, 279-286.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft, Standards 2000.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Integration, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Pierce, R. & Stacey, K. (2001). Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 28-46.

Rochowicz, JR J.A. (1996). The Impact of Using Computers and Calculators on Calculus Instruction: Various Perceptions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 15(4), 423-435.

Stewart, J. (2003) Calculus: Early Transcendentals. Pacific Grove: Brooks

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 258-276.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12 151-169.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170-176.

Tall, D. (1986). Using the Computer to Represnnt Calculus Concepts. Plenary lecture, Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orléans, *Recueil des Textes et Comptes Rendus,* 238-264.

Tall, D. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, In Grouws D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495-511.

Vergnaud, G. (1987). Colclusion. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claude Janvier (ed.): Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. P227-232.

Vinner, S. (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, In: Tall, D. O. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 65-81.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.

附錄一、電腦實驗活動

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$.

L-1.a Execute the following commands to define the function $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ and to create a table that gives the numerical values of $f(x)$ for $x=\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots,10$ and for $x=-\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots,10$.

```
> f:=x->sin(x)/x;
> N:=10:
  M:=matrix(N+1,4,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='f(x)': M[1,3]:='x': M[1,4]:='f(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/2^i:  x2:=-1/2^i:
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(f(x1)):
  M[i+1,3]:=evalf(x2):  M[i+1,4]:=evalf(f(x2)):
  od:
  eval(M);
```

L-1.b Notice that the column that gives the values of $f(x)$ for $x=\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots,10$ is identical with the column that gives the values of $f(x)$ for $x=-\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,\ldots,10$. Can you explain why ?

L-1.c On the basis of the data in (a), do you think $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

Fill in the limit you get above to get a graph of $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

```
> L:=???:
> plot(f(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

L-1.d According to the graph above, can you determine how close to 0 (from either side of 0) x has to be to ensure that $\dfrac{\sin(x)}{x}$ ($x\neq 0$) is close to the limit you get in (c) within 0.5. (Note that f is not defined at $x=0$.) If so, find a distance that measures the closeness of *x* to 0 and confirm your answer by modifying the graph above with a new horizontal range (*x*-range).

L-1.e By zooming in the graph of $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ on the limit point, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does *x* have to be to ensure that $\dfrac{\sin(x)}{x}$ $(x\neq 0)$ is close to the limit you get in (c) within 0.1 ? If so, find a distance that measures the closeness of *x* to 0 and confirm your answer by a graph above with proper horizontal range (*x*-range).

```
> plot(f(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxed);
```

L-1.f By zooming in the graph of $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ on the limit point, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does *x* have to be to ensure that $\dfrac{\sin(x)}{x}$ $(x\neq 0)$ is close to the limit you get in (c) within 0.01 ? If so, find a distance that measures the closeness of *x* to 0 and confirm your answer by a graph above with proper horizontal range (*x*-range).

```
> plot(f(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxed);
```

L-1.g Do the graphical experiments in (d), (e) and (f) confirm your answer in (c) ? Give a reason to your answer.

2. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

L-2.a Execute the following commands to define the function $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ and to create a table that gives the numerical values of $g(x)$ for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1,2,...,15$.

```
> g:=x->x*sin(1/x);
  N:=15:
  M:=matrix(N+1,2,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='g(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/2^i:
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(g(x1)):
  od:
  eval(M);
```

L-2.b On the basis of the data in (a), do you think $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ exists ? If so, guess the limit. Give a reason to your answer.

Fill in the limit you get above to get a graph of $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

```
> L:=???:
  plot(g(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

L-2.c According to the graph above, can you determine how close to 0 (from either side of 0) x has to be to ensure that $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.5 . (Note that g is not defined at $x = 0$.) If so, find a distance that measures the closeness of x to 0 and confirm your answer by modifying the graph above with a new horizontal range (x-range).

L-2.d By zooming in the graph of $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on the limit point, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does x have to be to ensure that $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.1 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0 and confirm your answer by a graph above with proper horizontal range (x-range).

```
> plot(g(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxed);
```

L-2.e By zooming in the graph of $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on the limit point further, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does x have to be to ensure that $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$ is close to the limit you get in (b) within 0.01 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0 and confirm your answer by a graph above with proper horizontal range (x-range).

```
> plot(g(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxed);
```

L-2.f Do the graphical experiments in (c), (d) and (e) confirm your answer in (b) ? Give reasons to your answer.

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

L-3.a Execute the following commands to define the function $h(x)=\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ to create a table that gives the numerical values of $h(x)$ for $x=\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,3,\ldots,10$.

```
> h:=x->1/(1-3^(1/x));
> N:=10:
  M:=matrix(N+1,2,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='h(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/2^i:
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(h(x1)):
  od:
  eval(M);
```

L-3.b On the basis of the data in (a), do you think $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

Fill in the limit you get above to get another graph of $h(x)=\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

```
> L:=???:
> plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

L-3.c According to the graph above, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does x have to be to ensures that $\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ ($x\neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.5. (Note that h is not defined at $x=0$.) Does your answer support your answer in (b) ? Why ?

L-3.d Create another table that gives the numerical values of $h(x)$ for $x=-\dfrac{1}{2^n}$, $n=1,2,3,\ldots,10$.

L-3.e On the basis of the data in (d) , do you think $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

Fill in the limit you get above to get another graph of $h(x)=\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

```
> L:=???:
  plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

L-3.f According to the graph above, can you determining how close to 0 (from either side of 0) does x have to be to ensures that $\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ ($x\neq 0$) is close to the limit you get in (e) within 0.5. (Note that g is not defined at $x=0$.) Does your answer support your answer in (e) ? Why ?

L-3.g With all the investigation above, what can you conclude about the existence of $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$? Why ?

4. $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

L-4.a Define the function $k(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ and create a table that gives the numerical values of $k(x)$ for $x=\frac{1}{2^n}$, $n=1,2,3,\ldots,10$ and for $x=-\frac{1}{2^n}$, $n=1,2,3,\ldots,10$.

L-4.b On the basis of the data in (a), do you think $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ exists ? Give reasons to your answers.

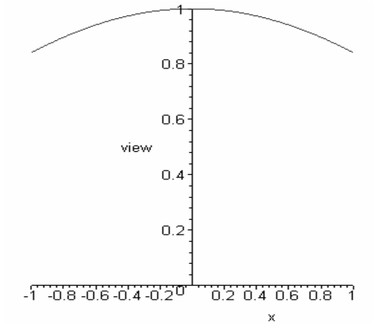
Here is a graph of $k(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

```
> plot(sin(Pi/x),x=-1..1,view=-1..1,axes=boxed);
```

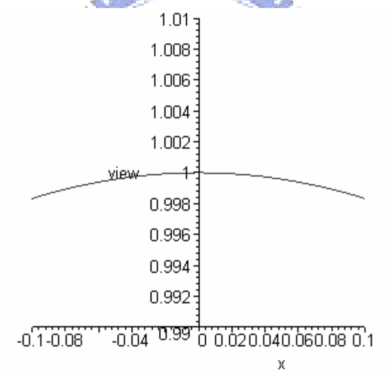
L-4.c By zooming in the graph above properly if necessary, can you confirm your answer in (b) ? If so, explain why ? If not, do more calculations and plot more graphs to investigate $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ until you can confirm your answer.

附錄二、成效評量試題

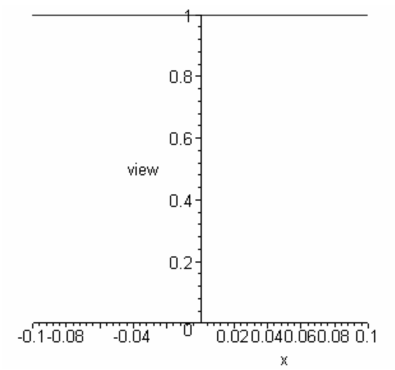
P-1.a Here is a Maple plot of $y=\dfrac{\sin x}{x}$ with viewing rectangle $[-1,1]\times[0,1]$. Does the graph of $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ actually passing through the point $(0,1)$? Explain briefly.



P-1.b The Maple plot of $y=\dfrac{\sin x}{x}$ with viewing rectangle $[-0.1,0.1]\times[0.99,1.01]$ is shown below. What can you say from the graph ?

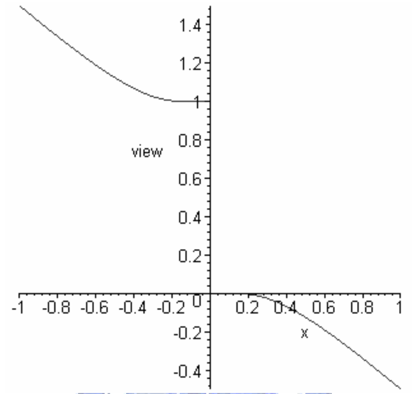


P-1.c The Maple plot of $y=\dfrac{\sin x}{x}$ with viewing rectangle $[-0.1,0.1]\times[0,1]$, is shown below. Explain why the graph looks so much like a straight line and what does this say about $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Give a reason to your answer.



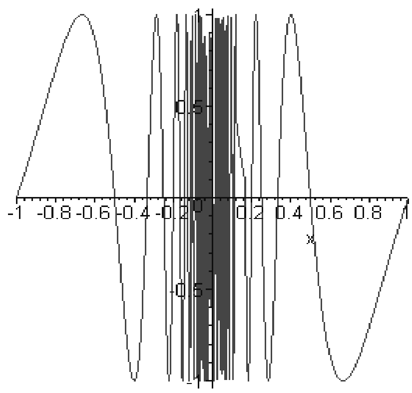
P-2.a Do you think the statement "If $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists, then we can find a distance d so that $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}$ whenever $0<|x|<d$ and $0<|y|<d$" is true? Give a reason to your answer.

P-2.b Here is a Maple plot of $y=\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$. Based on the graph and your answer to (a), do you think $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ exists? Give a reason to your answe



Here are values of $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ for $x=\frac{1}{2^n}$ where $n=1,2,\ldots,10$ and the graph of $f(x)$ for $x\in[-1,1]$.

x	g(x)
0.5000000000	0.
0.2500000000	0.
0.1250000000	0.
0.06250000000	0.
0.03125000000	0.
0.01562500000	0.
0.007812500000	0.
0.003906250000	0.
0.001953125000	0.
0.0009765625000	0.



P-3.a Does the table contradict to the graph ? Give a reason to your answer.

P-3.b What can you say about the behavior of $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

P-3.c What can you say about $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Give a reason to your answer.

附錄三、成就測驗試題

Determining where each of the following statement is true. If it is true, give a brief explanation. If not, give a counterexample.

A-1.a If $\lim_{x\to a} f(x)$ exists, $\lim_{x\to a} g(x)$ does not exist, then $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ does not exist.

A-1.d If $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, then there exists $M>0$ such that if $x>M$ then $f(x)>0$.

Evaluate the following limits.

A-2.a $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

A-2.b $\lim_{u\to\infty}(\sqrt{u^2+u}-u)$

A-2.c $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}$

A-7.a For showing that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$, find the largest possible δ that works for any given $\varepsilon>0$.

A-7.b Given $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, find the largest possible δ for showing that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$.

附錄四、期中考試題

M-I5

In using the $\varepsilon-\delta$ definition to prove that $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$, when ε is 1, what is the largest value that δ can be ? (A) $\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $\sqrt{3}$ (D) 1 (E) 3

M-I6

Let $f(x)=\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$. Which of the following statement **CAN** show $\lim_{x\to 0} f(x)\neq 1$?

(A) Given $\varepsilon>0$, choose $\delta=\dfrac{1}{2}$. Then $0<|x|<\delta$ implies $f(x)\neq 1$.

(B) Given $\varepsilon>0$, choose $\delta=\dfrac{1}{2}$. Then $0<|x|<\delta$ implies $|f(x)-1|\geq\varepsilon$.

(C) Let $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$. Given $\delta>0$, choose $x=\dfrac{\delta}{2}$, then $0<|x|<\delta$ implies $|f(x)-1|\geq\varepsilon$.

(D) Let $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ and $\delta=1$. Then $0<|x|<\delta$ implies $f(x)\neq 1$.

(E) Let $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ and $\delta=1$. Choose $x=\dfrac{1}{2}$, then $0<|x|<\delta$ implies $|f(x)-1|\geq\varepsilon$.

Determining where each of the following statement is true. Given reasons for your answers.

M-II2.b If $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, then $f(x)>1$ for x large enough.

M-II2.d If $\lim_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)=4$ and $\lim_{x\to 2}\left(f(x)-g(x)\right)=2$, then $\lim_{x\to 2}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=3$.

附錄五、問卷 (極限部分)

1. 給一個函數 f ，你是從哪方面來猜測它的極限值 $\lim_{x \to a} f(x)$ ？

□ 只由數值資料。

例如：在 worksheet 裡「Given a function f, the value of $f(x)$ when $x = \frac{1}{2^n}$ and $x = -\frac{1}{2^n}$, where $n \in \mathrm{N}$.」所做的數值資料。

□ 只由函數圖形。

□ 數值和圖形做比對。

□ 其它。____

2. 在這個活動中，對於「給定一個誤差，決定 x ，使得你所猜測的極限值與函數值的差小於所給的誤差」這個問題，你了解"*plot*"指令中"*view*"這個 option 所代表的意義嗎？

□ 否

□ 是，請說明____

3. 在這個活動中，給定一個誤差，你是否能決定 x ，使得你所猜測的極限值與函數值的差小於所給的誤差？

□ 否

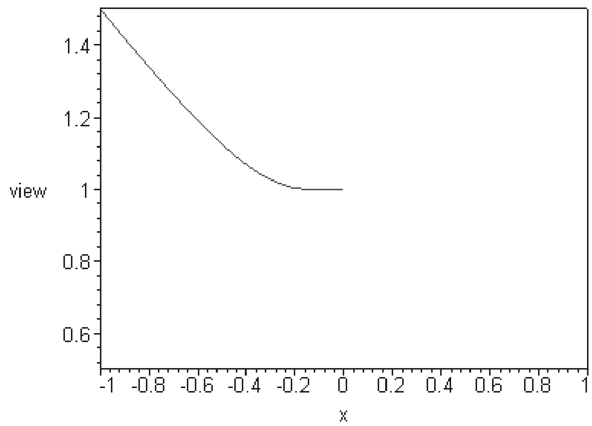
□ 是，你會如何決定 x ？

□ 觀察圖形，亂槍打鳥式地去試。

□ 先限定"*plot*"指令中"*view*"的範圍，從圖形中觀察，並適時地調整"*plot*"中 x 的範圍。

□ 其它。____

4. 若你猜測 $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$，而圖形顯示



這告訴你

□ $\lim_{x \to 0} f(x)$ 不存在　　□ $\lim_{x \to 0} f(x) \neq 1$　　□ Maple 把圖形畫錯了

□ 其它。____

請說明原因____

5. 這個活動中，重覆了許多次「給一個誤差，決定 x，使得所猜測的極限值與函數值的差小於所給的誤差」，這樣的動作是否有助於你了解 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的<u>非形式</u>定義：「$f(x)$ 要有多靠近就可以多靠近 L，當我們適當地選取 x (從 a 的兩邊，但不等於 a) 夠靠近 a」？

□ 否　　□ 一點點　　□ 是

6. 這個活動中，重覆了許多次「給一個誤差，決定 x，使得所猜測的極限值與函數值的差小於所給的誤差」，這樣的動作對於你了解「極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義」中 ε 和 δ 所代表的意義有幫助嗎？

□ 沒有

□ 一點點

□ 有，請寫出你了解的 ε 和 δ 所代表的意義____________________

7. 這個活動中，「給一個誤差，決定 x ，使得所猜測的極限值與函數值的差小於所給的誤差」，這樣的動作對於你了解「極限的 $\varepsilon-\delta$ 定義」有幫助嗎？

□ 有很大的幫助。

□ 有，但幫助不大。不過在活動之後，經老師的講解才使我更了解。

□ 有，但幫助不大。即使在活動之後，老師的講解也是無法幫助我了解。

□ 沒有幫助，但老師課後的講解對我比較有幫助。

□ 完全沒有幫助。

8. 現在你能寫出 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定義嗎？

□ 不能

□ 能，請寫出來____

附錄六、活動錄影片段

V_2-34:36~V_2-35:15

時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
34:36	C：你看的懂題目嗎？	
34:38	B：太概看的懂。	
34:39	C：好...解釋給我聽。	
34:41	B：等一下，就是說...爲什麼它這邊輸入的值和這邊輸入的值只差一個負號，但是出來的值都是一樣的。	
34:52	C：嗯。	
34:53	B：就是這樣子...嗯。	
	C：它說....爲什麼左邊跟右邊...就是就是....然後輸出來的值是一模一樣的要解釋....你知道怎麼解釋嗎？	
34:15	B：看起來都是一樣的。	

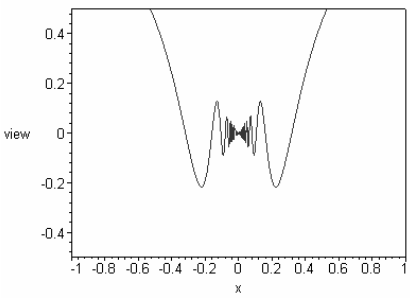
V_{21}-62:06~V_2-64:40

<table>
<tr><th>時間</th><th>學生對話與註記</th><th>電腦視窗與操作</th></tr>
<tr><td>62:06</td><td>A：這樣可以看出它存在嗎？
📖 指函數數值表。

A：如果它不一個對稱的圖形，像剛剛那個是一個對稱的圖形。
📖 指 L-1 函數圖形。

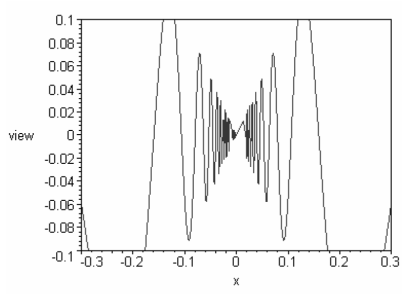
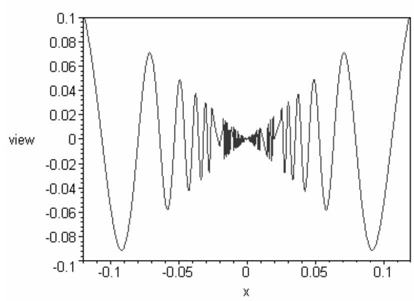
A：兩邊都會一直趨近於 1 啊，你光一邊趨近於 1，你不能確定另外一邊也趨近於 1 啊。

A：它不一定會趨近於 0，你可以確定這邊趨近於 0，可是你不能肯定這邊趨近於 0 啊。
B：它只有一邊那我們先看一邊。</td><td><table>
<tr><th>x</th><th>g(x)</th></tr>
<tr><td>0.5000000000</td><td>0.4546487134</td></tr>
<tr><td>0.2500000000</td><td>-0.1892006238</td></tr>
<tr><td>0.1250000000</td><td>0.1236697808</td></tr>
<tr><td>0.06250000000</td><td>-0.01799395729</td></tr>
<tr><td>0.03125000000</td><td>0.01723208379</td></tr>
<tr><td>0.01562500000</td><td>0.01437540685</td></tr>
<tr><td>0.007812500000</td><td>0.005633107113</td></tr>
<tr><td>0.003906250000</td><td>-0.003903156383</td></tr>
<tr><td>0.001953125000</td><td>0.0001553095586</td></tr>
<tr><td>0.0009765625000</td><td>-0.0001548177539</td></tr>
<tr><td>0.0004882812500</td><td>-0.0001528598695</td></tr>
<tr><td>0.0002441406250</td><td>-0.0001451762665</td></tr>
<tr><td>0.0001220703125</td><td>-0.0001167203556</td></tr>
<tr><td>0.00006103515625</td><td>-0.00003417593174</td></tr>
<tr><td>0.00003051757812</td><td>0.00002831592814</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>63:16</td><td>A：這個東西越來越小，所以它正負號沒有關係。</td><td></td></tr>
<tr><td>63:20</td><td>B：它這樣動，然後 L 在這...0.5 上下。</td><td></td></tr>
<tr><td>63:29</td><td>A：你可以畫它圖形出來。
B：它圖形上上下下...正正負負，我們要先猜出它的極限值，然後...。</td><td></td></tr>
<tr><td>63:44</td><td>A：可是不管它的正負，你看它是不是會越來越小越來越小，就是它越來越接近 0 啊。</td><td></td></tr>
<tr><td>63:46</td><td>B：嗯，對啊。
A：就是它會一直這樣跳，然後越來越小，好存在。</td><td></td></tr>
</table>

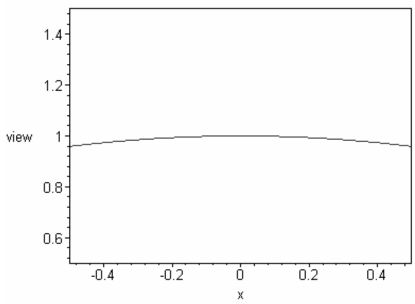
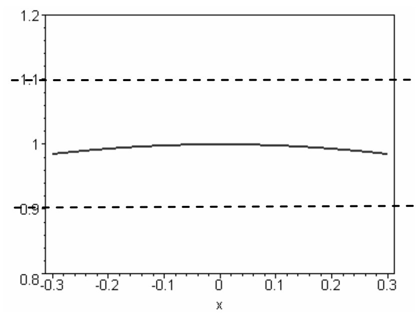
	陰影區域爲修改區域。	`> L:=0:`
		`plot(g(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);`
		Run the above commands
		

63:56	A：呵，超漂亮。	
63:59	A：哦，它這個圖是這樣子的耶。	
64:02	B：對啊，就是這樣子一直動。	
64:06	A：所以它也是一個對稱的圖形啊。 B：所以我麼畫出來...，可是這裡只有一半的數值，只有假設 x 等於正的那邊。 A：對啊對啊。	
64:31	A：所以我們畫的是右邊。	
64:40	A：好，存在。	

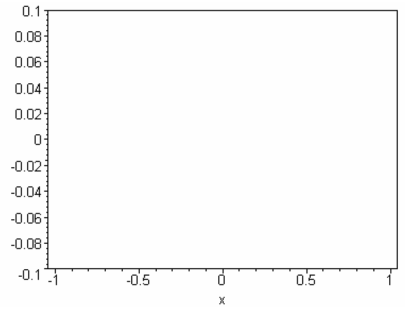
V$_{11}$-111:08~V$_{11}$-111:45

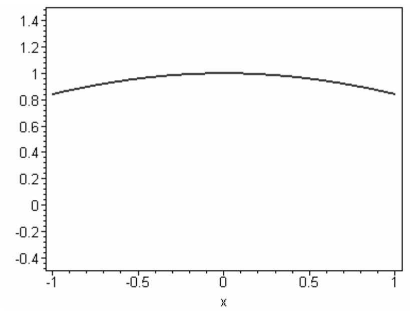
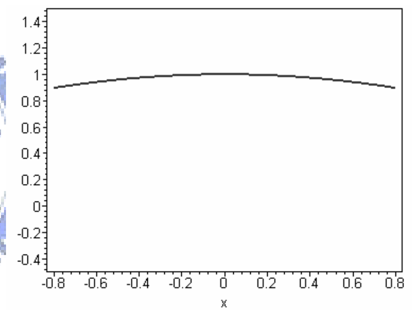
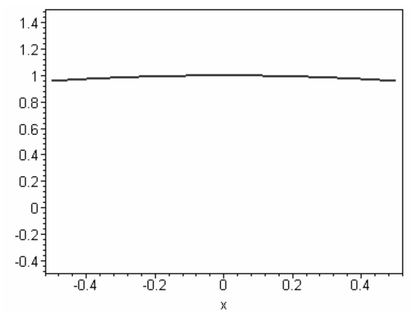
時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
111:00	B：0.1 看一下...正負 0.3。 🕮 陰影區域為修改區域。	> L:=0: plot(g(x),x=-0.3..0.3,view= L-0.1..L+0.1,axes=boxed);
111:08		*Run the above commands.* 
111:12	B：0.3 不行啊，有地方跑掉了，這裡也跑掉了。	
111:22	B：這一格是多少？	
111:25	A：0.02。	
	A：取 0.12 好了。	
111:35	🕮 陰影區域為修改區域。	> L:=0: plot(g(x),x=-0.12..0.12,view= L-0.1..L+0.1,axes=boxed);
111:39		*Run the above commands.* 
111:45	A：這樣對了。	

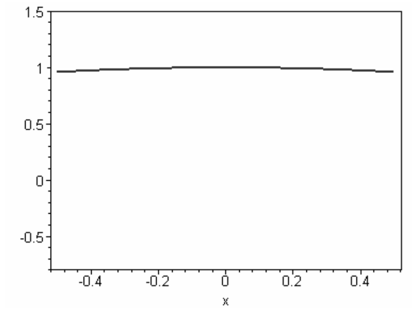
V$_{21}$-54:14~V$_{21}$-55:24

時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
54:14	B：它要比 0.1 還小。	
54:23	A：我們這裡就已經比 0.1 還要小了啊，上面這個圖就比 0.1 還要小了啊。 📖 L-1.d 圖形。	
54:33	B：對呀，我以我們只要比上面小就可以。	
54:35	📖 陰影區域爲修改區域。	> **plot(f(x),x=-0.3..0.3, thickness=2,view=???..???, axes=boxed);**
54:41	A：從−0.3 到 0.3。	
54:47	A：view，那我們可以改 view 啊，把 view 改短一點然後就可以比較...。	
54:55	B：清楚。 A：對啊對啊。	
55:04	B：0.8。 A：到 1.2。 📖 陰影區域爲修改區域。	> **plot(f(x),x=-0.3..0.3, thickness=2,view=0.8..1.2, axes=boxed);**
55:08		*Run the above commands.* 
55:18	A：0.1 是這一段，所以它有比 0.1 小。 📖 虛線區域內。	
55:24	A：這樣就可以了。	

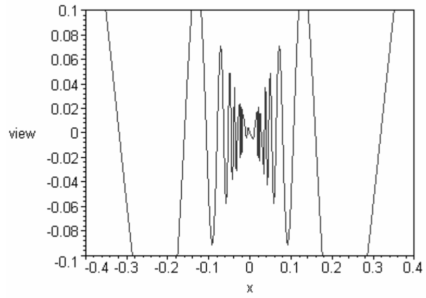
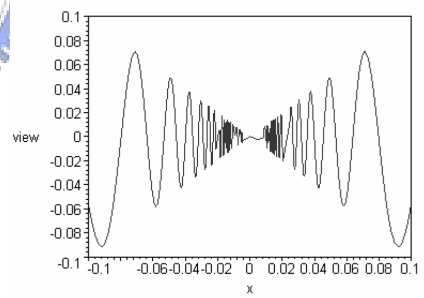
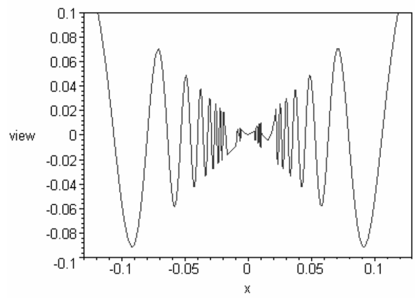
V$_9$-31:49~V$_2$-34:41

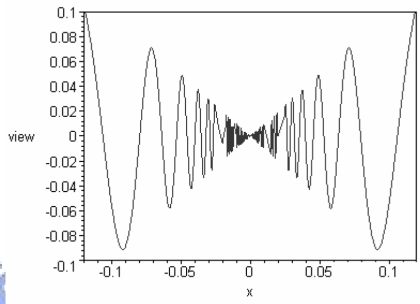
時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
31:49	A：我先寫 0.多少...，先從 1 開始好了。	
	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(f(x),x=1..???,thickness=2 ,view=???..???,axes=boxed);`
31:54	B：−1 到 1 吧，這不是要對稱。	
	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(f(x),x=-1..1,thickness=2, view=???..???,axes=boxed);`
32:12	B：哦...這個就...。	
32:16	A：0.1 啊，因爲我們是要讓它們的數值在 0.1 之間。	
	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(f(x),x=-1..1,thickness=2, view=-0.1..0.1,axes=boxed);`
32:27	A：O.K.了。	
32:30		*Run the above commands.* 
32:34	A：沒東西。	
32:36	B：所以這邊要改。	
	🕮 指修改 *x* 範圍。	
32:37	A：啊我搞錯了，是這邊要改...這邊要改。	
	🕮 指修改 view 範圍。	
32:40	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(f(x),x=-1..1,thickness=2, view=-1..1.5,axes=boxed);`
33:02	B：−1 到 1.5 對稱嗎？它沒有對稱。	
33:07	A：不然就 0.5 嘛。	
	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(f(x),x=-1..1,thickness=2, view=-0.5..1.5,axes=boxed);` *Run the above commands.*

		
33:14	A：0.5 應該是會對稱啊，–0.5 到 1.5 上下以 1 為中間啊。	
33:34	B：上面是不是太大了，算了算了沒關係啦。	
33:43	A：要...要找到 0.1 的話應該是...。	`> plot(f(x),x=-0.8..0.8, thickness=2,view=-0.5..1.5, axes=boxed);`
33:44	陰影區域為修改區域。	
33:51		*Run the above commands.* 
33:53	A：這樣就小於 0.1 啦，就是 x 趨近...，跟你這個值小於 0.1。	
34:01	B：嗯。	
34:02	A：如果再繼續做的話...。 陰影區域為修改區域。	`> plot(f(x),x=-0.5..0.5, thickness=2,view=-0.5..1.5, axes=boxed);` *Run the above commands.* 
34:13	A：幾乎都變一條線了啊。	
34:15	B：嗯嗯。	

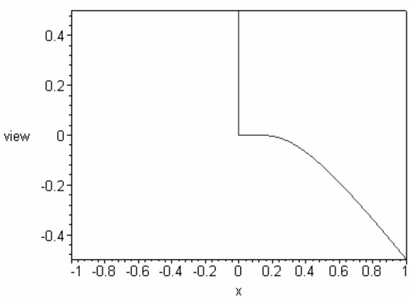
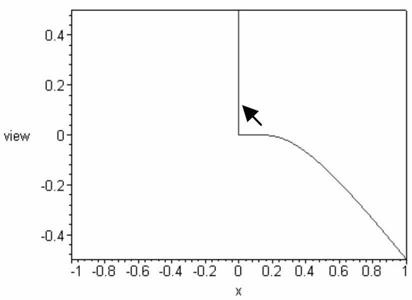
34:23	B：view 要不要條一下這樣好像太空了，算了啦沒關係。 陰影區域為修改區域。	> `plot(f(x),x=-0.5..0.5, thickness=2,view=-0.8..1.5, axes=boxed);` *Run the above commands.* 
34:36	B：這樣比較好看。	
34:37	A：會嗎？	
34:40	A：這樣就變幾乎都是 1 了。	
34:41	B：對啊，幾乎都是 1 了。就是都在 1 的範圍裡面。	

V$_2$-94:30~V$_2$-96:20

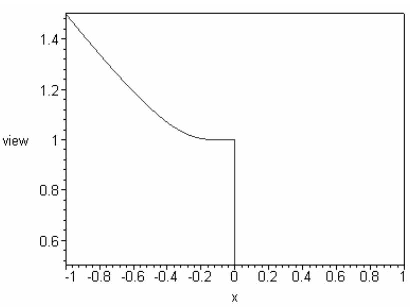
時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
	(d)	
94:30	B：下一題...在 0.1 到−0.1 之間。	
94:37	B：0.1...−0.1。	
94:41	🕮 陰影區域爲修改區域。	`> plot(g(x),x=-0.4..0.4,view=`
94:50	B：這隨便...剛剛 0.5，這 0.4 好了。	`-0.1..0.1,axes=boxed);`
95:00		*Run the above commands.* 
95:01	A：小一點小一點...0.1。	`> plot(g(x),x=-0.1..0.1,view=`
95:08	🕮 陰影區域爲修改區域。	`-0.1..0.1,axes=boxed);`
		Run the above commands. 
95:12	A：還要再小嗎？	
	B：再大。	
95:15	A：0.15。	
95:24	B：這樣頂到上面，太大了。	
95:27	A：0.9。	
95:28	B：不是啊，一定要比 0.1 大好不好。	
95:35	A：要剛好嗎？	`> plot(g(x),x=-0.13..0.13,view=`
	🕮 陰影區域爲修改區域。	`-0.1..0.1,axes=boxed);`
	A：那再大一點。	*Run the above commands.*
	B：就在這範圍裡面沒有超過就好了。	
	A：喔。	

95:38	B：這有超過啊。	
	A：還是先把它弄 0.2，弄大一點來看。	
95:40	B：就在這範圍裡面沒有超過就好了。	
95:41	A：喔。	
95:52	B：這有超過啊。	
95:54	A：還是先把它弄 0.2，弄大一點來看。	
	🕮 陰影區域為修改區域。	`> plot(g(x),x=-0.12..0.12,view=-0.1..0.1,axes=boxed);` *Run the above commands.* 
96:06	B：這樣就可以了...用 0.12。	
96:20		*Type the following words.* 當縮到 x 的範圍為-0.12 到 0.12 時，極限的範圍在 0.1 之內。

V$_{21}$-73:40~V$_{21}$-77:51

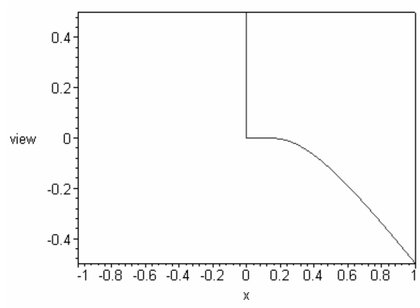
時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
72:30	A：*x* 趨近於 0 的時候...。	
72:45	A：這個表來看，它越來越小...越接近 0。	
72:47	B：越來越大，因爲它是負的。	
72:49	A：喔，對越來越大。	
73:06	A：下面的圖形畫出來是這樣子的耶。	
73:13	B：這是什麼？這是什麼？	
73:14	A：因爲我們是從正的地方趨近啊，所以圖是這個。	
73:26	B：嗯嗯，*x* 是正的...，從 0.5 開始，好奇怪喔。	
73:42	A：我們是從 *x* 很大，這樣慢慢上來的，然後它會越來越接近 0，所以是這樣上來的。	
73:58	A：這樣它...會沒有極限。	
74:02	B：有吧，這樣還是有吧。可是它...越來越接近 0 然候它是負的...，爲什麼到這邊它就跳上去了。 🕮 滑鼠游標移至箭頭處。	
74:22	B：對啊，爲什麼它圖形是這樣子。	
74:24	B：這邊如果是負的話，等一下看一下。	
74:58	B：它怎麼會跳上去。	
75:08	A：*x* 不能是負的嗎？	
75:14	B：負的話它就越來越大，不是...是越來越小啦。	

75:26	A：可是如果你這樣的話，它的圖要這樣子一直上去啊。 B：這個前面加個負號，這就是 3 的-2^{n}次方，所以越來越靠近 0，那它就會越接近 1。 📖 指函數值越來越靠近 1。	
76:22	A：對啊會接近 1 啊，那剛剛的那個爲什麼會接近 0。	

76:41	B：改一下 L 好了。
	📖 陰影區域爲修改區域。
		`> L:=1:`
		`plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);`
		Run the above commands.
		

76:45	B：怎麼會這樣，啊它是這樣子...，上去然後下來，所以它沒有極限。	
77:08	B：它這邊是這樣子一直往上衝。 A：我現在知道的是它趨近 0 的時候，就是會靠近 0...。	
77:20	A：我知道他爲什麼沒有極限了，因爲這條線...，它在 0 的時候這條線對到的 *y* 沒有固定的值，就是有這一段所以不知道它極限是哪一個，可以這樣講嗎？ B：嗯。	
77:43	A：可是你回答這一題的時候不用看這圖。	
77:51	B：不然就畫二個圖，要不然就是 view 放大一點，先回答好了。	

V_2-99:56~V_2-101:12

時間	學生對話與註記	電腦視窗與操作
	(b)	
99:56		> **L:=0:** **plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);**
99:57		*Run the above commands.* 
99:58	B：等一下啦...這什麼東西啊。	
100:07	A：等一下，再去看一下那個表格。	
100:16	B：這越來越趨近於 0 對阿。	
100:18	A：它是全部都是正數。	
100:20	A：由正數那邊趨近過來，假如不討論負數的話。	
100:40	B：它帶二分之一那個東西，然後這個就越來越趨近於 0。	
101:12		*Type the following words.* 我認爲極限是存在的。從表格上看來，當 x 由正愈趨近於 0，所得出來的 f(x)愈趨近於 0。所以極限值應該是 0。