

第一章 緒論

第一節 研究背景

函數概念是一個很重要的概念，是大學代數與微積分先修課程(Precalculus)的核心課程 (Engelke, Oehrtman, & Carlson, 2005)。楊維哲與蔡聰明等(民88)認為：「函數是數學裡最重要的概念」。函數概念在全世界的中學與大學數學課程中是一個核心的概念(DeMarois,1998)。

美國數學教師協會 NCTM 出版的「學校數學的準則與標準」(Principles and Standards for School Mathematics,2000)建議，教師應該幫助學生去找尋規律，從幼至年至中學期間，學生應能發展一系列對函數的認識，中學時的學生應該擴大對函數的瞭解，學習各類型函數的特徵。

過去的研究顯示，即使學生完成函數相關的課程內容，對函數概念仍然是很薄弱的(Engelke & et al., 2005; Carlson,1998; Dubinsky & Harel,1992; Monk,1992; NCTM,2000; Sfard,1992; Vinner & Dreyfus, 1989)。影響函數概念學習的因素之一是因為函數具有多重表徵(representation)，使得學生學習上感到困難。

李虎雄等人(民 81)描述函數以不同面貌出現在算數、代數、幾何和機率等相關數學主題中。Tall、McGowen 與 DeMarois(2000)指出函數概念多種表徵與呈現方式，使其概念顯得複雜而不易掌握。Ayers、Davis、Dubinsky 與 Lewin (1988)談到函數以不同型式呈現在數學、物理、電腦科學等領域裡中，但大部分學生對函數的瞭解，多侷限性地將它視為一種代數公式(formula)。

Yerushalmy 和 Schwartz (1993) 指出函數是代數的基本物件，這概念在一開始應該從不同表徵來教授與學習。由多重表徵理論觀點，學生在對同一概念的不同表徵之間進行轉換，常常於教學過程被忽略，是影響學生成功學習的重要關鍵因素(左台益與蔡志仁，民 90a)。因此在教學上多注意函數各種表徵之間的連結，協助學生對函數概念加以一般化(generalize)。

國內許多高中學生誤以為函數就是多項式，對於函數多重表徵之間的連結有困難，致使無法獲得較完整的函數概念，甚至無法處理不熟悉的表徵(吳玫瑤，民90)。呂永聰(92)研究發現國內學生常認為「常數函數」不是函數，以及將函數與「方程式」混為一談的迷思概念。陳盈言(民，90)發現學生的函數概念，在表

格與文字敘述表徵上較為薄弱，建議教師應提供不同表徵來呈現函數。

函數概念的教學既受到重視，近年資訊科技發達，國外利用電腦活動進行函數教學的研究逐漸增多，大致分成兩個方向：(1)電腦軟體輔助函數教學(Wilson 與 Krapfl, 1994; Heugl, 1998)，利用電腦視覺與運算功能，呈現函數多重表徵，協助學生在此環境中進行表徵之間的連結。(2)程式設計建構函數概念(Ayers 等人, 1988; Breidenbach 等人, 1992; Dubinski, 1995)，讓學生藉由程式設計活動，對函數概念進行反思，發展更深層的函數概念，也體驗到函數代數公式之外的表徵形式。

吳玫瑤(民, 90)指出函數是數學非常重要的概念，而老師的教學往往受評量的影響，著重於計算，忽略了函數概念。呂永聰(民 93)研究國內學生函數概念發現，學生只對機械式簡單演算求值的問題比較純熟；學生要從「文字敘述」來找出函數關係顯得困難。Evangelidou、Elia、Gagatsis 與 Spyrou (2004)指出函數原本就是數學家及科學家們為解決問題和建立理論所使用的要素。過度強調其中的代數運算，導致學生將函數視為一種運算方式，無法體會函數可用於實際生活情境。

函數概念為解決問題孕育而生，電腦現今也是處理日常生活問題不可或缺的工具之一。函數藉以符號來表徵現實情境的規律，程式設計將現實問題歸納出規律性的執行流程，這兩者在找尋規律與解決問題上是相同的，在輸入－輸出的結構上也相似，故結合兩者於函數教學活動的研究(Ayers 等人, 1988; Breidenbach 等人, 1992; Dubinski, 1995)，是有理可循的。NCTM(2000)建議教師運用科技增進學生的學習，利用電腦學生可檢視更多的範例與表徵。

九年一貫課程綱要提到數學主要內涵：能夠應用於日常生活中，了解推理、解題思考過程，與他人溝通數學內涵的能力，並能與其他學習領域適當題材相連結。另外，依據九年一貫新課程所揭櫫之精神，各學習領域應使用資訊科技為輔助學習之工具，以擴展各領域的學習，並提升學生解決問題的能力。這明顯指出數學的教學應與實際生活結合，必要時更要與資訊科技融合。

繼九年一貫課程綱要施行之後，十二年一貫數學課程研究報告書(民 95)提到，高中數學綱應增加由函數表徵現實世界的部份，延伸出多樣的函數來表徵具體世界，使函數的學習應落實到具體之應用，避免流於形式。此報告書對於使用科技工具能力方面明白指出，在高中階段，應練習使用科學及繪圖計算器協助計

算並增加對函數的了解，學生應學習使用科技軟體，解決數學及科學上的問題。

這份報告書顯示應該將函數概念拉回到解決現實問題的議題上，重視函數的多重表徵，利用電腦活動增進函數了解，甚至結合兩者是有必要的；另外還提出學生應具有數學的溝通能力，清楚地溝通概念、想法及反思。然而要運用電腦這項工具，則需要有與電腦溝通的能力，利用程式設計呈現解題的思考歷程，正是訓練學生運用符號表達想法與概念，也透過此科技工具增進概念的瞭解。

從即將實施的十二年一貫數學課程綱要來看，函數概念回到與解決實際問題上，利用不同表徵學習函數概念，訓練學生尋找規律並用符號表達、溝通，並進一步運用資訊科技學習及應用於解決問題上。十二年一貫數學課程綱內容和NCTM(2000)所提的「學校數學的準則與標準」很接近，顯見得國內外對函數概念教學的趨勢有相同的看法。

目前函數教學所呈現的函數形式都以代數型態為主，致使大部份學生對函數的瞭解，侷限性地視為是一種代數公式(formula)的型態，對函數是一種變數間的對應關係的概念是薄弱的，也無法體會函數和日常生活的關聯。而有關函數概念的練習題也大多以代值運算為主，欠缺讓學生找尋規律後以建構函數的機會。

吳玫瑤(民90)建議教師在教授多項函數、三角函數等主題時，應該對函數概念進行反思。陳盈言(民90)提到數學是一種溝通工具，光會求出答案是不夠的，如何表達解答的過程與使用的策略也相當重要，建議教師應加強學生瞭解數學名詞、用語、符號與表示法，培養學生觀察規律性、關係的表示以及用符號表示一般化等能力。

國內有關函數教學的研究也不少，利用電腦活動或軟體來輔助教學的方式越來越受到重視(陳正明，民91；謝哲仁與鄭志明，民93)，但在國內目前並未看到程式設計活動協助函數教學的研究。

透過程式設計活動，建立函數的過程中，讓學生有機會省思過去所學到的函數概念有何應用，經驗到函數的另一種表徵，不僅瞭解函數可以呈現與解決實際生活的問題，也協助學生的函數概念進行整合。對教師而言，也可從中更深層發覺學生學習函數時，有關函數符號、變數、代數運算、邏輯和語意等，對函數概念發展的影響，作為未來函數教學上的參考。所以函數程式設計活動協助函數教學是值得研究的，符合十二年一貫數學課程綱和NCTM(2000)的內容。

第二節 研究目的

在程式設計的環境中，學生必須實際操作指令及瞭解如何使用指令，才能指示電腦完成任務。對每一問題，學生必須思考如何將問題分解成電腦可以執行的步驟，而且對每個步驟都必須撰寫程式，然後將所有步驟串聯起來才能完成整個活動，並依據程式立即的、視覺化的回饋來進行互動或修改想法上的缺失。

本研究主要提供學生另一種函數概念的學習方式，藉由 HTML、JavaScript 語言，觀察與記錄學生撰寫程式、定義函數的活動過程，整理、分析學習單與作業，再輔以晤談資料，探討函數的概念心像，和函數學習的困難與迷思概念。本研究的目的如下：

- 一、探討學生在程式設計活動中，函數概念心像的變化。
- 二、本研究透過程式設計情境，整理並分析學生符號表徵、代數表徵、語意表徵的運作情形，探討學生函數概念的學習情形，及影響學生函數概念學習的因素，並對函數教學提出建議。

第三節 名詞界定

- 一、函數的定義：給定一個 x 值，恰有一個 y 值與之對應。
- 二、教科書的函數定義：依照研究樣本學校所使用的教科書內容（龍騰出版社）定義函數為，「設 A, B 表示兩個非空集合，若是依照某種對應方式 f ，使得 A 中每一個元素 x ，在 B 中都有唯一的元素 y 與之對應，則稱此對應方式 f 為由 A 到 B 的函數，我們以 $f: A \rightarrow B$ 表示之，並將對應於 x 之 y 記為 $f(x)$ 。 A 稱為函數的定義域， B 稱為函數的對應域。」

三、函數的表徵是指：代數式、圖形、表列、圖表、文字敘述情境。高中教科書出現了表格(table)、代數式(formula)、圖形(graph)、文氏圖及文字敘述(verbal description)五種表徵。其中文字敘述給定義域和值域一個恰當的描述，並訂出對應規則，據此法則，任何定義域中的元素均可找到值域中與之對應的唯一元素，此時只要用日常用語而不需數學符號就可以定義函數。有時文字敘述翻譯成語意表徵。

四、函數的程式表徵：設有一函數 F ，而另有一段程式 F' ，若程式 F' 達成與 F 等價的功能，稱程式 F' 為該函數 F 的程式表徵。以下以 $F(x)=x+10$ 及

一段JavaScript程式為例說明。

```
<Script language="JavaScript">
  var input = prompt("請輸入 x 數值!");
  function a(n)
  { var x=n+10; return(x); }
  var result=a(input);
  document.write ("得到的函數值是：", result);
</Script>
```

第四節 研究限制

一、本研究採取質的方法進行研究，研究的對象僅以新竹市某高中的13位學生，學生背景有其特殊性。在推論至其他情形時，結果不一定適用。

二、詮釋資料之主觀因素：由於本研究採詮釋性研究，由活動過程的觀察、紙本資料、訪談等資料內容進行深入之分析，難免因個人詮釋角度，呈現主觀觀點之分析結果。但仍儘量依據文獻所述，以呈現較為客觀之研究結果。



第二章 文獻探討

第一節 函數概念的發展

一、函數的歷史發展

在古代巴比倫人使用表格形式以便找倒數、平方、平方根等，就發現函數的蹤跡早已存在。隨著文明發展到十七世紀左右，刻卜勒(Kepler)、伽利略(Galilei)等為解決與運動學有關的物理問題，開始從數學領域中尋找一些工具，用以描述所觀察到現象，因而催生函數概念。

笛卡兒(Descartes) 引入變量以後，變量和函數等概念日益被引用到科學各個領域；縱觀宇宙天體運算、探索熱傳導、研究電磁學等，這些都和函數概念息息相關；在這些探索自然與將現象用符號表示的過程中，人們對函數的概念不斷強化(摘自大陸學生科技網)。後來牛頓(Newton)在微積分及運動學致力不少，也在尋找變數間關係表示法。但函數(function)這名詞最後是由萊布尼茲所提出(曹亮吉，民 89；sfard, 1991)。

函數概念提出後，它的定義一直因不同的問題和情境而不斷修正。白努利(Bernoulli)提出變數函數，就是變數和常數某種方式所形成的式子，他所強調的函數是要能用公式來表示。後來數學家認為不應該把函數概念侷限在只能用公式表示，尤拉(Euler)導入了自變數和應變數的觀念(Kieran, 1993)，並使用符號表示函數，他定義函數是一個「如果某些變量，以某種方式依存於另一變量，當後面這些變量變化時，前面的變量也隨之變化，我們則把前面的變量稱為後面變量的函數。」在尤拉的定義中，不強調函數要用公式表示了，他曾把畫在坐標系的曲線也視為函數(摘自大陸學生科技網)。

但到了十九世紀，傅立葉(Fourier)在熱傳導研究上提出傅立葉級數(Fourier series)，使得過去的函數定義需要再檢討。曹亮吉(民 89)所寫的「函數觀念的演變史」中提到，後來狄里克利(Dirichlet)研究傅立葉論文之後，他認為 $y=f(x)$ 是個函數的意思是說： f 是一個規則，它告訴我們說，變數 x 之值固定了，其相應唯一的 y 值是什麼。 f 不一定要是個式子，它只要能說清楚 x 到 y 之間的對應是什麼就好了

到了廿世紀，一群法國數學家化名為布爾巴基(Bourbaki)，從集合觀點重

新定義函數如下：

Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a *functional relation* in y if, for all x in E , there exists a unique y in F which is in the given relation with x . (Lisa, 1996)

簡而言之，布爾巴基定義函數是一種在兩集合間的對應規則。

二、教科書中的函數定義

陳盈言(民 90)曾對過內學校課程中的函數定義進行調查，發現函數概念的歷史發展也反映在學校的數學教科書中，早期函數定義是使用變數間的關係，民國七十年之後的高中教科書則從集合的角度定義函數。

本研究對國內高中數學教科書常見版本，有關函數概念的內涵，以及所學的函數類型與數量，進行分析與統計，依照各版本對函數的定義與鋪陳順序，整理成對照表(內容詳見附錄一)，現摘錄教科書中對函數的描述與定義如下：

教科書中對函數的描述與定義	
版本一	<p>(1)描述變化量之間的關係，將這某種特殊關係稱為函數</p> <p>(2)自變數到應變數之間的對應規則稱為函數(不限單一式子)</p> <p>(3)強調的是對應規則，對應來源與對象不限於數</p> <p>(4)設 A、B 為兩非空集合，如果對於 A 中的每一個元素 x，在 B 中都有唯一的元素 y 與之對應，則稱此對應方式 f 為由 A 到 B 的函數，我們以 $f: A \rightarrow B$ 表示之，並將對應於 x 之 y 記為 $f(x)$。A 稱為函數的定義域，B 稱為函數的對應域。</p> <p>(5)函數可想成一個機器，輸入原料 x，經過 f 運作後得到 $f(x)$</p>
版本二	<p>(1)描述變量與變量之間的對應關係，就是函數了。</p> <p>(2)設 x 與 y 是兩個變量，如果 y 的取值是隨 x 的取值，依某一種對應法則 f 而唯一確定，那麼就說“y 是 x 的函數”，用記號 $y=f(x)$ 表示。在函數關係 $y=f(x)$ 中，x 叫做自變數，y 則因 x 值而改變，所以 y 叫做應變數。</p> <p>(3)一個函數 $y=f(x)$ 的 “對應法則 f” 可用多種方式呈現。</p> <p>(4)給了兩非空集合設 A 與 B。如果“A 內每一個元素 a，在 B 內恰有一個元素 b 與 a 對應”，此種對應法則 f，稱為從 A 映至 B 的函數，記做 $f: A \rightarrow B$。其中 b 叫做 a 的函數值，用符號 $b=f(a)$ 表示。</p>

版本三	<p>(1)描述兩量間的關係式，表示二個量(變數)之間的對應關係，便是函數的基本概念。</p> <p>(2)設 f 為兩變數 x 與 y 之間的對應關係，若對每一個 x 值，有而且僅有一個 y 值與 x 對應，則稱 y 是 x 的函數，一般記為 $y=f(x)$，並以 $f(a)$ 表示在 $x=a$ 時所對應的函數值，其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數。</p>
版本四	<p>(1)兩變化量之間的關係用數學式表示。如果 x 與 y 是兩個變數，且每個 x 都有一個且只有一個對應的 y 值，我們就說 y 是 x 的函數，其中 x 為自變數，y 為應變數。</p> <p>(2)關係式為 $y=x^3$，此函數若命名為 $f(x)$，則可用 $f(x)$ 代替，而將此函數寫成 $f(x)=x^3$</p> <p>註：有舉例 $y = \frac{1}{x-1}$，只談 x 範圍，未談定義域與對應域名詞</p>
版本五	<p>(1)如果 x, y 表示兩個變量，當給定 x 一個數值，依照某種規則，對得到唯一對應值 y，我們稱 y 是 x 的函數，x 的值可隨意指定，稱為自變數；而變數 y 會隨 x 的值改變，故稱為應變數。</p> <p>(2)設 $A、B$ 為兩個集合，若是依照某種對應方式 f，使得 A 中每一個元素 x 在 B 中都有且只有一個元素 y 和它對應，則稱此對應方式 f 為由 A 映至 B 的函數，用 $y=f(x)$ 表示，其中 A 稱為函數 f 的定義域，B 稱為對應域，x 為自變數，y 為應變數，當 $x=a$ 時，其對應值 $f(x)$ 稱為函數 f 在 $x=a$ 的函數值。</p>

表 2-1 國內教科書函數定義內容對照表

從對照表可看出各版本對函數的定義與鋪陳內容差異不小，有四個版本先從變量間的關係引入函數概念，有三個版本最後採用集合觀點定義函數；僅有版本一強調的是對應規則，對應來源與對象不限於數。有些版本對函數相關的符號意義並未說明得很清晰，如版本五陳述「 y 是 x 的函數」、「對應方式 f 為由 A 映至 B 的函數」。

再從國外教科書(Stewart, Redlin & Watson, 2006)摘錄函數的定義內容如下：

- (1)A function is a rule.
 - (2)In order to talk about a function, we need to give it a name.
 - (3)We will use letters such as f, g, h, \dots to represent functions.
- For example, we can use the letter f to represent a rule as follows:

“ f ” is the rule “square the number”

When we write $f(2)$, we mean “apply the rule f to the number 2.” Applying the rule gives $f(2) = 2^2 = 4$. Similarly, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, and in general $f(x) = x^2$

- (4) A function f is a rule that assigns to each element x in a set A exactly one element, called $f(x)$, in a set B .

第二節 表徵

函數概念的發展與演變是為解決問題而逐步孕生的，並非只是單純數學領域的東西(吳玫瑤，民 90)，函數概念的教學應該讓學生體驗到如何將日常生活的情境用函數來表示，Lisa(1996)的函數觀點是動態的，認為函數概念應該要符合切身需要，隨不同情境採用不同的定義。

函數有許多種不同的呈現方式(稱之為多重表徵)，教師宜提供許多不同的函數讓學生逐漸抽象出函數的概念(吳玫瑤，民 90)，接著探討概念的表徵。

表徵(representation)是數學學習的認知研究中非常重要的概念(鄭世正，民 91)。張春興所著的「張氏心理學辭典」(民 78)提到，當認知發展到某種程度時，能將現實世界的事物轉化為抽象的概念，以較抽象的符號、心像、語言、文字等形式來表達，此轉化運用的歷程稱為表徵作用。

Solso(1991)所著的「認知心理學」，認為個體對於知識概念，會將個人的知覺經驗與該知識加以整合，並且抽象符號化(symbolized)儲存於大腦中，而儲存的形式稱為知識表徵(representation of knowledge)。因為每個人知覺經驗不同，所以儲存的表徵形式也相異，彼此間要對同一概念進行溝通，則要採用相同經驗的表徵形式。

Lesh (1987) 將表徵視為心智過程模式化 (modeling) 所使用的符號系統，如圖表、符號及文字等，也就是外在具體化已經內在概念化的知識。左台益(民 90a)將表徵視為認知活動中的產物，人們經由表徵形式以瞭解知識的結構與內涵。

綜上而言，表徵是將某事物或概念轉換成其他的呈現方式，可用以達成與他人溝通的目的，共通的符號、圖像、語言、文字等就是表徵之一。

Bruner (1966) 由運思觀點認為在人類智慧成長期間，有三種表徵系統在起作用。這三種表徵系統的相互作用，是認知發展與智慧成長的核心。這三種表徵分別為：

- (1)動作 (enactive) 表徵：利用動作來呈現訊息。例如：使用手指數數字。
- (2)圖像 (iconic) 表徵：利用視覺影像來呈現訊息。也就是個體藉由操作具

體物的經驗，而在腦海中留下了心像(mental image)，因而只要憑著心像即可進行內在思考，過程當中不需要實際操作具體物。例如：比較分數大小時，大腦所浮現的圓面積圖。

(3)符號 (symbolic) 表徵：利用語言或其他符號來表達訊息。例如：在數學上會以「 π 」表示圓周率。

但上述所指的符號與心像並不一樣，符號本身是一個隨意選擇的記號 (notation)，與實物之間無任何類似之處，代表了實物與心像的某一種抽象意義，而這些抽象表徵是在學習經驗中發展出來的；亦即學生從具體活動中了解抽象數學表徵的意義，才能運用符號來進行思考。

由於數學思考方式有多樣性，呈現數學概念與想法的表徵也出現多樣面貌，而且不論同年級或不同年級的學生，在知識經驗及學習方式上，彼此間也存有很大的個別差異，Bruner 主張同時運用以上三種表徵方式去教學生。

一、多重表徵與學習理論

Lesh、Post 和 Behr (1987) 提出數學學習及解題時的五種表徵系統。這五種表徵系統為：(1)具體事物的現實經驗表徵 (real scripts)：由真實世界的情境或知識來解釋或解決類似問題的情境。(2)具體操作表徵 (manipulative models)：使用具體物以顯示數學情境的內在關係與操作。(3)圖形影像表徵 (static pictures)：一種靜態的圖形模式，如同可操作的模式，可內化成爲一種印象(image)。(4)具體情境的語意描述表徵 (spoken language)：日常生活中常用的口語符號。(5)數學符號表徵 (written symbols)：常用的數學算式或數學符號。

這五種表徵彼此之間的轉換關係爲平面網狀式，如下圖所示。Lesh 等人 (1987) 研究發現大多數學生在數學的學習僅用一種表徵而很少使用多重表徵，因此強調區分不同的表徵系統有其重要性，而表徵之間的轉換與統合對學習者更重要。

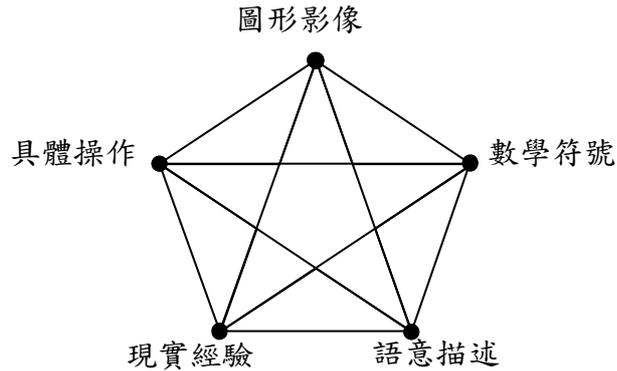


圖 2-1 表徵轉換系統示意圖(Lesh & et al,1987)

Janvier (1987) 描述數學概念的多重表徵就像是星形的冰山，冰山中心蘊含著此一概念，每一尖端代表著一種表徵，數學學習的理想方式是能在同一概念上運用數個表徵。

同一個概念會以多種不同的形式呈現，我們稱此為多重表徵。若同一概念有多重表徵，而這些表徵個別單獨地與概念對應，學生可能會將不同的表徵情境，視為要用不同的概念解決，因而喪失了在不同情境下學習概念的機會。因此，以多重表徵來呈現同一個概念，並注重表徵之間的連結及轉換，乃學習數學的理想方法之一。



二、多重表徵與數學概念相關研究

Even(1990)指出很多重要的數學概念會以不同的方式出現，具有不同的名稱及記號；藉由處理不同的函數表徵，抓住函數概念共同的抽象概念與性質，去掉只在特殊表徵中出現但與函數無關的部份，使得學生獲得更好、更深、更完整的概念理解。

Putman、Lampert 和 Peterson (1990)認為對數學概念的瞭解，是指能獲得一套強而有力的符號或表徵系統來表示數學概念，並能以多重表徵來代表某一概念，並在不同表徵系統中轉換同一概念。能在不同的表徵系統中做轉換，才能代表對一個數學概念的掌握(謝孟珊，民 88)。因此多重表徵的獲得對數學概念學習益顯重要(左台益，民 90a)。

美國數學教育協會(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM])在2000年的「學校數學的原則與標準」中更是極為重視表徵的教學。它將表徵列入十個標準之一，明白揭示數學課程必須強調數學表徵以幫助學習數學，重視多重

表徵之教學可以協助學生：

- (1)創造並使用表徵去組織、紀錄與溝通數學想法。
- (2)發展一套能有意義地、靈活地、適當地使用的數學表徵。
- (3)使用表徵去模型與解釋物理的、社會的、數學的現象。

從訊息處理論觀點來，所有的學習都與訊息呈現的多樣化形式有關。因此，教學時通常都會以各種不同的表徵方式呈現訊息給學生，以幫助學生在學習過程的訊息處理上，能對教材建立概念性的結構。

Lesh 等人 (1987)談到不同表徵之間的轉換，對數學概念的獲得與使用更是非常重要。Noss 和 Hoyles (1996)提及僅就單一表徵的學習並不適當，因為在解題時，不同表徵的角色結構相互牽連，單一表徵在解題時必須要切換到其它的表徵上，所以多重表徵的教學是必須要強調的。Schwarz (1996) 也有相似看法，認為教師連結多重表徵間的教學方式，是幫助學生瞭解數學概念很重要的方式。

由上討論可知，同一概念會有多重表徵，單一表徵的教學恐難以建構完整的概念結構，透過不同表徵的教學，對學生在瞭解該概念上是有幫助的。所以，函數的多重表徵教學方法與研究是值得探討的。



三、函數的多重表徵

呂永聰(民 93)指出所謂函數表徵：指的就是表達函數的形式。包括語文敘述(verbal description)、代數式(algebraic expression)、表列式(table)、座標系圖形(graph)、箭頭對應圖(arrow diagram)、機器比喻圖(machine analogy)、及數對集合表達式(the set of ordered pairs)等。

就高中階段常見的函數表徵有代數式、圖形、集合對應圖、表格、文字敘述等五種(吳玫瑤，民90)。以下就中學教科書內容簡述這幾種表徵形式：

1. 代數式表徵：剛開始給予一個代數運算式(一次或二次)說明函數關係，再代值求結果。如： $f(x)=3x+5$ 。
2. 圖形表徵：給定一個圖形，圖形不一定為直線或曲線，說明如何判定是否為函數。或是給定一個代數運算式，透過函數值描點繪出對應的圖形，讓學生由圖形體驗函數兩種表徵的連結關係。 $f(x)=-2x^2+4x+1$ 對應的圖形表徵如下：

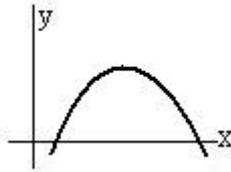


圖 2-2 二次函數圖形表徵

3. 集合對應圖表徵：借助幾個集合對應圖說明函數的定義，以及定義域、對應域與值域等名詞。課本並無特別提出一對一、一對多與多對一對應關係的名詞，但教師多會利用此時請學生判斷那些對應關係是函數。例如：

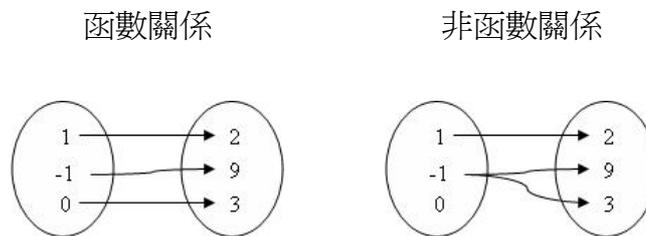


圖 2-3 函數集合對應圖表徵

4. 表格表徵：利用表格型式呈現兩變量的對應關係。如下例，請學生找出指定 x 值後，對應的函數值(y)。

x	1	2	3	4	5
y	5	8	11	14	17

表 2-2 函數表格表徵 (摘自翰林出版社高中數學教科書)

5. 文字敘述：給定文字敘述，判斷是否為函數，或是當作情境來描述，由文字敘述轉換到其他表徵。例如：正方形的邊長為 a 公分，面積為 A 平方公分，(1)試求 a 與 A 的關係式 (2) A 是否為 a 的函數(摘自翰林出版社高中數學教科書例題)。

在這些表徵中，文字敘述的表徵較少出現。Freudenthal(1983)提及，文字敘述可用以描述來自物理、社會、數學與心智世界中變數間相依的現象，使函數得以陳述，但這在數學教學中並不常見。

在1989年，NTCM美國全國數學教師協會的學校數學標準委員會主張在中學的數學課程中要介紹函數，在初級的代數課程中要學生瞭解變數與代數式的概念，並會利用表列、圖形、及語文規則等表徵，並探討這些表徵間的關係，並能分析以得出性質及規律；對於九至十二年級的學生還要他們能用各種的函數去模

式化真實世界的現象，能使用表徵去表示和分析關係，並會做表徵的轉換(引自呂永聰，民93)。

Kaput(1989)比較一下各種表徵對函數概念的影響，認為代數運算式子能有效地表示應變數之值來自於自變數之值的規則，這種程序性知識(procedural knowledge)在其他表徵上不容易得到，並且能傳達有關自變數與應變數間關係之不變性的概念性知識(conceptual knowledge)，但單單從代數運算式子中卻無法明確掌握變數間整體的變化情形；表格所顯示的資料在量化上比較明確，且可清楚看出變數之間的改變狀況，但缺點是所顯示的資料皆為離散且有限的樣本(引自陳盈言，民90)。

呂永聰(民92)認為學生如果能審知函數的要義，而能用之於判斷在不同型態表徵之下的函數，是否為一函數，則他可謂完全學得函數概念。Cuoco(1994)提到，能對不同函數表徵產生連結，是具備高階函數(higher-order function)概念的特質。

但從高中一年級課程內容規劃來看，與函數有關的部份佔所有單元的三分之二，包括：函數、數列與級數、多項函數、指數與對數函數、三角函數等。這些內容牽涉許多抽象的代數符號運算，需要不斷重複練習，課堂講授範例自然以代數式表徵出現的情形最多，這對學生函數概念的影響很大。陳盈言(民90)分析國內教材與研究學生函數概念，認為課程中的函數例子大多以代數式子表徵呈現，無形中促使學生將關係式與函數概念做過度的連結。

Even(1990)發現到學生有關函數的概念心像經常是由經驗中某些特殊函數與其性質所決定，而非從函數定義來決定，學生經常經驗到連續圖形或代數式表徵，因而產生函數都是完美圖形或可寫成代數運算式的狹隘觀點。

Vinner等人(1989)也提到儘管教師依教科書內容教授函數定義，但所展示的函數範例卻多為代數運算式。Markovits、Eylon 和 Bruckheimer (1986) 提及學生所學的函數例子都侷限在代數運算式和圖形表徵，特別是代數運算式表徵。

左台益(民90a)認為學生常常僅處於一種表徵情形下學習數學概念，當需要多重表徵的轉換時，學生的問題就顯露出來。一個數學概念對專家而言，他已經能形成緊緻連結的物件，但是對於初學者的生手而言，卻往往只是獲得圍繞著此概念名詞之鬆散不相連的組合，原因之一在於學習者沒有多重表徵及其連結的具體經驗。

第三節 函數概念的困難與迷思

一、函數概念的學習困難

由第一節所談到的函數概念發展過程可知，函數是為解決某些數學或相關的問題而演變，函數概念既能涵蓋這些問題，它自然也能呈現出多元面貌與變化，使得學習者不易掌握而感到困難，許多學者與研究都提出這樣的看法。

Lovell(1971) 對中學學生研究結果，顯示學習函數概念的困難有：

- (1) 未抓住函數的基本概念，在簡單例子中無法分辨是否為函數的正例。
- (2) 經常對函數關係是多對一還是一對多感到困惑。
- (3) 無法解釋函數圖形的相關問題。
- (4) 學生在處理具有生活情境相關的函數問題時，會感到困難。
- (5) 僅有少數高年級的學生會處理有關合成函數的問題。

Dreyfus 和 Eisenberg (1982)指出函數概念具複雜性的主要原因為：

- (1) 函數本身並非單一個概念，而是有許多子概念與其結合(如：定義域、值域、變數等)。
- (2) 函數概念經常與不同領域連結(如代數與幾何)。
- (3) 同一個函數可以不同的表徵出現(如：代數運算式子、表格、文式圖、圖形或文字敘述)。

Markovits 等人 (1986)研究發現已學過函數概念的學生遭遇以下困難點：

- (1) 對常數函數(例如 $f(x)=10$)、分段定義函數(例如 Dirichlet 函數)和以離散點呈現的函數特別感到困難，原因可能是由於他們常誤認為每個函數都是線性關係。
- (2) 學生所舉的函數例子都侷限在代數運算式和圖形表徵，特別是代數運算式表徵。
- (3) 從圖形表徵到代數運算式表徵的轉換，比代數運算式表徵到圖形表徵的轉換要來的困難。
- (4) 所舉的例子有傾向線性關係的現象。

Vinner 和 Dreyfus (1989) 研究學生在從圖形來辨識是否函數時，發現分段定義(split domain)和孤立點(exceptional point)會影響判斷；另外，從部份學生答題的文字解釋發覺，有些學生認為一個函數應該只能有一個相對應的代數運算式，這種想法在判斷函數上也扮演重要的角色。

Tall、McGowen 和 DeMarois (2000) 認為函數有很多種表徵與呈現方式，使其概念不明顯，再加上具有物件(object)與程序(process)的二元性，造成函數概念更為複雜，這不僅使函數具有寬廣的應用，但也導致許多種類的迷思概念。例如一個函數 $f(x)=2x+1$ ，求 $f(5)$ ， $2x+1$ 描述由輸入 5 後得到輸出值 7 的程序，而 $f(5)$ 是一個數值，也就是物件；若又有一個函數 $g(x)=x^2$ ，要求 $g(f(x))$ ，則要將 $2x+1$ 轉換程序視為物件處理，學生要弄清函數概念物件與程序之間的轉換，是不容易的。

呂永聰(民92)曾對國內學生之函數相關概念的形成與發展研究，發現太多的函數相關概念確實困擾了學生，而且課程又是配合集合概念，集合概念是一種形式化的概念，增添學習的困難度。他從高中階段(包括高中與五專前三年)學生的函數概念資料分析得到以下幾點結論：

- (1) 能夠以所學到的函數定義來解釋所舉之例為函數或非函數者比例甚低，約只有二成的學生能以「近乎函數定義」來解釋某表徵是否為函數。
- (2) 對不可列出代數關係式的問題也顯得較難處理，學生總認為一個變數必須隨另一變數之改變而能「有規則」「呈現」或「依公式」「可算出」的才算函數關係。
- (3) 學生只對機械式簡單演算求值的問題比較純熟。
- (4) 判斷「文字敘述」是否有函數關係，顯得比其他四樣表徵(代數運算式、圖形、表列式、及文式圖困難)。

二、常見的函數迷思概念

1. 函數概念不穩固

Vinner, Hershkowitz & Bruckhimer (1981)提到，若學生對一個概念具有兩種迥然不同而且會潛在衝突的基模(schemes)或認知結構，則會發生不一致的行為現象。當學生面對某些特定情境時，會刺激其中一種基模，而其他情境則會刺激另外一個。有時，所給予的情境並未刺激出和該情境最相關的基模。

Vinner 和 Dreyfus (1989) 研究發現，雖然 Dirichlet—Bourbaki 廣泛被用在教科書及教材中，但所呈現的函數教學範例，卻是用代數運算式(formula)來表示關聯的規則。這樣的練習讓學生雖然接受 Dirichlet—Bourbaki 的定義，但導致學生函數的概念圖像是要有公式的呈現。使學生遇到詢問函數定義的情境時，是以 Dirichlet—Bourbaki 概念回答；但在遇到函數其他問題情境時，卻是以代數運算式為思考根基。

數學概念的定義雖然是短短數句，但是要運用定義回答問題，卻是一個困難的認知課題(Vinner & Dreyfus,1989)，學生常常不是使用概念的定義，來解決所面對的問題情境。

吳佳起(民 92)研究了國二學生(臺北市和基隆市各一校，每校各二班)的函數概念，她發現學生存在著許多關於函數的迷思概念，如：可以寫出關係式的就是函數、數值要有規律的增加才是函數關係等。

呂永聰(民 92) 研究發現大部份的學生對函數皆有或多或少的錯誤概念，只對機械式的簡單演算比較熟練，但對概念性的問題顯得生疏，對間斷性變數的題目也不甚瞭解。

陳盈言(民90)研究函數的表徵時，發現以文字敘述表徵中的數學內涵最不明顯，這也是學生最感棘手之處。將生活中的問題加以簡化，並選用適當的數學模式來解題，對學生而言不是件容易的事，原因是因思慮不夠周密，未全盤考慮問題的所有狀況；另一方面，學生對數學的刻板印象就是符號的操弄或規則的運算，因此其思維中生活數學與課堂數學是不同的，同一個數學問題在生活與課堂兩個情境中會有截然不同的解法與答案。

2. 範列表徵的影響

Hershkowitz(1990)指出，任何一個概念都有一個或多個典型例子稱之典例(prototype)，而典例常成為學習者形成概念的主要心像。Ausubel(1968)提到，影響學習最大的因素就是學習者已經知道的知識，而通常此時學生所知道的大都充滿著迷思概念。左台益(民 90a)研究高中學生的橢圓概念，探知先前的橢圓經驗會影響到新學的橢圓概念。以上研究者陳述以往所接觸到的數學概念範例，會影響日後該數學概念的發展。

Vinner & Dreyfus (1989)認為學生在回應問題情況的時候，他們往往想到的是概念影像，而非概念的定義，學生的概念影像是日常經驗包括課堂上所獲知的一些觀念及例子所形成，概念影像有時會扭曲他們對定義的見解。例如學生認為函數是一種規則的表示法，若無法表示規則性的就不是函數，由兩個以上的公式或圖形聯結的就不是函數(Vinner, 1983)，這些迷思就是受到日常課堂經驗上的一些觀念及例子所影響的。

施盈蘭(民83)的研究發現國中銳角三角函數的概念，對高中廣義角三角函數會有負面影響。吳玫瑤(民90)提出函數教學一般是由線型函數開始介紹函數的概念，因此學習者傾向將函數想像成線性對應關係。這些都說明典例對學生學習的影響，運用適宜能幫助建立較完整正確的概念，若未加注意所產生的迷思概念，則難以改正且影響往後新的概念學習。

函數是數學非常重要的概念，而老師的教學往往受評量的影響，而著重於計算，忽略了函數概念。函數除常見的代數運算式、圖形，也有來自日常生活及其他學科的情境(Even, 1990)。

陳盈言(民90)分析國內教材與研究學生函數概念發現：

- (1) 課程中的函數例子大多以式子表徵呈現，無形中促使學生將關係式與函數概念做過度的連結。
- (2) 學生在學習經驗中未曾見過的例子，認為一定不是函數。
- (3) 課程中有關函數概念與表格表徵間的連結相當薄弱，學生在表格表徵與函數概念間的連結上有相當程度的困難。
- (4) 文字敘述表徵是學生最感棘手，學生對數學的刻板印象就是符號的操弄或規則的運算，其思維中生活數學與課堂數學是不同的。

吳玫瑤(民90)研究教學對高中生學習函數概念的影響，常見以下幾種迷思：

- (1) 學生易受典例的影響產生迷思概念，例如：函數圖形一定是個有規律的圖形。
- (2) 受語言的影響，認為「應變數一定要跟著自變數而動」。
- (3) 多項式的教學讓學生誤以為函數一定是多項式。

函數概念具有多重表徵，呈現給學生的範例影響甚大，若在教學範例的使用上與課程安排上未加注意，產生的迷思概念也是多重的。函數是數學的基礎，對往後其他數學概念的學習影響不小，顯見函數的教學很值得研究與探討。

三、函數概念理論與函數教學研究

由於函數概念的重要性，致使許多學者提出函數概念發展理論，以及探索如何教授函數概念，進行相關的研究與課程實驗。

1. 廣度與深度的探究

DeMarois 和 Tall (1996,1998,1999) 提出分析學生函數概念的架構，此架構將函數概念細分「向度」(facets)及「深度」(layers)。向度是依照函數的多重表徵來加以分類，深度則是參考 Sfard 與依據 APOS 的認知發展觀點切分五個發展階段階段，此分析架構的分類與命名，是隨他們的研究發展而經過修整。

- (1) 向度：將學生的函數概念向度分成 numeric(就是表格)、symbolic(代數運算式)、geometric(圖形表徵)、notation(如 $f(x)$ 的意義)、written(文字敘述表徵)、verbal(語言敘述表徵)、colloquial(語意表徵即 function machine) 等七個向度，代表函數的多種不同呈現型態。
- (2) 深度：將學生的函數概念層級分成 pre-procedure、procedure、process、object、procept 等五個層次。達到 Procept 層級的學生能視狀況，彈性地在 process 和 object 之層級間變換。

他們按照此架構去分析學生的函數概念，並繪製學生函數概念的診斷圖(profile)，由診斷圖可以清晰看出學生函數概念的學習狀況。

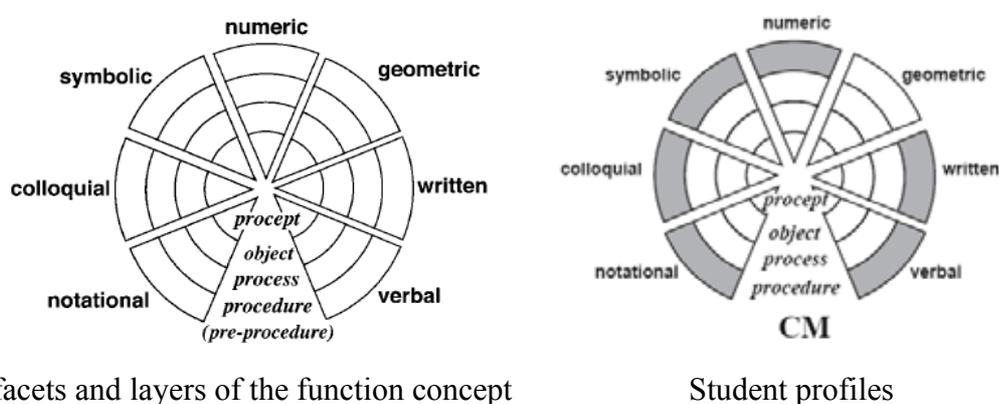


圖 2-4 學生函數概念診斷圖 (摘自 DeMarois 和 Tall ,1999)

2. 經驗多種函數類型

Vinner 和 Dreyfus (1989) 的研究質疑採用 Dirichlet—Bourbaki 方法在函數概念教學上，是否有其強烈的必要性，但他們認為介紹不連續函數、分段定義函數、孤立點函數及其他特殊函數是有需要的，可以擴展學生的函數經驗；在學生經驗過所有類型的函數後，最後才以函數正式的定義做個總結。

Yerushalmy 和 Schwartz (1993) 指出函數概念是代數課程的基礎內容之一，這個概念在一開始應該從不同表徵來教授與學習。關於這點，Markovits(1988) 也指出在學生開始接觸函數的時候，最好能讓學生經驗一些非線性的函數，以免造成日後的迷思概念。因此，在函數教學時，列舉充分的函數類型，有助於函數概念的建立。

在某一種表徵中理解某個概念，並不意味著在另一種表徵也能理解此概念 (Even,1990)。顯見函數概念具有多重表徵，致使不少學者主張介紹函數的範例，應該包括各種類型與面貌。NCTM 的「學校數學的原則與標準」(2000)建議，當學生經歷了函數的多重表徵(包括數值、圖形和符號)後，他們對函數的理解將隨之更為廣泛。

國內吳玫瑤(民 90)研究過教學對高中生學習函數概念的影響，就課程及教學內容的安排，摘述對函數概念有幫助的部分如下：

- (1) 直接由函數的定義傳達函數概念
- (2) 藉由函數圖形的正例與非例，提供學生修正基模的機會
- (3) 課本提供不同的函數表徵，幫助學生瞭解函數的定義
- (4) 提供許多不同的函數讓學生逐漸抽象出函數的概念

3. 認知根基(cognitive root)

Tall 等人(2000) 發現函數多種表徵及「物件—程序」二元性，造成函數概念複雜而不易學習，故思考用何種方法介紹函數，能更有意義且適合更多不同能力及需要的學生。他們依據 Thompson(1994)的想法而提出認知根基(cognitive root)的構想，再採用 Lakoff 和 Johnson(1999)具體化理論將函數認知根基用函數機器(function machine)呈現。

Thompson(1994)提出剛開始教函數概念時，應先透過有意義的情境建立起中心概念，再從這個中心概念為基礎來發展函數概念，而該情境要能使得函數概

念具體化。Tall(1992)將 Thompson(1994)提及的概念基礎稱為認知根基(cognitive root)，並指出認知根基是概念學習的心錨(anchor)，此心錨協助學習者比較容易瞭解所學的概念，並且提供一個基礎，在這基礎上建立與所學概念相關的理論。

Lakoff 和 Johnson(1999)提出具體化理論(embodied theory)，認為所有的思考都被建構在具體化的知覺及行為上，因為大腦用很大比例透過視覺去感知或分析物件。

Tall (2000) 等人經過思維與研究，就建議使用一個具體化圖像來教授函數概念，此圖像具一般性並儘可能地展示出函數概念各種重要的部份。這圖像是繪成輸入輸出箱(input-output box)，稱之為函數機器(function machine)，並將輸入輸出的程序過程，具體化成似物件(object-like)的狀態。

他們用此圖示來說明函數概念，圖形具體地讓學生知道函數具有物件的特性，也有輸入－輸出(input-output)的轉換程序特性。在教學上多舉出日常生活中的函數範例，這些例子僅知其過程而不管它的公式，保持一般性地使用函數機器圖示來介紹這些例子。此圖示致使學生建立一個心智圖像(mental image)，也就是認知根基，它作用就像錨一樣深深扣在腦海中，每當提到函數相關問題時，就會激發學生喚起此圖像於心智活動中。

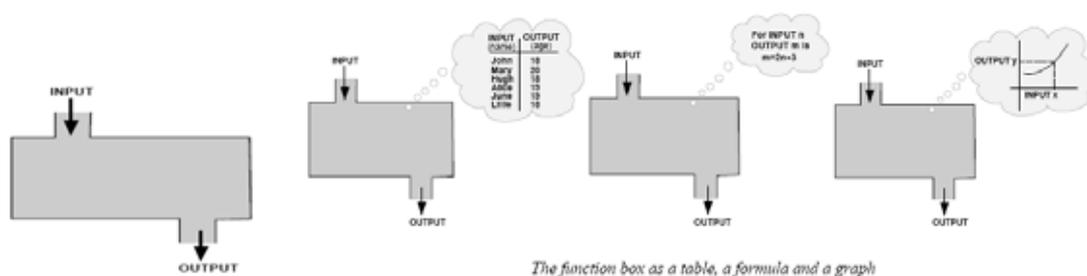


圖 2-5 函數機器示意圖(本圖摘自 Tall、McGowen & DeMarois ,2000)

Tall (2000) 等人他們相信具體化圖像能提供一個學習根基給較廣泛的學生，有利於理解更精細的數學概念，但也提到此方法的缺失是沒有清楚的定義域及值域。

Sand(1996)在教學上提出兩點發現：一是學生認為函數是處理數字的運算程序；二是學生認為函數是一個輸入 x 然後輸出 y 的運算程序，並無法將函數視為一個物件。他反思原因是，在教學上大都要求學生處理實數函數。函數雖可用代數運算式、機器、圖形、有序對來描述，但代數運算式是十分明顯且具領導地位

的，學生似乎無論何時都認為函數被刻畫為有明顯的規則，此規則是給予 x 值後求出 y 值。很多老師多依賴這種方法，造成的缺點是學生不知道函數不一定只處理數字，即使處理數字，它可能沒有明顯的運算規則。

Sand(1996)期望學生具有更一般性的函數概念，瞭解函數可以處理一般集合的元素；他提出真實世界有很多函數例子，利用這些例子討論函數概念有助學生的瞭解。Sand(1996)舉出一個具體且真實的函數例子：郵差送信(Mail Carrier)，把函數比喻成郵差，函數有名稱“ f ”，好比郵差的名字“bill”；每一封信(定義域值)，被放在一個郵箱(值域)，每封信不能放在兩個郵箱裡；然而可以很多封信放在同一個郵箱，如同值域的數可以被用兩次以上，某些郵箱保持空的。

Sand(1996)的想法是利用真實的郵差送信的情境，協助學生建立函數的中心概念，再以所建立起的中心概念為基礎，逐步發展函數其他相關的概念。網頁與程式設計提供一個具體真實的情境，能產生立即回饋的視覺刺激，有助於將認知根基的想法視覺化、具體化。

HTML 指令呈現函數另一種表徵，與 Tall(2000)等人所提到的函數機器(function machine)相似，產生與 Sand(1996)所提到的郵差送信譬喻相同功能。學生透過 HTML 指令的撰寫得到所要的網頁內容，能體認到函數非單純得數學概念，在生活應用上也可見得到；從瞭解不同的 HTML 指令有不同功能，指令的編排順序也會影響結果，認知到函數是一種物件，不同函數有不同的轉換對應關係，掌握到函數概念的「物件—程序」二元性。

第四節 電腦科技與數學教學

數學有許多概念是抽象且不易理解，許多學者致力於研究教學方法、教具和教學環境，以期能幫助學習者，而電腦科技的進步，使得這些獲得不少的改善。美國數學教師協會(NCTM)早於1983年就提出建議，所有各級教師為了教導數學技能與概念，而讓學生達到有效的學習，都應該使用科技的工具。

Lakoff 和 Johnson(1999)認為大腦用很大比例透過視覺去感知或分析物件，大部份的思考都建構在具體化的知覺及行為上。過去一些不易具體化的概念，如今拜電腦科技進步所賜，強大的圖像功能清晰地呈現概念的屬性，電腦實為教學者與學習者一項便利工具。

Schultz(1990)認為要達到NCTM所提之學校數學課程標準，教師應該要在適當的時機，使用具體的、視覺化的模型如電腦來進行教學，促進學生概念的學習(引自謝哲仁與鄭志明，民93)。而國內的許多學者亦認為電腦輔助教學是突破我國傳統班級教學，順應學生個別差異，提高教學品質的有效途徑之一(陳英娥，民 81；陳明仁，民 80；吳健雄，民 72)。

Heugl (1998)提及電腦是數學的產物，不僅對數學有所影響，在將來更將根本地改變數學；電腦這項工具不僅增加人類的工作效能，更改變了思考的品質，產生新的能力。意即電腦和數學兩者之間不論現在或未來都有密不可分的關係存在。

NCTM(2000)指出，若學生能快速算出答案並不保證他已經達到高階層的數學理解。在傳統教室的數學教學環境，高中生學習解析幾何偏重於代數方程的程序性演算，常有數學即是運算技能的迷失(左台益，民 90a)。電腦的出現使我們思考是否需要改變數學教學內容、方式與環境。

現今，電腦運用能力成爲人類基本能力之一，再加上電腦和數學概念有密切關連性，如何將電腦與數學教學進行整合，甚至將所學到的數學概念透過電腦解決問題，是數學教育值得注意的領域。

依據九年一貫新課程之精神，各學習領域應使用電腦爲輔助學習之工具，以擴展各領域的學習並提昇學生研究的能力。教師應懂得利用電腦及網路來協助教學，讓教學結合科技及資訊網路，並提高網路教材資源的檢索能力，使資訊科技融入各科教學活動中，改變教學方式，創新知識傳授的新途徑(溫明正，民89)。若能充分利用電腦科技來輔助學習、布置問題情境，將有助於使抽象概念具體化，讓教學更生動、讓學生更容易學習(林甘敏，民88)。

所以不論國內外，都逐漸重視到電腦這項工具，許多學者投入於電腦對數學教學的影響研究。

一、電腦科技與函數教學

1. 認知根基的概念

澳洲提供一個給教師與學童學習的網站 ASH(Aussie School House)，讓教師和學童都能利用網路的便利線上教學與學習。內中包含數學字典功能，而對函數的定義是以機器比喻的方式如下：

A function is like an input/output machine. It repeats a rule to determine how each input will be changed to produce each output.

ASH 網站還設計一個互動式的函數操作介面，將函數呈現為一種輸入與輸出之間的規則，並無代數運算式的表徵，讓學生自行輸入數字，觀察答案變化後建構函數概念。這種方式幫助學生建立起函數機器(function machine)的概念心像，未來以此為認知根基發展函數其他相關概念，可以說和 Tall(2000)等人有相同的看法，並利用網頁科技加以呈現。

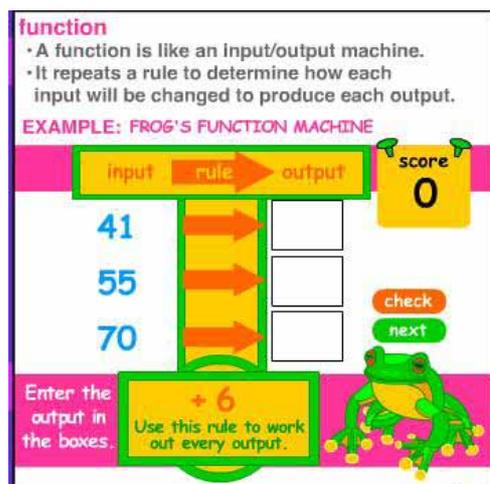


圖 2-6 ASH 函數教學網頁圖例

(取圖自 <http://www.teachers.ash.org.au/jeather/maths/dictionary.html>)

2. 多重表徵呈現的概念

Heugl (1998) 利用 CAS(Computer Algebra Systems)設計函數概念典例，進行函數教學活動，這些典例與活動是以問題解決情境為基礎。他設計活動的主要觀點如下：

(1) 採用 Buchberger(1993)學習數學的螺旋理論。Heugl 將學習的螺旋依照問題解決的情境，分成以下三個階段。強調讓學生不斷經驗過解題策略與概念形成、檢測策略的正確性、實際執行應用循環後，對函數概念學習會更深更廣。

1. 實驗階段(heuristic, experimental phase)：猜測形成假設，設計、證明問題解決策略，發展基本概念。
2. 驗證階段(exactifying phase)：確證假想、證明假設，為確立的概念實施執行計畫。

3. 應用階段(application phase)：採用前兩階段的發展出來的概念與演算法解決問題。

- (2) 提出視窗穿梭法(window shuttle method)的概念。意指電腦最重要的特點是在視窗環境下，就同一個函數情境下，學生可同時經歷多種相異表徵(表格計算、圖形呈現和代數運算式)。

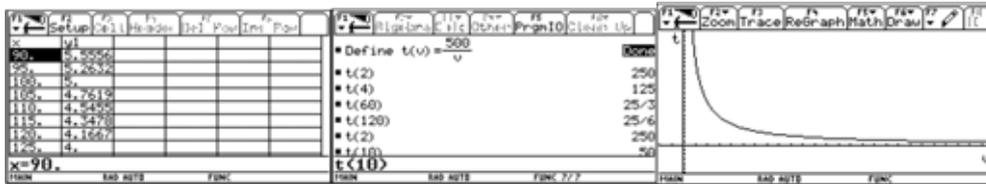


圖 2-7 CAS 視窗穿梭概念例圖 (本圖摘自 Heugl, 1998)

- (3) 將設計出來的函數模組化，則這些模組具有白箱(white box)與黑箱(black box)兩種功能。所謂白箱功能就是函數模組本身可做為教學工具，探討其中的運做過程與相關的函數概念；黑箱功能指的是每個函數模組都是被設計來解決某種問題，學生可以將一些函數模組重組後解決較大的問題。

由上來看，Heugl (1998) 利用 CAS 來教授函數概念，不僅讓學生經驗不同表徵，由操作經驗上主動建構相關知識，並從問題解決情境著手，使得函數概念能立即有實際應用的感受，不會流於函數只數學運算的主題。函數模組化的概念，有助於學生體會函數具有「程序－物件」的二元特性，對往後合成函數的概念發展或許有正面效果。

3. 國內的應用情況

陳正明(民 92)曾利用 Excel 軟體對一名國二學生進行線型函數補救教學，結果發現學生對電腦教學活動接受度很高，能提昇學習動機，而且 Excel 軟體的環境對表格表徵的學習是有幫助的。

GSP (The Geometer's Sketchpad) 具有尺規作圖、動態連續變換、保持結構、特殊即一般、提供數字資料及記錄作圖過程等特質，不只能提供精確的幾何圖形，而且能協助教師提供方便操作、易於探討圖形性質的教學及學習環境(林保平，民85)。

謝哲仁與鄭志明(民93)利用GSP設計可操作動態視覺化電腦環境來學習廣義三角函數，設計的動態電子教材可呈現廣義角三角函數之視覺和數值之連結，並允許學生反覆操作範例中之各項物件，使用者透過操控情境得到立即視覺和數值的變化回饋，再從數值的次序或圖形的規則認識三角函數因週期運動所產生的不變的性質。

他們選用GSP主要基於價格、可操作環境與容易學習三項要素。市場上雖有多種數學軟體，例如：SPSS、Maple、Mathematica和Mathlab等，但數學教師要將這些軟體熟練地併入教學當中並不是一件很容易的事。而這些軟體都是目的取向(goal oriented)的工具軟體，中間似乎忽略了數學教學原理中所需之過程(process)的學習(謝哲仁，民89)；這些軟體的版權問題、價位問題以及軟體中文化的問題，都讓有興趣於引進電腦來輔助教學的老師感到遲疑。

探索利用GSP輔助數學教學成效的研究不少，因GSP的圖形功能強大，許多研究著重在幾何、三角函數和空間等主題上(戴錦秀，民90；余麗惠，民91；謝哲仁，民89)；少部份涉及到二元一次線性函數概念(林星秀，民89；何政謀，民93)，以呈現圖形表徵，強化學生具體概念為主。

二、程式設計與函數教學

Ayers、Davis、Dubinsky 和 Lewin (1988)認為要完成多個函數的運算，學生必須將函數視為心智物件(mental objects)，對特定函數內化成心智上的轉換過程後，必須再將其封裝成一個單一的實體(entity)。有時需將函數當成一個動態性程序(process)，有時需將函數當成一個靜態性物件(object)。

他們以函數的合成為例說明，為了完成兩個函數的合成（如 $F \circ G$ ），必須將 F 和 G 個別的轉換過程進行調整，形成一種新的轉換過程，這包含先得到 G 的結果， F 再依據 G 的結果進行轉換。於是新的轉換過程被內化後再封裝，將 $F \circ G$ 視為一個新的函數。

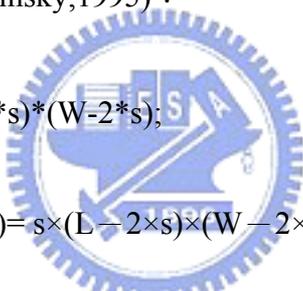
於是他們再依據 Piaget 的反思抽象 (reflective abstraction)觀點指出，在正規的程式設計過程中，建立一個程序或系統命令，就是將一個過程轉換成一個物件。透過寫過 shell script 和 pipe 程式的經驗，會直接刺激到反思抽象的各種型態，這些反思抽象的型態，正是函數概念與合成在建構上所需要的。

隨後發展程式設計活動，實驗對象是大學生(中學已學過基本函數概念)，將學生分成實驗組(以程式設計活動進行教學)與控制組(傳統的教室授課形式)，兩組授課時數相同。研究結果顯示實驗組的學生表現優於控制組的學生，實驗組的學生比較能掌握函數概念程序(process)特性及物件(object)特性的運用時機。

Dubinsky 及其他研究者 (Ayers & et al.,1988 ; Dubinsky, 1995,1998 ; Breidenbach & et al.,1992 ; Asiala & et al., 1996) 依照 APOS 理論及 Piaget 的反思抽象觀點，認同程式設計對函數概念建構是幫助的，有部份算是延續 Ayers (1988) 等然的研究觀點，發展程式設計課程活動，希望透過此活動讓學生的函數概念發展到較高的層次(level)。

他們採用 ISETL 語言為活動的程式語言，並定義能將問題轉換成程式形式便算達程序(process)的層次。例如：給予一張長度 L 寬度 W 的厚紙，減去四個角形成長立方體容器，此四個角皆為邊長 s 的正方形，求該容器容積。此問題撰寫成 ISETL 程式碼如下(Dubinsky,1995)：

```
V:=func(s);  
    return  s*(L-2*s)*(W-2*s);  
end;  
代數運算式為  $V(s)=s \times (L-2 \times s) \times (W-2 \times s)$ 。
```



又定義若能將一個函數當作一個物件輸入於另一個函數中，便算達物件(object)的層次。例如以下的 ISETL 程式碼(Dubinsky,1995)，需將函數 f 當作物件輸入於函數 df 中。

```
df:=func(f);  
    return  func(x);  
           return (f(x+0.000001)-f(x)) / 0.000001;  
           end;  
end;
```

這研究的實施對象是中學以下的準教師(pre-teacher)，已有大學學歷並學過函數概念。研究結果顯現這些準教師透過電腦程式設計活動後，函數概念的發展層次較高，跳脫函數就是代數運算式或方程式的普遍性認知。

三、函數教學的反思

吳玫瑤(民90)提出反思教學的概念，建議函數概念的教學，依照奧蘇貝爾(施良方，民 85) 的理論，先教涵蓋性大的函數概念，再藉由各種函數表徵發展函數概念；理論中有個重要關鍵，就是「固定點」必須存在。

所謂「固定點」是指一個共通的概念，例如：函數的定義、函數對應關係的特性等。利用固定點貫穿整個函數的學習，讓學生不斷反思，在後續的學習過程中強化，並將既有的函數概念與知識建立起組織網絡。

吳玫瑤(民90)又分析國內高中教材，並陳述在函數之後的單元，即使是與函數概念有關的教材，最多是在一開始的時候用函數的定義檢驗，之後就將整個學習的重心移到該函數的特徵與計算上面。結果學生並未抽象出與函數概念相關的屬性，反而受到後面的學習而干擾到之前的概念，多項函數介紹完反而使學生的函數概念模糊，許多學生認為函數就是多項式。

整個多項式的教學，幾乎與函數概念無關，有的學生後來反將函數看成就是多項函數，經過寒假之後，緊接著高一下的三角函數狀況更嚴重，許多學生根本沒注意到三角函數也是函數。認為學生雖學過多種類型的函數，但函數概念未提昇的原因，應該與教材以及教學沒有適時提供「固定點」。

為解決此落差，教師除參照教科書內容安排外，在介紹完個種函數之後進行反思的教學活動，讓學生順利發展函數概念。否則，學生花了大部份時間與精力在多項式、指數對數及三角函數的特徵與計算上，最後干擾前面的函數概念。

Ayers(1988)等人和 Dubinsky 等其他研究者 (Ayers& et al.,1988；Dubinsky, 1995,1998；Breidenbach& et al.,1992；Asiala & et al., 1996)利用程式設計活動教授已學過函數概念的學生，期望學生從設計函數程式、執行、修正等過程，建構並發展到較高的函數概念層次，就某種程度而言可算是一種反思性的教學活動。然而他們比較重視程式設計所產生的有意義情境及建構歷程，並未強調固定點的概念。

第三章 研究方法

本研究主要採取質的研究為研究方法，在探討學生在程式設計活動中，函數概念心像的變化，以及函數的迷思概念與學習困難。研究者是活動設計者、資料蒐集者及整理分析者，同時也是研究報告撰寫者。

在資料收集方面，主要以活動前後的紙本資料及晤談錄音為主，而活動即研究的一部份，另輔以收集活動現場師生互動記錄與學習單。這些不同的資料來源可作為本研究分析之三角校正，在資料收集分析上，也委請現職的高中數學教師一同分析比對，據以提昇本研究之信度與效度。

本章從五方面說明本研究之研究方法，第一節說明研究步驟；第二節介紹研究樣本；第三節描述反思教學活動設計的內容；第四節介紹研究工具；第五節闡述研究資料蒐集與分析的方法。

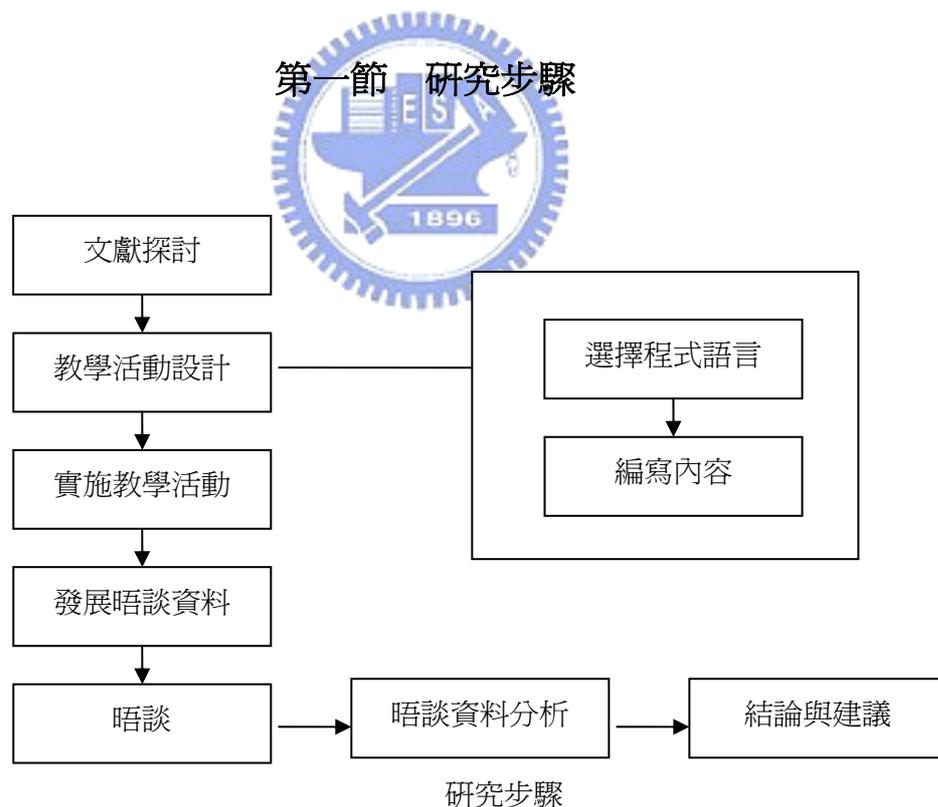


圖 3-1 研究步驟與流程圖

第二節 研究對象

本研究樣本選自某一所新竹市立高中的學生共 13 人，其中 4 位是高二學生，其中 9 位是高一學生。這些學生均是志願參與本研究的教學活動，在活動前學過和函數相關的概念，包含基本函數概念、多項函數、對數函數、指數函數和三角函數等內容。

高二 4 位學生(S1、S2、S3、S4)在同年級(共 178 位學生)的數學成就表現，分別排名在 58、99、36、74；高一 9 位學生(S5、S6、S7、S8、S9、S10、S11、S12、S13)在同年級(共 212 位學生)的數學成就表現，分別排名在 77、41、20、25、33、90、74、1、14。

教學活動在電腦教室實施，學生每個人使用一台電腦，透過網路取得學習教材，活動共為期五次，利用五個週六，每次二個半小時。教師扮演著協助的角色，活動中學生自行操作、探索及相互討論，反思和函數概念的相關性。



第三節 活動設計

在文獻探討中，學生將函數與代數表徵、代數運算過度連結的情形，在不少研究(Markovits & et al.,1986；Vinner & et al.,1989；陳盈言，民 90；呂永聰，民 92)有提及。學生對於所學到的函數概念和日常生活情境、或其他學科的連結有困難，也出現在一些研究中(Lovell,1971；Even,1990；陳盈言，民 90；)。顯示學生雖熟悉函數運算，但對函數的意義並未能充份掌握，過度的訓練與反思教學活動的缺乏，益加使得函數與生活情境脫離。

研究者本身為教育工作者，反思到讓學生能用符號表達觀察到的規律、關係式是很重要的，因為數學是一種溝通工具(陳盈言，民 90)。練習如何表達解答的過程與使用的策略，可加強學生瞭解數學名詞、用語、符號與表示法。

國內九年一貫課程精神及美國 NCTM，都鼓勵教師利用電腦科技協助教學。根據九年一貫課程所揭櫫之精神，各學習領域應使用資訊科技為輔助學習之工具，以擴展各領域的學習，並提升學生解決問題的能力。這明顯指出數學的教學應與實際生活結合，必要時更要與資訊科技融合，利用電腦解決問題。

設計程式是為解決問題，學生進行程式設計，便是將解答的過程與使用的

策略，利用程式語言表達出來。用程式設計進行反思教學活動，除了讓學生經驗到函數概念與生活情境產生連結；也有機會觀察到符號、代數、語意等對學生函數概念的影響。

本研究的教學活動期望協助學生建立 Tall, D. & et al. (2000)提到的函數機器 (function machine)的概念心像，並非只是數字運算，也出現在日常生活情境中；透過程式設計過程，探討學生函數相關概念的學習狀況。以下從程式環境、學習情境、語言選擇及活動流程與內容說明研究活動的設計內涵。

一、程式環境

文獻與研究(Janvier,1987; Cuoco,1994; Even,1990; Schwarz,1996; Noss & Hoyles, 1996; NTCM ;左台益，民 90a) 顯示多重表徵與概念學習有密切關係，反映出以多重表徵來呈現同一個概念，並注重表徵間互相的連結及轉換是學習數學的方法之一。

DeMarois,P., & Tall, D.O. (1996,1998,1999) 研究中將函數呈現出來的表徵方式分成以下幾個面向：符號表徵(notation，如 $f(x)$ 的意義)、數值表徵(numeric，利用表格呈現數值)、代數表徵(symbolic，代數公式)、圖形表徵(geometric，函數圖形)、文字敘述表徵(written)、語言敘述表徵(verbal)、語意表徵(colloquial，即用 function machine 說明函數如同輸入一輸出的盒子)，代表函數的多種不同呈現型態。

知識的獲得是一連串的建構過程，且每個學生的知識具有個別性和特殊性，並非單從教師教學中獲得知識，而是有許多的來源，因此錯誤可能發生在思考過程中的任一步驟，且任何一個錯誤經常有多重的原因；然而錯誤並不全是缺點，它也是學習過程中的重要部份之一，錯誤產生的同時也創造新的學習機會，這個價值對學生與教師都很重要(引自郭丁熒，民 81)。

不同於傳統課堂的教學環境，Ayers(1988)等人和 Dubinsky 等其他研究者(Ayers& et al.,1988; Dubinsky, 1995,1998; Breidenbach& et al.,1992; Asiala & et al., 1996)從建構主義的觀點來看待函數概念的學習，透過電腦與程式設計的環境，探討學生函數的概念心像、函數概念的學習困難與迷思。

學生設計的程式，如果執行結果不對，就代表學生的想法有錯誤，因為電腦是死的，一定要使用者輸入指令後，電腦再依照指令執行。所以學生想得到正

確的結果，就一定要去思考自己那些想法有錯，導致程式執行錯誤，給學生有省思的機會，並非傳統課堂教學直接告訴學生答案。正如林福來(民80)所說的，經歷認知衝突後的學習較有效且較為穩固。

若從程式設計的角度來看學生的思考模式與錯誤概念，分析瞭解錯誤概念產生的可能因素，對函數概念教學也有所助益。教師瞭解學生常犯的錯誤之後，才有機會造成學生的認知衝突，進而改進教學。

本研究利用程式設計活動，藉由程式這個媒介，一方面呈現函數的另一種面貌；另一方面從程式環境這個角度，探討學生函數某些表徵之間轉換的問題，以及函數相關概念的學習狀況。若從 DeMarois, P., & Tall, D.O. (1996, 1998, 1999) 所提出的表徵中，列出本活動情境會呈現的表徵(符號表徵、代數表徵、語意表徵)，再加入程式，使這四者的轉換關係以四角錐形式呈現。

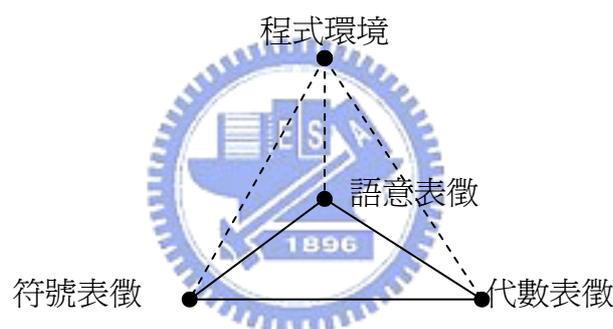


圖 3-2 程式與函數表徵轉換連結圖

二、有意義的學習情境

認知取向學習理論的學者，主張學習是學習者主動將新的資訊與先備知識產生有意義連結的歷程，學習是人們不斷地建構有意義知識的過程(沈中偉，民93)。

為使函數與日常生活情境連結，需要透過有意義的學習情境。Jonassen, Howland, Moore & Marra(2003) 指出學習活動和教學活動的設計若能同時包含以下五個屬性，將比單獨一個屬性出現，更能產生有意義的學習：主動學習 (active)、建構學習 (constructive)、意圖學習 (intentional)、真實學習 (authentic) 及合作學習 (cooperative)。上述五項有意義學習的屬性都是有相互關係與相互作用的(引自沈中偉，民93)。

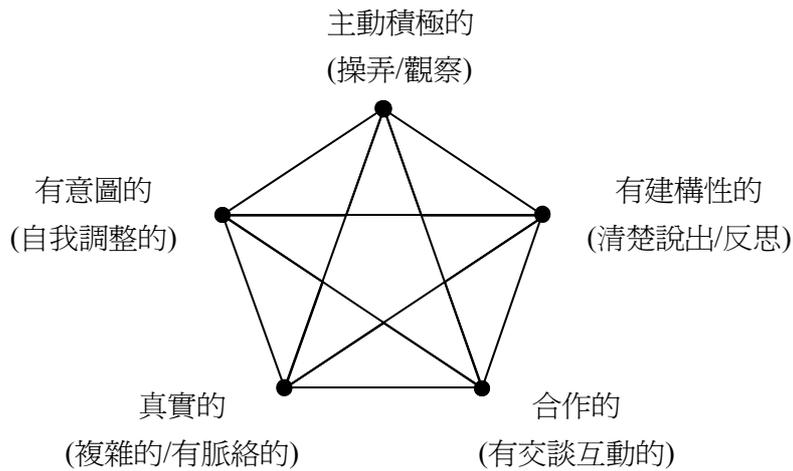


圖 3-3 五項有意義的學習屬性架構圖

(摘自Jonassen, Howland, Moore & Marra, 2003)

使用電腦上網已是學生的基本能力之一，教育單位也鼓勵學生設計個人專屬網頁，網頁設計可說是一個實際的生活情境。沈中偉(民 93)指出網頁因得以多媒體呈現生動活潑的畫面，此特性能激發學生的學習動機、吸引學生的注意力與提高學習興趣。

將 HTML 語法與 Javascript 程式設計結合的教學活動，學生心中會想像期望的網頁效果，於是便思考如何運用指令達到心中想要的網頁效果，然後由操弄指令、觀察結果，再進一步調整指令順序、程式結構，過程還會觀摩同學的內容，相互交流心得。

在活動的歷程中，學生並非被動的資訊接受者，而是主動的探究者。正如 Bruner(1966)倡導的發現學習法，強調學生的自主學習，主張讓學生在學習環境中主動探索、操弄事物，進而建構新的知識與解決問題。

三、程式語言的選擇

為因應我國高校教育環境及資源，使電腦程式反思函數教學活動可行，在選擇電腦語言時，有幾項要素需考慮，以下列舉這些要素及原因：

- (1)入手容易：若電腦語法不易上手，則會花許多時間在語法認知上，減弱數學概念的學習，有時可能因負擔產生學習的負效果。
- (2)成本：軟體版權費用在中等學校資訊設備支出上，佔了很大比例，電腦語言的選擇需考慮費用，則程式輔助函數教學課程才有執行的可能。

(3)操作便利：寫完的程式在執行上應十分便利且具立即性，若還須透過編譯或其他配搭軟體，或轉換新的平台才能執行，則會增加學生操作負擔。此操作性因素將干擾學習注意力，減弱學習效果，也使得課程執行時程拉長。

HTML 與 Javascript 在瀏覽器環境中執行，對學生而言熟悉且簡便，只要有視窗系統即可執行，是免費的。

四、活動流程與內容

整個活動是以HTML活動出發，HTML指令如同Tall, D. & et al. (2000)提到的函數機器(function machine)，學生從HTML指令的操作中，建立「輸出—輸入」的認知根基(cognitive root)，再由認知根基去反思函數概念，包含關於符號表徵、代數表徵、語意表徵等問題。

為探討學生這些表徵的問題，透過 JavaScript 程式設計活動，藉用程式為媒介去瞭解。HTML 缺乏數字運算、邏輯判斷和自訂函數的功能，無法從中探討學生在建構函數時，有關符號表徵、代數表徵、語意表徵等問題如何發生。Javascript能進行數字運算，語法具有邏輯判斷，能讓使用者自訂函數，直接將程式碼嵌入HTML中即可執行，不會造成新的操作負擔，故在HTML活動後，接著引入 Javascript 程式語言於活動中。

活動以 5 週為期，每一週實施一次，一次 2.5 小時，每週活動內容如下：

Week1 HTML 基本語法與設計應用

Week2 (1) HTML 設計應用 (2) Java Applet

Week3 Java Script 基本語法規則與變數概念

Week4 Java Script 邏輯語法

Week5 Java Script 函數設計

以下針對這五個活動，各舉範例說明活動內容與目標。而所有活動詳細內容與範例、流程請參見附錄二。

(1)活動一

此活動的目標是協助學生建立函數機器的概念心像 (a)讓學生知道函數是一種「輸入－輸出」的對應關係 (b)輸出與輸入的元素不一定是數字 (c)透過網頁情境與生活情境連結。以下摘取活動範例說明。

範例

教師部份：教師有三項工作，一為示範該指令的用法與執行方式；二為協助操作問題；三在學生練習完該指令後，引導學生思考活動內容與函數概念的關係。

```
<html>  
<body bgcolor = red >  
</html>
```



圖 3-4 活動一範例圖

學生部份：讓學生選擇所喜歡的顏色，修改自己網頁的背景顏色。請學生將操作與觀察到的結果，思考「輸入－輸出」的對應關係和函數概念的關係，並寫在學習單上。

在學生練習後，老師向學生提問：「你們覺得輸入顏色名稱，網頁背景出現相對應的顏色，和我們所學的函數概念有何關係？」這一提問主要是提出問題，刺激學生思考並喚起函數的概念心像，將想法寫在學習單上。

給予一段時間後，老師再說明可將 `< body bgcolor >` 視為一個函數，根據所「輸入」顏色名稱，該函數會將顏色「輸出」到網頁背景；讓學生體驗到函數並不侷限於數及數的運算，任何形式的元素都可以，並感受到函數在實際生活情境的呈現。此範例達到活動目標 (a) (b) (c)。

緊接著，教師教完幾個新的指令後，學生爲了要設計出想要的網頁效果，就必須對各個指令做適當的規劃與設計，在腦中預想呈現的結果會如此？如果結果未如預期，思考錯誤的原因是甚麼？應如何解決等？讓學生經過嘗試過程。

(2)活動二

一些研究認為要發展函數合成概念，需要將函數運作過程整體視為一個物件(Ayers & et al.,1988；Dubinsk, 995,1998；Breidenbach & et al.,1992；Asiala & et al., 1996)。Java Applet 是利用 Java 語言所設計好的一個程式檔案，將之嵌入在 HTML中，會使網頁具有某種視聽覺特效。網頁設計者並不需要知道所使用的 Java Applet 是如何設計，或是程式原始碼的運作流程，只需瞭解相關參數及對應效果即可。此活動在網頁設計中引入 Java Applet 目標是要協助學生瞭解函數具有物件性質，並繼續強化「輸入－輸出」的概念心像。

範例

教師部份：教師有三項工作，一為說明與示範嵌入 Java Applet 的方法與執行方式；二為協助操作問題；三在學生練習完該指令後，說明本範例和函數的關係。

學生部份：要求學生於所指定的網站中自行下載兩種不同的 Java Applet 檔案，然後嵌入於所設計的網頁中，透過操作與觀察結果，請學生用數學的函數概念來說明 Java Applet 和 HTML 之間的關係。



圖 3-5 活動二範例圖一

在學生練習後，老師向學生提問：「你們觀察 Java Applet 輸入參數後得到輸出結果，和我們所學的函數概念有何關係？」讓學生思考此問題，並將想法寫在學習單上。

教師在學生練習完之後，說明此範例和函數概念的關係。上圖是一個網頁檔的原始內容，而在這個檔案之外，另存在一個 Java Applet 檔，名為 flame.class

的檔案。透過 `<applet code="flame.class" >` 將 Java Applet 嵌入於網頁檔案中，再利用 `<param name=text value="Hello!!">` 設定參數效果 (param name=text 表示此為文字型態的參數，value="Hello!!" 表示輸入的參數值是 "Hello!!")。以下圖解說範例呈現的結果以及與函數概念的關係。

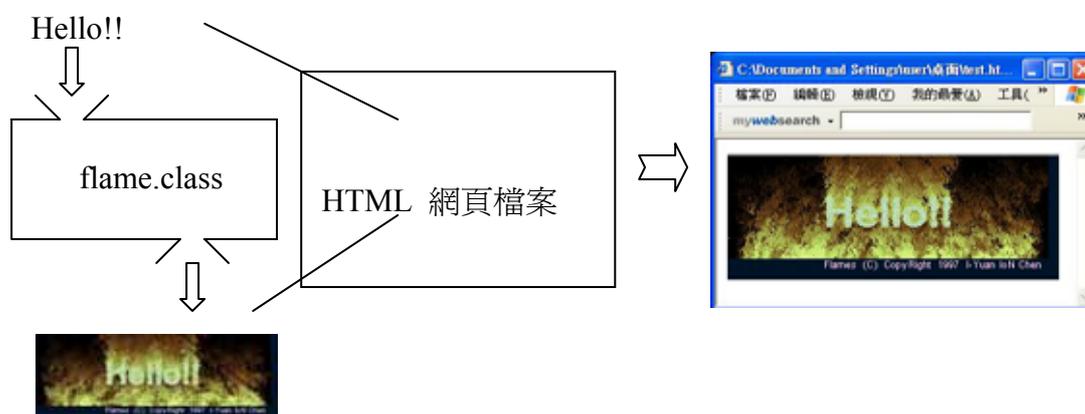


圖 3-6 活動二範例圖二

由上圖此可知，設計者不需要知道所使用的 Java Applet，它的程式原始碼內容為何，只需將它整體視為一個「輸入—輸出」的物件，知道參數及對應效果即可。此外，由於 Java Applet 嵌入於 HTML 的特性，使其隱含有函數合成的概念。

教師在此活動中要讓學生瞭解，有些時候並無法知道函數詳細的對應規則，僅能知道其輸入與輸出元素的資料型態(數值、字元、圖像等)，必要時將其當作物件來處理。

(3)活動三

教師部份：教師先說明前兩次的活動並不知道電腦各指令的內部運作細節，只知輸入參數和輸出效果的關係，猶如黑箱(black box)。接下來所要學習的語言，可以依照所想要的功能，自訂一段程式(函數)，就是白箱(white box)的狀態。然後示範 JavaScript 語法與執行方式，並協助學生操作上的問題。

活動課程先介紹 Javascript 語言基本語法，引導學生經驗函數以程式的形式呈現，活動目標為 (a)「輸入—輸出」的對應關係 (b)不同的函數具有不同對應關係 (c)定義變數 (d)建構函數(設計程式)。以下摘取兩個活動範例說明。

範例一：

```
<Script language="JavaScript">  
document.write("這是 JavaScript 程式");  
</Script>
```



圖 3-7 活動三範例圖一

學生部份：讓學生重複操作，將想設計的網頁文字內容利用此指令呈現，並思考用數學的函數概念來解釋呈現結果。

教師在學生練習後，說明可將 `document.write()` 視為函數，根據所輸入於括號中的文字，轉換網頁文字形式而呈現。括號中的文字可視為輸入的部份（定義域），呈現在網頁上的文字內容是輸出部份（對應域）。

另外，因為 JavaScript 程式段和 Java Applet 相同，都是嵌入在 HTML 檔案中，可將整個 JavaScript 程式段視為一個的物件，隱含有函數合成的概念。此範例達到活動目標 (a)。

範例二：



```
<script language=javascript>  
var sentence;  
sentence=prompt("請輸入妳的暱稱");  
document.write("親愛的");  
document.write("<font color=dodgerblue>", sentence , "</font>");  
document.write("歡迎你蒞臨本站!!!");  
</script>
```

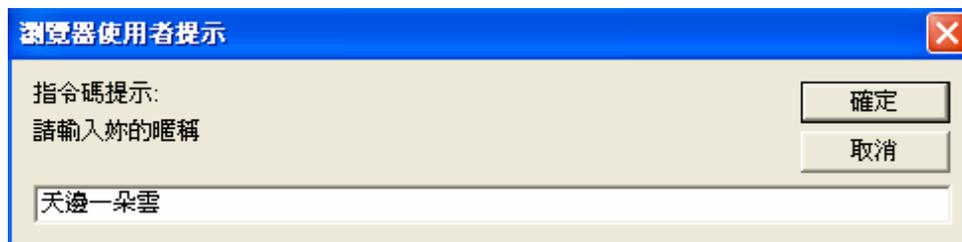


圖 3-8 活動三範例圖二

教師部份：在此範例中，教師介紹 `var sentence`; 如同數學定義一個變數名為 `sentence`。而 `prompt()`; 是另一個函數，功能是出現提示視窗，讓使用者輸入值(任何文字)，再指定給 `sentence` 這變數，然後候程式會將 `sentence` 的內容依照指定的功能呈現於網頁上。至於呈現的效果，就是設計者自行建構的程式內容。

學生部份：讓學生重複自行操作，要求改變其他效果，如置中、改變字體大小等，並思考用數學的函數概念來解釋呈現結果。

在此範例中，讓學生定義變數，體會設計出來的程式如同函數，針對所定義的變數操弄。程式執行時，提示視窗讓使用者輸入資料(參數)後，該資料即經過程式的執行運作，輸出結果呈現於網頁上，學生可立即看到輸入與輸出結果的對應關係。此範例達到活動目標(a) (b) (c) (d)。

(4)活動四：介紹 Javascript 語言的邏輯判斷語法(`if ()`、`else`)，透過此活動預期達到目標為 (a)瞭解邏輯判斷對程式運作流程的影響，確實掌握函數運作的程序 (b)建構等同於分段定義函數的程式 (c)由程式轉換成代數表徵 (d)由文字敘述轉換成程式表徵。以下摘取二個活動範例說明。

範例一：



```
<Script language="JavaScript">
  var a = 45 ;
  var b = 32 ;
  if (a > b)
    document.write(" a 數值比 b 數值大 ");
  else
    document.write(" b 數值比 a 數值大 ");
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>
```

圖 3-9 活動四程式範例圖一

教師部份：在此範例中，教師示範語法，並說明邏輯與法對程式執行流程的影響。

學生部份：讓學生改變變數的內容值，觀察程式執行的結果。然後請學生模仿範例，設計一小程式，可以讓使用者輸入一個數字，然後此程式判斷輸入的數字是否有大於 50。如果有大於 50，請顯示"超過!";如果沒有，請顯示"小於 50"。

此活動要求學生設計可讓使用者輸入參數的功能，參數的值會影響執行結果，學生必須掌握清楚程式執行的流程，代入數值檢驗正確性。此範例欲達到活動目標(a) (b) (d)。

在學生練習後，教師藉由發問「這程式根據不同的條件，獲得不同的結果，和我們所看到的那些函數相似」，讓學生觀察並思考此程式的結構，和分段定義函數結構上的相同處。緊接著藉由下一個範例，給予學生一段程式，檢視其是否能寫出相對應的分段定義函數的代數表徵。

範例二：

```
var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
var result=0;
if ( input<=0 )
    { result = input + 2;
      document.write(result);}
else
    { result = 3 * input - 1;
      document.write(result);}
```

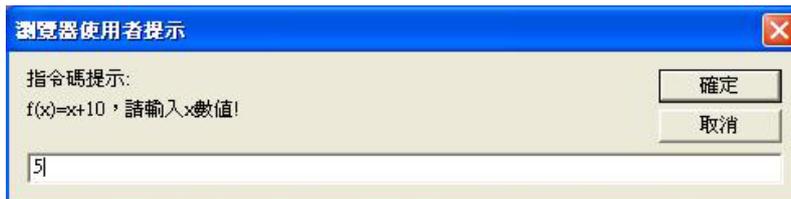
圖 3-10 活動四程式範例圖二

學生部份：讓學生閱讀一段程式後，試著將之轉換成數學的代數表徵形式，以瞭解學生在分段定義函數上，能否順利地將程式與代數表徵順利產生連結。此範例期望達到活動目標(a) (c)

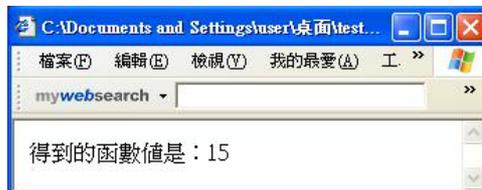
(5)活動五：介紹 Javascript 語言定義函數的指令語法(function)，透過此活動預期達到目標為 (a)建構與定義函數 (b)掌握函數運作的程序內容 (c)在程式表徵與代數表徵間轉換 (d)函數合成 (e)「輸出—輸入」的對應關係 (f)不同的函數具有不同對應規則。以下摘取二個活動範例說明。

範例一

```
<Script language="JavaScript">
  var input = prompt("f(x)=x+10，請輸入 x 數值!");
  function a(n)
  { var x=n+10; return(x); }
  var result=a(input);
  document.write ("得到的函數值是：", result);
</Script>
```



圖一



圖二

圖 3-11 活動五程式範例圖一

教師部份：在此範例中，教師示範語法，並說明執行流程。

學生部份：讓學生設定一個代數表徵的函數，練習轉換成程式，觀察程式執行的結果。

在學生練習後，老師向學生提問：「你們覺得輸入數字，得到一個結果，和我們所學的函數概念有何關係？」，「你們輸入數字所得到的結果，和你們所定義的式子有何關係？」這一提問主要刺激學生思考函數對應規則和代數式的關係。老師繼續提問：「程式中有定義一個函數，若和數學的函數形式結構比較，兩者那些部份可互相對應？」，這問題主要讓學生去思考函數代數表徵各部份的涵義，如 $f(x)=x+10$ ， f 代表函數名稱， $x+10$ 表示對應規則。

此活動要求學生定義一個和代數表徵相同運算規則的程式，並設計可讓使用者輸入參數的功能，參數的值會影響執行結果，學生必須清楚掌握程式執行的流程，並代入數值檢驗正確性。此範例期望達到活動目標(a) (b) (c) (e) (f)。

範例二

```
<Script language="JavaScript">
  var choice = prompt("要求 f ◦ g(x) 請按 1 ；要求 g ◦ f(x) 請按 2! ");
  var input = (prompt("請輸入數值！"));
  var result=0;
  function f(n1) { var x=n+2; return(x); }
  function g(n2) { var y=n*n-2; return(y); }
  if(choice==1)
    { result=f(g(input));
      document.write("得到 f(g(",choice,"))的函數值是：", result); }
  else
    { result=g(f(input));
      document.write("得到 g(f(",choice,"))的函數值是：", result); }
</Script>
```

圖 3-12 活動五程式範例圖二

教師部份：在此範例中，教師示範語法，並說明執行流程。

學生部份：先讓學生修改運算規則與觀察程式執行的結果，然後由教師指定予兩個代數表徵的函數，要求學生練習轉換成程式，觀察程式執行的結果。

教師在本例中說明程式定義了兩個函數 f 和 g （斜體部份），使用者可根據選擇來計算 $f(g(\text{input}))$ 或是 $g(f(\text{input}))$ 的值，此正是函數合成的形式。此活動達到活動目標(a) (b) (c) (d) (e) (f)

第四節 研究工具

研究中所使用的工具包括電腦設備、電腦教學活動講義、學習單、活動前紙本問卷、活動後紙本問題、個別晤談工具。

1. 電腦設備

活動施行地點在學校電腦教室，使用一般視窗作業系統(window XP)的電腦。

2. 電腦教學活動講義與學習單

(1) 教學活動講義：指在電腦活動中，提供給學生的程式指令操作方式與範例的講義。

(2) 學習單：請學生對學習單上所附的問題，反思電腦活動內容和函數概念的
的關係。

3. 活動前紙本問題

主要瞭解學生在活動前，原本的函數概念心像為何。

4. 活動後紙本問題

用以瞭解學生在活動後，對函數概念的反思情形，探討函數概念心像的變化，
代數、符號及語意對學生函數概念的影響。

5. 個別晤談工具

主要針對活動後紙本問題對學生進行晤談，深入發覺學生內在的想法。過程
準備錄音筆將整個晤談內容記錄起來，再轉換成文字稿進行資料分析。

第五節 資料分析方法

本研究欲利用程式設計對函數概念進行短期的反思教學活動，瞭解學生學
動前後對函數概念的影響，並從此種教學活動中發覺學生學習函數概念的困難及
相關的迷思。學生在活動學習過程的想法、困難與迷思，是本研究的探究重點，
本研究採行質的研究為主要研究方法，資料蒐集以晤談、前後紙本問題內容，並
輔以現場觀察內容。以質性的觀點分析資料，企盼能對本活動對於學生學習函數
概念的影響相關面貌，賦予更清楚的詮釋。

一、資料蒐集的方法

1. 觀察

研究者觀察並記錄學生的討論、學生的解題、學生的活動單、電腦檔案及
師生對話。因此，教室觀察紀錄的內容包括了，現場看到、聽到或經驗到的事件，
及當時的想法。

2. 晤談錄音

活動後為深入探討學生的函數概念，除了運用紙本問卷、測驗初步檢核之
外，並運用半結構性晤談，以深層探討學生的想法，使用錄音儀器記錄，以利日
後分析能循環進行。

二、資料整理與分析

在質的研究過程中，資料的蒐集、整理與分析是持續且循環進行的(黃瑞琴，民83)。首先，研究者須將蒐集的錄音資料一一轉譯成文字稿，先就內容作初步的分析歸類，找出與研究主題相關或相似的內容就資料內容的特性給予標題。經由重複的審視資料的過程將相類似的標題歸類在一起，而這些分析與歸類的資料，再交給另一位現職高中數學教師檢視，對其中分析的內容與歸類進行討論與修正。



第四章 資料分析與討論

本研究蒐集學生的活動前紙本問卷、學習單、活動後紙本問卷、晤談及電腦活動情形，探討學生的函數概念，包含函數的概念心像，以及函數的代數表徵、符號表徵、語意表徵的表現情形。以下將研究結果分為二小節來討論，第一節陳述學生函數的概念心像；第二節藉由程式讓學生在函數符號表徵、代數表徵、語意表徵之間轉換時，探討影響學生函數概念學習的因素。

本章資料呈現使用的符號說明如下：活動前紙本問卷(Pre-Questionnaire, P，參閱附錄三)、晤談內容以活動後紙本問卷(Questionnaire, Q，參閱附錄四)的問題為主，例如：P-1 表示活動前紙本問卷第 1 題，Q-1-a 表示活動後紙本問卷第 1 大題第 a 小題。

第一節 程式設計對函數概念心像的改變情形

一、代值求值的運算

在活動前，從 P-1 的資料發現，學生對函數的看法普遍認為函數的是一種代值求值的運算，為進一步瞭解學生的想法，摘錄學生在 Q-8 的晤談內容：

S6：上電腦課之前，我是覺得函數只是一種數字而已，把一個數字代進去可以得到另外一個數字，就只有數字的運算而已。上了這個課程以後，我是覺得不是只有數字的運算，…。

S9：還沒有上過(電腦活動)之前，覺得那只是一種運算的方式，數學運算的方式。

S11：之前(指電腦活動之前)只是想說代一個數字進去會得到一個結果，然後(指電腦活動之後)就不一定要代數字進去呀，就用其他東西。

T：在還沒上這電腦課之前，如果你要跟人家解釋什麼是函數，你會怎麼說？

S12：就一個數字代進去會得到另外一個數字。

T：那現在呢？…

S12：就是有個東西經過某個規則之後，會得到另外某個結果。

T：喔，另外的結果，那這個東西不一定是數字囉。

S12：對。

從學生的晤談內容發現，學生普遍在活動前認為函數和數字運算有關，操作的物件只是數字，如同陳盈言(民 90)發現到有些學生忽略函數的對應關係，而強調數值改變，甚至發生「若 y 值未隨改變，則 y 不是 x 的函數」的迷思。在活動後則跳脫此種認知，有助於建立函數是一種「輸入與輸出」對應規則的概念，輸入與輸出的物件並非一定是數值。

二、代數運算式的印象

在活動前，從 P-2 的資料發現，學生所舉的函數例子，大多以多項式表示函數的對應規則，再以代值求值的過程說明它的運算方式。從文獻研究(Ayers & et al., 1988 ;Vinner & Dreyfus, 1989) 發現，許多學生的函數概念侷限於代數運算式(algebraic formula)，研究者猜想可能是課堂教授函數的對應規則時，所舉的函數規則範例大多是多項式為主，使學生的函數概念與多項式產生過度連結(吳玫瑤，民 90)。

另外，學生用代值求值的過程說明函數的運算方式，似乎未瞭解函數是一種「輸入與輸出」的規則或對應關係。本研究期望透過電腦活動，程式表徵的呈現，協助學生建立函數為一種「輸入與輸出」規則或對應關係的認知根基。以下摘錄學生在程式設計活動後的 Q-8 晤談內容：

S6：函數就是把一種像原料，代入那個規則裡面，經過規則的運算就可以
求出它的答案，就是計算過後的答案。

T：計算過後的答案？那個規則一定要計算？

S6：不一定啦，那只是一個規則，...

S12：現在喔，會有不同的規則，然後經過那些規則會有不同的效果出來。
...

S12：就是有個東西經過某個規則之後，會得到另外某個結果。
...

T12：那這規則是數學式子嗎(指代數運算式)？

S12：不一定。

從晤談內容發現，學生在電腦活動後，認為函數是一種「輸入與輸出」的規則，認為對應規則不一定侷限於代數運算式，S12 談到「不同的規則，會有不同的效果」，說明他對視函數為一種規則，不同函數具有不同的規則。

為探討學生在電腦活動後，若認為函數的對應規則不一定侷限於代數運算式，則面臨沒有代數運算式的問題情境，是否也能以函數的觀點來看待。Q-7 即根據這樣的目的設計，函數的運算規則題目以文字敘述說明，操作對象是圖形，摘錄學生 Q-7 晤談內容如下：

T：…第七題你說有像函數，可是運算式或運算規則那裡？

S5：嗯，題目 F1、F2、F3 的就是運算規則。

T：那請看第(1)小題…，運算規則是什麼？

S5：F1 的轉動。

T：代入的數值呢？

S5：這個圖。

T：我是說整個大題(第七大題)裡面，那些看得出它是函數？

S6：題目所給的 F1、F2、F3。

T：那這(函數的)規則是數學式子嗎？

S12：不一定。

T：不一定？那可以是什麼？

S12：就像第七題一樣，就是旋轉、翻轉，…。

S5、S6、S12 能將 Q-7 中 F1、F2、F3 三個以文字敘述的轉動方式，視為函數的運算規則。再比較前面的晤談內容發現，S6、S12 在電腦活動前後，對函數運算規則的概念心像不再侷限於代數運算式；對於文字敘述情境的問題，也能找出其中的運算規則。

為瞭解本研究的電腦活動，對於學生在處理沒有數字與代數運算式的函數問題時，是否會影響學生解題的想法與思考，進行更深入的晤談如下：

T：所以還沒上電腦課之前，你不知道第七題怎麼下手？

S6：對呀，就想不出來怎樣才弄得出來。

…

T：…，因為它沒有數字是不是？

S6：對呀，就感覺沒有數字，有點抽象。

T：還沒上電腦課之前，你會把第七題看成函數嗎？

S7：不會。

T：那上完後呢？

S7：覺得和函數有點關係。

T：你有說第七題和函有點關係？你覺得那個部份和函數有關？

S7：就是你有設定轉動方式嘛。

T: 轉動方式怎麼樣?
 S7: 就像是函數的公式。
 T: 哦，轉動方式就像是函數的公式?
 S7: 對。
 T: 可是函數不是要代入數字嗎?
 S7: 就是那個圖形，代進去轉動得到圖形。
 T: 圖形就是代入的數字，後來的圖形就是代入後得到的數字?
 S7: 對。

T: 如果還沒上電腦課，妳會把它想成是函數嗎?
 S11: 沒有，可能不會這樣想，可能只會很單純地想把它翻來翻去。
 T: …，之前(活動前)不會把它看成是和函數有關係，只是當做是數學的問題，但現在(活動後)就可以把它用函數的觀點來看待?
 S11: 對對對，就是這個意思。

S13: 寫第七題想法就跟以前不太一樣?

T: 跟什麼不太一樣?

…

T: 那你以前看到函數，就是要有數字跟式子去運算?而這邊都沒有。

S13: 對，看到這(指第七題)就不會聯想到。

T: 喔，現在看到這就會聯想到?

S13: 嗯，對。

由學生 S6、S7、S11、S13 的晤談內容，「之前(活動前)不會把它看成是和函數有關係」、「現在(活動後)就可以把它用函數的觀點來看待」，可看出電腦活動前後，他們處理 Q-7 問題的想法與思考方式有所不同。活動前並未覺得本題和函數有關聯性，活動後則能夠用函數的觀點處理，顯示本研究的電腦活動對學生函數概念心像產生改變。

三、程式環境下的表現

從 Q-1-a、Q-2-a、Q-2-b、Q-3-a、Q-3-b 檢測學生函數概念心像所建立起來的認知根基，閱讀程式表徵的能力，答題結果如下表：

	Q-1-a	Q-2-a	Q-2-b	Q-3-a	Q-3-b
答對人數	13	13	13	12	12

表 4-1 紙本後測程式求值答對人數統計表

從表格中看到僅有一位學生 S2 在 Q-3-a、Q-3-b 答錯，再透過晤談內容瞭解其錯誤原因。

S2：因為 4 除以 2 餘 0 就得到 1，咦？等一下，所以是 1 代入 g，得到 2。

T：那剛為什麼說代入 0？

S2：看錯了。

我們可發現 S2 是在計算過程因誤看(看錯了)發生誤算，並非看不懂程式流程。整個數據顯示學生視函數為「輸入與輸出」對應規則的概念心像，在程式表徵下，能正確執行程式所呈現的函數對應規則，表示能看懂函數的程式表徵。

上面結果顯示透過程式設計活動，學生改變以往函數是數字運算，並且會有一個代數運算式的印象，建立起函數是一種「輸入與輸出」對應規則的概念心像。反映函數教學時應注意範例的形式、代數運算式與多項式對學生函數概念的影響。

第二節 程式設計情境反映學生函數概念的學習狀況

函數具有多重表徵，本研究透過程式設計情境，整理並分析學生符號表徵、代數表徵、語意表徵的運作情形，探討影響學生函數概念學習的因素。

一、省思次方符號的代數意義

本活動使用的 JavaScript 程式語法沒有次方的指令，在進行電腦活動五，曾有隨堂練習題讓學生建構代數運算式有平方的函數，許多學生於活動時感到困難，僅有 1 人較快想到解決方案，其他同學經提示後也順利設計出程式。

在程式設計活動後，利用 Q-4-a、Q-4-b 瞭解學生從代數表徵轉換到程式表徵的情形，整理答題結果如下表：

	Q-4-a	Q-4-b
答對人數	13	12

表 4-2 紙本後測第四大題答對人數統計表

除一位學生(S5，原因請見代數表徵)未設計出來 Q-4-b 外，其餘都能正確設計出程式。儘管能夠設計出程式，研究者想從晤談資料去瞭解，Q-4-b 中平方的

部份，為何在電腦活動演練讓學生花較多時間。晤談內容如下：

T：…你在寫這兩個程式(Q-4-a、Q-4-b)，有沒有那個地方要讓你多用腦筋去想的？

S8：就，只有這邊吧。(指著 x^2)

S6：要想很久才能，就是想那平方怎麼弄。(思考平方如何在程式表示)

T：以為要用什麼特殊符號是不是？

S6：對對對，想說平方應該有什麼東西才可以就可以弄出來。

S6：就結果，就覺得出人預料。

S6：怎麼變得那麼簡單，這麼簡單就可以弄出來。

T：所以你們那時候在寫的時候，是不是在想 x^2 有特殊的表示方法？

S12：對。

T：可是沒有想到用最簡單的方法就可以了。

S12：嗯。

…

T：那為什麼會發生這個現象？為什麼沒辦法直接想 x^2 就是 x 乘 x ？

S12：因為我們數學表示法 x 乘 x 就是 x^2 ，可是很少在平常數學情形寫 x 乘 x ，這時候我們通常就寫 x^2 ，我們直接想 x^2 ，不會利用到 x 乘 x 這個東西在數學表示方法。

這些學生(S6、S8、S12)在同年級中的數學學習成就屬於前20%，他們的晤談資料反映要用程式表示 x^2 較困難，依然直覺性地想找 x^2 在程式中的指令為何？一時忽略 $x^2 = x \cdot x$ 的最基本定義。高成就學生習慣使用高層次發展的符號，在非數學的應用情境(如程式設計)時，較易忘卻原始的代數運算方式，不一定會使用以往已學過最基本的知識概念、符號來表達，因而在轉換到代數表徵的歷程上產生了阻礙。

有一位學生(S11)在活動時曾嘗試用 $x \cdot x$ 來，晤談內容如下：

T： x 乘以 x ，那個乘用點？

S11：對。

T：喔， γ 只是一直跑不出來。

S11：對，後來說那個用乘要用米字號。

此反映學生在學習新的領域知識時，會引用舊經驗的符號，並未加以注意使用的情境是否適宜。舊知識與新知識的連結是要注意的(吳玫瑤，民90)。

本活動透過程式設計情境，提供學生一個機會反思到多項函數中，有關次方的基本運作定義，而非只是盲目地標記符號而已。長期以來學生習慣某些符號

與相關的代數運算，但在新的表徵情境下，並未必能順利的產生連結，從此問題可看出程式設計活動如同搭起符號表徵與代數表徵轉換的橋樑，學生從過程中反思符號的代數意義，這也是課堂教授值得注意的地方。教師在多項函數教學上，應多加留意符號表徵與代數表徵轉換的連結。

二、變數名稱的影響

Q-1-b、Q-3-d 想檢測學生從程式表徵表換到代數表徵的狀況，這兩題的函數都連續函數，答題結果如下表：

	Q-1-b	Q-3-d
答對人數	13	9

表 4-3 紙本後測程式連結代數式答對人數統計表(連續函數)

有三位學生 S1、S2、S9 在 Q-3-d 的答案是 $g(y)=3y-1$ ，從晤談內容瞭解其想法：

T：那本來為什麼要寫 y ？

S9：因為直接抄程式…(改寫成 $g(x)=3x-1$)

T：為什麼這樣改？(S2 將 $g(y)=3y-1$ 改寫成 $g(x)=3x-1$)

S2：因為一樣啊

T： x 和 y 一樣？

S2：對。

晤談發現學生由程式表徵轉換到代數表徵時，是直接從程式碼中的代數運算式轉譯，「直接抄程式」說明 S9 未考慮到題目的符號要求，S9、S2 和 S1 都經過研究者詢問才注意到而改變。

另外有一位學生 S5 未在 Q-3-d 答題，晤談內容如下：

S5：喔喝喝，因為那時候，我看到他的題目是， $g(y)$ ，但是，又換成 x ，我是想是不是哪裡不一樣

S5 提到「 $g(y)$ 、換成 x 、是不是哪裡不一樣」顯示符號的改變，使 S5 對結果產生疑惑，再比對他在 Q-1-a、Q-2-a、Q-3-a、Q-3-b 代值運算的答案均正確，顯示該生未瞭解 $g(x)$ 的意義是一個函數值，使得在 Q-1-b、Q-3-d 這兩題有不同的表現結果。

若將比對一下「S1、S2、S9」與S5兩者間的差異，前組三位學生仍是寫出正確的函數，只是使用的變數名稱不同，並不會影響其思考與想法，能掌握變數在函數中的意義；但S5則產生疑惑而未回答本題，顯示該生的函數概念，有關變數名稱在對應規則的意義仍未十分清楚。

此結果正如陳盈言(民，90)所提及，學生變數概念的成熟度對其函數概念發展是有影響的，建議教師在函數教學前，應先瞭解學生變數概念的學習狀況，輔以適當的複習與補救，有助於學生在變數概念的基礎上理解函數概念。

三、影響分段定義函數學習的因素

Q-2-c 的函數是分段定義函數，所有學生的答題狀況表現如下圖，學生的代號顯示於各答題類型的旁邊。左右表示函數符號名稱使用正確與否的區別，左邊使用正確的函數名稱，右邊則使用不正確的名稱；用上下表示分段定義函數符號表達能力的區別，上層的表示法較下層正確，表達能力的層次較高，虛線表示兩者等價。

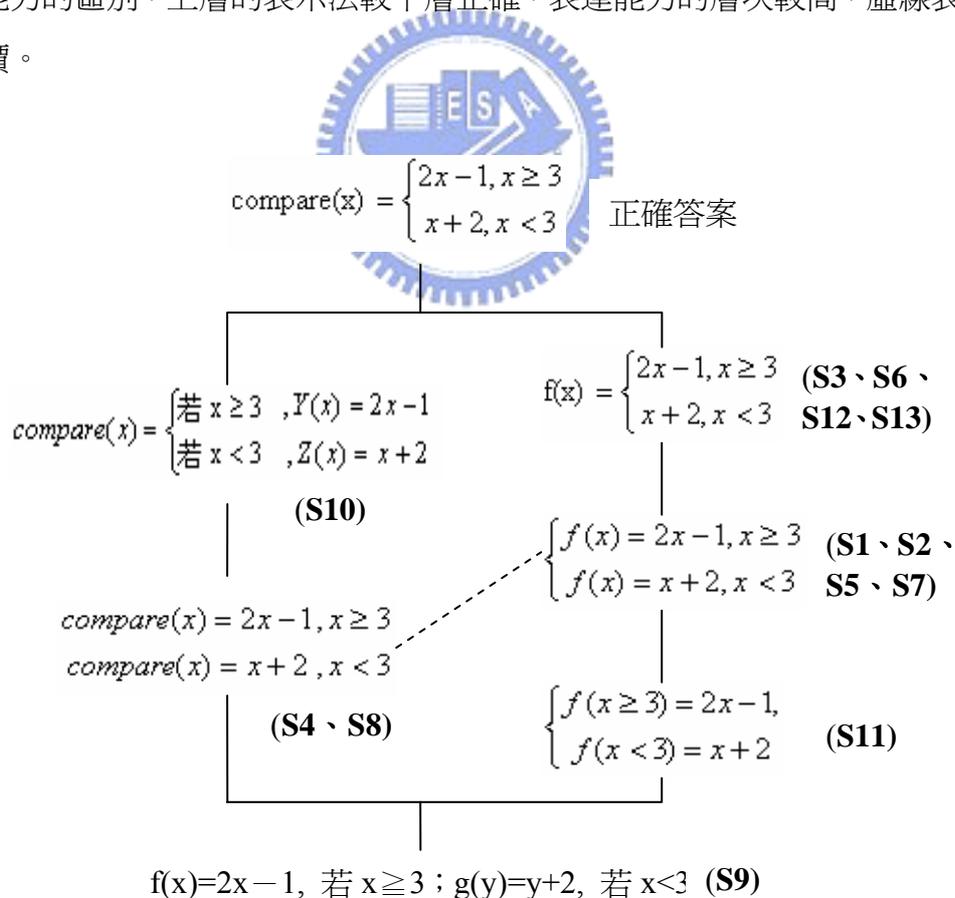


圖 4-1 紙本後測第二大題(c)小題學生答題類型圖

本題沒有人答對，題目是要將 $\text{compare}(x)$ 用代數表徵表示，許多學生(S3、S6、S12、S13、S1、S2、S5、S7、S11、S9)都是用 $f(x)$ 表示 $\text{compare}(x)$ ，推測可能習慣用 $f(x)$ 表示函數，晤談學生內容如下：

T：這題不是問你定義 $\text{compare}(x)$ 函數嗎？為何用 $f(x)$ ？

S7：函數習慣用 $f(x)$ ，因為老師教的時候都是用 $f(x)$ 。

T：那麼函數一定要用 $f(x)$ 嗎？

S7：可以用別的名稱。

T：你那時候怎麼會想用 f ？

S9：因為我們之前數學函數都以 f 、 g 或 h 來表示。

晤談內容提到「因為老師教的時候都是用 $f(x)$ 、函數習慣用 $f(x)$ 」，顯示學生受到範例影響很大，進而造成 $f(x)$ 這個符號與函數產生過度連結。

另外，許多學生(S1、S2、S4、S5、S7、S8、S9、S10、S11)都是用兩個式子表示，猜測學生可能習慣函數符號($f(x)$)之後，要立即有運算式。

S8：就是它應該會給你一條運算的方法，然後你可以代入你要代入的數字。再把它代進去那個運算的方法，就會得到一樣東西。

T：那你覺得強烈的函數要怎樣？

S10：就是這樣呀(指著自己寫的)！很明白把它(運算式)列出來，就是不斷的代數字，就是數學的函數。

晤談內容 S8 提到「應該會給你一條運算的方法」，S10 提到「不斷的代數字」顯示學生受到連續函數影響，覺得函數符號後應該要有代數運算式，不然就不像函數，這與 Vinner & Dreyfus (1989) 所發現的結果相同，他們從學生答題的文字解釋發覺，有些學生認為一個函數應該只能有一個相對應的代數運算式，這種想法在判斷函數上扮演重要的角色。

和 Q-1-b、Q-3-d 兩題比較，可看出學生對於分段定義函數較感困難，也呈現出一些符號使用上的問題，例如 S11 不知如何表示分段定義域，直接將分段條件加在輸入區域。關於學生在處理分段定義函數感到困難的現象，也出現在一些研究文獻(Markovits & et al., 1986；呂永聰，民 93)中。

四、運算符號的誤用及影響常數函數學習的因素

Q-3-c 的函數是分段定義函數，每一段都是常數函數，所有學生的答題狀況表現如下圖，學生的代號顯示於各答題類型的旁邊。左右表示表示分段定義函數表達方式的區別，左邊是分成兩部份，右邊則是能合併成爲一個；用上下表示符號使用能力與正確性的區別，較上層的符號使用較正確，離正確答案較接近；虛線表示兩者等價。

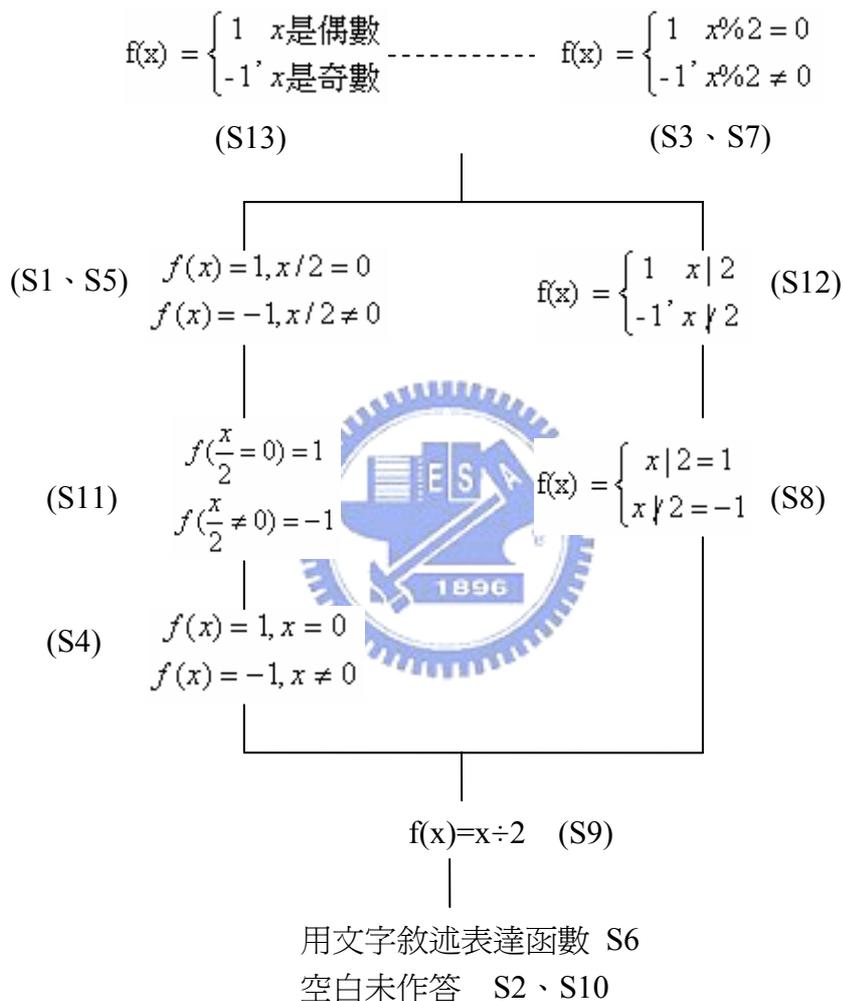


圖 4-2 紙本後測第三大題(c)小題學生答題類型圖

學生 S8、S12 寫出接近答案的形式，但整除符號的順序弄錯。從 S6 的寫法可看出未掌握到函數值表示法的意義，晤談資料「f(x)，如果(x)被 2 整除就代 1，不能被 2 整除就代 -1」顯示 S8 是直接將思考的流程寫出來。

學生 S6 利用文字表達出該函數，「把一個值放入(x/2)中，如果整除就得到 1，若不是則得到 -1」，其在晤談時正確地描述這個函數的功能，只是不解

題意要求寫成代數表徵。但他借用 $(x/2)$ 符號表示要取餘數，這和 S1、S5、S11 及 S9 有相同的現象，故從晤談中探究原因。

T：好，那我問你一個問題喎…你寫 x 除以 2 等於 0，這是什麼意思？

S5：這是說他的餘數等於 0

…

T：好，那你當初，為什麼會選擇像寫成分數那樣的寫法

S5：因為我認為，那應該跟，我認為程式呢，應該跟那個學校所教(指除法符號)的應該是一樣的，可是看起來好像是不太一樣

T：原來(指學生所寫的內容)是代表什麼意思？？

S9：就是 x 除以 2，那個值…

T：所以意思是代入 5 就是 5 除以 2 等於 2.5

S9：數學函數如何表示餘數我沒學過？

S5 和 S9 的內容他們都想表達取餘數的意思，但因為不知適切的符號，於是借用最接近的符號—除號，而這也反映學生對除法的概念是有問題，除號所得到的是商而不是餘數，若學生有認知到，應該再想其他表達方式。

S1：(沉思…)

T：那你可不可以告訴我另外的方法(表達的方式)，什麼時候是 -1， x 是什麼數字？

(研究者先讓思考其他表示法後再問話)

S1： x 是 2 的倍數。

T：除以二等於零是代表什麼

S11：二的倍數啊

S1 的內容顯示給她時間能找到適切的表達方式，但 S11 則表示將除法求商與取餘數的概念未加釐清。

T：(第 3 小題原本空白) 第 3 小題請妳模仿上面幾題的型式寫出函數。

S2：(…嘗試去寫，寫出 $if(x \div 2 = 0$ 結果為 1) …)
 $if(x \div 2 \neq 0$ 結果為 -1)

T：請問 $x \div 2 = 0$ 是什麼意思？

S2：就是除以 2 餘 0，就是 2 的倍數。

T：可是 $x \div 2$ 不是得到商嗎？就像 $6 \div 2 = 3$ 。

S2：對喔！

T：那你覺得 f of x 是什麼樣的函數？…

S10：就是一個數除以 2 的餘數呀！

T：嗯

S10：可是我不知道要怎麼用數學表示？

T：(…

S10：嗯…因為我覺得這結果(指函數值的規則部份)呀…應該會是一個x
嘛，會有x的東西(意思是要有代數運算式)。

T：等一下，…倒帶一下，你剛說在你腦袋裡面好像要有x可以代進去是不
是？

S10：對呀！

S2 的內容反映除法的概念有問題；S10 說「我不知道要怎麼用數學表示」，她雖知道函數的功能但無法找到適切的表達方式，另外「會有 x 的東西、要有 x 可以代進去」的想法，影響到她順利表示此題函數的代數表徵。從 S10 的內容反應出她對函數的印象是應該要有一個代數運算式，而此印象使她在處理常數函數有困難。這種對常數函數辨識上有困難的發現，也陳述於一些文獻(Markovits & et al.,1986；呂永聰，民 92)中。

從上面的討論顯示，由程式表徵轉換到代數表徵時，學生或多或少都有符號使用上的問題。符號練習久了，所帶來的好處就是學生看到該符號時，腦袋裡會浮現相關的運算程序與動作，但缺點是若沒有進行省思的過程，則會造成僵化的效果甚至誤用，例如不少學生未省思到除法的意義。

有些語意的符號表示法並非唯一，學生缺乏整合的練習，很少運用已知符號或以自己的語言方式表達，以致由語意表徵轉換到代數表徵時，一時想不到適當符號，或誤用符號。

九年一貫提到數學主要內涵包括「能夠應與他人溝通數學內涵的能力」。為了進行溝通，符號使用扮演關鍵角色，上面結果值得教師在教學上要提省學生注意符號的涵義，以及提供適當的情境，讓學生練習轉換到代數表徵，在過程中反思所使用的符號，或訓練學生用自己的語言方式，甚至自行定義符號來表達。

數學本身就是一項溝通的工具(陳盈言，民 90)，NCTM(2000)建議教師要鼓勵學生運用表徵去表達數學想法。程式設計活動透過程式表徵為媒介，幫助我們瞭解到符號對學生函數概念的影響，也協助學生反思慣用符號的代數意義。此外，還發現到部份學生對函數的迷思是，一個函數應該只能有一個相對應的代數運算式，Vinner & Dreyfus (1989)是透過圖形表徵發現這個現象，本研究則是透過程式表徵發掘。本研究另外發現這迷思是造成部份學生建構分段定義函數及常數函數時，會有所困難的原因。

以程式表徵為媒介，我們可看到學生函數概念符號表徵的問題，包含變數概念不清楚、次方運算符號的意義、運算符號的誤用等，教師在函數教學時應給予建構函數的練習，藉此協助學生反思與矯治這些已學過的知識概念，以建立更完備的函數概念。提供更多非多項式或離散型的分段定義函數例子，破除一個函數只有一個代數運算式的概念心像；注意常數函數的解說與練習，避免函數必有一個代數運算式的迷思概念。

五、省思代數運算式的結構

有一位學生 S5 嘗試以分段定義的方式設計 Q-4-b，但未設計出來，探討其原因而晤談如下：

S5：因為想要新鮮，所以這個樣子(設計分段的結構)

T：為什麼不行(詢問為何不成功)

S5：它是不需要分的(表示不需要分段)

學生談到「因為想要新鮮」而嘗試以分段定義的方式設計，反映該生未事先評估其可行性，並不瞭解分段定義函數中定義域分段的意義。若以另一種角度看，這樣的錯誤，給予學生反思的機會，「它是不需要分的」顯示學生從錯誤中看到代數表徵與程式表徵的關連性。錯誤也是學習過程中的重要部份之一，錯誤產生的同時也創造新的學習機會，這個價值對學生與教師都很重要(引自郭丁熒，民 81)。

六、代數式意義的混淆

上面曾談到代數運算式對學生函數概念的影響，研究者猜想學生可能不瞭解代數運算式代表函數對應規則，藉由晤談探討：

T：那在學(指電腦課)之前你對函數的印象是什麼？在學之後對函數的印象又是什麼？

S8：在學之前喔？因為學校都上得很簡單(意思是學校出現的題型單調)，所以我以為函數是把數字放進去方程式的東西。

T：代到方程式？

S8：對，就像這樣算(舉 $f(x)=2x+1$)，遇到的題型就只有那樣(指所舉的題型多為單純的代數式)。然後上過電腦課後，就發現有很多種題型，不是只有這一種。

S4：我想很久耶，就是它有兩個那個，才這叫什麼？函數？方程式？兩個式子。

從晤談資料可發掘，有些學生對既有的代數概念未作省思與統整，在方程式、函數、式子等名詞上分辨不清，不了解其代數涵義且產生混淆，進而阻礙函數概念的學習，S4 的晤談內容「函數?方程式?式子」顯示對於這些名詞函義不清楚。課程中的函數例子大多以式子表徵呈現，無形中促使學生將關係式與函數概念做過度的連結(陳盈言，民 90)，從 S8 談話內容「函數是把數字放進去方程式」中反映有些學生有這種印象。

S8 另外提及「遇到的題型就只有那樣」，並舉 $f(x)=2x+1$ 為例，可看出課堂所教授的函數範例偏向代數表徵，造成學生的函數概念與代數表徵產生過度連結，未瞭解代數運算式代表函數的對應規則。有些學生(S4)對方程式、函數、式子代數意義不瞭解，進而發生混淆，這值得函數教學上特別留意，應協助學生瞭解彼此間的差異。

七、建構函數有困難

Q-5 模擬計程車分段累計收費的情境，要求學生轉換成程式表徵，根據學生答案型式分成以下型式：

I	無法設計出程式，僅以數學函數代數表徵呈現，答案設計了三個不同名稱的函數，分別用以解決三段計費，所寫的函數規則不正確。(S5、S8、S10)
IIa	未正確設計出題目要求的程式，後兩段計費規則運算式有誤。第二段寫成 $15*x+75$ 、第三段寫成 $12*x+75$ (S1、S3)
IIb	未正確設計出題目要求的程式，程式使用三個不同名稱的函數，分別計算三段收費，後兩段計費規則運算式有誤。第二段寫成 $15*x+75$ 、第三段寫成 $12*x+75$ (S2、S11)
IIc	未正確設計出題目要求的程式，程式使用三個相同名稱的函數計算三段收費，後兩段計費規則運算式有誤。第二段寫成 $15*x+75$ 、第三段寫成 $12*x+75$ (S4)
IIa	設計出的程式接近題目要求，每段計費規則運算式正確，錯誤在程式使用三個相同名稱的函數。(S9)
IIIa	正確設計出題目要求的程式，區分三段輸入條件，分別計算費用。(S6、S7、S13)
IIIb	正確設計出題目要求的程式，但程式中設計三個不同名稱的函數，分別計算三段費用。(S12)

表 4-4 紙本後測第五大題學生答題類型表

本題若用函數代數表徵表示，是分段定義函數，有八位(S4、S9、S5、S8、S10、S2、S11、S12)學生用三個函數分別計算三段費用，猜想是不是學生面對分段定義函數，習慣分段獨立處理。再從他們在 Q-3-c 的答案比對，顯示有七位(S4、S9、S5、S8、S10、S2、S11)學生面對分段定義函數，習慣當成不同的函數處理。

其中 S4、S9 定義三個相同的函數名稱，都是使用 f，可見符號習慣的影響不小；雖然 S9 的三段計費規則運算式正確，但因所定義的三個函數名稱相同，致使無法正確執行。

S8、S10、S1、S3、S2、S11、S4 所寫的三段計費規則運算式中僅有第一段正確，其他兩段均錯誤。猜想若給學生實際公里數，是否能正確算出。

T：現在假設有人走 15 公里，先不要看程式，如果妳幫他算是要多少錢？

S1：前面 10 公里是 20 塊，然後後面 5 公里是 15 塊。

T：這表是分段計費的，10 公里內每公里 20 元，超過的部份每公里 15 元。

S2：哦！是分段累計，那就 $10 \times 20 + 5 \times 15 + 75 = 350$ 。

可見 S1、S2 直接進行數字運算沒有問題，但唔談發現學生當時並無驗算，致使未發覺直接運算與代值到程式中所得結果不同。

T：這(數入的變數)是計程車公里數，你沒有用那個(代值到變數)去檢查？

S10：沒有

本題令所有學生感到困難，所花的時間也最多，研究者透過探究其困難的原因。

S12：哇，這個(指第五題)好難，這是我寫最久的題目耶。

...

T：第二段就比較難？

S12：對，因為要想到這樣的表示方法。

T：就是 $y = (q-10) \times 15 + 275$ 這一行比較難？

S12：嗯。

T：那你當初在設計這個式子的時候...有沒有驗算過...

S9：有！

T：有代一些式子去驗算過？你代了哪些數字？

S9：0~10 公里就以中間數 5 去代...10~30 公里就以 20 去代...

T：那比較 1，2，3 段，你覺得當初在寫哪一段你覺得比較難？

S9：第二段的時候...

晤談資料顯示學生對於找出第二段規則運算式甚感困難，第二段的規則運算式突破後，第三段的規則運算式則十分容易模仿導出。能設計出正確規則運算式者，相較於無法正確設計出的學生而言，是有帶值檢驗正確性的習慣。

另外，研究者想瞭解在一個問題情境下，若要轉換成程式或函數代數表徵來解決，學生會傾向那種選擇。

T：…一開始你看到題目，如果說你可以用程式寫出來或直接用函數寫出來，你會選擇那一個？

S12：當然是函數。

S12：不會啊，其實我是先想到這個(函數)再想到這個(程式)。

T：這個問題如果能用函數來表達的話，可以用兩個方法來表達，一個是程式，一個是函數，你可能會先用那個方法來解決？

S13：應該是函數吧！

T：…如果這個問題…我可以兩個選擇發法…一個用程式寫…一個月這個來寫…你會選擇用哪種方法來寫？

S9：以函數的方式來寫！

T：以函數的方式來寫？為什麼？

S9：因為比較簡單(簡潔的意思)…讓人家可以馬上看的懂!…

S9、S12、S13 三位均設計出正確規則運算式，晤談資料顯示學生傾向選擇函數，原因在於函數代數表徵結構較簡潔，可以快速推導出規則，程式則有語法轉換的困難，顯見得他們具有較好抽象思考能力。而 S12 提到「先想到這個(函數)再想到這個(程式)」，反映出他具備將問題轉化成函數代數表徵的能力。

另外，晤談 S2 時，她有與他人不同的看法：

T：請問，若給妳函數，要寫成程式比較容易，還是給妳程式再寫成函數比較容易？

S2：先寫成程式再寫成函數比較容易。

T：為什麼？從題目直接轉到函數比較抽象、困難嗎？

S2：嗯。

S2 認為數學函數較為抽象，不似程式有具體的運作過程，對其而言程式較容易進行操弄以嘗試結果。

由上面討論顯示學生要由題目語意轉換到程式表徵時，困難在於找出代表函數規則的運算式。研究者猜想學生在課堂大多是學習各種函數的運算，作業練習與測驗缺乏讓學生建構函數的機會，使學生運用函數解決問題時，會感到困

難，從晤談中探尋原因。

T：所以你們在考試或者作業都沒有練習過(如何)寫(分段定義函數)？

S11：沒有呀，就直接計算結果。

T：以前數學有沒有看過這個樣子？

S8：在考試、學校學的沒有。

S12：…我是覺得要從這裡(指題目)表示到這裡(指程式)的時候，我要想一下，…就是開頭起步的時候我要從這裡(指題目)跳到這裡(指程式)比較難。

此內容反映課堂教授內容、作業練習和測驗題目，都是在訓練求值，缺乏問題情境讓學生有練習撰寫、或用自己的語法表示函數的機會，面對 Q-5 便感到困難。呂永聰(民，93)研究發現，學生只對機械式簡單演算求值的問題比較純熟，但要從「文字敘述」來找出函數關係顯得困難。

NCTM(2000)建議應訓練學生運用符號表達規律，研究者猜想可能是學生在找規律的訓練不夠，造成困難。然而近幾年國內九年一貫及一綱多本的實施，翻閱國中小的教科書內容，訓練學生觀察數字規律、圖形規律的篇幅不少，本研究的學生樣本正處於這時期，學生在這方面的練習理應足夠。以下摘錄 S8 晤談內容，深究其原因。

T：你以前碰到的函數，它的式子都是別人幫你寫好的？

S8：嗯。

T：那這一題呢？

…

S8：對，它的規則(式子)你要自己寫出來。

T：以前你都沒有練習自己找規則？

S8：印象中沒有，嗯…，可能有，可是很少很少。

T：所以你的意思是說，你的經驗上很少被訓練去找規則？

S8：對。

…

T：找規則很難？

S8：要找出來很難。

雖然國中小已訓練找規則，但 S8 學生依然覺得「印象中沒有」、「找規則很難」，這顯示有兩種可能性，一為國中小的教科書內容雖然有編排練習，但實

際訓練不夠；二為儘管國中小有訓練找規則，但未曾訓練以符號或式子來表達所找到的規律性，S8 覺得「找規則很難」，是指以符號或式子來表達規律很困難。

以上的結果發現值得課堂教學的反思，教師除教授函數運算的概念外，應反向地讓學生學習建構函數，由問題情境歸納出規則。

在程式設計活動的教學環境中，正是刺激學生由問題情境中尋找規律，歸納出運算式後以設計程式，有利於讓學生經驗到函數的實質應用層面，跳脫只是數學運算的印象。達到 NCTM(2000)所提出到的標準：「從情境找出規律，運用符號表達其關係，並使用科技執行之」。

八、表格的問題

Q-6 以表格方式呈現函數值的對應關係，藉以瞭解學生沒有代數運算式的情形下，能否順利求得合成函數值。在解 Q-6-(1)的問題時，步驟是必須將 $g(0)$ 函數值轉換成函數 f 的輸入值，再求出其函數值；而 Q-6-(2) 的解題步驟是必須先由函數值 $g(x)=0$ 反求其輸入值 π (定義域)，再透過 $h(\pi)$ 求出 $f(0)$ 函數值。

根據 Q-6-(1) 學生答案型式分成以下四種型式：

I	未答	S1、S2、S4
II	3	S11
III	-3	S5、S13
IV	2 (正解)	S3、S6、S7、S8、S9、S10、S12

表 4-5 紙本後測第六大題第(1)小題學生答題類型表

本題有三位學生未答，猜想有可能沒有代數運算式，影響學生的作答，從晤談內容瞭解其原因。

S1：嗯。(沉思中…) 這要問什麼？

S4：這我看不懂。

T：第六題怎麼都沒寫？

S2：Hmm... 看不懂，不會寫。

從學生的回答內容「看不懂」，顯示表格形式的函數問題，對部份學生產生困難，為再進一步瞭解其原因，晤談答題正確的學生是否也有相同的困難。

- T: 以前在教學上或考試上有沒有看過這樣(表格)的?
- S8: 沒有, 考試都很單純, 它都給你一條運算方法, 然後叫你代數字進去, 就可以得到答案。(是指已給運算式的函數而言)
- T: 你覺得那種(教學或考試上的)比較簡單還是這種(本題)比較簡單?
- S8: …, 考試的比較簡單, …
- T: 可是我有一個問題耶? 考試那種雖給你式子, 你不是要代數字進去算, 而這個連算都不用算耶。
- S8: 可是這個要先想一下, …, 那個東西(函數值)等於多少。(考試)那個只要代數字進去靠算…就可以得到答案。那這個(本題第 1 小題)你還要說, 看 $g(0)$ 會等於多少, 再代進去 $f(x)$ 會等於多少。
- T: 很難嗎?
- S12: 就是一開始看不懂而已。
- T: 一開始這表格看不懂?
- S12: 對, 看不懂。
- T: 以前老師教的、考試也都沒有碰過這樣子的題目?
- S12: 沒有, 它們通常都是用這種表示法, $f(-1)=2$ 、 $f(0)=-3$ 、 $f(4)=1$, 這樣子我就知道要怎麼代了。這樣(表格型式)我就不確定, 可是假如像這樣(條列形式)我就很確定。
- T: 瞭解, 如果用這樣方法寫你就知道了, 可是用表格就不太清楚。
- S12: 因為之前常看到的方法都是這種(條列形式), 很少看到這種吧(表格形式)。我覺得應該沒看過。
- T: 可是你不覺得表格比較簡潔嗎?
- S12: 不見得耶, 因為像 $g(0)=-1$, 在表格你要對過去, 那如果你寫成 $g(0)=-1$, 我就可以直接代進去。

S8 與 S12 兩位學生都是學習成就高者, 但從他們的晤談內容「有沒有看過這樣(表格)的、沒有」, 顯示沒有處理過表格形式經驗的學生, 在解題過程都會有點困惑。而這困難處從 S8 晤談內容「只要代數字進去靠算…就可以得到答案」及 S12 認為「如果你寫成 $g(0)=-1$, 我就可以直接代進去」, 顯示先前要有代值運算求函數值的動作過程對學生影響很大, 本題不需要處理運算, 直接由表格對應取函數值反而造成學生的困惑。

本題有兩位學生 S5 與 S13 計算出 -3 , 透過晤談以便瞭解他們的想與思考過程。

S5: 因為他表上已經給你, 如果 x 等於 0 的話, $g(x)$ 是等於 -1 , $f(x)$ 等於 -3 (指著同一列)

S13: 就 0 的話, 就 g of x 等於 -1 呀!

…

T：好， g of x 是 -1 ，然後再來呢？

S13：然後得到以後再代到 f of x ，所以得到這(指著同一列的 -3)。

從他們的晤談內容發現，學生並未將 $g(0)$ 的函數值 -1 ，轉換成函數 f 的輸入值，思考方式是直接對應表格的同一列，顯示學生未能掌握住函數的定義域與對應域概念，於是在表格形式合成時發生錯誤。

另外有位學生 S11 求算 3，晤談內容如下：

S11：…，這個 -3 (指著 $f(0)$) 就代 -3 呀， -1 (指著 $g(0)$) 就代 -1 呀，相乘就變成 3 呀。

T：喔，妳把這個看成「乘」(指著括號)是不是？

S11：不是乘嗎？

…

S11：可是他就沒有方程式呀，我就不知道該怎麼用呀？

T：妳說這兩個(函數 f 和函數 g)沒有方程式你就不知道要怎麼用？

S11：對。

…

T：喔，因為沒有方程式可以就把它代進去？

S11：對呀，就想說直接反應就是「乘」。

T：你覺得函數那時候，妳那時候看到沒有方程式很怪？

S11：嗯，對，因為，習慣有方程式。

S11 的晤談內容「把這個看成「乘」(指著括號)、沒有方程式可以就把它代進去、直接反應就是「乘」」，顯是她找找不到函數的代數運算式，符號的經驗便左右她解題的想法，將 $f(g(x))$ 當成 $f(x) \times g(x)$ ，求 $h(0)$ 就等於 $f(0) \times g(0)$ 而得到函數值 3。也就是在沒有運算式可操弄下，便找尋熟悉的符號—「括號」，依照舊經驗視為乘法運算。Engelke、Oehrtman 與 Carlson (2005) 研究大學生合成概念的問題時，也發現相同的迷思。

學生 Q-6-(2) 的答案型式分成以下四種型式：

I	未答	S1、S2、S4、S11
II	π	S3、S10、S13
III	無解	S9
VI	0 (正解)	S5、S6、S7、S8、S12

表 4-6 紙本後測第六大題第(2)小題學生答題類型表

S11 在 Q-6-(1)有作答，但本題的符號形式無法繼續依照 Q-6-(1)的乘法運算來答題。S5 在 Q-6-(1)答錯，但答對本題，原因是學生若按照 Q-6-(1)的經驗，只從同一列找對應的值，也可得到正確答案，從 S5 的唔談內容可探討其想法如下。

S5：我一開始就先找 $g(x)$ 那一列，找到 2。

T：好，這是 2，然後呢，接下來看哪一個數字

S5：然後我就直接看 $h(x)$ 那一行(指同一列)，我是這樣子對過來的。

有三位學生 S3、S10、S13 求得 π 的答案，為瞭解其思考過程而進行唔談。

T：等於 π ，怎麼得到的？

S3：因為...，它說 $f(2)$ 啊，所以這個 $g(x)$ 等於 2。...所以 x 等於 π 。

S10：第(2)小題是，她是說她的 x 是，她這個(指 $g(x)$)是 2，所以就是要 π ，所以 x 等於 π 。

...

T：妳現在只是算 x 呀！可是題目是要算這個(指 $f(2)$)呀！

S10：嗯，那會用到這個(指 $x = \pi$)嗎？給我提示呀！快呀！

T：你現在是卡住在哪裡？

S10：就是不知道要怎麼繼續下去呀！

T：喔，你算出了 x ，然後不知道怎麼繼續下去？

S10：嗯。

S3、S10 唔談內容提及「 $g(x)$ 等於 2、所以 x 等於 π 」，僅求出 $x = \pi$ 後而未繼續題目所要求的函數值，反映出學生得到 x 的值後就以為是答案，只有完成前半段的步驟，遺漏了後半段求函數值的過程。Q-6-(2)需要反向求輸入值，再順向代入求函數值，造成學生解題上的困難，由 S10 唔談內容可發現此位學生，在解題過程中迷思方向，沒有掌握解題目標。

另外，經過研究者在唔談時引導後，而能正確解出 Q-6-(1)的學生 S2，自行解 Q-6-(1)時，也有相同的思考方式，唔談內容如下。

S2：(寫出 $h(\pi) = f(2)$) 所以答案是 π 。

T：為什麼是 π ？

S2：因為 $g(x) = 2$ ， $x = \pi$ 。

T：可是要算 $f(x)$ 耶。

S2：(沉思中...) 我知道了，是 0。

S9 在本題回答無解，他在紙本的原因寫著「 x 沒有 2，所以無法算」，表示他從題目中反求輸入值 π ，仍具有直接以 2 為輸入值，代入求值的運算習慣。

在解 Q-6-(1)與 Q-6-(2)問題時，都是要兩個步驟，但差別是 Q-6-(1)兩個步驟都是同向，而 Q-6-(2)兩個步驟是不同向。學生若能看懂表格形式，只要依照以往「代入—運算」的經驗，大多可以正確求解；而 Q-6-(2)兩個不同向的解題步驟，對多數學生造成困難。

由上述晤談資料與分析，表格形式的函數問題對部份學生造成困難，甚至於有迷思，原因是未曾經驗過，及函數要有代數運算式的印象。另外，從中發現對於函數定義域與對應域概念不清楚，認為函數合成也是「代入—運算」的想法。

學生對於函數的學習，似乎只是熟悉各種題型變化，記憶著運算方法，這值得教師們警惕與注意，應提省學生反思函數的定義，從函數的定義來解答各種題型，否則學生恐流於將函數當成一種運算。而在函數教學中安排表格有助於學生學習函數概念及合成，摘錄學生 S8 的晤談內容如下。

S8：在學之前(活動前)？…我以為函數是把數字放進去方程式的東西。

…

T：…，(現在)如果有人問你函數是什麼東西，你要怎麼解釋？

S8：喔，(沉思…)，某個東西對應到某個東西。

…

T：那你是上電腦課的那個部份，才讓你體會到函數是某個東西對應到某個東西？

S8：就是第一堂課(HTML)，可能是第二課的第一部份，就是叫我代數…，就是像那題表格(Q6)，叫你直接去對應那邊。

從 S8 的晤談資料顯示他以往函數的學習情形，認為函數只是一種運算方式，活動後則能抽象出他是一種對應規則，「那個部份，才讓你體會到函數是某個東西對應到某個東西？第一堂課(HTML)、像那題表格(Q6)」反映出表格能幫助他脫離函數必需要有代數運算式的影響，而電腦活動在這方面也有幫助。

第五章 結論與建議

本章是依據本研究中的實際發現以及綜合討論的結果，分別於第一節提出本研究之結論，第二節對於函數教學現況以及未來相關研究上，提供個人的一些建議。

第一節 研究結論

一、概念心像的影響

學生在課堂接受函數概念時，面對課本和老師所舉的範例，多具有代數運算式，著重於代值求值運算，對函數的概念產生狹義地認知，認為函數必定和數字及代數運算式有關(Ayer & et al., 1988；Vinner & Dreyfus, 1989)，活動前學生所舉函數例子大多以多項函數為主，甚至認為函數就是多項函數(吳玫瑤，民 90)，不能全盤掌握到函數的抽象形式(呂永聰，民 93)。

研究中發現學生對函數的概念心像是函數代數運算式應該要變數，而此印象使學生在處理常數函數有困難，這種對常數函數辨識上有困難的發現，也陳述於一些文獻(Markovits & et al., 1986；呂永聰，民 92)中

呈現多重表徵對數學概念學習是重要的(NCTM, 2000；Noss & Hoyles, 1996；左台益，民 90)。透過程式設計活動後，給予學生機會面對函數其他的表現方式，跳脫既有的觀點，不再認為操弄的物件必是數字，而是可為任何抽象符號等；並看待函數為一種對應規則，這種對應規則不再侷限於代數運算式。

另外，從研究中發現，學生面對表格形式的函數問題，依據以往的經驗，仍會找尋代數運算式，若未曾經驗過表格題型，則會有困難。由學生晤談內容反映出，若在函數教學加入表格形式的範例，有助於視函數是一種抽象的對應規則，也 Kaput(1989) 有相同的看法。

二、次方符號代數意義的省思

本研究中的電腦程式設計活動，選用的程式語言中並沒有次方的指令，只有基本的四則運算符號，促使學生去思考多項式種次方符號的運算意義，而非只是機械性地操作與記憶。

研究發現高成就者容易捨棄原始的運算方式來表達，雖清楚次方原本的運

算方式，但因長期習慣使用這高層次發展的符號，而忽略以基本的呈現方式於解題情境中。低成就者未發展到較高的層次，則習慣操弄基本的運算方式和符號，反而較快聯想出解決方案，但仍有符號誤用的問題。

次方符號與運算的概念是在多項式前，許多學生學習多項式概念時，由於已十分熟練運算方式，很自然接受次方符號與運算，學生在程式設計活動時，忘卻次方最簡易的連乘表示法，但正好給予學生機會省思過去常用符號的意義。

從這次活動透過程式設計的情境，讓學生有機會反思到多項式中，有關次方的基本運作定義，而非只是盲目地標記符號而已。也刺激學生如何運用所學的基本數學知識、解題技能，去面對新的問題情境，提升數學思考的能力。

三、符號表徵的問題

研究發現一般在函數教學上，教師多用 $f(x)$ 這個符號，再加上代數運算式，於是學生習慣用 f 來表示函數，甚至兩者之間產生過度連結。另外，學生在函數值 $f(x)$ 和函數名稱 f 會產生混淆，並不會很細地去把函數符號加以分解成函數名稱、函數值、運算規則，大多數學生都認為 $f(x)$ 是一個函數。

四、代數式意義的混淆

從晤談資料可看出課堂所教授的函數範例偏向代數表徵，無形中促使學生將關係式與函數概念做過度的連結(陳盈言，民 90)，再加上代數運算式代表著函數的對應規則，所以對代數式涵義的瞭解程度，自然影響函數概念的學習。研究發掘有些學生對既有的代數式未作省思與統整，在方程式、函數、式子等名詞上分辨不清，不了解其代數涵義且產生混淆，進而阻礙函數概念的學習，並未瞭解代數運算式代表函數的對應規則，只是以為函數就會有一個代數運算式。

五、影響分段定義與常數函數學習的因素

Vinner & Dreyfus(1989)指出一個函數應該只有單一的代數運算式，這種想法影響學生很大。本研究發現部份學生覺得函數符號後應該要有代數運算式，造成建構分段定義函數代數表徵時產生困難。

學生總認為函數必須隨一變數之改變，而能「有規則」或「依公式」「可

算出」的才算有函數關係(呂永聰，民93)。這種想法造成有些學生面對常數函數時，因為沒有變數或運算式，代入運算行為的缺乏或不完整，容易產生疑惑，在解題與思考上形成困擾。

學生在處理分段定義函數感到困難的現象(Markovits & et al.,1986；呂永聰，民93)，和課堂教學缺乏這類的練習有關，學生很少直接去建構函數的機會，大多只是練習求值運算。

六、運算符號的誤用

研究透過程式為媒介，由程式轉換到代數表徵時，學生或多或少都有符號使用上的問題。從中可看到有些學生未瞭解使用符號的代數意義而誤用，例如用除號表示取餘數，未省思到除號是取商數、在表格形式進行合成時，將括號當成乘法運算；另外還發現問題學生要用符號溝通、表達想法是有困難的，甚至不會運用

在現今數學教學環境下，考試多為選擇、填空題的形式，缺乏計算證明題型，使得學生數學語言表達和解題過程，顯得日益鬆散而沒有組織。程式設計活動則提供學生一個練習的機會，學習如何運用陌生的語言、符號，表達出解決問題的想法。

七、合成函數概念不清楚

從研究中發現，有些學生面對表格形式的函數合成問題時，若只是同向求函數值(如 Q-6-(1))，依據以往「代入—運算」的經驗，可以正確求出函數值，但若給予函數值反求輸入值，再求取合成函數的值(如 Q-6-(2))，則會發生困難與錯誤。這原因與學生函數定義域與對應域概念不清楚有關，顯示學生尋找代數運算式、以數代入—運算—求值的經驗主導學習，未掌握到定義域與對應是函數合成的重要概念。

第二節 建議

一、對函數教學的建議

函數是解決問題的工具之一，如美國數學教師協會 NCTM(2000)所建議的，教師應該幫助學生去找尋規律，函數概念教學應回到與解決實際問題上，訓練學生運用符號、各種表徵表達自己的想法，藉此也可以讓學生有機會反思以往所學符號的意義，整合已知的概念朝更深層發展。

教師應培養學生觀察規律性、關係的表示與以符號表示一般化等能力。數學是一種溝通工具，光會求出答案是不夠的，如何表達解答的過程與使用的策略也相當重要，要真正瞭解數學符號與表示法才能達到目標(陳盈言，民90)。

本研究發現學生使用符號表達想法有很大的問題，回溯學生國中的課程內容，九年一貫實施後，尋找規律的練習較以往為多，但到了高中後，許多學生並無法運用變數、符號表達所找到的規律。所以在國中與高中之間似乎有斷層的部份，中學教師應注意這點，並加強學生變數符號運算的能力。

實際生活情境當中有許多和函數相關的情形，可是學生卻很少有機會在課堂範例中見到，課後練習的題目也不多，當學生面對要將實際生活案例，與所學的函數概念結合，自然不易聯想。一般在課堂學習時，學生所見到的都是純數學的形式，反而產生數學與生活的脫軌，自然覺察不到數學和日常生活的關係，這是值得教師們省思之處。

研究發現雖然九年一貫及一綱多本的實施，訓練學生找規律的內容不少，但鮮少讓學生從中找到規律後，練習以符號或式子來表達所找到的規律性，所以學生面對接近實際生活的問題 Q-5 時，均感到十分困難。如同呂永聰(民，93)研究發現，學生只對機械式簡單演算求值的問題比較純熟，但要從「文字敘述」來找出函數關係顯得困難。

就教科書所舉的函數例類型與數量(詳見附錄一)來看，讓學生建構函數的練習並不多，生活中常見到的分段定義函數類型更少。一般課堂教授內容、作業練習和測驗題目，大多是訓練求值，缺乏問題情境讓學生有練習撰寫、或用自己的語法表示函數的機會，學生要從文字敘述建構出函數自然會有困難。

比較國內外教科書對函數的描述與定義，國內外教科書有些版本對函數相關的符號意義並未說明得很清晰，陳述「 y 是 x 的函數」、「對應方式 f 為由 A

映至 B 的函數」，閱讀起來不易掌握住函數的符號與涵義，甚至會混淆；而國外教科書對函數的描述較為簡潔易讀且清晰明瞭。

從研究中的晤談資料及教科書內容比對發現，學生代值求值的練習很多，看到的函數大多是代數運算式表徵，可能促使目前學生對函數的印象，僅是一種數學運算及具有運算式(formula)。Davis 與 McGowen (2002) 也指出他們的學生有上述的函數概念心像，並建議以函數機器(function machine)的方式建立函數概念，以此為基礎發展，比較能彈性地在函數其他表徵間進行連結。

透過多重表徵呈現數學概念是重要的(Noss & Hoyles,1996；Yerushalmy & Schwartz,1993；左台益，民 90a、90b)，但注重不同表徵之間的轉換與連結更是重要(Lesh & et al.,1987；Schwarz, 1996)。雖然課本有許多函數不同的表徵，但學生在這些表徵之間仍未有良好的連結，以致於未獲得較完整的函數概念，依然對常數函數、函數就是多項函數等迷思。

國內高中數學教科書談函數概念均提及自變數與應變數，如版本五提到「y 的取值是隨 x 的取值」，在語意的描述上容易發生認為「應變數一定要跟著自變數而變」等迷思概念(吳玫瑤，民 90)。教師除利用多重表徵從多元角度協助建立學生將函數概念，但呈現多重表徵之餘，要幫助學生對函數概念進行省思(吳玫瑤，民 90)。

研究發現學生函數符號不清楚，不瞭解函數值 $f(x)$ 和函數名稱 f 的意義，並未細地去把整個函數連同代數式，區分出函數名稱、函數值、運算規則等符號，這需要教師特別留意。

代數式中其實牽涉許多的符號，因此對於所學符號的意義瞭解與否，以及是否正確地使用，都會影響到代數式的表達，自然對函數概念的建立會有影響。所以，儘管變數名稱、運算符號均是已學過的概念，教師仍應加強與復習各種符號的內涵與意義。

透過程式設計以建構函數的過程中，研究發現會刺激學生思考如何運用所學符號表達想法，以及使用符號與所寫運算式的意義，所以在建構函數的過程中，給予學生對已學過的概念，包含變數名稱、符號、運算規則等，進行反思的機會。在函數教學上，除了教授辨識函數，運算方法，建構函數的訓練有助於函數概念完整發展。

由以上的討論得知，教師未來在函數概念教學上，應注意教科書的函數陳

述與定義內容，有可能引發的迷思概念，所舉的範例是否具有多重表徵，分段定義函數與建構函數的練習是否足夠，從中補強缺乏的部份，以幫助學生建立較完整的函數概念。

二、對研究的建議

本研究讓學生設計程式，清楚自己所定義的運算規則，為達成解題目的，學生需清楚每個指令函數執行後的結果，考量前後順序的影響，將程式加以組織，符號使用的問題，甚至輸入數值，驗算所產生的函數值是否正確。學生在設計過程中反思到函數「輸入輸出」、「對應規則」、「分段定義」、「符號」的概念，因此值得在這方面繼續研究。

而在未來研究上有以下建議：

1. 研究發現學生由情境問題轉換到函數代數表徵、程式表徵，造成表達困難及符號使用的問題，未來研究上在這方面可多設計題目，較有系統性地由淺入深循序引導學生培養解題能力。
2. 研究前未事先對學生函數概念進行晤談，在資料分析上有前後比較上的困難，無法充份瞭解活動對學生函數概念進展的影響。未來在研究前應先透徹瞭解學生函數概念，包含定義、符號的瞭解程度、函數表徵的辨視等，以便事後比較時，能夠檢視出活動對每位學生的影響程度。
3. 學習單與程式碼是反思活動重要的資料，研究者並未對學習單與學生所寫的程式碼充份分析，喪失學生學習過程的資訊。一方面是學習單的題目設計不佳，致使高中學生對題意的未能掌握；另一方面所得資料未即時整理分析，然後進行晤談而喪失寶貴的資料。未來研究者在學習單的設計與運用，可多花心力；在每次的活動後，應立即對學習單與程式碼做資料整理與分析，然後進行晤談。
4. 程式設計活動在教師單元教學、學生隨堂練習與填寫學習單各方面的搭配上，時間的掌控很重要。本研究第一次嘗試程式設計進行反思活動，探討的主題概念涵蓋太廣，致使活動時間運用不佳，蒐集到的資料過於零碎鬆散，造成整理與分析上的困難。建議未來研究，可以針對有興趣的主題進行概念分解，再設計相關的活動，蒐集到的資料比較容易進行系統化的分析，以達到質性研究獲得深入瞭解的效果。

參考文獻

- 左台益，蔡志仁(民 90a)。高中生建構橢圓多重表徵之認知特性。科學教育學刊 2001，第 9 卷第 3 期，281-297。
- 左台益，蔡志仁(民 90b)。動態視窗之橢圓教學實驗。師大學報，科學教育類，民國 90 年，4(1, 2)，21-42。
- 李虎雄等(民 81)。高級中學數學課程改進研究八十學年度研究報告。台北：國立台灣師範大學科學教育中心編印。
- 沈中偉(民 93)。科技與學習：理論與實務。心理出版社。
- 呂永聰(民 92)。學生之函數相關概念的形成與發展。行政院國科學委員會專題研究計畫成果報告。計畫編號：NSC92-2521-S-149-001。
- 呂永聰(民 93)。商專學生函數概念的形成與學習困難。國立台北商業技術學院第八期學報。
- 吳玫瑤(民 90)。教學對高中生學習函數概念的影響。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 吳佳起(民 92)。函數單元學習前後的概念成長探討。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 吳健雄(民 72)。電腦輔助教學之補救教學效果初探。國立臺灣師範大學教育心理學報，第 16 期，61-70。
- 何政謀(民 93)。以 **GSP** 設計之活動進行解二元一次聯立方程式補救教學之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
- 余鄺惠(民 91)。高雄市高職學生運用 **GSP** 軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文。
- 林甘敏(民 88)。建構式電腦網路輔助教學教材的選擇與設計原則。第八屆國電腦輔助教學研討會論文集。逢甲大學。
- 林星秀(民 89)。高雄市國二函數課程 **GSP** 輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學/數學系研究所碩士論文。

- 施良方(民 85)。學習理論。高雄：麗文文化公司。
- 施盈蘭(民 83)。五專生的三角函數學習現象。國立師範大學數學系碩士論文。
- 郭丁熒(民 81)：追根究底談錯誤——有關學生錯誤的二十個問題。國教之友，44(2)。
- 張春興(民 78)。張氏心理學辭典。東華書局。
- 陳明仁(民 80)。電腦輔助教學對高工學生學習效益之評估研究。中華民國第五屆電腦輔助教學研討會，206-213。國立高雄師範大學。
- 陳英娥(民 81)。電腦輔助教學在國中數學科學習成效之研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。
- 陳盈言(民 90)。國二學生變數概念的成熟度對其函數概念發展的影響。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 陳正明(民 92)。透過 Excel 輔助進行線型函數補救教學之研究：以一個國二學生為例。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 曹亮吉(民 89)。函數觀念的演變史，原載於科學月刊第 15 卷第 12 期。
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_15_12_1/index.html
- 楊維哲、蔡聰明與吳隆盛(民 88)。高級中學第一冊數學輔助教材。台北：三民書局。
- 謝孟珊(民 88)。以不同表徵表示方程式的未知數對國二學生解題表現。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 謝哲仁，鄭志明(民 93)。動態視覺化廣義三角函數之電腦設計。翰林文教數學天地第十二期。下載於 <http://www.hle.com.tw/bookmark/math/math.htm>
- 鄭世正(民 91)。高中生處理直線方程式思維歷程分析。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。
- 溫明正(民 89)。資訊科技融入各科教學之應用。教學科技與媒體，50，54-61。
- 戴錦秀(民 90)。國小五年級學生使用電腦軟體 **GSP** 學習三角形面積成效之研究。

國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文。

十二年一貫數學課程研究報告書 (民 95)

數學學科中心網站：<http://www.ck.tp.edu.tw/xoops/modules/mydownloads/>

國民中小學九年一貫課程綱要教育部全球資訊網：<http://www.edu.tw/>

Aussie School House <http://www.teachers.ash.org.au/jeather/maths/dictionary.html>

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, A. (1996).
A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate
Mathematics Education, *CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 6, 1-32.

Ausubel, D. P. (1968). *The educational psychology : A cognitive view*. N.Y.:
Holt, Rinehart, & Winston.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer experiences in
learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics
Education*, 19(3), 236-259.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA, USA: Harvard
University Press.

Buchberger, B. (1993). *Mathematica: A system for doing mathematics by computer?*
Technical Report 93-50, Risc-Linz Institute, Johannes Kepler University, 1993.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function
concept. *Research in Collegiate Mathematics Education III, Conference Board
of the Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education*, 7, 114-163.

Cuoco, A. A. (1994). Multiple Representations of Functions. In Kaput, J. & and
Dubinsky, E. (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*.
Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 121-140.

Daniel Breidenbach, E. Dubinsky, Julie Hawks and Devilyna Nichols. (1992).
Development of the Process Conception of Function, *Educational Studies in
Mathematics*, 23, 247-285.

- Davis, G. E. and McGowen, M. A. (2002) Function machines & flexible algebraic thought. In A. Cockburn (Ed.) *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 273-280. Norwich, UK: University of East Anglia
- DeMarois, P., & Tall, D.O. (1996). Facets and layers of the function concept. In Puig, L & Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2. (pp. 297-304). Valencia, Spain
- DeMarois, P. (1998). Beginning Algebra Students' Images of the Function Concept. *Proceedings of the AMATYC 22nd Annual Conference in Long Beach, California, 1996*. <http://www.amatyc.org/Old/Proceedings/e proceedings.html>
- DeMarois, P. & Tall, D.O. (1999) Function: Organizing principle or cognitive root? In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, vol.2, pp. 257–264. Haifa: Israel.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study On Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 360-380.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 85-106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E. (1995). ISETL: A programming language for learning mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(9-10):1027-1051, September 1995. Presented at NYU on the occasion of Jack Schwartz's 65th birthday.
- Dubinsky, E. (1998). Writing Programs to Learn Mathematics. Download from <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>
- Engelke, N., Oehrtman, M., & Carlson, M (2005) Composition of Functions: Precalculus Students' Understandings. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Roanoke, VA.

- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-544.
- Evangelidou, A., Elia, I., Gagatsis, A. & Spyrou, P. (2004) University Students Concepts of Function. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004 Vol 2 pp 351–358
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical strictures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.
- Heugl, H. (1998). *The Influence of Computer Algebra Systems in the Function concept*, ICTMConference, New Orleans.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In Nesher, P. & Lilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95. N.Y, Cambridge University Press.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 679-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Jonassen, D. H., Howland, J., Moore, J. & Marra, R. (2003). *Learning to Solve Problems with Technology: A constructivist perspective*. 2nd ed. Upper Saddle River, N. J.: Pearson education, Inc.
- Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4, pp. 167-194). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology: Integrating research on learning and instruction. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 189-237). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Lesh, R., Post, T. & Behr M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of*

representation in the teaching and learning of mathematics (pp 33-40).
Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum.

Lisa, S.(1996). The History Of The Function Concept, In *The Intended High School Curriculum Over The Past Century:What Has Changed And What Has Remained The Same, In The Roles That Functions Are To Play?*
http://jwilson.coe.uga.edu/olive/EMAT3500/History_of_Functions.doc

Lovell, K. (1971). Some aspects of the growth of the concept of function. In M. F. Roszkopf, L. P. Steffe, & S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive-development research and mathematical education* (pp. 12-33). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lakoff, G. and Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh*. New York: Basic Books.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 175-194). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Markovits, V. & Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). *Function Today and Yesterday*. For the learning of mathematics , 6(2), Canada.

Markovits, Z. (1988). *Difficulties Students Have with the Function Concept*. Arthur, F. Coxford 1988 yearbook Editor, The ideas of algebra, K-12, University of Michigan.

National Council of Teachers of Mathematics (1983) . *An Agenda for Action : Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA.: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (1989) . *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: TheCouncil.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R.& Hoyles, C. (1996) *Windows onmathematical meanings: learning cultures andcomputers*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Putman, R. T., Lampert M., & Peterson, P. L. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. In C. B. Cazden (Ed.), *Review of research in education* (No. 16, pp. 57-150). Washington: American Educational Research Association.

Sand, M. (1996). A Function Is a Mail Carrier. *Mathematics Teacher*, September 1996, 89:6, 468-469.

Schwarz, B. B.; Nathan, M. J., & Resnick, L. B. (1996). Acquisition of meaning for arithmetic structures with the planner. *International perspectives on the design of technology supported learning environments* (pp 105-129). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on Processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification -the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Solso, Robert L. (1991). *Cognitive Psychology* (3rd edition).

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 5th Edition (pp. 148-150). Brooks/Cole Pub Co.

Tall, D. O. (1992). *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof*. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan Publishing Company.

Tall, D., McGowen, M., DeMarois, P. (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept, *Proceedings of PME-NA 22* pp.255-261, Tucson, Arizona.

Thompson, P. (1994). Students, Functions and the Undergraduate Curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., and Kaput, J. J. (Eds.) *Research in Collegiate*

Mathematics Education, I. (pp. 21–44). AMS.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 239–305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vinner, S., HersHKovitz, R. and Bruckheimer, M. (1981). Some cognitive factors as causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12,70-76.

Wilson, M. & Krapfl, C. (1994). The impact of graphics calculators on students' understanding of function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 13, 252 - 264.

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 41–68.

附錄一

	教科書中對函數的描述與定義
<p>版本一</p>	<p>(1)描述變化量之間的關係，將這某種特殊關係稱為函數 (2)自變數到應變數之間的對應規則稱為函數(不限單一式子) (3)強調的是對應規則，對應來源與對象不限於數 (4)設 A、B 為兩非空集合，如果對於 A 中的每一個元素 x，在 B 中都有唯一的元素 y 與之對應，則稱此對應方式 f 為由 A 到 B 的函數，我們以 $f: A \rightarrow B$ 表示之，並將對應於 x 之 y 記為 $f(x)$。A 稱為函數的定義域，B 稱為函數的對應域。 (5)函數可想成一個機器，輸入原料 x，經過 f 運作後得到 $f(x)$</p>
<p>版本二</p>	<p>(1)描述變量與變量之間的對應關係，就是函數了。 (2)設 x 與 y 是兩個變量，如果 y 的取值是隨 x 的取值，依某一種對應法則 f 而唯一確定，那麼就說“y 是 x 的函數”，用記號 $y=f(x)$ 表示。在函數關係 $y=f(x)$ 中，x 叫做自變數，y 則因 x 值而改變，所以 y 叫做應變數。 (3)一個函數 $y=f(x)$ 的 “對應法則 f” 可用多種方式呈現。 (4)給了兩非空集合設 A 與 B。如果“A 內每一個元素 a，在 B 內恰有一個元素 b 與 a 對應”，此種對應法則 f，稱為從 A 映至 B 的函數，記做 $f: A \rightarrow B$。其中 b 叫做 a 的函數值，用符號 $b=f(a)$ 表示。</p>
<p>版本三</p>	<p>(1)描述兩量間的關係式，表示二個量(變數)之間的對應關係，便是函數的基本概念。 (2)設 f 為兩變數 x 與 y 之間的對應關係，若對每一個 x 值，有而且僅有一個 y 值與 x 對應，則稱 y 是 x 的函數，一般記為 $y=f(x)$，並以 $f(a)$ 表示在 $x=a$ 時所對應的函數值，其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數。</p>
<p>版本四</p>	<p>(1)兩變化量之間的關係用數學式表示。如果 x 與 y 是兩個變數，且每個 x 都有一個且只有一個對應的 y 值，我們就說 y 是 x 的函數，其中 x 為自變數，y 為應變數。 (2)關係式為 $y=x^3$，此函數若命名為 $f(x)$，則可用 $f(x)$ 代替，而將此函數寫成 $f(x)=x^3$ 註：有舉例 $y = \frac{1}{x-1}$，只談 x 範圍，未談定義域與對應域名詞</p>

版本五	<p>(1)如果 x, y 表示兩個變量，當給定 x 一個數值，依照某種規則，對得到唯一對應值 y，我們稱 y 是 x 的函數，x 的值可隨意指定，稱為自變數；而變數 y 會隨 x 的值改變，故稱為應變數。</p> <p>(2)設 A, B 為兩個集合，若是依照某種對應方式 f，使得 A 中每一個元素 x 在 B 中都有且只有一個元素 y 和它對應，則稱此對應方式 f 為由 A 映至 B 的函數，用 $y=f(x)$ 表示，其中 A 稱為函數 f 的定義域，B 稱為對應域，x 為自變數，y 為應變數，當 $x=a$ 時，其對應值 $f(x)$ 稱為函數 f 在 $x=a$ 的函數值。</p>
-----	--

	教科書函數範例呈現形式的數量							
	分段定義	集合觀點	多項函數	文字情境	判別	表格	圖形	建構
版本一	3	9	3	0	3	0	0	0
版本二	4	1	4	7	9	6	7	2
版本三	0	0	5	5	2	1	1	2
版本四	0	0	3	2	0	0	0	0
版本五	0	1	11	6	5	3	2	5

	教科書函數有關多項函數的敘述
版本一	實係數多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，當 x 以實數 α 代入時， $p(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n$ 也是實數，把 α 對應到 $p(\alpha)$ ，則建立一個由 R 到 R 的函數，這種函數稱為多項函數
版本二	如果變數 y 是變數 x 的函數，且 y 可以用 x 的一個多項式 $f(x)$ ，即 $y=f(x)$ ，這樣的函數，我們稱為多項函數
版本三	凡是能寫成 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 形式的函數，其中為 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 實數， $a_n \neq 0$ ，稱之為 n 次多項函數，簡稱 n 次函數
版本四	實係數多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，若將其改寫成函數 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，此函數稱為多項函數
版本五	<p>(1) 每一個多項式都可以看成是一個函數</p> <p>(2) 強調對應，一個多項式 $f(x)$ 是 "從 R 對應到 R" 的函數</p>

附錄二

教學活動內容與流程

【活動一】 HTML 基本語法與設計應用

1.

【老師活動】簡介網頁設計HTML的語法與操作方式，從最簡易的指令 `<body bgcolor>` 讓學生入手。

【學生活動】首先讓學生跟著教師的操作重複練習相同動作。然後跟著學習單的問題進行修改與回答問題。

【問題一】利用網址選擇你喜歡的顏色，修改你網頁的背景顏色。（請試文字和RGB碼兩種不同的方法）<http://www.tngs.tn.edu.tw/ecard/colortableb.htm> 或 <http://www.hubert.idv.tw/issue/Internet/color.htm> 你觀察到什麼？請你用數學的函數概念來解釋你觀察到的現象？

【活動目標】讓學生透過參數輸入，觀察視覺輸出，瞭解到函數是一種「輸出一輸入」的對應關係，建立函數機器的認知根基。發覺輸出與輸入的元素不需要一定是數字，並體驗生活情境中的函數。

【注意事項】一開始為讓學生熟悉整過活動的操作環境，老師做完一至兩個動作，應讓學生跟著操作練習。

2.

【老師活動】示範隨意輸入一段文字後，於適當位置鍵入`
`指令，說明該指令的功能。

【學生活動】自行輸入文字內容，運用該指令進行排版，從活動的觀察回答學習單上的問題。

【問題二】請利用 `
` 將輸入的文字做適當的編排。你觀察到什麼？請你用數學的函數概念來解釋你觀察到的現象？

【活動目標】讓學生從`
`這個指令的練習，觀察到不同指令名稱，有不同功能，體驗不同的函數具有不同對應關係。

【注意事項】請學生先隨意打一小段文字觀察效果，再鍵入想設計的內容，以節省時間。

3.

【老師活動】示範隨意輸入一段文字後，於適當位置鍵入`<center>`指令，說明該指令的用法與功能。

【學生活動】自行輸入文字內容，運用該指令進行排版，從活動的觀察回答學習單上的問題。

【問題三】請利用 `<center>` 將輸入的文字做適當的編排。你觀察到什麼？請你用數學的函數概念來解釋你觀察到的現象？

【活動目標】讓學生從`<center>`這個指令的練習，觀察到不同指令名稱，有不同

功能，體驗不同的函數具有不同對應關係。

【注意事項】請學生先隨意打一小段文字觀察效果，再鍵入想設計的內容，以節省時間。

4.

【老師活動】示範隨意輸入一段文字後，於適當位置鍵入指令，說明該指令的用法與功能。

【學生活動】自行輸入文字內容，運用該指令進行編排，從活動的觀察回答學習單上的問題。

【問題四】請利用 將輸入的文字做適當的編排和配色。你觀察到什麼？請你用數學的函數概念來解釋你觀察到的現象？

【活動目標】讓學生從這個指令的練習，觀察到不同指令名稱，有不同功能，體驗不同的函數具有不同對應關係。

【注意事項】請學生先隨意打一小段文字觀察效果，再鍵入想設計的內容，以節省時間。

5.

【老師活動】請學生將前面的活動做一個整理，回答學習單上的問題。

【學生活動】對先前的操作與觀察做省思，回答學習單的問題。

【問題五】由以上觀察，你覺得數學的函數概念和 HTML 標籤有何相同的關係？

【活動目標】在此先做個停留，讓學生有時間做整理，對函數概念進行反思。

6.

【老師活動】學生運用先前所學的指令，設計出學習單問題六的效果。

【學生活動】運用先前所學的指令，試著設計學習單問題六的效果，並回答學習單上的問題。

【問題六】請在網頁中央位置，用藍色字顯示「歡迎光臨」。請你用數學的函數概念來說明如何達到此效果。

【活動目標】此效果需要透過<center>和指令來完成，使學生體驗函數合成的概念。

7.

【老師活動】示範指令呈現圖片功能的操作方式。

【學生活動】自行操作練習此指令，放置所想要的圖片。然後試著練習學習單問題七的指示，並回答問題。

【問題七】 標籤中，如果圖型檔案名稱打錯會有何現象？請你用數學的函數概念來解釋此現象？

【活動目標】使學生瞭解定義域沒有定義的元素，則沒有對應域元素與之對應。

8.

【老師活動】示範<marquee >指令呈現文字或圖片轉動的功能。

【學生活動】自行操作練習此指令，放置於網頁中適當位置，以達自己所想要的呈現方式，從活動的觀察回答學習單上的問題

【問題八】請將網頁的部份文字和圖片具有跑馬燈的捲動效果。請你用數學的函

數概念來說明如何達到此效果。

【活動目標】如果學生和其他指令合用，如：`<arquee>`與``，則能使學生體驗函數合成的概念。

9.

【學生活動】給時間讓學生對活動做個整理與反思函數概念，回答問題十。

【問題十】上完今天的課程後，你覺得自己對於數學中的函數概念，在那些部份有進一步的認識？

【活動目標】請學生對活動做個整理，並對函數概念進行反思。包含函數概念的對應關係、建立函數機器的認知根基、定義域與對應域的元素並非一定是數字、函數合成與生活情境的連結等。

【活動二】 HTML設計應用與Java Applet

1.

【老師活動】示範與說明`<a href >`指令操作方式，呈現超連結的效果。

【學生活動】請學生建立其他網頁，再透過此指令進行網頁間的連結。

【問題九】在網頁做一個超連結點，並觀察超連結的現象。請你用數學的函數概念來說明超連結的現象。

【活動目標】強調函數概念中定義域與對應域的對應關係。

【注意事項】此活動原本排在第一週，但示範操作此指令，需花較長時間，故延到第二週進行。

2.

【老師活動】教師解說Java Applet 是他人利用 Java 語言寫好，並包裝好成爲一個具有特殊功能的程式檔案。使用者不需要知道程式內容，只需將程式檔案放入 HTML中，輸入參數值，則網頁就會產生相對應的功能效果。以三個範例說明操作方式，然後協助學生操作上的問題。這三個範例 applet 下載於 <http://easylearn.bhes.tpc.edu.tw>，分別是 `flame.class`、`VColorScroll.class` 和 `LNavBar.class`。

【學生活動】請學生從所給予的網址中下載二個所想要的applet，嵌入於自己的網頁中，透過修改參數與觀察結果，回答學習單上的問題一。

【問題一】下載兩個不同的 Java Applet，並參看說明後修改參數值，觀察效果變化。請你用數學的函數概念來解釋你所觀察到的。

【活動目標】使學生瞭解函數具備的物件性質，其內部具有參數輸入與結果輸出的對應程序，建立函數機器的認知根基，將函數視爲一個黑箱。

【注意事項】此活動需要下載Java Applet檔案，操作過程步驟較繁，視窗切換動作多，學生學習上容易混淆，故教師需示範三個範例，在示範過程中請學生跟著操作後，再讓學生自行練習。另外執行Java Applet需

要安裝Java Runtime Enviroment，若未事先安裝好，會耽誤活動進行。

3.

【老師活動】在學生練習完前面活動後，請學生從HTML和Java Applet的關係，反思函數概念。

【學生活動】透過修改參數與觀察網頁變化，回答學習單上的問題二。

【問題二】請你用數學的函數概念來說明 HTML 及 Java Applet 的關係？

【活動目標】Java Applet是嵌入於HTML之中，欲使學生從程式碼中觀察出函數合成的形式，將Java Applet視為一個函數，也是一個黑箱物件，內部有輸入輸出的對應程序，透過HTML的指令呈現出來，體會更廣義的函數合成概念。

4.

【老師活動】給時間讓學生對活動做個整理與反思函數概念。

【學生活動】透過修改參數與觀察網頁變化，回答學習單上的問題六。

【問題六】上完今天的課程後，你覺得自己對於數學中的函數概念，在那些部份有進一步的認識？

【活動目標】請學生對活動做個整理，並對函數概念進行反思。包含函數概念的對應關係、建立函數機器的認知根基、函數合成與生活情境的連結等。

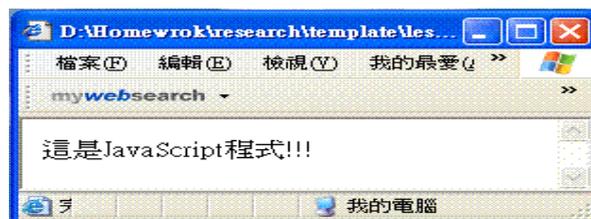


【活動三】 Java Script

1.

【老師活動】JavaScript 是一種程式語言，直接把程式寫在 HTML 文件中就可以，不像 Java Applet 的程式檔案是在HTML之外。從他人設計的網頁原始檔案，也可以看出詳細的執行程序。示範範例一，說明操作方式。

```
<Script language="JavaScript">  
    document.write("這是 JavaScript 程式");  
</Script>
```



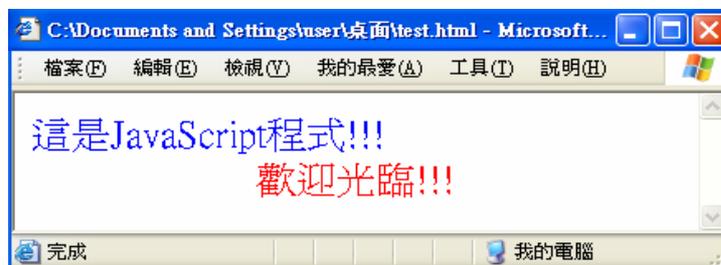
【學生活動】讓學生跟著操作，針對他想設計的內容修改參數，觀察網頁輸出的內容與效果。

【活動目標】讓學生從JavaScript的指令練習中，透過參數輸入，觀察視覺輸出，瞭解到函數是一種「輸出－輸入」的對應關係，建立函數機器的認知根基，發覺輸出與輸入的元素不需要一定是數字，並體驗生活情境中的函數。

2.

【老師活動】JavaScript有獨立的語法，內容透過HTML呈現，範例二主要是說明如何在 JavaScript 中使用 HTML 的功能。

```
<Script language="JavaScript">
  document.write("<font color=blue size=5>這是 JavaScript 程式!!!</font>");
  document.write("<br>");
  document.write("<center><font color=red size=5>歡迎光臨!!!
    </font></center>");
</Script>
```



【學生活動】模仿教師範例，利用JavaScript程式呈現HTML的效果，熟悉新語法的使用方式。

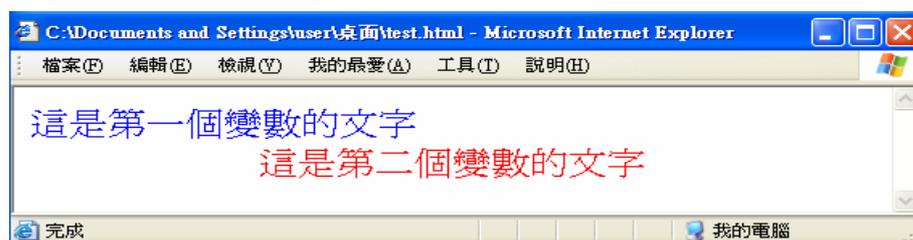
【活動目標】使學生熟悉 HTML 和 JavaScript 之間語法轉換，準備引入JavaScript變數的概念。

3.

【老師活動】教師透過範例三說明在JavaScript中如何設定變數，以及變數的使用方式。

```
<Script language="JavaScript">
  var text = "這是第一個變數的文字";
  var TEXT = "這是第二個變數的文字";

  document.write("<font color=blue size=5>" , text, "<br>");
  document.write("<center><font color=red size=5> " , TEXT, "</center>");
</Script>
```



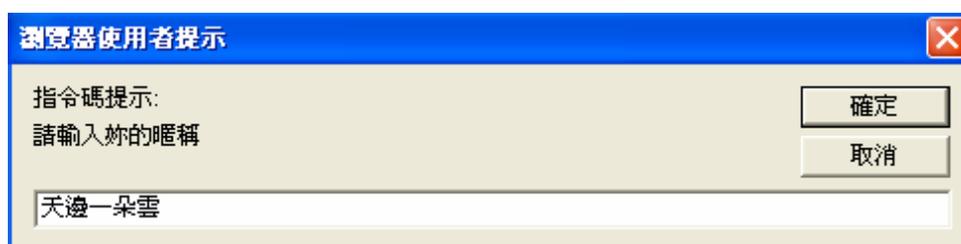
【學生活動】模仿教師範例，自訂變數名稱與內容，熟悉變數的使用方法。

【活動目標】為往後代數運算活動做準備。

4.

【老師活動】JavaScript具有互動性，可讓網頁使用者輸入資料，此範例四對學生示範使用者輸入介面的指令，以及如何將輸入的資料指定到變數中，最後將輸入的資料呈現。

```
<script language=javascript>
var sentence;
sentence=prompt("請輸入妳的暱稱");
document.write("親愛的");
document.write("<font color=dodgerblue>" , sentence , "</font>");
document.write("歡迎你蒞臨本站!!!");
</script>
```



【學生活動】先模仿教師範例，修改自己的網頁內容，熟悉操作方式，再各自依照自己想要的效果，思考與運用先前所學的種種指令功能，設計出符合要求的網頁內容。完成後再請學生回答學習單上三個問題。

【問題三】請你用數學的函數概念來說明 HTML 及 JavaScript 的關係？

【問題四】JavaScript 可以有設定變數的功能。請你用數學的函數概念來說明，自變數和函數的關係？

【問題五】做完範例四，你有何發現？請你用數學的函數概念來說明妳所發現的？

【活動目標】此範例介紹使用者輸入介面，使得函數的形式更加明顯，讓學生往後在設計程式時，即是在建構函數的運作程序或運算規則。

5.

【老師活動】完成前幾項活動後，請學生回答學習單上三個問題。

【學生活動】由前面活動反思相關的函數概念。

【問題三】請你用數學的函數概念來說明 HTML 及 JavaScript 的關係？

【問題四】JavaScript 可以有設定變數的功能。請你用數學的函數概念來說明，自變數和函數的關係？

【問題五】做完範例四，你有何發現？請你用數學的函數概念來說明妳所發現的？

【活動目標】讓學生從程式碼中觀察出函數合成的形式，將JavaScript程式區段視為一個函數，體驗函數合成的概念。有別於Java Applet的是，Java Applet為一個黑箱物件，無法知道 Java Applet 內部程式運作程序，而 JavaScript 可以直接看出程式的運作流程，設計者也可依照想要的功能進行建構，呈現函數的白箱狀態。

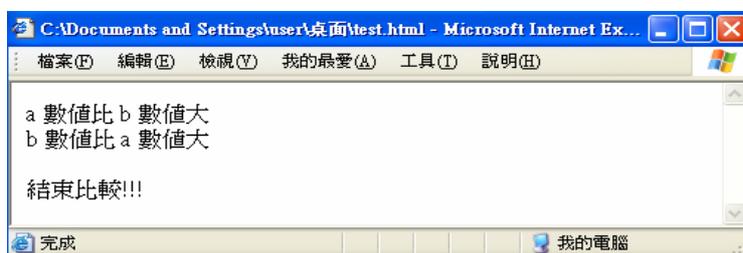
【活動四】 Java Script 邏輯語法

1.

【老師活動】教師先說明邏輯判斷與運算的必要性，是讓程式能更有彈性地依不同條件與狀況去執行。接著透過範例一示範 if () 相關語法的使用方式，解說程式執行流程。教師在學生的練習協助操作問題，並檢驗學生的程式是否正確，練習後並示範參考解答。

```
<Script language="JavaScript">
  var a = 45 ;
  var b = 32 ;
  if (a > b)
    document.write(" a 數值比 b 數值大<br> ");
  document.write(" b 數值比 a 數值大<br> ");
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>
```

範例一



【學生活動】讓學生修改變數 a 和變數 b 的值，去觀察函數的結果，回答學習單上的問題。然後在給予隨堂練習題目，讓學生設計程式。

```

<Script language="JavaScript">
    var a = 32 ;
    var b = 45 ;
    if(a > b)
        document.write(" a 數值比 b 數值大<br> ");
    document.write(" b 數值比 a 數值大<br> ");
    document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>

```



【問題】請修改範例一程式的 a 變數和 b 變數，觀察結果變化。請問此程式功能是否符合函數的定義，請你用數學的函數概念來解釋。

【隨堂練習】請模仿範例，設計一個小程式，讓使用者輸入一個數字，然後此程式判斷輸入的數字是否有大於 50。如果有大於 50，請顯示 "超過！"；如果沒有，請顯示 "小於 50"。

【活動目標】讓學生觀察到分段定義函數的形式，隨堂練習的活動在引導學生建構可以判斷兩個不同條件的程式，如同建構有兩個分段定義的函數。此練習要求加入使用者輸入介面，讓函數輸入輸出的形式更明顯。

2.

【老師活動】說明前項指令的不足，透過範例介紹 if() else 的語法應用，能進行更多條件的判斷，教師在學生的練習協助操作問題，並檢驗學生的程式是否正確。

```

<Script language="JavaScript">
    var a = 45 ;
    var b = 32 ;
    if(a > b)
        document.write(" a 數值比 b 數值大 ");
    else
        document.write(" b 數值比 a 數值大 ");
    document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>

```

範例二

【學生活動】讓學生修改變數 a 和變數 b 的值，去觀察函數的結果，回答學習單上的問題。

【問題二】請修改範例二程式的 a 變數和 b 變數，觀察結果變化。請問此程式功能是否符合函數的定義，請你用數學的函數概念來解釋。

【問題三】請用函數概念比較範例一和範例二，相同點是什麼？相異點是什麼？

【活動目標】讓學生觀察到分段定義函數的形式，並從問題思考更注意程式運作的流程，為建構分段定義函數做準備。

3.

【老師活動】範例三與範例四介紹條件判斷方式更細微的語法與應用，範例四可以判斷三種不同情形。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，協助操作問題，練習後即示範參考解答。

```
<Script language="JavaScript">
  var a = 45 ;    var b = 32 ;
  if (a > b)
    { document.write(" a 數值比 b 數值大 ");
      document.write(" <br> a 的數值是 ", a); }
  else
    { document.write(" b 數值比 a 數值大 ");
      document.write(" <br> a 的數值是 ", a); }
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>
```

範例三

```
<Script language="JavaScript">
  var a = 45 ;    var b = 32 ;
  if (a > b)
    document.write(" a 數值比 b 數值大 ");
  else if (a < b)
    document.write(" b 數值比 a 數值大 ");
  else
    document.write(" a、b 兩數值一樣大 ");
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>
```

範例四

【學生活動】讓學生修改變數 a 和變數 b 的值，去觀察執行後的結果。

【隨堂練習】請模仿範例四，設計一小程式，可以讓使用者輸入一個數字，然後此程式判斷輸入的數字是否有大於 50。如果有大於50，請顯示"超過！"；如果小於50，請顯示"小於50"；如果等於50，請顯示"恰好等於50"。

【活動目標】讓學生修改變數值後，觀察結果，更注意程式運作的流程。隨堂練習的活動在引導學生建構可以判斷三個不同條件的程式，如同建構

有三個分段定義的函數。

4.

【老師活動】教師由範例五示範如何讓使用者輸入兩個數字，然後顯示兩個輸入的數字那個較大或相等。和範例四不同之處是增加使用者輸入功能，不再需要修改原始檔的變數值，並說明若結果的顯示要更有變化與彈性，需注意{ }的使用會影響程式流程。範例六示範則增加了代數運算形式。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，協助操作問題，練習後即示範參考解答。

```
<Script language="JavaScript">
  var first = prompt(" 請輸入第一個數值! ");
  var second = prompt(" 請輸入第二個數值! ");
  if (first > second)
    { document.write(" 第一個數值比第二個數值大 ");
      document.write(" <br>第一個數值是 ", first);    }
  else if (first < second)
    { document.write(" 第二個數值比第一個數值大 ");
      document.write(" <br>第二個數值是 ", second); }
  else
    document.write(" 兩數值一樣大 ");
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
</Script>
```

範例五

```
<Script language="JavaScript">
  var first = prompt(" 請輸入第一個數值! ");
  var second = prompt(" 請輸入第二個數值! ");
  var difference = 0;
  if (first > second)
    { difference=first-second;
      document.write(first , "比", second , " 多 " , difference); }
  else if (first < second)
    { difference = second-first;
      document.write(second, "比", first , " 多 " , difference); }
  else
    document.write(" 兩數值一樣大 ");
  document.write(" <br>結束比較!!! ");
```

範例六

【學生活動】先讓學生執行並觀察結果，然後學習單上的問題。

【問題】以下是一段 JavaScript 的程式，請用數學的函數方式來表示這段程式。

```
var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
```

```

var result=0;
if ( input<=0 )
    { result = input + 2;
      document.write(result);}
else
    { result = 3 * input - 1;
      document.write(result);}

```

【活動目標】讓學生更熟悉程式運作的流程，並引入了代數運算形式，為後來建構具有代數運算的程式而準備。由問題中思考和數學分段定義函數的關係，並由程式表徵轉換成數學代數表徵。

5.

【老師活動】教師由範例七示範邏輯運算符號的用法，以減少 if-else 巢狀結構造成程式設計的困難。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，協助操作問題，練習後即示範參考解答。

```

<Script language="JavaScript">
    var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
    if ( (0<=input) && (input<=100) )
        document.write("這數值介於 0 與 100");
    else
        document.write("這數值比 0 小或比 100 大");
</Script>

```

範例七

【學生活動】先讓學生執行並觀察結果，然後依此範例進行隨堂練習。

【隨堂練習】請模仿範例七與前幾個範例，將實數分成三個區間段：(1)小於等於 -10 (2)介於 -10 和 50 之間 (3)大於等於 50。讓使用者輸入一個數字，然後此程式判斷輸入的數字屬於哪一個區間，並將區間結果顯示出來。

【活動目標】讓學生知道邏輯運算符號的用法。隨堂練習的活動在引導學生建構可以判斷三個不同條件的程式，如同建構有三個分段定義的函數。

【活動五】 Java Script函數設計

1.

【老師活動】教師複習範例六和範例七，加強學生程式語法與執行流程的熟悉。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，協助操作問題，練習後示範參考解答。

【學生活動】複習前次活動中的範例，然後進行兩個隨堂練習。

【隨堂練習】有一個函數如下：

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x < 0 \\ 2, & \text{若 } 0 \leq x < 10 \\ 3, & \text{若 } 10 \leq x \end{cases}$$

請試著用JavaScript 將此函數的功能寫出來，然後自行代入幾個數字，分別透過電腦和紙筆來驗證是否正確？

【活動目標】給予學生一個三段定義的代數表徵函數，每段定義均為常數函數，引導學生建構出等價的程式，協助學生在兩種表徵間進行連結與轉換。

【隨堂練習】有一個函數如下：

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{若 } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{若 } 0 \leq x \end{cases}$$

請試著用JavaScript 將此函數的功能寫出來，然後自行代入幾個數字，分別透過電腦和紙筆來驗證是否正確？

【活動目標】給予學生一個分段定義的代數表徵函數，兩段定義是不同代數運算式，其中一個是次方運算，引導學生建構出等價的程式，協助學生在兩種表徵間進行連結與轉換。

2.

【老師活動】教師由範例八示範取餘數(module)運算符號的用法。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，協助操作問題，練習後示範參考解答。

```
<Script language="JavaScript">
  var  input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
  if ( (input%2) ==0 )
    document.write("這數值是偶數");
  else
    document.write("這數值是奇數");
</Script>
```

範例八

【學生活動】先讓學生執行並觀察結果，然後依此範例進行隨堂練習。

【隨堂練習】請模仿範例八讓使用者輸入數字後，顯示是否為3的被倍數。

【活動目標】讓學生知道取餘數(module)運算符號的用法。

3.

【老師活動】教師由範例一說明函數定義的語法，包括如何定義、呼叫方式和輸出運算結果的方式。

```

<Script language="JavaScript">
  var input = parseInt(prompt("f(x)=x+10，請輸入 x 數值!"));
  function a(n)
  { var x=n+10;
    return(x); }
  var result=a(input);
  document.write ("得到的函數值是：", result);
</Script>

```

範例一

【學生活動】讓學生執行並觀察結果，然後請其修改代數運算式、變數名稱、函數名稱，觀察執行後的結果。

【活動目標】讓學生從程式瞭解到函數各部份的意義，如函數名稱、代數運算式(函數的運算規則)和程式的表徵。

4.

【老師活動】教師由範例二示範輸出結果非數值的函數。

```

<Script language="JavaScript">
  var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
  function compare(x)
  { if ((x%3) == 0)
    document.write ("這數值是 3 的倍數!");
    else
    document.write("這數值不是 3 的倍數!"); }
  compare(input);
</Script>

```

範例二

【學生活動】先讓學生執行並觀察結果，然後依此範例進行隨堂練習。

5.

【老師活動】教師由範例三示範定義兩個函數，並說明函數合成的方式。教師在學生隨堂練習過程中，引導學生思考方向，練習後示範參考解答。

```

<Script language="JavaScript">
  var choice = prompt("要求  $f \circ g(x)$  請按 1 ;要求  $g \circ f(x)$  請按 2! ");
  var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
  var result=0;
  function f(p)
  { var x=p+2;
    return(x);}
  function g(q)
  { var y=q*q-2;
    return(y);}
  if(choice==1)
  { result=f(g(input));
    document.write("得到 f(g(",input,"))的函數值是 :", result); }
  else
  { result=g(f(input));
    document.write("得到 g(f(",input,"))的函數值是 :", result); }
</Script>

```

範例三

【學生活動】先讓學生執行並觀察結果，然後依此範例進行隨堂練習。



附錄三

姓名：

日期：

請回答以下兩個問題(不拘任何形式，可用文字或圖形)：

1. 請問什麼是函數？

2. 請舉出一些函數的例子。並說明所舉的例子為何是函數。



附錄四

姓名：

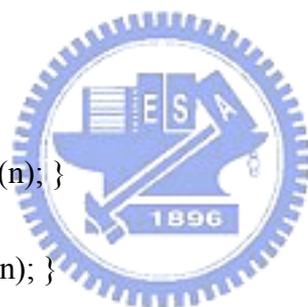
1. 下列是一段 JavaScript 的程式。

```
var input = parseInt(prompt("請輸入 x 數值!"));
function f(x)
{ var n=2*x+1;
  return(n);}
var result=f(input);
document.write ("得到的函數值是 :", result);
```

- (1) 若輸入數字 5 到程式中，結果會如何？
(2) 程式中有定義函數 $f(x)$ ，請用數學的函數形式來表示之。

2. 下列是一段 JavaScript 的程式。

```
var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
var n=0;
function compare(x)
{ if ( x>=3 )
  { n=2x-1 ; return(n); }
  else
  { n=x+2 ; return(n); }
}
var result=compare(input);
document.write ("得到的函數值是 :", result);
```



- (1) 若輸入數字 5 到程式中，結果會如何？
(2) 若輸入數字 1 到程式中，結果會如何？
(3) 程式中有定義函數 $compare(x)$ ，請用數學的函數形式來表示之。

3. 下列是一段 JavaScript 的程式。

```
var input = parseInt(prompt("請輸入數值!"));
var temp=0;
var result=0;

function f(x)
{ if ((x%2)==0) return(1);
  else return(-1); }
```

```
function g(y)
  { temp=3*y-1;
    return temp; }

```

```
result=g(f(input));
document.write("得到的函數值是：", result);

```

- (1) 若輸入數字 4 到程式中，結果會如何？
- (2) 若輸入數字 1 到程式中，結果會如何？
- (3) 程式中有定義函數 $f(x)$ ，請用數學的函數形式來表示之。
- (4) 程式中有定義函數 $g(x)$ ，請用數學的函數形式來表示之。
- (5) 程式中的 $g(f(input))$ ，請用數學的函數形式來表示之。

4. (a)請寫一小段 JavaScript 程式來表示 $f(x) = 3x + 1$ 。

(b)請寫一小段 JavaScript 程式來表示 $f(x) = x^2 + 3$ 。

5. 某計程車車資的計算方式採分段累計計費，詳如下表：

基本額	0~10 公里	10~30 公里	30 公里以上
75 元	每公里 20 元	每公里 15 元	每公里 12 元

請寫一小段 JavaScript 程式，輸入公里數後，能正確顯示出應付的車資。

6. 已知 $h(x)$ 、 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是函數，而且 $h(x) = f(g(x))$ ，請回答以下問題：

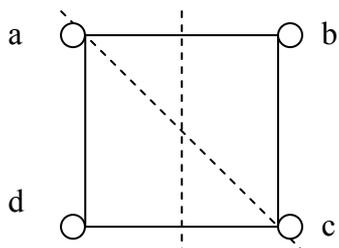
(1)從下列表格的資訊，你能得到 $h(0)=?$ 請解釋！

x	f(x)	g(x)
-1	2	-3
0	-3	-1
4	1	2

(2)從下列表格的資訊，你能得到 $f(2)=?$ 請解釋！

x	h(x)	g(x)
-1	1	-3
π	0	2
4	π	1

7. 有一正方形，邊角各有一圓球，每個球均塗上不同的顏色，分別以 a、b、c、d 來表示，如圖。 F1、F2、F3 分別代表三個不同的轉動方式。



- F1：將圖形順時針旋轉 90 度
 F2：將圖形沿 ac 對角線翻轉 180 度
 F3：將圖形沿中垂線翻轉 180 度

若將圖形稱之為 G，請回答以下問題。

- (1) 請問圖形 G，經過 F1 轉動會變成如何？
- (2) 請問圖形 G，經過 F2 轉動會變成如何？
- (3) 如果我們將(1)的答案用 $F1(G)$ 表示，請問 $F2(F1(G))$ 的結果會如何？
- (4) 請問 $F1(F3(G))$ 的結果會如何？
- (5) 如果將 (3) 中的 $F2(F1(G))$ 改寫成 $F2 \circ F1(G)$ ，請問 $F2 \circ F3(G)$ 的結果會如何？



8. 請問經過五周的電腦課程，你覺得你對函數的看法是否有改變？
 若有的話，請問在你未上網頁設計前，認為什麼是函數？
 現在的你，認為什麼是函數？
9. 請你舉出實際生活中，可以用來說明函數的例子。