

國立交通大學

應用數學系

碩士論文

超立方體網路及其變型之

結果整理與性質探討

**The Study of Hypercubes and
Their Variants**

研究生：洪秋美

指導教授：陳秋媛 教授

中華民國九十六年六月

超立方體網路及其變型之結果整理與性質探討

The Study of Hypercubes and Their Variants

研 究 生：洪秋美

Student : Chiu-Mei Hung

指導教授：陳秋媛

Advisor : Chiuyuan Chen

國 立 交 通 大 學

應 用 數 學 系

碩 士 論 文



A Thesis

Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science

National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master

in

Applied Mathematics

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 六 年 六 月

超立方體網路及其變型之結果整理與性質探討

研究生：洪秋美 指導老師：陳秋媛 教授

國立交通大學

應用數學系

摘要

連接網路 (interconnection networks) 對於平行與分散式計算 (parallel and distributed computing) 是很重要的，而因為超立方體網路 (hypercube, Q_n) 的建構簡單且容易實現，所以是很常被用到的連接網路的架構。然而，已有學者專家指出 Q_n 並未達到以其硬體花費來看的最佳直徑 (diameter)、與平均距離 (average distance)，因此有不少 Q_n 的變型被提出，最常見的變型有：twisted cube (TQ_n)、crossed cube (CQ_n)、Möbius cube (MQ_n)、及 locally twisted cube (LTQ_n)，其中 n 表示這些網路的維度 (dimension)。這些超立方體網路的變型的硬體花費與超立方體網路相同，但是直徑卻只有超立方體網路的一半。

本論文的目的有二，第一個目的是針對以上所提的四種最常見的超立方體網路的變型： TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、及 LTQ_n 的連通度 (connectivity)、直徑 (diameter)、訊息傳送演算法 (routing algorithm)、及平均距離 (average distance) 做資料上的整理，以方便對這些網路架構有興趣的人參考；第二個目的是針對 LTQ_n 討論三個主題，第一個主題是 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離 (average distance) 的比較，第二個主題是 LTQ_n 的連接矩陣 (adjacency matrix) 的特殊建構方法，第三個主題是 LTQ_n 的點的分類。我們同時也更正了文獻中的一個錯誤。

關鍵詞：超立方體網路、twisted cube、crossed cube、Möbius cube、locally twisted cube。

中華民國九十六年六月

The Study of Hypercubes and Their Variants

Student : Chiu-Mei Hung

Advisor : Dr. Chiuyuan Chen

Department of Applied Mathematics
National Chiao Tung University
Hsinchu 300, Taiwan, R.O.C.

Abstract

Interconnection networks, mostly implemented as hypercube due to its structural and constructional simplicity, are crucial to parallel and distributed computing. However, Q_n does not achieve optimal diameter and average distance for its resources; therefore, a number of Q_n variants have been proposed, namely twisted cube (TQ_n), crossed cube (CQ_n), Möbius cube (MQ_n) and locally twisted cube (LTQ_n) in which n is the dimension of respective network. Such hypercube variants attain diameters as low as half of those of hypercube on similar resources.

This paper has two objectives. First, the four hypercube variants listed above will be classified according to their connectivity, diameter routing algorithm and average distance for future reference. Second, three issues on LTQ_n will be discussed; firstly, a comparison of the average distances of LTQ_n and Q_n ; secondly, the special construction method of the adjacency matrix of LTQ_n ; and thirdly, the cataloging of the nodes of LTQ_n . Furthermore, an error correction has been proposed.

Keywords: hypercube, twisted cube, crossed cube, Möbius cube, locally twisted cube.

Acknowledgement

為了圓夢及在老公的鼓勵下，在相隔大學畢業將近 20 年後，再重回學生的身份，內心充滿了感恩、喜悅、及忐忑不安的心情；很高興能與交大應數結緣，讓我能有機會完成夢想。

看到交大應數老師們認真教學的態度，讓身為中學老師的我，除了從他們身上學到數學上的知識，更在生活態度上受益不少，非常感謝老師們對我的教導；其中最感謝的是陳秋媛老師，感謝陳老師對我的耐心指導與處處包容；而陳老師對學生的關懷與對其家人的愛，更是我可以學習的地方。

再重拾書本，是體力、智力、及毅力的考驗，幸虧我有一群好同學：元勳、宗翰、俊全、書于、冠成、景堯、怡菁、采瑩，很高興與大家都相處愉快；另外還有學長們常常對我伸出援手，令我心存感恩；在最後一學期更謝謝威雄學弟的鼎力幫忙，讓我的論文寫得更順手；由於有這些朋友，使我在交大的日子充滿快樂的感覺。

在最後我要感謝我的家人，除了我的爸爸、公公、與婆婆外，尤其是要感謝我的老公，在我這三年求學的期間對我的支持與付出，還有兩個小孩的乖巧，令我感到窩心，謝謝你們。

Contents

Abstract (in Chinese)	i
Abstract (in English)	ii
Acknowledgement	iii
Contents	iv
List of Figures	v
1. 簡介	1
2. 超立方體網路及其變型的已知結果的整理	4
3. LTQ_n的探討	16
4. 結語	26
參考文獻	27



List of Figures

圖 1.	1
圖 2.	5
圖 3.	6
圖 4.	8
圖 5.	9



1 · 簡介

超立方體網路 (hypercube) 是很常被用到的連接網路 (interconnection networks) 的架構。 n 維的超立方體網路，記為 Q_n ，是由 2^n 個點 (nodes) 和 $n \cdot 2^{n-1}$ 條邊 (edges) 所形成的圖 (graph)，其中，這 2^n 個點是由 $\{0,1\}$ 所組成的 n -tuples，兩點之間有邊的充份必要條件是這兩點的 n -tuples 只一個 bit 不同。亦即 Q_1 是由 0,1 兩點所形成的完全圖 (complete graph)， Q_2 是由點集合為 $\{00,01,10,11\}$ 和邊集合為 $\{(00,01), (01,11), (11,10), (10,00)\}$ 所成的圖，類推 Q_3 和 Q_4 。圖 1 中給了 Q_3 和 Q_4 。

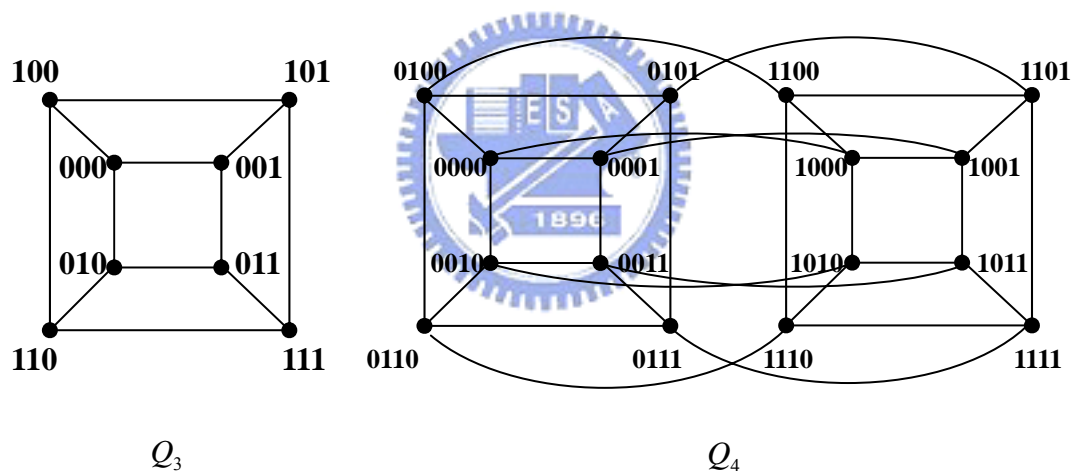


圖 1. Q_3 和 Q_4

雖然 Q_n 是一個建構簡單且容易實現的網路架構，然而，已有學者專家指出： Q_n 並未達到以其硬體花費來看的最佳直徑 (diameter)、與平均距離 (average distance)，因此有不少 Q_n 的變型被提出，最常見的變型有：twisted cube (TQ_n)、crossed cube (CQ_n)、Möbius cube (MQ_n)、以及 locally twisted cube (LTQ_n)，其中 n 表示這些網路的維度 (dimension)；這些網路的定義請參見第 2 小節。以

上四種超立方體網路的變型有下列性質：

- (i) 它們的點數與邊數與超立方體網路相同，
- (ii) 它們都是 n -regular 的圖，
- (iii) 它們的連通度 (connectivity) 與超立方體網路相同 (都是達到一個 n -regular 的圖的最大連通度，也就是 n)。

然而，這些超立方體網路的變型的直徑，卻大約只有超立方體網路的一半[7]。

本論文的目的有二，第一個目的是針對以上所提的四種最常見的超立方體網路的變型： TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、以及 LTQ_n 的連通度、直徑、訊息傳送演算法

(routing algorithm)、及平均距離做資料上的整理，以方便對這些網路架構有興趣的人參考。第二個目的是討論 LTQ_n 。

LTQ_n 是在 2005 年由 Yang、Evans、和 Megson 所提出的網路架構[7]。 CQ_n 和 MQ_n 的缺點是：相連兩點的不相同的 bits 數目可能達到 $\frac{n}{2}$ 個；例如：在 CQ_{10} 中，相連兩點 0001010101 與 1011111111 間有 5 個 bits 不相同；在 $0-MQ_5$ (定義請參見第 2 小節) 中，相連兩點 10000 與 11111 間有 4 個 bits 不相同；在 $1-MQ_5$ (定義請參見第 2 小節) 中相連兩點 00000 與 11111 間有 5 個 bits 不相同；雖然 TQ_n 相連兩點的 bits 數目最多只有兩個 bits 不相同，但 TQ_n 的建構較為複雜，例如： TQ_5 是由四個 TQ_3 建構而成 (可參見第 2 小節)。基於這些觀察，Yang 等人 [7] 提出了 LTQ_n ，在 LTQ_n 中相連的兩點最多只有兩個 bits 不相同，而且若是有兩個 bits 不相同時，則這兩個 bits 必為連續的兩個 bits。

由於 LTQ_n 具有如上所述的良好性質，因此本論文的第二個目的就是針對 LTQ_n 討論三個主題，第一個主題是 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離的比較，第二個主題是 LTQ_n 的連接矩陣 (adjacency matrix) 的特殊建構方法，第三個主題是 LTQ_n 的點的分類；這三個關於 LTQ_n 的探討，都是文獻中未曾提出的。除此之外，我們也更正了文獻中的一個錯誤。

本論文的架構如下：第二小節是關於超立方體網路及其變型的結果的整理，第三小節是談有關 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離的比較、 LTQ_n 的連接矩陣的特殊建構方法、以及 LTQ_n 的點的分類，最後一小節為結語。



2 · 超立方體網路及其變型的已知結果的整理

TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、以及 LTQ_n 等超立方體網路的變型，在各篇論文中「點」的表示都與 Q_n 類似，是由 $\{0,1\}$ 所組成的 n -tuples，但是表示法略有不同。例如：在 Q_n 、 TQ_n 、 CQ_n 中，點的表示為 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0$ ；而在 MQ_n 、以及 LTQ_n 中點的表示為 $x = x_1x_2 \cdots x_n$ 。為了統一起見，本篇論文中，「點」的表示採用 $x = x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的方式。為了方便起見，本篇論文中，“+”表示“modulo 2 addition operation”， $V(G)$ 表示圖 G 的點集合， $E(G)$ 表示圖 G 的邊集合。因為一個網路可被視為一個圖，所以在本篇論文中，我們不刻意區分網路和圖兩名詞。

在前面一小節裡，我們已給出了 Q_n 的“非遞迴”定義，在這一小節裡，我們首先給出 TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、以及 LTQ_n 的“非遞迴”定義；接著我們將給出 Q_n 、 TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、以及 LTQ_n 的“遞迴”定義及它們的已知結果的整理。

2-1 各種 cube 的“非遞迴”定義

若兩點 $x = x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 和 $y = y_ny_{n-1} \cdots y_2y_1$ 有邊相連，則我們稱 y 是 x 的第 k 個鄰居，記為 $y = N_k(x)$ ，若且唯若 k 是 x 與 y 不同 bit(s)中足標最大的值。例如：考慮 Q_3 中的點 $x = 011$ ，則： $N_1(x) = 010$ ， $N_2(x) = 001$ ， $N_3(x) = 111$ ；考慮 Q_4 中的點 $x = 1010$ ，則： $N_1(x) = 1011$ ， $N_2(x) = 1000$ ， $N_3(x) = 1110$ ， $N_4(x) = 0010$ 。因為 Q_n 是 n -regular 的圖，所以 Q_n 中的每個點 x 恰有 n 個鄰居，亦即 $N_1(x)$ ， $N_2(x)$ ， \dots ， $N_n(x)$ 。

TQ_n 是在 1987 年由 Hilbers、Koopman 與 Snepscheut 所提出的[4]。

當 n 為奇數時， TQ_n 中的點 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x) =$

$x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1}$ ，第 $k-1$ 個鄰居 $N_{k-1}(x)$ 是：

(a) 若 $x_{k-2} + \cdots + x_2 + x_1 = 0$ ，則： $N_{k-1}(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{\overline{x_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1}}$ ，

(b) 若 $x_{k-2} + \cdots + x_2 + x_1 = 1$ ，則： $N_{k-1}(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1}$ 。圖 2 中給

了 TQ_3 和 TQ_5 。

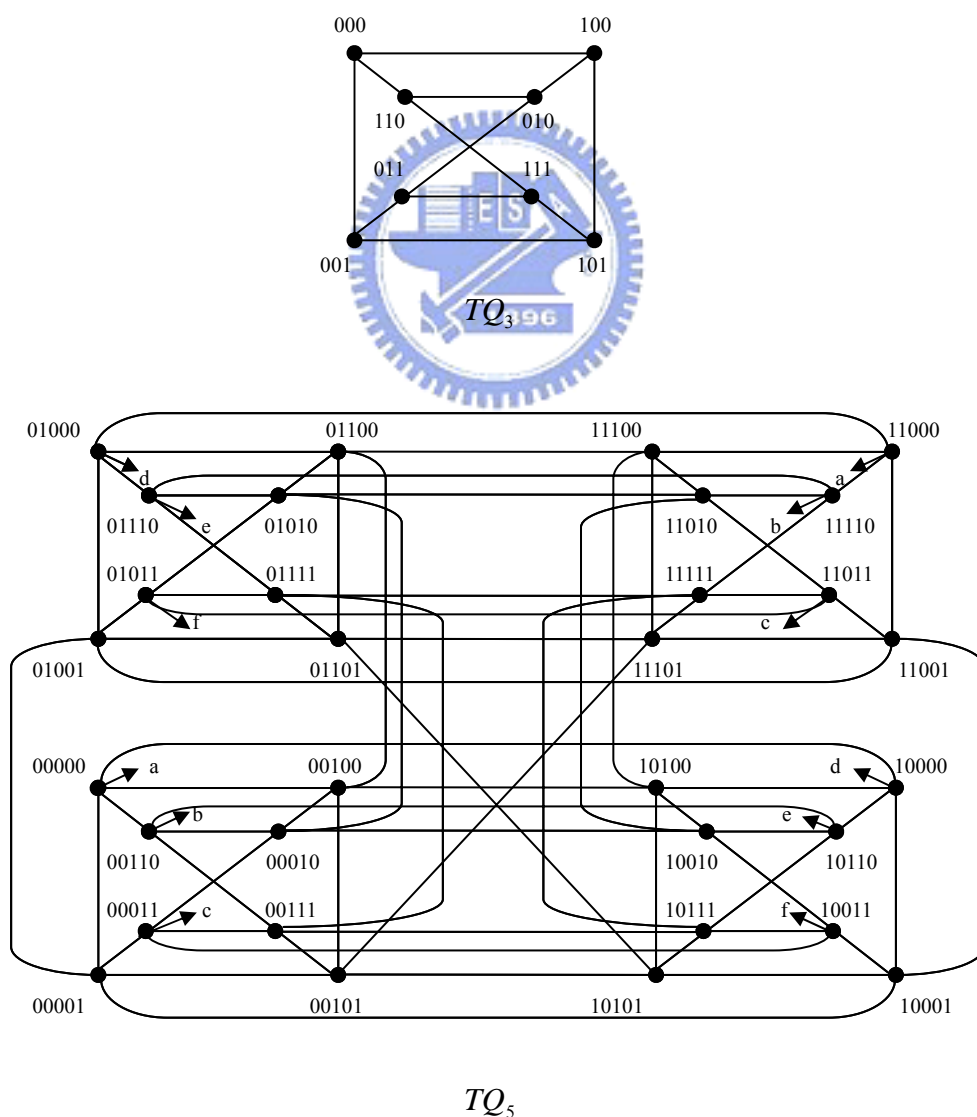


圖 2. TQ_3 和 TQ_5

CQ_n 是在 1992 年由 Efe 所提出的[3]。我們先介紹一個符號：兩個二元字串 $x = x_2x_1$ 與 $y = y_2y_1$ 被稱為是 pair-related，記為 $x \sim y$ ，若且唯若 $(x, y) \in \{(00,00), (10,10), (01,11), (11,01)\}$ 。 CQ_n 的非遞迴定義如下。 CQ_n 中的點 $x = x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x)$ 是：

(a) 若 k 為奇數，則：
$$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k} y_{k-1} y_{k-2} \cdots y_2 y_1,$$

而且對於每個 i ，滿足 $1 \leq i \leq (k-1)/2$ ，均有 $y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1}$ ；

(b) 若 k 為偶數，則：
$$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k x_{k-1}} y_{k-2} \cdots y_2 y_1,$$

而且對於每個 i ，滿足 $1 \leq i \leq (k-2)/2$ ，均有 $y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1}$ 。

例如：考慮 CQ_3 中的點 $x = 011$ ，則 $N_1(x) = 010$ ， $N_2(x) = 001$ ， $N_3(x) = 101$ ；考慮 CQ_4 中的點 $x = 1010$ ，則： $N_1(x) = 1011$ ， $N_2(x) = 1000$ ， $N_3(x) = 1110$ ， $N_4(x) = 0010$ 。圖 3 中給了 CQ_3 和 CQ_4 。

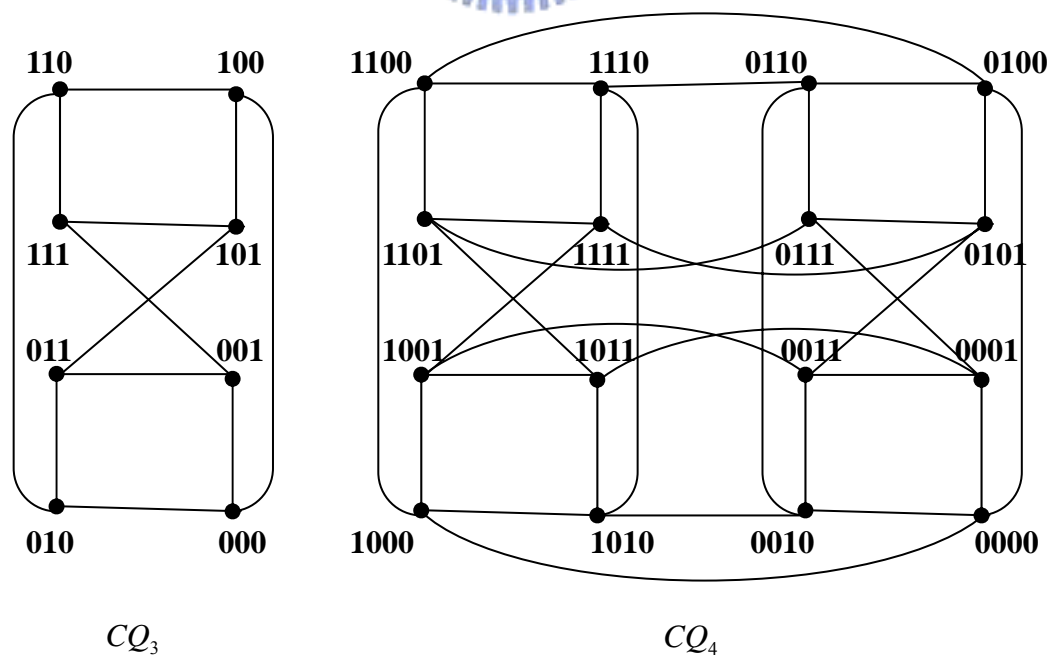


圖 3. CQ_3 和 CQ_4

MQ_n 是在 1995 年由 Cull 與 Larson 所提出的 [2]。 MQ_n 的非遞迴定義如下。

MQ_n 中的點 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x)$ 是：

(a) 若 $x_{k+1} = 0$ ，則： $N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k} x_{k-1} \cdots x_2 x_1$ ；

(b) 若 $x_{k+1} = 1$ ，則： $N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k} \overline{x_{k-1}} \cdots \overline{x_2} \overline{x_1}$ 。

因為在 $k = n$ 時， x_{k+1} （即 x_{n+1} ）沒有定義，我們可以假設有兩種情形，第一種情形：假設 $x_{n+1} = 0$ 時，稱為“0-Möbius cube”，記為 $0-MQ_n$ ；第二種情形，假設 $x_{n+1} = 1$

時，稱為“1-Möbius cube” 記為 $1-MQ_n$ 。例如：考慮 $0-MQ_3$ 中的點 $x = 011$ ，則：

$N_1(x) = 010$ ， $N_2(x) = 001$ ， $N_3(x) = 111$ ；考慮 $1-MQ_3$ 中的點 $x = 011$ ，則：

$N_1(x) = 010$ ， $N_2(x) = 001$ ， $N_3(x) = 100$ ；考慮 $0-MQ_4$ 中，點 $x = 1010$ ，則：

$N_1(x) = 1011$ ， $N_2(x) = 1000$ ， $N_3(x) = 1101$ ， $N_4(x) = 0010$ ；考慮 $1-MQ_4$ 中，點

$x = 1010$ ，則： $N_1(x) = 1011$ ， $N_2(x) = 1000$ ， $N_3(x) = 1101$ ， $N_4(x) = 0101$ 。圖

4 中給了 $0-MQ_4$ 和 $1-MQ_4$ 。

LTQ_n 是在 2005 年由 Yang, Evan 和 Megson 所提出的[7]。 LTQ_n 的非遞迴定

義如下。 LTQ_n 中的點 $x = x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1 x_0$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x)$ 是：

(a) 若 $k = 1$ 或 2 ，則： $N_1(x) = x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 \overline{x_1}$ ， $N_2(x) = x_n x_{n-1} \cdots \overline{x_2} x_1$ ；

(b) 若 $3 \leq k \leq n$ ，則： $N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \overline{x_k} (x_{k-1} + x_1) x_{k-2} \cdots x_2 x_1$ 。

例如：考慮 LTQ_3 中的點 $x = 011$ ，則： $N_1(x) = 010$ ， $N_2(x) = 001$ ， $N_3(x) = 101$ ；

考慮 LTQ_4 中的點 $x = 1010$ ，則： $N_1(x) = 1011$ ， $N_2(x) = 1000$ ， $N_3(x) = 1110$ ，

$N_4(x) = 0010$ 。圖 5 中給了 LTQ_3 和 LTQ_4 。

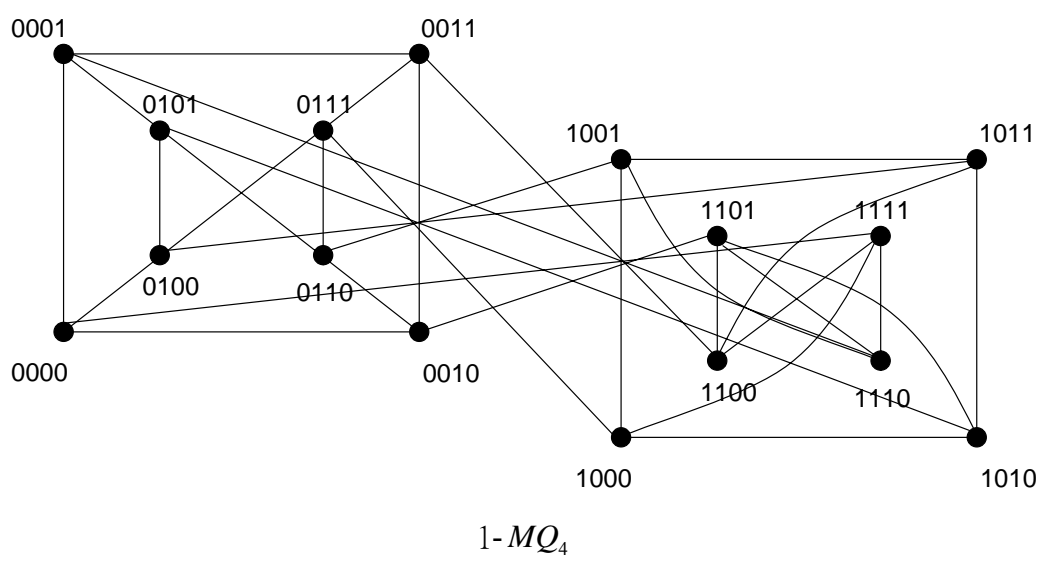
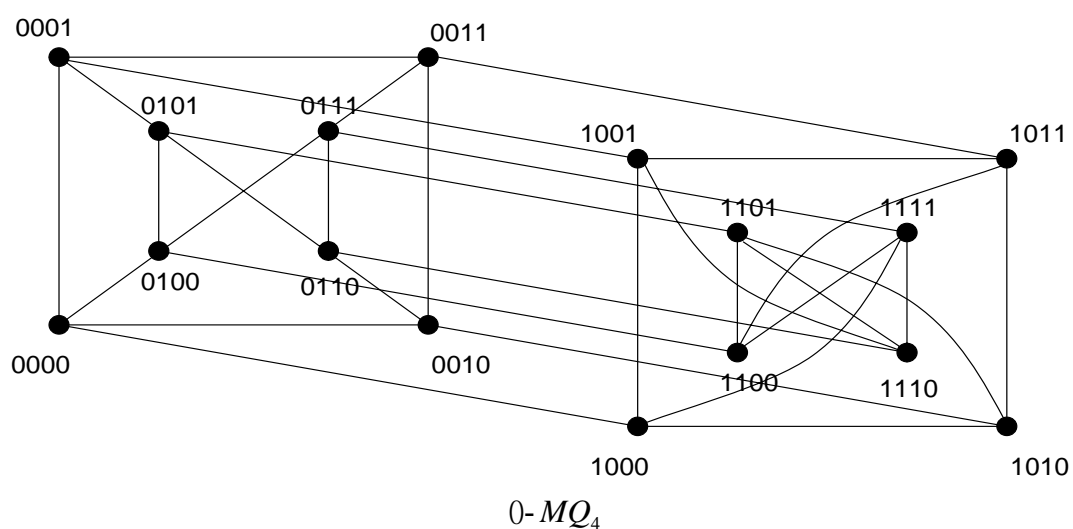
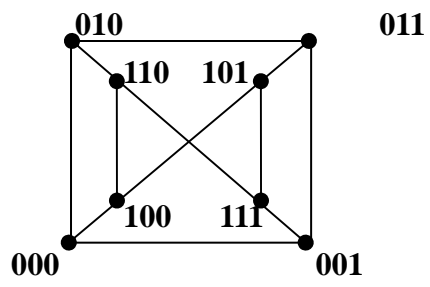
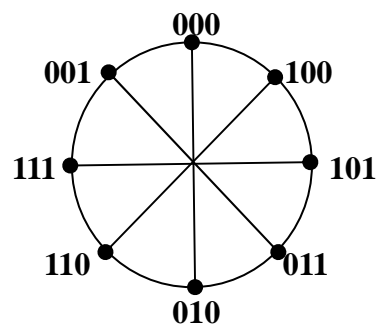


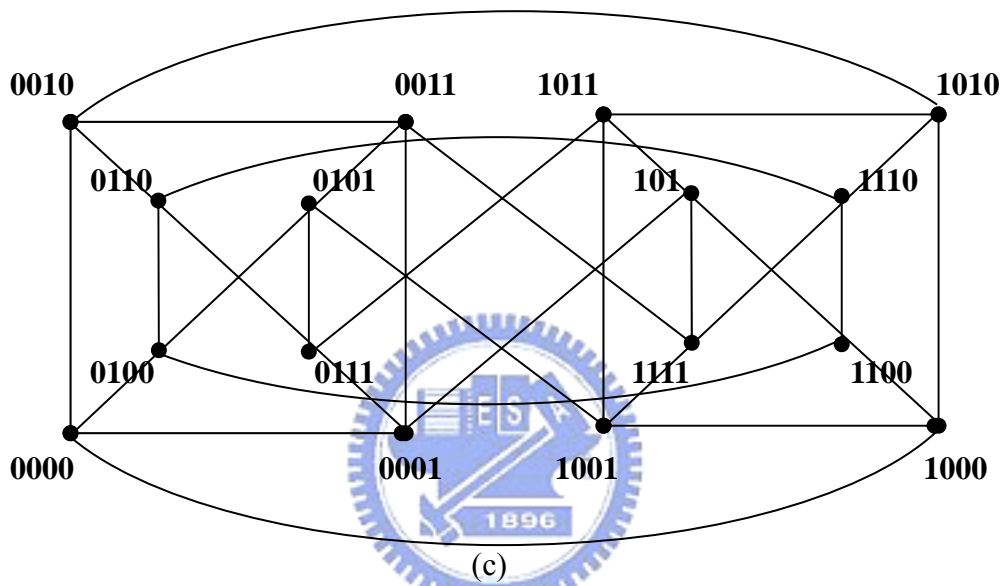
圖 4. $0-MQ_4$ 和 $1-MQ_4$



(a)



(b)



(c)

圖 5. (a) LTQ_3 , (b) 利用對稱的方法畫 LTQ_3 , (c) LTQ_4

在下表中，我們列出各種 cube 中，點 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x)$ ：

cube	點 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的第 k 個鄰居 $N_k(x)$	備註
Q_n	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	
TQ_n	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	n 為奇數
	$N_{k-1}(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k \bar{x}_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	若 $x_{k-2} + \cdots + x_2 + x_1 = 0$
	$N_{k-1}(x) = x_n \cdots x_{k+1} x_k \bar{x}_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	若 $x_{k-2} + \cdots + x_2 + x_1 = 1$
CQ_n	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k y_{k-1} y_{k-2} \cdots y_2 y_1$	當 k 為奇數，而且對於每個 i ，滿足 $1 \leq i \leq (k-1)/2$ ， 均有 $y_{2i} y_{2i-1} \sim x_{2i} x_{2i-1}^\circ$
	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k x_{k-1} y_{k-2} \cdots y_2 y_1$	當 k 為偶數，而且對於每個 i ，滿足 $1 \leq i \leq (k-2)/2$ ， 均要 $y_{2i} y_{2i-1} \sim x_{2i} x_{2i-1}^\circ$
MQ_n	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	當 $x_{k+1} = 0$
	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k \bar{x}_{k-1} \cdots \bar{x}_2 \bar{x}_1$	當 $x_{k+1} = 1$
LTQ_n	$N_0(x) = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$	當 $k = 1$
	$N_2(x) = x_n x_{n-1} \cdots \bar{x}_2 x_1$	當 $k = 2$
	$N_k(x) = x_n \cdots x_{k+1} \bar{x}_k (x_{k-1} + x_1) x_{k-2} \cdots x_2 x_1$	當 $3 \leq k \leq n$

2-2 各種 cube 的“遞迴”定義

Q_n 也可遞迴定義如下： Q_1 是由 0,1 兩點所形成的完全圖，而 Q_n ($n \geq 2$) 是由兩個 Q_{n-1} 依下列規則建立而成：令 $0Q_{n-1}$ 表示在 Q_{n-1} 的每點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 0 所形成的圖，令 $1Q_{n-1}$ 表示在 Q_{n-1} 的每點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 1 所形成的圖，在 $0Q_{n-1}$ 中的一點 $0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 與在 $1Q_{n-1}$ 中的一點 $1x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 相連。

TQ_n 是在 1987 年由 Hilbers、Koopman、和 Snepacheut 等人所提出的[4]；論文[4]中並未提供 n 為偶數時的定義。 TQ_n 的“遞迴”定義如下： TQ_1 與 Q_1 的結構相同；當 $n \geq 3$ ，且為奇數時， TQ_n 可由四個子圖 TQ_{n-2}^{ab} 所構成，其中 $a, b \in \{0,1\}$ ，亦即 TQ_{n-2}^{00} ， TQ_{n-2}^{01} ， TQ_{n-2}^{10} ， TQ_{n-2}^{11} 四個子圖；

(a) TQ_{n-2}^{ab} 與 TQ_{n-2} 同構，而且 $TQ_{n-2}^{ab} : \begin{cases} V(TQ_{n-2}^{ab}) = \{abu \mid u \in V(TQ_{n-2})\} \\ E(TQ_{n-2}^{ab}) = \{(abu, abv) \mid (u, v) = E(TQ_{n-2})\} \end{cases}$ 。

(b) TQ_n 則有：
$$\begin{cases} V(TQ_n) = \bigcup_{a,b \in \{0,1\}} V(TQ_{n-2}^{ab}) \\ E(TQ_n) = \bigcup_{a,b \in \{0,1\}} E(TQ_{n-2}^{ab}) \cup E' \end{cases},$$

其中任意 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ ， $y = y_n y_{n-1} \cdots y_2 y_1 \in V(TQ_n)$ ， $(x, y) \in E'$ 若且唯若

滿足下列三個條件中的任何一個：

(i) $y = \bar{x}_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ ；

(ii) $y = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \cdots x_2 x_1$ ，而且 $x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 = 0$ ；

(iii) $y = x_n \bar{x}_{n-1} \cdots x_2 x_1$ ，而且 $x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 = 1$ 。

CQ_n 、 MQ_n 、和 LQ_n 等超立方體網路變型的遞迴建構的方法與 Q_n 類似。為方便起見，以 GQ_n 表示 CQ_n 或 MQ_n 或 LQ_n 。 GQ_n 都可由兩個 GQ_{n-1} 構成：令 $0GQ_{n-1}$ 表示在 GQ_{n-1} 的每點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 0 所形成的圖，令 $1GQ_{n-1}$ 表示在 GQ_{n-1} 的每點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 1 所形成的圖； GQ_n 是在 $0GQ_{n-1}$ 與 $1GQ_{n-1}$ 中間加上一個完美配對(perfect matching) 而建構成。

CQ_n 的“遞迴”定義如下： CQ_1 就是 Q_1 ； CQ_n ($n \geq 2$) 是由 $0CQ_{n-1}$ 與 $1CQ_{n-1}$ 所構成，在 $0CQ_{n-1}$ 中的一點 $x = 0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 與在 $1CQ_{n-1}$ 中的一點 $y = 1y_{n-1} \cdots y_2y_1$ 有邊相連的充份必要條件是：

(a) 若 n 為奇數，則： $y = 1y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1$ ，而且對每個 i 滿足 $1 \leq i \leq (n-1)/2$ ，均有

$$y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1} ;$$

(b) 若 n 為偶數，則： $y = 1x_{n-1}y_{n-2}y_{n-2} \cdots y_1$ ，而且對每個 i 滿足 $1 \leq i \leq (n-2)/2$ ，

均有 $y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1}$ 。

MQ_n 的“遞迴”定義如下： MQ_1 就是 Q_1 ； MQ_n ($n \geq 2$) 是由 $0MQ_{n-1}$ 與 $1MQ_{n-1}$ 所構成，因為 MQ_n 有兩種形，我們分別述敘如下：

(a) 建構 0- MQ_n ：在 $0MQ_{n-1}$ 中的一點 $x = 0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 與在 $1MQ_{n-1}$ 中的一點

$$y = 1x_{n-1} \cdots x_2x_1 \text{ 相連；}$$

(b) 建構 1- MQ_n ：在 $0MQ_{n-1}$ 中的一點 $x = 0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 與在 $1MQ_{n-1}$ 中的一點

$$y = 1\bar{x}_{n-1} \cdots \bar{x}_2\bar{x}_1 \text{ 相連。}$$

LTQ_n 的“遞迴”定義如下： LTQ_1 就是 Q_1 ； LTQ_n ($n \geq 2$)是由 $0LTQ_{n-1}$ 與 $1LTQ_{n-1}$ 所構成，在 $0LTQ_{n-1}$ 中的一點 $x = 0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 與在 $1LTQ_{n-1}$ 中的點 $y = 1y_{n-1}x_{n-2} \cdots x_2x_1$ 相連的充份必要條件是： $y_{n-1} = x_{n-1} + x_1$ 。

在下表中，我們列出各種 cube 的遞迴定義中所使用的完美配對：

圖	完美配對(perfect matching)	備註
Q_n	$(0x_{n-1} \cdots x_2x_1, 1x_{n-1} \cdots x_2x_1)$	
TQ_n	$(x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1, \overline{x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1})$	
	$(x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1, \overline{\overline{x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1}})$	當 $x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 = 0$
	$(x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1, \overline{\overline{\overline{x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1}}})$	當 $x_{n-2} + x_{n-3} + \cdots + x_1 = 1$
CQ_n	$(0x_{n-1} \cdots x_2x_1, 1y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1)$	當 n 為奇數，而且對每個 i 滿足 $1 \leq i \leq (n-1)/2$ ，均有 $y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1}$ 。
	$(0x_{n-1} \cdots x_2x_1, 1\overline{x_{n-1}y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1})$	若 n 為偶數，而且對每個 i 滿足 $1 \leq i \leq (n-2)/2$ ，均有 $y_{2i}y_{2i-1} \sim x_{2i}x_{2i-1}$ 。
MQ_n	$(0x_{n-1} \cdots x_2x_1, 1x_{n-1} \cdots x_2x_1)$	當建構 $0-MQ_n$
	$(0x_{n-1} \cdots x_2x_1, 1\overline{\overline{x_{n-1} \cdots x_2x_1}})$	當建構 $1-MQ_n$
LTQ_n	$(0x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_2x_1, 1y_{n-1}x_{n-2} \cdots x_2x_1)$	其中 $y_{n-1} = x_{n-1} + x_1$

2 – 3 超立方體網路及其變型的連通度、直徑、以及 routing

algorithms 之整理

我們先給出與連通度、直徑有關的一些定義及符號，這些定義及符號參考自[6]。

一個圖 G 的連通度 (connectivity)，記為 $\kappa(G)$ ，滿足

$$\kappa(G) = \min\{|S| \mid S \subseteq V(G) \text{ 且 } G - S \text{ 為不連通圖或剩下一點}\}。$$

在一個圖 G 中，兩點 u 與 v 的距離，記為 $d_G(u, v)$ ，是所有 $u - v$ 路徑中最短的路徑的長度。若 u 和 v 之間沒有路徑，則 u 和 v 的距離定義為 ∞ ；另若 $u = v$ ，則 u 和 v 距離定義為 0。一個圖 G 的直徑 (diameter)，記為 $D(G)$ ，滿足

$$D(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}。$$

超立方體網路及其變型最常被討論的問題有：連通度、直徑、routing algorithms 等，但是這些結果分散在各論文中，查詢不易，因此本論文將已知結果做一整理如下。

cube type	連通度	直徑	routing algorithm
Q_n	$\kappa(Q_n) = n$	$D(Q_n) = n$	
TQ_n	$\kappa(TQ_n) = n$	$D(TQ_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$ [4]	任兩點間的 routing algorithm [4]
CQ_n	$\kappa(CQ_n) = n$ [3]P410 定理 7.1	$D(CQ_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$ [3]P410 定理 7.1	任兩點間的 routing algorithm [3]P517
MQ_n	$\kappa(MQ_n) = n$	(a) $D(0-MQ_n) = \lceil (n+2)/2 \rceil$ for $n \geq 4$; (b) $D(1-MQ_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$ for $n \geq 1$; [2]P653 定理 5	任兩點間的 routing algorithm [2]P651
LTQ_n	$\kappa(LTQ_n) = n$ [7] P410 定理 7.1	$D(LTQ_3) = 2$; $D(LTQ_4) = 3$; $D(LTQ_n) = \lceil (n+3)/2 \rceil$ for $n \geq 5$; [7]P408 定理 5.1	任兩點間的 routing algorithm [7]P407

3 · LTQ_n 的探討

由於 Yang 等人證明了 LTQ_n 具有許多良好的性質，在這篇論文中，我們將針對 LTQ_n 討論三個主題，第一個主題是 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離的比較，第二個主題是 LTQ_n 的连接矩陣 (adjacency matrix) 的特殊建構方法，第三個主題是 LTQ_n 的點的分類。這些關於 LTQ_n 的探討，都是在文獻中未曾提出過的。另外，我們也更正了文獻中的一個錯誤。

3-1 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離的比較

經由使用 MatLab 語言，我們將 Q_n 和 LTQ_n 的平均距離求出，如下表。由以下數據，可以發現：當 $n \geq 3$ 時， LTQ_n 的平均距離都小於 Q_n ；而且由以下數據中的比值欄位，可以發現兩者的差距是愈來愈大。

n	Q_n 的平均距離	LTQ_n 的平均距離	LTQ_n 的平均距離 / Q_n 的平均距離
2	1.3333	1.3333	1
3	1.7143	1.5714	0.916642
4	2.1333	1.9333	0.906249
5	2.5806	2.2742	0.881268
6	3.0476	2.6587	0.872391
7	3.5276	3.0315	0.859366
8	4.0157	3.4196	0.851558
9	4.5088	3.7984	0.842441
10	5.0049	4.1808	0.835341
11	5.5027	4.5559	0.827939
12	6.0015	4.9302	0.821495
13	6.5008	5.2988	0.815100
14	7.0004	5.6652	0.809268
15	7.5002	6.0273	0.803619

3-2 LTQ_n 的连接矩陣 (adjacency matrix) 的特殊建構方法

現在我們要提出 LTQ_n 的连接矩陣的特殊建構方式。在一個连接矩陣 A 裡， $A_{ij} = 1$ 表示點 i 和點 j 有邊相連， $A_{ij} = 0$ 表示點 i 和點 j 沒有邊相連；其實我們的論文做的更多，我們提出的方法，除了可以知道點 i 和點 j 是否有邊相連，還可以知道，若是它們有邊相連，則點 j 是點 i 的第幾個鄰居；換句話說，我們定義 $A_{ij} = k$ 若 $j = N_k(i)$ ， $A_{ij} = 0$ 若點 i 和點 j 沒有邊相連。

現在我們證明 LTQ_{n-1} 和 LTQ_n 的连接矩陣有下面的關係。

定理 1：



我們先用 LTQ_2 和 LTQ_3 ，以及 LTQ_3 和 LTQ_4 的連接矩陣做說明。

	00	01	10	11
00	0	1	2	0
01	1	0	0	2
10	2	0	0	1
11	0	2	1	0

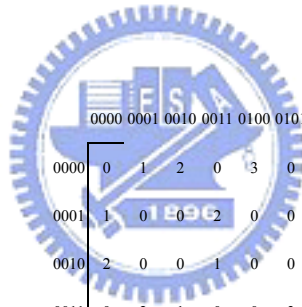
LTQ_2

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	1	2	0	3	0	0	0
001	1	0	0	2	0	0	0	3
010	2	0	0	1	0	0	3	0
011	0	2	1	0	0	3	0	0
100	3	0	0	0	0	1	2	0
101	0	0	0	3	1	0	0	2
110	0	0	3	0	2	0	0	1
111	0	3	0	0	0	2	1	0

LTQ_3

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	1	2	0	3	0	0	0
001	1	0	0	2	0	0	0	3
010	2	0	0	1	0	0	3	0
011	0	2	1	0	0	3	0	0
100	3	0	0	0	0	1	2	0
101	0	0	0	3	1	0	0	2
110	0	0	3	0	2	0	0	1
111	0	3	0	0	0	2	1	0

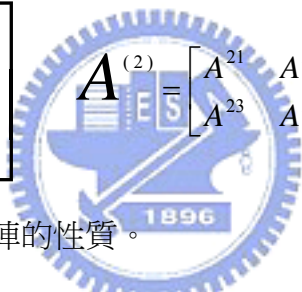
LTQ_3



	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0000	0	1	2	0	3	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0
0001	1	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	4	0	0
0010	2	0	0	1	0	0	3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
0011	0	2	1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
0100	3	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	4	0	0	0
0101	0	0	0	3	1	0	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0
0110	0	0	3	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	0
0111	0	3	0	0	0	2	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0
1000	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	3	0	0	0
1001	0	0	0	0	0	4	0	0	1	0	0	2	0	0	0	3
1010	0	0	4	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	3	0
1011	0	0	0	0	0	0	0	4	0	2	1	0	0	3	0	0
1100	0	0	0	0	4	0	0	0	3	0	0	0	0	1	2	0
1101	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	2
1110	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	3	0	2	0	0	1
1111	0	0	0	4	0	0	0	0	0	3	0	0	0	2	1	0

LTQ_4

定理 1 的證明： LTQ_n 的連接矩陣 A 是一個 $2^n \times 2^n$ 的矩陣，今將矩陣 A 視為由 4 個 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ 的矩陣 $A^{(1)}$ 、 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 、 $A^{(4)}$ 所構成，其中 $A^{(1)}$ 、 $A^{(2)}$ 、 $A^{(3)}$ 、 $A^{(4)}$ 分別表示矩陣 A 的左上、右上、左下、和右下角矩陣。將矩陣 A^2 視為由 4 個 $2^{n-2} \times 2^{n-2}$ 的矩陣 A^{21} 、 A^{22} 、 A^{23} 、 A^{24} 所構成，其中 A^{21} 、 A^{22} 、 A^{23} 、 A^{24} 分別表示矩陣 A^2 的左上、右上、左下、和右下角的矩陣。將矩陣 A^3 視為由 4 個 $2^{n-2} \times 2^{n-2}$ 的矩陣 A^{31} 、 A^{32} 、 A^{33} 、 A^{34} 所構成，其中 A^{31} 、 A^{32} 、 A^{33} 、 A^{34} 分別表示矩陣 A^3 的左上、右上、左下、和右下角的矩陣。我們將上述的矩陣以下圖表示：

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{21} & A^{22} \\ A^{23} & A^{24} \end{bmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} A^{31} & A^{32} \\ A^{33} & A^{34} \end{bmatrix}$$


接下來，我們分別討論各矩陣的性質。

- (i) 矩陣 $A^{(1)}$ ，相當於考慮 $V(0LTQ_{n-1})$ 中任兩點的連接情形，因為 $0LTQ_{n-1}$ 就是 LTQ_{n-1} 中每個點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 0 所形成的圖，所以 $0LTQ_{n-1}$ 與 LTQ_{n-1} 的結構完全相同，因此矩陣 $A^{(1)}$ 也與 LTQ_{n-1} 的連接矩陣相同。
- (ii) 同理，矩陣 $A^{(4)}$ ，相當於考慮 $V(1LTQ_{n-1})$ 中任兩點的連接情形，因為 $1LTQ_{n-1}$ 就是 LTQ_{n-1} 中每個點的 $(n-1)$ -tuples 之前加上一個 1 所形成的圖，所以 $1LTQ_{n-1}$ 與 LTQ_{n-1} 的結構完全相同，因此矩陣 $A^{(4)}$ 也與 LTQ_{n-1} 的連接矩陣相同。

在往下證明之前，我們先定義 $abLTQ_{n-2}$ ，其中 $a, b \in \{0,1\}$ 。 $abLTQ_{n-2}$ 表示在 LTQ_{n-2}

中每個點的 $(n-2)$ -tuples 之前加上 ab 二個 bits 所形成的圖。

(iii)① 矩陣 $A^{(2)}$ 中的 A^{21} ，相當於考慮 $00LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 00x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $10LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 10y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。可以確定 x 與 y 最左邊的二個 bits 中：第一個 bit 不同，第二個 bit 相同。根據 LTQ_n 的定義， LTQ_n 中相連的兩點最多只有兩個 bits 不相同，而且若是有兩個 bits 不相同，則這兩個 bits 必為連續的兩個 bits，因此 x 與 y 有邊相連的充分必要條件為：對於每個 $1 \leq i \leq n-2$ ，均有 $y_i = x_i$ ，且 $y_1 = x_1 = 0$ 。此外，若 x 與 y 有邊相連，則 $y = N_n(x)$ 。由以上，矩陣 A^{21} 只有在對角線的奇數位置的值為 n ，其它部份都是 0。

② 矩陣 $A^{(2)}$ 中的 A^{22} ，相當於考慮 $00LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 00x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $11LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 11y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。可以確定 x 與 y 最左邊的二個 bits 都不相同。根據 LTQ_n 的定義， LTQ_n 中相連的兩點最多只有兩個 bits 不相同，而且若是有兩個 bits 不相同，則這兩個 bits 必為連續的兩個 bits，因此 x 與 y 有邊相連的充分必要條件為：對於每個 $1 \leq i \leq n-2$ ，均有 $y_i = x_i$ ，且 $y_1 = x_1 = 1$ 。此外，若 x 與 y 有邊相連，則 $y = N_n(x)$ 。由以上，矩陣 A^{22} 只有在對角線的偶數位置的值為 n ，其它部份都是 0。

③ 矩陣 $A^{(2)}$ 中的 A^{23} ，相當於考慮 $01LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 01x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $10LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 10y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 A^{22} 相同的討

論，可得 $A^{23} = A^{22}$ 。

④ 矩陣 $A^{(2)}$ 中的 A^{24} ，相當於考慮 $01LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 01x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $11LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 11y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 A^{21} 相同的討論，可得 $A^{24} = A^{21}$ 。

(iv)① 矩陣 $A^{(3)}$ 中的 A^{31} ，相當於考慮 $10LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 10x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $00LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 00y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 (iii) ① A^{21} 相同的討論，可得 $A^{31} = A^{21}$ 。

② 矩陣 $A^{(3)}$ 中的 A^{32} ，相當於考慮 $10LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 10x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $01LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 01y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 (iii) ② A^{22} 相同的討論，可得 $A^{32} = A^{22}$ 。

③ 矩陣 $A^{(3)}$ 中的 A^{33} ，相當於考慮 $11LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 11x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $00LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 00y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 (iii) ② A^{22} 相同的討論，可得 $A^{33} = A^{22}$ 。

④ 矩陣 $A^{(3)}$ 中的 A^{34} ，相當於考慮 $11LTQ_{n-2}$ 中的一點 $x = 11x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_1$ 與 $01LTQ_{n-2}$ 中的一點 $y = 01y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_1$ 的連接情形。用與 (iii) ① A^{21} 相同的討論，可得 $A^{34} = A^{21}$ 。 □

引理 2： $A^{(1)} = A^{(4)}$ ， $A^{(2)} = A^{(3)}$ ， $A^{21} = A^{24}$ ， $A^{22} = A^{23}$ 。

證明：由定理 1。 □

3-3 LTQ_n 點的分類

當 $n = 2$ 時， $LTQ_n = Q_2$ ，因此 LTQ_2 的點只有一類。當 $n = 3$ 時，由圖 5(b) 知道， LTQ_3 的點只有一類。在以下，我們將證明 LTQ_n ($n \geq 4$) 的點最多只有兩類。證明中需要用到下列定義，這些定義出自[7]。為了方便，在以下， $u \sim v$ 表示點 u 和點 v 之間有邊相連； $u \not\sim v$ ，表示點 u 和點 v 之間沒有邊相連。

令 $\{0,1\}^n$ 表示長度為 n 的所有二進位字串所形成的集合，令兩字串 $x, y \in \{0,1\}^n$ ， $x + y$ 表示 x, y 的和取 modulo 2 的值(亦即取 exclusive OR)；則 $(\{0,1\}^n, +)$ 形成一個空間。在[7]中，定義了下面兩組基底。

定義 1[7]：任意 $1 \leq i \leq n$ ，令 e_i 為長度為 n 的二進位字串，

$$\begin{aligned} \text{且 } e_1 &= 0000 \cdots 00001 \\ e_2 &= 0000 \cdots 00010 \\ e_3 &= 0000 \cdots 00100 \\ &\vdots \\ e_n &= 1000 \cdots 00000. \end{aligned}$$



由此定義， $eBASE_n = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 為空間 $(\{0,1\}^n, +)$ 的一組基底。

定義 2[7]：任意 $1 \leq i \leq n$ ，令 E_n 為長度為 n 的二進位字串，

$$\begin{aligned} \text{且 } E_1 &= e_1 = 0000 \cdots 00001 \\ E_2 &= e_2 = 0000 \cdots 00010 \\ E_3 &= e_2 + e_3 = 0000 \cdots 00110 \\ E_4 &= e_3 + e_4 = 0000 \cdots 001100 \\ &\vdots \\ E_n &= e_{n-1} + e_n = 1100 \cdots 00000. \end{aligned}$$

由此定義， $EBASE_n = \{E_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 為空間 $(\{0,1\}^n, +)$ 的一組基底。

定義 3[7]：當 $n \geq 2$ ， n 維的 two-twisted cube，記為 $Q_{n,2}$ ，其點集合為

$$V(Q_{n,2}) = \{0,1\}^n，其邊集合為 E(Q_{n,2}) = \{(x, y) \mid x = y + E_k, \text{ 其中 } 1 \leq k \leq n\}。$$

由於定義 3有錯誤（我們將在後面再加以說明），因此在本論文中，我們重新給出定義 3如下。

定義 3[修正後]：當 $n \geq 2$ ， n 維的two-twisted cube，記為 $Q_{n,2}$ ，其點集合為

$$V(Q_{n,2}) = \{0,1\}^n，其邊集合為 E(Q_{n,2}) = \{(x, y) \mid x = y + E_k \text{ 若 } 1 \leq k \leq n \text{ 且 } k \neq 2，\text{ 或 } x = y + E_k + E_1 \text{ 若 } k = 2\}。$$

在證明 LTQ_n 的點至多兩類時，我們需要用到下面的定理 5和補助定理 3、4。

補助定理 3[7]： LTQ_n 可以由下列三個步驟建構完成：

step1：令圖 $Q_{n-1,0}$ 為 Q_{n-1} 的所有點的最後一個 bit 加上 0 所得到的圖；

step2：令圖 $Q_{n-1,2}1$ 為 $Q_{n-1,2}$ 的所有點的最後一個 bit 加上 1 所得到的圖；

step3： $Q_{n-1,0}$ 中的點 x 與 $Q_{n-1,2}1$ 中的點 $x + e_1$ 有一條邊相連。

補助定理 4[7]： $Q_{n,2}$ 與 Q_n 同構。

現在我們說明修正定義 3的原因：考慮 $Q_{n-1,2}$ 中的點 $v = v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_1$ ，由定義 3，因為 $v \sim v + E_2$ ，亦即 $v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_1 \sim v_{n-1}v_{n-2} \cdots \overline{v_3}v_2v_1$ ，則依據補助定理 3[7] 的方式建構 LTQ_n 時，在 step2 中，可得 $v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_11 \sim v_{n-1}v_{n-2} \cdots \overline{v_3}v_2v_11$ ，但根據 LTQ_n 的定義，在 LTQ_n 中 $v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_11 \not\sim v_{n-1}v_{n-2} \cdots \overline{v_3}v_2v_11$ ，因此錯誤。然而，若使用修正後的定義 3，則因為在 $Q_{n-1,2}$ 中 $v \sim v + E_2 + E_1$ ，亦即 $v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_1 \sim v_{n-1}v_{n-2} \cdots \overline{\overline{v_3}v_2}v_1$ ，則依據補助定理 3[7]

的方式建構 LTQ_n 時，在 step2 中，可得 $v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3v_2v_11 \sim v_{n-1}v_{n-2} \cdots v_3\overline{v_2v_1}1$ ，因此可以修正上述錯誤。

現在我們證明本論文另一主要結果。

定理 5：當 $n \geq 4$ 時， LTQ_n 的點最多分為兩類，第一類的點為 $V(Q_{n-1}0)$ ，第二類的點為 $V(Q_{n-1,2}1)$ 。

證明：由 補助定理 3 可知：
$$\begin{cases} V(LTQ_n) = V(Q_{n-1}0) \cup V(Q_{n-1,2}1) \\ V(Q_{n-1}0) \cap V(Q_{n-1,2}1) = \emptyset \end{cases}。$$

我們只證明 $V(Q_{n-1}0)$ 中的點為同一類；用相同的方法亦可證出 $V(Q_{n-1,2}1)$ 中的點為同一類。

考慮 $V(Q_{n-1}0)$ 中的任意相異兩點 x 和 y ，定義函數 f 為：

$$f(v) = v + x + y, \quad \forall v \in V(LTQ_n)$$

欲證明 x 和 y 為同一類，相當於要證明 f 滿足以下三條件：

- (i) f 是 one-to-one 且 onto；
- (ii) $f(x) = y$ ；
- (iii) 若 $u \sim v$ ，則 $f(u) \sim f(v)$ 。

我們首先證明 f 是 one-to-one 且 onto。對任意的一點 $u \in V(LTQ_n)$ ，取 $v = u + x + y$ ，則 $f(v) = v + x + y = (u + x + y) + x + y = u$ ，所以函數 f 為 onto。又函數 f 的定義域與對應域都是 $V(LTQ_n)$ ，因此函數 f 為 one-to-one。接下來，我們證明 $f(x) = y$ ；由 f 的定義， $f(x) = x + x + y = y$ ，故得證。

現在我們分三個情形來證明若 $u \sim v$ ，則 $f(u) \sim f(v)$ 。

情形 1 : $u, v \in V(Q_{n-1}0)$ 。則存在一個 $e_i \in eBASE_n$ 使得

$$u = v + e_i \quad (\because u \sim v \text{ 且 } u, v \in V(Q_{n-1}0)) ,$$

$$f(u) = u + x + y \in V(Q_{n-1}0) \quad (\because u, x, y \in V(Q_{n-1}0)) ,$$

$$f(v) = v + x + y \in V(Q_{n-1}0) \quad (\because v, x, y \in V(Q_{n-1}0)) ;$$

$$\text{因此 } f(u) = u + x + y = (v + e_i) + x + y = (v + x + y) + e_i = f(v) + e_i ,$$

所以 $f(u) \sim f(v)$ 。

情形 2 : $u, v \in V(Q_{n-1,2}1)$ 。則存在一個 $E_i \in EBASE_n$ 使得

$$u = v + E_i \quad (\because u \sim v \text{ 且 } u, v \in V(Q_{n-1,2}1)) ,$$

$$f(u) = u + x + y \in V(Q_{n-1,2}1) \quad (\because u \in V(Q_{n-1,2}1) \text{ 且 } x, y \in V(Q_{n-1}0)) ,$$

$$f(v) = v + x + y \in V(Q_{n-1,2}1) \quad (\because v \in V(Q_{n-1,2}1) \text{ 且 } x, y \in V(Q_{n-1}0)) ;$$

$$\text{因此 } f(u) = u + x + y = (v + E_i) + x + y = (v + x + y) + E_i = f(v) + E_i ,$$

所以 $f(u) \sim f(v)$ 。

情形 3 : $u \in V(Q_{n-1}0)$, $v \in V(Q_{n-1,2}1)$ 。則

$$u = v + e_1 \quad (\because u \sim v) ,$$

$$f(u) = u + x + y \in V(Q_{n-1}0) \quad (\because u, x, y \in V(Q_{n-1}0)) ,$$

$$f(v) = v + x + y \in V(Q_{n-1,2}1) \quad (\because v \in V(Q_{n-1,2}1) \text{ 且 } x, y \in V(Q_{n-1}0)) ;$$

$$\text{因此 } f(u) = u + x + y = (v + e_1) + x + y = (v + x + y) + e_1 = f(v) + e_1 ,$$

所以 $f(u) \sim f(v)$ 。

4 · 結語

在這篇論文中，我們針對四種最常見的超立方體網路的變型： TQ_n 、 CQ_n 、 MQ_n 、以及 LTQ_n ，做了連通度、直徑、訊息傳送演算法、以及平均距離的資料上的整理，也針對 LTQ_n 討論了三個主題。我們討論了 LTQ_n 與 Q_n 的平均距離，提出了 LTQ_n 的连接矩陣的特殊建構方法，也證明了當 $n \geq 4$ 時， LTQ_n 的點最多分為兩類。由我們實際跑程式所得到的數據，當 $n \geq 4$ 時， LTQ_n 的點都是恰可分為兩類，因此我們也猜測：當 $n \geq 4$ 時， LTQ_n 的點恰可分為兩類。



參考文獻

- [1] S. Abraham and K. Padmanabhan, "The twisted cube topology for multiprocessors: A study in network asymmetry", *J. Parallel Distrib. Comput.*, Vol. 13 (1991), 104-110.
- [2] P. Cull and S. M. Larsion, "The Möbius cubes", *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 44 (1995), 647-659.
- [3] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computation", *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, Vol. 3 (1992), 513-524.
- [4] P. A. J. Hilbers, M. R. J. Koopman, and J.L.A. van de Snepscheut, "The twisted cube" in: *Lecture Notes in Computer Science, Parallel Architect. Lang. Eur.* (1987), 152-159.
- [5] K. S. Hu, S. S. Yeoh, C. Y. Chen, and L. H. Hsu, "Node-pancyclicity and edge-pancyclicity of hypercube variants," *Inf. Process. Lett.*, Vol. 102 (2007), 1-7.
- [6] D. B. West, *Introduction to graph theory*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2001.
- [7] X . F. YANG, D. J. Evans, and G. M. Megson, "The locally twisted cubes," *Int. J. Comput. Math.*, Vol. 82 (2005), 401-413.