

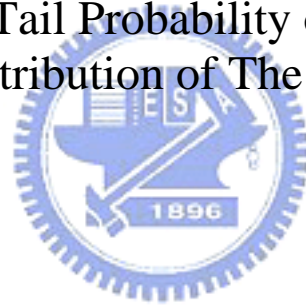
國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

M/G/1之極限機率的尾端行為

The Tail Probability of The
Limiting Distribution of The M/G/1 Queue



研究生：李泓毅

指導教授：彭南夫 博士

中華民國九十五年六月

M/G/1之極限機率的尾端行為

The Tail Probability of The Limiting Distribution of The M/G/1 Queue

研究生：李泓毅

Student : Hung-Yi Li

指導教授：彭南夫

Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文



A Thesis

Submitted to Institute of Statistics
College of Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Statistics
June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

M/G/1之極限機率的尾端行為

研究生：李泓毅

指導教授：彭南夫 博士

國立交通大學統計學研究所



本文目的在找出進入平穩狀態時 $M/G/1$ 系統中極限分佈的尾巴部分的收斂情形。我們的方法使用嵌入馬可夫鏈的觀念，且我們知道系統中相鄰的兩個離開的人之區段具有相同分佈但不獨立。我們證明相鄰的兩個離開的人之區段有大數法則的性質。接著使用遞迴的方式，我們呈現極限分佈的尾巴部分的下降成一幾何的分佈。藉著我們再拓展它去預測 $M/G/s$ 的結果。

The Tail Probability of The Limiting Distribution of The M/G/1 Queue

Student : Hung-Yi Li

Advisor : Dr. Nan-Fu Peng

Institute of Statistic

National Chiao Tung University



This thesis is to find the behavior of tail limiting distribution of M/G/1 queue in steady-state. Our method includes embedded Markov chain, and in steady state we could know the period between two consecutive customer departure times are identical distribution, but not independent. We prove the series of period between two consecutive customer departure times are adapted to strong law of large numbers. By using the recursive form we show in this paper that the tail of the probabilities decay geometrically as the number of the customers grow large. Next we extend it to guess the behavior of tail limiting distribution of the general M/G/s Queue.

誌 謝

統研所的兩年中，不論是研究應有的態度和知識，生活經驗的累積上面，都使我獲益良多。本論文的完成，其中我要特別感謝我的指導教授彭南夫老師耐心的指導，以及口試委員洪慧念教授、王鴻龍教授和鄭天澤教授的參與指教，幫助修正論文使得更加清楚明白。

生活上學業上，冠達同學的幫助和討論，學業上面的互相切磋，使我漸漸進入狀況。並且有一群一起打籃球的夥伴、羽球的夥伴、聚餐的朋友、晚上留研究室打拼的同學、msn上互相打氣的同學、低潮時鼓勵我的朋友們等等，這兩年的生活因為你們豐富了起來，在我心中留下深刻的回憶。

最後，要感謝我的家人的栽培和鼓勵，尤其是我的媽媽，無日無夜的工作，讓我可以毫無顧慮之下順利完成學業，由衷地感謝妳。在此，將此篇論文獻給曾經鼓勵協助我的所有人，謝謝你們。

泓毅 謹誌于

國立交通大學統計研究所

中華民國九十四年六月

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌 謝	iii
目 錄	iv
圖、表目錄	v
第一章 導論	1
1-1 研究動機	1
1-2 研究方法	2
第二章 理論部份	5
2-1 $M/G/1$ 服務系統	5
第三章 演算法及結果分析	18
3-1 $M/G/1$ 尾端機率演算法	18
3-2 模擬結果分析	21
3-3 分析結果	30
第四章 應用到$M/G/s$模型上	31
4-1 $M/G/s$ 模擬結果分析	32
4-2 模擬結果分析	39
第五章 結論	40
參考文獻	41

圖、表目錄

圖 1-1、嵌入馬可夫鏈之系統示意圖	4
圖 2-1、系統狀態示意圖 1	8
圖 2-2、系統區段示意圖	10
圖 2-3、系統狀態示意圖 2	11
表 3-1、 $M/G/1$ 模擬結果 1	22
表 3-2、檢定 $M/G/1$ 模擬結果 1	23
表 3-3、 $M/G/1$ 模擬結果 2	26
表 3-4、檢定 $M/G/1$ 模擬結果 2	26
表 3-5、 $M/G/1$ 模擬結果 3	29
表 3-5、檢定 $M/G/1$ 模擬結果 3	29
表 4-1、 $M/M/2$ 模擬結果 1	32
表 4-2、 $M/M/2$ 模擬結果 2	33
表 4-3、 $M/M/2$ 模擬結果 3	34
表 4-4、 $M/G/2$ 模擬結果 1	35
表 4-5、 $M/G/2$ 模擬結果 2	36
表 4-6、 $M/G/3$ 模擬結果	37
表 4-7、 $M/G/4$ 模擬結果	38

第一章 導論

我們認知的 $M/G/1$ 是一個服務的櫃檯，擁有齊一性卜瓦松 (*homogeneous Poisson*) 的到達過程，和獨立且相同分配服務時間的分配。這是一個被廣泛應用且有發展性的隨機模型，很多優美的數學方法也被應用在此方面。在工程上，通訊信號的處理系統與電腦模型的建立；在工業上，工廠製造的等候線，在運輸管理上，一個交通號誌的管制車流量等等，感覺像是很多單位元件等候處理，這都是 $M/G/1$ 應用方面的一部份。當一個櫃檯拓展到 n 個櫃台，這變成一般情況的問題 ($M/G/s$)，很多的領域都應用到此方面。



1-1 研究動機

當我們在模擬排隊理論的資料時，首先定義尾端個數就是從任何時間點切入看，當系統中有 n 個人稱為系統個數，若 n 很大時，稱為尾端個數，我們知道非尾端個數容易模擬，但是由於因為樣本個數限定的關係，且尾端部分發生的機率本來就比較少，使得尾端個數誤差較大，這樣我們得到的結果失真。 $M/G/n$ 遇到相同的情況，目前 $M/G/n$ 的極限分佈還沒發展出來，做模擬時，非尾端個數的部份好模擬，而尾端個數也是很難模擬出來。本文目的就是在找出極限分佈的尾端 (*tail limiting probability*) 行為，因此我們可以估計極限分佈的尾端收斂狀況，使得模擬狀態更為完善。

文獻探討

排隊理論中， $M/G/1$ 中極限機率已有相當的發展。排隊理論中極限機率的近似解很多都有相當研究，譬如說 Boxma, Cohen, Huffels(1980), Cosmetatos(1976)和 Nozaki, Ross(1978)都有文獻的發表。在 $M/D/s$ 中，Crommelin (1932)發表過在服務時間的分佈是常數的情況下，求得 $M/D/s$ 中極限機率的方法。在 $M/E_k/s$ 中，Heffer (1969)對 $M/E_k/s$ 做出極限機率精確的分析。在 $M/G/s$ 中，H. C. Tijms , M. H. Van Hoorn , A. Federgruen,(1981)做出 $M/G/s$ 中極限機率的近似解。但是目前沒有 $M/G/s$ 中極限機率現在仍是沒有精確解。



1-2 研究方法

$M/G/1$ 中，先進來服務的人，會先被服務(*first come, first served*)，後面等待的人群中，以等待時間最長者優先服務。且我們假設每一個服務過程，除非服務結束，不然服務狀況不會在中途停掉。在排隊理論中，若我們以如下的觀點來看，把每一個離開的人回頭看系統中剩下的人數為觀察值(不包含自己)，則我們得到嵌入馬可夫鏈(*embedded Markov chain*)。這是因為進來的人服從卜瓦松分佈，當他服務結束，離開之後系統下一個服務時間就像是從新開始，因此具有馬可夫鏈的性質。換個觀點來看，當每個新進入的人記錄系統中的人數(不包含自己)，則我們可稱為

PASTA (*Poisson Arrivals See Time Averages*), 跟嵌入馬可夫鏈有異曲同工之妙。可再進一步求得極限機率的尾端行為。

接著利用上述方法，知道相鄰兩個離開的人的間距為一區段 (*period*)。在平穩狀態時 (*steady state*)，此區段具有相同的分佈，但是不叫它週期 *cycle*，是因為它不是獨立的 (*i.d.*)。因此下一步必須證明區段有收斂性質，也就是說有大數法則的性質。緊接著利用收斂性質，可以求出極限分布的起始部分 (π_0, π_1) 的近似值， π_i 定義為系統是 i 個人的極限機率，並用遞迴的方式，一一求出各自的極限分布的值，因此可以得到極限分布的比

值 $(\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i})$ 。



根據[1]，我們先介紹嵌入馬可夫鏈 (*embedded Markov chain*)，我們可定義 X_n 為第 n 個人離開時系統中剩下的人數， Y_n 為第 $(n+1)$ 個人服務時間進來的人數，則

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - 1 + Y_n, \text{ if } X_n > 0 \\ &= Y_n, \text{ if } X_n = 0 \end{aligned}$$

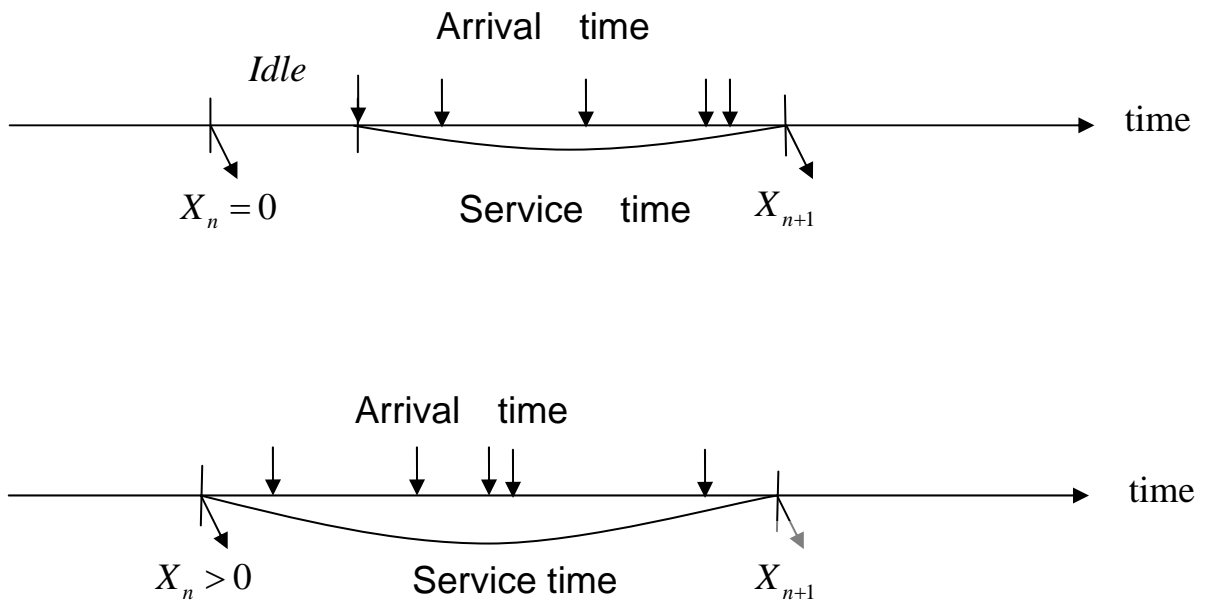


圖 1-1、嵌入馬可夫鏈之系統示意圖

因為 $Y_n, n \geq 0$ 為在服務時間內到達的人數，且顧客到達的過程服從卜瓦松過程 (Poisson process)，則我們有

$$P\{Y_n = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x), \quad j = 0, 1, \dots$$

由上我們可以得知， $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ 為馬可夫鏈 (Markov chain)，且它們的轉移機率為

$$P_{0j} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x), \quad j \geq 0$$

$$P_{ij} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dG(x), \quad j \geq i-1, \quad i \geq 1$$

$$P_{ij} = 0, \quad \text{otherwise}$$

以上是有關嵌入馬可夫鏈的描述。

第二章 理論部份

2-1 $M/G/1$ 服務系統

一個服務櫃檯，進來的顧客依照卜瓦松過程 $Poisson(\lambda)$ ，服務的時間服從 *i.i.d.* 的任何一般的分配，令他的分配是 G 。顧客進入系統時，發現櫃台是空閒的則進入服務，否則加入排隊。在服務的過程中，我們假設沒有任何一個服務中途被打斷，而且如果之前的服務沒有結束，新的服務不可能開始。服務的順序以等待時間最長者優先。

我們定義一個區段 (*period*) 是相鄰兩個離開人的時間區間，空閒區段 (*Idle period*) 指系統櫃檯是空閒的時候，一段服務時間為系統中櫃台服務一個顧客所花費的時間。

設 $g(x)$ 是 G 的機率密度函數 (*p.d.f*)，而且 G 的動差函數存在。定義 $X(t)$ 為 t 時間點系統的人數，在一些條件下可得到平穩狀態的機率

$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k)$ ，另外我們設

$$\gamma_k = P(\text{在平穩狀態時，任一顧客進入系統前發現系統中有 } k \text{ 個人})$$

$$\delta_k = P(\text{在平穩狀態時，任一顧客離開系統時發現系統中有 } k \text{ 個人})$$

根據[3]，我們有以下引理，

引理 1

在平穩狀態 (*steady state*) $M/G/1$ 系統裡面，到達之顧客、離開的顧客、和隨機的觀察者，看系統總人數的分配都是一樣，也就是 $\gamma_k = \delta_k = p_k$ 。

γ_k 為進入系統的人看系統的人數，這樣來說，每次的觀察值都是隨機觀察值，由於顧客進入系統的分配服從卜瓦松過程，因此和隨機觀察值是一樣的，這觀念比較好理解，因此 k 個人的極限機率也就是人數的平均。我們也知道 δ_k 的極限機率也是人數的平均。我們又知道 k 個人的極限機率，也是時間的平均，所以我們得知人數的平均會等於時間的平均。

可是因為此區段不是獨立的，這是由於有些區段具有空閒區段，有些則沒有具有空閒區段，也就是說，這些區段 X_i 具有相同的分佈，可是非獨立 (*i.d.*)，因此我們需要證明它有大數法則的性質。



定理 1

當 $M/G/n$ 系統進入平穩狀態時 (*steady state*)，令 X_i 為第 i 個人離開系

統到第 $(i+1)$ 個人離開系統的間隔時間，這會使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} EX_1, n \rightarrow \infty$

證明：

如果我們可以證明 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} c$ ，以及再證明 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} EX_1$ ，

則由於極限定理的唯一性，則 $c = EX_1$ ，我們可以得到所求。

首先我們先證明 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} c$

Z_i 為第 i 個空閒區段的起點到第 $(i+1)$ 個空閒區段的起點的間隔時

間，我們可以知道，因為 Z_i 為 *i.i.d* 的隨機變數， N_Z^t 定義為在 t 時間內

Z_i 的發生個數，所以

$$\frac{t}{N_Z^t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} EZ_1$$

令 W_i 為在一個週期 Y_i 中的顧客人數， N_X^t 定義為在 t 時間內 X_i 的發

生個數，

$$\frac{t}{N_X^t} = \frac{t}{N_Z^t} \cdot \frac{N_Z^t}{N_X^t} \xrightarrow{a.s.} EZ_1 \cdot \frac{1}{EW_1}, t \rightarrow \infty$$

因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N_X^t} = EZ_1 \cdot \frac{1}{EW_1} = c$$

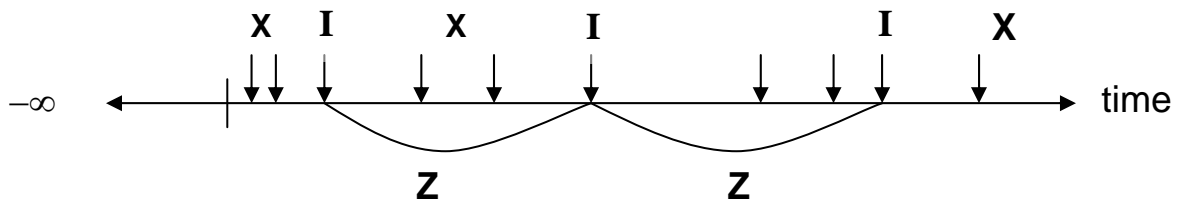


圖 2-1、系統狀態示意圖 1

我們接著要證明 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} EX_1$ 。

我們知道柴比雪夫不等式 (*Chebyshev's inequality*)

$$P(|\bar{X} - EX_1| \geq \varepsilon \sigma_{\bar{X}}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0,$$

如果 $\sigma_{\bar{X}} \rightarrow 0$, 會使得 $\bar{X} \xrightarrow{p} EX_1$

所以我們的目標是 $Var(\bar{X}) \rightarrow 0$, 也就是, $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j) \rightarrow 0$

我們知道 $Cov(X_i, X_j) \rightarrow 0$, 當 $|i - j| \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } |i - j| > N, |Cov(X_i, X_j)| < \varepsilon$$

$$|i - j| < N, |Cov(X_i, X_j)| \leq Var X_i = d, d \text{ 是常數}$$

當 $n > N$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j) \right| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |Cov(X_i, X_j)| \\ &= \sum_i \sum_{|j-i| \leq N} |Cov(X_i, X_j)| + \sum_i \sum_{|j-i| > N} |Cov(X_i, X_j)| \\ &\leq 2n \cdot N \cdot d + n(n - N)\varepsilon \end{aligned}$$

所以，

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \right| \leq \frac{2Nd}{n} + \left(1 - \frac{N}{n}\right) \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon$$

也就是， $\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow 0$

$$\bar{X} \xrightarrow{p} EX_1$$

$$\text{若 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} EX_1, \text{ and } EX_1 = c, \text{ so } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} EX_1$$

因此我們得證!

由定理 1，我們可以知道， X_i 為第 i 個人離開系統到第 $(i+1)$ 個人離開

系統的時間，這會使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} EX_1$ ，類似的道理，我們令 T_i^j 為

第 i 個人離開系統到第 $(i+1)$ 個人離開系統中顧客個數為 j 個人的時間，其中

T_i^j 具有相同的分佈，但不是獨立的，與定理 1 同樣的道理，我們可以得知

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^j \xrightarrow{a.s.} ET_1^j$ ，因此我們可得到下面式子，

$$P(\text{平穩狀態時，任一顧客到達系統發現系統中有 } j \text{ 個人}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n T_i^j}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n T_i^j}{\sum_{i=1}^n X_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n T_i^j / n}{\sum_{i=1}^n X_i / n} \longrightarrow \frac{ET_1^j}{EX_1}$$

如果我們令 $M/G/1$ 系統中的顧客人數為我們隨機過程的狀態，如此的設定沒有符合馬可夫鏈性質。但是換個觀點來看，根據[2]，當顧客離開系統那一刻觀察系統中的人數，這就像是嵌入馬可夫鏈 (*embedded Markov chain*)，它的機率生成函數

(*probability generating function*) 為 $\pi(t) = \frac{(1 - \lambda EY)(t-1)\tilde{G}(\lambda(1-t))}{t - \tilde{G}(\lambda(1-t))}$ 其中 Y

的分配是 G ， $\tilde{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x)$ 。我們可以藉由微分 $\pi(t)$ 求得極限機率 π_j (系統狀態是 j 個人的極限機率)，但是這是一項浩大的工程。但是利用我們以上引理 1 和定理 1，可以求得一個簡潔 π_j 的遞迴公式。

首先我們先定義一個區段 (*period*) 是相鄰兩個離開人的時間區間，空閒區段 (*Idle period*) 指系統櫃檯是空閒的時候，一段服務時間為系統中櫃台服務一個顧客所花費的時間，一個 *period* 為一段空閒區段 $I \sim e^{-\lambda t}$ 加上一段服務時間或是只有一段服務時間，其中 Y 和 I 是獨立的， π_j 為系統狀態是 j 個人的極限機率，因此在平穩狀態時候，

$$E(\text{length of a period}) = \pi_0 \left(\frac{1}{\lambda} + EY \right) + (1 - \pi_0) EY = \frac{\pi_0}{\lambda} + EY$$

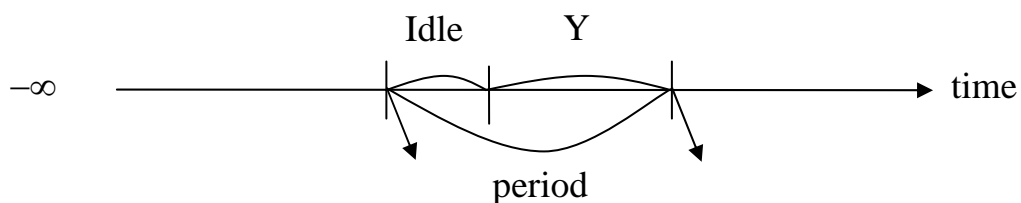


圖 2-2、系統區段示意圖

根據 引理 1 和定理 1

$$\pi_0 = \frac{\pi_0 \frac{1}{\lambda}}{\pi_0 \frac{1}{\lambda} + EY}, \text{ 解得 } \pi_0 = 1 - \lambda EY$$

把 π_0 帶回 $E(\text{length of a period})$ 得

$$E(\text{length of a period}) = 1/\lambda$$

根據 引理 1

E (在一個區段中顧客人數是 j 的時間)

$$= \sum_{i=0}^j \pi_i E(\text{區段中 } j \text{ 個顧客人數的時間} \mid \text{一離開顧客發現系統狀態是 } i \text{ 個人})$$

$$= I_{(j=0)} \frac{1}{\lambda} \pi_0 + I_{(j>0)} \left[\pi_0 \int_0^{\infty} \int_0^t P(\text{在}(0, \tau)\text{中有 } j-1 \text{ 個顧客到達}) d\tau dG(t) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^j \pi_i \int_0^{\infty} \int_0^t P(\text{在}(0, \tau)\text{中有 } j-i \text{ 個顧客到達}) d\tau dG(t) \right]$$

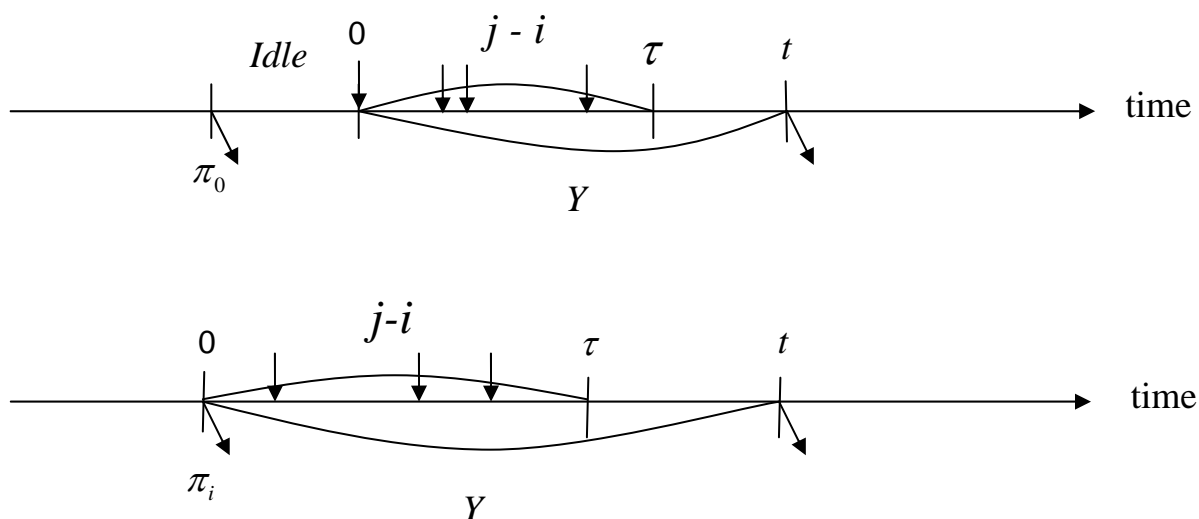


圖 2-3、系統狀態示意圖 2

因此，

$$\pi_1 = \frac{1}{\lambda} \left[(\pi_0 + \pi_1) \int_0^\infty \int_0^t e^{-\lambda\tau} d\tau dG(t) \right] \quad (\text{by 定理 1})$$

$$\left[1 - \lambda \int_0^\infty \left(\frac{-1}{\lambda} \right) (e^{-\lambda t} - 1) dG(t) \right] \pi_1 = \lambda \pi_0 \int_0^\infty \left(\frac{-1}{\lambda} \right) (e^{-\lambda t} - 1) dG(t)$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_0}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t)} \left[1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t) \right]$$

同理，

$$\pi_2 = \frac{1}{\lambda} \left[\pi_0 \int_0^\infty \int_0^t \lambda \tau e^{-\lambda\tau} d\tau dG(t) + \pi_1 \int_0^\infty \int_0^t \lambda \tau e^{-\lambda\tau} d\tau dG(t) + \pi_2 \int_0^\infty \int_0^t e^{-\lambda\tau} d\tau dG(t) \right]$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_0 + \pi_1}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t)} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t) - \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dG(t) \right)$$

以此类推，for $j \geq 2$ ，

$$\pi_j = \frac{1}{EY + \frac{\pi_0}{\lambda}} \left[\left(\sum_{m=0}^{j-2} \pi_{j-m} \int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^m}{m!} ds dG(t) \right) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{j-1}}{(j-1)!} ds dG(t) \right]$$

$$\text{其中 } EY + \frac{\pi_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

所以，

$$\pi_j = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t)} \cdot \left[\left(\sum_{m=1}^{j-2} \pi_{j-m} \int_0^\infty 1 - \sum_{n=0}^m \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^\infty 1 - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right]$$

$$= \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[\left(\sum_{m=2}^{j-1} \pi_m \int_0^{\infty} 1 - \sum_{n=0}^{j-m} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^{\infty} 1 - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right]$$

進一步我們求得，

$$\pi_{j+1} = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[\left(\sum_{m=2}^j \pi_m \int_0^{\infty} 1 - \sum_{n=0}^{j+1-m} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^{\infty} 1 - \sum_{n=0}^j \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dG(t) \right]$$

$$= \frac{\pi_j}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left(1 - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t) \right) - \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[\pi_{j-1} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!} dG(t) + \dots \right. \\ \left. + \pi_2 \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1} e^{-\lambda t}}{(j-1)!} dG(t) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} dG(t) \right]$$

我們再求得，

$$\pi_j - \pi_{j+1} = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[-\pi_j \int_0^{\infty} 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} dG(t) \right. \\ \left. + \left(\sum_{m=2}^{j-1} \pi_{j-m+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} dG(t) \right) + (\pi_0 + \pi_1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} dG(t) \right]$$

首先我們估計極限機率的比值，也就是 $\frac{\pi_{j+1}}{\pi_j}$

$$\frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} = \frac{1 - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} - \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[\frac{\pi_{j-1}}{\pi_j} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!} dG(t) + \dots \right. \\ \left. + \frac{\pi_{j-k}}{\pi_j} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1} e^{-\lambda t}}{(k+1)!} dG(t) \right] - \frac{A_{j,k}}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \dots\dots\dots(-)$$

當中，

$$A_{j,k} = \left[\sum_{m=k+2}^{j-1} \frac{\pi_{j-m+1}}{\pi_j} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} dG(t) \right] + \frac{\pi_0 + \pi_1}{\pi_j} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} dG(t) \geq 0 \dots (二)$$

當 j, k 很大時， $A_{j,k}$ 為一個可忽略的項。

令 $a = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \geq 0$ 和 $b = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \geq 0$

我們可以得到，

$$b \leq \frac{1 - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} - \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \sum_{m=1}^k \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j-m}}{\pi_j} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+1} e^{-\lambda t}}{(m+1)!} dG(t) \dots (三)$$

可以觀察到，

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j-m}}{\pi_j} = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_j}{\pi_{j-m}}} = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \frac{\pi_{j-n+1}}{\pi_{j-n}}} \geq \frac{1}{\prod_{n=1}^m \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j-n+1}}{\pi_{j-n}}} = \frac{1}{b^m}$$

將上式代入(三)可得，

$$b \leq \frac{1 - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} - \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \sum_{m=1}^k \frac{1}{b^m} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+1} e^{-\lambda t}}{(m+1)!} dG(t)$$

讓 $k \rightarrow \infty$ ，且利用 $\sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$ ，可以獲得

$$b \leq \frac{1 - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} - \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t)} \left[b \int_0^{\infty} e^{\lambda t \left(\frac{1}{b} - 1\right)} dG(t) - \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dG(t) - b \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t) \right]$$

這也等於，

$$\frac{1}{b} \geq \int_0^{\infty} e^{\lambda t \left(\frac{1}{b} - 1\right)} dG(t) \dots \dots \dots (四)$$



我們令 $f(x) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dG(t)$ ，可以知道必有一解 $f(1) = 1$ ，且我們又知

道 $f'(x) > 0$ 和 $f''(x) > 0$ 對 $x > 0$ ，因此可知 $f(x)$ 是嚴格遞增和嚴格凹向上的圖形。

除非 $G(t)$ 在 $t=0$ 時，為一個單位為 1 跳點，可以得到 $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \infty$ 當

$x \rightarrow \infty$ 。對於 $x = f(x)$ 等式，在 $f'(1) = \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda EY < 1$ 時，其中 $Y \sim G$ ，

存在一個必然解 $x=1$ 。也可推得還存在一個解 $c \in (1, \infty)$ 。由於(四)的性質，

當 $\lambda EY < 1$ ，我們可以找出 $1 \leq \frac{1}{b} \leq c$ 。也就是 $\frac{1}{c} \leq b = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq 1$ 。

我們先假設 $a > 0$ ，接下來我們處理 $a = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \geq 0$ 。我們可以得到

$\pi_{j+1} \geq (a - \delta)\pi_j$ ，對於足夠大的 j 且 $a - \delta > 0$ ，也就是 $\frac{\pi_{j-m}}{\pi_j} \leq \frac{1}{(a - \delta)^m}$ 對於

足夠大的 j 且 $m \leq j$ 。從(二)得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} A_{k,j} = 0$ 。同樣的方法得到

$\frac{1}{a} \leq \int_0^{\infty} e^{\lambda t \left(\frac{1}{a} - 1\right)} dG(t)$ 。因此得到 $c \leq \frac{1}{a} < \infty$ ，也就是 $0 < a = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq \frac{1}{c}$ 。

結合以上所說得到 $0 \leq a = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq \frac{1}{c} \leq b = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq 1$ ，我們知

道在 (a, b) 中夾著 $\frac{1}{c}$ 。



定理 2

在 M/G/1 系統極限機率 $\pi_j, j \geq 0$ ，符合

$0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq \frac{1}{c} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq 1$ ，其中 c 是等式 $x = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dG(t)$ 中不等於 1

的解。

如果 $0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq \frac{1}{c} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq 1$ 成立，且 $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j}$ 存在，我們可

以得到系理 1。

系理 1

如果 $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j}$ 存在，則 $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} = \frac{1}{c}$

附註 1

對於 $M/M/1$ 的排隊理論，若進來的人服從卜瓦松分佈 (λ)，服務的人

的時間分佈是 $\bar{G}(t) = e^{-\mu t}$ ，會使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} = \frac{1}{c} = \frac{\lambda}{\mu}$



我們目前可知 $0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq \frac{1}{c} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \leq 1$ ，但是尚未可以証出

$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} \geq \frac{1}{c} \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j}$ ，但是由上面的附註 1 可知道結果是對的，一

般情況則未能知道，因此我們用模擬去檢驗看看結果是否正確。

第三章 演算法及結果分析

3-1 $M/G/1$ 尾端機率演算法

在 $M/G/n$ 的系統中，遵從先進來服務的人，會先被服務，因此第 i 個近來服務系統的人，一定第 i 個被服務，我們可以利用此性質，去解決問題。

令顧客人數總共 $Sample_size$ ， n 個服務櫃檯($n=1$)，

步驟 1：生成 $X_i \sim$ 顧客到達的時間分佈， $Y_i \sim$ 服務時間的分佈，

$$i = 1, 2, \dots, Sample_size$$

其中 X_i 為相鄰兩個人進入的時間，也就是第 $i-1$ 個人進入系統到第 i 個人進入系統的間隔時間， Y_i 為第 i 個人服務的時間。

步驟 2： $i=1$ to $(n-1)$ (如果 $n=1$ 則做 $i=1$)

$$serve[i] = \sum_{j=1}^i X_j + Y_i, \text{ 且 } serve_busy[i] = 1$$

先來的人先服務，最先開始來的 $(n-1)$ 個人先進入櫃檯，並且櫃檯是忙碌狀態時 $serve_busy[i]=1$ ，反之 $serve_busy[i]=0$ 。

$serve[i]$ 為櫃檯服務完顧客後紀錄的時間點，一開始都設為 0，系統總共有 n 個櫃檯，所以前面進來的 $(n-1)$ 個人不需等待時間，可直接接受服務，依序分配每個人進入 1、2、3、...、 $(n-1)$ 個櫃檯，其中每個櫃檯服務完顧客的時間為顧客進來時間加上顧客服務的時間。第 i 個櫃檯是忙碌狀態

時 $serve_busy[i]=1$ ，空閒狀態 $serve_busy[i]=0$

步驟 3： $i = n$ ， $arrival = \sum_{j=1}^i X_j$

if ($serve_busy[k]=0$)，檢查那個櫃台是空閒的，則

(1) if ($arrival \geq serve[k]$)

$serve[k] = arrival + Y[i]$ 且 $serve_busy[k]=1$

(2) if ($arrival < serve[k]$)

$serve[k] = serve[k] + Y[i]$ 且 $serve_busy[k]=1$

下一個進來的人稱為 Z，先檢查哪個服務櫃檯是空閒的，也就是檢查哪個櫃檯的 $serve_busy[i]=0$ ，若 W 櫃檯是空閒的，則進入服務。接下來判斷 Z 到達的時間點，W 櫃檯是否有人正在服務？第一若是 W 空閒狀態 ($arrival \geq serve[k]$)，則直接進入服務，W 櫃檯服務完顧客的時間為顧客進來時間加上顧客 Z 服務的時間，第二若是 W 櫃檯當時有人在服務，表示 Z 必須等待一段時間才進入服務，W 櫃檯服務完顧客的時間為上個顧客離開的時間加上顧客 Z 的服務時間。

步驟 4：排序 $serve$

也就是排序服務時間，目的是找出最早離開的人

把 n 個櫃檯服務完顧客的時間做排序，找出最小值，此人則是最早離開的顧客。

步驟 5：找出最早離開的人並記錄是那個櫃台，令為 m

$out_person = out_person + 1$ ， out_person 初始值為 0，

找出最早離開的人之前總共有幾個人進來過，令為 $accumulate$

$serve_busy[m] = 0$

$number_π[accumulate - out_person]++$ ，

$number_π[accumulate - out_person]$ 的初始值為 0

找出了離開的人，並記錄此人是第幾個離開的人(out_person)，和紀錄櫃檯服務完顧客的時間點 T ，計算出 T 時間點以前有多少個顧客進來此系統($accumulate$)，所以我們知道，此顧客離開系統時，那一刻系統剩下人數為 $accumulate - out_person$ 。並把顧客離開的櫃檯，服務狀況變成空閒的($serve_busy[m] = 0$)，並記錄起來系統人數狀態($accumulate - out_person$)發生個數為幾次。

步驟 6：當 $i = n + 1$ to $Sample_size$ ，回到步驟 3。

接下來做到重複到最後一人，即為所求。

拓展到 $n \geq 2$ 的櫃檯，上列演算法改 n 值即為可以。

3-2 模擬結果分析

M/G/1 狀況時

顧客進來時間服從 $Exp(\lambda)$ ，期望值為 $\frac{1}{\lambda}$ ，服務時間服從 $Gamma(\alpha, \beta)$ ，

期望值為 $\frac{\alpha}{\beta}$ 。利用牛頓法解方程式 $x = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dG(t)$ ，且

$G(t) = \int_0^t \frac{y^{\alpha-1} \cdot \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta y} dy$ 。解出理論值為 $\frac{1}{c}$ ，其中 c 為不等於 1 的解。

模擬 5000000 筆資料，系統為離開的人回頭看系統剩下的人數，模擬個數為系統人數 i 的發生次數，機率為 $P(\text{系統人數}=i)$ ，

$\frac{\text{模擬個數}(i+1)}{\text{模擬個數}(i)} \rightarrow \frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$ 。灰色部分為我們觀察到 $\frac{\text{模擬個數}(i+1)}{\text{模擬個數}(i)}$ 的值跟理論

值接近的地方。

< Case 1 >

顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從 $Gamma(4,5)$ ，理論值

$$\frac{1}{c} = 0.705106。$$

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	998917	0.19978	1.0757
1	1074521	0.21490	0.7886
2	847352	0.16947	0.7218
3	611654	0.12233	0.7070
4	432412	0.08648	0.7077
5	306002	0.06120	0.7057
6	215952	0.04319	0.7052
7	152294	0.03046	0.7065

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數($i+1$)/模擬個數(i)
8	107591	0.02152	0.6993
9	75233	0.01505	0.6963
10	52387	0.01048	0.7020
11	36777	0.00736	0.7090
12	26074	0.00521	0.7019
13	18302	0.00366	0.7162
14	13108	0.00262	0.7154
15	9378	0.00188	0.7152
16	6707	0.00134	0.7093
17	4757	0.00095	0.6925
18	3294	0.00066	0.7019
19	2312	0.00046	0.6938
20	1604	0.00032	0.7126
21	1143	0.00023	0.6544
22	748	0.00015	0.6484
23	485	0.000097	0.5918
24	287	0.000057	0.6899
25	198	0.000040	0.8182
26	162	0.000032	0.7531
27	122	0.000024	0.6393
28	78	0.000016	0.5769
29	45	0.000009	0.5333
30	24	0.000005	0.8750
31	21	0.000004	0.7143
32	15	0.000003	0.9333
33	14	0.000003	0.6429
34	9	0.000002	0.3333
35	3	0.000001	1.3333
36	4	0.000001	0.5000
37	2	0.000000	2.0000
38	4	0.000001	1.2500
39	5	0.000001	0.4000
40	2	0.000000	0.5000
41	1	0.000000	0.0000
42	0		

表 3-1、M/G/1 模擬結果 1

由於資料總個數限制的關係，尾端資料的選取為狀態個數大於 5000 的

資料，且我們不曉得有無極限值的存在，我們看資料去猜測，觀察 ratio 從 $\frac{\pi_5}{\pi_4}$

之後的資料。下面步驟，我們檢定我們所選取的資料和理論值有無差別。

首先我們先檢查資料是不是服從常態分配，如果是常態的話，我們就做 t 檢

定，檢定此筆資料的期望值有沒有跟理論值一樣。

Test Normal distribution

K-S d=.13985, p> .20; Lilliefors p> .20

沒有拒絕常態的假設！因此我們可以做 t 檢定。

T-test for $H_0: \mu = 0.705106$ vs. $H_1: not H_0$

Mean	Std.Dv.	N	Std.Err.	Reference Constant	t-value	df	p
0.706898	0.006203	13	0.001720	0.705106	1.041910	12	0.317991

表 3-2、檢定 $M/G/I$ 模擬結果 1

95%信賴區間為(0.7031570, 0.710647)

我們可以由 $p-value = 0.318$ 得知沒有拒絕資料期望值為 0.705106。

< case 2 >

顧客進來時間服從 $Exp(\frac{1}{5})$ ，服務時間服從 $Gamma(2, \frac{5}{11})$ ，理論值 0.844297。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	596330	0.11927	1.0765
1	641944	0.12839	0.8969
2	575780	0.11516	0.8603
3	495332	0.09907	0.8471
4	419611	0.08392	0.8440
5	354140	0.07083	0.8458
6	299545	0.05991	0.8414
7	252047	0.05041	0.8417
8	212138	0.04243	0.8454
9	179351	0.03587	0.8430
10	151191	0.03024	0.8430
11	127460	0.02549	0.8449
12	107693	0.02154	0.8477
13	91291	0.01826	0.8467
14	77296	0.01546	0.8478
15	65529	0.01311	0.8474
16	55532	0.01111	0.8462
17	46989	0.00940	0.8495
18	39916	0.00798	0.8410
19	33568	0.00671	0.8440
20	28330	0.00567	0.8429
21	23880	0.00478	0.8337
22	19909	0.00398	0.8444
23	16812	0.00336	0.8321
24	13989	0.00280	0.8688
25	12154	0.00243	0.8322
26	10114	0.00202	0.8320
27	8415	0.00168	0.8320
28	7001	0.00140	0.8197
29	5739	0.00115	0.8505
30	4881	0.000976	0.8474

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數($i+1$)/模擬個數(i)
31	4136	0.000827	0.8486
32	3510	0.000702	0.8259
33	2899	0.000580	0.8675
34	2515	0.000503	0.8302
35	2088	0.000418	0.8827
36	1843	0.000369	0.8079
37	1489	0.000298	0.8234
38	1226	0.000245	0.8369
39	1026	0.000205	0.8548
40	877	0.000175	0.8119
41	712	0.000142	0.8525
42	607	0.000121	0.7743
43	470	0.000094	0.7617
44	358	0.000072	0.8603
45	308	0.000062	0.8994
46	277	0.000055	0.8267
47	229	0.000046	0.9869
48	226	0.000045	0.8540
49	193	0.000039	0.9896
50	191	0.0000382	0.8325
51	159	0.0000318	0.7421
52	118	0.0000236	0.8898
53	105	0.0000210	1.0476
54	110	0.0000220	0.5909
55	65	0.0000130	1.0462
56	68	0.0000136	0.7647
57	52	0.0000104	0.5769
58	30	0.0000060	1.0333
59	31	0.0000062	0.9355
60	29	0.0000058	0.8621
61	25	0.0000050	1.2000
62	30	0.0000060	1.0333
63	31	0.0000062	0.5484
64	17	0.0000034	0.6471
65	11	0.0000022	0.5455
66	6	0.0000012	0.6667

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數($i+1$)/模擬個數(i)
67	4	0.0000008	2.2500
68	9	0.0000018	0.4444
69	4	0.0000008	1.7500
70	7	0.0000014	0.2857
71	2	0.0000004	0.0000
72	0	0.0000000	

表 3-3、 $M/G/1$ 模擬結果 2

Test Normal distribution

K-S d=.19613, $p < .20$

沒有拒絕常態的假設！因此我們可以做 t 檢定。

T-test for $H_0: \mu = 0.844297$ vs. $H_1: \text{not } H_0$

Mean	Std.Dv.	N	Std.Err.	Reference Constant	t-value	df	p
0.842608	0.008913	26	0.001748	0.844297	-0.966136	25	0.343230

表 3-4、檢定 $M/G/1$ 模擬結果 2

95%信賴區間為(0.839008, 0.846208)

我們可以由 $p - value = 0.343$ 得知沒有拒絕資料期望值為 0.844297。

< case 3 >

顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從 $Gamma(2, \frac{100}{45})$ ，理論值 0.869647。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	499213	0.09984	1.1023
1	550292	0.11006	0.9167
2	504433	0.10089	0.8859
3	446862	0.08937	0.8720
4	389643	0.07793	0.8733
5	340287	0.06806	0.8715
6	296570	0.05931	0.8677
7	257327	0.05147	0.8731
8	224677	0.04494	0.8632
9	193932	0.03879	0.8708
10	168879	0.03378	0.8663
11	146301	0.02926	0.8678
12	126953	0.02539	0.8727
13	110785	0.02216	0.8671
14	96059	0.01921	0.8673
15	83315	0.01666	0.8646
16	72035	0.01441	0.8697
17	62652	0.01253	0.8813
18	55215	0.01104	0.8722
19	48161	0.00963	0.8762
20	42199	0.00844	0.8722
21	36804	0.00736	0.8729
22	32126	0.00643	0.8683
23	27896	0.00558	0.8803
24	24556	0.00491	0.8762
25	21516	0.00430	0.8678
26	18672	0.00373	0.8410
27	15703	0.00314	0.8742
28	13728	0.00275	0.8594
29	11798	0.00236	0.8804
30	10387	0.00208	0.8648

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數($i+1$)/模擬個數(i)
31	8983	0.00180	0.8836
32	7937	0.00159	0.8841
33	7017	0.00140	0.9030
34	6336	0.00127	0.8565
35	5427	0.00109	0.8771
36	4760	0.000952	0.8460
37	4027	0.000805	0.8592
38	3460	0.000692	0.8546
39	2957	0.000591	0.8590
40	2540	0.000508	0.9213
41	2340	0.000468	0.8167
42	1911	0.000382	0.8242
43	1575	0.000315	0.9283
44	1462	0.000292	0.9111
45	1332	0.000266	0.9414
46	1254	0.000251	0.8708
47	1092	0.000218	0.8791
48	960	0.000192	0.9083
49	872	0.000174	0.8704
50	759	0.000152	0.8406
51	638	0.000128	0.8934
52	570	0.000114	0.8281
53	472	0.000094	0.7458
54	352	0.000070	0.9034
55	318	0.000064	0.9465
56	301	0.000060	0.8439
57	254	0.000051	0.8543
58	217	0.000043	0.9355
59	203	0.000041	0.8571
60	174	0.000035	0.7989
61	139	0.000028	0.7554
62	105	0.000021	0.6000
63	63	0.000013	0.8571
64	54	0.000011	0.7778
65	42	0.000008	0.3810
66	16	0.000003	0.8750

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數($i+1$)/模擬個數(i)
67	14	0.000003	1.4286
68	20	0.000004	0.9500
69	19	0.0000038	0.4737
70	9	0.0000018	0.7778
71	7	0.0000014	0.1429
72	1	0.0000002	3.0000
73	3	0.0000006	1.3333
74	4	0.0000008	0.2500
75	1	0.0000002	1.0000
76	1	0.0000002	3.0000
77	3	0.0000006	1.0000
78	3	0.0000006	1.3333
79	4	0.0000008	0.7500
80	3	0.0000006	2.0000
81	6	0.0000012	0.8333
82	5	0.000001	0.2000
83	1	0.0000002	1.0000
84	1	0.0000002	0.0000
85	0	0	

表 3-5、 $M/G/1$ 模擬結果 3

Test Normal distribution

K-S d=.13065, $p > .20$; Lilliefors $p > .20$

沒有拒絕常態的假設！因此我們可以做 t 檢定。

T-test for $H_0: \mu = 0.869647$ vs. $H_1: \text{not } H_0$

Mean	Std.Dv.	N	Std.Err.	Reference Constant	t-value	df	p
0.871275	0.010308	31	0.001851	0.869647	0.879054	30	0.386359

表 3-5、檢定 $M/G/1$ 模擬結果 3

95%信賴區間為(0.867493, 0.875056)

我們可以由 $p - \text{value} = 0.386$ 得知沒有拒絕資料期望值為 0.869647。

3-3 分析結果

排隊理論中，顧客進來的平均頻率一定要小於服務的平均頻率，否則的話，整個系統會不收斂，因為服務未結束則一直會有人進入，到最後整個系統是發散的，也就是說顧客進來的平均時間一定要大於服務的平均時間。在 case 1 中，顧客進來的平均時間 1，平均服務時間是 0.8，系統中最多人數是 41 人，顧客進來的平均時間和平均服務時間的比值是 0.8，得到的數值並沒有拒絕假設 $\frac{1}{c} = 0.705106$ 。在 case 2 中，顧客進來的平均時間 5，平均服務時間是 4.8，系統中最多人數是 71 人，顧客進來的平均時間和平均服務時間的比值是 0.96，得到的數值並沒有拒絕假設 $\frac{1}{c} = 0.844297$ 。在 case 3 中，顧客進來的平均時間 1，平均服務時間是 0.9，系統中最多人數是 84 人，顧客進來的平均時間和平均服務時間的比值是 0.9，得到的數值並沒有拒絕假設 $\frac{1}{c} = 0.869647$ 。藉由以上三個例子，我們可以知道尾端平穩分配是收斂的，且收斂到我們的理論值。

第四章 應用到 $M/G/s$ 模型上

我們知道了 $M/G/1$ 系統尾端平穩機率，下一步把它推廣到 s 個服務櫃檯上，使我們更可瞭解一般的情形。在 $M/G/1$ 中，我們發現尾端平穩機率的比值等於 c ，其中 c 是 $f(x) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dG(t)$ 其中不為 1 的解，現在從 1 個櫃檯

擴展到 s 個服務櫃檯，解決 $M/G/s$ 系統的問題，我們把它視為 $M/G/1$ 的一種變型，我們定義 $\pi^{(s)}$ 為 s 個服務櫃檯的極限分佈。分析這個問題，可以分成兩個部份，第一部份在顧客人數小於等於 s 的條件機率情況下，第二部份在顧客人數大於 s 的條件機率情況下。關於第一部份，系統的狀況就像是最多同時間可以被服務的人只有 s 人，我們可以把它視為 $M/G/s/s$ 損失顧客系統，這個系統的極限分配是知道的。接下來我們可以猜測

$$\bar{Q}(t) = \bar{G}(t) \left(\int_0^{\infty} \frac{\bar{G}(t+x)}{EY} dx \right)^{s-1} = \bar{G}(t) \left(\int_t^{\infty} \frac{\bar{G}(x)}{EY} dx \right)^{s-1}, \text{ 且我們知道 } \{\pi_j^{(s)}, j \geq 0\}, \text{ 符}$$

合 $0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}^{(s)}}{\pi_j^{(s)}} \leq \frac{1}{c} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\pi_{j+1}^{(s)}}{\pi_j^{(s)}} \leq 1$ ，其中 c 為 $x = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dQ(t)$ 中不為 1 的

解，令 $\frac{1}{c}$ 為解(1)。

根據[2]，如果到達顧客服從卜瓦松過程 $Poisson(\lambda)$ ，櫃檯的服務時間服從指數分配，它的期望值是 μ^{-1} ，令 p_n 為系統人數為 n 極限機率，在 s 個櫃台的排隊理論中，我們會得到 $p_n = \rho^{n-s} p_s$ ， $n \geq s$ ，其中 $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ ，所

以我們可以知道，在 $M/M/s$ 系統中， $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ 。令 $\frac{\lambda}{s\mu}$ 為解(2)。

4-1 M/G/s 模擬結果分析

模擬 5000000 筆資料，系統為離開的人回頭看系統剩下的人數，模擬個數為系統人數 i 的發生次數，機率為 $P(\text{系統人數}=i)$ ，

$$ratio = \frac{(i+1)\text{個數}}{(i)\text{個數}} = \frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$$

，灰色部分為我們觀察到 $\frac{\text{模擬個數}(i+1)}{\text{模擬個數}(i)}$ 的值跟理論

值接近的地方。

< case 4 >

2 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從 $Exp(\frac{10}{9})$ ，理論值解(1)為 $\frac{1}{c} = 0.45$ ，解(2)為 0.45。模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	1895119	0.379024	0.9015
1	1708533	0.341707	0.4493
2	767605	0.153521	0.4500
3	345387	0.069077	0.4526
4	156324	0.031265	0.4480
5	70038	0.014008	0.4463
6	31261	0.006252	0.4511
7	14101	0.002820	0.4528
8	6385	0.001277	0.4517
9	2884	0.000577	0.4438
10	1280	0.000256	0.4727
11	605	0.000121	0.4165
12	252	0.000050	0.4643
13	117	0.000023	0.4872
14	57	0.000011	0.4912
15	28	0.000006	0.3929
16	11	0.000002	0.9091
17	10	0.000002	0.3000
18	3	0.000001	0.0000

表 4-1、M/M/2 模擬結果 1

< case 5 >

2 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(\frac{1}{2})$ ，服務時間服從 $Exp(\frac{10}{18})$ ，理論值解(1)為 $\frac{1}{c} = 0.44999999$ ，解(2)為 0.45。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	1895536	0.379107	0.9006
1	1707102	0.341420	0.4506
2	769130	0.153826	0.4492
3	345463	0.069093	0.4519
4	156098	0.031220	0.4474
5	69835	0.013967	0.4466
6	31186	0.006237	0.4497
7	14025	0.002805	0.4483
8	6287	0.001257	0.4622
9	2906	0.000581	0.4604
10	1338	0.000268	0.4507
11	603	0.000121	0.4693
12	283	0.000057	0.4028
13	114	0.000023	0.3684
14	42	0.000008	0.5000
15	21	0.000004	0.9048
16	19	0.000004	0.4737
17	9	0.000002	0.2222
18	2	0.000000	0.5000
19	1	0.000000	0.0000
20	0	0.000000	

表 4-2、M/M/2 模擬結果 2

< case 6 >

2 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(\frac{1}{3})$ ，服務時間服從 $Exp(\frac{10}{24})$ ，理論值解(1)為 $\frac{1}{c} = 0.4$ ，解(2)為 0.4。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	2141259	0.428252	0.8007
1	1714520	0.342904	0.3999
2	685579	0.137116	0.3999
3	274128	0.054826	0.4028
4	110415	0.022083	0.4024
5	44433	0.008887	0.3969
6	17635	0.003527	0.4058
7	7156	0.001431	0.4078
8	2918	0.000584	0.3999
9	1167	0.000233	0.4199
10	490	0.000098	0.3735
11	183	0.000037	0.4372
12	80	0.000016	0.2625
13	21	0.000004	0.7143
14	15	0.000003	0.0667
15	1	0.000000	0.0000
16	0		
17	0		
18	0		

表 4-3、M/M/2 模擬結果 3

< case 7 >

2 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從

$Gamma(2, \frac{100}{45})$ ，解(1)理論值 $\frac{1}{c} = 0.379713$ 。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	1883802	0.376760	0.9175
1	1728434	0.345687	0.4842
2	836936	0.167387	0.4099
3	343044	0.068609	0.3824
4	131162	0.026232	0.3709
5	48650	0.009730	0.3672
6	17866	0.003573	0.3615
7	6459	0.001292	0.3628
8	2343	0.000469	0.3525
9	826	0.000165	0.3366
10	278	0.000056	0.4029
11	112	0.000022	0.4554
12	51	0.000010	0.3726
13	19	0.000004	0.5790
14	11	0.000002	0.4546
15	5	0.000001	0.4000
16	2	0.000000	0.0000
17	0		
18	0		
19	0		
20	0		

表 4-4、M/G/2 模擬結果 1

< case 8 >

2 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(\frac{1}{3})$ ，服務時間服從 $Gamma(3, \frac{5}{4})$ ，

解(1)理論值 $\frac{1}{c} = 0.304827$ 。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	2128760	0.425752	0.8196
1	1744785	0.348957	0.4322
2	754171	0.150834	0.3441
3	259476	0.051895	0.3091
4	80211	0.016042	0.2911
5	23351	0.004670	0.2824
6	6595	0.001319	0.2810
7	1853	0.000371	0.2995
8	555	0.000111	0.2991
9	166	0.000033	0.3434
10	57	0.000011	0.2105
11	12	0.000002	0.5833
12	7	0.000001	0.1429
13	1	0.000000	0.0000
14	0		
15	0		
16	0		
17	0		
18	0		
19	0		
20	0		

表 4-5、M/G/2 模擬結果 2

< case 9 >

3 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從

$Gamma(2, \frac{100}{45})$ ，解(1)理論值 $\frac{1}{c} = 0.24425$ 。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	2013505	0.402701	0.9028
1	1817756	0.363551	0.4528
2	823118	0.164624	0.3097
3	254944	0.050989	0.2684
4	68434	0.013687	0.2477
5	16951	0.003390	0.2386
6	4045	0.000809	0.2443
7	988	0.000198	0.2045
8	202	0.000040	0.2327
9	47	0.000009	0.1915
10	9	0.000002	0.1111
11	1	0.000000	0.0000
12	0		
13	0		
14	0		
15	0		
16	0		
17	0		
18	0		
19	0		
20	0		

表 4-6、M/G/3 模擬結果

< case 10 >

4 個服務櫃檯，顧客進來時間服從 $Exp(1)$ ，服務時間服從

$Gamma(2, \frac{100}{45})$ ，解(1)理論值 $\frac{1}{c} = 0.180616$ 。

模擬 5000000 筆資料：

系統人數	模擬個數	機率	模擬個數(i+1)/模擬個數(i)
0	2028591	0.405718	0.90156
1	1828896	0.365779	0.45038
2	823704	0.164741	0.30086
3	247817	0.049563	0.22991
4	56976	0.011395	0.20144
5	11477	0.002295	0.18428
6	2115	0.000423	0.17163
7	363	0.000073	0.14876
8	54	0.000011	0.12963
9	7	0.000001	0.00000
10	0		
11	0		
12	0		
13	0		
14	0		
15	0		
16	0		
17	0		
18	0		
19	0		
20	0		

表 4-7、M/G/4 模擬結果

4-2 模擬結果分析

我們知道解(1)為 $\frac{1}{c}$ ，其中 c 為 $x = \int_0^{\infty} e^{\lambda t(x-1)} dQ(t)$ 中不為1的解，

$$\bar{Q}(t) = \bar{G}(t) \left(\int_0^{\infty} \frac{\bar{G}(t+x)}{EY} dx \right)^{s-1} = \bar{G}(t) \left(\int_t^{\infty} \frac{\bar{G}(x)}{EY} dx \right)^{s-1}, \text{ 解(2)為 } M/M/s \text{ 的解為 } \frac{\lambda}{s\mu}。$$

由以上結果顯示，在 $M/M/s$ 部份，我們可以觀察到，解(1)相當近似於解(2)，因此我們認為在 $M/M/s$ 部份理論上解(1)是合理的。在 $M/M/s$ 和 $M/G/s$ 部分模擬的結果，不像是 $M/G/1$ 灰色部份(跟理論值接近的地方)

很長，原因可能有第一、平穩分佈的比值 $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$ 是不存在的，但是我們知道在

$M/M/s$ 的時候平穩分佈的比值 $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$ 是存在的，因此此事比較不可能。第

二、模擬個數五百萬不夠多，這情況有可能，但是若增加模擬個數，所花費的時間跟得到的精準度不成正比，因此我們沒有增加模擬個數。第三、

期望服務時間除以期望顧客的進入時間，當比值很小時，相對的等待人數

變少，也就是系統中的最多人數會變少，跟 $M/G/1$ 比較起來， $M/M/s$ 和

$M/G/s$ 系統的最多人數會少很多，因此灰色部分也會相對的比較短。每一

筆資料在 $\frac{\text{模擬個數}(i+1)}{\text{模擬個數}(i)}$ 的尾巴的某些值都是趨近於解(1)，因此我們可以說

我們的理論值是可信的。

第五章 結論

本文的目的在找出排隊系統中，平穩分佈的尾端部分比值 $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}$ 會收斂

到一常數。我們一開始先做 $M/G/1$ 的模擬，可以知道 $M/G/1$ 的系統中，模擬出來的結果跟理論值很接近，下一步做 $M/M/s$ 的模擬並且根據[7]，我們得到解(1)(我們猜測的值)近似於解(2)，而且跟模擬值很接近，接下來做 $M/G/s$ 的模擬，觀察到 $\frac{\text{模擬個數}(i+1)}{\text{模擬個數}(i)}$ 的某些部分跟我們的解(1)很靠近。

因此我們可以猜測 $M/G/s$ 尾端極限機率的比值是收斂的，而且在 $M/G/1$

系統時，會收斂到 $\frac{1}{c}$ ，其中 c 為 $x = \int_0^\infty e^{\lambda t(x-1)} dG(t)$ ，且 $G(t) = \int_0^t \frac{y^{\alpha-1} \cdot \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta y} dy$

中不等於 1 的解。在 $M/G/s$ 系統中，會收斂到 $\frac{1}{c}$ ，其中 c 為 $x = \int_0^\infty e^{\lambda t(x-1)} dQ(t)$ ，

$\bar{Q}(t) = \bar{G}(t) \left(\int_0^\infty \frac{\bar{G}(t+x)}{EY} dx \right)^{s-1} = \bar{G}(t) \left(\int_t^\infty \frac{\bar{G}(x)}{EY} dx \right)^{s-1}$ 中不為 1 的解。

因此當我們在做排隊理論的模擬時，可以運用此定理，不受限於樣本個數的關係，使得我們做的模擬更為精準。

参考文献

- [1]、 Sheldon M. Ross, *Stochastic Processes 2nd*, Berkeley, 1996
- [2]、 U. Narayan Bhat, Gregory K. Miller,
Elements of Applied Stochastic Process (3 Edition), 2002
- [3]、 L. Kleinrock, *Queueing Systems, Vol. 1: Theory (1975)*, John Wiley and Sons.
- [4]、 Boxma, O. J., Cohen, J. W. and Huffels, N. (1980) Approximations of the mean waiting time in an M/G/s queueing system. *Operat. Res.* 27, 1115 – 1127 .
- [5] Heffer, J. C.(1969) Steady-state solution of the $M / E_k / s (\infty, FIFO)$ queueing system.
CORS J. 7,16-30
- [6]、 Hordijk, A. and Tijms, H. C. (1976) A simple proof of the equivalence of the limiting distributions of the continuous-time and the embedded process of the queue size in the M/G/1 queue. *Statist. Neerlandica* 30,97-100
- [7]、 Nozaki, S. A. and Ross, S. M. (1978) Approximations in finite-capacity multi-server queues with Poisson arrivals. *J. Appl. Prob.* 15, 826-834
- [8]、 Cosmetatos, G. P. (1976) Some approximate equilibrium results for the multiserver queue M/G/r. *Operat. Res. Quart.* 27, 615-620
- [9]、 Crommelin, C. D. (1932) Delay probability formulae when the holding times are constant. *P. O. Elect. Engrs. J.* 25, 41-50