

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

螺旋星系中的 MOND 理論和 M/L 函數之研究

MOND and M/L functions of spiral galaxies



研究生：王瑞仁

指導教授：高文芳 教授

中華民國九十五年七月

CONTENT

致謝.....	4
摘要.....	5
Abstract.....	6
第一章 序論.....	7
第二章 理論架構.....	9
2.1 理論模型.....	9
2.2 質量公式推演.....	10
2.3 星系旋轉公式預測.....	12
2.3.1 Famaey and Binney Model.....	13
第三章 程式及數值方法.....	15
3.1 旋轉曲線的原理與取得方法.....	15
3.1.1 氣體旋轉曲線取得原理.....	15
3.1.2 星系旋轉曲線取得原理.....	16
3.2 光度資料的原理與取得.....	17
3.3 數值計算.....	18
3.3.1 NGC 2403.....	18
3.3.2 NGC 2903.....	22
3.3.3 NGC 6503.....	26

第四章 結論.....	30
參考資料.....	34
附錄一 天文常數與單位換算.....	35
附錄二 數值計算程式.....	36



致謝

匆匆的兩年過去了，我也完成了我的碩士論文。回首這些日子以來的辛勞，我首先要感謝的就是我的父母。從小我就是個不聽話的小孩，常常惹了很多的麻煩，讓父母擔心受怕。一路上功課都是馬馬虎虎的過去，也曾經一度迷失了自己的方向，辜負父母對我的期待。很感謝他們對我的包容，讓我能以自己的方式去作自己想做的事，而不給我設限。所以我想這個論文的完成是給他們的一個最好的禮物。再來要感謝我的哥哥，在學業這一路上他也幫了我很多，他從小就是品學兼優的小孩，和我是極大的反比。也因為這樣，激發了我不服輸的個性，讓我有想以自己的方法來完成學業的想法。也要謝謝我的指導教授高文芳老師，感謝他的敦敦教誨，使得這篇論文可以順利出爐。

還有我的大學同學，那一群活潑搞笑耍白癡的死黨，讓我在無助的時候，可以有抒解壓力的地方。同時也要感謝研究所的同學，光胤，翔瑞，德明，老皮，乾庭，閔光等等人在這些日子以來的陪伴，雖然有時候動不動就去夜唱，但是那些日子我想會是以後最好的回憶。還有我的好朋友仁傑，在大學時代我們就常一起瘋過，我也從他的身上學到了很多做人處事的道理，對我往後的生活影響很大。還有他的女朋友雅甄，常常和仁傑一起找我出去玩，加添了我很多美好的回憶。再來就是我另一個好朋友湘婷，我們是高中時代就一起的好朋友。有時候心情低落想找人聊天時，他總是會時候的接起我的電話，跟我說我是她世上唯一的好朋友，讓我感覺到有人關心的溫暖。最後還有我們交大物理所美麗的所辦小姐，在這兩年來的協助。要感謝的人實在太多了，沒法一一寫完。沒被我寫到的人，我也很感謝你們，如果的不滿的話，請打我的專線，我會好好謝謝你們的。

這個論文的完成，對我來說只算通過了一個關卡。還有很多夢想，等著我去實現。我不知道自己是否能做到，但是我會滿載著勇氣和大家的祝福整裝上路，只能往前走，不能再停下來了。我相信這個故事還是未完待續，等著我在去創造新的一篇。

摘要

無蹤質量一直是天文學中一個難解的謎題，它的來由是由於觀測螺旋星系的旋轉曲線時，和牛頓力學所預測的有所不同。而 Modified Newtonian dynamics(MOND)就是要來解決這類問題的一個理論。它是由 Milgrom (1983)所提出的一個構想。他指出當 g 的值小於一個典型的 g_0 ($\sim 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$) 的時候，原本的重力場需要做一個修正。對於暗物質的問題，這個理論展現出了相當的可行性。本論文就是以此理論為根據，來計算螺旋星系的質光比。期望能找到質量與光度的關係，進而更進一步的瞭解螺旋星系以及其動力學。



ABSTRACT

The disappearance of masses is puzzle of astronomy. When we observe the spiral galaxies , we get the different rotation curve from the prediction of Newtonian dynamics. Modified Newtonian dynamics proposed that gravitational field needs modifications when the field strength g is weaker than critical value g_0 ($\sim 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$) . It was suggest by Milgrom in 1983, this has been shown to be a good candidate as an alternative to cosmic dark matter. In this paper , we start with this theory , and use it to calculate the M/L function of spiral galaxies. We hope it could help us to find the relation of mass and luminosity. Finally we could more understand the dynamics of spiral galaxies and the underlying physics.



第一章 序論

十八世紀以來，人們就知道夜空是有矇矓而延展的天體。這些天體原來通通被叫做「星雲」，其中漩渦星雲(spiral galaxy)是最早被人們所討論的課題。人們猜想，漩渦星雲實際上可能是一種與銀河系相類似的恆星系統。漩渦星雲可能是位於銀河系外遙遠的獨立恆星系統的思想，後來變成著名的「島宇宙假說」在 1918 年，沙普利(Harlow Shapley)提出了一個非常巨大尺度的銀河系新模型。沙普利斷言，漩渦星雲不可能是單獨的「島宇宙」，必然是一種類似於氣體星雲的天體。而以柯蒂斯(Heber Curtis)為首的科學家，不同意這個觀點，於是便展開了一場大辯論。

關於「島宇宙假說」的爭論部分裡，提出了三個主要問題：

- (1) 漩渦體的距離有多遠？
- (2) 組成漩渦體的是恆星還是氣體？
- (3) 為什麼漩渦體不在銀河系平面？

沙普利和柯蒂斯兩人都認為，解決爭論的關鍵是漩渦體的距離。他們兩人都提出了直接測量漩渦體距離的方法，特別是，這兩個天文學家都用仙女座星系 M31 的新星觀測來論證他們各自的觀點。基本的方法是把 M31 裡的新星視亮度峰值，與銀河系裡被校準過的新星爆發相比較。沙普利和柯蒂斯得出不同的結論，部分是因為他們對銀河系距離尺度的看法不一，另一部份是因為在那時，從理論上或從觀測上都不知道超新星和新星之間的區別。

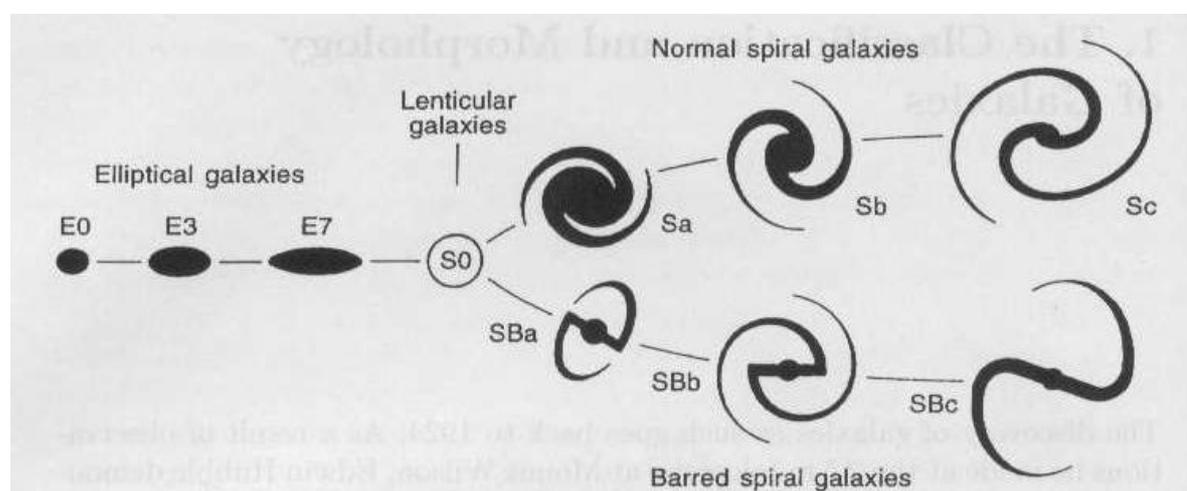
而就漩渦體的組成，假如漩渦體是星系，沙普利推測他們應該像銀河系一樣的光度和頻譜特徵。沙普利引證了西爾斯(Seares)和雷諾斯(Reynolds)的工作。西爾斯利用了卡普坦(Kapteyn)和榮因(Van Rhijn)恆星計數法，導出銀河系的表面亮度比漩渦體小的多。不幸的是，在當時沒有一個人知道星際消光會引起銀河系面亮度過低的估計。

爭論的解決

在 1923 年，是哈柏(Edwin Hubble)提供了漩渦星系是真正獨立星系的確切證據首先，哈柏需要把 M31 外圍區域分變成恆星；其次，他需要找到和辨認變星。從造父變星視亮度的測量和它們的「週期-光度」關係，哈柏能推斷 M31 的距離。這個距離的現代值是兩百萬光年，它位於銀河系外很遠的地方，所以仙女座星系是一個獨立的恆星系統。雖然距離我們有兩百萬光年，但它卻是最靠近銀河系的大漩渦星系。

星系的分類

哈柏能夠把他所觀測的所有星系，分成如下圖所列出的幾種型態：



其中有百分之幾的星系，它們有不規則的型態，哈柏稱它們是「不規則星系」。絕大部分星系在天空投影都有規則的幾何形狀，而這些規則形狀又可分為兩種基本類型：形狀近乎圓形的被稱為橢圓星系；樣子扁平的稱做盤狀星系。

星系型態的分類

- (1) 尋常漩渦星系：S 或 SA 型，中央核球加扁平的盤。
- (2) 棒旋星系：SB 型，中央核球加上棒再加上盤。
- (3) 橢圓星系：E 型，圓及平滑的光度分佈。
- (4) 不規則星系：Irr 型，不規則的幾何形狀。

第二章 理論架構

2.1 理論模型

在天文學中，無蹤質量一直是困擾人們已久的問題。第一次發現這個問題是在人們在測量太陽系附近的銀盤厚度時，由所測出的重力場強度，可以推出產生這個觀測重力所需要的物質質量。然後我們可以把產生這個重力所需要的總質量，與以恆星和氣體星雲形式存在的觀測質量相比較。當天文學家歐特(Jan Oort)第一次在做這個研究工作的時候，他發現觀測質量大致只有重力所要求的質量的一半。在星系或更大尺度的天體裡，令人困擾的一系列類似（動力學）質量測量問題，這是第一個被發現的差異。而Modified Newtonian dynamics(MOND)就是要來解決這類問題的一個理論。它是由Milgrom (1983)所提出的一個構想。他指出當 g 的值小於一個典型的 g_0 ($\sim 1.2 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$) 的時候，原本的重力場需要做一個修正。而這個理論的最基本的基礎來自於兩個觀測事實：(1) 扁平漸進的旋轉曲線 (2) 螺旋星系中成功解釋速度與光度之間的關係，Tully-Fisher (TF)law, $M \sim V^4$ 。

首先我們可以把重力場 g 寫成以下的形式 (Milgrom 1983)

$$g \times \mu\left(\frac{g}{g_0}\right) = g_N \dots\dots(1), \text{ 其中 } \mu \text{ 是修正項, } g_N \text{ 是質量從牛頓力學推斷出來的值,}$$

$$\text{Milgrom把 } \mu \text{ 假設為以下的形式: } \mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots(2) \text{ 由這個方程式}$$

所推論出來的重力場與很多螺旋星系都相吻合。而還有其他很多形式的方程式都可以解釋這個理論。在本論文中我們所使用的方程式是由B.Famaey和Binney所提出的形式：

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x} \dots\dots(3) \text{ 這個形式對我們所在的銀河系所產生的重力場比較吻}$$

合。從(1)式及(3)式我們可以推導出 MOND 的重力場 g :

$$g = \frac{\sqrt{g^2_N + 4g_0g_N + g_N}}{2} \dots \dots (4)$$

由此可以經由一些計算，來得知一個螺旋星系應該有的質量，再由此質量得到質量與光度的關係式，可以得知螺旋星系的此理論是否可行。

2.2 質量公式推演

對於一個扁平的螺旋星系，我們可以假設他是一個圓盤狀。而質量密度的公式可以寫成[1]：

$$\mu(r) = \int_0^\infty kdk \mu(k) J_0(kr) \dots \dots \dots (5)$$

$$\mu(k) = \int_0^\infty rdr \mu(r) J_0(kr) \dots \dots \dots (6)$$

其中 $J_m(x)$ 是 Bessel function，而封閉轉換公式為：

$$\int_0^\infty kdk J_m(kx) J_m(kx') = \frac{1}{x} \delta(x - x') \quad (7)$$

這個公式可以轉換(6)變成(5)。

$$\text{Green's equation : } \nabla^2 G(x) = -4\pi G \delta(r) \delta(z) \quad (8)$$

可以轉變為另一種形式：

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^\infty dk \exp[-k|z|] J_0(kr) \quad (9)$$

然後，牛頓的位能 ϕ_N 可以寫成[6,7]：

$$\phi_N(r, z) = 2\pi G \int_0^\infty dk \mu(k) J_0(kr) \exp[-k|z|] \quad (10)$$

由面質量密度，可以寫成：

$$g_N(r) = -\partial_r \phi_N(r, z=0) = 2\pi G \int_0^\infty kdk \mu(k) J_1(kr) \quad (11)$$

最後我們可以得到面質量密度：

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dr' r' g_N(r') J_0(kr) J_1(kr') \quad (12)$$

我們可以更進一步的定義函數 $H(r,r')$ ：

$$H(r,r') = \int_0^\infty dk J_0(kr) J_0(kr') \quad (13)$$

然後可以將 $\mu(r)$ 寫成：

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty dr' \partial_{r'} [r' g_N(r')] H(r,r') \quad (14)$$

而 $H(r,r')$ 可以用橢圓函數 $K(x)$ 表示為：

$$H(r,r') = \frac{2}{\pi r_{>}} K\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \quad (15)$$

其中 $r_{<}$ 為 r, r' 的比較值。

再來我們可以先將 $J_0(x)$ 的積分形式寫下來：

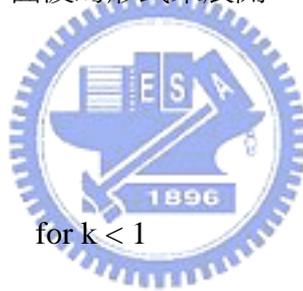
$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[x \sin \theta] d\theta \quad (16)$$

然後把delta function表示成平面波的形式來展開：

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ikx] \quad (17)$$

我們就可以把 J_0 表示為：

$$\int_0^\infty dx \cos[kx] J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{for } k < 1 \quad (18)$$



當 $k > 1$ 時，積分會等於零。所以我們可以應用以上的式子寫出：

$$\int_0^\infty dk J_0(kx) J_0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} K(x) \quad (19)$$

在這裡我們定義橢圓函數為：

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (20)$$

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad (21)$$

這個定義與某些書和一些電腦程式的內定函數(Ex:MATLAB Mathematica)寫得

不一樣，但為了方便起見在本論文中還是使用這個定義。

最後我們可以得到面密度的公式：

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty \partial_{r'} [v_N^2(r')] H(r, r') dr' \quad (22)$$

這個公式是我們計算星系面積的基本公式，因為我們一開始取得的資訊是旋轉曲線，而它代表的是星系的旋轉速度與半徑的關係。有了這個公式後，我們可以很方便的來計算出星系的質量。

2.3 星系旋轉速度公式預測

有了以上的質量公式我們可以算出星系的質量，而我們的重點是MOND使用了方法算出了質量公式後，我們希望能算出M/L比值，最後能由面質量密度來回推星系的旋轉曲線，看是否和觀測到的旋轉曲線一致，驗證MOND理論是否可行。

要實行以上的方法，首先我們必須用MOND理論找出速度公式的形式，然後再找出面質量密度應該是何種形式，這樣經由數值的計算便可以來驗證理論的計算是否可行。

我們可由面質量密度公式得出牛頓速度：

$$v_N^2(r) = \frac{C_0^2 a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (23)$$



在這裡 C_0 和 a 是常數參數。可以發現當 r 趨近無窮大時，速度為零。而在 $r=0$ 時速度等於 C_0 。但是當 $r=0$ 時我們希望在一個對稱的星系中速度是等於零的，我們稍後會再討論這個問題。

從(14)式，我們可以推出：

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty k dk \Lambda(k) J_0(kr) \quad (24)$$

而這裡的 $\Lambda(k)$ 定義為：

$$\Lambda(k) \equiv \int_0^\infty \frac{C_0^2 a}{\sqrt{r^2 + a^2}} J_1(kr) dr \quad (25)$$

爲了要計算 $\Lambda(k)$ ，我們可以經由以下這個公式幫忙：

$$\int_0^\infty dk \exp[-kx] J_0(k) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (26)$$

經過演算後，我們可以改寫成：

$$\int_0^{\infty} dk \exp[-kx] J_0(ka) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (27)$$

代入(24)後可以得到：

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \frac{C_0^2}{2\pi G} \int_0^{\infty} dk (1 - \exp[-ak]) J_0(kr) \\ &= \frac{C_0^2}{2\pi G} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

2.3.1 Famaey and Binney Model

在FB模型裡[3]，牛頓速度 v_N 和觀測到的速度 v 由(1)和(3)可得知有以下

的關係：

$$v = \frac{\sqrt{v_N^4 + 4g_0 r v_N^2 + v_N^2}}{2} \quad (29)$$

之後我們可以把星系的旋轉曲線 v_0 表示為：

$$v_0^2(r) = \frac{C_0^2 a}{2\sqrt{r^2 + a^2}} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4g_0 r \sqrt{r^2 + a^2}}{C_0^2 a} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (30)$$

可以得知：

$$v_{N0}^2(r) = \frac{C_0^2 a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

在這裡 C_0 和 a 是常數參數，之後我們就可以得到面質量密度：

$$\mu_0(r) = \frac{C_0^2}{2\pi G} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] \quad (31)$$

之後我們就可以推出速度的公式：

$$v_{N0}^2(r) = C_0 \left(\frac{a_1}{\sqrt{r^2 + a_1^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{r^2 + a_2^2}} \right) \quad (32)$$

可以推廣成：

$$v_N^2(r) = \sum_{i,j} v_{N0}^2(r, C_{0i}, a_j, b_j) \equiv \sum_{i,j} C_{0i}^2 \left[\frac{a_j}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} - \frac{b_j}{\sqrt{r^2 + b_j^2}} \right] \quad (33)$$

而質量密度：

$$\mu(r) = \sum_i \mu_0(r, C_{0i}, a_j) \equiv \sum_i \frac{C_{0i}^2}{2\pi G} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b_j^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} \right] \quad (34)$$



第三章 程式及數值方法

星系的動力學一直是我們所想瞭解的，經由之前的討論我們發現螺旋星系的面質量密度和旋轉曲線可能在一組解析解。所以在這章裡面我們嘗試著用幾個星系來驗證以上的公式是否可行。

3.1 旋轉曲線的原理與取得方法

拍攝星系的光譜，測量恆星群的吸收線或者H II 區發射線的Doppler位移，可以得到旋轉曲線。巴布科克(Babcock)、梅奧爾(Mayall)和考特斯(Courtes)開創了這項技術。

3.1.1 氣體旋轉曲線取得原理：

氫原子譜線：

對於 $n, m < 5$ 的躍遷，在 $Z=1$ 時，它的能量 $h\nu$ 在10和0.1 eV之間，輻射波段是在近紫外、可見光和紅外波段這樣的能量所對應的溫度 $T = \frac{h\nu}{k}$ 為 $10^5 - 10^3 K$ ，為恆星的外層或是星際空間中的電離氫區的典型溫度。因此在這些天體中這類躍遷是最明顯的，而Balmer α 線 ($\lambda = 121.6 \text{ nm}$) 出現在電離雲氣 (H II 區) 的光譜區中。而觀察到這些譜線後，我們可以利用都普勒原理來推斷出旋轉曲線。發射體相對於觀測者有運動，他有相對速度 v ，其結果是改變頻率 $\Delta \nu$ ，公式如下：

$$\Delta \nu = \nu_0 \frac{v_{\text{平行}}}{c} \quad \text{非相對論條件下 (} v \ll c \text{)} \quad (35)$$

$$\Delta \nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{v_{\text{平行}}^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{v_{\text{平行}}}{c}} \right) \quad \text{相對論速度條件下} \quad (36)$$

其中 $v_{\text{平行}}$ 是速度在視線方向的投影。

都普勒譜線：當進行躍遷的原子、離子，或分子處在溫度為 T 的馬克斯威爾

(Maxwellian)熱攪動情況下，譜線的輪廓主要將由熱攪動所引起的都普勒效應來決定。他可用一個高斯函數描述：

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (37)$$

其中頻率的彌散 σ 由下式給出:

$$\sigma = \frac{\nu_0}{c\sqrt{2}} \left(\frac{2kT}{m} + V^2 \right)^{1/2} \quad (38)$$

其中m是一個原子、離子，或所涉及的值點的質量。這個 σ 的通用公式包括了溫度下的運動特性，和以V作為最可能值，所表示的各向同性的微觀湍流速度所產生的效應。這一輪廓的半寬高稱為「都普勒寬度」(Doppler width)：

$$\Delta\nu_D = \frac{2\nu_0}{c} \left[\ln 2 \left(\frac{2kT}{m} + V^2 \right) \right]^{1/2} = 2.3556\tau \quad (39)$$

所以我們只要觀察星系裡的物質的譜線，即可從譜線輪廓看出這些運動的特徵，進而求得星系的氣體旋轉曲線。

3.1.2 星系旋轉曲線取得：

要求得星系旋轉曲線時，我們可以先對星系進行高解析的CO-line觀察而求得Position-Velocity(PV圖)。然後與已經存在的氫原子譜線在一起做比較。而同時也觀測在星系中央的H-alpha和[NII] line的放射物得出CCD的光譜。最後利用envelop-tracing方法來從PV圖得到旋轉曲線[13]。所以我們只要觀察星系裡的物質的譜線，即可從譜線輪廓看出這些運動的特徵，進而求得星系的旋轉曲線。

3.2 光度資料的原理與取得

恆星的光度L是指在一秒鐘內恆星所輻射出來的能量總和，不只可見光、紅外光與紫外光，還包括了所有波長的電磁能量總和。以下積

分式所給出：

$$L = \int_S \int_{4\pi} \int_{\nu} dP_{\nu} = \int_{\nu} L_{\nu} d\nu$$

其中S為天體所包含的面積， L_{ν} 稱為「單色光度」〔 WHz^{-1} 〕。

星等：星等系統起源於希臘天文學家根據天體的目視亮度所做的分類。到了19世紀，這一分類依照人眼感官大致相當的對數尺度被公式化(Pogson, 1856)。星等是天體單色流量的相對測量，從觀測的角度而言恆星實際上是一個點源，因此它的視大小是無關的；但對展源而言，如星系或天空背景，它的大小就必須被考慮，所以要用新的單位，這就引入了「每平方角秒內的星等」這個單位，及立體角1角秒乘以1角秒內所觀測到的星等。若 $e(\lambda)$ 是天體在地球大氣外單色流量，在波長 λ_0 處星等定義為：

$$m_{\lambda_0} = -2.5 \log \frac{e(\lambda_0)}{e_0} = -2.5 \log e(\lambda_0) + q_{\lambda_0} \quad (40)$$

其中 q_{λ_0} 是定義零星等的常數。實際上，任何測量都是在一定波段所做是以穿透率 $t_0(\lambda)$ 的濾光片所定義，這就是為什麼存在著那麼多星等系統，因為它們的差別來自於選擇了不同的光譜帶，所以單色輻射 $e(\lambda)$ 所產生的星等為：

$$m_{\lambda_0} = -2.5 \log \int_0^{\infty} t_0(\lambda) e(\lambda) d\lambda + 2.5 \log \int_0^{\infty} t_0(\lambda) d\lambda + q_{\lambda_0} \quad (41)$$

絕對星等(Absolute Magnitude)：

「視星等」是對在地球上所接收到的流量作的測量。它與我們與天體的距離有關，我們若要對不同的天體做比較，則需要引入絕對星等的概念。絕對星等就是把天體都置於10秒差距(pc)並做星際消光（即「紅化」，用符號A表示）的改正後的視星等。一個距離為D的天體，其視星等m與絕對星等M的關係為：

$$M = m + 5 - 5 \log D - A \quad (42)$$

3.3 數值計算

在這裡，我們使用之前的質量公式來計算星系的質量，但是為了計算方便我們將面質量密度公式改寫：

$$\mu(r) = \frac{1}{\pi^2 Gr} \left[\int_0^1 \partial_x \left[v_N^2(rx) \right] K(x) dx - \int_0^1 \partial_y \left[v_N^2\left(\frac{r}{y}\right) \right] K(y) y dy \right] \quad (43)$$

在 $x=1$ 時，橢圓函數會趨近無窮大，但會和第二項的橢圓函數消掉。所以使用此公式我們可安心的來計算。我們使用MATLAB程式語言來計算星系的面質量密度。得到面質量密度後，我們再用MATHEMATICA所提供的一個package

【NonLinearFit】，來處理曲線的擬合而所用的擬合公式如下：

$$\mu(r) = \sum_i \mu_0(r, C_{0i}, a_j) \equiv \sum_i \frac{C_{0i}^2}{2\pi G} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + b_j^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} \right] \quad (44)$$

而我們的處理步驟事先將旋轉曲線的資料利用以下公式得到牛頓速度

$$v_N^2 = \frac{v^4}{g_0 r + v^2} - v_{gas}^2 \quad (45)$$

得到了牛頓速度後，我們可以代入(2)式得到面質量密度。

3.3.1 NGC2403

DIAM1 : 12.6 DIAM2 : 6.0 D=6.1(MPC)

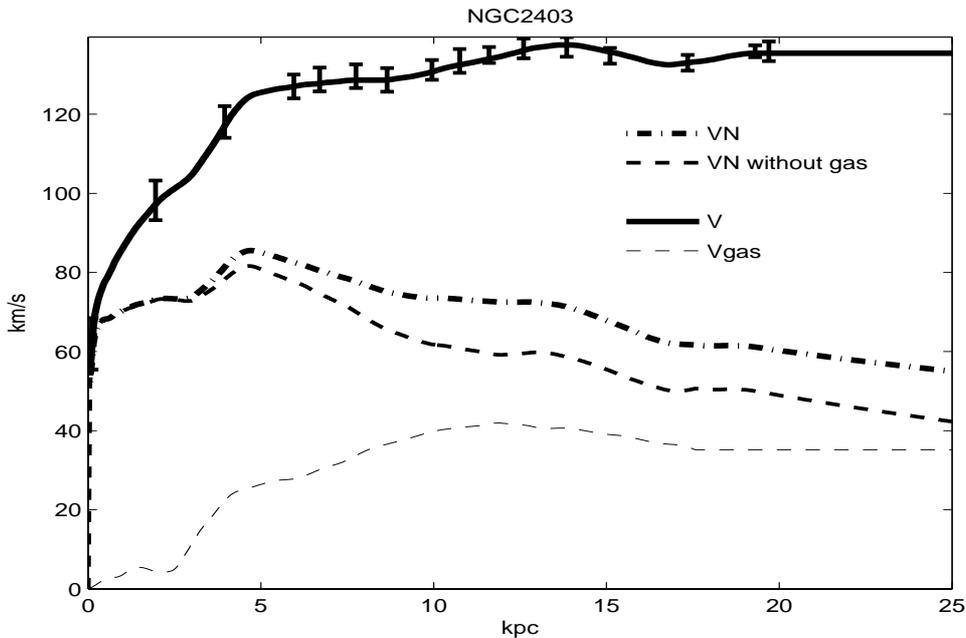


Figure 1 rotation curve and Newtonian velocity and gas velocity

在這裡橫軸使用的單位為 KPC，而縱軸為 $\frac{Km^2}{s^2}$ 。(本論文後有詳細的單位轉換)

粗黑線為旋轉曲線，虛線逗點線為 Newtonian 速度曲線，而短虛線為不含氣體的 Newtonian 速度，最後長虛線為氣體的速度。而旋轉曲線的誤差範圍大概在 +4.1%~ -5.1%之間。旋轉曲線的取得是來自於：

<http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/RC99/2403.dat>

VelocitySquare:

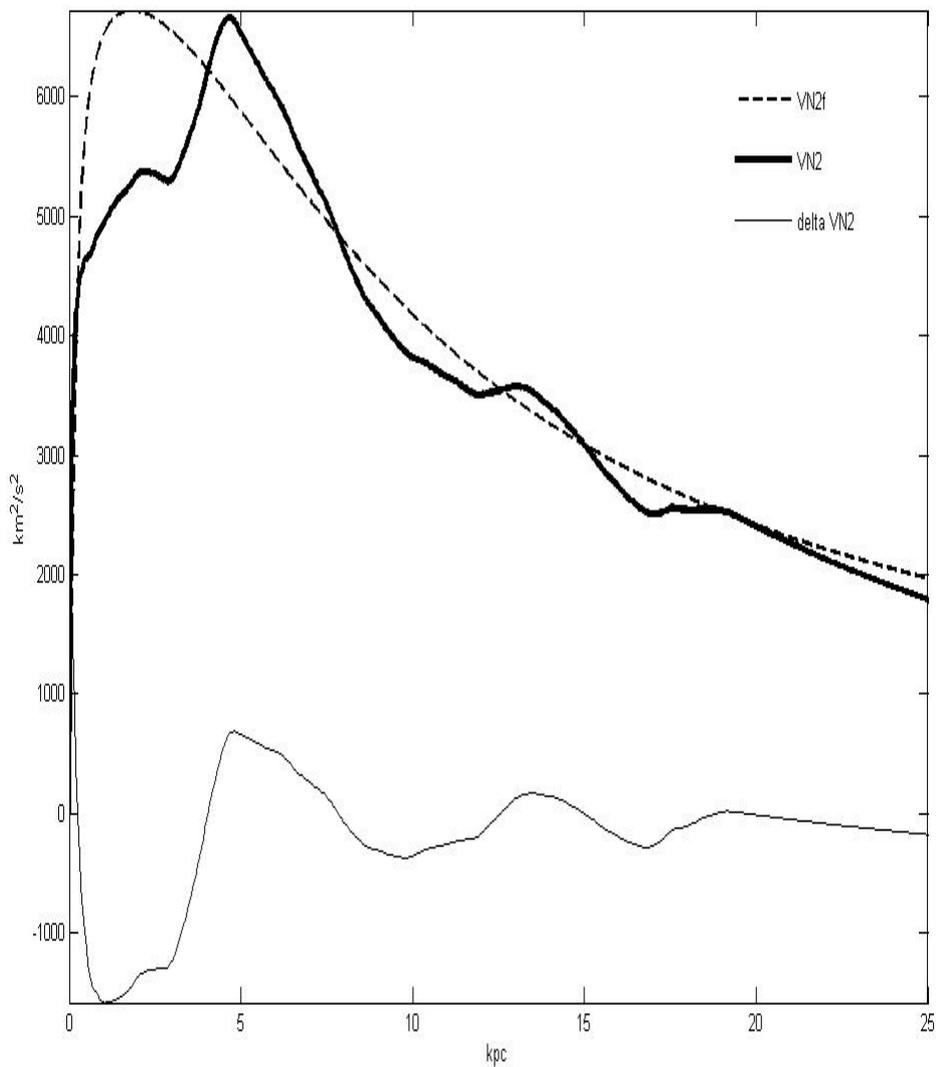


Figure 2 Square of velocity and fitting curve and delta velocity

虛線為擬合的曲線，擬合的方程式為(32)，參數為 $C_0=7.7 \times 10^{-27} \frac{(pc)^2}{s^2}$ $a_1=7.2$ KPC $b_1=0.1$ KPC 實線為數據資料由(42)所算出的曲線，而細黑線為兩者之相差的數據曲線縱軸單位為公里的平方除以秒平方，橫軸單位為 1000 乘以秒差距。

Mass density

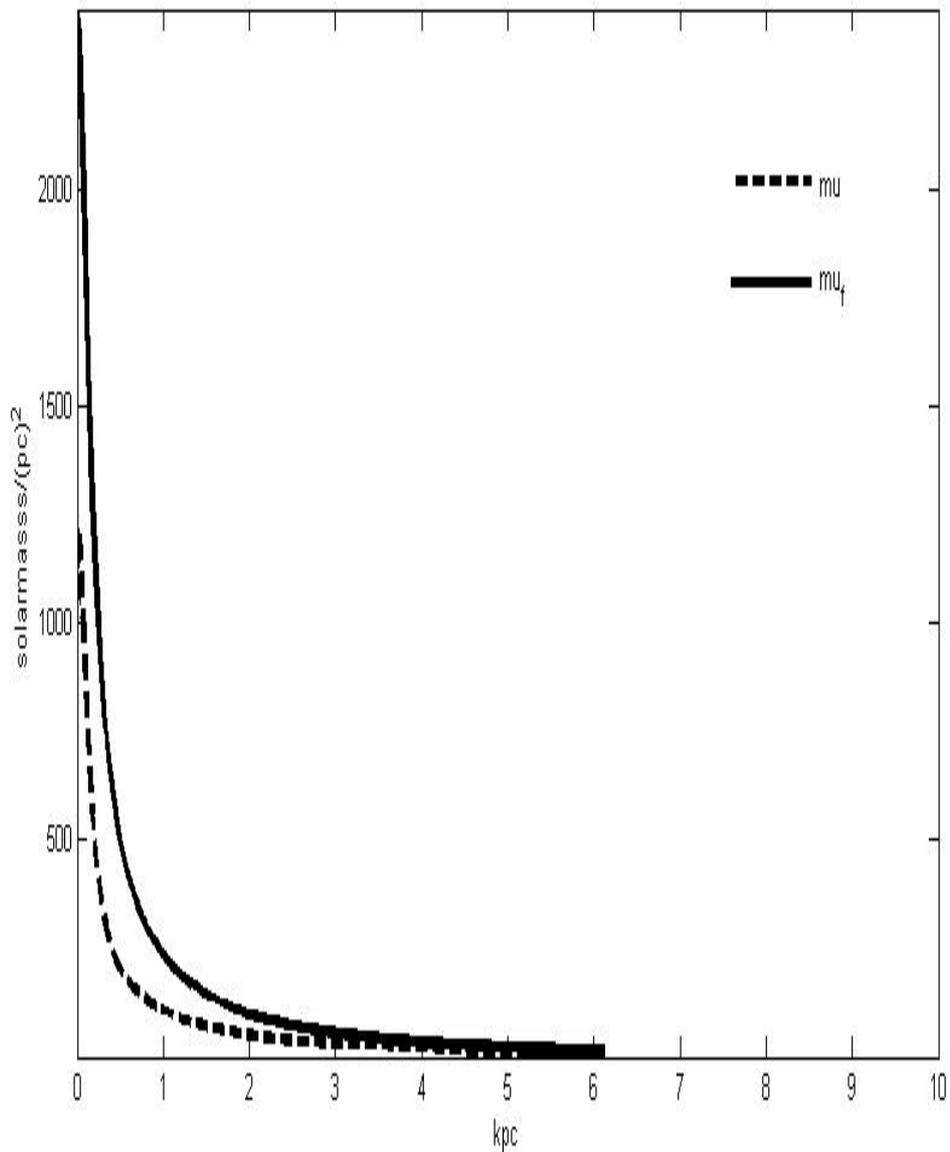


Figure3 mass density and curve fitting

橫軸依然是 KPC，爲了等下我們處理資料方便，我們把縱軸不使用 M.K.S 制而使用了太陽質量除以 PC 平方。

而相關的參數爲： $C_0=7.7 \times 10^{-27} \frac{(pc)^2}{s^2}$ $a_1=7.2$ KPC $b_1=0.1$ KPC

實線爲數據資料所算出的質量密度(40)，而虛線爲擬合質量密度(31)。

M/L

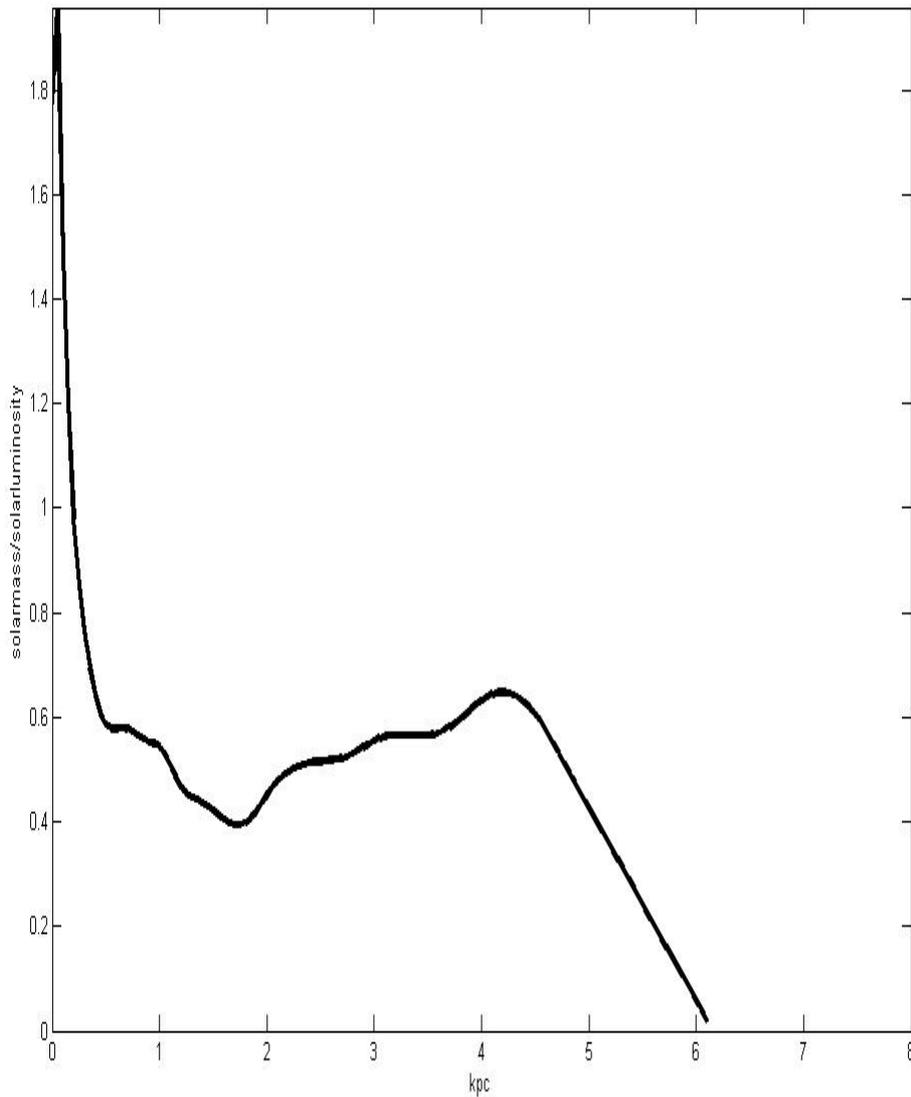


Figure 4 mass density over luminosity

縱軸爲太陽質量除以太陽光度，橫軸爲 1000 秒差距

3.3.2 NGC2903

DIAM1 : 21.9 DIAM2 : 12.3 D=3.25(MPC)

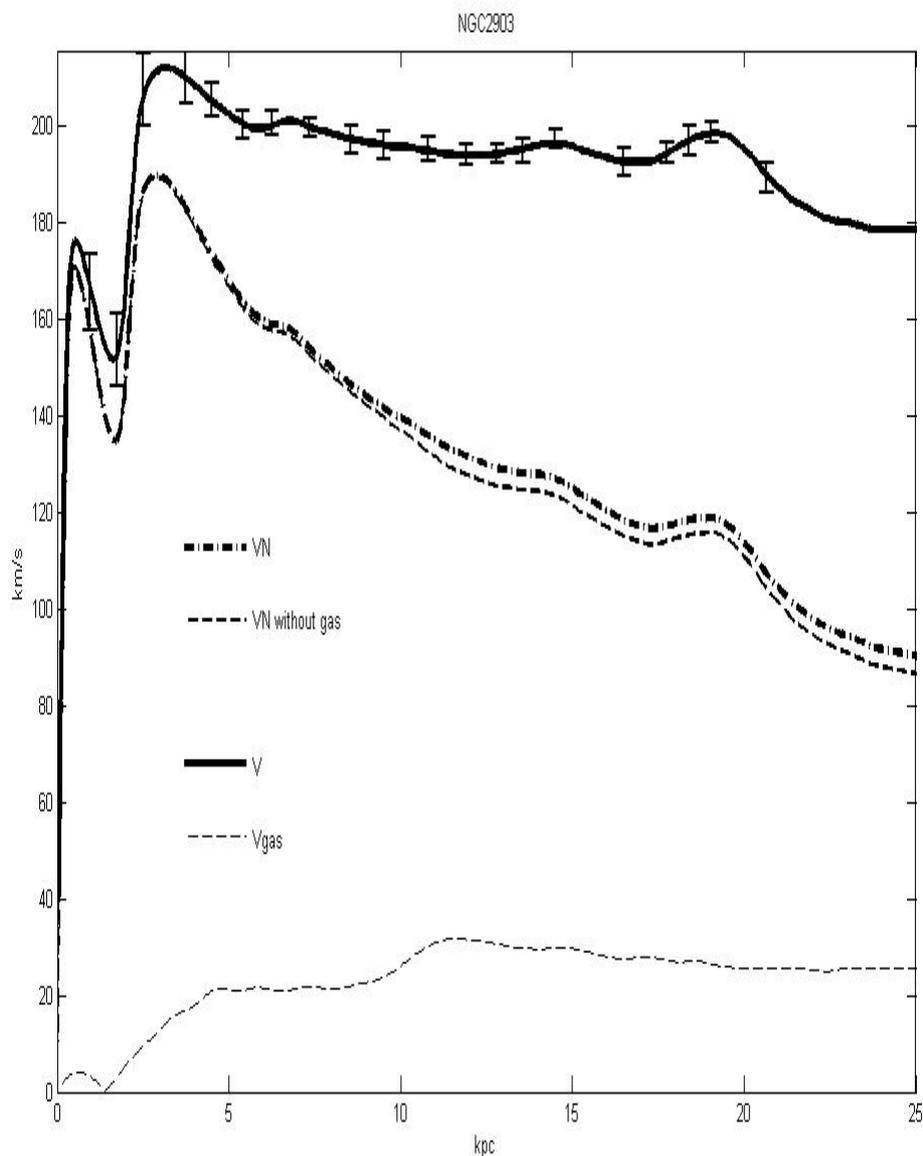


Figure 5 rotation curve and Newtonian velocity

在這裡橫軸使用的單位為 KPC，而縱軸為 $\frac{Km^2}{s^2}$ 。粗黑線為旋轉曲線，虛線逗點線為 Newtonian 速度曲線，而短虛線為不含氣體的 Newtonian 速度，最後長虛線為氣體的速度。誤差範圍在+8%~ -18%之間。旋轉曲線的取得是來自於：

<http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/RC99/2903.dat>

VelocitySquare:

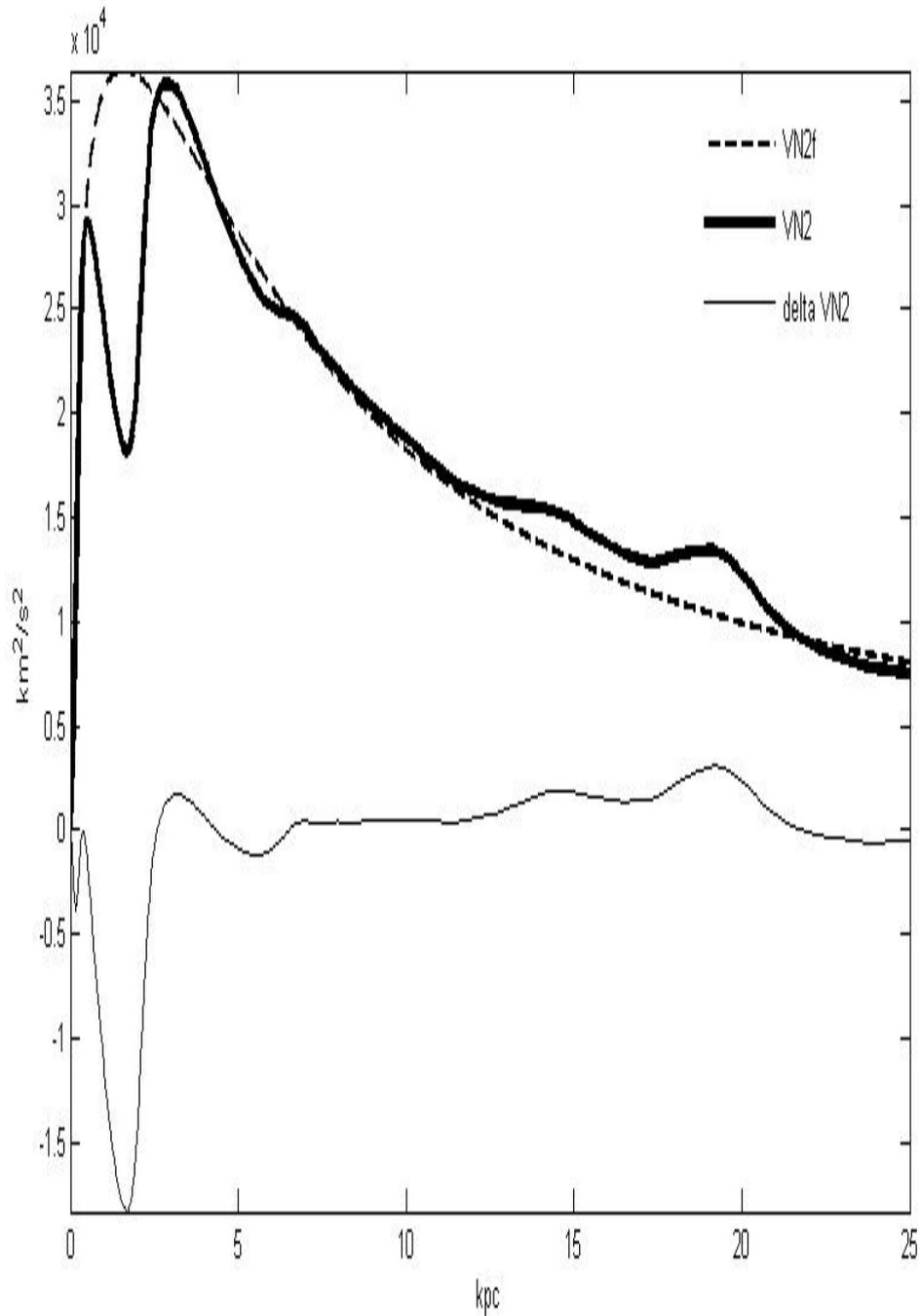


Figure 6 Square of velocity and fitting curve and delta velocity

虛線為擬合的曲線，擬合的方程式為(32)，參數為 $C_0 = 4.4 \times 10^{-26} \frac{(pc)^2}{s^2}$ $a_1 = 5$
 KPC $b_1 = 0.14$ KPC 實線為數據資料由(42)所算出的曲線，而細黑線為兩者之
 相差數據曲線縱軸單位為公里的平方除以秒平方，橫軸單位為 1000 乘以秒差距。

Mass density

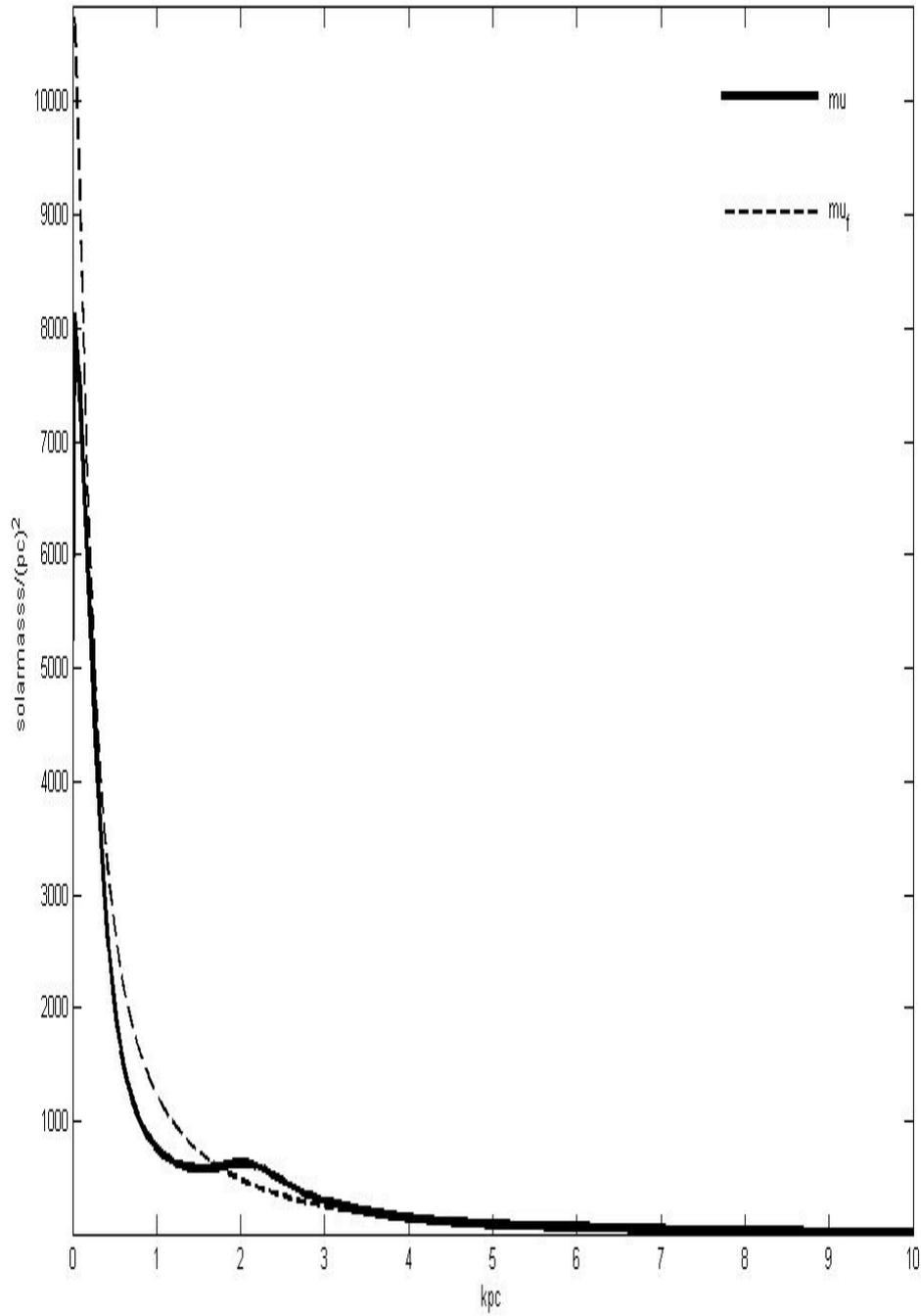


Figure 7 mass density and curve fitting

橫軸依然是 KPC，爲了等下我們處理資料方便，我們把縱軸不使用 M.K.S 制而使用了太陽質量除以 PC 平方。實線爲數據資料所算出的質量密度(40)，而虛線爲擬合質量密度(31)。相關的參數爲： $C0=4.4 \times 10^{-26} \frac{(pc)^2}{s^2}$ a1=5 KPC b1=0.14 KPC

M/L

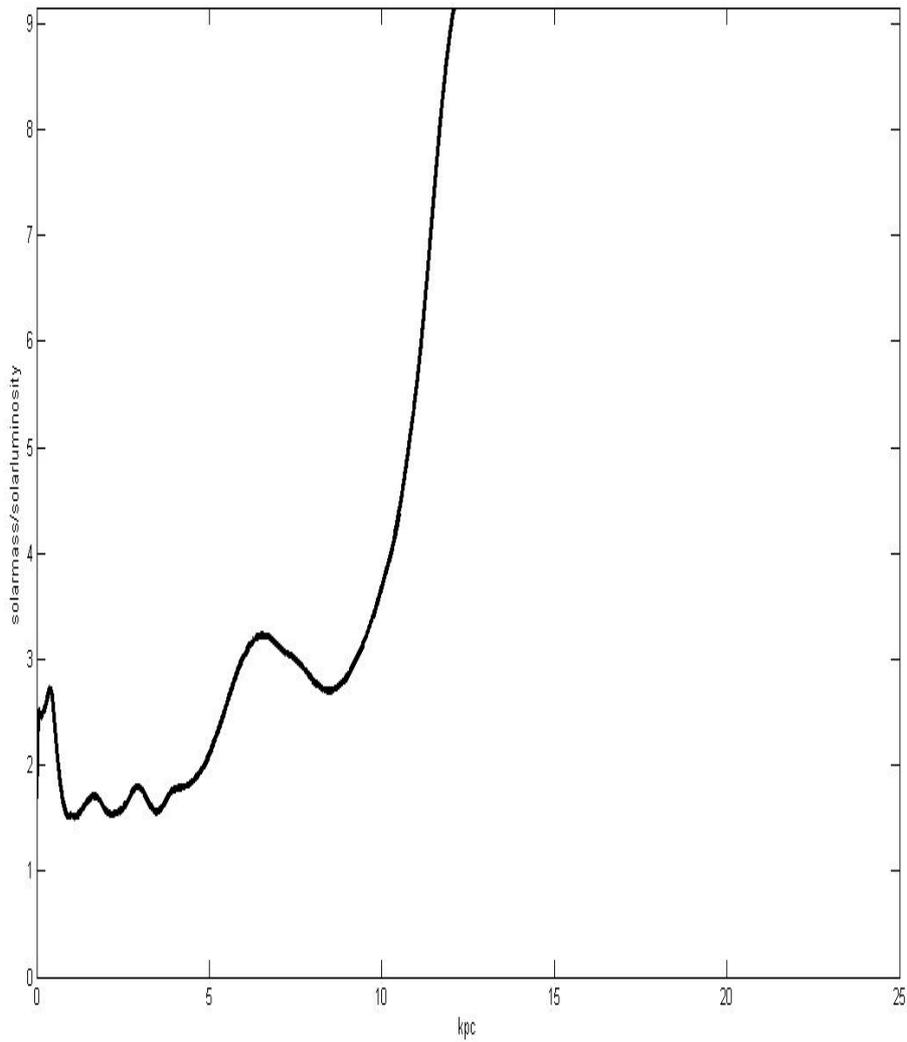


Figure 8 mass density over luminosity

縱軸爲太陽質量除以太陽光度，橫軸爲 1000 秒差距

3.3.3 NGC 6503

DIAM1 : 7.1 DIAM2 : 2.4 D=5.9(MPC)

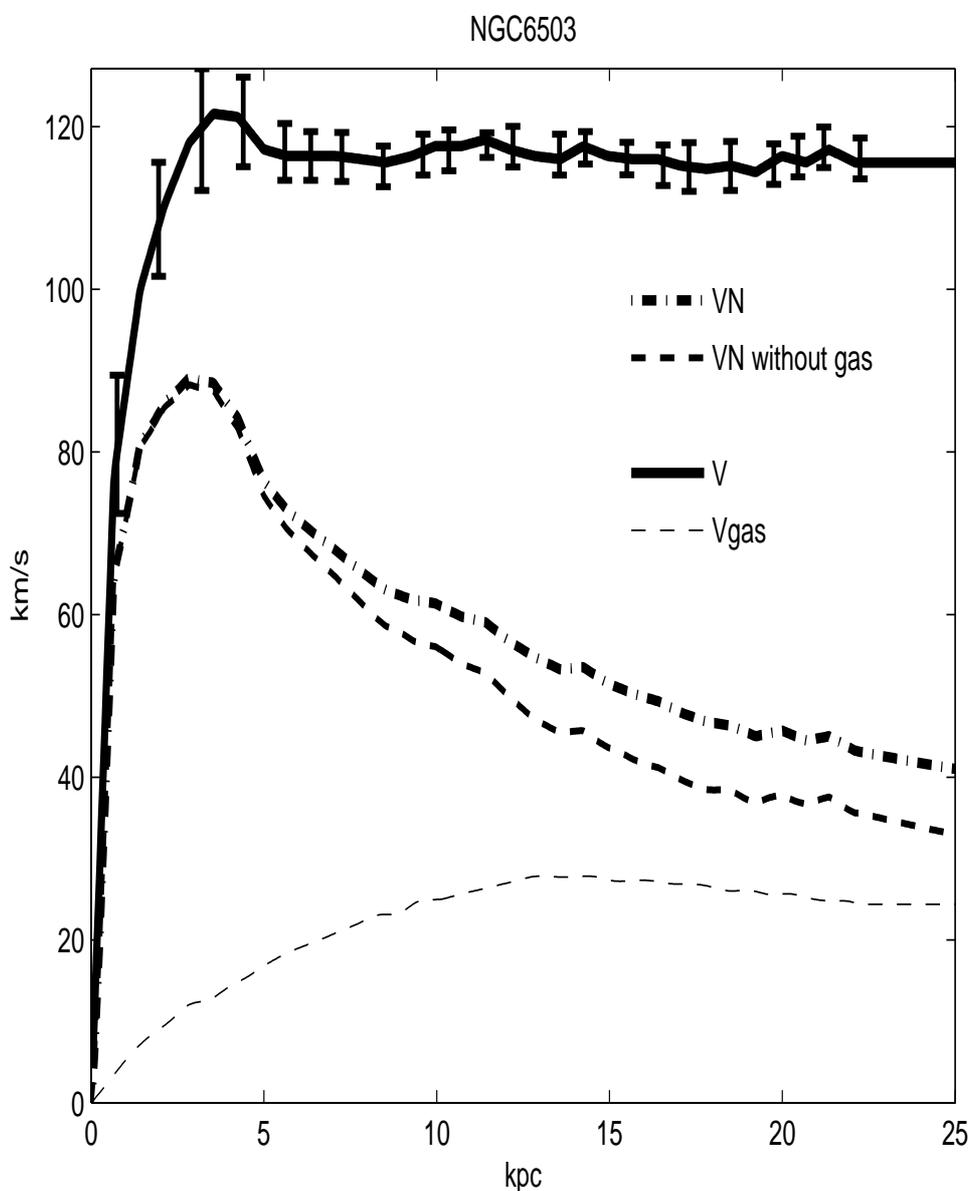


Figure 9 rotation curve and Newtonian velocity

在這裡橫軸使用的單位為 KPC，而縱軸為 $\frac{Km^2}{s^2}$ 。粗黑線為旋轉曲線，虛線
逗點線為 Newtonian 速度曲線，而短虛線為不含氣體的 Newtonian 速度，最後長
虛線為氣體的速度。縱軸單位為公里的平方除以秒平方，橫軸單位為 1000 乘以
秒差距。旋轉曲線的取得是來自於[12]。

VelocitySquare

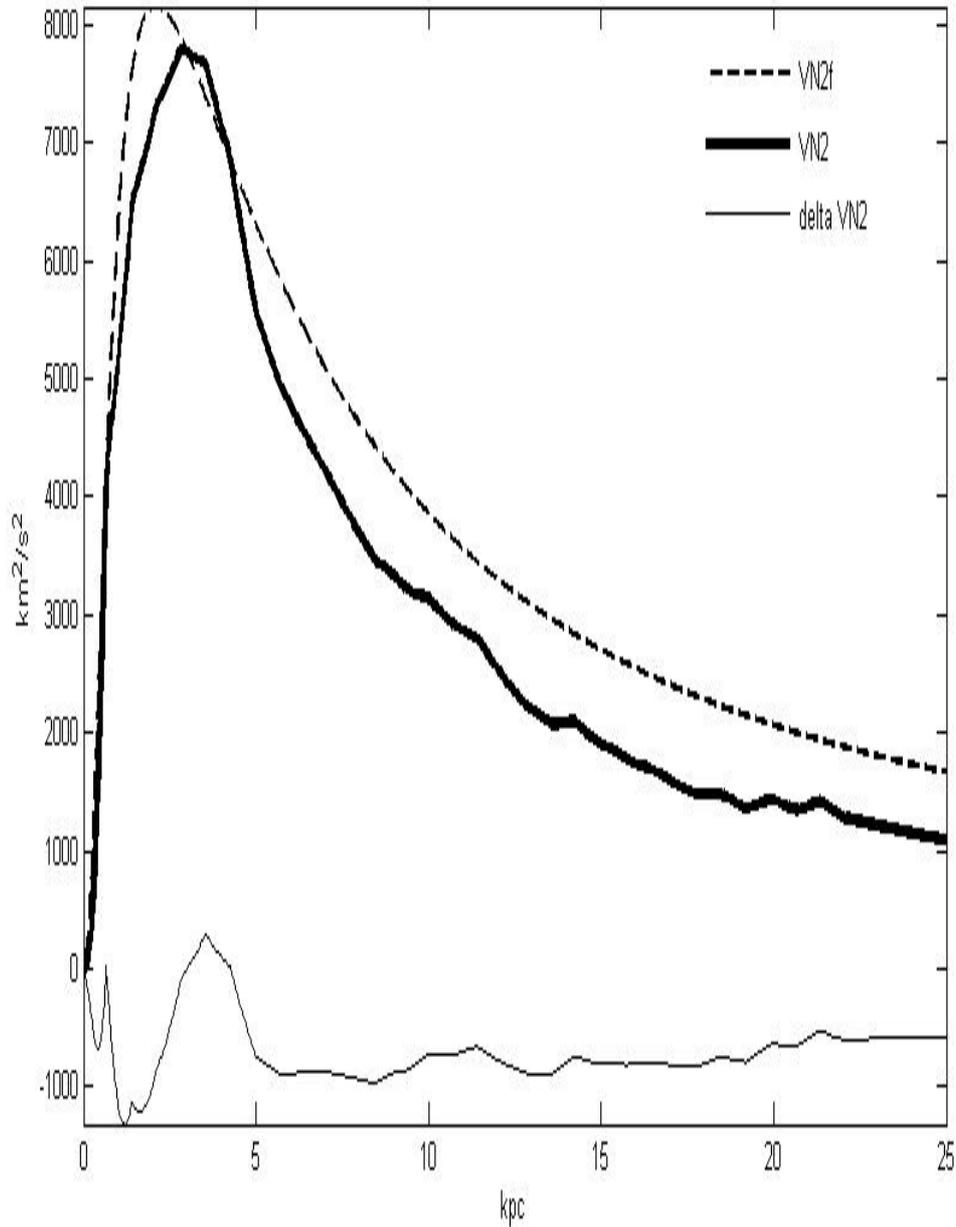


Figure 10 Square of velocity and fitting curve and delta velocity

虛線為擬合的曲線，擬合的方程式為(32)，參數為 $C0=4.24 \times 10^{-26} \frac{(pc)^2}{s^2}$

$$C01=8.76 \times 10^{-27} \frac{(pc)^2}{s^2}$$

$$a1=1.2 \text{ KPC} \quad , \quad a2=4.6 \text{ KPC}$$

$$b1=0.9 \text{ KPC} \quad , \quad b2=1 \text{ KPC}$$

實線為數據資料由(42)所算出的曲線，而細黑線為兩者之相差數據曲線，縱軸單位為公里的平方除以秒平方，橫軸單位為 1000 乘以秒差距。

Mass density

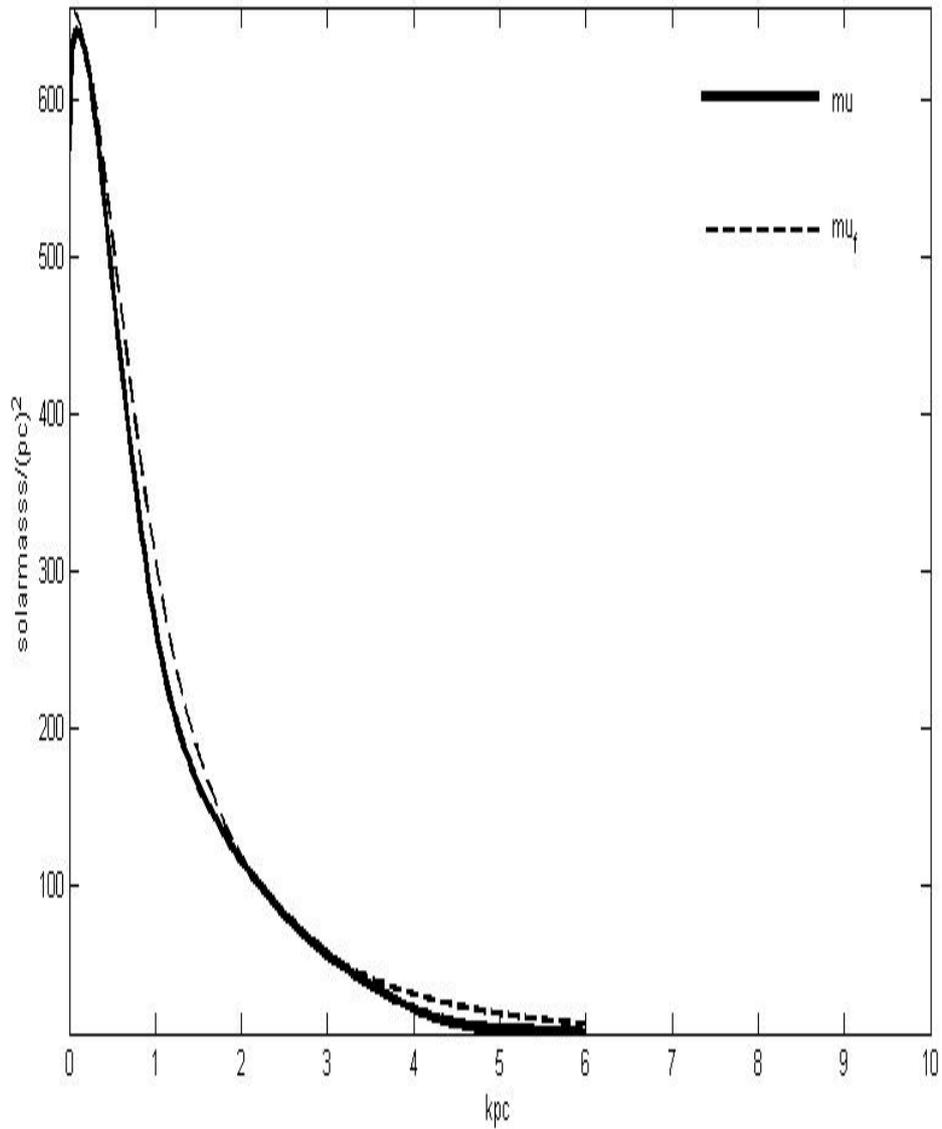


Figure 11 mass density and curve fitting

相關的參數為： $C0=4.24 \times 10^{-26} \frac{(pc)^2}{s^2}$ $C01=8.76 \times 10^{-27} \frac{(pc)^2}{s^2}$

$a1=1.2 \text{ KPC}$, $a2= 4.6 \text{ KPC}$

$b1=0.9 \text{ KPC}$, $b2=1 \text{ KPC}$

橫軸依然是 KPC，爲了等下我們處理資料方便，我們把縱軸不使用 M.K.S 制而使用了太陽質量除以 PC 平方。實線爲數據資料所算出的質量密度(40)，而虛線爲擬合質量密度(31)。

M/L

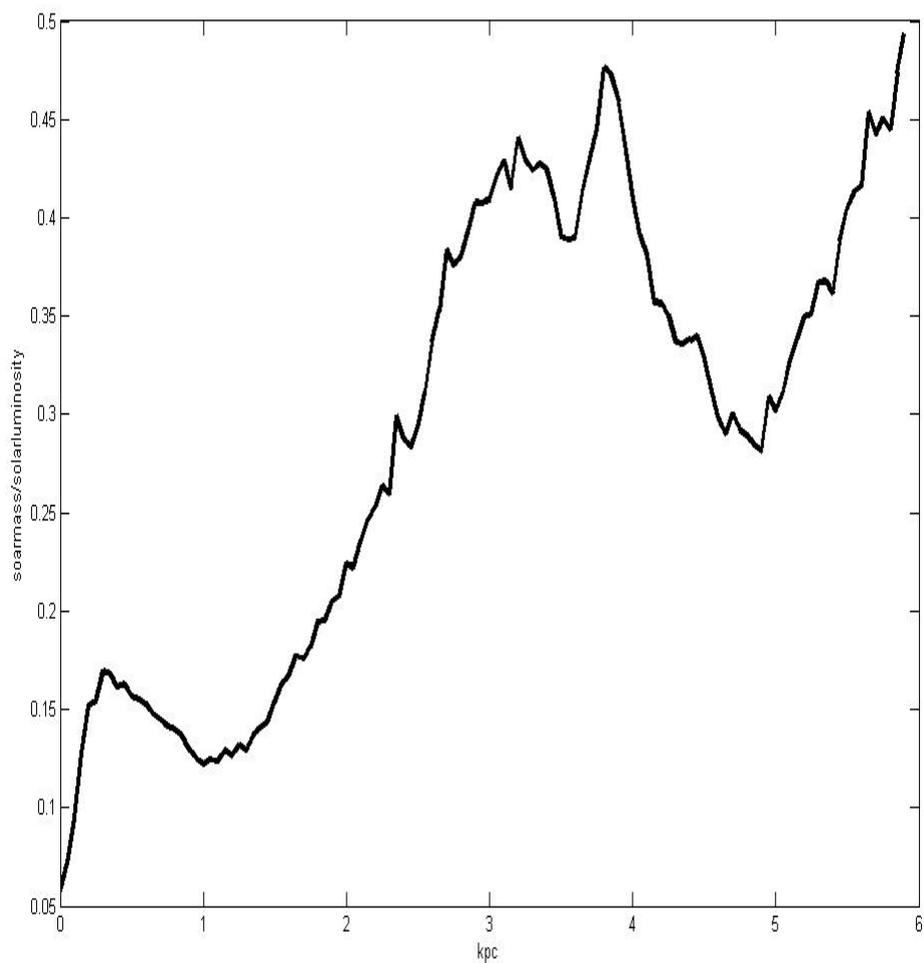


Figure 12 mass density over luminosity

縱軸爲太陽質量除以太陽光度，橫軸爲 1000 秒差距

第四章 結論

在前面的部分我們討論了螺旋星系的動力學，得到了旋轉曲線的解析解，也利用數值運算擬合出了解析解的可靠性。現在我們想更進一步的討論亮度與質量之間的關係。無蹤質量一直是天文學的一個問題，暗物質在目前看來是提供這個問題的解答之一，但是經由 MOND 的理論我們可以得知，修改重力定律或許也是這個問題的解答。在前面的章節，我們經由 MOND 理論算出了發光物質所佔星系的質量，接下來我們將要比較發光物質的質量與亮度的比值。

亮度：

NGC 2403：

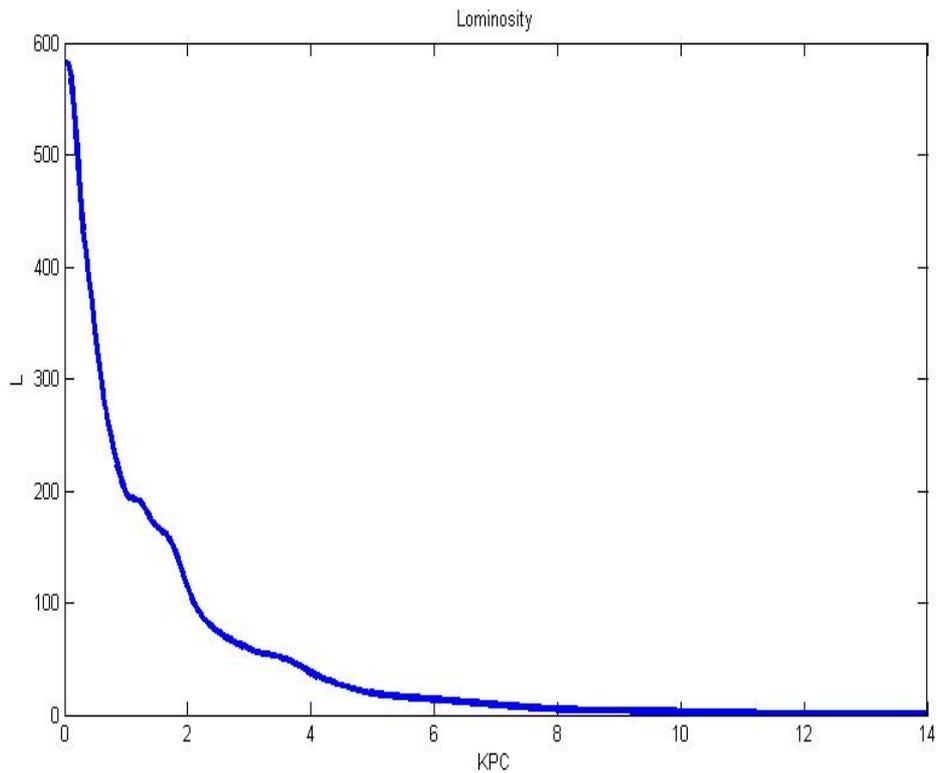


Figure 13 Luminosity of NGC 2403

縱軸為亮度橫軸為 1000 秒差距

NGC 2903

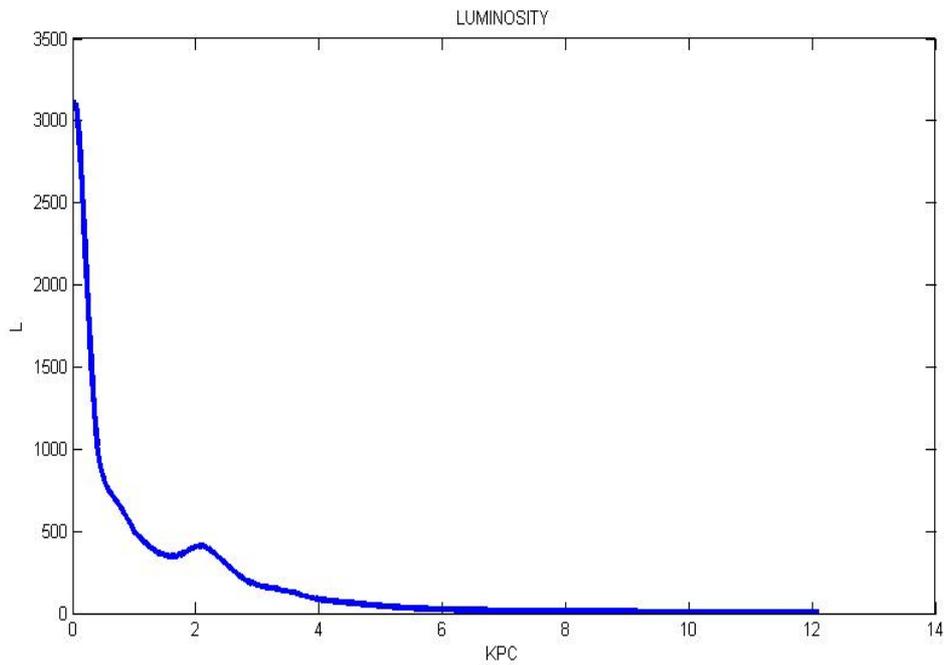


Figure 14 Luminosity of NGC 2903

縱軸為亮度橫軸為 1000 秒差距

NGC 6503

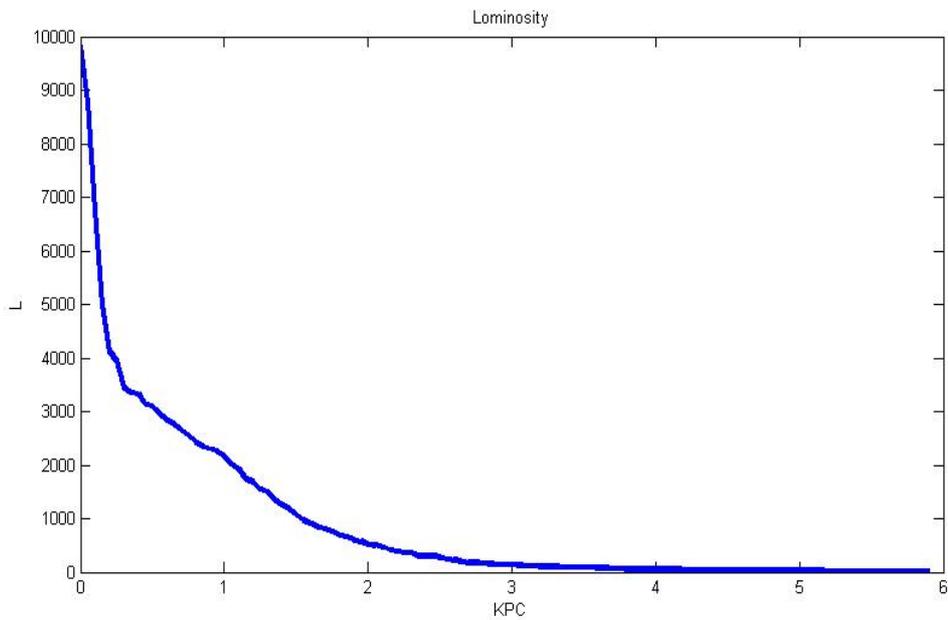


Figure 15 Luminosity of NGC 6503

縱軸為亮度橫軸為 1000 秒差距，以上的亮度資料來自[6],[7]。

我們將這些亮度資料分別與其對應的發光物質質量相比較，得到了下圖

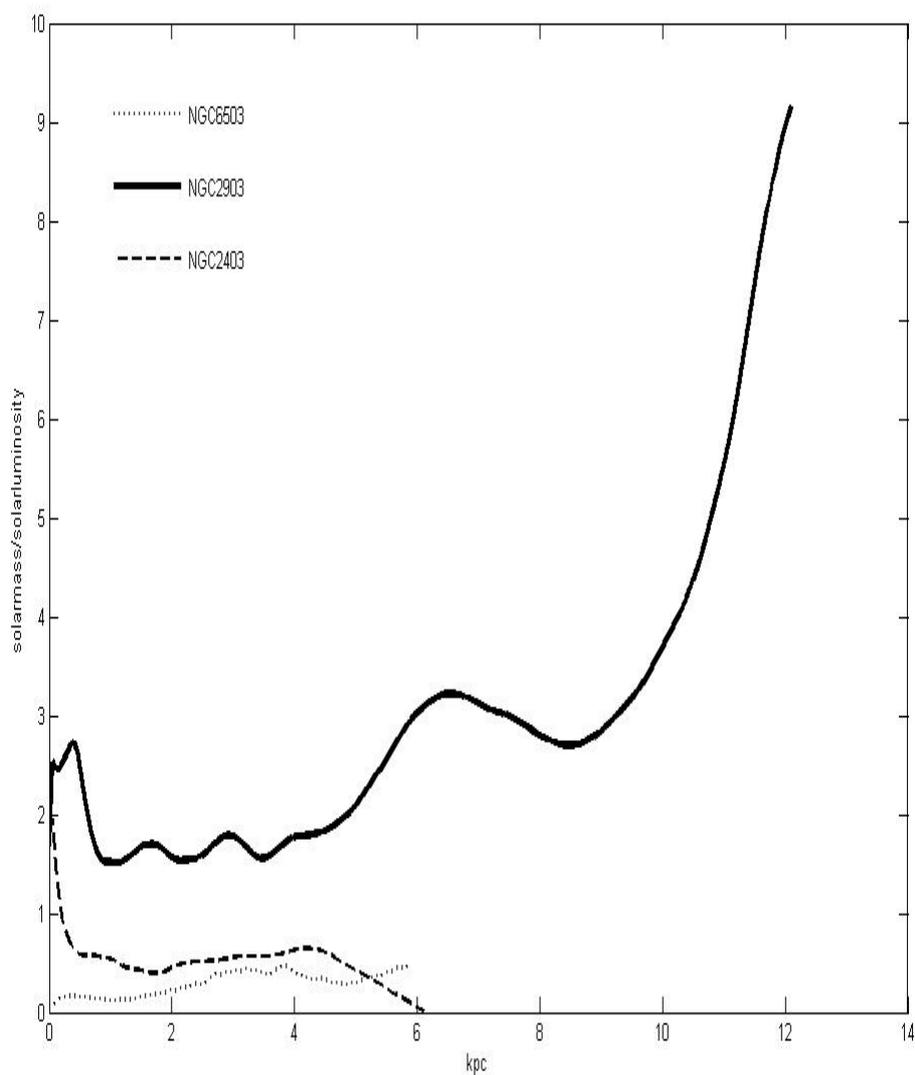


Figure 16 M/L of NGC2403 NGC2903 NGC6503

一般天文學裡認定的 M/L 值如下：

NGC 2403 1.4

NGC 2903 3.5

NGC 6503 0.041

橫軸的單位為 KPC，縱軸的單位為「太陽質量除以 L 的太陽光度」，在天文學裡我們定義太陽的 M/L=1。在一般的天文學裡，我們知道質量是與 r 成反比，而光

度是與 $\exp(-r)$ 成比例，所以當 r 很大時， M/L 必然增加得很強烈。這是推斷無蹤質量的一個關鍵。但當我們使用 MOND 理論來計算 M/L 時，可以得到較平緩的數值，這顯示了可能並非是有其他看不見的物質在星系邊緣，而是有可能在大尺度下重力定律必須被修正，就如同本論文的方法。到目前為止，還沒有一個方法能夠有效的說明無蹤質量這個問題，但 MOND 理論似乎提供了我們一條新的路，可以去嘗試解決這個問題。而且透過了這個理論，我們更進一步瞭解了螺旋星系的動力學，這樣對於我們要去探討天文學的問題時，我想是提供了一些小小的幫助。而這個理論正在發展中，也在一些星系得到了成功的吻合，真理是要棄而不捨得努力去追尋，我想 MOND 理論提供了我們更多的線索，讓我們可以一步步逼向最後的真理。



參考資料：

- [1] Arfken, G. B. and Weber, H. J., 2005, Mathematical method for physicists,
- [2] B. Famaey and J. Binney, “Modified Newtonian dynamics in the Milky Way”,
astro-ph/0506723
- [3] Kao, W.F., ’’ Modified Newtonian Dynamics In Dimensionless Form’’,
astro-ph/0504009;
- [4] Kao, W.F., “Modified Newtonian dynamics and induced gravity”, 2005,
gr-qc/0512062;
- [5] Kao, W.F. “MOND as an extra dimensional effect”, astro-ph/0603311;
- [6] Kent, S. M., “Dark matter in spiral galaxies. I. galaxies with optical rotation
curves”, 1987, Astron. J. 93,816k
- [7] Kent, S. M., “Dark matter in spiral galaxies. I. galaxies with optical rotation
curves”, 1986, Astron. J. 91, 1301
- [8] Mak, M. K. and Harko, T., “Can the galactic rotation curves be explained in brane
world models?” Phys.Rev. D70 (2004)024010;
- [9] Milgrom, M., “A modification of the newtonian dynamics: Implications for
galaxies”, 1983, ApJ, 270, 371;
- [10]”The physical universe-an introduction to Astronomy” Frank Shu
- [11]”Galaxies and Cosmology” F.Combes P.Boissé A.Mazure A.Blanchard
- [12]J. R. Brownstein₁ and J. W. Moffat₂, ” Galaxy Rotation Curves Without
Non-Baryonic Dark Matter”,arXiv:astro-ph/0506370 v3 28 Jun 2005[13] Y.
Sofue, Y. Tutui, M. Honma, A. Tomita, T. Takamiya, J. Koda and Y.
Takeda ,”CENTRAL ROTATION CURVES OF SPIRAL
GALAXIES”(Astrophysical Journal Vol. 523, pp136-146, 1999)
- [14] “觀測天文物理學” 孫維新，胡景耀 譯

APPENDIX I

物理和天文常數單位換算

光速 c	299792458 m/s
重力常數 G	$6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
秒差距 pc	$3.0856775807 \times 10^{16} \text{ m}$ = 3.261633 light yr
太陽質量	$1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
太陽亮度	$3.826 \times 10^{26} \text{ W}$

名稱	$\lambda_0 [\mu\text{m}]$	$\Delta\lambda_0 [\mu\text{m}]$	$e_0 [\text{Wm}^{-2} \mu\text{m}^{-1}]$	$e_0 [\text{Jy}]$	
U	0.36	0.068	4.35×10^{-8}	1,880	紫外
B	0.44	0.098	7.20×10^{-8}	4,650	藍
V	0.55	0.089	3.92×10^{-8}	3,950	可見
R	0.70	0.22	1.76×10^{-8}	2,870	紅
I	0.90	0.24	8.3×10^{-9}	2,240	紅外
J	1.25	0.30	3.4×10^{-9}	1,770	紅外
H	1.65	0.35	7×10^{-10}	636	紅外
K	2.20	0.40	3.9×10^{-10}	629	紅外
L	3.40	0.55	8.1×10^{-11}	312	紅外
M	5.0	0.3	2.2×10^{-11}	183	紅外
N	10.2	5	1.23×10^{-12}	43	紅外
Q	21.0	8	6.8×10^{-14}	10	紅外

Table 1 標準測光系統

$$1\text{Jy} = 10^{-26} \text{ Wm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

APPENDIX II

數值計算程式

1. 計算星系質量密度(MATLAB)：

```
clear; clc; close all; tic;
D=9.1; band=4.83; %variable
KPC=3.09.*(10.^19); g0=1.2.*(10.^(-10)); G=6.67.*(10.^(-11));
PC=3.09.*(10.^16); SOLARMASS=1.99.*(10.^30); %constant

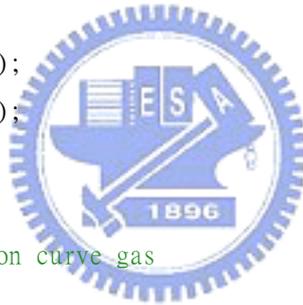
fid=fopen( '2903.txt','rt');
data1=fscanf(fid,'%f',[2 inf]);
fclose(fid);
data1=data1'; % Rotation curve total

fid=fopen( '2903gas.txt','rt');
data2=fscanf(fid,'%f',[2 inf]);
fclose(fid);
data2=data2';
data2=[0 0;data2]; %Rotation curve gas

fid=fopen( '2903L1.txt','rt');
data3=fscanf(fid,'%f',[2 inf]);
fclose(fid);
data3=data3'; %bright

fid=fopen( '2903L2.txt','rt');
data4=fscanf(fid,'%f',[2 inf]);
fclose(fid);
data4=data4'; %bright

R=20; VelocitySquare=[0];
while VelocitySquare(end)>=0
    R=R+20;
    r=0:0.05:R; r=r';
    newdata1=zeros(length(r),1);
```



```

for n=1:length(r)
    if r(n)<=data1(end,1)
        newdata1(n)=interp1(data1(:,1),data1(:,2),r(n));
    else
        newdata1(n)=data1(end,2);
    end
end
newdata2=zeros(length(r),1);
for n=1:length(r)
    if r(n)<=data2(end,1)
        newdata2(n)=interp1(data2(:,1),data2(:,2),r(n),'spline');
    else
        newdata2(n)=data2(end,2);
    end
end
end

```

```

VelocitySquare=(((1000.*newdata1(2:end)).^4)./((g0.*r(2:end).*KPC)+((1000.*newdata1
(2:end)).^4)))-((1000.*newdata2(2:end)).^2);

```

```
end
```

```
zeropoint=interp1(VelocitySquare,r(2:end),0);
```

```
n=length(r);
```

```
while r(n)>=zeropoint
```

```
    n=n-1;
```

```
end
```

```
VelocitySquare=[0 0;r(2:n) VelocitySquare(1:n-1);zeropoint 0];
```

```
dyx=diff(VelocitySquare(:,2))./diff(VelocitySquare(:,1).*KPC);
```

```
midpoint=zeros(length(VelocitySquare)-1,1);
```

```
for n=1:length(midpoint)
```

```
    midpoint(n)=(VelocitySquare(n,1)+VelocitySquare(n+1,1))./2;
```

```
end
```

```
diffVelocitySquare=[0 dyx(1);midpoint dyx;zeropoint 0];
```

```
M=0.0005:0.001:0.9995; W=1./M;
```

```
K=ellipke(M.^2);
```

```
i1=diffVelocitySquare(:,1)*M; i1=i1';
```

```
i2=diffVelocitySquare(:,1)*W; i2=i2';
```

```
M=M'; W=W'; K=K';
```

```

I1=zeros(length(M),length(diffVelocitySquare));
for n=1:length(M)
    for m=1:length(diffVelocitySquare)
        if i1(n,m)<=diffVelocitySquare(end,1)

I1(n,m)=interp1(diffVelocitySquare(:,1),diffVelocitySquare(:,2),i1(n,m));
            end
        end
    end
K1=zeros(length(diffVelocitySquare),1);
for m=1:length(diffVelocitySquare)
    K1(m)=trapz(M,K.*I1(:,m));
end

I2=zeros(length(M),length(diffVelocitySquare));
for n=1:length(M)
    for m=1:length(diffVelocitySquare)
        if i2(n,m)<=diffVelocitySquare(end,1)

I2(n,m)=interp1(diffVelocitySquare(:,1),diffVelocitySquare(:,2),i2(n,m));
            end
        end
    end
K2=zeros(length(diffVelocitySquare),1);
for m=1:length(diffVelocitySquare)
    K2(m)=trapz(M,K.*I2(:,m).*W);
end

density=(K1+K2)./(G.*(pi.^2));
n=1;
while density(n)>=0
    n=n+1;
end
density=(PC.^2).*density(1:n-1)./SOLARMASS;

totalmass=zeros(length(density)-1,1);
for n=1:length(totalmass)

```

```

totalmass(n)=trapz(diffVelocitySquare(1:n+1,1),2.*pi.*diffVelocitySquare(1:n+1,1).*
density(1:n+1));
end
totalmass=[0;totalmass];

bright=[data3;data4(:,1).*60 data4(:,2)];
radius=bright(:,1).*pi.*D.*1000./(180.*3600);
Mag=bright(:,2)-(5.*log10(D.*100000));
luminosity=(2.512.^(band-Mag))./((D.*1000000.*pi./(180.*3600)).^2);

totalluminosity=zeros(length(luminosity)-1,1);
for n=1:length(totalluminosity)

totalluminosity(n)=trapz(radius(1:n+1),2.*pi.*radius(1:n+1).*luminosity(1:n+1));
end
totalluminosity=[0;totalluminosity];

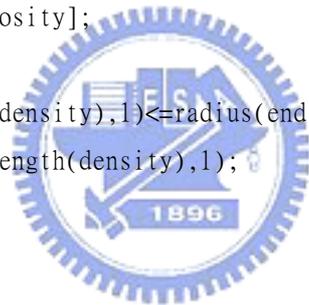
if diffVelocitySquare(length(density),1)<=radius(end)
    last=diffVelocitySquare(length(density),1);
else
    last=radius(end);
end

r=0:0.1:last; r=r';
newdensity=zeros(length(r),1);
for n=1:length(r)

newdensity(n)=interp1(diffVelocitySquare(1:length(density),1),density,r(n),'spline'
);
end
newtotalmass=zeros(length(r),1);
for n=1:length(r)

newtotalmass(n)=interp1(diffVelocitySquare(1:length(density),1),totalmass,r(n),'spl
ine');
end
newluminosity=zeros(length(r),1);

```



```

for n=1:length(r)
    newluminosity(n)=interpl(radius,luminosity,r(n),'spline');
end
newtotalluminosity=zeros(length(r),1);
for n=1:length(r)
    newtotalluminosity(n)=interpl(radius,totalluminosity,r(n),'spline');
end

ml=newdensity./newluminosity;
ML=newtotalmass(2:end)./newtotalluminosity(2:end);

figure(1);
plot(r,ml);
figure(2);
plot(r(2:end),ML);

toc;

```

2 擬合曲線程式(MATHEMATICA)

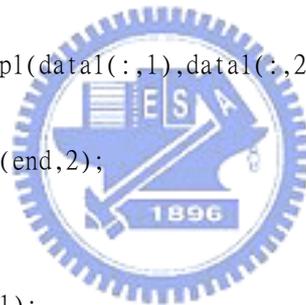
```

s=ReadList["2903_12.txt",{Number,Number}]
<<Statistics`NonlinearFit`
NonlinearFit[s,theta1*((x^2+theta2^2)^0.5-(x^2+theta3^2)^0.5)/((x^2+theta2^2)^0.5
*(x^2+theta3^2)^0.5)+theta4*((x^2+theta5^2)^0.5-(x^2+theta6^2)^0.5)/((x^2+theta5
^2)^0.5*(x^2+theta6^2)^0.5),x,{theta1,theta2,theta3,theta4,theta5,theta6}]
BestFitParameters/.NonlinearRegress[s,theta1*((x^2+theta2^2)^0.5-(x^2+theta3^2)^0
.5)/((x^2+theta2^2)^0.5*(x^2+theta3^2)^0.5)+theta4*((x^2+theta5^2)^0.5-(x^2+theta
6^2)^0.5)/((x^2+theta5^2)^0.5*(x^2+theta6^2)^0.5),x,{theta1,theta2,theta3,theta4,the
ta5,theta6},RegressionReport BestFitParameters]
f3=Block[{theta1=1303.4055606525544,theta2=-5.6503077814271405,theta3=-0.148
39929878772273,theta4=0.006716632178861634,theta5=-0.677464557717977,theta6
=-2.506588798706922*10^(-6)},Plot[theta1*((x^2+theta2^2)^0.5-(x^2+theta3^2)^0.5
)/((x^2+theta2^2)^0.5*(x^2+theta3^2)^0.5)+theta4*((x^2+theta5^2)^0.5-(x^2+theta6
^2)^0.5)/((x^2+theta5^2)^0.5*(x^2+theta6^2)^0.5),{x,0,15}]]
f4=ListPlot[s,PlotRange {0,20000},PlotJoined True,PlotStyle Hue[.6] ]
Show[f3,f4]

```

3. 擬合參數回推程式(MATLAB) :

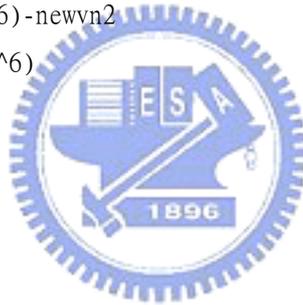
```
clear;clc;
load('2403t')
g0=1.2.*(10.^(-10));
KPC=3.09.*(10.^19);
G=6.67.*(10.^(-11));
PC=3.09.*(10.^16);
SOLARMASS=1.99.*(10.^30);
G2=G.*SOLARMASS./(PC.^3);
R=20; VelocitySquare=[0];
while VelocitySquare(end)>=0
    R=R+20;
    r=0:0.05:R; r=r';
    newdata1=zeros(length(r),1);
    for n=1:length(r)
        if r(n)<=data1(end,1)
            newdata1(n)=interp1(data1(:,1),data1(:,2),r(n));
        else
            newdata1(n)=data1(end,2);
        end
    end
    newdata2=zeros(length(r),1);
    for n=1:length(r)
        if r(n)<=data2(end,1)
            newdata2(n)=interp1(data2(:,1),data2(:,2),r(n),'spline');
        else
            newdata2(n)=data2(end,2);
        end
    end
    VelocitySquare=(((1000.*newdata1(2:end)).^4)./((g0.*r(2:end).*KPC)+((1000.*newdata1(2:end)).^2)))-((1000.*newdata2(2:end)).^2);
end
zeropoint=interp1(VelocitySquare,r(2:end),0);
n=length(r);
while r(n)>=zeropoint
    n=n-1;
end
```



```

VelocitySquare=[0 0;r(2:n) VelocitySquare(1:n-1);zeropoint 0];
vn2=((1000.*newdata1(2:end)).^4)./((g0.*r(2:end).*KPC)+((1000.*newdata1(2:end)).^2
));
line1=sqrt(vn2)./(10.^3);
vgas=((1000.*newdata2(2:end)).^2);
line2=sqrt(vgas)./(10.^3);
newdatav=(1000.*newdata1(2:end)).^2;
line3=sqrt(newdatav)./(10.^3);
p=VelocitySquare(:,1)
theta1=0; theta2=28153.2; theta3=0; theta4=275; theta5=7; theta6=0.1121;
theta7=theta1.*2.*pi.*G2;theta8=theta4.*2.*pi.*G2
a2=theta2.*KPC; a3=theta3.*KPC; a5=theta5.*KPC; a6=theta6.*KPC
vn3=(theta7.*((theta2./((p.^2+theta2.^2).^0.5)))-(theta3./((p.^2+theta3.^2).^0.5)))+
theta8.*((theta5./((p.^2+theta5.^2).^0.5)))-(theta6./((p.^2+theta6.^2).^0.5)))
newvn2=vn3.*(PC.^2).*1000./(10.^6)
line4=sqrt(VelocitySquare(:,2))./(10.^3)
dv=VelocitySquare(:,2)./(10.^6)-newvn2
vsq=VelocitySquare(:,2)./(10.^6)
err=load('err24.txt');
range=load('wangerr24.txt')
xx=err(:,1);
yy=err(:,2);
mm=range(:,2);
nn=range(:,1);
figure(1)
plot(r(2:end),line1,'k','LineWidth',3);
hold on;
plot(VelocitySquare(:,1),line4,'k--','LineWidth',2);
hold on
errorbar(xx,yy,mm,nn);
hold on
plot(r(2:end),line3);
hold on
plot(r(2:end),line2,'k--')
axis([0 25 0 inf])
xlabel('kpc')
ylabel('km/s')
legend('VN','VN without gas',' ','V','Vgas',1)

```



```

title('NGC2403');
print -depsec 2403Velocity.eps;
figure(4);
plot(p,newvn2,'k--','LineWidth',2);
hold on
plot(p,vsq,'k','LineWidth',3);
hold on
plot(p,dv,'k');
legend('VN2f','VN2','delta VN2');
axis([0 25 -inf inf]);
xlabel('kpc');
ylabel('km^2/s^2');
print -depsec 2403Vn2.eps;
load dif24
figure(2);
plot(diffVelocitySquare(1:last,1),totaldensity(1:last),'b',diffVelocitySquare(1:las
t,1),fittedensity(1:last),'r',diffVelocitySquare(1:last,1),density(1:last),'k');
legend('mu','mu_f')
axis([0 10 -inf inf])
xlabel('kpc')
ylabel('solarmass/(pc)^2');
print -depsec 2403mu.eps;
figure(3)
plot(r,ml,'k','LineWidth',3);
xlabel('kpc');
ylabel('solarmass/solarluminosity');
axis([0 8 0 inf]);
print -depsec 2403ml.eps;

```



