

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

大氣微中子之振盪與 θ_{23} 簡併性之消除

The lifting of θ_{23} degeneracy in atmospheric neutrino oscillations.

研究生：張鑑源

指導教授：林貴林 教授

中華民國九十五年六月

大氣微中子之振盪與 θ_{23} 簡併性之消除

The lifting of θ_{23} degeneracy in atmospheric neutrino oscillations.

研 究 生：張鑑源

Student : Jian-Yuan Chang

指 導 教 授：林貴林

Advisor : Dr. Guey-Lin Lin

國立交通大學

物理研究所

碩士論文



A Thesis

Submitted to Institute of Physics

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Institute of Physics

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

大氣微中子之振盪與 θ_{23} 簡併性之消除

學生：張鑑源

指導教授：林貴林

國立交通大學物理研究所碩士班

摘 要

由超級神岡（Super-K）實驗與索德柏立微中子觀測站（SNO）實驗的結果提供了重要的證據，可以證實微中子其實是具有質量的，而且不同類型的微中子之間會相互轉換。然而目前仍然存在著許多微中子的問題，等待著我們持續深入研究，我們知道在微中子混合矩陣中具有許多的微中子振盪參數，但是由於部分的振盪參數具有簡併性，因此讓我們很困難獲得單一數值的振盪參數，在此篇碩士論文中，我們會計算出穿透地球的大氣微中子流量，然而 θ_{23} 是其中的一個振盪參數，我們的研究目標就是探討在大氣微中子振盪中，不同的微中子類型是否分別具有 θ_{23} 簡併性之消除，而我們發現 e 微中子會發生 θ_{23} 簡併性之消除，但是 μ 微中子與 τ 微中子則不會發生。

The lifting of θ_{23} degeneracy
in atmospheric neutrino oscillations.

Student : Jian-Yuan Chang

Advisor : Dr. Guey-Lin Lin

Institute of Physics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The Super Kamiokande (Super-K) experiment and the Sudbury Neutrino Observatory (SNO) experiment have provided important evidences for neutrino oscillation and the existence of neutrino mass. It is well known that there are several neutrino oscillation parameters in the lepton mixing matrix. However, it is difficult to determine uniquely the values of the oscillation parameters due to oscillation parameter degeneracies. To achieve more understanding on the lifting of θ_{23} degeneracy in atmospheric neutrino oscillations, the atmospheric neutrino fluxes for neutrinos traversing the earth are discussed in the thesis. We found that the lifting of θ_{23} degeneracy only happens to e neutrino, but does not happen to μ neutrino and τ neutrino.

誌 謝

很高興我順利完成了碩士論文，在研究所碩士班的兩年求學階段中，我首先必須感謝的是我的指導老師-林貴林教授，因為老師總是很細心教導我，在研究工作中給與了我許多的幫助，讓我的研究進度可以很順利，所以我很感謝老師的教導，我其次必須感謝的是劉宗哲學長，因為學長也給與了我許多的教導，讓我可以解決研究工作中所遭遇的問題，我最後必須感謝的是我的外公，外婆與媽媽，因為我很感謝他們的養育恩情，讓我可以順利獲得碩士學位。



章 節 目 錄

中文摘要		i
英文摘要		ii
誌謝		iii
章節目錄		iv
圖表目錄		v
第一章	微中子的介紹	1
第二章	穿透地球的微中子振盪理論	3
2.1	真空中的微中子振盪	3
2.2	物質中的微中子振盪	6
2.3	穿透地球的微中子振盪	8
2.4	微中子穿透地球的振盪機率	11
第三章	穿透地球的微中子流量分析	16
3.1	微中子穿透地球的振盪圖形	16
3.2	穿透地球的微中子流量	20
3.3	穿透地球的微中子平均流量	25
3.4	微中子平均流量的等高曲線	30
3.5	ν_e 微中子與 $\bar{\nu}_e$ 反微中子的共同平均流量的等高曲線	38
第四章	微中子流量分析的結論	42
參考文獻		44

圖 表 目 錄

圖一	微中子只穿透地幔的示意圖	8
圖二	微中子穿透地幔與地核的示意圖	9
圖三	只穿透地幔的 e 微中子振盪機率圖形	16
圖四	只穿透地幔的 μ 微中子振盪機率圖形	16
圖五	只穿透地幔的 τ 微中子振盪機率圖形	17
圖六	穿透地幔與地核的 e 微中子振盪機率圖形	18
圖七	穿透地幔與地核的 μ 微中子振盪機率圖形	18
圖八	穿透地幔與地核的 τ 微中子振盪機率圖形	19
圖九	只穿透地幔的 e 微中子流量圖形	21
圖十	只穿透地幔的 μ 微中子流量圖形	21
圖十一	只穿透地幔的 τ 微中子流量圖形	22
圖十二	穿透地幔與地核的 e 微中子流量圖形	23
圖十三	穿透地幔與地核的 μ 微中子流量圖形	23
圖十四	穿透地幔與地核的 τ 微中子流量圖形	24
圖十五	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.4$ 的 e 微中子平均流量圖形	26
圖十六	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.4$ 的 μ 微中子平均流量圖形	26
圖十七	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.4$ 的 τ 微中子平均流量圖形	26
圖十八	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 e 微中子平均流量圖形	27
圖十九	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 μ 微中子平均流量圖形	27
圖二十	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 τ 微中子平均流量圖形	27
圖二十一	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 e 微中子平均流量比較圖形	28
圖二十二	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 μ 微中子平均流量比較圖形	29
圖二十三	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 的 τ 微中子平均流量比較圖形	29
圖二十四	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形	32
圖二十五	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形	32
圖二十六	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形	33

圖二十七	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形	33
圖二十八	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形	34
圖二十九	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形	34
圖三十	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形	35
圖三十一	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形	35
圖三十二	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形	36
圖三十三	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形	36
圖三十四	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形	37
圖三十五	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形	37
圖三十六	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形	39
圖三十七	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形	39
圖三十八	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形	40
圖三十九	$\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形	40
圖四十	只穿透地幔的 e 微中子與 e 反微中子的流量圖形	41
圖四十一	穿透地幔與地核的 e 微中子與 e 反微中子的流量圖形	41

第一章 微中子的介紹

十九世紀初期，梅特納（L. Meitner）在實驗中發現了 β 射線中的電子能譜是不具有固定能量的，讓物理學界開始研究放射線物質在 β 衰變中的能量守恆問題。鮑立（W. Pauli）為了解釋 β 衰變中的電子能譜為何是連續的，而假設在 β 衰變中會釋放出一種自旋數為二分之一，而且不具有質量的中性粒子，雖然鮑立在當時所提出的想法並不是完全正確的，但是卻開啓了微中子（neutrino）的研究。然而微中子的偵測是很困難的，直到二十幾年之後，科文（C. L. Cowan）及芮內斯（F. Reines），利用原子反應爐所放射出的微中子而偵測到微中子與物質的碰撞，才證實了微中子的存在。物理學界為了更加瞭解微中子，又進行了許多的研究，巴寇（J. N. Bahcall）首先建構了太陽標準模型，可以預測太陽製造出的微中子數目與微中子能譜，但是戴維斯（R. Davis）偵測到的微中子數目卻只是太陽標準模型預測的三分之一，這就是太陽微中子問題（solar neutrino problem）。

直到十九世紀末期，由小柴昌俊（M. Koshiba）所領導的日本「超級神岡」（Super Kamiokande，簡稱 Super-K）微中子觀測站，利用微中子與純水的碰撞以測量微中子，此實驗可以偵測高能量的太陽微中子，也可以觀測大氣微中子的性質，而加拿大「索德柏立微中子觀測站」（Sudbury Neutrino Observatory，簡稱 SNO），則利用全部微中子與重水的碰撞以測量微中子，此實驗可以驗證其它微中子振盪實驗的結果，也可以驗證太陽標準模型的準確性。兩項微中子實驗都是藉由光電倍增管（photomultiplier）偵測反應中產生的電子在水中釋放出的契忍可夫輻射（Cerenkov radiation），而且兩項微中子實驗的偵測器則都是放置在地底下深度

大約二公里的礦坑中，這是爲了減低宇宙射線干擾微中子訊號。由 SNO 的實驗數據〔1〕配合 Super-K 的實驗結果〔2〕可以推論出太陽微中子在產生當時的總數目，而且居然與太陽標準模型的理論預期是吻合的，所以讓困擾著物理學家三十幾年的太陽微中子問題〔3〕終於獲得解答。

我們將許多類似 β 衰變的物理程序統稱爲弱作用（weak interaction），而且我們已經發現 μ 介子與 τ 介子是性質與電子完全相似的基本粒子，然而在弱作用反應的過程中，伴隨著電子出現的稱爲 e 微中子（electron neutrino），伴隨著 μ 介子出現的稱爲 μ 微中子（muon neutrino），伴隨著 τ 介子出現的稱爲 τ 微中子（tau neutrino），這是我們目前的物理實驗中所發現的三種微中子類型〔4〕。由 SNO 的實驗數據配合 Super-K 的實驗結果也可以證實微中子其實是具有質量的，而且不同類型的微中子之間會相互轉換，所以部分由太陽內部因爲核融合反應而發射出的 e 微中子在傳播到地球的路途中會轉變成 μ 微中子或 τ 微中子，因此實驗上偵測到的 e 微中子數目當然會少於太陽標準模型的預期數目，而不同類型的微中子之間會相互轉換的現象稱爲微中子振盪（neutrino oscillation）。

雖然目前已經證實微中子是具有質量與振盪現象的，但是仍然存在著許多關於微中子問題，等待著我們持續深入研究。在此篇碩士論文中，我們會推導出微中子振盪機率，然而在微中子振盪機率中具有許多的參數，而且必須藉由微中子的實驗結果以選取出合理的參數範圍， θ_{23} 即是其中的一個參數，我們的研究目標就是探討不同的微中子類型是否分別具有 θ_{23} 簡併性之消除，而詳細的討論會在之後的論文內容中。

第二章 穿透地球的微中子振盪理論

2.1 真空中的微中子振盪

我們首先考慮微中子在真空中的情形，由於微中子的產生與偵測都是屬於弱作用反應，但是微中子的傳播則是具有質量的粒子運動，因此我們公認微中子具有兩種本徵態（eigenstate），分別為弱作用本徵態（flavor eigenstate）與質量本徵態（mass eigenstate），我們可以先定義

$$\text{微中子的弱作用本徵態爲 } \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2-1)$$

其中， ν_e 為 e 微中子的弱作用本徵態， ν_μ 為 μ 微中子的弱作用本徵態， ν_τ 為 τ 微中子的弱作用本徵態。

然而微中子無法同時存在於不同的本徵態上，我們因此可以直接定義

$$\begin{aligned} \text{e 微中子的弱作用本徵態爲 } & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mu \text{ 微中子的弱作用本徵態爲 } & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tau \text{ 微中子的弱作用本徵態爲 } & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-2)$$

得到了（2-1）式的定義之後，我們可以再定義

$$\text{微中子的質量本徵態爲 } \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2-3)$$

其中， ν_1 為 e 微中子的質量本徵態， ν_2 為 μ 微中子的質量本徵態， ν_3 為 τ 微中子的質量本徵態。

由於弱作用本徵態與質量本徵態之間具有歸一化轉換（unitary transformation）的關係，亦即兩種本徵態之間的歸一化性質在轉換前後不會受到影響，因此我們必須定義出連接兩種本徵態的轉換矩陣 U ，此轉換矩陣也稱為是微中子的 PMNS-混合矩陣（PMNS neutrino mixing matrix）〔5〕，我們引用了論文資料而定義

$$\begin{aligned} \text{微中子的PMNS-混合矩陣 } U &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中， $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ 與 $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ 為通用符號，而 δ 為 Dirac CP-violation 的相位因子〔6、7、8〕，但是我們目前並不探討其效應，所以我們直接設定相位因子 $\delta = 0$ ，因此微中子的 PMNS-混合矩陣 U 可以簡化分解為

$$\begin{aligned} U &= U_{23}U_{13}U_{12}, \text{ 而且 } U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix}, \\ U_{13} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix}, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中，我們定義 U_{ij} 為微中子的本徵態元素 ν_i 與本徵態元素 ν_j 之間的混合矩陣

(mixing matrix)，並且定義 θ_{ij} 為微中子的本徵態元素 ν_i 與本徵態元素 ν_j 之間的混合角 (mixing angle)。

因此我們得到弱作用本徵態與質量本徵態之間的歸一化轉換關係為

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = U_{23}U_{13}U_{12} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2-6)$$

其中，微中子的 PMNS-混合矩陣 U 必須滿足 $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ ，

而且其簡化分解之後的混合矩陣 U_{ij} 也必須滿足 $U_{ij}U_{ij}^\dagger = U_{ij}^\dagger U_{ij} = 1$ 。

由於微中子的質量很微小，而且其速度趨近於光速，所以我們的理論必須建構在相對論 (relativity) 的基礎之上，並且根據愛因斯坦 (Einstein) 的質能轉換公式，我們得到了能量 E ，動量 P 與質量 m 在高能物理慣用單位中的簡化關係式為

$$E = \sqrt{P^2 + m^2} = P \times \sqrt{1 + \frac{m^2}{P^2}} \approx P + \frac{m^2}{2P}, \quad (2-7)$$

而且光速 $c=1$ ，能量 $E \approx$ 動量 P ，距離 $r \approx$ 時間 t 。

然而微中子傳播的時候具有量子力學的效應，因此我們可以將 (2-7) 式轉換為算符 (operator) 的運算式，並且作用在質量本徵態，則我們可以得到

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & E + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2-8)$$

此即是微中子在真空中的薛丁格爾方程式 (Schrodinger equation)。

我們緊接著先直接求解出 (2-8) 式，再提出矩陣中的相同因子而得到

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_r = e^{-i(E + \frac{m_1^2}{2E})r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{m_2^2 - m_1^2}{2E})r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\frac{m_3^2 - m_1^2}{2E})r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_0, \quad (2-9)$$

由於我們的目標是計算微中子的振盪機率，然而在計算的過程中，絕對值的平方

會消除共同相位，亦即 $\left| e^{-i(E + \frac{m_1^2}{2E})r} \right|^2 = 1$ ，所以在之後的理論推導中，我們都會先消除矩陣中的共同因子再進行計算，如此的方法並不會影響振盪機率的結果。因此

在 (2-8) 式中，我們可以先消除共同因子 $E + \frac{m_1^2}{2E}$ 的單位矩陣，並且定義

$\Delta_{21} = m_2^2 - m_1^2$ ， $\Delta_{31} = m_3^2 - m_1^2$ ，則微中子在真空中的薛丁格爾方程式將簡化為

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2-10)$$

最後再將質量本徵態轉換為弱作用本徵態，亦即 (2-10) 式可以表示為

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (2-11)$$

我們引用了論文的數據 [9、10]，並且整理出合理的參數範圍，亦即

$0.28 < \tan^2 \theta_{12} < 0.58$ ， $0 < \sin^2 2\theta_{13} < 0.10$ ， $0.92 < \sin^2 2\theta_{23} < 1$ ，而且

$7.40 \times 10^{-5} (eV)^2 < \Delta_{21} < 9.20 \times 10^{-5} (eV)^2$ ， $1.90 \times 10^{-3} (eV)^2 < \Delta_{31} < 3.00 \times 10^{-3} (eV)^2$ 。

2.2 物質中的微中子振盪

當微中子穿透物質的時候，物質會對於微中子產生弱作用力（weak interaction force），這是由於物質中的電子，質子與中子皆會對於微中子產生了散射，此種散射不會改變微中子的能量與動量，但是卻會改變不同的微中子類型間的混合情形。我們知道弱作用力的交換介子（exchanging mediator）稱為向量玻色子（intermediate vector boson）〔11〕，可以區分為三種，分別是攜帶正電荷的 W^+ ，攜帶負電荷的 W^- ，與不攜帶電荷的 Z^0 ，也因此而產生了不同的散射結果。電子，質子與中子皆會對於 e 微中子， μ 微中子與 τ 微中子產生了以 Z^0 為交換介子的中性弱作用力（neutral current interaction），較為獨特的是電子與 e 微中子會產生以 W^+ 與 W^- 為交換介子的電性弱作用力（charge current interaction）。我們得到了一個重要的結論，當我們研究微中子穿透物質的時候，我們必須考慮弱作用力位能〔12、13〕，所以我們引用了論文資料而定義

$$\text{中性弱作用力所貢獻的位能爲 } V_n^m = \frac{A_n^m}{2E} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F \frac{Y_n^m}{m_n} \rho^m ,$$

$$\text{電性弱作用力所貢獻的位能爲 } V_e^m = \frac{A_e^m}{2E} = \sqrt{2} G_F \frac{Y_e^m}{m_n} \rho^m , \quad (2-12)$$

其中， A_n^m 與 A_e^m 是位能參數（potential parameter）〔14、15〕，

G_F 是費米常數（Fermi constant）， m_n 是核子質量， ρ^m 是質量密度，

Y_n^m 是中子數， Y_e^m 是電子數。

我們首先由（2-11）式開始，因為混合矩陣 U_{12} 的振盪效應較為不明顯〔16〕，所以我們選取 $\Delta_{21} \rightarrow 0$ ，亦即忽略混合矩陣 U_{12} 的影響，則（2-11）式可以表示為

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{23} U_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} (U_{13})^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2-13)$$

我們緊接著將弱作用力位能加入（2-13）式中，因此我們得到了微中子在物質中的薛丁格爾方程式為

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{23} \left[U_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} (U_{13})^\dagger + \begin{pmatrix} A_e^m + A_n^m & 0 & 0 \\ 0 & A_n^m & 0 \\ 0 & 0 & A_n^m \end{pmatrix} \right] (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2-14)$$

最後再消除共同因子 A_n^m 的單位矩陣，亦即（2-14）式可以簡化為

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{23} \left[U_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} (U_{13})^\dagger + \begin{pmatrix} A_e^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (2-15)$$

爲了順利求解出微中子在物質中的薛丁格爾方程式，我們必須先將（2-15）式中的部份矩陣進行對角化（diagonalize），所以我們定義了許多的參數，分別爲

$$(M_{13})^2 = \frac{\Delta_{31} + A_e^m + \Delta_{13}^m}{2}, \quad (m_{13})^2 = \frac{\Delta_{31} + A_e^m - \Delta_{13}^m}{2},$$

$$\Delta_{13}^m = \sqrt{(\Delta_{31} \sin 2\theta_{13})^2 + (A_e^m - \Delta_{31} \cos 2\theta_{13})^2} = (M_{13})^2 - (m_{13})^2,$$

$$\sin 2\theta_{13}^m = \frac{\Delta_{31} \sin 2\theta_{13}}{\Delta_{13}^m}, \quad \cos 2\theta_{13}^m = \frac{\Delta_{31} \cos 2\theta_{13} - A_e^m}{\Delta_{13}^m},$$

$$U_{13}^m = \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^m & 0 & \sin \theta_{13}^m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^m & 0 & \cos \theta_{13}^m \end{pmatrix}, \quad (2-16)$$

運用（2-16）式的參數，則我們可以得到

$$\left[U_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} (U_{13})^\dagger + \begin{pmatrix} A_e^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = U_{13}^m \begin{pmatrix} (m_{13})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_{13})^2 \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger, \quad (2-17)$$

因此微中子在物質中的薛丁格爾方程式經由對角化之後的形式爲

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} (m_{13})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_{13})^2 \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2-18)$$

我們可以再消除 $(m_{13})^2$ 的單位矩陣，讓（2-18）式表示爲

$$i \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_{13})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{13}^m \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2-19)$$

如此，（2-19）式將可以順利求解出，我們也終於得到了微中子在物質中的薛丁格爾方程式的一般形式解，亦即

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_r = U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i \frac{(m_{13})^2}{2E} r} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} r} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_0. \quad (2-20)$$

2.3 穿透地球的微中子振盪

我們之後將討論微中子穿透地球（Earth）的情形，雖然地球的構造可以區分為地殼（Earth crust），地幔（Earth mantle）與地核（Earth core），但是地殼的相對厚度是較為微薄的，所以我們在之後的計算中會忽略地殼的影響，然而在微中子的實驗中，我們統稱如此長距離的實驗為長基準線實驗（long baseline experiment）〔17、18〕。由於我們只考慮地幔與地核的影響，為了分辨地幔與地核的參數，我們設定上標 m 代表地幔的參數，上標 c 則代表地核的參數，而且我們可以由 Stacey 的地球模型中〔19〕選取地幔區的平均質量密度 $\rho^m = 5g/cm^3$ ，與地核區的平均質量密度 $\rho^c = 12g/cm^3$ ，我們也設定地球半徑 $R = 6370Km$ ，與地核半徑 $R_c = 3480Km$ ，則我們將可以開始討論微中子穿透地球的情形。

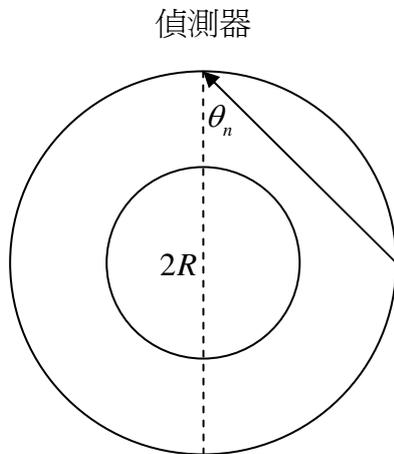
當微中子只穿透地幔的時候，亦即微中子只穿透單層的物质密度，我們可以定義 L 是微中子只穿透地幔的路徑長度， θ_n 是微中子的穿透路徑與偵測器至地心連線所形成的角度，以及 $\theta = \pi - \theta_n$ ，則我們由圖一可以知道

$$L = 2R \cos \theta_n, \quad (2-21)$$

我們再將（2-21）式代入（2-20）式中，則我們可以得到微中子只穿透地幔的薛丁格爾方程式的一般形式解為

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L = U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i \frac{(m_{13})^2 L}{2E}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i \frac{\Delta_{13}^m L}{2E}} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_0, \quad (2-22)$$

我們之後將會運用（2-22）式計算出微中子只穿透地幔的振盪機率。



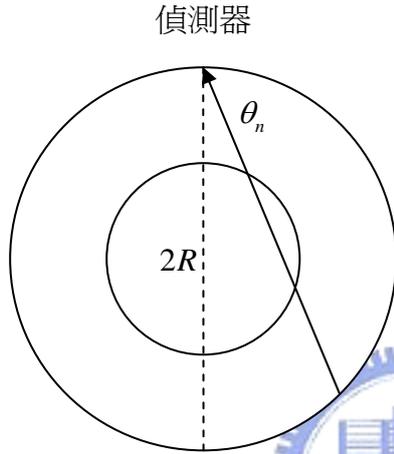
圖一 微中子只穿透地幔的示意圖

當微中子穿透地幔與地核的時候，亦即微中子穿透雙層的物质密度，我們可以再定義 L^m 是微中子穿透地幔的路徑長度， L^c 是微中子穿透地核的路徑長度， L 是微中子穿透地幔與地核的總路徑長度，則我們由圖二可以知道

$$L^m = R \cos \theta_n - \sqrt{(R_c)^2 - (R \sin \theta_n)^2} ,$$

$$L^c = 2\sqrt{(R_c)^2 - (R \sin \theta_n)^2} ,$$

$$L = 2L^m + L^c , \quad (2-23)$$



圖二 微中子穿透地幔與地核的示意圖

在微中子的穿透路徑中，微中子會先穿透地幔，再穿透地核，最後又穿透地幔，所以我們可以將(2-20)式依照穿透順序進行連續性的運算，亦即

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L^m} = U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E} L^m} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E} L^m} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_0 , \quad (2-24)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L^m + L^c} = U_{23} U_{13}^c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^c)^2}{2E} L^c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{13}^c}{2E} L^c} \end{pmatrix} (U_{13}^c)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L^m} , \quad (2-25)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{2L^m + L^c} = U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E} L^m} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E} L^m} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L^m + L^c} , \quad (2-26)$$

緊接著將 (2-24) 式，(2-25) 式與 (2-26) 式整理簡化之後，我們將可以得到

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L'} = U_{23} (U_e^m U_e^c U_e^m) (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_0, \quad (2-27)$$

其中，我們定義了地幔演化算符 U_e^m 與地核演化算符 U_e^c ，而且

$$U_e^m = U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^m)^2}{2E}L^m} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L^m} \end{pmatrix} (U_{13}^m)^\dagger, \quad U_e^c = U_{13}^c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{(m_{13}^c)^2}{2E}L^c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\Delta_{13}^c}{2E}L^c} \end{pmatrix} (U_{13}^c)^\dagger, \quad (2-28)$$

我們可以再定義總演化算符 (evolution operator) $U_e^t = U_e^m U_e^c U_e^m$ [20]， (2-29)

爲了對於總演化算符進行對角化的運算，我們定義了許多的參數，分別爲

$$\alpha = \cos(2\varphi^m) \cos(\varphi^c) - \cos(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m) \sin(2\varphi^m) \sin(\varphi^c),$$

$$\beta = -\cos(2\theta_{13}^m) [\sin(\varphi^c) \cos(2\varphi^m) \cos(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m) + \cos(\varphi^c) \sin(2\varphi^m)]$$

$$+ \sin(2\theta_{13}^m) \sin(\varphi^c) \sin(2\theta_{13}^c - 2\theta_{13}^m),$$

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2,$$

$$\delta = \frac{(M_{13}^m)^2 + (m_{13}^m)^2}{4E} \times 2L^m + \frac{(M_{13}^c)^2 + (m_{13}^c)^2}{4E} \times L^c,$$

$$\varphi^m = \frac{(M_{13}^m)^2 - (m_{13}^m)^2}{4E} \times L^m, \quad \varphi^c = \frac{(M_{13}^c)^2 - (m_{13}^c)^2}{4E} \times L^c, \quad (2-30)$$

則我們將可以得到總演化算符經由對角化之後的形式爲

$$U_e^t = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}, \quad (2-31)$$

因此我們得到了微中子穿透地幔與地核的薛丁格爾方程式的一般形式解爲

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L'} = U_{23} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 & -i\gamma \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_0, \quad (2-32)$$

我們之後將會運用 (2-32) 式計算出微中子穿透地幔與地核的振盪機率。

2.4 微中子穿透地球的振盪機率

我們首先將運用 (2-22) 式計算出微中子只穿透地幔的振盪機率。

e 微中子只穿透地幔且振盪到 e 微中子的機率 P_{ee}

$$\begin{aligned}
 &= \left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| (\cos \theta_{13}^m)^2 + (\sin \theta_{13}^m)^2 e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \right|^2 = 1 - (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2, \quad (2-33)
 \end{aligned}$$

e 微中子只穿透地幔且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{e\mu}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 1 \ 0) U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| -\sin \theta_{23} \sin \theta_{13}^m \cos \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L}) \right|^2 = (\sin \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2, \quad (2-34)
 \end{aligned}$$

e 微中子只穿透地幔且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{e\tau}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 0 \ 1) U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| -\cos \theta_{23} \sin \theta_{13}^m \cos \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L}) \right|^2 = (\cos \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2, \quad (2-35)
 \end{aligned}$$

μ 微中子只穿透地幔且振盪到 e 微中子的機率 $P_{\mu e}$

$$\left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} U_{13}^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| -\sin \theta_{23} \sin \theta_{13}^m \cos \theta_{13}^m (1 - e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L}) \right|^2 = (\sin \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2, \quad (2-36)$$

μ 微中子只穿透地幔且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{\mu\mu}$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{(m_{13})^2}{2E} L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| (\sin \theta_{23})^2 ((\sin \theta_{13}^m)^2 + (\cos \theta_{13}^m)^2 e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L}) + (\cos \theta_{23})^2 e^{i \frac{(m_{13})^2}{2E} L} \right|^2$$

$$= 1 - (\sin \theta_{23})^4 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2 - (\sin 2\theta_{23})^2 (\sin \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(m_{13})^2}{4E} L \right)^2$$

$$- (\sin 2\theta_{23})^2 (\cos \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(M_{13})^2}{4E} L \right)^2, \quad (2-37)$$

μ 微中子只穿透地幔且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{\mu\tau}$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{(m_{13})^2}{2E} L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} ((\sin \theta_{13}^m)^2 + (\cos \theta_{13}^m)^2 e^{-i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L} - e^{i \frac{(m_{13})^2}{2E} L}) \right|^2$$

$$= -(\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E} L \right)^2 + (\sin 2\theta_{23})^2 (\sin \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(m_{13})^2}{4E} L \right)^2$$

$$+ (\sin 2\theta_{23})^2 (\cos \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(M_{13})^2}{4E} L \right)^2, \quad (2-38)$$

τ 微中子只穿透地幔且振盪到 e 微中子的機率 $P_{\tau e}$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{(m_{13})^2}{2E} L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i \frac{\Delta_{13}^m}{2E} L} \end{pmatrix} (U_{23} U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| -\cos \theta_{23} \sin \theta_{13}^m \cos \theta_{13}^m (1 - e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L}) \right|^2 = (\cos \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E}L\right)^2, \quad (2-39)$$

τ 微中子只穿透地幔且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{\tau\mu}$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23}U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} ((\sin \theta_{13}^m)^2 + (\cos \theta_{13}^m)^2 e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} - e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L}) \right|^2$$

$$= -(\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E}L\right)^2 + (\sin 2\theta_{23})^2 (\sin \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(m_{13})^2}{4E}L\right)^2$$

$$+ (\sin 2\theta_{23})^2 (\cos \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(M_{13})^2}{4E}L\right)^2, \quad (2-40)$$

τ 微中子只穿透地幔且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{\tau\tau}$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L} \end{pmatrix} (U_{23}U_{13}^m)^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| (\cos \theta_{23})^2 ((\sin \theta_{13}^m)^2 + (\cos \theta_{13}^m)^2 e^{-i\frac{\Delta_{13}^m}{2E}L}) + (\sin \theta_{23})^2 e^{i\frac{(m_{13})^2}{2E}L} \right|^2$$

$$= 1 - (\cos \theta_{23})^4 (\sin 2\theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{\Delta_{13}^m}{4E}L\right)^2 - (\sin 2\theta_{23})^2 (\sin \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(m_{13})^2}{4E}L\right)^2$$

$$- (\sin 2\theta_{23})^2 (\cos \theta_{13}^m)^2 \left(\sin \frac{(M_{13})^2}{4E}L\right)^2, \quad (2-41)$$

由 (2-33) 式至 (2-41) 式，我們可以得知

$$P_{ee} + P_{e\mu} + P_{e\tau} = 1, \quad P_{\mu e} + P_{\mu\mu} + P_{\mu\tau} = 1, \quad P_{\tau e} + P_{\tau\mu} + P_{\tau\tau} = 1, \quad (2-42)$$

$$\text{而且 } P_{e\mu} = P_{\mu e}, \quad P_{e\tau} = P_{\tau e}, \quad P_{\mu\tau} = P_{\tau\mu}, \quad (2-43)$$

(2-42) 式與 (2-43) 式都是很基本的機率性質。

我們緊接著將運用（2-32）式計算出微中子穿透地幔與地核的振盪機率。

e 微中子穿透地幔與地核且振盪到 e 微中子的機率 P_{ee}

$$\begin{aligned}
 &= \left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |\alpha + i\beta|^2 = \alpha^2 + \beta^2, \tag{2-44}
 \end{aligned}$$

e 微中子穿透地幔與地核且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{e\mu}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 1 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |i\gamma \sin \theta_{23}|^2 = (\sin \theta_{23})^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2), \tag{2-45}
 \end{aligned}$$

e 微中子穿透地幔與地核且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{e\tau}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 0 \ 1) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |i\gamma \cos \theta_{23}|^2 = (\cos \theta_{23})^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2), \tag{2-46}
 \end{aligned}$$

μ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 e 微中子的機率 $P_{\mu e}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |i\gamma \sin \theta_{23}|^2 = (\sin \theta_{23})^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2), \tag{2-47}
 \end{aligned}$$

μ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{\mu\mu}$

$$\begin{aligned}
 &= \left| (0 \ 1 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= |(\cos \theta_{23})^2 e^{-i\delta} + (\alpha - i\beta)(\sin \theta_{23})^2|^2
 \end{aligned}$$

$$= (\sin \theta_{23})^4 (\alpha^2 + \beta^2) + (\cos \theta_{23})^4 + 2(\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 (\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta), \quad (2-48)$$

μ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{\mu\tau}$

$$\begin{aligned} &= \left| (0 \ 0 \ 1) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{23} e^{-i\delta} + (\alpha - i\beta) \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} \right|^2 \\ &= (\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 [\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2(\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta)], \end{aligned} \quad (2-49)$$

τ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 e 微中子的機率 $P_{\tau e}$

$$\begin{aligned} &= \left| (1 \ 0 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= |i\gamma \cos \theta_{23}|^2 = (\cos \theta_{23})^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2), \end{aligned} \quad (2-50)$$

τ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 μ 微中子的機率 $P_{\tau\mu}$

$$\begin{aligned} &= \left| (0 \ 1 \ 0) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| -\sin \theta_{23} \cos \theta_{23} e^{-i\delta} + (\alpha - i\beta) \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} \right|^2 \\ &= (\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 [\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2(\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta)], \end{aligned} \quad (2-51)$$

τ 微中子穿透地幔與地核且振盪到 τ 微中子的機率 $P_{\tau\tau}$

$$\begin{aligned} &= \left| (0 \ 0 \ 1) U_{23} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 & i\gamma \\ 0 & e^{-i\delta} & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} (U_{23})^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| (\sin \theta_{23})^2 e^{-i\delta} + (\alpha - i\beta) (\cos \theta_{23})^2 \right|^2 \\ &= (\cos \theta_{23})^4 (\alpha^2 + \beta^2) + (\sin \theta_{23})^4 + 2(\sin \theta_{23})^2 (\cos \theta_{23})^2 (\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta), \end{aligned} \quad (2-52)$$

第三章 穿透地球的微中子流量分析

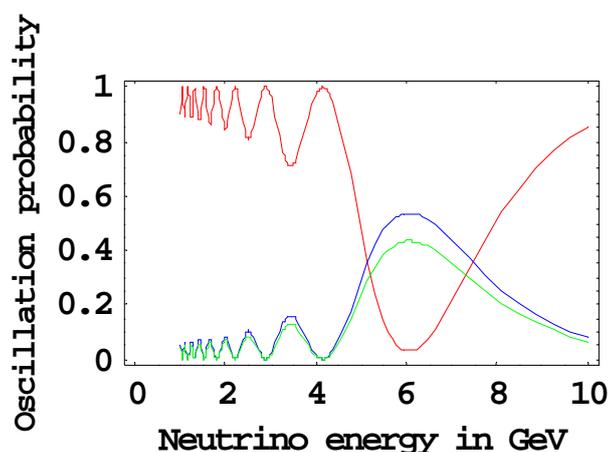
3.1 微中子穿透地球的振盪圖形

爲了繪出只穿透地幔的微中子振盪機率與能量的關係，我們將 (2-33) 式至 (2-41) 式中的參數採用以下的預設值：

$$\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2, \quad \cos \theta = -0.8, \quad L = 10193.6 \text{ Km},$$

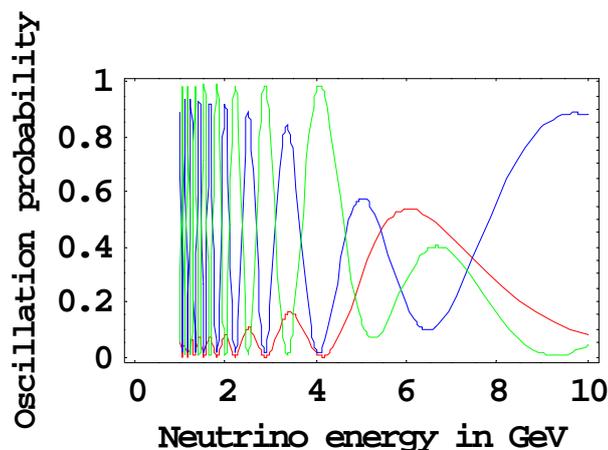
$$(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.076, \quad (\cos 2\theta_{23})^2 = 0.011,$$

如此我們可以順利將圖形繪出。



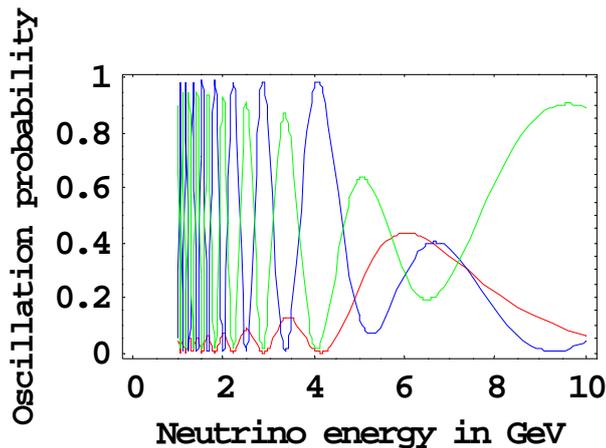
圖三 只穿透地幔的 e 微中子振盪機率圖形

P_{ee} - 紅色曲線， $P_{e\mu}$ - 藍色曲線， $P_{e\tau}$ - 綠色曲線。



圖四 只穿透地幔的 μ 微中子振盪機率圖形

$P_{\mu e}$ - 紅色曲線， $P_{\mu\mu}$ - 藍色曲線， $P_{\mu\tau}$ - 綠色曲線。



圖五 只穿透地幔的 τ 微中子振盪機率圖形

$P_{\tau e}$ -紅色曲線， $P_{\tau\mu}$ -藍色曲線， $P_{\tau\tau}$ -綠色曲線。

圖三是 e 微中子只穿透地幔的振盪機率圖形，紅色曲線是 e 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 e 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 e 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 e 微中子只穿透地幔，且能量約在 6GeV 的時候，其本徵態轉換現象達到最大值，稱為共振點（resonance point），而且 e 微中子振盪到 μ 微中子與 e 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形幾乎是重合的，這項性質會影響之後的 e 微中子流量曲線。

圖四是 μ 微中子只穿透地幔的振盪機率圖形，紅色曲線是 μ 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 μ 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 μ 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 μ 微中子只穿透地幔的時候，由於其振盪機率較為複雜，造成共振點非常不明顯，並且在低能量的區域出現了激烈的振盪圖形，然而當能量漸漸地靠近共振點之後，便會轉變成較為緩和的振盪圖形了。 μ 微中子振盪到 μ 微中子與 μ 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形具有明顯的差異，這項性質會影響之後的 μ 微中子流量曲線。

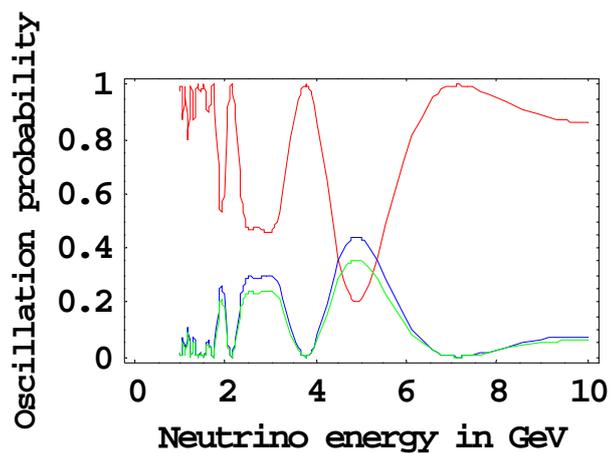
圖五是 τ 微中子只穿透地幔的振盪機率圖形，紅色曲線是 τ 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 τ 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 τ 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 τ 微中子只穿透地幔的時候，其振盪圖形與 μ 微中子只穿透地幔的振盪圖形很相似，共振點也是非常不明顯，而且當能量漸漸地靠近共振點之後，圖形也是會由激烈的振盪圖形轉變成較為緩和的振盪圖形。 τ 微中子振盪到 μ 微中子與 τ 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形也具有明顯的差異，這項性質會影響之後的 τ 微中子流量曲線。

爲了繪出穿透地幔與地核的微中子振盪機率與能量的關係，我們將
 (2-44) 式至 (2-52) 式中的參數採用以下的預設值：

$$\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (\text{eV})^2, \quad \cos \theta = -1.0, \quad L = 12742 \text{ Km},$$

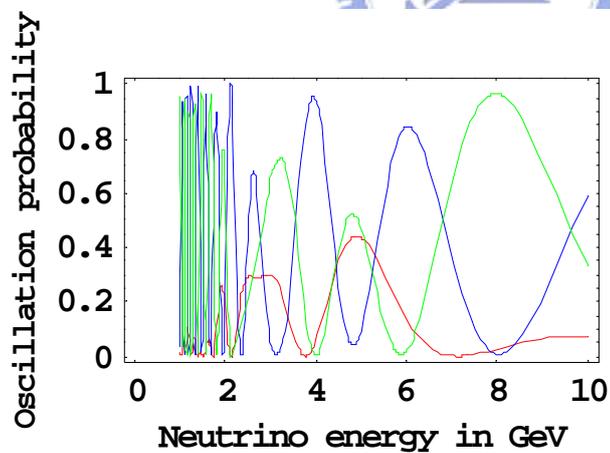
$$(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.076, \quad (\cos 2\theta_{23})^2 = 0.011,$$

如此我們可以順利將圖形繪出。



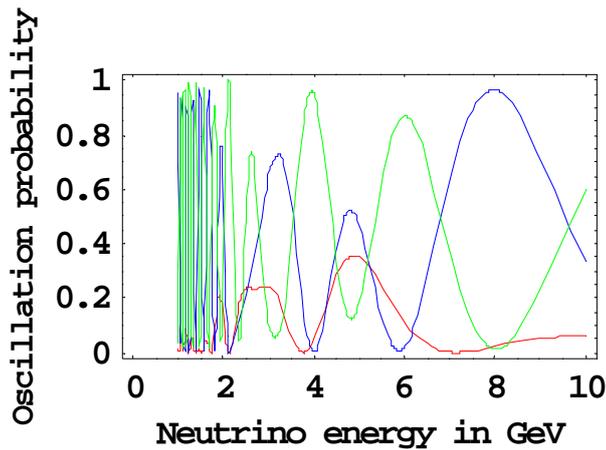
圖六 穿透地幔與地核的 e 微中子振盪機率圖形

P_{ee} - 紅色曲線， $P_{e\mu}$ - 藍色曲線， $P_{e\tau}$ - 綠色曲線。



圖七 穿透地幔與地核的 μ 微中子振盪機率圖形

$P_{\mu e}$ - 紅色曲線， $P_{\mu\mu}$ - 藍色曲線， $P_{\mu\tau}$ - 綠色曲線。



圖八 穿透地幔與地核的 τ 微中子振盪機率圖形

$P_{\tau e}$ -紅色曲線， $P_{\tau\mu}$ -藍色曲線， $P_{\tau\tau}$ -綠色曲線。

圖六是 e 微中子穿透地幔與地核的振盪機率圖形，紅色曲線是 e 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 e 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 e 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 e 微中子穿透地幔與地核的時候，會出現了兩個共振點，其能量分別約在 3GeV 與 5GeV ，這是由於雙層密度所產生的效應，而且能量在 3GeV 與 5GeV 之間會具有干涉現象（interference），但是並不是非常明顯。 e 微中子振盪到 μ 微中子與 e 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形也幾乎是重合的，會影響 e 微中子流量曲線。

圖七是 μ 微中子穿透地幔與地核的振盪機率圖形，紅色曲線是 μ 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 μ 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 μ 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 μ 微中子穿透地幔與地核的時候，由於其振盪機率較為複雜，造成共振點與干涉現象都是非常不明顯，而且如同 μ 微中子只穿透地幔的振盪圖形，在低能量的區域也出現了激烈的振盪圖形，但是激烈振盪的範圍則縮小在能量 2GeV 以內，這是因為微中子穿透地核所形成的共振點位於能量 2GeV 左右。 μ 微中子振盪到 μ 微中子與 μ 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形也具有明顯的差異，會影響 μ 微中子流量曲線。

圖八是 τ 微中子穿透地幔與地核的振盪機率圖形，紅色曲線是 τ 微中子振盪到 e 微中子的機率圖形，藍色曲線是 τ 微中子振盪到 μ 微中子的機率圖形，綠色曲線是 τ 微中子振盪到 τ 微中子的機率圖形。我們可以發現當 τ 微中子穿透地幔與地核的時候，其振盪圖形與 μ 微中子穿透地幔與地核的振盪圖形很相似，共振點與干涉現象都是非常不明顯，而且激烈振盪的範圍也是縮小在能量 2GeV 以內，之後的圖形則轉變成較為緩和的振盪圖形。 τ 微中子振盪到 μ 微中子與 τ 微中子振盪到 τ 微中子的兩個機率圖形也具有明顯的差異，會影響 τ 微中子流量曲線。

3.2 穿透地球的微中子流量

我們能夠將全部的微中子振盪機率（oscillation probability）表示成一個對稱的振盪機率矩陣（neutrino oscillation probability matrix） P ，其中

$$P = \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{\mu e} & P_{\tau e} \\ P_{e\mu} & P_{\mu\mu} & P_{\tau\mu} \\ P_{e\tau} & P_{\mu\tau} & P_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (3-1)$$

我們再分別定義初態的微中子流量（initial neutrino flux） F_0 與末態的微中子流量（final neutrino flux） F ，其中

$$F_0 = \begin{pmatrix} F_{e0} \\ F_{\mu0} \\ F_{\tau0} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_e \\ F_\mu \\ F_\tau \end{pmatrix}, \quad (3-2)$$

而且 F_{e0} 與 F_e 分別是初態與末態的 e 微中子流量， $F_{\mu0}$ 與 F_μ 分別是初態與末態的 μ 微中子流量， $F_{\tau0}$ 與 F_τ 分別是初態與末態的 τ 微中子流量。則我們可以得到下列的關係式，

末態微中子流量 $F =$ 振盪機率矩陣 $P \times$ 初態微中子流量 F_0 ，亦即

$$\begin{pmatrix} F_e \\ F_\mu \\ F_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{\mu e} & P_{\tau e} \\ P_{e\mu} & P_{\mu\mu} & P_{\tau\mu} \\ P_{e\tau} & P_{\mu\tau} & P_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{e0} \\ F_{\mu0} \\ F_{\tau0} \end{pmatrix}, \quad (3-3)$$

我們也可以將（3-3）式展開而得到

$$F_e = F_{e0}P_{ee} + F_{\mu0}P_{\mu e} + F_{\tau0}P_{\tau e}, \quad (3-4)$$

$$F_\mu = F_{e0}P_{e\mu} + F_{\mu0}P_{\mu\mu} + F_{\tau0}P_{\tau\mu}, \quad (3-5)$$

$$F_\tau = F_{e0}P_{e\tau} + F_{\mu0}P_{\mu\tau} + F_{\tau0}P_{\tau\tau}, \quad (3-6)$$

在之前的章節中，我們已經分別計算出只穿透地幔的微中子振盪機率與穿透地幔與地核的微中子振盪機率，我們必須再取得全部的大氣微中子流量，才可以進行穿透地球的微中子流量分析，因此我們緊接著由M. Honda與其他學者在2001年所共同發表的論文中〔21〕取得了 e 微中子與 μ 微中子的大氣微中子流量，雖然M. Honda與其他學者在2004年又發表了一篇關於大氣微中子三維計算的論文〔22〕，但是此篇論文中的計算是建構在具有地磁效應的三維地球模型上，然而

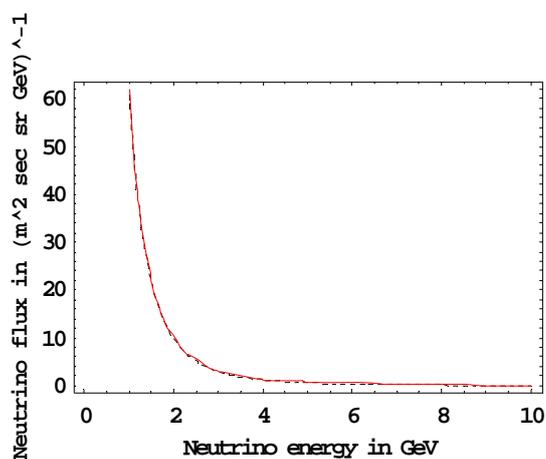
我們的計算卻只建構在二維地球模型上，而且也並未加入地磁的影響，所以我們選用的 e 微中子與 μ 微中子的大氣微中子流量是2001年由其所發表的論文結果，最後我們再由Guey-Lin Lin與Fei-Fan Lee所發表的論文中〔23〕取得了 τ 微中子的大氣微中子流量，如此我們已經全部取得後續研究中所需要的微中子振盪機率與大氣微中子流量。

我們將繪出只穿透地幔的微中子流量與能量的關係，而且微中子流量公式中的參數採用以下的預設值：

$$\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2, \quad \cos \theta = -0.8, \quad L = 10193.6 \text{ Km},$$

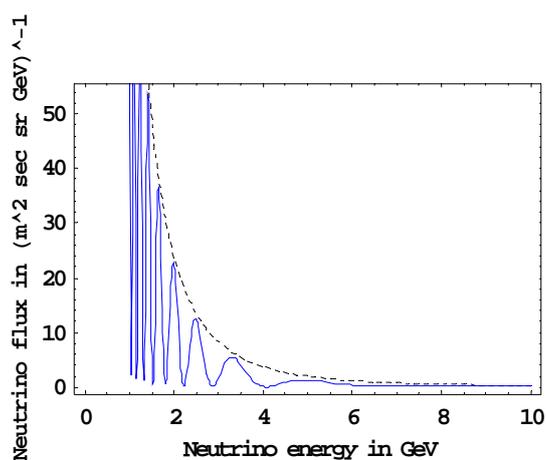
$$(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.076, \quad (\cos 2\theta_{23})^2 = 0.011,$$

如此我們可以順利將圖形繪出。



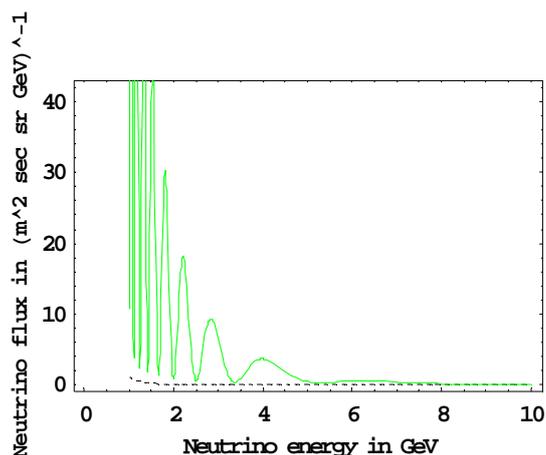
圖九 只穿透地幔的 e 微中子流量圖形

虛線是初態微中子流量，實線是只穿透地幔的末態微中子流量。



圖十 只穿透地幔的 μ 微中子流量圖形

虛線是初態微中子流量，實線是只穿透地幔的末態微中子流量。



圖十一 只穿透地幔的 τ 微中子流量圖形

虛線是初態微中子流量，實線是只穿透地幔的末態微中子流量。

圖九是只穿透地幔的 e 微中子流量圖形，我們可以發現 e 微中子初態流量與只穿透地幔的 e 微中子末態流量是重合的，而且兩個流量圖形都是很平滑的遞減曲線，這是因為初態的微中子流量中， $F_{e0} : F_{\mu0} : F_{\tau0} = 1 : 2 : 0$ ，然而微中子的振盪機率

中， $P_{\mu e}$ 與 $P_{\tau e}$ 的振盪圖形幾乎是重合的，亦即 $P_{\mu e} \approx P_{\tau e}$ ，所以我們可以將初態的

微中子流量視為 $F_{e0} : F_{\mu0} : F_{\tau0} \approx 1 : 1 : 1$ ，因此在 (3-4) 式中，末態的 e 微中子流量

$F_e = F_{e0}P_{ee} + F_{\mu0}P_{\mu e} + F_{\tau0}P_{\tau e} = F_{e0}(P_{ee} + P_{\mu e} + P_{\tau e})$ ，又其中的 $P_{ee} + P_{\mu e} + P_{\tau e} = 1$ ，所以我們最後可以得到 $F_e \approx F_{e0}$ 。

圖十是只穿透地幔的 μ 微中子流量圖形，我們發現 μ 微中子的初態流量曲線位於末態流量曲線的上方，而且 μ 微中子初態流量是很平滑的曲線，但是只穿透地幔的 μ 微中子末態流量在低能量區域是激烈的振盪曲線，之後才轉變成較為緩和的振盪曲線，這是因為在微中子的振盪機率中， $P_{\mu\mu}$ 與 $P_{\tau\mu}$ 的振盪圖形差異性很大，所以 μ 微中子的末態流量與初態流量的差異性也是很大，而且由於 μ 微中子初態流量是很迅速的遞減曲線，所以在高能量區域的時候，只穿透地幔的 μ 微中子末態流量也呈現出很緩和的曲線，整體而言，我們可以視為 μ 微中子的部分初態流量振盪為 τ 微中子的末態流量。

圖十一是只穿透地幔的 τ 微中子流量圖形，我們發現 τ 微中子的初態流量曲線位於末態流量曲線的下方，而且 τ 微中子初態流量是很平滑的曲線，但是只穿透地幔的 τ 微中子末態流量在低能量區域是激烈的振盪曲線，之後才轉變成較為緩和

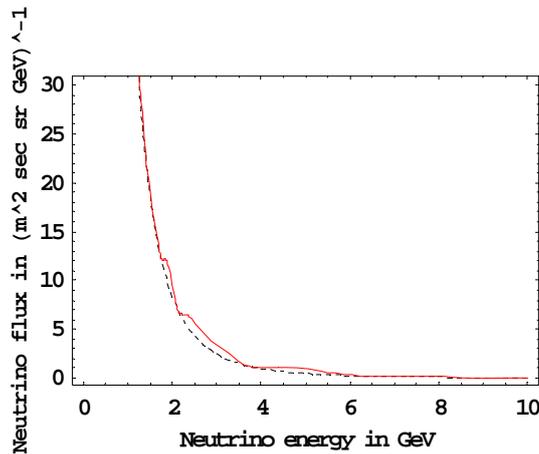
的振盪曲線，這也是因為微中子的振盪機率中， $P_{\mu\tau}$ 與 $P_{\tau\tau}$ 的振盪圖形差異性很大，造成 τ 微中子的末態流量與初態流量的差異性也是很大，而且由於 τ 微中子初態流量也是很迅速的遞減曲線，讓只穿透地幔的 τ 微中子末態流量在高能量區域也呈現出很緩和的曲線，整體而言，我們可以視為 τ 微中子的末態流量是 μ 微中子的初態流量所振盪形成的。

我們再繪出穿透地幔與地核的微中子流量與能量的關係，而且微中子流量公式中的參數採用以下的預設值：

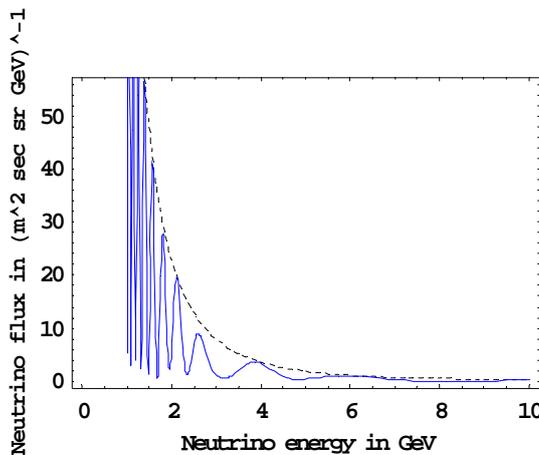
$$\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (\text{eV})^2, \quad \cos \theta = -1.0, \quad L = 12742 \text{ Km},$$

$$(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.076, \quad (\cos 2\theta_{23})^2 = 0.011,$$

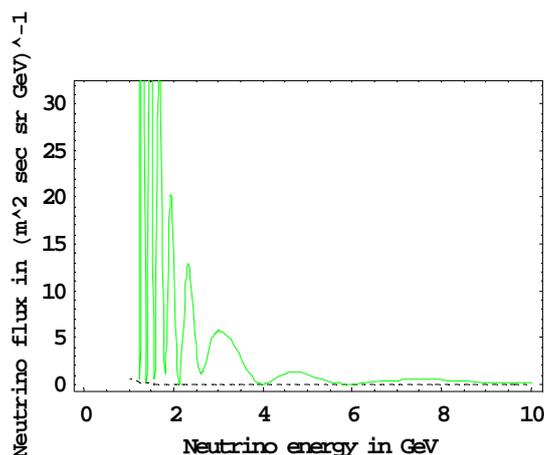
如此我們可以順利將圖形繪出。



圖十二 穿透地幔與地核的e微中子流量圖形
虛線是初態微中子流量，實線是穿透地幔與地核的末態微中子流量。



圖十三 穿透地幔與地核的 μ 微中子流量圖形
虛線是初態微中子流量，實線是穿透地幔與地核的末態微中子流量。



圖十四 穿透地幔與地核的 τ 微中子流量圖形

虛線是初態微中子流量，實線是穿透地幔與地核的末態微中子流量。

圖十二是穿透地幔與地核的 e 微中子流量圖形，我們發現穿透地幔與地核的 e 微中子末態流量只呈現出很緩和的振盪曲線，而且與 e 微中子初態流量的曲線也幾乎是重合的，其原因與只穿透地幔的情形相同，都是由於在微中子的振盪機率中，

$P_{\mu e}$ 與 $P_{\tau e}$ 的振盪圖形幾乎是重合的，亦即 $P_{\mu e} \approx P_{\tau e}$ ，所以初態的微中子流量中，

我們可以將 $F_{e0} : F_{\mu 0} : F_{\tau 0} = 1 : 2 : 0$ 視爲 $F_{e0} : F_{\mu 0} : F_{\tau 0} \approx 1 : 1 : 1$ ，因此在 (3-4) 式中，

末態的 e 微中子流量 $F_e = F_{e0}P_{ee} + F_{\mu 0}P_{\mu e} + F_{\tau 0}P_{\tau e} = F_{e0}(P_{ee} + P_{\mu e} + P_{\tau e})$ ，又其中的

$P_{ee} + P_{\mu e} + P_{\tau e} = 1$ ，最後我們也可以得到 $F_e \approx F_{e0}$ 。

圖十三是穿透地幔與地核的 μ 微中子流量圖形，我們發現 μ 微中子初態流量是很平滑的曲線，但是穿透地幔與地核的 μ 微中子末態流量在低能量區域卻是激烈的振盪曲線，之後才轉變成較爲緩和的振盪曲線，這也是因爲微中子振盪機率的差異性很大，以及 μ 微中子初態流量是很迅速遞減的，而造成了如此的結果，並且發現 μ 微中子的初態流量曲線也位於末態流量曲線的上方，所以我們也可以視爲 μ 微中子的部分初態流量振盪爲 τ 微中子的末態流量。

圖十四是穿透地幔與地核的 τ 微中子流量圖形，我們發現 τ 微中子初態流量是很平滑的曲線，但是穿透地幔與地核的 τ 微中子末態流量在低能量區域卻是激烈的振盪曲線，之後才轉變成較爲緩和的振盪曲線，這也是因爲微中子振盪機率的差異性很大，以及 τ 微中子初態流量是很迅速遞減的，而造成了如此的結果，並且發現 τ 微中子的初態流量曲線也位於末態流量曲線的下方，所以我們也可以視爲 τ 微中子的末態流量是 μ 微中子的初態流量所振盪形成的。

3.3 穿透地球的微中子平均流量

我們先定義 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的微中子平均流量為

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.4} Flux(E, \cos \theta) d \cos \theta d \phi}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.4} d \cos \theta d \phi}, \quad (3-7)$$

其中， E 與 $\cos \theta$ 為設定的變數。

我們再定義 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的微中子平均流量為

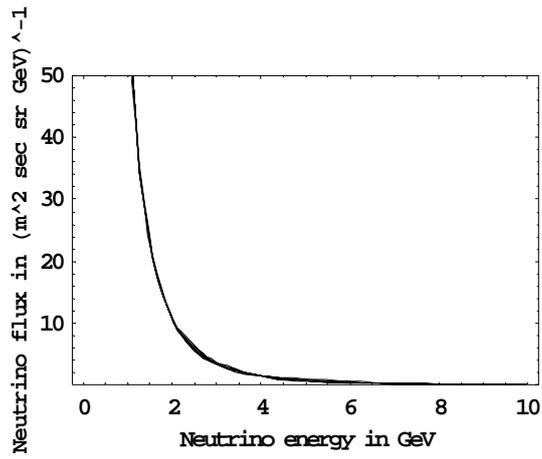
$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} Flux(E, \cos \theta) d \cos \theta d \phi}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} d \cos \theta d \phi}, \quad (3-8)$$

其中， E 與 $\cos \theta$ 為設定的變數。

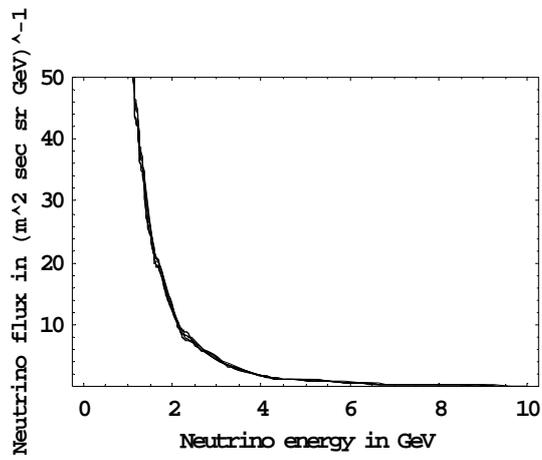
在微中子流量公式的參數中，選取 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ ，而 θ_{13} 與 θ_{23} 的範圍大約為 $\theta_{13} < 10^\circ$ ， $37^\circ < \theta_{23} < 53^\circ$ ，所以我們再分別選取 $\theta_{13} = 2^\circ, 5^\circ, 8^\circ$ ，以及 $\theta_{23} = 38^\circ, 43^\circ, 48^\circ, 53^\circ$ ，亦即分別選取 $(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.005, 0.030, 0.076$ ，以及 $(\cos 2\theta_{23})^2 = 0.059, 0.005, 0.011, 0.076$ ，則我們可以繪出對應於不同的 θ_{13} 與 θ_{23} 的微中子平均流量曲線，再進行比較與分析的工作。

圖十五至圖十七是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的微中子平均流量圖形，圖十五是 e 微中子的平均流量圖形，圖十六是 μ 微中子的平均流量圖形，圖十七是 τ 微中子的平均流量圖形，我們可以發現無論我們如何變換 θ_{13} 與 θ_{23} ， e 微中子的平均流量曲線是幾乎不會變動的，而且是很平滑的曲線， μ 微中子的平均流量曲線與 τ 微中子的平均流量曲線也幾乎都不會產生變動，而且不再是激烈的振盪曲線，而是都形成了較為平滑的曲線，這或許是因為我們是使用數值模擬的方法，亦即數值在大範圍的平均之下是無法呈現出明顯差異的。

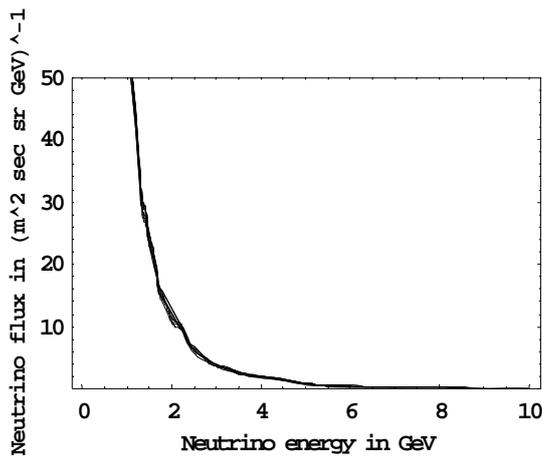
圖十八至圖二十是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的微中子平均流量圖形，圖十八是 e 微中子的平均流量圖形，圖十九是 μ 微中子的平均流量圖形，圖二十是 τ 微中子的平均流量圖形，我們可以發現當我們變換 θ_{13} 與 θ_{23} 的時候， e 微中子的平均流量曲線仍然是很平滑的曲線，但是會顯示出些微的差異， μ 微中子的平均流量曲線與 τ 微中子的平均流量曲線都形成了些微振盪的曲線，而且都顯示出些微的差異，這或許是因為我們是使用數值模擬的方法，亦即數值在小範圍的平均之下才可以呈現出差異性。



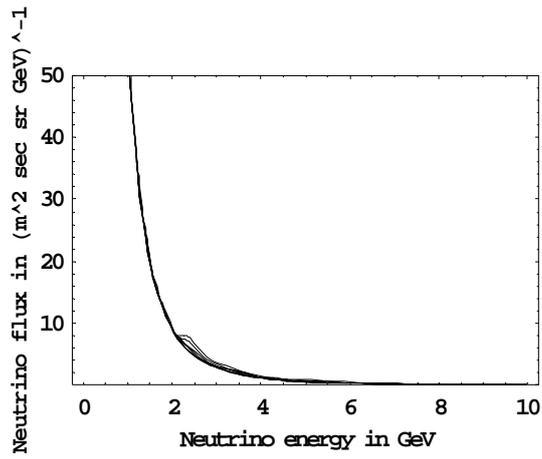
圖十五 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的e微中子平均流量圖形



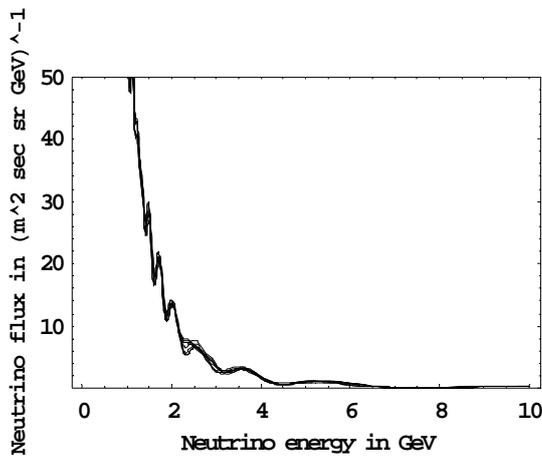
圖十六 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的 μ 微中子平均流量圖形



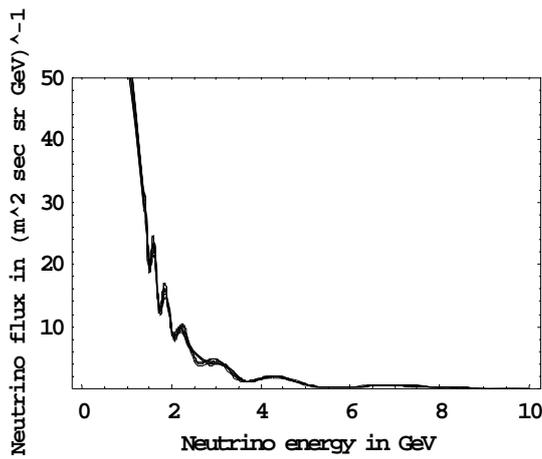
圖十七 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的 τ 微中子平均流量圖形



圖十八 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 e 微中子平均流量圖形



圖十九 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 μ 微中子平均流量圖形



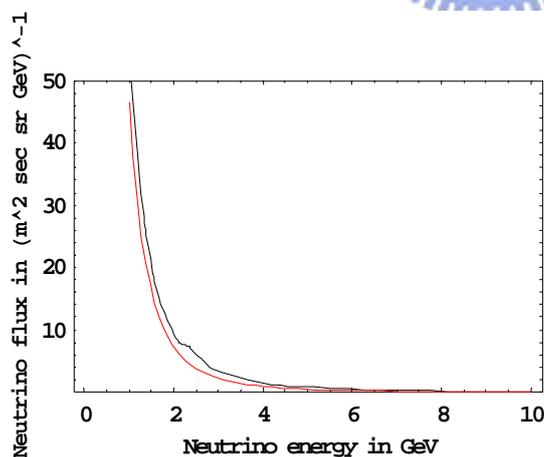
圖二十 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 τ 微中子平均流量圖形

由之前的結果，我們瞭解到數值在小範圍的平均之下才可以呈現出差異性，因此我們之後所討論的微中子平均流量都是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的曲線圖形。

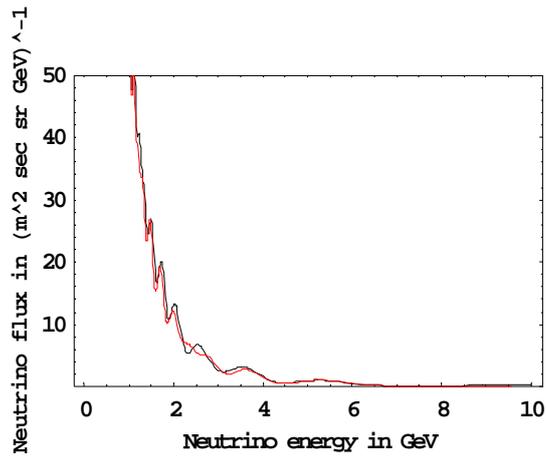
我們緊接著將繪出對應於不同的 Δ_{31} 的微中子平均流量曲線，在微中子流量公式的參數中，我們先選取 $(\sin 2\theta_{13})^2 = 0.076$ ， $(\cos 2\theta_{23})^2 = 0.011$ ，亦即固定 θ_{13} 與 θ_{23} ，再分別選取 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ 以及 $\Delta_{31} = -2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ ，則我們可以對於其曲線圖形進行比較與分析的工作。

圖二十一至圖二十三是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的微中子平均流量圖形，黑色曲線是 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ 的圖形，紅色曲線是 $\Delta_{31} = -2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ 的圖形。

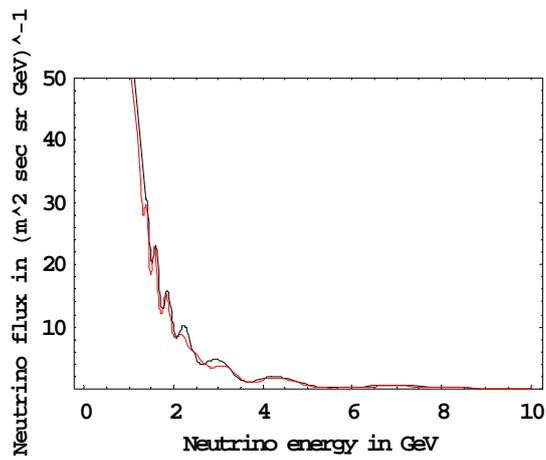
圖二十一是 e 微中子的平均流量圖形，圖二十二是 μ 微中子的平均流量圖形，圖二十三是 τ 微中子的平均流量圖形，我們可以發現當 Δ_{31} 為正值或負值的時侯， e 微中子的平均流量圖形都是很平滑的曲線，但是對應於 Δ_{31} 為正值的 e 微中子平均流量在共振點產生了很緩和的振盪曲線，而且當我們變換 Δ_{31} 的正負值的時侯， μ 微中子的平均流量曲線與 τ 微中子的平均流量曲線也都會顯示出些微的差異，當 Δ_{31} 為正值的時候， μ 微中子平均流量與 τ 微中子平均流量的圖形都會形成些微振盪的曲線，然而當 Δ_{31} 為負值的時候， μ 微中子平均流量與 τ 微中子平均流量的圖形則都會是較為平滑的曲線。



圖二十一 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 e 微中子平均流量比較圖形
黑色曲線是 Δ_{31} 為正值的圖形，紅色曲線是 Δ_{31} 為負值的圖形。



圖二十二 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 μ 微中子平均流量比較圖形
 黑色曲線是 Δ_{31} 為正值的圖形，紅色曲線是 Δ_{31} 為負值的圖形。



圖二十三 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的 τ 微中子平均流量比較圖形
 黑色曲線是 Δ_{31} 為正值的圖形，紅色曲線是 Δ_{31} 為負值的圖形。

3.4 微中子平均流量的等高曲線

我們先定義 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的微中子平均流量為

$$\frac{\int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} Flux(\theta_{13}, \theta_{23}, E, \cos \theta) d \cos \theta d \phi d E}{\int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} d \cos \theta d \phi d E}, \quad (3-9)$$

其中， E 與 $\cos \theta$ 為原本的變數， θ_{13} 與 θ_{23} 為新加入的變數。

我們再定義 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的微中子平均流量為

$$\frac{\int_{5.5}^{6.5} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} Flux(\theta_{13}, \theta_{23}, E, \cos \theta) d \cos \theta d \phi d E}{\int_{5.5}^{6.5} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-0.8} d \cos \theta d \phi d E}, \quad (3-10)$$

其中， E 與 $\cos \theta$ 為原本的變數， θ_{13} 與 θ_{23} 為新加入的變數。

在微中子流量公式的參數中，我們先選取 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ ，則我們可以繪出微中子平均流量的等高曲線，並且對於其曲線圖形進行比較與分析的工作。

圖二十四是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形，圖二十五是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中， e 微中子平均流量大約介於 $5.0 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形中，並未發生 θ_{23} 的簡併性，也就是當我們選取固定的 $\sin 2\theta_{13}$ 與微中子平均流量的時候，其所對應的 $\cos 2\theta_{23}$ 是單一的數值區間，此種情況即稱為 θ_{23} 簡併性之消除〔24、25〕，而且我們也可以發現當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，可以對應出較為精確的 $\cos 2\theta_{23}$ 數值區間，總之 e 微中子平均流量的 θ_{23} 簡併性之消除是很重要的發現。

圖二十六是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形，圖二十七是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中， μ 微中子平均流量大約介於 $6.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $7.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量形成了近似對稱的等高曲線圖形，因此造成 θ_{23} 是

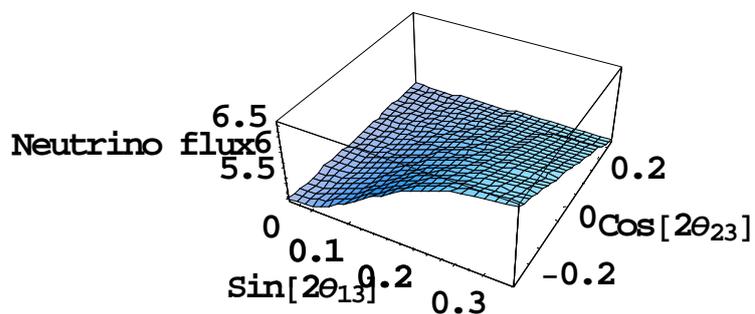
具有簡併性的，也就是當我們選取固定的 $\sin 2\theta_{13}$ 與微中子平均流量的時候，其所對應的 $\cos 2\theta_{23}$ 是兩個近似對稱的數值區間，此種情況即稱為 θ_{23} 簡併性，而且我們也可以發現當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，雖然無法完全消除 θ_{23} 的簡併性，但是卻可以降低 θ_{23} 簡併性的程度，然而當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈小的時候，則會讓 θ_{23} 的簡併性與 θ_{23} 的對稱性都會愈明顯。

圖二十八是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形，圖二十九是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中， τ 微中子平均流量大約介於 $5.75 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.75 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量也形成了近似對稱的等高曲線圖形，也因此造成 θ_{23} 是具有簡併性的，亦即與 μ 微中子平均流量的結果是類似的，而且 θ_{23} 簡併性的程度與我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 具有密切關係，當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈小的時候，則 θ_{23} 的簡併性與 θ_{23} 的對稱性也都會愈明顯。

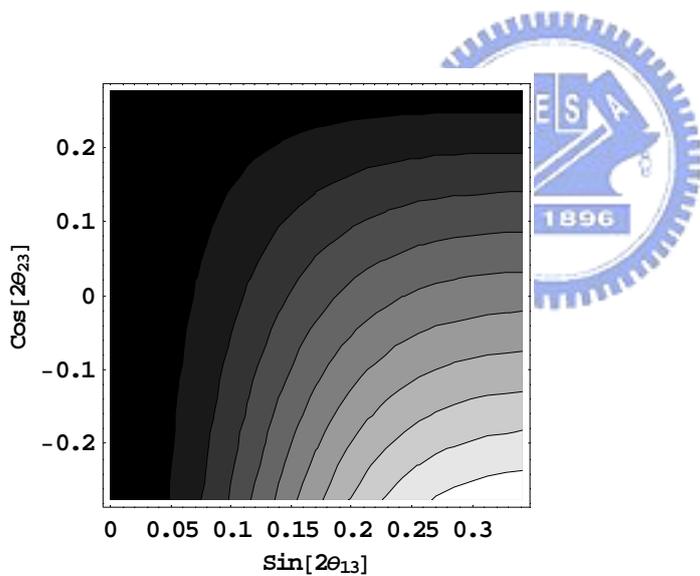
圖三十是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形，圖三十一是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中，e 微中子平均流量大約介於 $0.3 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形中，並未發生 θ_{23} 的簡併性，而且當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，可以對應出較為精確的 $\cos 2\theta_{23}$ 數值區間，這與之前的 e 微中子能量在 2GeV 到 3GeV 的結果是很類似的。

圖三十二是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形，圖三十三是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中， μ 微中子平均流量大約介於 $0.4 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.8 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形中，與之前的 μ 微中子能量在 2GeV 到 3GeV 的結果是部分類似的，雖然 θ_{23} 仍然是具有簡併性的，但是 θ_{23} 的對稱性卻不是很明顯。

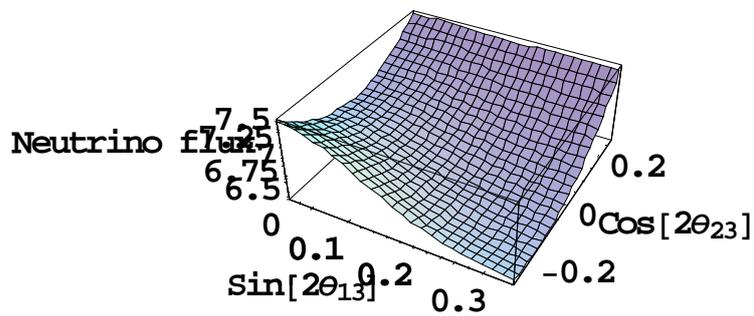
圖三十四是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形，圖三十五是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形，其中， τ 微中子平均流量大約介於 $0.3 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。我們可以發現能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形中，與之前的 τ 微中子能量在 2GeV 到 3GeV 的結果也是部份類似的，雖然 θ_{23} 仍然是具有簡併性的，但是 θ_{23} 的對稱性卻不是很明顯。



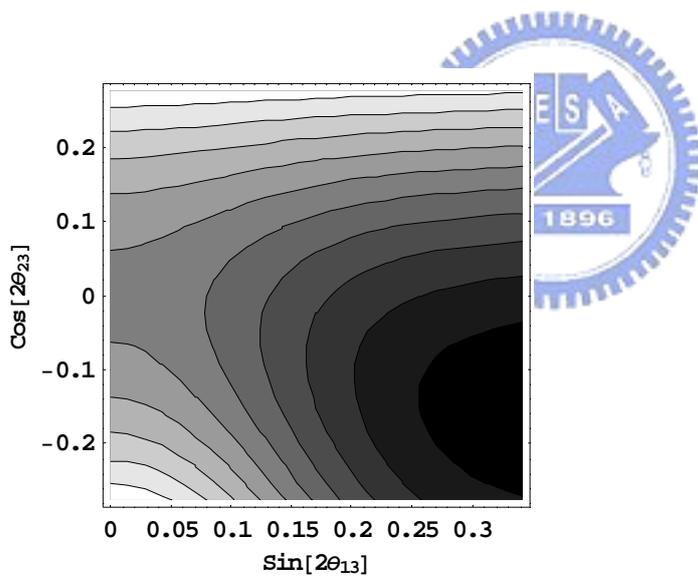
圖二十四 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形



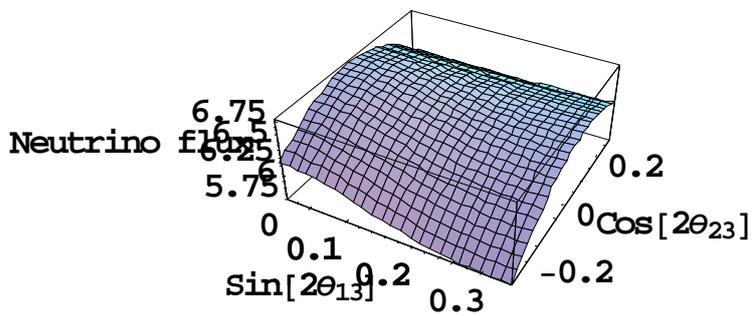
圖二十五 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形
 e 微中子平均流量大約介於 $5.0(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.5(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



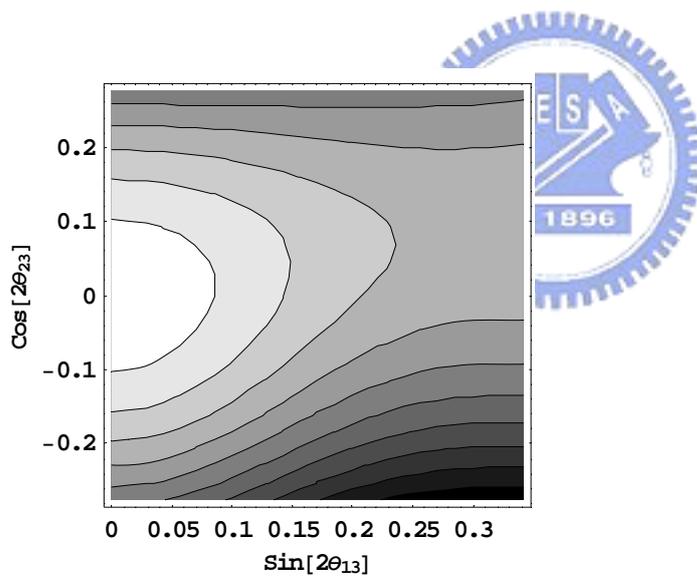
圖二十六 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形



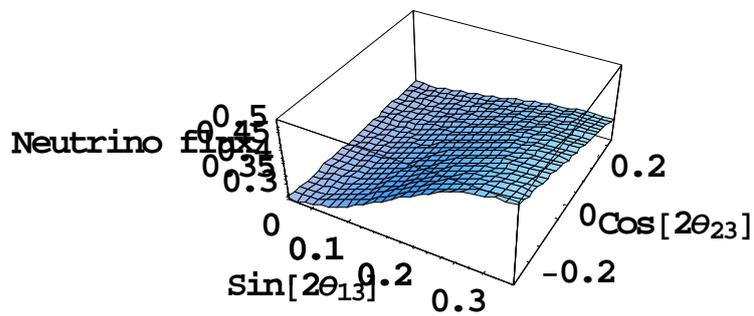
圖二十七 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形
 μ 微中子平均流量大約介於 $6.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $7.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



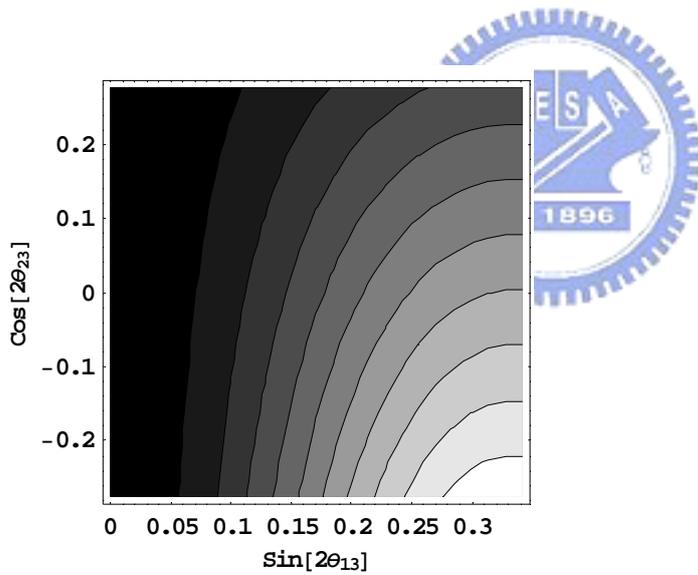
圖二十八 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形



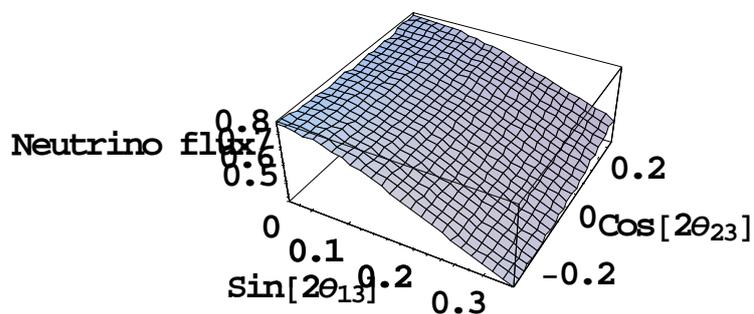
圖二十九 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形
 τ 微中子平均流量大約介於 $5.75 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.75 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



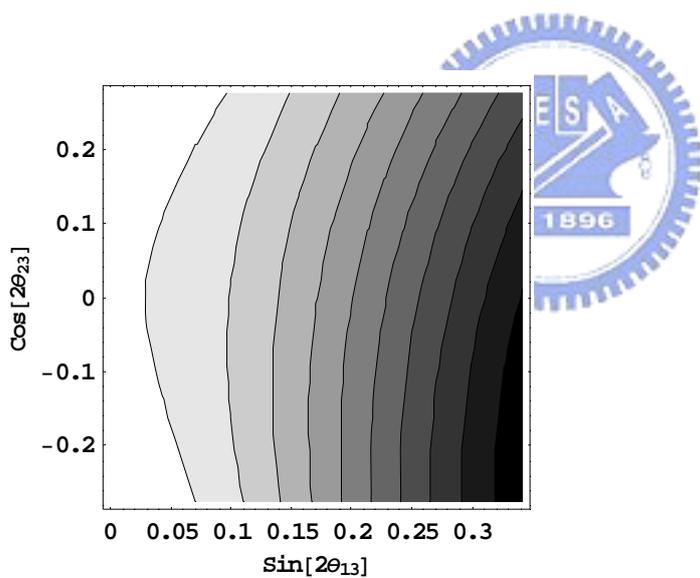
圖三十 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的三維立體圖形



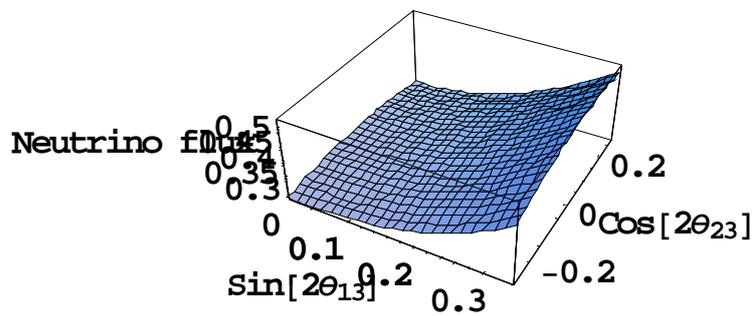
圖三十一 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形
 e 微中子平均流量大約介於 $0.3(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



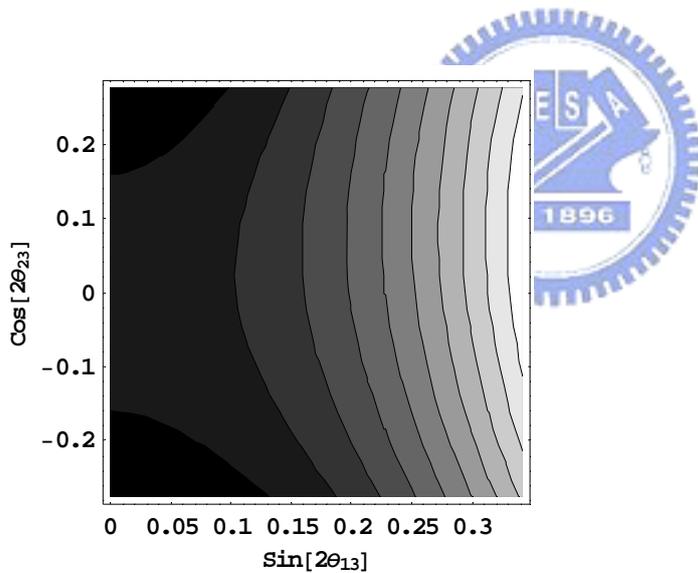
圖三十二 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的三維立體圖形



圖三十三 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 μ 微中子平均流量的等高曲線圖形
 μ 微中子平均流量大約介於 $0.4(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.8(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



圖三十四 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的三維立體圖形



圖三十五 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形
 τ 微中子平均流量大約介於 $0.3(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。

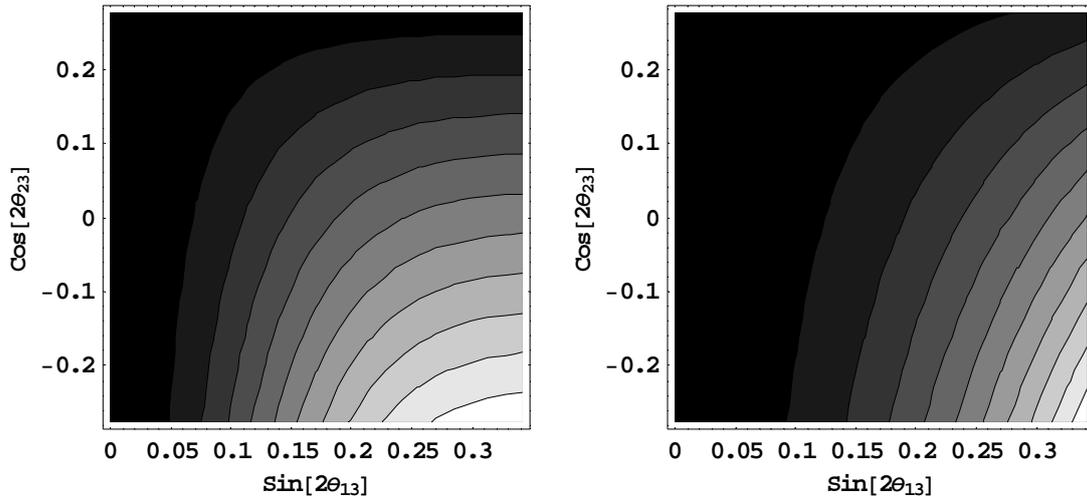
3.5 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線

在微中子的偵測實驗中，由於 e 微中子與 e 反微中子會分別造成負電子與正電子的產生，然而我們目前的實驗技術仍然無法區分負電子與正電子，所以我們最後必須考慮 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量。

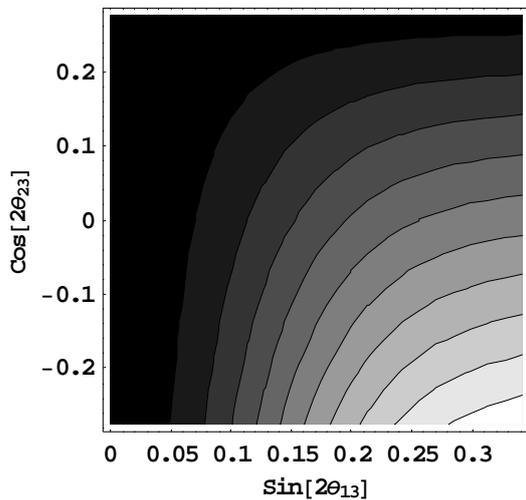
在微中子流量公式的參數中，我們先選取 $\Delta_{31} = 2.40 \times 10^{-3} (eV)^2$ ，則我們可以繪出微中子平均流量的等高曲線，並且對於其曲線圖形進行比較與分析的工作。

圖三十六是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形，其中，e 微中子平均流量大約介於 $5.0 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，而 e 反微中子平均流量大約介於 $4.0 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $4.1 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。圖三十七是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形，其中，e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量大約介於 $9.0 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $10.6 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。在圖四十與圖四十一中，我們可以發現由於 e 微中子平均流量大於 e 反微中子平均流量，所以能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形幾乎與能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形很相似，因此如同之前描述的結果，當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，可以對應出較為精確的 $\cos 2\theta_{23}$ 數值區間，而且當我們選取固定的 $\sin 2\theta_{13}$ 與 e 微中子平均流量的時候，其所對應的 $\cos 2\theta_{23}$ 是單一的數值區間，亦即 θ_{23} 的簡併性是消除的。

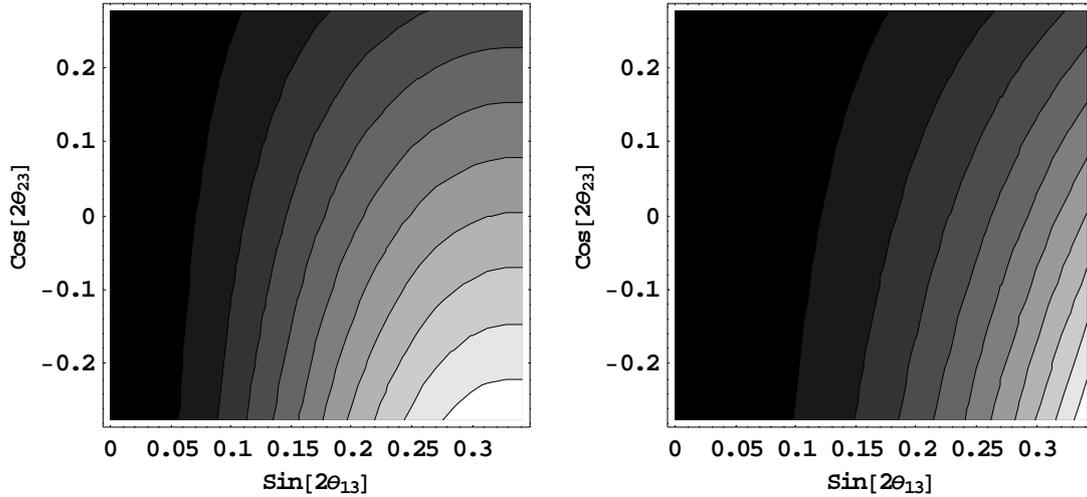
圖三十八是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形，其中，e 微中子平均流量大約介於 $0.3 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，而 e 反微中子平均流量大約介於 $0.22 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.23 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。圖三十九是 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形，其中，e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量大約介於 $0.52 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.73 (m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間。在圖四十與圖四十一中，我們已經知道由於 e 微中子平均流量大於 e 反微中子平均流量，所以能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形幾乎與能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形很相似，因此我們可以發現能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形中，也並未發生 θ_{23} 的簡併性，我們的結論是 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形中，將可以獲得 θ_{23} 簡併性之消除。



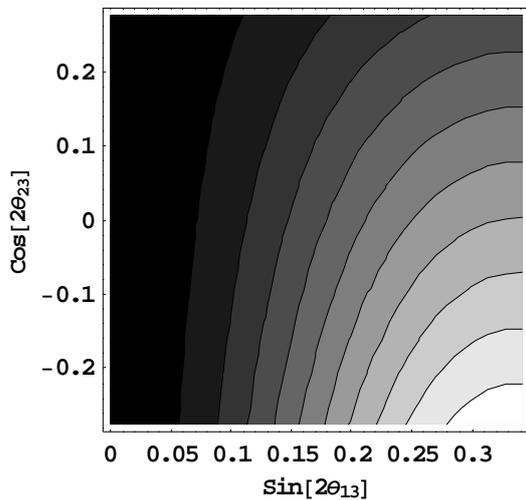
圖三十六 $\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形
 左側圖形是 e 微中子平均流量的等高曲線，右側圖形是 e 反微中子平均流量的等高曲線，e 微中子平均流量大約介於 $5.0(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $6.5(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，而 e 反微中子平均流量大約介於 $4.0(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $4.1(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，分別將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



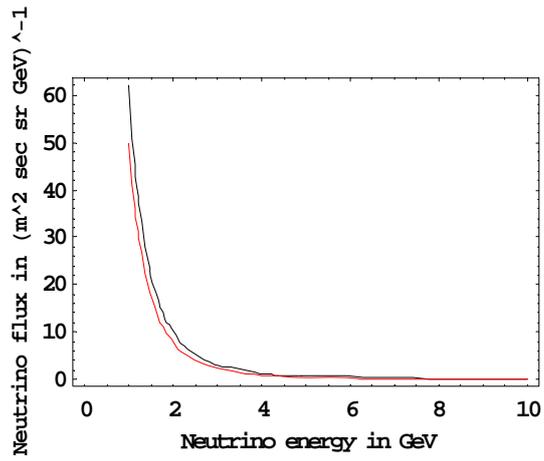
圖三十七 $\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 2GeV 到 3GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形
 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量大約介於 $9.0(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $10.6(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



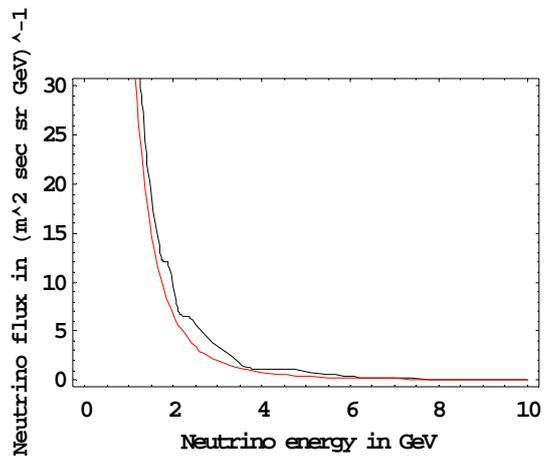
圖三十八 $\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子平均流量的等高曲線圖形與 e 反微中子平均流量的等高曲線圖形
 左側圖形是 e 微中子平均流量的等高曲線，右側圖形是 e 反微中子平均流量的等高曲線， e 微中子平均流量大約介於 $0.3(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.5(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，而 e 反微中子平均流量大約介於 $0.22(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.23(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，分別將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



圖三十九 $\cos\theta = -1.0$ 到 $\cos\theta = -0.8$ 且能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 的 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形
 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量大約介於 $0.52(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 至 $0.73(m^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$ 之間，將其平均分為十個流量區間而繪製成等高曲線。



圖四十一 只穿透地幔的 e 微中子與 e 反微中子的流量圖形
 黑色曲線是 e 微中子的圖形，紅色曲線是 e 反微中子的圖形。



圖四十二 穿透地幔與地核的 e 微中子與 e 反微中子的流量圖形
 黑色曲線是 e 微中子的圖形，紅色曲線是 e 反微中子的圖形。

第四章 微中子流量分析的結論

在此篇碩士論文中，我們先分別推導出微中子在真空中的薛丁格爾方程式，以及微中子在物質中的薛丁格爾方程式，之後爲了討論微中子穿透地球的情形，於是再分別計算出只穿透地幔的微中子振盪機率，以及穿透地幔與地核的微中子振盪機率，並且定義了初態微中子流量，末態微中子流量與微中子振盪機率矩陣的關係式，也定義了具有許多變數的微中子平均流量。

我們發現無論是只穿透地幔的微中子或是穿透地幔與地核的微中子，此兩種情況的結果是很類似的， e 微中子的初態流量與末態流量都是很平滑的曲線，而且 e 微中子的初態流量與末態流量幾乎是重合的， μ 微中子的初態流量曲線位於末態流量曲線的上方， τ 微中子的初態流量曲線位於末態流量曲線的下方，而且 μ 微中子與 τ 微中子的初態流量都是很平滑的曲線，但是 μ 微中子與 τ 微中子的末態流量在低能量區域卻是激烈的振盪曲線，之後才轉變成較爲緩和的振盪曲線。

在比較 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.4$ 的微中子平均流量與 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ 的微中子平均流量的時候，當我們變換 θ_{13} 與 θ_{23} 的時候，大範圍的微中子平均流量的結果幾乎是相同的，小範圍的微中子平均流量則會顯示出些微的差異，這或許是因爲我們是使用數值模擬的方法，亦即數值在小範圍的平均之下才可以呈現出差異性。我們緊接著在小範圍的微中子平均流量中比較 Δ_{31} 爲正值與 Δ_{31} 爲負值的情形，我們發現當 Δ_{31} 爲正值的時候，微中子平均流量會具有些微的振盪圖形，然而當 Δ_{31} 爲負值的時候，微中子平均流量的圖形則會較爲平滑。

在微中子平均流量的等高曲線圖形中，我們發現當我們選取固定的 $\sin 2\theta_{13}$ 與 e 微中子平均流量的時候，其所對應的 $\cos 2\theta_{23}$ 是單一的數值區間，亦即 e 微中子平均流量具有 θ_{23} 簡併性之消除的重要性質，而且當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，可以對應出較為精確的 $\cos 2\theta_{23}$ 數值區間，雖然 e 微中子能量在 2GeV 到 3GeV 與 e 微中子能量在 5.5GeV 到 6.5GeV 都可以獲得 θ_{23} 簡併性之消除，但是 e 微中子能量在 2GeV 到 3GeV 的結果是更為理想的，因此我們的結論是 e 微中子在 $\cos \theta = -1.0$ 到 $\cos \theta = -0.8$ ，且能量在 2GeV 到 3GeV 的時候，其平均流量的等高曲線圖形可以讓我們獲得最理想的 θ_{23} 簡併性之消除。

然而在 μ 微中子平均流量與 τ 微中子平均流量的等高曲線圖形中， θ_{23} 都是具有簡併性的，也就是當我們選取固定的 $\sin 2\theta_{13}$ 與微中子平均流量的時候，其所對應的 $\cos 2\theta_{23}$ 是兩個近似對稱的數值區間，而且當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈大的時候，雖然無法完全消除 θ_{23} 的簡併性，但是卻可以降低 θ_{23} 簡併性的程度，當我們選取的 $\sin 2\theta_{13}$ 愈小的時候，則會讓 θ_{23} 的簡併性與 θ_{23} 的對稱性都會愈明顯。

在微中子的偵測實驗中，由於 e 微中子與 e 反微中子會分別造成負電子與正電子的產生，然而我們目前的實驗技術仍然無法區分負電子與正電子，所以我們最後必須考慮 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量。我們發現由於 e 微中子平均流量大於 e 反微中子平均流量，所以 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形幾乎與 e 微中子平均流量的等高曲線圖形很相似，因此在 e 微中子與 e 反微中子的共同平均流量的等高曲線圖形中，也將可以獲得 θ_{23} 簡併性之消除，這是我們所發現的重要結論。

參考文獻

- [1] SNO Collaboration, "Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory", *Phys. Rev. Lett.* 87, 071301 (2001)。
- [2] Super-Kamiokande Collaboration, "Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos", *Phys. Rev. Lett.* 81, 1562–1567 (1998)。
- [3] 蔡岳霖, 「太陽微中子之謎」, 國立交通大學, 碩士論文, 2004 年 7 月。
- [4] 林貴林, 「微中子物理簡介」, 物理雙月刊, 第二十四卷, 第四期, 547~552 頁, 2002 年 8 月。
- [5] B. Pontecorvo, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33 (1957) 549 and 34 (1958) 247; Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* 28 (1962) 870。
- [6] S. M. Bilenky, J. Hosek and S. T. Petcov, *Phys. Lett.* B94 (1980) 495。
- [7] J. Schechter and J. W. F. Valle, *Phys. Rev.* D22 (1980) 2227; M. Doi et al., *Phys. Lett.* B102 (1981) 323。
- [8] P. Langacker et al., *Nucl. Phys.* B 282 (1987) 589。
- [9] John N. Bahcall, M. C. Gonzalez-Garcia, Carlos Pena-Garay, "Solar Neutrinos Before and After Neutrino 2004", arXiv : hep-ph/0406294。
- [10] Guey-Lin Lin, Yoshiaki Umeda, "The matter effects to neutrino oscillations $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, ν_μ at very long baselines and the neutrino mixing angles θ_{13} and θ_{23} ", arXiv : hep-ph/0505009。
- [11] David Griffiths, Introduction to Elementary Particles, Chap 1 and Chap 2。
- [12] E. Kh. Akhmedov, "Neutrino physics", arXiv : hep-ph/0001264。
- [13] Manfred Lindner, "The Physics Potential of Future Long Baseline Neutrino Oscillation Experiments", arXiv : hep-ph/0209083。

- [14] A. Cervera et al., "Golden measurements at a neutrino factory",
Nucl. Phys. B579 (2000) 17-55 ◦
- [15] V. Barger et al., "Determination of the pattern of neutrino masses at
a Neutrino Factory", arXiv : hep-ph/0004208 ◦
- [16] 徐宇琛, 「微中子穿透地球之振盪機率」, 國立交通大學, 碩士論文
, 2005 年 7 月 ◦
- [17] M. Freund et al., "Testing Matter Effects in Very Long Baseline Neutrino
Oscillation Experiments", Nucl. Phys. B578 (2000) 27-57 ◦
- [18] Fritz DeJongh, "Long Baseline Neutrino Physics From Fermilab to Kamioka",
arXiv : hep-ex/0203005 ◦
- [19] Martin Freund, Tommy Ohlsson, "Matter Enhanced Neutrino Oscillations with
a Realistic Earth Density Profile", arXiv : hep-ph/9909501 ◦
- [20] J. Bernabeu et al., "The Earth Mantle-Core Effect in Matter-Induced
Asymmetries for Atmospheric Neutrino Oscillations",
arXiv : hep-ph/0110071 ◦
- [21] M. Honda et al., "Comparison of 3-Dimensional and 1-Dimensional Schemes
in the calculation of Atmospheric Neutrinos", Phys. Rev. D64 (2001) 053011 ◦
- [22] M. Honda et al., "A New calculation of the atmospheric neutrino flux in a
3-dimensional scheme", Phys. Rev. D70 (2004) 043008 ◦
- [23] Fei-Fan Lee, Guey-Lin Lin, "A semi-analytic calculation on the atmospheric
tau neutrino flux in the GeV to TeV energy range", arXiv : hep-ph/0412383 ◦
- [24] P. Huber, M. Maltoni, T. Schwetz, "Resolving parameter degeneracies in
long-baseline experiments by atmospheric neutrino data",
Phys. Rev. D71 (2005) 053006 ◦
- [25] Osamu Yasuda, "New plots and parameter degeneracies in
neutrino oscillations", arXiv : hep-ph/0405005 ◦