

第三章 通勤交通車路線問題定義與數學模式構建

本章主要根據通勤交通車之特性，參考韓復華等人[40]之研究，建立一個適用於通勤交通車之數學模式。在第一節中首先描述通勤交通車路線問題，並說明此問題之假設；第二節中將說明本研究所建立之模式。第三節則設計數個小型例題並進行例題測試，以驗證模式之正確性。

3.1 問題描述

本研究主要探討公司用來接送員工上、下班的通勤交通車路線問題，而上班與下班之路線有反向對稱的性質，故可只探討員工上班的通勤交通車路線問題。在通勤交通車載運的作業流程中，每個員工於公司訂定好之停靠站上車，所屬之工作廠區下車，通勤交通車必須於上班前將員工從居住地運送至工作廠區；每條路線可以有不同容量之車種選擇，使得通勤交通車服務在考量路線時間限制下可以有較高之乘載率。此外，雖然通勤交通車路線問題為多目標之問題，但因本研究首次將多對多起迄點及多車種之特性納入考量，為簡化問題之複雜度，本研究僅以服務所有需求之車輛總營運成本為目標進行研究。

為簡化問題，本研究對此問題有以下之假設：

1. 各工作廠區之位置與各停靠站之位置為已知。
2. 搭乘的員工數量為已知且固定。
3. 不同車型有不同之容量限制。
4. 停靠站與停靠站之間的距離與行駛時間為已知。
5. 各起迄對間的需求不可分割。
6. 需先設定最大之路線數，路線數範圍建議以「總需求人數/最小車型車容量」為考量。

本問題以總營運成本最小化為目標，並滿足下列限制式：

1. 每輛車輛可以服務多個起迄對間之需求。
2. 每個起迄對間之需求只能由一輛車輛服務一次。
3. 每個起迄對間之需求都必須被滿足。
4. 每輛車之服務總員工數不能違反該車的容量限制。
5. 每輛車均有相同的最大旅行時間限制。

3.2 模式列式

在模式建立前，先將模式中各符號說明如下：

N = 所有點集合; 其中 0 為虛擬點

R = 路線集合; $R = \{1, 2, \dots, R_n\}$, R_n 表示路線數

V = 車輛型態集合; $V = \{1, 2, \dots, V_n\}$, V_n 表示車輛型態數

M = OD起迄對集合; $M = \{1, 2, \dots, M_n\}$, M_n 表示OD起迄對之數量

q_m = OD起迄對間之需求量, $m \in M$

s_m = OD起迄對之起點, $m \in M$

t_m = OD起迄對之迄點, $m \in M$

c^v = v 型態車輛之固定成本

d_{ij}^v = v 型態車輛經過節線 ij 之變動成本

k_v = v 型態車輛之車容量

t_{ij} = 節線 ij 之旅行時間 + i 點之服務時間

T_0 = 每一條路線允許之車輛最大旅行時間

$$g_{i,m} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 點為起迄對 } m \text{ 之起點} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$h_{i,m} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 點為起迄對 } m \text{ 之迄點} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

決策變數為

$$y_m^k = \begin{cases} 1, & \text{若指派 } q_m \text{ 至路線 } k \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{起迄需求量指派變數})$$

$$\delta_{kv} = \begin{cases} 1, & \text{若路線 } k \text{ 使用 } v \text{ 型態車輛} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{車輛型態指派變數})$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{若路線 } k \text{ 有使用} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{路線啟動變數})$$

$$p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{若路線 } k \text{ 經過節線 } ij \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{路線指派變數})$$

$$x_{ij}^{km} = \text{指派至路線 } k \text{ 之起迄對 } m \text{ 經過節線 } ij \text{ 之流量} \quad (\text{路線流量變數})$$

依據上節之問題特性，以最小化總營運成本為規劃目標構建通勤交通車路線模式，列示如下：

$$\text{Min} \sum_{k \in R} \sum_{v \in V} c^v \cdot \delta_{kv} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in R} \sum_{v \in V} d_{ij}^v \cdot (p_{ij}^k \cdot \delta_{kv}) \quad (3-1)$$

Subject to

$$\sum_{j \in N} p_{j0}^k = z_k, \quad \forall k \in R \quad (3-2)$$

$$\sum_{j \in N} p_{0j}^k = z_k, \quad \forall k \in R \quad (3-3)$$

$$\sum_{j \in N} p_{ij}^k = \sum_{j \in N} p_{ji}^k \leq z_k, \quad \forall i \in N, \forall k \in R \quad (3-4)$$

$$\sum_{k \in R} y_m^k = 1, \quad \forall m \in M \quad (3-5)$$

$$y_m^k \leq z_k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-6)$$

$$y_m^k \leq \sum_{j \in N} p_{s_m j}^k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-7)$$

$$y_m^k \leq \sum_{i \in N} p_{i t_m}^k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-8)$$

$$z_k = \sum_{v \in V} \delta_{kv}, \quad \forall k \in R \quad (3-9)$$

$$\sum_{m \in M} q_m \cdot y_m^k \leq \sum_{v \in V} k_v \cdot \delta_{kv}, \quad \forall k \in R \quad (3-10)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij}^k \cdot t_{ij} \leq T_0, \quad \forall k \in R \quad (3-11)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji}^{km} + g_{i,m} \cdot q_m \cdot y_m^k = \sum_{j \in N} x_{ij}^{km} + h_{i,m} \cdot q_m \cdot y_m^k, \quad \forall m \in M, \forall i \in N, \forall k \in R \quad (3-12)$$

$$\sum_{m \in M} x_{ij}^{km} \leq B \cdot p_{ij}^k, \quad \forall i, j \in N, \forall k \in R \quad (3-13)$$

$$y_m^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-14)$$

$$\delta_{kv} \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \forall v \in V \quad (3-15)$$

$$z_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R \quad (3-16)$$

$$p_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \forall i, j \in N \quad (3-17)$$

$$x_{ij}^{km} \geq 0, \text{ and integer}, \quad \forall i, j \in N, \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-18)$$

(3-1)式為總營運成本最小之目標式；(3-2)式與(3-3)式為每一路線進出虛擬點的總次數為 z_k ；(3-4)式確保每一路線上進出各點次數一致，且小於或等於 z_k ；(3-5)式表示所有 OD 起訖對之需求量只能指派給一條路線；(3-6)式表示若將起迄量 q_m 指派給路線 k 時，則路線 k 一定存在；(3-7)式表示若將 q_m 起迄量指派給路線 k 時，則起迄對 m 的起點一定指派給路線 k ；(3-8)式表示若將 q_m 起迄量指派給路線 k 時，則起迄對 m 的迄點一定指派給路線 k ；(3-9)式表示每一路線只能使用一種車輛，且路線若未啟動則無車輛指派；(3-10)式為車容量限制；(3-11)式表示路線時間限制；(3-12)表示流量守恆；(3-13)

式為邏輯限制式，即若 x_{ij}^{km} 存在，則 p_{ij}^k 一定存在，其中 B 為一個很大的數值；(3-14)、(3-15)、(3-16)、(3-17)式為 0-1 整數變數；(3-18)式為非負正數變數。

從上述之數學模式可發現其為二次指派(非線性)之數學模式，求解效率較線性之數學模式低。因此，參考 Williams[27]所述之模式建構相關邏輯可將上述之數學式轉換為一次指派之線性數學模式，轉換邏輯說明如下：若 $\delta_1\delta_2$ 為 0-1 變數，要將其改為線性時，可增加一個新的 0-1 變數 δ_3 取代 $\delta_1\delta_2$ ，當 $\delta_3=1$ 時，表示 $\delta_1=1$ 且 $\delta_2=1$ 。因此，將 $\delta_1\delta_2$ 改為線性時，必須加入下面三個限制式： $-\delta_1+\delta_3 \leq 0$ 、 $-\delta_2+\delta_3 \leq 0$ 與 $\delta_1+\delta_2-\delta_3 \leq 1$ ，以確保 δ_3 等於 1 時， δ_1 與 δ_2 皆等於 1。

根據上述之邏輯，本研究將此問題轉換為線性之模式，以減少問題之複雜度。故將目標式之「 $p_{ij}^k \cdot \delta_{kv}$ 」以 η_{ij}^{kv} 取代，並於限制式的部分增加三個邏輯限制式。轉換後的模式如下，目標式更改為(3-19)式，新增的三個邏輯限制式如下面(3-20)式至(3-22)式：

$$\text{Min} \sum_{k \in R} \sum_{v \in V} c^v \cdot \delta_{kv} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in R} \sum_{v \in V} d_{ij}^v \cdot \eta_{ij}^{kv} \quad (3-19)$$

Subject to

$$\sum_{j \in N} p_{j0}^k = z_k, \quad \forall k \in R \quad (3-2)$$

$$\sum_{j \in N} p_{0j}^k = z_k, \quad \forall k \in R \quad (3-3)$$

$$\sum_{j \in N} p_{ij}^k = \sum_{j \in N} p_{ji}^k \leq z_k, \quad \forall i \in N, \forall k \in R \quad (3-4)$$

$$\sum_{k \in R} y_m^k = 1, \quad \forall m \in M \quad (3-5)$$

$$y_m^k \leq z_k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-6)$$

$$y_m^k \leq \sum_{j \in N} p_{s_m j}^k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-7)$$

$$y_m^k \leq \sum_{i \in N} p_{i t_m}^k, \quad \forall k \in R, \forall m \in M \quad (3-8)$$

$$z_k = \sum_{v \in V} \delta_{kv}, \quad \forall k \in R \quad (3-9)$$

$$\sum_{m \in M} q_m \cdot y_m^k \leq \sum_{v \in V} k_v \cdot \delta_{kv}, \quad \forall k \in R \quad (3-10)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij}^k \cdot t_{ij} \leq T_0, \quad \forall k \in R \quad (3-11)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji}^{km} + g_{i,m} \cdot q_m \cdot y_m^k = \sum_{j \in N} x_{ij}^{km} + h_{i,m} \cdot q_m \cdot y_m^k, \quad \forall m \in M, \forall i \in N, \forall k \in R \quad (3-12)$$



$$\sum_{m \in M} x_{ij}^{km} \leq B \cdot p_{ij}^k, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in R \quad (3-13)$$

$$y_m^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \quad \forall m \in M \quad (3-14)$$

$$\delta_{kv} \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \quad \forall v \in V \quad (3-15)$$

$$z_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R \quad (3-16)$$

$$p_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in R, \quad \forall i, j \in N \quad (3-17)$$

$$x_{ij}^{km} \geq 0, \text{ and integer}, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in R, \quad \forall m \in M \quad (3-18)$$

$$p_{ij}^k \geq \eta_{ij}^{kv} \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in R, \quad \forall v \in V \quad (3-20)$$

$$\delta_{kv} \geq \eta_{ij}^{kv} \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in R, \quad \forall v \in V \quad (3-21)$$

$$p_{ij}^k + \delta_{kv} - 1 \leq \eta_{ij}^{kv} \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in R, \quad \forall v \in V \quad (3-22)$$

根據上述之模式，以變數數目與限制式數目評估此模式之複雜度，茲將其整理如下表 3.1。

表 3.1 通勤交通車模式之複雜度

	數目
變數	$R_n(V_n N^2 + M_n N^2 + M_n + V_n + N^2 + 1)$
限制式	$3R_n V_n N^2 + R_n M_n N + 3R_n M_n + N R_n + 2R_n N^2 + 5R_n + M_n$

3.3 模式驗證

為了確認上節所述模式之正確性，故本節設計 24 題不同路網型態之小型測試例題，並利用 ILOG OPL Development Studio 4.2 軟體在 Pentium IV 2.8GHz CPU 及 1GHz RAM 之個人電腦作業平台求解。3.3.1 節先進行測試例題之設計，3.3.2 則針對各測試例題進行求解，並分析測試例題求解結果。

3.3.1 測試例題設計

本研究設計之測試例題以各點之連接情形分成二大類，一為所有點對點間都有路徑相連之完全性路網，另一種為非所有點對點間都有路徑相連之非完全性路網；分成二大類主要是因為實務上路網大多屬於非完全性路網，但又考量到例題設計之非完全性路網節點相連情形可能限制路線之節點交換，而顯現不出節點交換改善之效果，故將例題分成完全性路網與非完全性路網二類，以避免因設計之路網連接情形而影響啟發式解法之成效。此外，二種路網又依據節點之分佈情況分成走廊形及非走廊形二種，走廊形之節點分布情形屬於帶狀分佈，如圖 3.1(a)所示，而非走廊形之節點分布則較為均勻，如圖 3.1(b)所示。其中菱形圖案表起點，三角形圖案表廠區(迄點)。故本研究共設計四種路網

型態之小型測試例題：完全性路網走廊形（CC）、完全性路網非走廊形（CR）、非完全性路網走廊形（IC）、非完全性路網非走廊形（IR）。其中完全性路網走廊形之測試例題有 CC1 至 CC8 共 8 題，完全性路網非走廊形之測試例題有 CR1 至 CR6 共 6 題，非完全性路網走廊形之測試例題有 IC1 至 IC7 共 7 題，非完全性路網非走廊形之測試例題有 IR1 至 IR3 共 3 題。

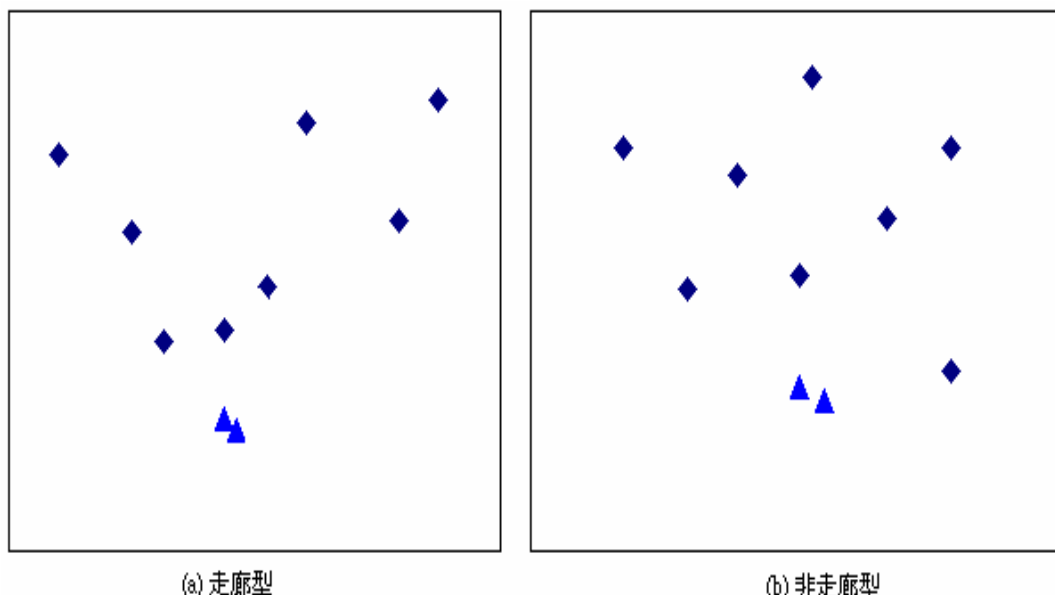


圖 3.1 走廊型與非走廊型節點分布示意圖

在本研究之問題中，路線時間限制亦為一重要參數，不同之路線時間限制可能會產生不同之結果，故設定不同路線時間限制即屬於不同之例題。本研究各例題之路線時間限制之設定根乃據下列(3-23)式求算：

$$T_0 = L_0 \cdot k \quad (3-23)$$

其中， T_0 為路線時間限制， L_0 為起點與迄點間最大之旅行時間， k 則為一放大倍數。在本研究之測試例題中， k 值之範圍介於 1.1~2。

此外，各測試例題皆有三種車型可供選擇，其中大巴有 43 個座位，中巴有 20 個座位，小巴有 9 個座位。三種車型之成本結構如表 3.2。固定成本為一定值，表示使用該車型車輛所需付出之車輛基本成本，而變動成本為車輛每行駛一單位距離所需之成本。

表 3.2 測試例題各車型之成本結構

車型	固定成本	變動成本
大巴	700	12*d
中巴	500	5*d
小巴	300	3*d

由於非完全性路網之節點並非皆相連，其求解效率應會比完全性路網快，故完全性路網以 8 個起點、2 個迄點設計不同之例題，非完全性路網則以 12 個起點、2 個迄點設計不同之例題，且每個例題之最大路線數設計為 3 條。根據上述之資料，可估算出屬於完全性路網之例題共有 6060 個變數、3985 個限制式，屬於非完全性路網之例題共有 16548 個變數、7773 個限制式。茲將各測試例題之編號、路網型態、起迄點個數、路線時間限制(T_0)匯整如下表 3.3，測試例題詳細資料參照附錄一。

表 3.3 測試例題資料

路網型態		起、迄點個數	L_0	k	T_0	例題標號
完全性路網	走廊型	8 個起點 2 個迄點	65.9	1.3	86	CC1
				1.5	99	CC2
				1.6	106	CC3
				1.7	113	CC4
		8 個起點 2 個迄點	55.2	1.2	67	CC5
				1.5	83	CC6
	8 個起點 2 個迄點	114.3	1.1	126	CC7	
			1.2	138	CC8	
	非走廊型	8 個起點 2 個迄點	38.9	1.7	67	CR1
				1.8	71	CR2
		8 個起點 2 個迄點	41.5	1.5	61	CR3
				1.6	65	CR4
8 個起點 2 個迄點		37	1.5	56	CR5	
			1.6	60	CR6	
非完全性路網	走廊型	12 個起點 2 個迄點	31.18	1.3	41	IC1
				1.5	47	IC2
				1.8	57	IC3
				2	63	IC4
	12 個起點 2 個迄點	30.12	1.5	46	IC5	
			1.8	55	IC6	
			2	61	IC7	
	非走廊型	12 個起點 2 個迄點	26.42	1.5	40	IR1
				1.8	48	IR2
				2	53	IR3

3.3.2 測試例題求解

根據通勤交通車路線問題之數學模式，將前一小節所設計之測試例題，利用 ILOG OPL Development Studio 4.2 軟體於 Windows XP 作業系統、Pentium IV 2.8GHz CPU 及 1GHz RAM 之個人電腦上求解。因測試例題眾多，本研究在此僅以 CR6 與 IC2 二個測試例題為例。

1. 測試例題 CR6

(1) 例題資料描述

有 1~8 共八個起點(上車點)，A 與 B 二個迄點(下車點)，節點分佈情形如圖 3.2，各點座標如表 3.4，各點間之距離為各點直線距離。每條路線最大之旅行時間為 60 分鐘。車輛行駛速率為 40 km/hr。各點服務時間(表 3.5)與起迄需求量(表 3.6)表示如下：

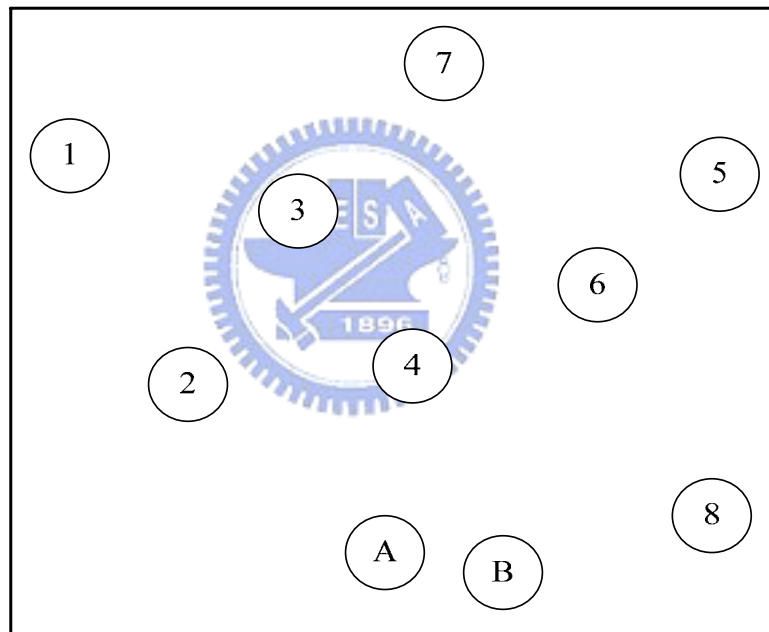


圖 3.2 例題 CR6 節點分佈圖

表 3.4 例題 CR6 節點座標

	1	2	3	4	5	6	7	8	A	B
X 座標	16	21	25	30	42	37	31	42	30	32
Y 座標	57	47	55	48	57	52	62	41	40	39

表 3.5 例題 CR6 節點服務時間

	1	2	3	4	5	6	7	8	A	B
服務時間	2.5	1.5	1.5	3	1	2	3	2	3	3

表 3.6 例題 CR6 起迄需求量

	1→A	1→B	2→A	2→B	3→A	3→B	4→A	4→B
起迄需求量	4	1	2	1	3	0	4	2
	5→A	5→B	6→A	6→B	7→A	7→B	8→A	8→B
起迄需求量	1	1	3	1	2	4	1	3

(2) 例題 CR6 測試結果

例題 CR6 利用 ILOG OPL Development Studio 4.2 軟體測試求解，其最佳解結果如下：最小總營運成本為 1772.4 元，共產生 3 條路線，路線 1 使用中巴，共乘載 10 人；路線 2 使用小巴，共乘載 8 人；路線 3 使用中巴，共乘載 15 人。各路線路徑如圖 3.3。

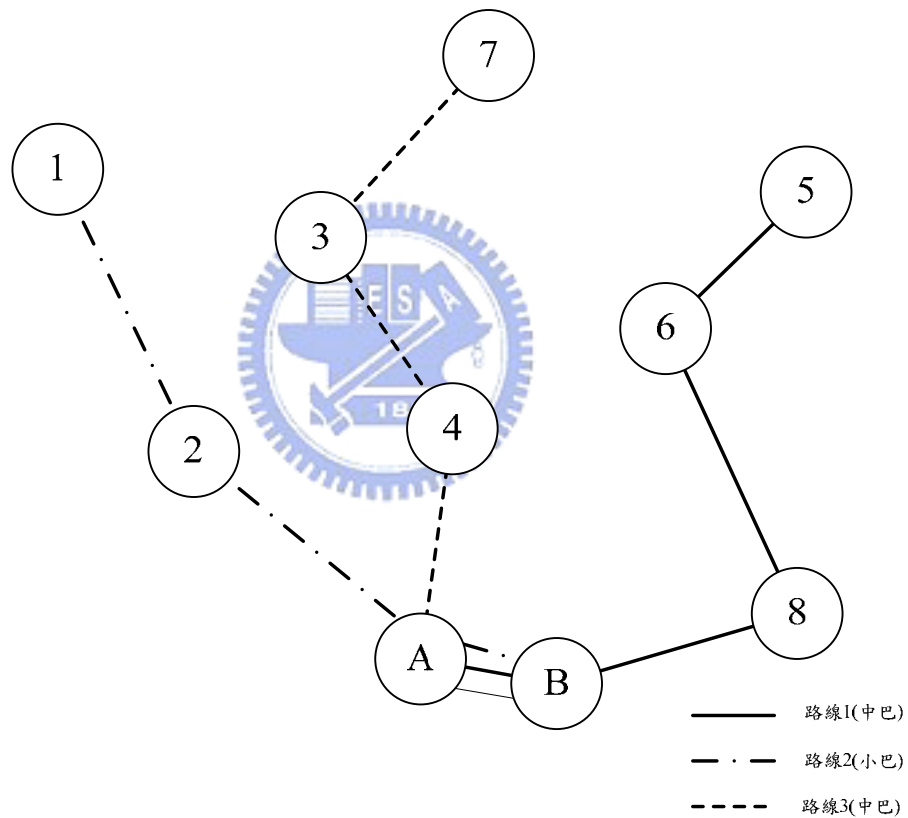


圖 3.3 例題 CR6 測試結果路徑圖

2. 測試例題 IC2

(1) 例題資料描述

有 1~12 共十二個起點(上車點)，A 與 B 二個迄點(下車點)，路網如圖 3.4。每條路線最大之旅行時間為 47 分鐘。車輛行駛速率為 30 km/hr，各點間距離矩陣(表 3.7)、各點服務時間(表 3.8)與起迄需求量(表 3.9)表示如下：

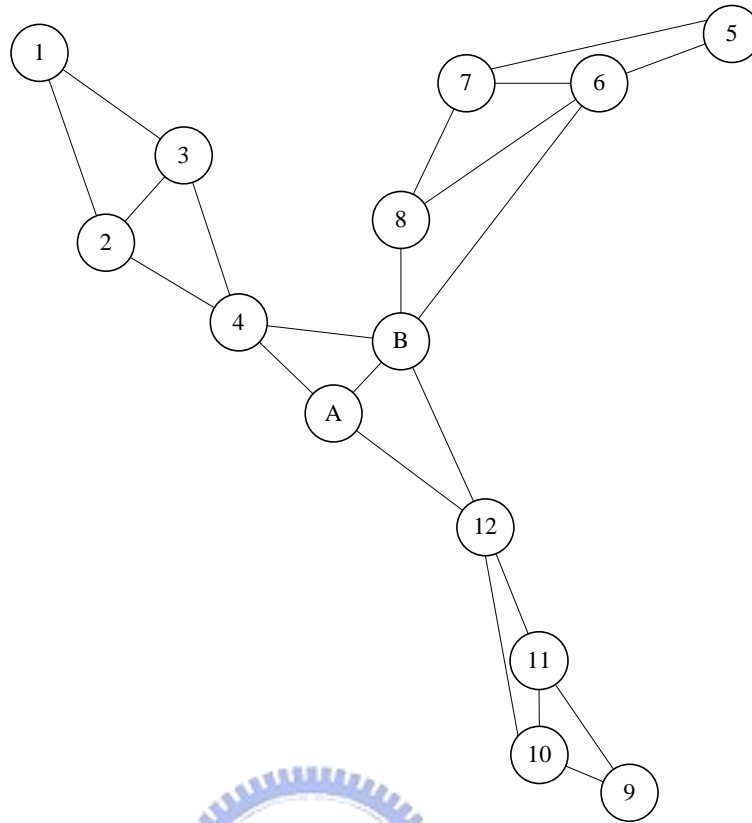


圖 3.4 例題 IC2 路網圖

表 3.7 例題 IC2 距離矩陣

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	A	B
1	0	4.12	3.61	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
2	4.12	0	1.41	2.83	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
3	3.61	1.41	0	3.16	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
4	---	2.83	3.16	0	---	---	---	---	---	---	---	---	2.83	3.16
5	---	---	---	---	0	2.24	4.12	---	---	---	---	---	---	---
6	---	---	---	---	2.24	0	2	4.24	---	---	---	---	---	6.71
7	---	---	---	---	4.12	2	0	3.16	---	---	---	---	---	---
8	---	---	---	---	---	4.24	3.16	0	---	---	---	---	---	3
9	---	---	---	---	---	---	---	---	0	1.41	3.16	---	---	---
10	---	---	---	---	---	---	---	---	1.41	0	2	5.1	---	---
11	---	---	---	---	---	---	---	---	3.16	2	0	3.16	---	---
12	---	---	---	---	---	---	---	---	---	5.1	3.16	0	3.61	4.12
A	---	---	---	2.83	---	---	---	---	---	---	---	3.61	0	1.41
B	---	---	---	3.16	---	6.71	---	3	---	---	---	4.12	1.41	0

表 3.8 例題 IC2 節點服務時間

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	A	B
服務時間	2.5	1.5	1.5	3	1	2	3	2	1.5	1.5	1.5	2.5	3	3

表 3.9 例題 IC2 起迄需求量

	1→A	1→B	2→A	2→B	3→A	3→B	4→A	4→B
起迄需求量	4	1	2	1	3	0	4	2
	5→A	5→B	6→A	6→B	7→A	7→B	8→A	8→B
起迄需求量	1	1	3	1	2	4	1	3
	9→A	9→B	10→A	10→B	11→A	11→B	12→A	12→B
起迄需求量	0	3	1	2	2	1	3	2

(2) 例題 IC2 測試結果

例題 IC2 利用 ILOG OPL Development Studio 4.2 軟體測試求解，其最佳解結果如下：最小總營運成本為 1677.45 元，共產生 3 條路線，路線 1 使用中巴，共乘載 14 人；路線 2 使用中巴，共乘載 16 人；路線 3 使用中巴，共乘載 17 人。各路線路徑如圖 3.5。

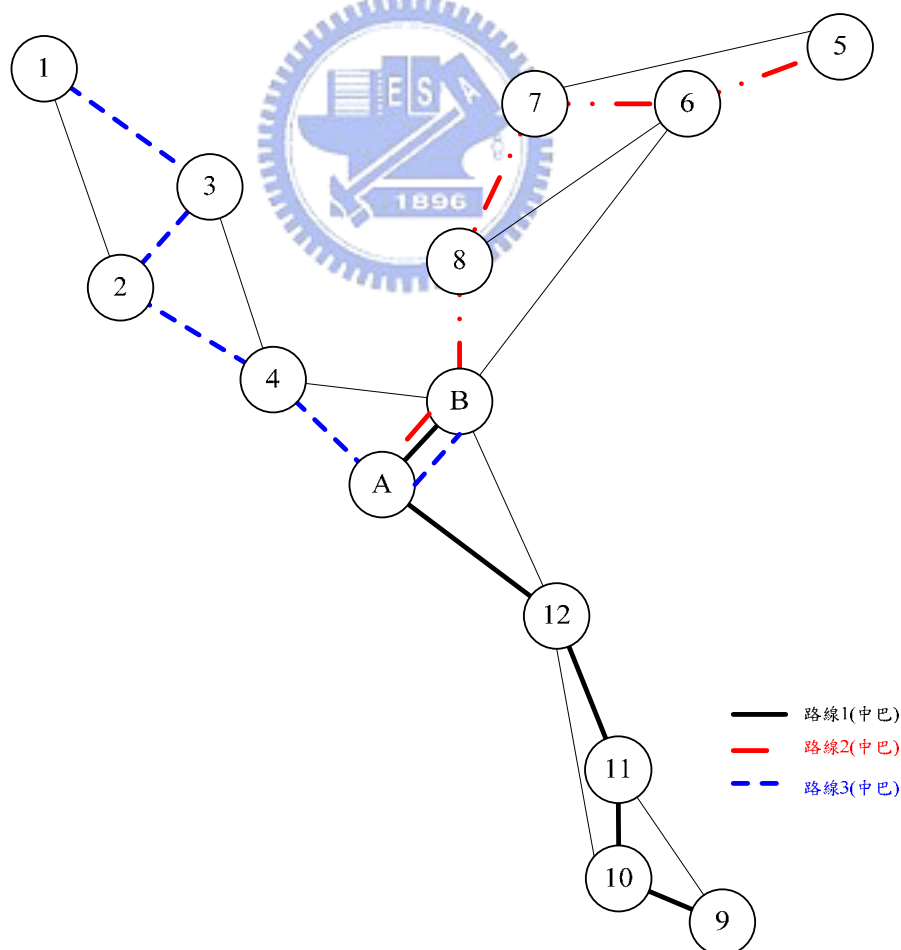


圖 3.5 例題 IC2 測試結果路徑圖

上述僅簡單以二個測試例題為例，所有測試例題共有 24 題，茲將各測試例題求解結果整理如表 3.10，詳細結果參照付錄二。

表 3.10 測試例題求解結果

路網型態		例題標號	目標值	求解時間
完全性 路網	走廊型	CC1	1752.7	1 小時 14 分 15 秒
		CC2	1752.7	2 小時 23 分 16 秒
		CC3	1524.5	6 分 26 秒
		CC4	1524.5	7 分 49 秒
		CC5	1705.4	3 分 1 秒
		CC6	1705.4	6 小時 3 分 59 秒
		CC7	2328.2	2 天 18 小時 6 分 25 秒
		CC8	1791	21 分 53 秒
	非走廊型	CR1	1683.7	2 小時 15 分 39 秒
		CR2	1683.7	6 小時 13 分 6 秒
		CR3	1599.8	21 小時 28 分 33 秒
		CR4	1355	44 分 09 秒
		CR5	1772.4	19 分 54 秒
		CR6	1772.4	10 小時 28 分 08 秒
非完全 性路網	走廊型	IC1	1677.45	15 分
		IC2	1677.45	6 分 26 秒
		IC3	1617.47	11 分 57 秒
		IC4	1617.47	16 分 38 秒
		IC5	1959.32	17 分 19 秒
		IC6	1870.33	18 分 14 秒
		IC7	1870.33	29 分 37 秒
	非走廊型	IR1	1682.05	10 分 5 秒
		IR2	1586.19	1 小時 11 分 42 秒
		IR3	1586.19	41 分 27 秒

例題測試除了驗證本研究通勤交通車路線問題模式之正確性外，從表 3.10 中可發現非完全性路網之測試例題求解時間較完全性路網之測試例題短，而走廊形路網之測試例題求解時間普遍較非走廊形之測試例題短。另外，亦可從表 3.10 之結果驗證路線時間限制(T0)實為一重要參數，不同之路線時間限制可能會產生不同的結果。