

國立交通大學  
工業工程與管理學系

碩士論文

成本受限下  
混合實驗之最佳化演算法  
Optimization of Mixture Experiments under Restricted  
Manufacturing Costs



研究生：壽正琪

指導教授：唐麗英 博士

中華民國九十五年六月

# 成本受限下混合實驗之最佳化演算法

Optimization of Mixture Experiments  
under Restricted Manufacturing Costs

研 究 生：壽正琪

Student : Cheng-Chi Shou

指導教授：唐麗英 博士

Advisor : Lee-Ing Tong

國立交通大學

工業工程與管理學系

碩士論文



Submitted to Department of Industrial Engineering and Management  
College of Management

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master of Science

in

Industrial Engineering

June 2006

Hsin-Chu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

# 成本受限下混合實驗之最佳化演算法

研究生：壽正琪

指導教授：唐麗英

國立交通大學工業工程與管理學系碩士班

## 摘要

隨著科技的進步及消費者對產品品質之要求增多，使得產品設計日趨複雜，產品之品質已非單一品質特性決定，而是由多個品質特性所決定。在某些產業中，實驗之反應變數 (response variables) 是受因子間之相對比例調配而成，其因子水準之設定方法不能用傳統之實驗設計 (Design of Experiments, DOE)，而是需要用混合實驗 (Mixture Experiments) 之方法。在混合實驗中，因子稱為成份 (component)，實驗目的在於找出最佳成份比例配方。另外，製造成本對於業者而言是一項相當重要之考量因素，而目前有關實驗設計最佳化的中外文獻中，尚未見到將成本納入考量之實際案例，因此本論文之主要目的是利用反應六標準差品質之望想函數 (desirability function for achieving six-sigma quality) 及雙反應曲面方法 (Dual Response Surface Method, DRSM)，發展出一套具多品質特性混合實驗之最佳化演算法。在成本限制條件下，求出一組可達到最大化產品品質之成份比例，再以最佳配方之總望想值對照其品質水準，建議業者是否需要進行品質改善。最後，本論文以台灣某公司汽車煞車用橡膠皮碗之案例，驗證本論文所提出之多品質特性混合實驗問題之最佳化演算法確實有效。

**【關鍵詞】** 混合實驗、多品質特性最佳化、望想函數、雙反應曲面方法

# Optimization of Mixture Experiments under Restricted Manufacturing Costs

Student: Cheng-Chi Shou

Adviser: Lee-Ing Tong

Department of Industrial Engineering and Management

National Chiao Tung University

Taiwan

## Abstract

With the improvement of technology and the increasing demands of the consumer, product design is becoming more and more complicated. The optimization of a single response can no longer satisfy the needs of customers. Therefore, the optimization of multi-responses is increasingly important. In some chemical or material experiments, responses are affected by the proportional relationship of the factors (or components) rather than the quantity of the factors. Such experiments are called mixture experiments. In addition, the manufacturing cost is also a vital condition in determining the optimal proportion of the component. Therefore, this study utilizes the desirability function for achieving six-sigma quality and Dual Response Surface Method (DRSM) to integrate the multi-response into one component's index, and then to develop a procedure for optimizing the composite quality index under restricted manufacturing costs. A real case study of rubber bowl production from a Taiwan's automobile company is utilized to illustrate the effectiveness of the proposed procedure.

**Key Words:** Mixture Experiments, multi-response, desirability function, Dual Response Surface Method

## 誌謝

隨著畢業典禮倒數一天天的遞減，意味著即將要結束這兩年的研究生生涯，邁向人生的另一段旅程。雖然說結束是另一段故事的開始，但心中仍舊充滿許多不捨，兩年實在是太快了。

在研究生的生涯中，首先我要感謝的是我的指導教授唐麗英老師，她在學術上給予我很大的空間發揮，並訓練我獨立思考的能力。同時，也非常感謝口試委員黎正中、梁高榮和張永佳老師，在論文提案、口試時，都提出很多寶貴的建議，使我的論文更臻完善。

此外，更感謝這一路陪我走過的實驗室同學，在生活和課業上很照顧我的林長科、關心鼓勵我的吳莉安、中途飛去荷蘭的李幸穎、啟蒙我機車嘴炮的黃啟峰、可愛逗趣的羅修來、陪我談心事的張喬凱、替我做造型的周碩鴻、同窗六年的蘇俊榮、最快當新郎的江盈杰、給人喜感的陳昱皓、聽他垃圾話解悶的王鈺堂，這兩年的點點滴滴成為我人生當中美好的回憶。

最後，要感謝我的家人和謝亦勤，是你們在背後默默的給我支持與鼓勵，才能讓我無後顧之憂的求學，順利拿到碩士學位。未來我會更加努力，成為你們最大的驕傲。僅以此文向曾經幫助、關心、照顧我的人，表達我心中最深的謝意。

壽正琪 謹誌於

國立交通大學工業工程與管理研究所

2006年6月7日

# 目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	VII
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究方法.....	2
1.4 研究架構.....	3
第二章 文獻探討.....	4
2.1 混合實驗設計介紹.....	4
2.1.1 電腦輔助設計.....	11
2.2 各望想函數之介紹.....	14
2.2.1 望想函數.....	14
2.2.2 修正之望想函數.....	18
2.2.3 反應六標準差品質之望想函數.....	20
2.3 雙反應曲面之介紹.....	23
2.4 多品質特性混合實驗問題最佳化之相關文獻.....	24
第三章 研究方法.....	26
3.1 多品質特性混合實驗之規劃.....	26
3.2 望想函數之應用.....	26
3.2.1 反應六標準差品質之望想函數計算.....	27
3.3 雙反應曲面法之應用.....	28
3.4 模型適配正確性檢定與確認實驗.....	29
3.5 配方品質與成本之比較.....	30
第四章 實例驗證.....	32
4.1 實例說明.....	32
4.2 實驗規劃.....	33

4.3 實驗數據分析.....	34
4.3.1 反應六標準差品質望想函數之應用.....	35
4.3.2 雙反應曲面方法之應用.....	38
4.4 模型適配正確性檢定.....	41
4.4.1 總望想值之反應曲面模型適配正確性檢定.....	41
4.4.2 配方成本之反應曲面模型適配正確性檢定.....	42
4.5 確認實驗.....	43
4.6 最佳配方總望想值與成本之比較.....	44
第五章 結論與建議.....	46
5.1 結論與貢獻.....	46
5.2 未來研究方向.....	47
參考文獻.....	48



## 圖目錄

圖 1.1	研究架構流程圖 .....	3
圖 2.1	混合實驗設計可行解區域示意圖(A)為成份數 $q = 2$ (B)為成份數 $q = 3$ ....	5
圖 2.2	三角座標系統 .....	5
圖 2.3	$q = 3$ 和 $q = 4$ 之單體晶格設計示意圖 .....	6
圖 2.4	$q = 3$ 和 $q = 4$ 之單體質心設計示意圖 .....	7
圖 2.5	當成份有下限時之線性轉換示意圖 .....	8
圖 2.6	可行解區域不完整圖示 .....	9
圖 2.7	( $q = 3, p = 2$ ) 之混合實驗可行解空間示意圖 .....	10
圖 2.8	二因子之限制實驗區域 .....	12
圖 2.9	以規格界限區分望想值 .....	15
圖 2.10	以平滑規格界限區分望想值 .....	16
圖 2.11	以單邊規格界限區分望想值 .....	17
圖 2.12	單邊規格品質特性與望想值之對應圖 .....	19
圖 2.13	雙邊規格品質特性與望想值之對應圖 .....	20
圖 2.14	長期製程穩定之常態分配圖 .....	22
圖 3.1	研究方法流程圖 .....	31
圖 4.1	總望想值之殘差常態機率圖 .....	41
圖 4.2	總望想值之殘差對預測值散佈圖 .....	42
圖 4.3	配方成本之殘差常態機率圖 .....	42
圖 4.4	配方成本之殘差對預測值散佈圖 .....	43



## 表目錄

表 2.1	混合實驗設計種類 .....	9
表 2.2	變數定義表 .....	9
表 2.3	望想值與品質程度對照表 .....	15
表 2.4	反應六標準差品質之望想函數之望想值與品質水準對照表 .....	22
表 4.1	汽車橡膠皮碗之規格定義 .....	33
表 4.2	各成份之成本資訊 .....	33
表 4.3	橡膠皮碗之混合實驗規劃 .....	34
表 4.4	反應變數 H2 與 H3 之實驗結果.....	35
表 4.5	反應變數 H1 之平均數與變異數估計值 .....	36
表 4.6	反應變數 H1 在各實驗組合下之望想值 .....	36
表 4.7	無明顯規格界限之反應變數在各實驗組合下之望想值 .....	37
表 4.8	各實驗組合下之總望想值 .....	37
表 4.9	總望想值簡化二次反應曲面模型之 ANOVA 表 .....	38
表 4.10	各實驗組合下之成本資訊 .....	39
表 4.11	配方成本簡化二次反應曲面模型之 ANOVA 表.....	39
表 4.12	成份比例之最佳解 .....	40
表 4.13	最佳配方確認實驗與預測值比較表 .....	43
表 4.14	總望想值之比較表 .....	44
表 4.15	最佳配方成本之比較表 .....	44

# 第一章 緒論

本章說明本論文之研究背景與動機、研究目的、研究方法及研究架構。

## 1.1 研究背景與動機

在消費者意識抬頭的微利時代，各產業都需要發展一套降低產品成本與提昇產品品質的策略才能使企業能永續經營。然而，隨著科技技術的日新月異，產品之開發、設計、製造等程序日趨複雜，單一品質特性最佳化之產品已經不足以達到消費者的要求，因此在工程領域有許多品管的問題均應用了多品質最佳化技術，以找出一組製程參數的設定值，使多個品質特性達到最佳化之目的。

許多醫藥、化工、食品與材料等產業中，常誤用傳統的實驗設計方法 (Design of Experiments, DOE) 來求得實驗因子之最佳配方，使得實驗結果產生謬誤。主要原因是由於這些產業的實驗因子水準設定方法不屬傳統實驗設計，而是需要用混合實驗 (Mixture Experiments) 方法。混合實驗要找的是因子間之相對比例，其因子又稱為成份 (或元素)，各成份間互相不為獨立，故不能只調整單一成份比例。

目前中外文獻所提解決多品質特性問題的方法有很多種，如：主成份分析 (Principal Component Analysis, PCA)、反應曲面法 (Response Surface Method, RSM)、模糊邏輯推論 (Fuzzy Logic)、灰關聯分析 (Grey Relational Analysis)、資料包絡法 (Data Envelopment Analysis, DEA)、類神經網路 (Neural Networks)、望想函數 (The Desirability Function) 等方法。其中望想函數廣泛被工業界使用，實用性極高，首先由 Harrington[12] 提出，之後 Derringer 與 Suich[11] 及 Montgomery et al.[8] 分別提出修正後的望想函數 (Modified Desirability Function)。此外，Ribardo 與 Allen[20] 提出能夠反應六標準差品質之望想函數 (Desirability Function for Achieving Six-Sigma Quality)。由於望想函數是一種乘法

模型 (Multiplicative model)，其指標值介於[0,1]，所以將望想函數應用於多品質特性之問題上的優點是，必須要在每個品質特性表現皆優良的情況下，才能使整體的品質達到目標值。

此外，在規劃設計及研發新產品時，成本也是一個很重要的考量，目前中外文獻中尚未發現將成本納入實驗設計中以找出最佳配方的實際案例。但在研發新產品時，若實驗所決定之最佳配方成本過高，生產者亦無法使用。因此本論文在發展多品質混合實驗最佳化演算法的過程中，將配方之成本納入實驗設計之考量。

## 1.2 研究目的

本論文針對納入成本因素考量的多品質混合實驗問題，在成本限制條件下，發展出一套可同時最佳化品質水準與控制成本之演算法，並藉由實驗結果分析最佳配方之品質水準程度，給予製程是否需要改善之建議。最後比較配方品質與成本之改善程度，以說明納入成本因素之重要性。本論文之成果期望能為產學界帶來貢獻。以下列出三點本論文之研究目的：

1. 結合反應六標準差品質之望想函數與雙反應曲面方法，在成本受限下，達到最佳化品質之目的。
2. 藉由實驗結果得知最佳配方之品質水準程度，可進一步給予業者是否需要進行產品品質改善作業之建議。
3. 由於學術界罕見成本資訊之混合實驗實際案例，本論文之結果可彙整出一套標準作業流程，對工業界將有相當大之應用價值。

## 1.3 研究方法

本論文針對多品質特性之混合實驗問題，用反應六標準差品質之望想函數求得各組實驗組合下之總望想值，再進一步納入成本因素，結合雙反應曲面方法，令總望想值為主要反應變數、成本為限制反應變數，在各個成份的比例限制和成

本限制下，以最大化總望想值為目標，以達到多個品質特性同時最佳化之結果。雙反應曲面方法 (Dual Response Surface Method, DRSM) 能夠同時最佳化兩個反應變數，本論文將整合反應六標準差品質之望想函數與雙反應曲面方法構建一個最佳化演算法。

本論文最後應用一個汽車煞車用橡膠皮碗之混合實驗之實際案例，來驗證論文之可行性與有效性。

## 1.4 研究架構

本論文將分五章，第一章為緒論，說明本論文之研究背景與動機、目的、研究方法；第二章為文獻探討，介紹混合實驗設計、望想函數、雙反應曲面和應用在多品質特性混合實驗最佳化之相關文獻；第三章為研究方法，介紹本論文納入成本因素後，結合反應六標準差品質之望想函數與雙反應曲面法於多品質特性混合實驗設計最佳化過程；第四章為實例驗證，以汽車煞車用橡膠皮碗之實際案例，找出同時達到最佳品質水準與最低成本之最佳配方，來驗證本論文提出方法之有效性與可行性；第五章則為本論文之結論與建議，提出後續可研究之方向，以供參考。本論文之研究架構流程圖如圖 1.1 所示。

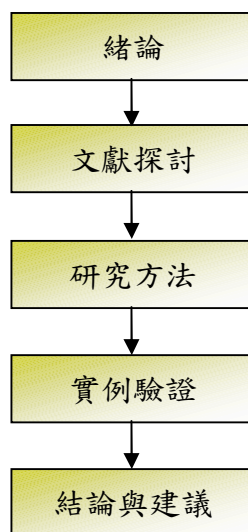


圖 1.1 研究架構流程圖

## 第二章 文獻探討

本章包括四個小節，分別介紹混合實驗設計、望想函數、雙反應曲面以及多品質特性混合實驗最佳化之相關文獻。

### 2.1 混合實驗設計介紹[8]

混合實驗設計首先由 Scheffé[21]提出，為 RSM 中之特例，適用於產品設計牽涉到配方或混合物之情況，通常應用在化學、食品、醫藥和材料等工業。一般在傳統實驗設計中的因子，在混合實驗中稱為成份 (component) 或元素。舉例來說，殺蟲劑是由不同之化學成份混合而成，成份 ( $x$ 's) 彼此之間互相影響且不獨立，反應變數 ( $y$ ) 為殺蟲劑之濃度，依賴成份間之相對比例調配而成，各成份之相對比例加總後得到一特定總和。假設獨立變數  $x_i$  為混合實驗中之成份，則  $x_i$  有下列特性：


$$\begin{aligned} 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, q \\ \sum_{i=1}^q x_i = 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

由於這些特性，成份間的比例是無法單獨調整且會彼此互相影響。

在傳統二因子和三因子之實驗設計中，其可行解區域應為一平面和立方體，如圖 2.1 (A) 與 (B)。但在混合實驗設計中，當成份數目  $q = 2$  和  $q = 3$  時，由於式 (2.1) 之限制，使得可行解區域降低一個維度，分別變為成份界限介於[0,1]間之直線  $x_1 + x_2 = 1$  和立方體頂點為純混合物之斜三角平面，如圖 2.1 (A) 與 (B) 所示。當混合成份數為  $q = 3$  時，其限制實驗區域能以三角座標系統 (trilinear coordinate system) 表之，其三角座標系統的三邊表示沒有對面頂點的成份存在，如圖 2.2 所示。

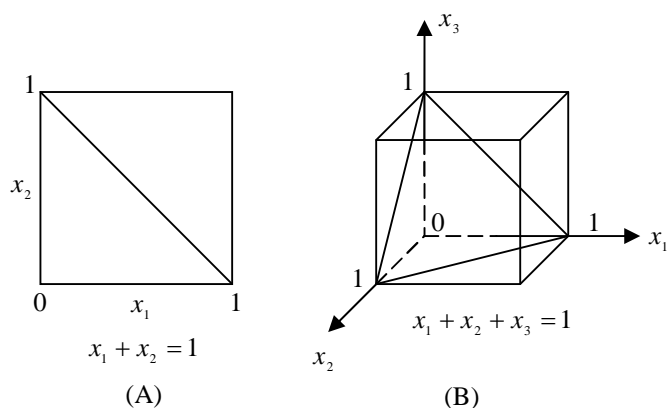


圖 2.1 混合實驗設計可行解區域示意圖(A)為成份數  $q = 2$  (B)為成份數  $q = 3$

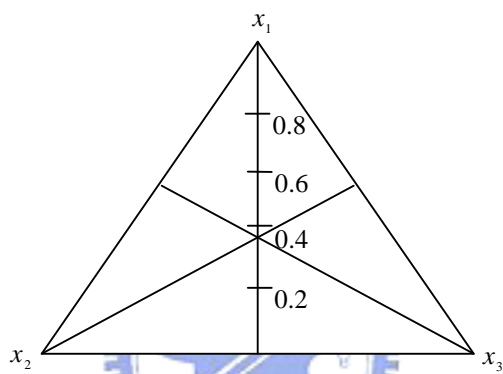


圖 2.2 三角座標系統

在混合實驗中可依成份之可行解區域是否完整而施行不同之設計方法，當實驗之可行解區域完整時（即各成份均介於 $[0,1]$ 間），或是利用線性轉換後各成份均介於 $[0,1]$ 間，可以使用單體設計 (Simplex design) 來規劃實驗，其中可分為  $\{q, m\}$  單體晶格設計 (Simplex Lattice Design) 和  $q$ -成份單體質心設計 (Simplex Centroid Design) 兩種設計方法來規劃實驗。

$\{q, m\}$  單體晶格設計是將實驗點均勻分佈在可行解區域的範圍內，其中  $q$  表示成份個數， $m$  為成份  $x_i$  可以劃分之區間數目，以下式表之：

$$x_i = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.2)$$

上式中成份所有可能的組合皆為實驗設計點，以  $q = 3$  和  $m = 2$  為例，

$$x_i = 0, \frac{1}{2}, 1 \quad i = 1, 2, 3$$

在此單體晶格中包含了 6 個實驗點，如下列所示：

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

其實驗點示意圖如圖 2.3 所示。 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  三個頂點為純混合物，另外  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  三點各位於三角座標系統中的三邊中點，表示只含有兩種成份之實驗點。圖 2.3 為  $\{3, 3\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}$  的單體晶格設計，一般而言，單體晶格設計中的實驗點個數可以下式計算之：

$$N = \frac{(q+m-1)!}{m!(q-1)!} \quad (2.3)$$

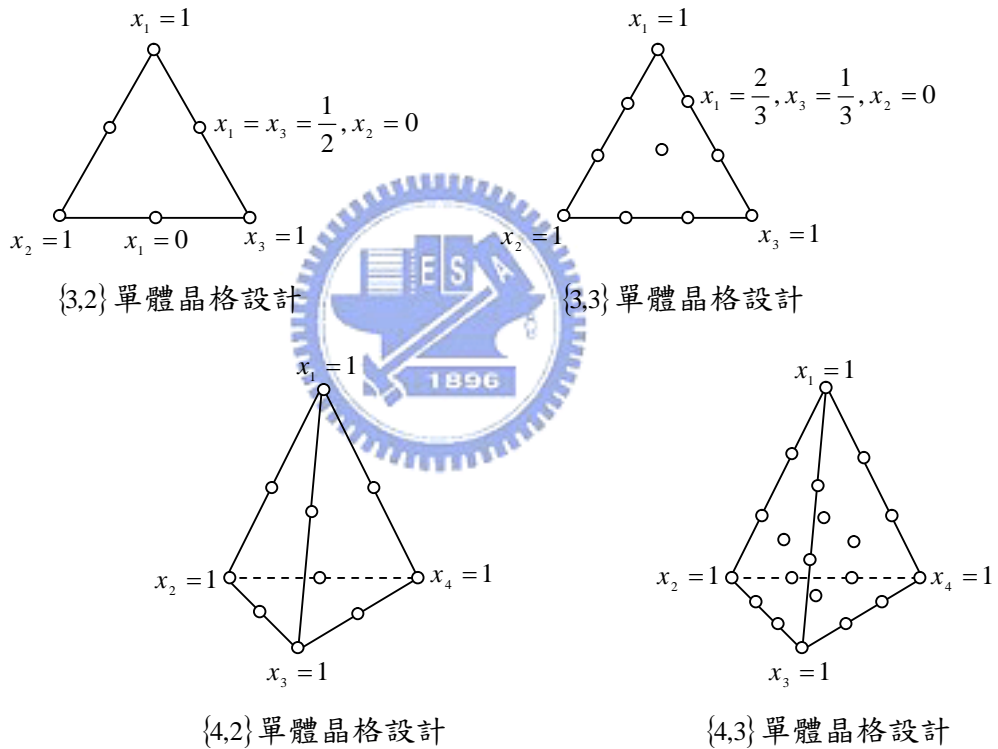


圖 2.3  $q = 3$  和  $q = 4$  之單體晶格設計示意圖

$q$ -成份單體質心設計是將實驗點放在可行解區域的端點及質心上，總共有  $2^q - 1$  個實驗點，各為  $q$  個  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  端點之排列組合， $\binom{q}{2}$  個  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$  點之排列組合， $\binom{q}{3}$  個  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0\right)$  點之排列組合等，和整體質心

$(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p})$ 。圖 2.4 為 3-成份和 4-成份單體質心設計示意圖。

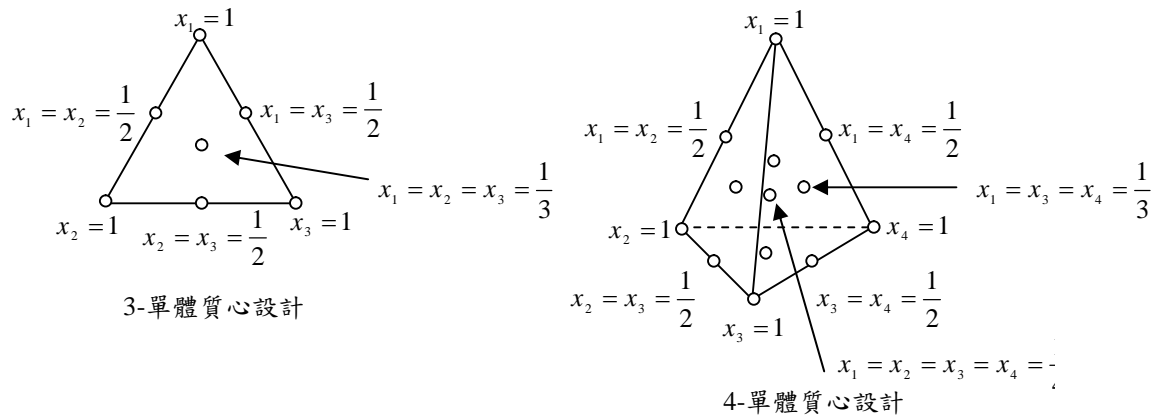


圖 2.4  $q=3$  和  $q=4$  之單體質心設計示意圖

在實驗設計中，通常是以反應曲面法來尋找最佳配方，此最佳化過程有以下三個步驟：(1) 尋找適當之反應曲面模型；(2) 檢定此模型之正確性；(3) 再根據蒐集的觀測值找出適當的模型，並檢定模型之適配度[9]。通過這三個步驟可以確保適配出來的模型符合實際資料，且能由此模型得到最佳配方。反應曲面模型之定義如下：

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j < k} \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (2.4)$$

由於式 (2.1) 之限制條件，混合模型與反應曲面模型中所使用之多項式是不相同的，需要將反應曲面模型之多項式中的截距項皆化簡為 0。以下各式為數個廣泛使用之標準混合實驗模型：

線性 (Linear) 模型：

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \quad (2.5)$$

二次項 (Quadratic) 模型：

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.6)$$

完全立方 (Full Cubic) 模型：

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j}^q \delta_{ij} x_i x_j (x_i - x_j) + \sum_{i < j < k} \beta_{ijk} x_i x_j x_k \quad (2.7)$$



特殊立方 (Special Cubic) 模型：

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i<j}^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i<j<k} \beta_{ijk} x_i x_j x_k \quad (2.8)$$

在式 (2.5) 至 (2.8) 中，參數  $\beta_i$  為  $x_i = 1$ 、 $x_j = 0$  ( $j \neq i$ ) 之純混合物之期望反應值，而  $\sum_{i=1}^q \beta_i x_i$  的部份被稱之為線性混合部份 (linear blending portion)。當成對的成份由於非線性混合產生曲率時，參數  $\beta_{ij}$  為協同的 (synergistic) 或對抗的 (antagonistic) 混合。在混合模型中，高次項經常被使用的原因是：(1) 所研究的現象可能是複雜的；(2) 實驗區域經常是整個可操作之範圍，由於範圍很廣，所以需要一個精細、複雜的模型。

在某些混合實驗問題中，當個別成份  $x_i$  之範圍並非介於 [0,1] 之間，而是由式 (2.9) 之型式呈現：

$$0 \leq L_i \leq x_i \leq U_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.9)$$

可進行以下之線性轉換，以得到完整之成份之可行解區域。其中  $L_i$  和  $U_i$  分別為  $x_i$  之下限與上限 (通常是該領域專家藉由經驗或專業知識決定)。當成份僅有單邊限制時，可分別以  $x_i^*$  及  $x_i^\#$  代表  $x_i$  線性轉換後之新變數，稱之為假成份 (pseudocomponents)。若成份只有下限時，則令  $x_i^* = \frac{x_i - L_i}{1 - L_i}$ ，經過轉換後可使

$0 \leq x_i^* \leq 1$ ，其中  $L = \sum_{i=1}^q L_i$ ，如圖 2.5 所示；若成份比例只有上限時，則令

$x_i^\# = \frac{U_i - x_i}{U - 1}$ ，經過轉換後可使  $0 \leq x_i^\# \leq 1$ ，其中  $U = \sum_{i=1}^q U_i$ 。

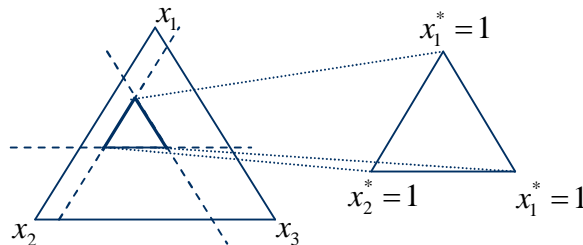


圖 2.5 當成份有下限時之線性轉換示意圖[2]

然而，在進行成份之線性轉換後，若仍然無法使其可行解範圍介於 [0,1] 時，

可行解區域因為呈現不規則形狀而使得可行解區域不完整，如圖 2.6 所示。此時單體晶格設計與單體質心設計已不敷使用，必須以電腦輔助設計 (computer-aided design) 來規劃實驗。

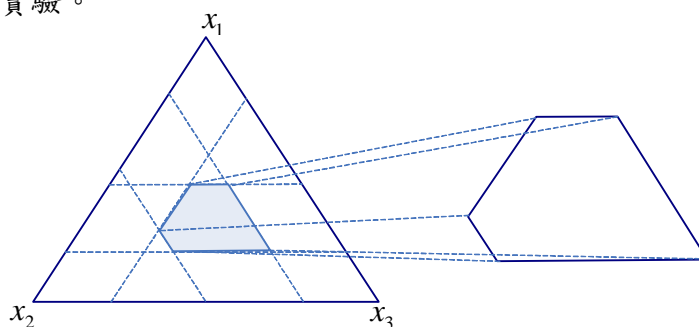


圖 2.6 可行解區域不完整圖示[2]

表 2.1 是本論文整理出的三種混合實驗設計的種類，分別為混合設計 (Mixture design)、混合-數量設計 (Mixture-amounts design) 和混合-製程變數設計 (Mixture-process variable design) 三種，使用者應依照不同之實驗條件使用適當的混合實驗設計種類。

混合實驗之混合成份 (mixture component)、製程變數 (process variables) 和雜音變數 (noise variables) 之符號定義整理如表 2.2 所示。

表 2.1 混合實驗設計種類

類型	成份間依賴關係	範例
混合設計	各成份間之相對比例	檸檬水的口感只與檸檬含量比例有關
混合-數量設計	各成份間之相對比例及混合物的總量	農作物的產率與殺蟲劑用量及其相對比例有關
混合-製程變數設計	各成份間之相對比例及製程變數之設定值。製程變數為實驗中不屬於混合物之一部分，但會影響到混合物之混合特性。	蛋糕之口感與麵粉、糖、蛋含量比例及烘烤時間與溫度有關，但溫度、時間不屬於蛋糕的一部份。

表 2.2 變數定義表

變數類型	符號	個數
混合成份	$x_i$	$q, i = 1, \dots, q$
製程變數	$w_p$	$c, p = 1, \dots, c$
雜音變數	$z_t$	$n, t = 1, \dots, n$

表 2.1 提到之混合-製程變數設計，與其它兩種混合實驗最大的不同點在於，除了混合成份外，實驗中包含了製程變數 (process variables)，此變數沒有混合成份之特性，但確實會對實驗結果造成很大的影響。在遇到此類設計時，可在  $q$  個成份之混合模型中加入  $p$  個製程變數。以  $q=3$  及  $p=2$  為例，其成份與製程變數定義如下：

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.10)$$

$$w_p = \pm 1 \quad p=1, 2 \quad (2.11)$$

其可行解空間如圖 2.7 所示。

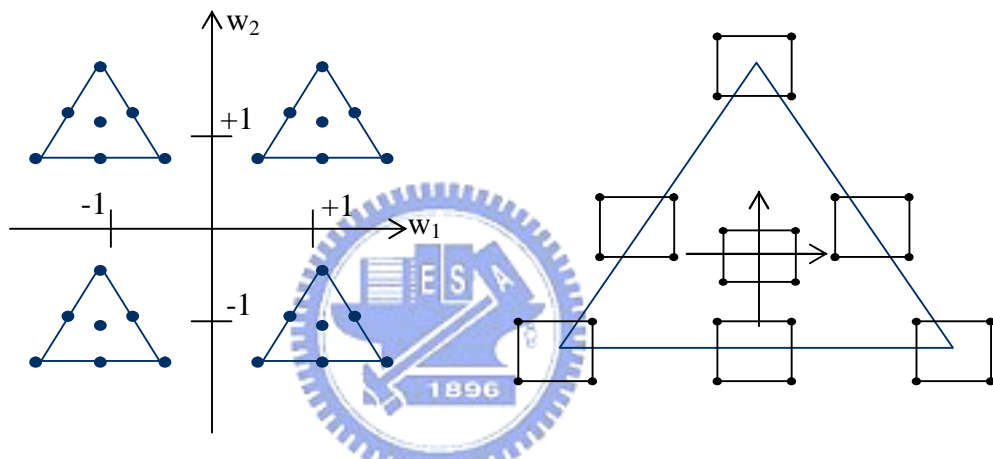


圖 2.7 ( $q=3, p=2$ )之混合實驗可行解空間示意圖[2]

以單體質心設計為例，其反應曲面模型如下：

$$\eta_{SC} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (2.12)$$

若實驗僅考慮兩個製程變數時，反應曲面模型如下：

$$\eta_{PV} = \alpha_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_{12} w_1 w_2 \quad (2.13)$$

而混合-製程變數設計中包含了混合成份與製程變數，必須綜合式 (2.12) 和式 (2.13)，其反應曲面模式如下：

$$\begin{aligned}
\eta(x, w) &= \sum_{i=1}^3 \beta_i(w)x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \beta_{ij}(w)x_i x_j + \beta_{123}(w)x_1 x_2 x_3 \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[ \gamma_i^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_i^l w_l \right] x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \left[ \gamma_{ij}^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_{ij}^l w_l \right] x_i x_j \\
&\quad + \left[ \gamma_{123}^0 + \sum_{l=1}^2 \gamma_{123}^l w_l \right] x_1 x_2 x_3
\end{aligned} \tag{2.14}$$

令  $\gamma_\tau^\lambda$  為新的迴歸係數，則  $\gamma_\tau^\lambda = \alpha_\lambda \beta_\tau$ 。在式 (2.14) 中之整合模型後可以下式表之：

$$\begin{aligned}
\eta(x, w) &= \alpha_0(x) + \alpha_1(x)w_1 + \alpha_2(x)w_2 + \alpha_{12}(x)w_1 w_2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \gamma_i^0 x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^0 x_i x_j + \gamma_{123}^0 x_1 x_2 x_3 \\
&\quad + \sum_{l=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^3 \gamma_i^l x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^l x_i x_j + \gamma_{123}^l x_1 x_2 x_3 \right] w_l \\
&\quad + \left[ \sum_{i=1}^3 \gamma_i^{12} x_i + \sum_{i<j}^3 \sum_j^3 \gamma_{ij}^{12} x_i x_j + \gamma_{123}^{12} x_1 x_2 x_3 \right] w_1 w_2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中式 (2.14) 之可行解空間可對應圖 2.7 之左圖，而式 (2.15) 之可行解空間可對應圖 2.7 之右圖，兩者意義皆相同。當可行解區域不完整時，需使用電腦輔助設計規劃實驗。



### 2.1.1 電腦輔助設計[14]

無論是立方體或球體的實驗區域，都適用於標準的反應曲面設計。然而，實驗者面對不能明確選擇標準反應曲面設計規劃實驗時，可以選擇使用電腦輔助設計。

適用電腦輔助設計的情形有以下三種情況：

#### 1. 不規則實驗區域

若實驗區域不是立方體或球體時，標準反應曲面設計並非一個好的規劃實驗方法。不規則實驗區域的情形經常發生，例如：欲研究以漸升溫度用接著劑將兩個物件接合之特殊接著劑特性。此實驗所考慮的兩個因子為接著劑之使用量和成化溫度，使用編碼變數將其水準編碼為  $\pm 1$ 。若接著劑用量太少和成化溫度太低會造成接合的效果不佳，即設計變數之限制條件為

$$-1.5 \leq x_1 + x_2$$

其中  $x_1$  為接著劑用量， $x_2$  為成化溫度。另外，接著劑用量太多和成化溫度太高會造成對物件之損壞，其限制條件為

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

考慮這兩個限制條件下之實驗區域，如圖 2.8 所示。由於限制條件使得實驗區域變為缺少兩個角的正方形之不規則實驗區域（稱為凹罐 (dented cans)）。在這種情況下，不適用標準的反應曲面方法來設計實驗。

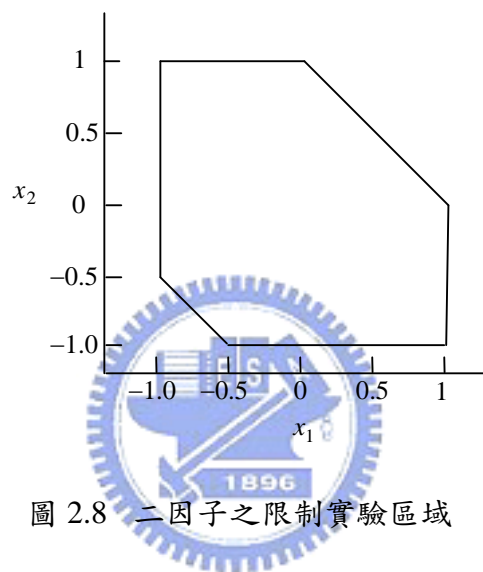


圖 2.8 二因子之限制實驗區域

## 2. 非標準模型

有時使用者可能會對製程有一些特殊知識或洞察能力，因而採取非標準模型來規劃實驗。通常使用者會選取一階或二階的反應曲面模型，且認為此經驗模型 (empirical model) 會近似真實情況。假設某一模型為

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{112} x_1^2 x_2 + \beta_{1112} x_1^3 x_2 + \varepsilon$$

使用者可能會將此模型適配為化簡後的二階模型，使得設計更有效率。

## 3. 少有的樣本大小要求

有時實驗者會為了符合標準反應曲面設計而減少實驗次數。例如：假設適配四個變數的二階模型時，需視中心點的個數，選擇實驗次數 28~30 次的中心點混成設計 (central composite design, CCD)。若實驗花費成本極高且費時，實驗者則需要實驗次數較少的設計。雖然電腦輔助設計能夠解決此問題，但是仍然有更好

的方法。例如：使用四個變數、實驗次數為 20 次之小型中央合成設計（內含四個中心點），或使用四個變數、實驗次數少於 16 次的混合設計 (hybrid design)。以減少實驗次數而言，這些設計皆優於電腦輔助設計。

假設某混合實驗反應曲面模型為  $y = x\beta + \varepsilon$ ，其中  $y$  表反應變數值， $x$  為獨立變數值， $\beta$  為反應曲面模型之迴歸係數， $\varepsilon$  為隨機誤差項且  $\varepsilon \sim N_n^{iid}(0_n, \sigma^2 I_n)$ 。用最小平方法估計迴歸係數  $\hat{\beta}$ ，服從常態  $N_{p+1}(\beta, \sigma^2(x'x)^{-1})$ ，其中  $p \geq q$ ，因此  $\hat{y} = x\hat{\beta} \sim N(x\beta, \sigma^2(x'(x'x)^{-1}x))$ 。若常態假設不成立，則  $\hat{y}$  和  $\hat{\beta}$  之共變異數矩陣仍為  $\sigma^2(x'(x'x)^{-1}x)$  和  $\sigma^2(x'x)^{-1}$ 。

一般常見的電腦輔助設計有下列四種：

#### 1. D-最佳化設計 (D-Optimality)

其目的為最小化  $\hat{\beta}$  共變異矩陣  $\sigma^2(x'x)^{-1}$  之行列式，亦即最小化  $|(x'x)^{-1}|$ 。若殘差項  $\varepsilon$  符合常態假設，則此設計亦可最小化迴歸係數  $\hat{\beta}$  向量之聯合信賴區域之體積。

#### 2. A-最佳化設計 (A-Optimality)

只考慮迴歸係數  $\hat{\beta}$  的變異數，其目的為最小化  $\hat{\beta}$  共變異矩陣  $\sigma^2(x'x)^{-1}$  之對角線和，亦即最小化  $tr((x'x)^{-1})$ 。

#### 3. G-最佳化設計 (G-Optimality)

G-最佳化設計之目的在於最小化  $\hat{y}$  之最大變異數，令

$$\sigma^2 x'(x'x)^{-1}x = C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0p} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p0} & \cdots & \cdots & c_{pp} \end{pmatrix} \quad c_{ii} \in R \quad i = 0, \dots, p$$

亦即最小化  $\max_i(c_{ii} | i = 0, \dots, p)$ 。

#### 4. V-最佳化設計 (V-Optimality)

V 準則考慮設計區域中一組實驗點  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  的預測變異數。這一組實驗點可以是設計所選取的候選點，也可以是對實驗者有特定意義的實驗點。V-最佳化設計之目的在於最小化一組實驗點之平均預測變異數  $\bar{c}_{ii}$ 。

以上四種電腦輔助設計法，以 D-最佳化設計和 A-最佳化設計最常被使用，但是在同一個反應曲面模型下，這四種最佳化設計方法的結果均相近[9]。在混合實驗設計中，當成份可行解區域不完整時，則屬於第一種不規則實驗區域之種類，所以可以使用以上四種電腦輔助設計法來進行規劃實驗之步驟。

## 2.2 各望想函數之介紹

本小節介紹望想函數的演進。由 Harrington[12]所提出的望想函數，Derringer 和 Suich[11]提出之修正望想函數，到 Ribardo 和 Allen[20]所提出的反應六標準差品質之望想函數，均會在本小節中詳細介紹。



### 2.2.1 望想函數[12]

望想函數方法最早是由 Harrington[12]在 1965 年提出，是一種多品質特性問題最佳化的演算法。望想函數的概念是將多個品質特性轉換成單一特性指標後，再進行最佳化的演算方法。望想函數之指標值又稱望想值 (desirability scale)，以  $d$  表之。望想值是介於 0 到 1 之間， $d=0$  代表對應到的品質完全不符合望想程度，也就是說產品品質完全不能被接受； $d=1$  代表對應到的品質完全符合望想程度，也就是說產品品質完全符合需求。Harrington[12]把望想值分為幾個區間並定義其品質程度，其對照表如表 2.3 所示。

由於望想值是將多個品質特性綜合成一個單一指標，所以是一種沒有維度的指標。望想值可依照品質特性有雙邊規格或單邊規格，分成以下兩種方式：

1. 品質特性為雙邊規格界限

當品質特性之規格界限為雙邊規格時，可將望想值以規格界限來分類，如圖 2.9 所示。

表 2.3 望想值與品質程度對照表[12]

望想值	品質意義
$d = 1.00$	達到終極滿意的品質滿意程度，毋需進行改善
$1.00 < d \leq 0.80$	可接受且優良的品質程度
$0.80 < d \leq 0.63$	可接受且好的品質程度
$0.63 < d \leq 0.40$	可接受但不良品質程度
$0.40 < d \leq 0.30$	可接受與不可接受的品質程度之邊界
$0.30 < d \leq 0.00$	不可接受的品質程度
$d = 0.00$	完全不可接受的品質程度

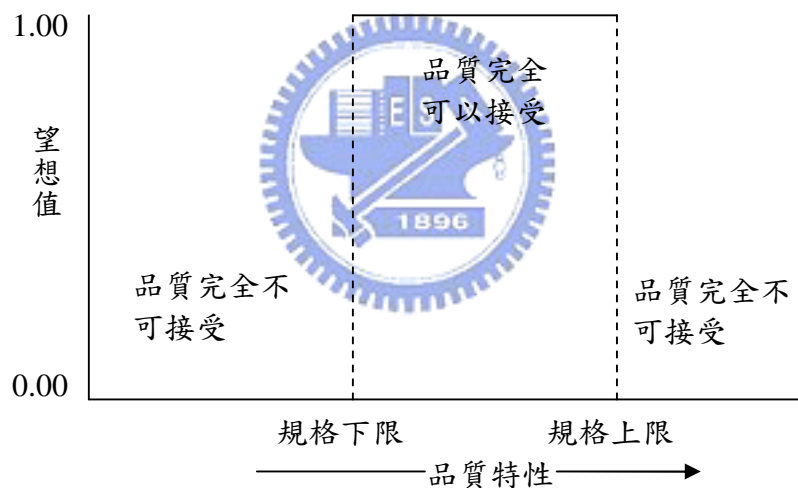


圖 2.9 以規格界限區分望想值

當品質特性落在規格上限和下限之外，其望想值為 0；當望想值落在規格界限內時，其望想值皆為 1。然而，當品質特性值很接近規格界限內時，望想值仍為 0，只能將產品分類為「可接受之產品」和「不可接受之產品」兩種種類，較無彈性。基於以上考量，可將圖 2.9 中不連續的線條平滑化，如圖 2.10。



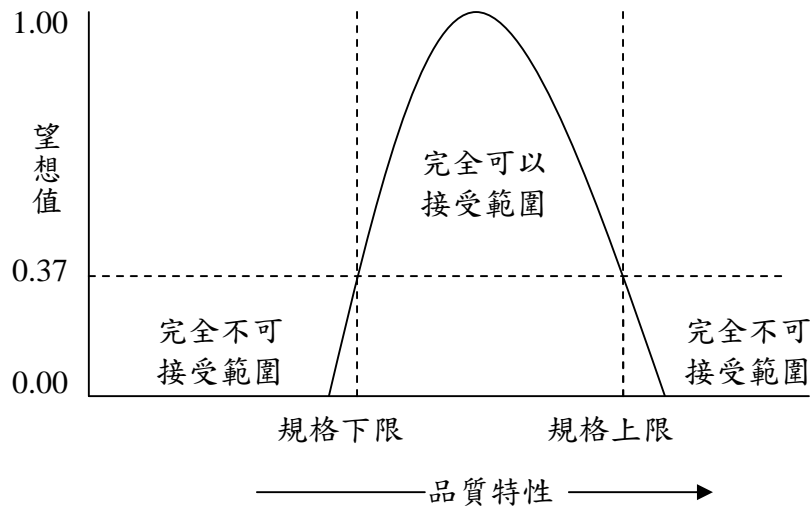


圖 2.10 以平滑規格界限區分望想值

圖 2.10 中望想值是由指數函數轉換計算而得，其轉換公式如下：

$$d = e^{-(|Y'|)^n} \quad (2.16)$$

其中  $e$  為對數常數， $n$  為正數 ( $0 < n < \infty$ )， $Y'$  為品質特性  $Y$  的線性轉換變數。 $Y$  的轉換公式如下：

$$Y'_i = \frac{2Y_i - (Y_{\max} + Y_{\min})}{Y_{\max} - Y_{\min}} \quad (2.17)$$

其中  $Y_i$  為任一個品質特性反應值， $Y_{\max}$  為品質特性之規格上限， $Y_{\min}$  為品質特性之規格下限。當  $Y_i$  為品質特性之規格下限時， $Y' = -1$ ；當  $Y_i$  為其品質特性之規格上限時， $Y' = 1$ 。式 (2.16) 是經由指數函數之轉換計算求得的望想值，有以下兩個特性：

- (1) 當  $|Y'| > 1$  時， $d$  值會隨著  $|Y'|$  值的增加越趨近於 0。
- (2) 當  $|Y'| = 1$  時， $d = 0.37$  ( $= \frac{1}{e} = 0.36788$ )，對任何品質特性來說，是一個合理且實用的望想值界限；第二個界限是當  $d = 0.63$  ( $= 1 - \frac{1}{e}$ ) 時，表示達到期望目標的品質水準程度。
- (3) 當  $d = 1$  時，品質特性位於最高和最低規格界限之中點。

在式 (2.13) 中的指數  $n$  可以控制曲線的斜率。在給定任一個望想值曲線

下，可藉由選定不同的  $d$  值和其對應之  $|Y'|$  值來計算  $n$  值，其計算方式如下：

$$n = \frac{\ln \ln 1/d}{\ln |Y'|} \quad (2.18)$$

## 2. 品質特性為單邊規格界限

當品質特性之規格界限為單邊規格時，另一種特殊的轉換公式之形式為岡普茲成長曲線 (Gompertz growth curve)，其轉換公式如下：

$$d = e^{-(e^{-Y'})} \quad (2.19)$$

將品質特性  $Y$  值經過線性轉換後之變數  $Y'$  值對應其望想值之圖示，如圖 2.11。

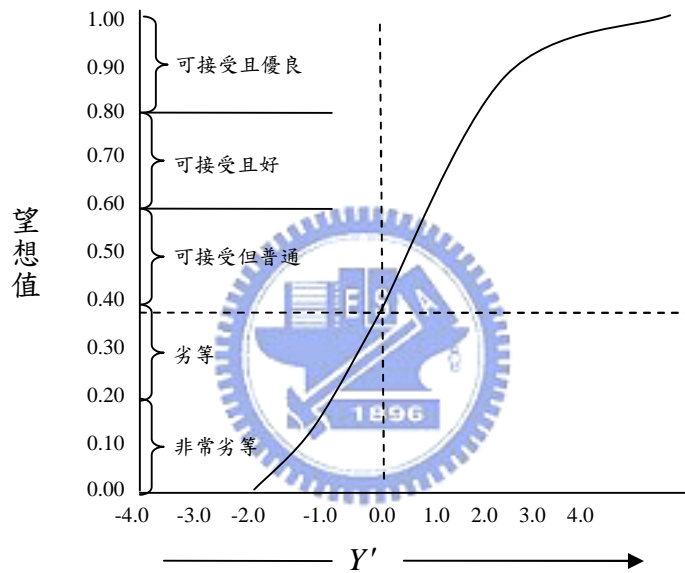


圖 2.11 以單邊規格界限區分望想值

能夠控制此曲線斜率的參數是由品質特性轉換的變數  $Y'$  值，而非式 (2.16) 中的  $n$  值。其轉換過程是先選擇兩個已量測的品質特性  $Y$  值，根據表 2.3 給予其對應的望想值後，再轉換成變數  $Y'$  值，轉換公式如下：

$$Y' = -[\ln(-\ln d)] \quad (2.20)$$

由上式得到的  $Y'$  值能與轉換前的  $Y$  值寫成下列之線性轉換方程式：

$$Y' = b_0 + b_1 Y \quad (2.21)$$

藉由式 (2.21) 可以利用不同成對之  $Y'$  與  $Y$  值，輕易地計算出參數  $b_0$  與  $b_1$ ，並可利用改變參數  $b_0$  和  $b_1$  來變換曲線之斜率。

在不同實驗組合下，將多個品質特性轉換為無維度的度量  $d_i$  後，可以利用幾何平均的概念計算出整體的總望想值  $D$ ，如式 (2.22)。

$$D = \left( \prod_{i=1}^n d_i \right)^{1/n} \quad (2.22)$$

從式 (2.22) 可以清楚地看到，當有任一個  $d_i$  值為 0 時， $D$  就會為 0，所以  $D$  對於  $d_i$  的大小相當敏感。總望想值  $D$  代表了產品整體的品質水準，且介於 0 到 1 之間。其基本假設是眾多  $d_i$  中，若有一個  $d_i$  值很差時，即使其餘的品質特性表現很好，也會使得產品變成不可接受的品質水準。

### 2.2.2 修正之望想函數[11]

新產品開發所面臨的問題就是要選擇一連串的變數設定，使得產品品質達到好的望想程度。Derringer 和 Suich[11] 在 1980 年提出修正 Harrington 之望想函數方法，稱之為修正之望想函數。其計算望想值指標之轉換公式彈性較大，同時能由使用者自行設定參數值以調整望想值對應品質水準程度之區間大小。

修正後的望想函數同樣也依單邊與雙邊規格界限，轉換成不同之望想值的公式，詳細之說明如下。

#### 1. 品質特性為單邊規格界限

在單邊規格界限的案例中， $d_i$  隨著  $\hat{Y}_i$  增加而遞增，直到達到  $d_i$  的最大值，其轉換公式如式 (2.23)，品質特性與望想值之對應圖如圖 2.12 所示。

$$d_i = \begin{cases} 0 & \hat{Y}_i \leq Y_{i^*} \\ \left[ \frac{\hat{Y}_i - Y_{i^*}}{Y_i^* - Y_{i^*}} \right]^r & Y_{i^*} < \hat{Y}_i < Y_i^* \\ 1 & \hat{Y}_i \geq Y_i^* \end{cases} \quad (2.23)$$

式 (2.23) 中的  $Y_{i^*}$  為  $\hat{Y}_i$  中最小可接受值，當  $\hat{Y}_i \leq Y_{i^*}$  時，使得  $d_i = 0$ ，總望想值  $D$  為 0，表示此產品的品質完全不被接受。 $Y_i^*$  為  $\hat{Y}_i$  中最大值，由於單邊規格無最大值可言，所以即使  $\hat{Y}_i > Y_i^*$ ，其望想值仍為 1。

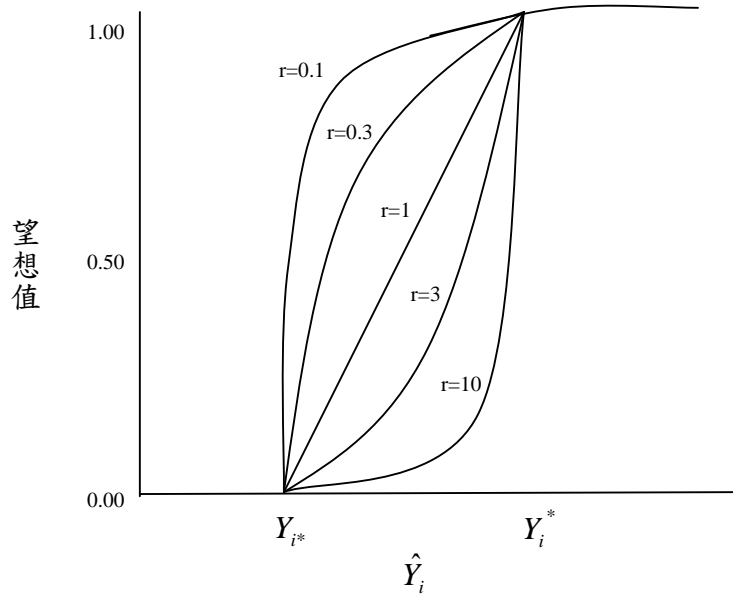


圖 2.12 單邊規格品質特性與望想值之對應圖

圖 2.12 中的  $r$  值是由使用者所設定。當使用者希望很快速的讓品質特性大於最小可接受值時， $r$  值的設定就要用較大的值。但當  $r$  值很大時，其對應之望想值的增加速度就會變慢，反之亦然。

## 2. 品質特性為雙邊規格界限

在雙邊規格界限的案例中，反應變數  $Y_i$  皆有最小、最大限制式。其轉換公式如下：

$$d_i = \begin{cases} \left[ \frac{\hat{Y}_i - Y_{i^*}}{c_i - Y_{i^*}} \right]^s & Y_{i^*} \leq \hat{Y}_i \leq c_i \\ \left[ \frac{\hat{Y}_i - Y_i^*}{c_i - Y_i^*} \right]^t & c_i < \hat{Y}_i \leq Y_i^* \\ 0 & \hat{Y}_i < Y_{i^*} \text{ or } \hat{Y}_i \geq Y_i^* \end{cases} \quad (2.24)$$

其中  $Y_{i^*}$  為  $\hat{Y}_i$  中最小可接受值、 $Y_i^*$  為最大可接受值，超過規格界限的  $\hat{Y}_i$  值會使得整個產品的水準不被接受； $c_i$  值為  $\hat{Y}_i$  的目標值，能使望想值最大化； $s$  和  $t$  參數在雙邊規格界限中與單邊界限的參數  $r$  一樣，扮演了同等的角色，控制曲線的斜率。

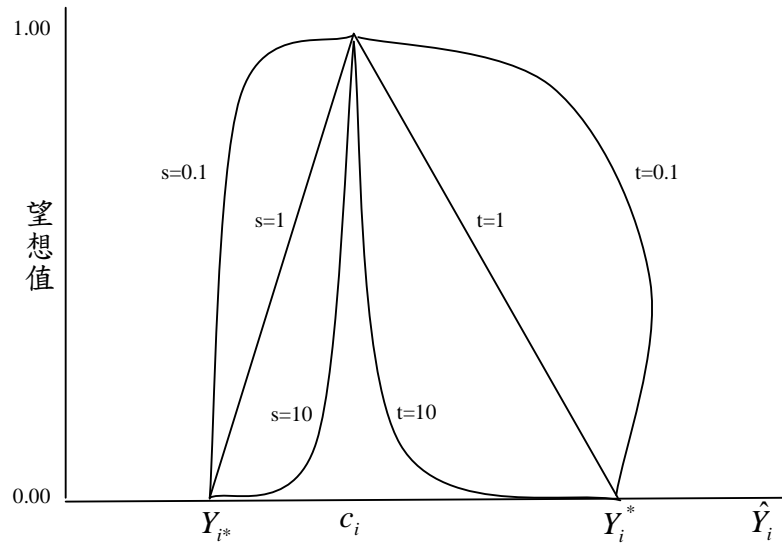


圖 2.13 雙邊規格品質特性與望想值之對應圖

從圖 2.13 可以觀察出當參數  $s$  和  $t$  越大時， $\hat{Y}_i$  越接近目標值  $c_i$ ，而且是越接近目標值，望想值才開始快速遞增。換言之，當  $\hat{Y}_i$  大部分的值都在  $Y_{i*}$  和  $Y_i^*$  之間時，應該選擇較小的  $s$  和  $t$ 。而當選擇  $s=t=1$  時，是兩種極端選擇的折衷方式。

在得到不同實驗組合下的  $d_i$  後，計算總望想值  $D$  的方式與 Harrington 所提出之式 (2.22) 算法、特性相同，同樣是將多個品質特性轉換為無維度望想值後，再利用幾何平均的概念計算出整體的總望想值，以最大化總望想值來求出實驗之最佳配方。

### 2.2.3 反應六標準差品質之望想函數[20]

為了使產品達到高生產良率或是達到「六標準差」品質，工程師時常需要評估且最佳化多品質特性之製程。傳統望想函數方法為一相對指標而非絕對指標，無法直接提供業界在產品品質上改善之依據，且無法同時考慮品質的平均值和標準差，所以經常造成實驗成本過高或是無法達到目標良率。Ribardo 與 Allen[20] 在 2003 年提出了一種能夠反應六標準差品質之望想函數來改善其缺點。

反應六標準差品質之望想函數是根據估計良率的方式而得來的，計算望想值

的方式是分為有明顯規格界限和無明顯規格界限兩種，能夠同時考慮到製程平均值和製程變異情形。此外，平均值往規格界限的偏移量 $\tau_i\sigma_i$ 也考慮在內，在六標準差的文獻中，工程師建議在製程或產品設計中之偏移量設為 $1.5\sigma_i$ 。

使用反應六標準差品質之望想函數的前提假設是，品質特性必須符合常態分配，且其偏移量要靠近平均值。在能反應六標準差品質之望想函數中，可依反應變數性質分為有明顯規格界限和無明顯規格界限兩種，說明如下：

### 1. 反應變數有明顯規格界限

每個品質特性 $i$ 都有上、下規格界限，分別為 USL 和 LSL，平均值為 $\mu_i$ ，標準差為 $\sigma_i$ ，偏移量為 $\tau_i$ ，計算望想值的公式如下：

$$d_i(\mu_i, \sigma_i, \tau_i) = \min[\text{Yield}_i(\mu_i, \sigma_i, +\tau_i), \text{Yield}_i(\mu_i, \sigma_i, -\tau_i)] \quad (2.25)$$

其中  $\text{Yield}_i(\mu_i, \sigma_i, s_i) = \Phi[z_{USL}(\mu_i, \sigma_i, s_i)] - \Phi[z_{LSL}(\mu_i, \sigma_i, s_i)]$ ， $\Phi$  為常態分配下之累積機率函數。若無規格上限時， $\Phi[z_{USL}(\mu_i, \sigma_i, s_i)]$  為 1，若無規格下限時， $-\Phi[z_{LSL}(\mu_i, \sigma_i, s_i)]$  為 0。 $z_{LSL,i}(\mu_i, \sigma_i, s_i)$  和  $z_{USL,i}(\mu_i, \sigma_i, s_i)$  的計算如下：

$$z_{LSL,i}(\mu_i, \sigma_i, s_i) = (1/\sigma_i)[LSL - (\mu_i + s_i\sigma_i)] \quad (2.26)$$

$$z_{USL,i}(\mu_i, \sigma_i, s_i) = (1/\sigma_i)[USL - (\mu_i + s_i\sigma_i)] \quad (2.27)$$

$\text{Yield}_i(\mu_i, \sigma_i, +\tau_i)$  為良率符合前提假設下之正偏移， $\text{Yield}_i(\mu_i, \sigma_i, -\tau_i)$  為良率符合前提假設下之負偏移， $d_i(\mu_i, \sigma_i, \tau_i)$  為符合前提假設下之估計望想值。

### 2. 反應變數無明顯規格界限

當反應變數不存在明顯的規格界限，可以用目標值、最差可接受值來定義其六標準差品質之望想值，其公式如下：

$$d(Y) = \Phi(z_{eff,i} - 1.5)$$

$$z_{eff,i} = 1.5 + 3 \left( \frac{Y_i - M_i}{T - M_i} \right) \quad (2.28)$$

其中 $Y_i$ 為品質特性之反應值、 $M$ 為品質特性之最差可接受值、 $T$ 為品質特性之目標值。 $\Phi$ 為常態分配下之累積機率函數。

圖 2.14 用幾何圖形顯示在符合常態分配下長期製程穩定下之偏移情形。圖 2.15 為在不同變異下之望想值的圖形。

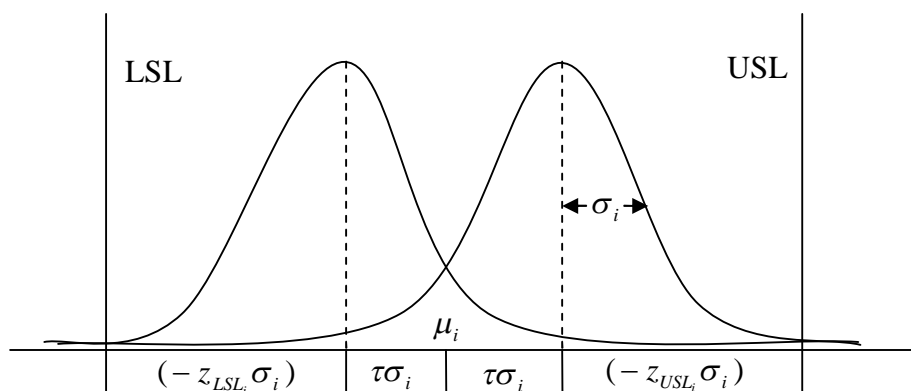


圖 2.14 長期製程穩定之常態分配圖[20]

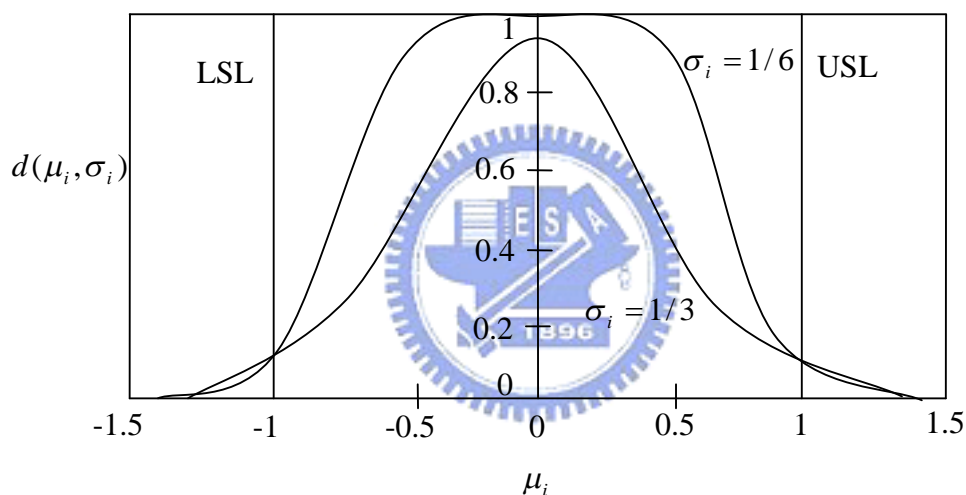


圖 2.15 反應六標準差之望想函數[20]

在製程穩定的情況，假設偏移量  $\tau_i = 1.5\sigma_i$ ，Ribardo 和 Allen 將提出的反應六標準差品質之望想函數之望想值分為五個區間，各給予其不同意義，見表 2.4。

表 2.4 反應六標準差品質之望想函數之望想值與品質水準對照表[20]

望想值	品質意義
1.00~0.9999966	達到 $6\sigma$ 之品質水準程度，不需進行改善
0.9999966~0.9938	良好但非傑出之品質程度，達到 $4\sigma$ 水準
0.9938~0.9332	可接受但不良之品質程度，達到 $3\sigma$ 水準
0.9332~0.69	不可接受之品質程度，達到 $2\sigma$ 水準
0.69~0.00	完全不可接受之品質程度

經由公式 (2.25)、(2.28) 得到各組實驗組合之個別望想值後，同樣地利用幾何平

均的方式計算總望想值  $D(x)$ 。但計算總望想值的公式稍作修改，每個品質特性賦予不同的權重，其計算方式如下：

$$D(x) = \{ [d_1(Y_1(x))d_2(Y_2(x))\dots d_r(Y_r(x))]^{w_r} [d_{r+1}(Y_{r+1}(x))^{w_{r+1}} d_{r+2}(Y_{r+2}(x))^{w_{r+2}} \dots d_m(Y_m(x))^{w_m}] \}^{1/S} \quad (2.29)$$

其中  $S = \sum_{i=r}^m w_i$ 。式 (2.29) 中  $i$  的  $1 \sim r$  項為有明顯規格界限之反應變數， $r+1 \sim m$

項表示無明顯規格界限之反應變數。

在得到不同實驗組合下的  $d_i$  後，依照反應變數不同特性代入式 (2.29) 計算其總望想值  $D$ ，以最大化總望想值求出實驗之最佳配方。

### 2.3 雙反應曲面之介紹

反應曲面法 (Response Surface Method, RSM) 之基礎理論是由 Box 和 Wilson[7] 率先提出，經由 Hill 和 Hunter[13] 整理從 1952 至 1965 年所發展之反應曲面模式，對 RSM 進行更完整的模型定義與最佳化方法。RSM 是一次只探討一個反應變數與多個獨立變數間之關係，再根據反應變數的品質特性決定獨立變數之最佳組合。但當反應變數有兩個時，使用 RSM 無法同時最佳化兩個反應變數，只能用互償 (trade-off) 的方式將結果最佳化。

雙反應曲面法 (Dual Response Surface Method, DRSM) 是由 Myers 和 Carter[15] 所提出，Vining 和 Myers[24] 使之復興。DRSM 能夠同時使品質特性之平均值達到目標值，變異最小化。對於需要同時最佳化兩個反應變數之問題，依其重要性可分為主要反應變數 (primary response,  $y_p$ ) 和限制反應變數 (constraint response,  $y_s$ ) 或是次要反應變數 (secondary response,  $y_s$ )，在滿足限制反應變數之前提下，最大 (小) 化主要反應變數。DRSM 的前提假設為只適用於二次反應曲面模型 (quadratic response function) 上，因為二次模型較有彈性，可以適配出多種形狀，容易找出最佳解。其適配之二次反應曲面模型如式 (2.31)



及 (2.32)。

$$y_p = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon_p \quad (2.31)$$

$$y_s = \gamma_0 + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^k \gamma_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^k \gamma_{ij} x_i x_j + \varepsilon_s \quad (2.32)$$

其中  $\beta$ 's 和  $\gamma$ 's 為未知的迴歸係數， $\varepsilon_p$  和  $\varepsilon_s \sim N(0, \sigma^2)$ 。將式 (2.31) 和 (2.32) 以矩陣的方式表達如下：

$$\hat{y}_p = b_0 + x'b + x'Bx$$

$$\hat{y}_s = c_0 + x'c + x'Cx$$

$x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  為各個獨立變數的向量， $\hat{y}_p$  和  $\hat{y}_s$  為估計的主要反應變數與限制反應變數， $b_0 = \hat{\beta}_0$ 、 $c_0 = \hat{\gamma}_0$ 、 $b = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k)'$ 、 $c = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_k)'$ ，

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}/2 & \dots & b_{1k}/2 \\ & b_{22} & \dots & b_{2k}/2 \\ & & \ddots & \\ \text{sym.} & & & b_{kk} \end{bmatrix} \text{ 和 } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}/2 & \dots & c_{1k}/2 \\ & c_{22} & \dots & c_{2k}/2 \\ & & \ddots & \\ \text{sym.} & & & c_{kk} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } b_{ii} \text{ 與 } c_{ii} \text{ 為二次項係}$$

數。

DRSM 之最佳化過程在滿足  $\hat{y}_s = c$  的前提下 ( $c$  為限制反應變數欲達到的值)，同時最佳化  $\hat{y}_p$ ，進而求得獨立變數 ( $x'$ ) 之最佳組合。另外，為避免最佳化之  $x'$  落在可行解範圍外，可以加入限制式  $x'x = R^2$ ，以  $R$  為半徑的球面為實驗操作區域，其  $R$  值依工程實務需求而定，如此才能確保獨立變數之最佳組合落在可行的實驗區域中。

## 2.4 多品質特性混合實驗問題最佳化之相關文獻

雖然混合實驗早在 1958 年由 Scheffé[21] 提出，直到近幾年才備受重視，且很多領域的產業所面臨到的問題並非傳統 DOE，而是屬於混合實驗設計的範疇。所以至今研究混合實驗之多品質特性最佳化之相關研究仍相當少見，以下將

介紹說明國內外之相關文獻。

Dabbas 等人[10]應用望想函數方法於半導體產業派工法則之多品質最佳化研究，利用望想函數方法將多個派工法則依照不同權重轉換成單一指標，再使用反應曲面法尋找最佳化派工法則之最佳配方，經由此方法可以改善所有反應值的20%。其未來研究可以朝向依工廠情況即時變更派工法則之權重。

楊忠倫[3]應用反應曲面法的輪廓圖、等高線圖探討脂解酵素催化抗壞血酸月桂酸酯之最佳化合成配方，且找出溶劑組成對合成產物之影響；賴昱甫[5]應用反應曲面法找出脂肪替代品甲基葡萄糖多酯的最佳化合成條件，探討紅花籽油、大豆油及棕櫚油混合比例合成的甲基葡萄糖多酯之物理特性，但是以互償方式處理多品質特性問題，不能保證選出之配方為最佳實驗組合。王柏齡[1]應用反應六標準差品質之望想函數找出汽車橡膠皮碗生產過程中，各化學配料之最佳投量比例，以增加其強度與耐用性，但此研究中並未將成本因素列入考量，較不適用於實際案例。李百川[2]利用灰色多屬性決策法建立多品質特性整體績效指標，最後加入成本因素並結合雙反應曲面方法，以求得汽車橡膠皮碗生產過程中，各化學配料之最佳投量比例，且其配料比例能夠最小化其製造成本，但此研究中並未考慮各品質特性之變異情形。

# 第三章 研究方法

由於各產業技術的蓬勃發達，多品質特性最佳化問題已經相當普遍，然而多品質特性混合實驗卻是近年來才受到重視，其中又以考量到成本之實際案例最為少見。因此本論文之主要目的在於針對多品質特性混合實驗，應用第二章所介紹的反應六標準差品質之望想函數結合雙反應曲面方法，以求得各成份最佳之配方。本論文之多品質混合實驗最佳化演算法共分三階段進行，第一階段為多品質特性混合實驗之規劃；第二階段為反應六標準差品質之望想函數與雙反應曲面之應用；第三階段則為模型適配正確性檢定、確認實驗及配方品質與成本之比較。

## 3.1 多品質特性混合實驗之規劃

首先，蒐集所有與混合實驗相關之資料，如：選出影響實驗結果之各成份 ( $x$ 's) 和反應變數 ( $y$ 's)。接著，定義成份之限制式、反應變數之權重，和反應變數之特性 (望大、望目、望小特性)。

在實驗數據等資料建立好之後，依照混合實驗之可行解區域選擇規劃實驗之設計方法，其步驟如下：

1. 當成份之可行解區域完整時，也就是介於 $[0,1]$ 之間，或是經過假成份之線性轉換後介於 $[0,1]$ ，則使用  $\{q, m\}$  單體晶格設計或  $q$ -成份單體質心設計，選出適當之模型  $\eta = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，來規劃實驗。
2. 當成份之可行解區域不完整時，也就是進行假成份之線性轉換後，仍然無法使其可行解範圍介於 $[0,1]$ 之間，則必須使用電腦輔助設計來規劃實驗，以選出適當之模型  $\eta = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

## 3.2 望想函數之應用

最早從 Harrington[12]提出之望想函數、Derringer 和 Suich[11]提出修正之望

想函數一直到 Ribardo 和 Allen[20]提出之反應六標準差品質之望想函數，其中以反應六標準差品質之望想函數之表現較佳，因為能夠同時考慮到製程平均值與變異情形，且為一個絕對指標，改善傳統望想函數之缺失。所以本論文將應用反應六標準差品質之望想函數來求得各個實驗組合之總望想值，並將其總望想值當作整體品質績效指標。

### 3.2.1 反應六標準差品質之望想函數計算

在考慮到製程的規格界限和製程變異下，依反應變數性質可分為有明顯規格界限和無明顯規格界限兩種類型來計算各個實驗組合下之望想值，其計算公式如下：

#### 1. 反應變數有明顯規格界限

具有明顯規格界限之品質特性變數要先估計其模型的平均數及變異數，其估計式如下：

$$\hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x}_i) = E(\eta_{ij}) \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2(\mathbf{x}_i) = \text{Var}(\eta_{ij}) \quad (3.2)$$

其中  $\eta_{ij} = \phi(x_i)$ ， $x_i$  為第  $i$  次實驗配方， $\eta_{ij}$  為第  $i$  次實驗配方對應之第  $j$  個反應變數值。

計算完模型之平均數及變異數估計值後，需假設製程平均值的偏移量為  $s_j$  倍標準差，並根據式 (3.1) 和 (3.2) 得到之模型平均數及變異數估計值，再計算各個實驗組合下之望想值。其計算式如下：

$$d_{ij}(x_i) = \min\left[Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}(x_i), \hat{\sigma}_{ij}(x_i), +s_j), Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}(x_i), \hat{\sigma}_{ij}(x_i), -s_j)\right] \quad (3.3)$$

若  $\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu}_{ij}(x_i)$  和  $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(x_i)$ ，則其中

$$Y_{ij}(\hat{\mu}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, s_j) = \begin{cases} \Phi \left[ \frac{U_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}} \right] - \Phi \left[ \frac{L_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}} \right], & U_i, L_i \text{ 存在} \\ 1 - \Phi \left[ \frac{L_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}} \right], & U_i \text{ 不存在} \\ \Phi \left[ \frac{U_j - (\hat{\mu}_{ij} + s_j \hat{\sigma}_{ij})}{\hat{\sigma}_{ij}} \right], & L_i \text{ 不存在} \end{cases} \quad (3.4)$$

其中  $\Phi$  為標準常態分配之累積機率函數， $U_j$ 、 $L_j$  分別為第  $j$  個品質特性變數之上、下限。

## 2. 反應變數無明顯規格界限

當反應變數無明顯的規格界限時，則用目標值及最差可接受值來定義六標準

差品質之望想值，計算方式為  $d(Y) = \Phi(z_{eff,i} - 1.5)$ ，其中  $z_{eff,i} = 1.5 + 3 \left( \frac{Y_i - M_i}{T - M_i} \right)$ ，

可參考式 (2.25)。

得到各實驗組合之個別望想值後，同樣地利用幾何平均的方式計算總望想值  $D(x)$ ，但需考慮到每一個反應變數之權重，計算方式如下：

$$D(x) = \{ [d_1(Y_1(x))d_2(Y_2(x))\dots d_r(Y_r(x))]^{w_r} [d_{r+1}(Y_{r+1}(x))^{w_{r+1}} d_{r+2}(Y_{r+2}(x))^{w_{r+2}} \dots d_m(Y_m(x))^{w_m}] \}^{1/S}$$

其中  $S = \sum_{i=r}^m w_i$ 。

## 3.3 雙反應曲面法之應用

本論文應用第二章所提到之反應六標準差品質之望想函數，再結合雙反應曲面方法以找出最佳實驗組合。本研究方法之主要反應變數  $y_p$  為各實驗組合下總望想值對應成份所建構之反應曲面模型；限制反應變數  $y_s$  為各實驗組合之配方案本對應成份所建構之反應曲面模型。綜合主要反應變數和限制反應變數以構建雙反應曲面模型，在成本限制條件下，以最大化總望想值為最終目標。

本論文應用 Lingo 8.0 軟體來計算最佳化模式，建構之雙反應曲面模型如下：

$$\begin{cases} \max & y_p \\ \text{subject to} & y_s \leq c \end{cases}$$

其中  $y_p$  為各實驗組合總望想值對應成份之反應曲面模型， $y_s$  為各實驗組合之配方成本對應成份之反應曲面模型， $c$  為一成本常數。

求得最佳配方之成份組合和反應變數值後，可算出最佳實驗組合之總望想值，然後參照表 2.4，獲得品質水準與望想值對照之情形，若對照之品質水準欠佳，表示建議進行品質改善作業；若品質水準佳，表示其最佳實驗組合為良好的，即可進一步驗證此最佳配方之有效性與可行性。

### 3.4 模型適配正確性檢定與確認實驗

經由以上反應六標準差品質之望想函數結合雙反應曲面方法得到最佳實驗組合後，必須對實驗結果進行模型適配正確性檢定和驗證其再現性，以確保實驗結果成功。

根據本論文中混合實驗所規劃之實驗，進行模型適配正確性檢定，檢定分為以下兩個部份進行：

#### 1. 模型之適配性 (model adequacy)

繪製殘差機率圖和殘差對應預測值之散佈圖來判斷研究之假設模型是否符合常態性 (normality)、獨立性 (independence)、齊一性 (equal variances) 等三大統計基本假設。

#### 2. 模型之適缺性 (lack-of-fit test)

在混合實驗規劃階段就必須設定要以幾組實驗組合來檢定模型之適缺性。規劃完實驗後，用變異數分析 (Analysis of Variance Analysis, ANOVA) 之結果，即可得知模型之適缺性結果。

若是在進行模型適配正確性檢定中，模型之適配性不符合三大基本假設或模型適缺性不佳時，則需進行資料轉換或重新規劃實驗，以使模型符合假設。

若模型適配正確性檢定之結果良好，仍需進行確認實驗以確保本實驗得到之最佳配方在實際情況下具有良好之再現性。如果確認實驗之結果與模型之預測值相差太多，表示應重新規劃實驗，重新選取反應變數或設定適當的成份；相反地，若最佳配方具有良好之再現性，則表示此最佳配方具有可行性和有效性。然而，確認實驗之次數視實際操作實驗之成本因素而定。

### 3.5 配方品質與成本之比較

在經過模型適配正確性檢定與確認實驗後，表示求得的最佳配方是有效的。由於王柏齡[1]只單純應用反應六標準差品質之望想函數於多品質特性混合實驗，並未將成本因素納入考量，而李百川[2]納入配方成本於多品質特性混合實驗之案例，所以本論文將在進行完模型適配正確性檢定與確認實驗後，將研究結果與王柏齡[1]和李百川[2]之結果相比較，找出品質提升比例與成本降低比例，以驗證本論文在發展多品質混合實驗最佳化過程中，納入成本因素並結合雙反應曲面方法之必要性。

本論文之研究流程與步驟如圖 3.1 所示。

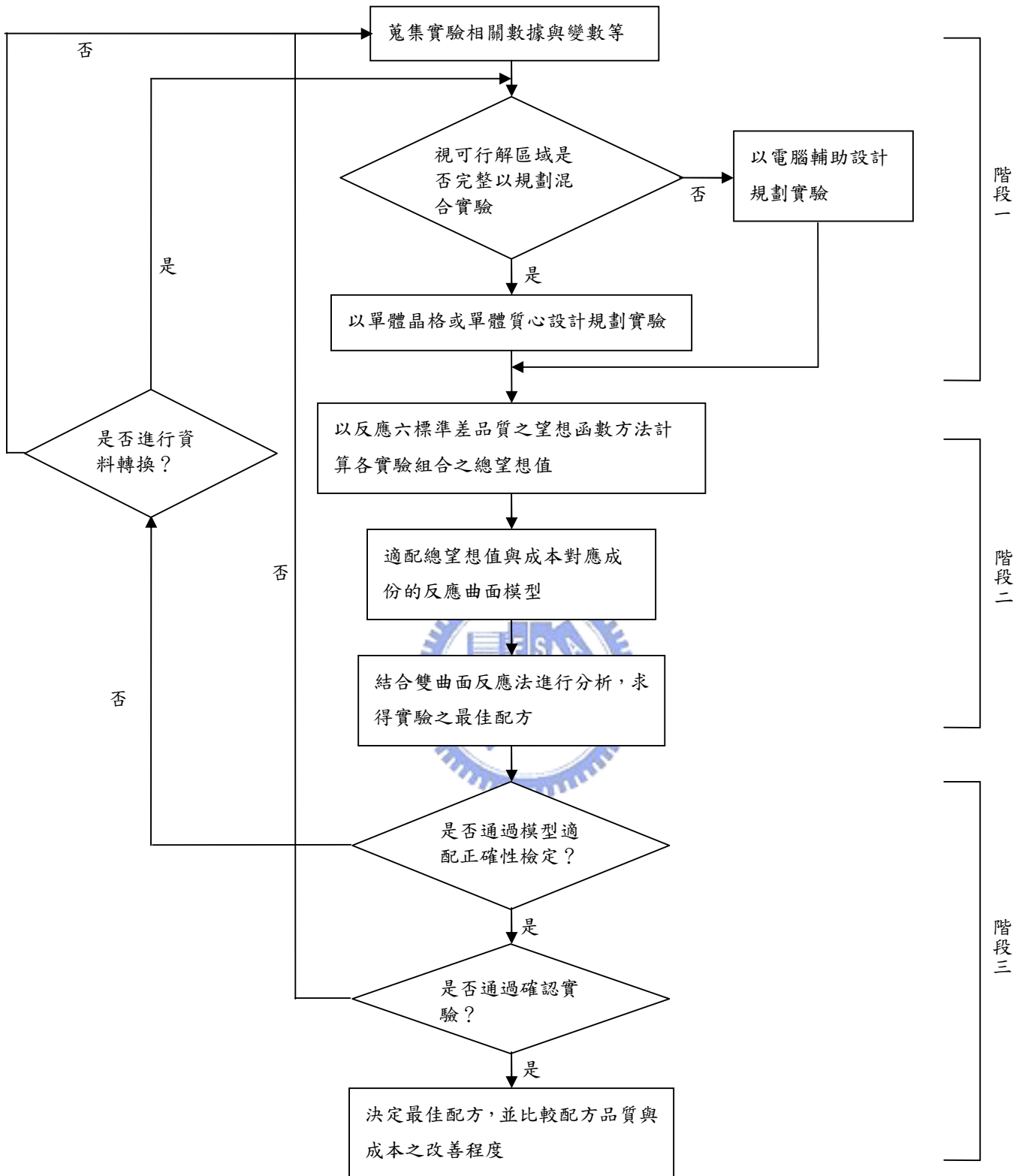


圖 3.1 研究方法流程圖



## 第四章 實例驗證

本研究利用第三章所提出之多品質特性混合實驗最佳化演算法，以台灣某汽車公司煞車用橡膠皮碗混合實驗之實際案例，來驗證本研究提出之最佳化演算法之有效性。

### 4.1 實例說明

橡膠皮碗是汽車煞車系統中之一個重要元件，其年需求量高達三萬噸之多。在其使用過程中，經常會受到拉扯與壓縮等外力影響，且長期接觸煞車系統中之潤滑液等油料，使得煞車缸與橡膠皮碗之間產生空隙，造成油壓降低，使其耐用性大幅降低。本研究希望能夠找出讓橡膠皮碗在上述使用環境下能夠長時間正常運作之最佳配方。橡膠皮碗由多種原料混合而成，根據專家經驗，影響橡膠皮碗之強度與耐用性之主要因素為製造過程中加入的老防劑、流動助劑 A、流動助劑 B 與架橋劑等化學成份之比例。因此，本實例之主要目的在找出製造生產橡膠皮碗過程中，各化學成份比例之最佳配方。

製造煞車用之橡膠皮碗的過程是將適當比例之化學成份，在特定的溫度和攪拌速度下，投入橡膠生成機使其充分攪拌均勻後，成為特定配方之橡膠在製品，再用特殊機台壓模成型，即成橡膠皮碗成品。在完成橡膠皮碗成品之後，必須要了解該配方是否能在煞車系統中長時間正常運作，需要經過一連串之檢測來驗證該配方對成品之強度與耐用性的影響力。為了模擬橡膠皮碗長時間在煞車系統中之使用環境，分別以老化爐和耐液爐進行橡膠皮碗老化與耐液加速程序，再以萬能測試機測試以該配方生產之橡膠皮碗是否能長時間在惡劣環境中正常運作並發揮其最大功效。

根據經濟部標準檢驗局規定之汽車用液壓煞車缸之橡膠皮碗檢測標準，本案例之品質特性共有五項，分別為硬度、抗拉強度、伸長率、壓縮永久變形率及體

積變化率，再根據常態、老化性、壓縮永久變形及耐液性等四種不同情況，五項品質特性共可分為十一個反應變數，各反應變數之目標值及其規格界限之定義如表 4.1 所示。

表 4.1 汽車橡膠皮碗之規格定義

反應變數項目		單位	變數名稱	規格下限	目標值	規格上限	最差可接受值
常態	硬度	Hs	H1	65	70	75	—
	抗拉強度	kgf/cm <sup>2</sup>	T1	—	望大	—	100
	伸長率	%	E1	—	望大	—	200
老化性	硬度變化	Hs	H2	-5	0	5	—
	抗拉強度變化率	%	T2	—	0	—	40
	伸長變化率	%	E2	—	0	—	40
壓縮永久變形率	壓縮永久變形率	%	C	—	0	—	30
耐液性	硬度變化	Hs	H3	-15	0	0	—
	抗拉強度變化率	%	T3	—	0	—	40
	伸長變化率	%	E3	—	0	—	40
	體積變化率	%	V	—	0	—	20

本研究之主要目的在找出組成橡膠皮碗之化學成份最佳混合比例，由於影響各品質特性的為各化學成份之比例，而非其投入量，因此本案例實屬多品質特性之混合實驗問題。下一節為實驗規劃之說明與分析過程。由於本研究需要將配方成本納入考量，所以將四種化學成份之成本資訊整理如表 4.2 所示。

表 4.2 各成份之成本資訊

成份	成本 (元/kg)
老防劑	120
流動助劑 A (WB16)	150
流動助劑 B (PE WAX)	80
架橋劑	300

## 4.2 實驗規劃

本節利用第三章所介紹之研究方法的階段一，來規劃多品質特性混合實驗。首先，假設本實驗之實驗資料符合常態分配，再根據專家經驗決定混合實驗中之

成份，分別包括老防劑 ( $x_1$ )、流動助劑 A ( $x_2$ )、流動助劑 B ( $x_3$ ) 及架橋劑 ( $x_4$ )，這四種化學成份佔橡膠皮碗總重量之 16.7%。另外，專家依據實務經驗分別判斷上述四種成份之比例上下限為：6%~16.7%、13.3%~25%、13.3%~25%、33.3%~66.7%。由於所有成份均有上下限之限制條件，所以其實驗可行解區域不為一個單體實驗區域，表示其可行解區域不完整，因此本研究採用 D-最佳化設計進行實驗規劃，如表 4.3 所示。

表 4.3 橡膠皮碗之混合實驗規劃

Run	老防劑 ( $x_1$ )	流動助劑 A ( $x_2$ )	流動助劑 B ( $x_3$ )	架橋劑 ( $x_4$ )
1	0.167	0.133	0.133	0.567
2	0.1135	0.25	0.1915	0.445
3	0.06	0.1915	0.25	0.4985
4	0.06	0.133	0.195	0.612
5	0.167	0.25	0.133	0.45
6	0.167	0.25	0.25	0.333
7	0.167	0.1915	0.1915	0.45
8	0.167	0.133	0.25	0.45
9	0.06	0.25	0.133	0.557
10	0.167	0.133	0.1915	0.5085
11	0.067	0.133	0.133	0.667
12	0.1042	0.1812	0.133	0.5816
13	0.06	0.25	0.133	0.557
14	0.167	0.25	0.133	0.45
15	0.06	0.1915	0.25	0.4985

表 4.3 中總共有十五次實驗，其中有兩次是為了進行後續之適缺度檢定，有三次重複實驗是用來估計模型之隨機誤差項，其餘十次為 D-最佳化設計規劃的實驗點。在此假設各反應曲面模型為  $\eta_j = \phi_j(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 。

### 4.3 實驗數據分析

本節為第三章研究方法中之階段二，反應六標準差品質之望想函數與雙反應

曲面方法之應用。4.3.1 和 4.3.2 小節分別說明本研究方法之分析過程，並求出實驗之最佳配方。

#### 4.3.1 反應六標準差品質望想函數之應用

在根據各成份之條件限制下，以 D-最佳化設計方法規劃實驗後，進行各反應變數在各實驗組合下之望想值指標之計算。品質指標望想值之計算可依反應變數性質分為有明顯規格界限和無明顯規格界限兩種，由表 4.1 可得知，反應變數中僅 H1、H2 與 H3 有明顯之規格界限，其餘變數皆無明顯之規格界限。從實驗結果發現，H2 與 H3 之反應值皆無顯著差異，且落在規格界限內，如表 4.4 所示。

表 4.4 反應變數 H2 與 H3 之實驗結果

Run	H2	H3
1	2	-8
2	0	-9
3	0	-7
4	0	-7
5	0	-8
6	1	-8
7	0	-10
8	0	-8
9	2	-7
10	1	-9
11	0	-8
12	1	-6
13	0	-7
14	2	-8
15	2	-8

經過專家經驗判斷反應變數 H2 與 H3 的表現趨於穩定，故本實驗之分析過程中，不會對這兩項變數進行分析，僅需要先估計反應變數 H1 在各實驗組合下之平均數和變異數。

本研究使用 Design Expert 軟體適配反應變數 H1 之最佳反應曲面模型，由於適配模型中之二次項與三次項皆不顯著，故 H1 之最佳反應曲面模型為一線性模型，其適配結果如下：

$$\hat{\eta}_{H1} = 34.38715x_1 + 71.42458x_2 + 65.94636x_3 + 80.12975x_4 \quad (4.1)$$

$$(R^2 = 0.8706)$$

根據式 (4.1) 可估計各實驗組合下之平均數與變異數，如表 4.5 所示。

表 4.5 反應變數 H1 之平均數與變異數估計值

Run	$\hat{\mu}_{H1}(\hat{\eta}_{H1})$	$\hat{\sigma}_{H1}(\hat{\eta}_{H1})$
1	69.44656	0.877965
2	70.04555	0.982610
3	72.17231	0.898376
⋮	⋮	⋮
14	68.42805	0.920586
15	72.17231	0.898376

估計完反應變數 H1 之平均數與變異數後，再計算各實驗組合下之望想值。望想值之計算依照反應變數性質分為有明顯規格界限和無明顯規格界限兩種，計算過程如下：

1. 根據專家經驗判斷反應變數 H2 與 H3 的表現趨於穩定，所以在有明顯規格界限之反應變數中只考慮 H1。由於 H1 有規格上、下限，代入式 (3.3)：

$$Y_{i,H1} = \Phi \left[ \frac{75 - (\hat{\mu}_{i,H1} + s_{H1} \times \hat{\sigma}_{i,H1})}{\hat{\sigma}_{i,H1}} \right] - \Phi \left[ \frac{65 - (\hat{\mu}_{i,H1} + s_{H1} \times \hat{\sigma}_{i,H1})}{\hat{\sigma}_{i,H1}} \right]$$

在六標準差文獻中，工程師建議製程之偏移量為  $1.5\sigma_i$ ，產品才能達到六標準差品質水準，故  $s_{H1} = 1.5$ 。再分別計算  $Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, 1.5)$  與  $Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, -1.5)$ ，其中最小值即為反應變數 H1 在各實驗組合下之望想值  $d_{i,H1}(\mathbf{x}_i)$ ，如表 4.6 所示。

表 4.6 反應變數 H1 在各實驗組合下之望想值

Run	$Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, 1.5)$	$Y_{i,H1}(\hat{\mu}_{i,H1}, \hat{\sigma}_{i,H1}, -1.5)$	$d_{i,H1}(\mathbf{x}_i)$
1	0.999999301	0.999817806	0.999817806
2	0.999801547	0.999860928	0.999801547
3	0.950278792	0.999998321	0.950278792
⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.999999904	0.986918080	0.986918080
15	0.950278792	0.999998321	0.950278792

2. T1、E1、T2、E2、C、T3、E3 和 V 等八個反應變數均無明顯規格界限，僅存在目標值  $T_j$  與最差可接受值  $M_j$ ，因此以式 (2.28) 計算其在各實驗組合下之望想值  $d_{ij}(\mathbf{x}_i)$ ，結果如表 4.7 所示。

表 4.7 無明顯規格界限之反應變數在各實驗組合下之望想值

Run	$d_{i,E1}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T1}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,E2}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T2}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,C}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,E3}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,T3}(\mathbf{x}_i)$	$d_{i,V}(\mathbf{x}_i)$
1	0.539431	0.960626	0.997495	0.998005	0.820341	0.919648	0.99214	0.868643
2	0.705401	0.962134	0.686472	0.991388	0.935325	0.947124	0.985286	0.830211
3	0.266314	0.633825	0.620349	0.536477	0.954486	0.910332	0.54425	0.758036
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.815141	0.976483	0.990825	0.975851	0.938625	0.948317	0.994466	0.932543
15	0.266314	0.81273	0.950855	0.99441	0.959941	0.977555	0.950855	0.525913

在計算完各反應變數在各實驗組合下之望想值後，代入式 (2.29) 以計算各實驗組合之總望想值  $D_i(\mathbf{x}_i)$ ，結果如表 4.8 所示。

表 4.8 各實驗組合下之總望想值

Run	$D_i(\mathbf{x}_i)$
1	0.913144
2	0.875665
3	0.656211
⋮	⋮
14	0.955353
15	0.79529

將表 4.8 所求得各反應變數下之各實驗組合之總望想值使用 Design Expert 進一步適配其反應曲面模型，其簡化後之二次反應曲面模型之 ANOVA 表如表 4.9 所示。

表 4.9 總望想值簡化二次反應曲面模型之 ANOVA 表

Response: D

ANOVA for Mixture Reduced Quadratic Model

Analysis of variance table [Partial sum of squares]

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prob > F	
Model	0.13	6	0.021	10.46	0.0020	significant
Linear Mixture	0.10	3	0.035	16.98	0.0008	
AB	0.015	1	0.015	7.24	0.0275	
AD	7.888E-003	1	7.888E-003	3.84	0.0858	
CD	0.017	1	0.017	8.21	0.0210	
Residual	0.016	8	2.055E-003			
Lack of Fit	4.553E-003	5	9.107E-004	0.23	0.9264	not significant
Pure Error	0.012	3	3.962E-003			
Cor Total	0.15	14				

此化簡二次反應曲面模型中留下較顯著之  $x_1x_2$ 、 $x_1x_4$  與  $x_3x_4$  交互作用項，將其他高次項與不顯著之二次交互作用項併入誤差項中，該模型之標準差為 0.045、 $R^2$  值與調整之  $R^2$  值分別為 0.8869 與 0.8021。其中  $x_1x_4$  交互作用項之 p-value>0.05，但若將此項刪除後，模型之標準差變為 0.052、 $R^2$  值與調整之  $R^2$  值各變為 0.8326 與 0.7397，表此交互作用項應該保留在模型中。其適配之反應曲面模型如下：

$$\eta(x_1, x_2, x_3, x_4) = 11.62133x_1 + 2.83195x_2 - 5.3509x_3 - 0.195x_4 - 17.31853x_1x_2 - 11.78604x_1x_4 + 11.86572x_3x_4 \quad (4.3)$$

### 4.3.2 雙反應曲面方法之應用

由於四種成份每公斤之成本價為已知，且混合實驗中每次實驗組合下之四個成份的總重量為一定值，表 4.10 為經過混合實驗之實驗規劃後，每次實驗之配方成本資訊，依照此資訊進一步對配方成本建構其反應曲面模型。

表 4.10 各實驗組合下之成本資訊

Run	老防劑 ( $x_1$ )	流動助劑 A ( $x_2$ )	流動助劑 B ( $x_3$ )	架橋劑 ( $x_4$ )	成本 (元/kg)
1	0.167	0.133	0.133	0.567	102.5
2	0.1135	0.25	0.1915	0.445	105.6
3	0.06	0.1915	0.25	0.4985	106.4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.167	0.25	0.133	0.45	104
15	0.06	0.1915	0.25	0.4985	106.4

將表 4.10 所求得各反應變數下之各實驗組合之配方成本當作該混合實驗中之反應變數，使用 Design Expert 進一步適配其反應曲面模型，其化簡二次反應曲面模型之 ANOVA 表如下所示。

表 4.11 配方成本簡化二次反應曲面模型之 ANOVA 表

Response: Cost

ANOVA for Mixture Reduced Quadratic Model

Analysis of variance table [Partial sum of squares]

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prob > F	
Model	112.66	7	16.09	1.985E+005	< 0.0001	significant
Linear Mixture	112.65	3	37.55	4.631E+005	< 0.0001	
AB	8.995E-004	1	8.995E-004	11.09	0.0126	
AD	1.330E-003	1	1.330E-003	16.41	0.0049	
BC	3.450E-003	1	3.450E-003	42.55	0.0003	
CD	1.653E-003	1	1.653E-003	20.38	0.0027	
Residual	5.676E-004	7	8.108E-005			
Lack of Fit	5.676E-004	4	1.419E-004			
Pure Error	0.000	3	0.000			
Cor Total	112.66	14				

表 4.11 為配方成本化簡之二次反應曲面模型之 ANOVA 表，該模型之標準差為  $9.005 \times 10^{-3}$ 、 $R^2$  值與調整之  $R^2$  值皆趨近於 1，表示此模型適配程度相當良好，不需要再做修改。適配之反應曲面模型如下：

$$\eta(x_1, x_2, x_3, x_4) = 120.54839x_1 + 101.8786x_2 + 134.27885x_3 + 89.92059x_4 - 6.64952x_1x_2 - 7.10181x_1x_4 + 13.82402x_2x_3 + 7.13312x_3x_4$$

(4.4)



在求得式 4.3 與式 4.4 之總望想值反應曲面模型與配方成本之反應曲面模型後，即可建立雙反應曲面模型。將總望想值反應曲面模型設為主要反應變數 ( $y_p$ )，成本之反應曲面模型設為次要反應變數 ( $y_s$ )，建構之模型如下：

Max

$$y_p = 11.62133 * x_1 + 2.83195 * x_2 - 5.3509 * x_3 - 0.195 * x_4 - 17.31853 * x_1 * x_2 - 11.78604 * x_1 * x_4 + 11.86573 * x_3 * x_4$$

St

$$y_s = 120.54839 * x_1 + 101.8786 * x_2 + 134.27885 * x_3 + 89.92059 * x_4 - 6.64952 * x_1 * x_2 - 7.10181 * x_1 * x_4 + 13.82402 * x_2 * x_3 + 7.13312 * x_3 * x_4 < 109.9$$

$$0.06 \leq x_1 \leq 0.167$$

$$0.133 \leq x_2 \leq 0.25$$

$$0.133 \leq x_3 \leq 0.25$$

$$0.333 \leq x_4 \leq 0.667$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$



利用 Lingo 8.0 最佳化所建構之雙反應曲面模型，在配方成本限制下得到成份比例之最佳解，如表 4.12 所示。

表 4.12 成份比例之最佳解

變數	老防劑 ( $x_1$ )	流動助劑 A ( $x_2$ )	流動助劑 B ( $x_3$ )	架橋劑 ( $x_4$ )
最佳解	16.7%	13.3%	21.56791%	48.43209%
目標總望想值	0.9704252			
成本(元)	106.612736			

根據表 4.11 得知當老防劑佔實驗組合總重量之 16.7%、流動助劑 A 佔實驗組合總重量之 13.3%、流動助劑 B 佔實驗組合總重量之 21.56791%，和架橋劑佔實驗組合總重量之 48.43209%時，可以得到符合配方成本限制下之最大總望想值，其值為 0.9704252，配方成本為 106.612736 元。

得到實驗中各成份比例之最佳解後，可以透過表 2.4 找出其對照之產品品質水準程度。本實驗之總望想值為 0.9704252，其產品品質水準是介於可接受之品質程度，達到  $3\sigma$  水準。針對本實驗個案，若企業內部改善品質之預算足夠，建議可以成立專案小組，找出能夠改善品質的癥結點，進而實施品質改善作業以提升產品品質水準；若在預算不足的情況下，維持現狀也可以接受。

#### 4.4 模型適配正確性檢定

模型適配正確性檢定分為兩個部份進行，分別為總望想值之反應曲面模型與配方成本之反應曲面模型，透過模型之適配性和模型之適缺性兩項檢定方式以驗證模型選用正確。

##### 4.4.1 總望想值之反應曲面模型適配正確性檢定

經由殘差機率圖和殘差對預測值之散佈圖來判斷反應曲面模型是否符合常態性、獨立性與齊一性等三大統計假設。其檢定結果如圖 4.1 和 4.2 所示。最後查看模型之變異數分析表，從其中適缺度之 p-value 值來判斷其模型之選用是否合適。

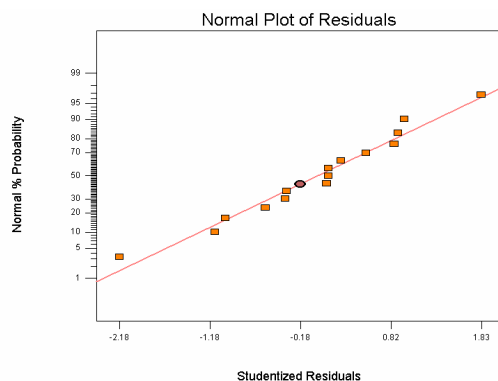


圖 4.1 總望想值之殘差常態機率圖

由圖 4.1 可以看出每一組實驗組合之殘差值均落在或靠近直線上，代表其模型符合常態性。

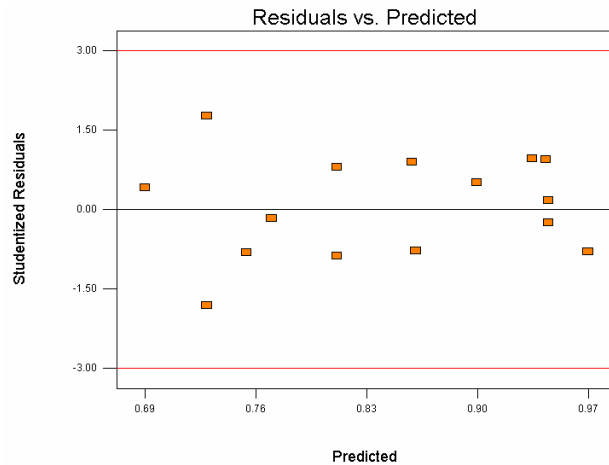


圖 4.2 總望想值之殘差對預測值散佈圖

由圖 4.2 可以看出每一組實驗組合之殘差值均隨機散佈，未呈現任何特殊圖案 (pattern)，代表此模型符合獨立性與齊一性。

另外，表 4.8 中模型的適缺度之 p-value 為 0.9264，表示其適配模型的選用為合適的。綜合以上，總望想值之反應曲面模型通過適配正確性檢定。

#### 4.4.2 配方成本之反應曲面模型適配正確性檢定

經由殘差機率圖和殘差對預測值之散佈圖來判斷其模型是否符合常態性、獨立性與齊一性等三大統計假設。其檢定結果如圖 4.3 和 4.4 所示。最後查看模型之變異數分析表，從其中適缺度之 p-value 值來判斷其模型之選用是否合適。

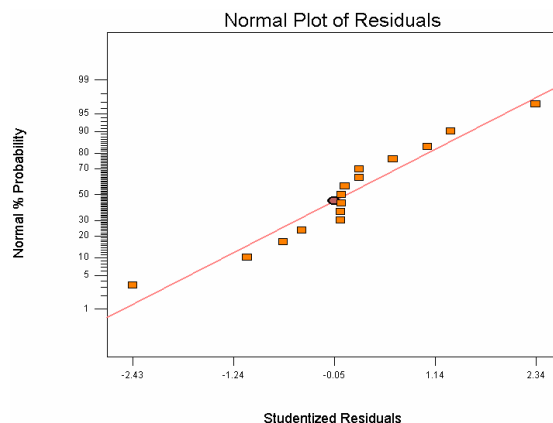


圖 4.3 配方成本之殘差常態機率圖

由圖 4.3 可以看出每一組實驗組合之殘差值均落在或靠近直線之處，代表其模型符合常態性。

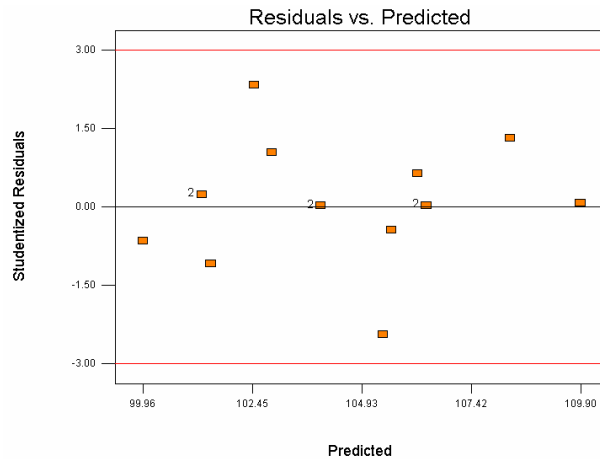


圖 4.4 配方成本之殘差對預測值散佈圖

由圖 4.4 可以看出每一組實驗組合之殘差值均隨機散佈，未見任何特殊圖形，代表其模型符合獨立性與齊一性。

另外，由於配方成本之反應曲面模型之適配程度相當好， $R^2$  與調整後之  $R^2$  皆趨於 100%，所以表 4.10 中誤差項為 0，導致適缺度之 p-value 值無法估計。綜合以上，配方成本之反應曲面模型通過適配正確性檢定。



#### 4.5 確認實驗

由於本論文無法實際進行確認實驗，而王柏齡[1]之最佳配方已通過確認實驗，所以將其驗證實驗之總望想值作為本論文驗證實驗之總望想值。由表 4.13 顯示驗證實驗之總望想值落在預測之 95%信賴區間內，顯示本論文之最佳配方再現性良好，所以建議該汽車公司之橡膠皮碗配方可採用本論文提出之最佳配方製造該汽車煞車用之橡膠皮碗。

表 4.13 最佳配方確認實驗與預測值比較表

	本論文 預測值	驗證實驗 王柏齡[1]	95%信賴區 間下限	95%信賴 區間上限
總望想值	0.9704	0.9682	0.8739	1.0000

#### 4.6 最佳配方總望想值與成本之比較

經過模型適配正確性檢定與確認實驗後，表示求得之最佳配方具有效性。而本論文是在考量成本限制條件因素下，結合反應六標準差品質之望想函數與雙反應曲面方法，找出能最佳化品質之最佳配方。由於王柏齡[1]僅應用反應六標準差品質之望想函數於多品質特性混合實驗問題，並未將成本因素納入考量，因此將最佳配方之望想值與王柏齡[1]之結果相比，找出品質提升比率，比較之結果如表 4.14 所示。

表 4.14 總望想值之比較表

	王柏齡[1]	本論文
老防劑	0.167	0.167
流動助劑 A	0.25	0.133
流動助劑 B	0.1554	0.2156791
架橋劑	0.4276	0.4843209
預測之總望想值	<b>0.9474</b>	<b>0.9704252</b>

由表 4.14 可以得知本研究所求得之最佳配方之總望想值由 0.9474 提升至 0.9704252，改善程度約 2.43%。再將本論文求得之最小成本結果與李百川[2]之結果相比較，其比較之結果如表 4.15 所示。

表 4.15 最佳配方成本之比較表

	李百川[2]	本論文
老防劑	0.167	0.167
流動助劑 A	0.133	0.133
流動助劑 B	0.238	0.2156791
架橋劑	0.462	0.4843209
配方成本 (元)	<b>107.7</b>	<b>106.612736</b>

由表 4.15 可得知本研究所求得之最佳配方成本為 106.612736 元，改善程度約 1.01%，著實降低了配方成本。雖然改善程度並不大，但橡膠皮碗之年產量高達三萬噸，對於產量大的產品而言，成本僅降低 1% 對企業獲利而言是相當可觀的。所以經過最佳配方總望想值與成本之比較後，顯示本論文之結果較王柏齡[1]與李百川[2]之結果佳，在成本受限之條件下，達到最大化望想值之目的。由此驗

證本論文在發展多品質混合實驗最佳化過程中，納入成本因素並結合雙反應曲面方法之必要性。



# 第五章 結論與建議

## 5.1 結論與貢獻

在材料、化工、醫藥或食品等產業，有許多屬於混合實驗之問題常誤用傳統實驗設計的手法來找出實驗因子水準之最佳設定，造成實驗結果無法達到預期之成效，所以一開始規劃實驗的步驟就顯得相當重要。

由於「多品質最佳化之混合實驗問題」之議題在國內外文獻均相當少見，大部分皆在探討單品質最佳化，然而隨著科技的進步、顧客需求的複雜化，產品之設計必須朝向多品質特性之最佳化發展。

傳統之望想函數方法為一相對指標，無法直接給予業者品質改善之依據，且無法同時考量到品質之平均和變異情形，而反應六標準差品質之望想函數能夠改善此項缺點。當處理最佳化之實驗問題時，通常會採用反應曲面方法，而本論文中「品質」和「成本」兩項反應變數，若僅以反應曲面法進行最佳化，只能以互償的方式求得最佳配方。然而，雙反應曲面方法能夠在成本限制條件下，最佳化「品質」變數，所以得到之最佳配方較僅用反應曲面法佳。

本論文以新竹某公司汽車煞車用橡膠皮碗之實際案例，結合反應六標準差品質之望想函數和雙反應曲面方法以建構一套完整可行之多品質特性混合實驗最佳化演算法。由第四章實例驗證的結果發現，代表品質之望想值從 0.9474 提升至 0.9704252，改善了 2.43%，配方成本由 107.7 元降至 106.612736 元，改善程度約 1.01%，實驗結果充分驗證本論文所提之最佳化演算法之有效性與可行性。

本論文對學術界及工業界之貢獻可彙整如下：

1. 本論文整理出最早提出之望想函數、修正之望想函數到近年所提出之反應六標準差品質之望想函數等文獻。並應用反應六標準差品質之望想函數結合雙反應曲面方法，在目前之多品質混合實驗相關文獻中，均未見到，因此具學術創新性。

2. 本論文採用反應六標準差品質之望想函數，能夠反應出六標準差品質水準，即反應製程處於長期穩定下之生產良率。
3. 目前中外文獻中，尚未有將成本納入考量之實際案例，又由於工業界在研發新配方需同時考慮到配方之實際成本，故本論文所提之最佳化演算法可使工業界獲利較大。

## 5.2 未來研究方向

本論文所提出之最佳化多品質特性混合實驗問題之演算法仍有以下兩項可改善之處：

1. 由於本論文之最佳化多品質特性混合實驗問題之演算法分為兩部份，第一部份為反應六標準差品質之望想函數之應用，第二部份為雙反應曲面方法之應用，而反應六標準差品質之望想函數之計算較為複雜，若能簡化此最佳化演算法之計算步驟可使業界使用更加便利，所以建議未來研究可以寫一個計算反應六標準差品質之望想值的程式，便於計算且更易推廣。
2. 使用反應六標準差品質望想函數來界定各反應變數之權重較為主觀，無法客觀地計算出各個反應變數之重要程度。若能客觀的取得各變數之權重，所得之研究結果可信度能夠更大幅的提昇。

本研究乃接受國科會 NSC 94-2213-E-009-079 支助之研究，特此致謝。



# 參考文獻

1. 王柏齡 (2005), 「反應六標準差之多品質特性混合實驗最佳化演算法」, 國立交通大工業工程與管理學系, 碩士論文。
2. 李百川 (2005), 「應用雙反應曲面分析法於混合實驗多品質特性最佳化之研究」, 國立交通大工業工程與管理學系, 碩士論文。
3. 楊忠倫 (2004), 「以反應曲面法探討脂解酵素催化抗壞血酸月桂酸酯之最優化」, 大葉大學生物產業科技學系, 碩士論文。
4. 劉政勳 (2004), 「反應六標準差水準之多品質特性同時最佳化演算法」, 國立交通大學工業工程管理系, 碩士論文。
5. 賴昱甫 (2000), 「脂肪替代甲基葡萄糖多酯的最優化合成條件探討及物理特性之研究」, 大葉大學食品工程研究所, 碩士論文。
6. Ames, A. E., Mattucci, N., Macdonald, S., Szonyi, G., and Hawkins, D. M. (1997), "Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces," *Journal of Quality Technology* 29, 3, pp. 339-346.
7. Box, G. E. P. and Wilson, K. G. (1951), "On The Experimental Attainment of optimum Conditions," *Journal of the Royal Statistic Society B* 13, 1, pp.1-45.
8. Castollo, E. D., Montgomery, D. C., and Mccarville, D. R. (1996), "Modified Desirability Functions for Multiple Response Optimization," *Journal of Quality Technology* 28, 3, pp. 337-345.
9. Cornell, J. A. (2002), *Experiments with Mixtures: Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey,.
10. Dabbas, R. M., Fowler, J. W., Rollier, D. A., and McCarville, D. (2003), "Multiple Response Optimization Using Mixture-Designed Experiments and Desirability Functions in Semiconductor Scheduling," *International Journal of Production Research* 41, 5, pp. 939-961.
11. Derringer, G. and Suich, R. (1980), "Simultaneous Optimization of Several

- Response Variables,” *Journal of Quality Technology* 12, 4, pp. 214-219.
12. Harrington, E. C. (1965), “The Desirability Function,” *Industrial Quality Control* 21, pp. 494-498.
  13. Hill, W. G. and Hunter, W. G. (1966), “A review of response surface methodology: a literature survey,” *Technometrics* 8, pp. 571-590.
  14. Montgomery, D. C. (2005), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley, New York.
  15. Myers, R. H. and Carter, W. H. (1973), “Response Surface Techniques for Dual Response Systems,” *Technometrics* 15, 2, pp. 301-317.
  16. Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981), “Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions,” *Technometrics* 23, 4, pp. 363-375.
  17. Ko, Y. H., Kim, K. J. and Jun, C. H. (2005), “A New Loss Function-Based Method for Multiresponse Optimization,” *Journal of Quality Technology* 37, 1, pp.50-59.
  18. Kros, J. F. and Mastrangelo, C. M. (2001), “Comparing Methods for The Multi-response Design Problem,” *Quality and Reliability Engineering International* 17, pp. 323-331.
  19. Kros, J. F. and Mastrangelo, C. M. (2004), “Comparing Multi-response Design Methods with Mixed Response,” *Quality and Reliability Engineering International* 20, pp. 527-539.
  20. Ribardo, C. and Allen, T. T. (2003), “An Alternative Desirability Function for Achieving ‘Six Sigma’ Quality,” *Quality and Reliability Engineering International* 19, pp. 227-240.
  21. Scheffé, H. (1958), “Experiments with Mixtures,” *Journal of the Royal*

*Statistical Society B* 20, 2, pp. 344-360.

22. Scheffé, H. (1963), "Simplex-Centroid Design for Experiments with Mixtures," *Journal of the Royal Statistical Society B* 25, 2, pp. 235-263.
23. Tang, L. C. and Xu, K. (2002), "A Unified Approach for Dual Response Surface Optimization," *Journal of Quality Technology* 34, 4, pp. 437-447.
24. Vining, G. G. and Myers, R. H. (1990), "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: a dual response approach," *Journal of Quality Technology* 22, 1, 38-45.
25. Vining, G. G. (1998), "A Compromise Approach to Multiresponse Optimization," *Journal of Quality Technology* 30, 4, pp. 309-313.
26. Wurl, R. C. and Albin, S. L. (1999), "A Comparison of Multiresponse Optimization: Sensitivity to Parameter Selection," *Quality Engineering* 11, 3, pp. 405-415.

