國 立 交 通 大 學

財 務 金 融 研 究 所

碩 士 論 文

考慮流動性因素下金融機構發行選擇權之訂價與避險：理論與實證分析

Pricing and hedging of options issued by financial institutions with illiquidity: Theory and empirical evidence

研 究 生：鄭儀貞

指導教授：鍾惠民 博士

中 華 民 國 九 十 五 年 六 月

考慮流動性因素下金融機構發行選擇權之訂價與避險：理論與實證分析

Pricing and hedging of options issued by financial institutions with illiquidity: Theory and empirical evidence

研 究 生：鄭儀貞　　　　Student: Yi-Chen Cheng

指導教授：鍾惠民博士　　　　Advisor: Dr. Huimin Chung

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

A Thesis
Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Finance

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

考慮流動性因素下金融機構發行選擇權之訂價與避險：理論與實證分析

學生：鄭儀貞　　　　　　　　指導教授: 鍾惠民 博士

國立交通大學財務金融研究所

2006 年 6 月

摘要

本文主旨在考慮流動性因素的選擇權訂價模型與 BS 訂價模型，來為台灣單一個股之美式認購權證作訂價與避險分析。在證券市場可能存在流動性不足的情況下，本文探討流動性對認購權證的影響，並提出一個數值方法來求解非線性偏微分方程，獲得權證價格及希臘字母(Greeks)並比較其受流動性影響的變化。實證部份比較兩種模型的定價誤差，以及探討何種模型的避險效果較佳：採用三種避險區間來做比較，分別為每日調整、每五日調整與每十日調整避險部位，最後使用無母數檢定來驗證 Frey 模型避險誤差是否小於 BS 模型避險誤差，檢驗 Frey 模型是否適用於台灣市場。研究結果顯示在證券市場可能發生流動性不足的情況下，與 BS 模型比較，用 Frey 模型來評價認購權證與避險操作似乎可得到較好的結果。

關鍵字： 選擇權訂價、流動性、非線性偏微分方程式、回饋效果、有限差分法、避險誤差、追蹤誤差、認購權證。

Pricing and hedging of options issued by financial institutions with illiquidity: Theory and empirical evidence

Student: Yi-Chen Cheng Advisor: Dr. Huimin Chung

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2006

ABSTRACT

This paper considers the option pricing model under illiquidity and compares the model to BS model. After solving the nonlinear partial differential equation by a new numerical method, we can observe that how the call warrant prices and Greeks change due to the illiquidity in the underlying asset market. We compare the pricing error of call warrant and hedging strategies of Frey model to those of the standard BS model in Taiwan's stock market with the illiquidity problems. In order to compare the hedging strategies between the two models, we choose three rebalance intervals. We rebalance the replication of call warrants every day, every five days, and every ten days and conduct nonparametric test to examine that the tracking error in Frey model is less than the tracking error in BS model. According to our results, Frey model is better in Taiwan warrant market with illiquidity.

Keyword: Illiquidity; Option Pricing; Nonlinear PDE; Feedback Effect; Finite Difference; hedging error; tracking error; call warrant.

誌謝

終於可以畢業囉！研究所的辛苦沒白費，這篇論文之所以可以如期完成，除了感謝各科授課老師與所上資源，要感謝指導老師鍾惠民教授的諄諄教誨，對我論文上的建議與協助，應數所賴明治老師對論文程式演算法的指導，清大韓傳祥老師提供參考意見，還有口試委員張傳章老師、張焯然老師與賴明治老師在當天對本篇論文所提出的建議與問題。

另外還要感謝陳煒朋學長對論文實證部份的幫忙，還有一起研究論文的家農，不論是生活上或是課業上，時時給予協助與提醒，財金所學長姊與同學們各方面的幫助與關懷，而音學姊、象康學長、財工三美女之二惠華與瑞娟、銘輝、柏豪、猛男、班長、偉哥、志揚、波哥，熱心的所辦小姐文淇與佳芸，好室友翔婷、阿敏與竹君，還有好姐妹吟、阿育與叉燒，學長大乃與豬頭，所給予的支持與安慰，因為有你們才讓我這兩年如此順利，充滿歡笑與快樂。

當然還要感謝我的爸媽與家人，給我默默的支持與鼓勵，在我最需要的時候總是溫暖，是令我前進最大的原動力。要感謝的人實在太多了，實在無法一一提及，但我都會銘記在心，在我生命中有你們真好，謝謝上天賜給我的聰明才智與際遇。

鄭儀貞　謹誌於

交通大學財務金融研究所

民國九十五年六月

目錄

圖目錄

表目錄

第一章 序論

第一節 研究背景與動機

衍生性金融商品，從 1973 年芝加哥選擇權交易所（Chicago Board of Trade, CBOT）開始集中交易股票買權後，便蓬勃發展，交易量迅速增加，由於股票選擇權大受歡迎，全球各地交易所陸續推出各種選擇權，標的物從單一股票擴展到公債、外匯、股價指數、利率、…等。在亞洲，1982 年新加坡國際金融交易所（Singapore International Monetary Exchange, SIMEX）開始交易選擇權，而台灣證券交易所也在民國 86 年開始交易認購權證，近年來更加多元化，推出許多新奇選擇權。

衍生性商品與現貨分別擁有不同的特性，然而衍生性金融商品最吸引人的特點是以小博大，亦即高槓桿特性，只要付出少許權利金便可得執行選擇權的權力而獲取高額的預期報酬，但相對而言，擁有選擇權部位也可能使投資人在極短時間遭受到莫大損失，因此操作衍生性商品，必須同時以考慮現貨來做動態或是靜態避險策略。由美國兩位財務經濟學家， Fischer Black 及 Myron Scholes 於 1973 年所提出的選擇權訂價模型，本文簡稱為 BS 模型，是當今學術界與實務界最常使用的選擇權訂價模型，除了被用來計算理論的選擇權價格，其避險比率（hedge ratio）在理論上我們稱之為 Delta，表示選擇權對股價波動的變動關係，當選擇權價值變動一單位，而股票持有部位為 Delta 單位時，兩者的價值變動幅度剛好互相沖銷，故稱為 Delta 中立，其目的主要是規避市場風險（market risk），市場風險泛指金融市場受到總體因素變動所產生的風險，此風險使投資組合價值產生變化，而經濟、政治、利率與通貨膨脹的變化都可以歸類為市場風險，亦即市場走勢不利造成所有證券價值驟減。理論上使用 BS 模型進行動態避險（dynamic hedge），可使投資組合損益為零而達到完全避險效果，然而在真實的世界下，實

際的市場並不符合 BS 模型的假設，因為在實際市場的交易下，投資人和發行者都會在交易過程或避險行為中產生交易成本，而且存在許多交易限制，例如不能隨時進行交易，因此實務上投資人或是券商大多會以每日、每週或每隔一段時間，以間斷的（discrete）方式去調整避險部位。

除了市場風險與交易限制之外，真實市場上還存在著許多風險是 BS 模型沒有考慮到的，例如信用風險（credit risk）、流動性風險（liquidity risk）等等風險因子。信用風險主要是指因顧客信用發生變化導致貸方或銀行總值之變化，在顧客無意願償還或無法履行契約的情況下，產生違約事件，因此違約風險(default risk)可視為信用風險的主要風險因子。目前許多銀行都積極的建置自己的信用評等模型，有效的控制風險的暴露程度，以及遵循第二次巴塞爾資本協定的相關規範；在流動性風險方面主要可以分為兩大類，即資金的流動性風險（funding liquidity risk）與交易相關之流動性風險（trading-related liquidity risk）。資金流動性風險是指金融機構是否具備了資金籌措能力，以應付債務或是其他需求，本文主要是專注在交易相關的流動性風險並探索流動性因子如何影響認購權證的訂價與避險，於後續章節中我們會在非線性的選擇權訂價模型中定義流動性參數以及流動性在市場微結構理論上的涵義。

投資人或券商在進行避險策略時，若未考慮重要風險因素，而不當使用訂價模型可能會導致操作策略錯誤或是陷入過度炒作的陷阱而造成莫大損失，國際上曾發生許多因為衍生性商品操作不當而導致的金融危機，例如：1994 年美國史上最大投資失敗案–加州橘郡事件（Orange County），因為投資債券附買回與反向浮動利率債券失利，過度運用財務槓桿而導致橘郡地方政府損失高達 15 億美元，使得橘郡地方政府於 1994 年底宣告破產。另外，1995 年英國霸菱（Barings）銀行，交易員李森（Nicholas William Lesson）投資日經股價指數期貨、選擇權與公債期貨等衍生性商品，因為過度投機，導致霸菱在交易部位上虧損了約 12 億美元，使英國最古老銀行毀於其一人之手。在 1998 年，以長期資本管理公司（Long-Term Capital Management, LTCM）的事件最為著名，從 1994 年創立至

1997 年有著卓越成績，由於 1998 年俄羅斯財務危機引發金融風暴，導致市場流動性不足，因此 LTCM 因為資產間相關係數起了重大改變而在市場上的避險部位承受了嚴重的損失，避險基金操作不當而瀕臨破產，在金融市場造成極大的震撼，幾乎引起全球金融體系崩潰，最後是在葛林斯潘的主導下，由聯邦準備銀行協調 14 家金融機構，以 36 億美元現金，才拯救了 LTCM。

由過去許多操作衍生性商品失敗的例子可知風險的來源並不僅於市場風險的範疇，所以在建構一個選擇權訂價模型的同時，還必須要考慮其他的風險，而本文以市場微結構的理論為基礎下，探討流動性對於選擇權訂價和避險的影響。因此將著重於流動性風險的探討，此流動性風險是「交易相關之流動性風險」，指投資人能以快速且合理的價格完成交易的能力，越能迅速且以預期價格成交，市場流動性越佳。流動性風險，目前尚未有統一的衡量方式。詹場與胡星陽(2000）將流動性衡量方式作了完整的文獻整理，該文主要將流動性的衡量方式歸納為價格構面、交易構面及交易熱絡程度這三種構面，價格構面主要是以交易對價格的影響來衡量流動性，價格變動程度越大，代表流動性越差；時間構面是以完成交易所需時間，越快完成交易，市場流動性越高；交易熱絡程度是以交易量來衡量，交易量越大表示越多人在市場上進行交易活動，因此市場的流動性越好。不同的市場機制，適合不同的流動性衡量方式，本文欲對台灣券商發行認購權證作相關的實證分析，由於證券市場流動性不足時可能會導致券商在發行權證時同時進行避險損失，我們關切證券市場的流動性對於券商避險的影響程度，台灣股票市場目前為一個委託單導向市場，因此我們選用價格構面中之交易對價格的衝擊類型來量化流動性。

權證的訂價和避險是一體兩面的，對於發行者而言，必須同時以買賣現貨來規避標的股票價格波動的風險，但若證券市場流動性不足，使現貨部位無法立即交易，將導致發行者在避險部位上的損失，因此本研究欲探討流動性風險對於避險策略的影響。所謂流動性風險，係指因市場有一方目前無意願交易，所致無法以現行市價執行交易之風險，執行交易時將導致部位產生虧損。在流動性高的證

券市場上，一個資產價值除了可從市場價值直接衡量出來也可由理論模型進行評價，但流動性不足時，用理論模型來評定資產價值，便容易產生模型風險（model risk）。目前 BS 選擇權評價模型是被最廣為使用的模型，然而其很多的模型基本假設並不能符合複雜的真實世界，若錯誤的使用該模型，會造成評價錯誤，以致避險損失。BS 模型並未考慮到流動性不足所造成的風險，而是假設資產可以目前市價買進賣出，且在交易期間市場價格不會受委託單量（order flow）的影響，這些都是在完美市場流動性下的假設，並不符合真實現況，所以流動性風險亦可以視為模型風險的來源，不僅如此，以下這幾點不符合現況的 BS 模型假設，均可以被視為模型風險的一部份。

在 BS 模型下，作歐式買權定價有以下限制：

1. 股價的隨機微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1.1}$$

其中 μ 與 σ 為常數，W 服從標準的幾何布朗運動

2. 證券的交易為連續的，沒有放空限制，無交易成本及稅。
3. 無借貸限制，借貸利率相同且為常數。
4. 股價與選擇權價格不受市場參與者下單行為的影響而改變。

本篇文章主要是採用 Frey(2000)與 Frey 和 Patie(2001)兩篇文章的選擇權訂價模型做為主軸，當證券市場存在流動性不足的因素下，對於認購權證會有何影響，且在這個非線性的選擇權訂價模型中，Frey (2000)提出簡單的證明，證明股價與選擇權價格會受到委託單（order）影響。在 BS 模型的架構中，波動度（volatility）被假設是一個常數而不是隨機的，但在市場有流動性問題產生時，我們認為流動性的改變會使標的物（股票）的波動度增加，所以股價隨機過程應該適度地進行修正，因此當考慮流動性變化的影響後，原來的幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion)已經不再適用了。除此之外，假設投資人使用 BS 模型來進行 Delta 避險或是其他避險行為，會因為 BS 模型所產生的模型風險，而導致投資人或是券商產生避險上的嚴重偏差，避險部位可能產生嚴重損失，因此

採用 Frey 和 Patie(2001)所提出的適當的模型，在市場流動性可能變化的情況下，除了可以找出準確的理論價格外，更可以建構出一個準確的避險部位，極小化避險誤差，使避險者可以有效的規避流動性風險與市場風險。

第二節 研究目的

本文主要研究的是當股票市場流動性不足時，如何建立適當模型來進行認購權證定價，並利用建構出來的選擇權模型進行間斷性避險，與使用 BS 模型風險中立避險加以比較，以得知何種避險誤差較小。Frey (2000)將流動性因素加入，設定一個修正後的股價隨機過程，可導出動態避險策略對價格及波動度（volatility）的回饋效果（feedback effect）。接著修正 BS 偏微分方程（Partial Difference Equation, PDE），將原本的 BS 模型由線性拋物線型（parabolic）的偏微分方程式轉變為非線性的偏微分方程，便可由有限差分法（finite difference method）解出選擇權或是認購權證的理論價格及求出 Greeks，探討標的證券價格變動時，衍生性商品價格與 Greeks 在不同流動性之下的變化。且導出市場流動性不足時，用 BS 模型作動態避險（dynamic hedging）所造成的追蹤誤差（tracking error），或稱為避險誤差。

實證研究的部分是以台灣券商發行一般型單一個股美式認購權證的角度，發行者需於證券市場建構其標的股票的避險部位，在考慮流動性的因素下，比較本文所提出的模型和 BS 模型，券商的避險誤差（或稱追蹤誤差）的差異，驗證所提出的模型是否適用於台灣市場。

第三節 研究流程與論文架構

第一章　序論

從衍生性商品的發展近況與操作失敗的例子，得知有效的風險管理在現今的金融市場中是重要的而且迫切的，本文著重於流動性風險的部份，簡介流動性的定義與背景，並以流動性的角度切入選擇權訂價模

型，改善 BS 模型在訂價上的偏誤與模型不當使用所造成的風險。

第二章　台灣認購權證市場簡介

簡介認購權證起由並依不同性質所做的分類。

第三章　文獻探討

探討各種流動性衡量方式適用於不同市場，還有衡量上的困難處，以及大型投資人在流動性不足下，避險策略所造成的回饋效果，又該如何調整避險策略才能使避險誤差變小。

第四章　研究方法

設定模型與假說，模型主要依據 Frey and Patie (2001)，將股價隨機過程加入流動性因子 ρ 與投資人操作策略 α 的影響，接著探討避險者經由自我融資（self-financing）複製衍生性商品，並定義追蹤誤差，且由 *Itô-formula* 導出當流動性不足時，避險者的策略 α 對波動度與股價的回饋效果。並利用 BS 偏微分方程，證明市場流動性不足時使用 BS 避險策略必定造成損失，進而修正為一非線性偏微分方程，證明用此模型所得到的追蹤誤差較小。最後介紹如何運用數值有限差分法，將上述非線性 BS 偏微分方程離散化，並對方程式作一些穩定限制，解得不同流動性之下的價值。

第五章　實證分析

利用台灣單一個股之美式認購權證，探討流動性不足時，選擇權價值、避險比率、Gamma 值與 Vega 值將會如何變化及如何進行避險操作較佳，檢驗本文模型是否適用於台灣市場。

第六章　結論與建議

對本文研究結果作結論並提出後續研究建議。

第二章 台灣認購權證市場簡介

認購權證（call warrants）是由台灣證券交易所規劃，依財政部證券交易法第6條第1款核定為有價證券後，於民國86年6月1日起，正式開始接受發行人申請發行認購權證，到了民國86年8月20日，大華證券首先發行以國巨為標的證券的大華01認購權證以及以太電為標的股的大華02認購權證，並於9月4號正式在台灣證券交易所掛牌交易。

認購權證依其發行人性質可分為權益型與備兌型兩類：權益型認購權證（equity warrants）的發行目的是因為公司或企業想要公開募集新股或資金，因而公開銷售的權證。持有人有權利於發行日期起一定期限內，依一定的價金向發行公司購買該公司股票而成為股東，因為公司必須發行新股以支付給投資人，所以對該公司股價具有稀釋效果。備兌型認購權證（covered warrants）是由公司以外的第三者（券商）所發行的一定數量與特定條件的有價證券，其目的是為了滿足市場需求或供投資人避險之用，目前在台灣上市的認購權證契約即屬於此種，性質與一般所提的選擇權相似，投資人付出權利金（即認購權證的價格）買入權證後，便有權利在某一特定期間（美式）或一特定時點（歐式），按履約價格（strike price）向發行券商購入標的股票，或以現金結算方式收取價差，由於該發行機構原本就持有此張股票，因此並不會產生股價的稀釋效果。一般而言，券商發行備兌型認購權證，必須同時以股票部位避險，以避免權證買方兌換股票。

除此之外，依其履約時點則可分為美式與歐式權證，美式權證是指權證的投資者可在到期日前的任一時點提早執行權證換股的權利，而歐式權證只能在到期日執行其權利，目前台灣上市的認購權證均屬於美式權證，到期日履約方式為證券給付，但發行人可選擇以現金結算方式履約。依其標的物之不同可分為單一個股型、一籃子股票型、股價指數型與商品、利率與貨幣型權證，單一個股型認購權證的標的資產為單一公司股票，而一籃子股票型認購權證其標的股票有數種，

指數型權證標的股票為股價指數，此外還可以衍生出各式奇異(exotic)認購權證。依履約價格調整與否可分成一般型認購權證（plain vanilla warrant）、重設型認購權證（reset warrant）與回顧型認購權證（lookback warrant），隨著新奇選擇權盛行，券商也發行更多樣化權證，例如價差型認購權證（capped warrant），其可分為上限型認購權證與下限型認售權證。發行時分為價內發行、價平發行與價外發行，一般以價平發行與價外發行為主，且經由定價模型可以算出的理論價格會有價內權證價格高於價平權證、價平權證高於價外權證的一定關係。相對的，隨著時間經過，其時間價值的折損速度以價外權證最快，價平權證次之，價內權證最慢。而當股價上漲時，認購權證的價格也會跟著上漲，如不考慮時間長短，以價外權證漲幅最可觀。

早期國內的認購權證到期日皆為一年，在此期間會產生股利發放問題，當發放股票股利時，國內調整作法是在股利發放當天，同比例向下調整履約價及向上調整行使比例，舉例來說，88 年 6 月 14 日中環股價為 143.5 元；次一交易日每股將配發 0.4 股股票，因此次一交易日的股票參考價為 143.5/1.4=102.5 元；而大華 06 的標的股為中環，原履約價為 58.5，次一交易日履約價向下調整為 58.5/1.4=41.79 元，行使比例向上調整為 1.4，經過這樣的調整可以使認購權證在除權後的行使權利與除權前相同，便可排除股票股利對認購權證價格的影響。在現金股利方面，則是在股利發放的當天向下調整履約價，將原履約價減去現金股利後的金額，作為新履約價格。國內認購權證均屬於美式權證，但是在沒有股利發放的情況下，可將之當成歐式權證來做評價與避險分析。

第三章 文獻探討

第一節 流動性與衡量方式

在第一章探討了流動性風險對避險的重要性，完美流動性是指投資人可以最理想的價格立即買進或賣出，然而市場並非完美，市場參與者想要避免操作失當而造成損失，在進行投資買賣或是避險操作時，就必須慎重地考慮流動性對於市場所產生的影響，由於學界對於流動性的定義不盡相同而且也有不同的詮釋角度，所以該如何去定義與衡量流動性是一個難題，詹場和胡星陽(2000)將衡量市場流動性的文獻做了整理，並歸納不同學者提出衡量流動性的方式，其中主要有三個面向，分別為：(1)價格構面，指交易對價格產生的影響，被廣為使用也最重要，以價格購面來分析流動性又細分為四種不同的型態，其中以交易對價格衝擊為基礎之流動型衡量方法最為嚴謹、有理論根據而且使用限制較少，不只侷限在報價導向（quote driven market）市場，亦可適用於台灣的委託單導向市場（order driven market），因而選用此法為本文主要衡量方式；(2)時間構面，以完成交易所需要的時間為基礎，但此方法有很大缺點，即忽略了重要的價格層面，但從另一方面來看，也並非所有市場參與者都迫切需要立即成交；(3)交易熱絡程度，是與交易量有關的衡量法，如成交筆數、成交股數、週轉率等等，但此法與時間構面衡量法同樣都忽略了重要的價格變數，並且容易受公司規模的影響而造成衡量偏誤，例如規模大的公司成交筆數也較多，流動性卻不一定較高。

Kyle (1985)將流動性用三個方面來衡量：緊度（tightness）、彈性（resiliency）與深度（depth），彈性也可稱是市場恢復力。緊度係指在一段短時間內完成一定成交量的交易所需的成本，成本越低代表流動性越好，通常在市場上使用買賣價差來衡量，當市場為完全流動時價差為零；市場彈性是指交易引起價格波動消失的速度，當短暫買賣使供需不平衡導致價格改變，會有反向的力量使價格回復到

真實價值，而恢復所需時間越短代表市場彈性越好；市場深度指在不影響價格或是小幅價格變動條件下，所能成交的數量，能成交的數量越大代表流動性越佳，股票市場有高流動性意味著市場參與者可以目前的價格大量買入或賣出股票，市場深度與 Kyle 定義的流動性參數λ成反比，因此λ越大則市場深度越小，代表此時流動性越差。這也從另一方面說明了只用成交量來衡量流動性是有缺失的，例如某段時間內產生大量成交量，資產價格沒有大幅變動，此時流動性很高，但相對的若一樣有很大成交量，資產價格卻變化很大，此時便有流動性不佳的問題。既然流動性可從各個不同構面來衡量，所以某資產可能在某一個衡量方式的構面下流動性較佳卻在另一構面下顯示出較差的流動性，因此市場流動性的衡量是困難的且具有爭議的。

Frey(2000)定義參數ρ為流動性因子，$\frac{1}{\rho S_t}$為市場深度，當市場完全流動時，市場深度無窮大，亦即$\rho=0$，隨著ρ變大則市場深度會越小，流動性越不足。Esser 和 Moench(2003)除了依據 Frey(2000)一文的理論架構，將股價隨機過程加入流動性參數，也一併提出隨機流動性(stochastic liquidity)的理論，認為流動性是隨機的(stochastic)而不是確定的(deterministic)，會隨著市場深度的改變而改變，如果市場深度是隨機改變的，我們卻用固定的流動性參數代入模型去評價與避險，則會因為沒有捕捉好流動性的特性與變化而使投資組合暴露出較大的流動性風險。因此 Esser 和 Moench(2003)假設流動性因子ρ服從一隨機過程，但用隨機流動性的模型去評估與進行定價卻有很大的困難度，尤其是在數值方法的計算和實證研究的部份，因此根據模型參數精簡化原則，本文仍假設流動性為固定常數，也就是遵循 Frey (2000)與 Frey 和 Patie (2001)的架構。

一般來說，較多人使用交易量與價格變化關係來當流動性變數，並且假設流動性為常數，Schönbucher 和 Wilmott (2000)設定參數$\alpha=\frac{aS_0}{N}$，等同於價格需求彈性($\frac{S}{D}\frac{\partial D}{\partial S}$)，亦即需求量變動百分率除以價格變動百分率，$\alpha$越大代表流動性越佳，亦即價格有些許變化，需求量就會變動很多。但是α的變動範圍太大，

因此作者又另設一個參數ε，與α有反比關係但參數範圍較小，用此衡量大型投資人的交易策略在市場所造成的影響，即為衡量流動性的方法，ε是一個很小的值，當$\varepsilon = 0$時代表市場為完全流動，回歸到BS模型的假設。Lyukov (2004)用最直觀的想法定義流動性$L = \dfrac{dM_t / N}{dS_t / S_t}$，$M_t$為市場造市者的總供給，$dM_t$則為總供給變動量，也相當於雜訊交易者（noise trader）與避險者的淨需求變動量，因此L為淨需求變動率除以價格改變率，當價格改變量固定時，需求量變動率越大代表市場越具流動力。L很小代表即使淨需求變動很少，也可以使價格有巨大改變，此時流動性較差，且L必定為正值，因為一般市場若有正的淨需求會使價格上揚。

Pritsker (2002)也作了流動性的相關文獻整理，探討流動性定義與產生流動性問題的來源及衡量方式，在文中歸納以往文獻中提出的衡量方法，其中較常被使用的有(1)以買賣價差來衡量，(2)以交易量對價格產生的影響來衡量，(3)以成交量來衡量，其中最常被使用是以交易量對價格造成的衝擊來衡量流動性，其優點是可觀察價格受交易量影響所產生的變化，但也有其他許多可能出現的誤差，如衡量上的誤差（measurement error）、選擇偏誤（selection bias）與聯立性偏誤（simultaneity bias），衡量誤差是指當報價資料更新不夠迅速，若我們在交易之後報價尚未更新，此時衡量交易對價格產生的影響可能會有問題；選擇偏誤是因為流動性時好時壞，若剛好選到流動性較好的時段來衡量，那麼用此測量方法來代表市場流動性將不具客觀性，另外當流動性差到無法進行交易時，此時並無交易量的觀測值，便無法使用交易量對價格產生衝擊影響的衡量方式；聯立性偏誤的產生是因為交易與價格可能是同時決定的，例如經濟新聞報導某事件發生而同時對兩者造成影響，並不是因為交易量對價格產生衝擊，此時可能交易量與價格之間並無因果關連。這些偏誤是無法避免的，關於衡量市場流動性，目前尚未有被全面普遍接受的方法，找到一個好的衡量方式是許多學者共同努力的目標。

第二節 回饋效果(feedback effect)與避險策略(hedging strategy)

BS 模型主要可以分成四個假設，假設市場沒有摩擦力、無交易成本、波動度為常數、市場完全流動且委託單的下單數量不會對股價造成影響，然而在真實市場下，交易存在著交易成本及交易限制，亦會因為流動性不足產生流動性成本。由許多文獻可得知在市場流動性不足之下，大型投資人（large trader）隨著股價漲跌所做的動態避險策略會反過來對股價波動度造成影響，進而對股價造成回饋效果，使得價格產生變化且波動度不再是常數，若券商依然使用 BS 模型 Delta 中立來作避險策略，將可能造成損失，所以此時大型投資人應尋找最佳避險策略以避免避險誤差過大。

Esser and Moench (2003)文中曾對回饋效果做出解釋，(1)股價會影響大型投資人的交易策略，並且在流動性程度不同時，其交易策略也會因而產生改變，(2)大型投資人的交易策略會對股價造成影響，而流動性程度不同時，大型投資人的交易策略對股價影響程度也不同。不僅如此，Esser and Moench (2003)也將回饋效果分正向與反向兩種型態，當大型投資人使用順勢策略（momentum strategy），亦即股價上升時買進股票來避險，此時得到正的回饋效果（positive feedback effect），反之若使用逆勢策略（contrarian strategy），股價下跌時買進，此時策略對股價及波動度的影響則稱為負的回饋效果（negative feedback effect）。

許多學者用不同的模型與流動性因子來探討避險策略的回饋效果，Lyukov (2004)改善 Platen 和 Schweizer(1998)所提出來的模型中其中幾項的缺失，該模型假設市場有雜訊交易者（noise traders）、造市者（market makers）與避險者（hedgers），避險者與雜訊交易者為市場需求者，而造市者為市場供給者。Frey (2000)導出避險者的避險行為會如何影響股價隨機過程，使得波動度不再是常數，而是與流動性參數和避險策略有關，因此原始的 BS 偏微分方程（BS PDE）被修正為一個非線性(nonlinear)的偏微分方程，原因是偏微分方程式的係數不再是一個已知的常數，而是一個與 PDE 的解(選擇權價格)有關的係數，此時我們再

利用這個非線性偏微分方程來求解選擇權的理論價格為何，最後探討回饋效果造成的股價變化及波動度微笑（volatility smile）現象。

Schönbucher 和 Wilmott (2000)提出當市場受到流動性不足影響，大型投資人的交易策略會造成供需失衡，接著由 *Itô-formula* 導出股價隨機過程 μ（drift term）與 σ（volatility）隨著流動性不同會如何變化，當大型投資人用順勢策略，即股價上漲則買進股票，將會使漂移項（drift term）與波動度（volatility）增大，得到正的回饋效果。再藉由實證看出大型投資者避險策略對價格的回饋效果，價格會產生跳躍現象而不再連續，到期日時有一段價格沒有出現的機會。

當市場並非完美，必須調整 BS 模型的避險策略，BS 模型假設可以用債券與股票動態調整投資組合去複製選擇權，Leland(1985)提出考慮交易成本對股價與避險策略的影響，當調整投資組合部位時必須付出交易成本，如果連續調整，那麼所付出的交易成本將會很大。在原始 BS 模型無交易成本的假設下，若以動態的方式去調整避險策略，根據過去的理論與實證研究發現，所產生的避險誤差將會非常小，但若考慮交易成本，那麼避險誤差將會大幅增加。為了解決此問題，Leland(1985)將交易成本因素加進原本 BS 模型假設下的股價隨機過程並且調整波動度，經由實證結果發現，使用原本 BS 模型所導致的避險誤差將會大過於使用調整波動度股價隨機過程的避險誤差。Frey(2000)將流動性因子加入股價隨機過程，推導出大型投資人的避險策略在流動性不足時對波動度的影響，並證明在流動性不足的市場下，若投資人由 BS 模型來進行避險操作，則其投資人必會產生避險的損失，然而使用 Frey(2000)的模型所產生的避險誤差相較於 BS 模型會明顯縮小。

第四章 研究設計與方法

第一節 研究模型設定與研究假說

本文欲對台灣市場做實證分析，而台灣證券市場是依據市場參與者的買賣委託進行撮合之委託單導向市場，違反前述 BS 模型的第四點假設，股價與選擇權價格不受市場參與者下單行為的影響而改變，因此必須考慮交易量對股價的回饋效果，使用加入流動性因子的股價模型。流動性的衡量方式很多，根據詹場與胡星陽(2000)的評估，交易對價格衝擊類型的流動性衡量方式不侷限於報價導向市場(quote driven market)，此衡量方法也適用於台灣證券市場，同時也是目前最嚴謹、最有理論依據的衡量方式。此法即為大型投資人股票交易活動，對市場價格變動產生的影響。

在此章節依據Frey and Patie (2001)的模型，將財務市場分成兩種類型的資產：無風險資產（例如債券）與風險性資產（例如股票），一般而言可將債券看成計價單位（numeraire）或稱為基準財或是折現因子。假定債券市場為完全流動，投資人可大量買賣但卻不影響債券價格，亦即貨幣市場為完全流動，除此之外，我們認為股票市場比較容易產生流動性不足的問題。在此假設股價符合一隨機過程，$(S_t)_t$ ，其機率空間(filtered probability space)為 $(\Omega, F, F_t, \mathrm{P})$ 。

假設大型投資者有一既定策略 α ，隨著股票價格變動而動態調整，為了使模型符合市場機制，作以下五點假設：

1. 股票持有數量的函數 α_t 為左連續，$\alpha_t = \lim \underset{s\to t}{<} \alpha_s$ 。
2. 右連續過程 $\alpha^+ (\alpha_t^+ = \lim \underset{s\to t}{>} \alpha_s)$ 為semi-martingale。
3. 策略 α 向下跳躍調整是有界的，$\Delta\alpha_t^+ \equiv \alpha_t^+ - \alpha_t > -\frac{1}{\bar{\rho}}$ ，$\bar{\rho}$>0。
4. 定兩個常數 σ>0與 $\rho \geq 0$，σ 為股價波動度，ρ 為流動性衡量因子。一個連續

函數$\lambda:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得$\rho\lambda(S) \le \bar{\rho},\ \forall S \ge 0$，若一大型投資人避險策略$\alpha_t$符合以上假設1.2.3，那麼股價符合以下隨機微分方程 （stochastic differential equation）。與Frey and Patie (2001)不同的是本研究加入了漂移項（drift term）以利第五章實證上的運算。

$$dS_t = \mu S_{t-}dt + \sigma S_{t-}dW_t + \rho\lambda(S_{t-})S_{t-}d\alpha_t^+ \quad , \tag{4.1}$$

S_{t-}為S_t的左極限$S_{t-} = \lim_{s \to t} \underset{<}{} S_t$，W為布朗運動（Brownian motion）或稱韋納(Wiener)過程，α_t^+表示右連續，

$$\lambda(S) = 1 + (S - S_0)^2 (a_1 \cdot 1_{\{S \le S_0\}} + a_2 \cdot 1_{\{S > S_0\}}) \tag{4.2}$$

其中a_1、a_2為常數且$\lambda(S_0) = 1$。

再將之改寫為風險中立測度下的隨機過程

$$dS_t = rS_{t-}dt + \sigma S_{t-}d\tilde{W}_t + \rho\lambda(S_{t-})S_{t-}d\alpha_t^+ \tag{4.3}$$

$\tilde{W}_t$為風險中立機率測度（risk neutral probability measure）之下的布朗運動。參數ρ與λ必須由真實市場資料去估計，λ是為了捕捉市場流動性不對稱現象，由於實務上難以評估，本文實證部分尚未考慮λ，也就是流動性的不對稱性，直接將λ皆設為1。在此$\dfrac{1}{\rho\lambda(S_{t-})S_{t-}}$為市場深度，指價格變動一單位，投資人股票部位的改變量，越具深度代表市場流動性越高，當$\rho \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\rho\lambda(S_{t-})S_{t-}} \to \infty$，此時代表市場完全流動，只要價格一有變動，投資人可馬上用理想的價格及數量進行買賣，相反的，隨著ρ變大，市場流動性越不足，此時便會造成損失。舉例來說，當投資人下一限價賣單（sell a limit order），股票跌到 K 元隨即賣出，卻因為市場流動性不足，無法立即用此價格進行交易，使得賣出時價格低於K元而造成投資人損失。

5. 函數$\phi:[0,T]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$是 $class\ C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$，即函數對時間(t)一階微分後為連續函數，對股價(S)二階微分後為連續函數。並且

$\rho\lambda(S)S\phi_{SS}(t,S)<1$, $\forall(t,S)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{+}$，$\phi\in\mathbb{R}$。

ϕ 為時間與股價的平滑函數（smooth function），代表在時間 t 與當時股價所做的交易策略。

第二節 動態避險-市場流動性不足所造成之風險

假設大型交易者想以債券與股票去複製一個到期日為 T 的衍生性金融商品，動態調整策略為$(\alpha_{t,}\beta_t)_t$，表在時間 t 時，投資組合股票部位為α_t，債券部位為β_t。在此假設避險者為大型投資人，隨著股票價格變化，避險者會改變股票與債券持有數量，以規避掉風險，通常會依據Delta中立來改變策略。在這期間若沒有外來資金，則稱為自我融資（self-financing）。BS模型假設如果用Delta中立策略連續調整部位，那麼最後選擇權價值將會等於複製投資組合的價值。

當流動性不足時，帳面價值（paper value）與依市價評估（mark-to-market）或清算價值（liquidation value）是不同的，如第一小節的例子，策略為跌到K元隨即賣出，因此帳面價值為$\alpha_t * K+\beta_t$，但是實際上卻沒辦法在市場上以此價格賣出，因此市價評估或稱市場價值在流動性不足時是較低的。

在考慮流動性因素下，在時間t時，避險者投資組合市場價值定義為$V_t^M=\alpha_t S_t(\rho,\alpha)+\beta_t$，起始價值為$V_0^M$，經由自我融資且連續動態調整策略，在0~T期間可得$G_t=\int_0^T\alpha_s dS_s(\rho,\alpha)$，所以在到期日T時，避險者投資組合價值為

$$V_T^M=V_0+G_t=V_0+\int_0^T\alpha_s dS_s(\rho,\alpha) \tag{4.4}$$

若使用自我融資且動態調整策略去複製選擇權價值，追蹤誤差（tracking error）定義為選擇權價值減去複製投資組合價值：

$$e_T^M\equiv h(S_T(\rho,\alpha))-V_T^M=h(S_T(\rho,\alpha))-\left(V_0+\int_0^T\alpha_s dS_s\right) \tag{4.5}$$

如果$e_T^M>0$，代表複製投資組合價值比衍生性商品價值小，避險者的策略會導致

損失，相對的若$e_T^M<0$則表示複製出來的投資組合價值比較大，因此避險者有獲利。

第三節 非線性 Black-Scholes 偏微分方程與追蹤誤差

根據 Frey and Patie (2001)，本研究對模型進行改善，加入無風險利率 r，導出股價隨機過程的漂移項（drift term）與波動度（volatility），並修正 BS 偏微分方程為非線性偏微分方程，證明模型追蹤誤差比 BS 模型追蹤誤差小。

Proposition 4.1

假設大型投資人股票交易策略$\alpha_t=\phi(t,S_t)$，ϕ符合第一小節假設 5，可由 *Itô-formula* 導出股價隨機過程：

$$dS_t=v(t,S_t)S_t d\tilde{W}_t+b(t,S_t)S_t dt. \tag{4.6}$$

$$v(t,S_t)=\frac{\sigma}{1-\rho\lambda(S)S_t\phi_s(t,S_t)}. \tag{4.7}$$

$$b(t,S_t)=\frac{\rho\lambda(S)S_t}{1-\rho\lambda(S)S_t\phi_s(t,S_t)}\left(\phi_t(t,S_t)+\frac{1}{2}\phi_{SS}\frac{\sigma^2 S_t^{\ 2}}{\left(1-\rho\lambda(S)S_t\phi_S(t,S_t)\right)^2}\right)+\frac{r}{1-\rho\lambda(S)S_t\phi_s(t,S_t)} \tag{4.8}$$

(4.7)、(4.8)詳盡的證明過程見附錄。

當交易策略為順勢操作，$\phi_S(t,S_t)>0$，股價上升則買進，則$1-\rho\lambda(S)S_t\phi_s(t,S_t)<1$，很顯然的$v(t,S_t)>\sigma$，波動度將會增大，反之若逆勢操作，$\phi_S(t,S_t)<0$，波動度將會減少，$v(t,S_t)<\sigma$，由此可看出交易策略的回饋效果。

接下來可以推出在市場不流動時，BS 模型的避險策略與考慮流動性模型的避險策略所導致的避險誤差。

原本的 BS 偏微分方程為：

$$u_t^{BS}(t,S)+rSu_S^{BS}(t,S)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2u_{SS}^{BS}(t,S)=ru^{BS}(\mathrm{t,S}) \tag{4.9}$$

其中$u^{BS}(T,S)=h(S_T)$為到期日選擇權價值

由自我融資起始價值為$V_0 = u^{BS}(0,S_0)$，股票部位$\alpha_t^{BS} = u_S^{BS}(t,S_t)$，r 為無風險利率。

則追蹤誤差為：

$$e_T^M = h(S_T) - V_T^M = h(S_T) - \left(u^{BS}(0,S_0) + \int_0^T u_S^{BS}(t,S_t) dS_t \right) \tag{4.10}$$

再由 *Itô-formula*

$$du^{BS}(t,S_t) = u_S^{BS}(t,S_t)dS_t + \left(u_t^{BS}(t,S_t) + \frac{1}{2} u_{SS}^{BS}(t,S_t) v^2 S_t^2 \right) dt \tag{4.11}$$

(4.11)式兩邊同時積分可得

$$u^{BS}(T,S_T) - u^{BS}(0,S_0) = \int_0^T u_S^{BS}(t,S_t)dS_t + \int_0^T \left(u_t^{BS}(t,S_t) + \frac{1}{2} u_{SS}^{BS}(t,S_t) v^2 S_t^2 \right) dt \tag{4.12}$$

將$v = v(t,S_t) = \dfrac{\sigma}{1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t)}$代入

$$e_T^M = \int_0^T \left(u_t^{BS}(t,S_t) + \frac{1}{2} u_{SS}^{BS}(t,S_t) \left(\frac{\sigma}{1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t)} \right)^2 S_t^2 \right) dt \tag{4.13}$$

再將(4.9) BS 偏微分方程代入(4.13)式，若我們用 BS 模型進行避險操作，則得到的追蹤誤差為

$$e_T^M = \int_0^T ru^{BS}(t,S_t) \text{ -} rSu_S^{BS}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{SS}^{BS}(t,S_t) \left(\frac{1}{(1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t))^2} - 1 \right) dt \tag{4.14}$$

由(4.14)式可知，當 $r = 0$，若 $u_{SS}^{BS}(t,S_t) > 0$，則 $\dfrac{1}{(1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t))^2} - 1 > 0$

若 $u_{SS}^{BS}(t,S_t) < 0$，則 $\dfrac{1}{(1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t))^2} - 1 < 0$，因此$e_T^M > 0$恆成立，證明出在流動性不足的市場下，當無風險利率為零時，用 BS 模型來避險將導致損失。

因此，若我們修正 BS 偏微分方程為非線性偏微分方程：

$$u_t(t,S) + rSu_S(t,S) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1-\rho\lambda(S)S_t u_{SS}(t,S_t))^2} S^2 u_{SS}(t,S) = ru(t,S) \tag{4.15}$$

同理可導出追蹤誤差：

$$e_T^M = \int_0^T ru(t,S_t) - rSu_S(t,S_t) dt \tag{4.16}$$

當 $r = 0$，在非完全流動市場下，用此非線性偏微分方程所得到的避險策略，來

連續調整股票部位，則可得到追蹤誤差為零。

第四節 數值方法-有限差分法（finite difference methods）

若衍生性商品價值可以由一偏微分方程（PDE）表示之，則我們可用有限差分法來求解衍生性商品價格，將此偏微分方程中微分的部份以差分方式替代，亦即離散化整個偏微分方程，再依時間步數反覆求算此差分方程式，求得時間為 0 時的衍生性商品價格。有限差分法目前主要分為顯性有限差分法（explicit method）與隱性有限差分法（implicit method）兩種，尚有其他有限差分法，為顯性與隱性差分法的混合，例如 Crank-Nicolson 方法是直接取顯性與隱性法的平均值。使用顯性差分法最大的優點是求解速度快但卻需要穩定條件(stability condition)，隱性差分法則需花費較長時間解聯立方程組，但不要求穩定條件（unconditional）為其優點。本文為了求解非線性偏微分方程，先將 v（volatility）用顯性法（explicit method）算出，因此偏微分方程的係數就可以先算出來，把非線性方程轉變為線性偏微分方程，接著再用隱性法（implicit method）解此線性偏微分方程。

為了符合第一節的假設 5， $\rho\lambda(S)S\phi_{SS}(t,S)<1$ ，$\forall(t,S)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{+}$，並且讓不同股價下的選擇權價值圖形平滑，設定一個人造條件（artificial condition）

$$v^2=\max\left\{\alpha_0,\frac{\sigma^2}{\left(1-\min\{\alpha_1,\rho\lambda(S)Su_{SS}\}\right)^2}\right\},$$

其中 $\alpha_0=0.02,\alpha_1=0.85$ 為自訂常數，目的是讓波動度不至於過大或過小而影響結果。

以下為差分法離散過程。將(4.15)式離散化

$$\frac{U_j^i-U_j^{i-1}}{\Delta t}+rS_j\frac{U_{j+1}^{i-1}-U_{j-1}^{i-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\left(v_j^i\right)^2S_j^2\frac{U_{j+1}^{i-1}-2U_j^{i-1}+U_{j-1}^{i-1}}{\left(\Delta S\right)^2}=rU_j^{i-1} \tag{4.17}$$

對時間一次偏微分用向前差分估計法（forward difference）

對股價一次偏微分用中間差分法（central difference）

對股價二次偏微分用二階中間差分法（second order central difference）

其中 i 為時間的網格點(mesh-grid point)，從第 0 格到第 N 格，0 為上市日，N 為到期日，j 為股價的網格點，從第 0 格到第 M 格，0 為股價最小值，M 為股價最大值。

Δt 為時間的網格點間距，ΔS 為股價的網格點間距。

v_j^i 可以先用顯性法直接求得：

$$(v_j^i)^2 = \max\left\{\alpha_0, \frac{\sigma^2}{\left(1-\min\{\alpha_1, \rho\times\lambda(S)\times S\times\frac{U_{j+1}^i-2U_j^i+U_{j-1}^i}{(\Delta S)^2}\}\right)^2}\right\},$$

$$\lambda(S_j) = 1+(S_j-S_0)^2\left(a_1\times I_{\{S_j\le S_0\}}+a_2\times I_{\{S_j>S_0\}}\right)$$

再用隱性差分法解線性偏微分方程式(4.17)

$$\frac{U_j^i-U_j^{i-1}}{\Delta t}+rS_j\frac{U_{j+1}^{i-1}-U_{j-1}^{i-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\left(v_j^i\right)^2 S_j^2\frac{U_{j+1}^{i-1}-2U_j^{i-1}+U_{j-1}^{i-1}}{(\Delta S)^2} = rU_j^{i-1}$$

當股價最小值為零，則 $S_j = j*\Delta S$，

接下來將方程式依時間步數不同稍做整理即得

$$U_j^i = \left(0.5*r*j*\Delta t-0.5*\left(v_j^i\right)^2*j^2*\Delta t\right)U_{j-1}^{i-1}+\left(1+\left(v_j^i\right)^2*j^2*\Delta t+r*\Delta t\right)U_j^{i-1}$$
$$+\left(-0.5*\left(v_j^i\right)^2*j^2*\Delta t-0.5*r*j*\Delta t\right)U_{j+1}^{i-1}$$

係數為

$$\Rightarrow \begin{cases} a_j = 0.5 * r * j * \Delta t - \left(0.5 * \left(v_j^i\right)^2 * j^2 * \Delta t\right) \\ b_j = 1 + \left(v_j^i\right)^2 * j^2 * \Delta t + r * \Delta t \\ c_j = -0.5 * \left(v_j^i\right)^2 * j^2 * \Delta t - 0.5 * r * j * \Delta t \end{cases}$$

接著求解線性方程組，$U^{i-1} = A^{-1}(U^i - p^i)$，$U^i = [U_1^i \cdots\cdots U_{M-1}^i]' \in \mathbb{R}^{M-1}$，A 為一個三對角化矩陣（tridiagonal matrix），下對角線（subdiagonal）為 $a_2 \ldots a_{M-1}$，主對角線（diagonal）為 $b_1 \ldots b_{M-1}$，上對角線（superdiagonal）為 $c_1 \ldots c_{M-2}$，其餘元素為零。$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$，

$p^i = [a_1 * U_0^{i-1} \ 0 \ 0 \ .... \ 0 \ c_{M-1} * U_M^{i-1}]' \in \mathbb{R}^{M-1}$，即為一個行向量（column vector）。

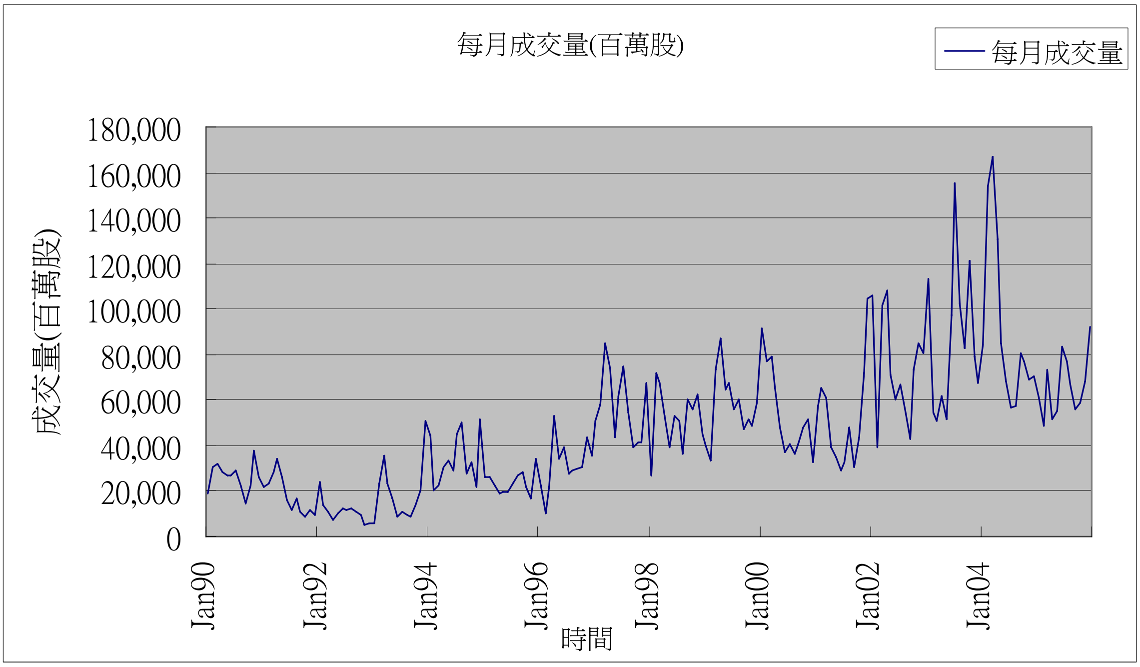
我們已知到期日的選擇權價值，所以用有限差分法時間由後往前推，用 $U^{i-1} = A^{-1}(U^i - p^i)$ 從 U^N 反覆求解得 U^0，若在 MATLAB 直接計算反矩陣會相當耗時，因此我們用 Thomas algorithm method 來增進運算速度。

第五章 實證分析

第一節 資料來源與處理

首先利用市場交易熱絡程度來衡量流動性，因為此衡量方式亦可適用於委託單導向市場(order driven market)，我們畫出從 1990~2006 年的台灣股市加權指數每月總交易量，由圖 5-1 可見，從 1990~2006 年交易量有逐漸上升的趨勢，但與相近年度比較，在 2000 與 2001 年交易量有明顯偏低的情況，我們認為此時股票市場較有可能產生流動性不足的問題，因此選擇在此年度附近的認購權證來做分析，驗證本文所提出的模型避險誤差是否比 BS 模型小，即避險績效較好。資料主要來自經濟新報資料庫(TEJ)，包含認購權證價格與標的股票價格，並且挑選發行期間沒有發放股利的單一個股之美式認購權證。因為台灣認購權證有股利保護條款，所以皆可視為歐式買權來評價，但有除權除息執行價需調整的問題，對於無發行股利的美式認購權證而言，並無執行價調整問題，因此可直接使用歐式買權評價方式。

因為期間無發行股利的認購權證較少，所以最後所選取的是 1998/12/17 後發行，2002/12/26 前到期的單一個股之美式認購權證，表 5-1 為認購權證發行資料，包括權證碼、權證名稱、標的名稱、發行日期、上市日期、到期日期、存續期間、履約價、價外發行(%)、發行日波動率與無風險利率，其中元大 31 與台証 02 為半年到期權證，其餘存續期間皆為一年，群益 03 與群益 02 為價平發行，其餘皆為價外發行，發行日波動率在 0.42 到 0.6 之間，無風險利率為該認購權證發行日當天台灣銀行一年定期存款固定利率。



【圖 5- 1】每月加權指數成交量(百萬股)

交易量在 2000 與 2001 年較低，我們認為此時股票市場較有可能產生流動性不足的問題，因此選擇在此年度附近的認購權證來做分析。

【表 5- 1】認購權證發行資料

元大 31 與台証 02 存續期間為半年，其餘為一年，群益 03 與群益 02 為價平發行，其餘皆為價外發行，無風險利率為該認購權證發行日當天台灣銀行一年定期存款固定利率。

權證碼	權證名稱	標的名稱	發行日期	上市日期	到期日期	存續期間(年)	履約價	價外發行(%)	發行日波動率	無風險利率
B0521	群益 03	華邦電	1999/04/01	1999/04/17	2000/04/17	1	39.20	100	0.50	0.0500
L0518	群益 02	茂矽	1998/12/17	1999/01/05	2000/01/04	1	28.90	100	0.50	0.0555
L0663	日盛 13	東元	2001/12/14	2001/12/27	2002/12/26	1	12.43	110	0.47	0.0250
L0628	華信 01	國巨	2001/06/18	2001/07/06	2002/07/05	1	35.97	110	0.58	0.0415
B0593	群益 11	華新	2000/03/29	2000/04/14	2001/04/13	1	37	125	0.54	0.0500
B0596	元大 21	台積電	2000/05/19	2000/05/31	2001/05/30	1	203.75	125	0.42	0.0500
L0645	統一 09	華新	2001/10/17	2001/10/31	2002/10/30	1	9.90	150	0.50	0.0280
L0650	統一 11	東元	2001/10/24	2001/11/08	2002/11/07	1	15.07	150	0.47	0.0280
L0638	元大 31	宏碁	2001/09/25	2001/10/11	2002/03/20	0.5	14.48	150	0.60	0.0280
L0646	台証 02	宏碁	2001/10/19	2001/11/01	2002/03/20	0.5	16.20	150	0.60	0.0280

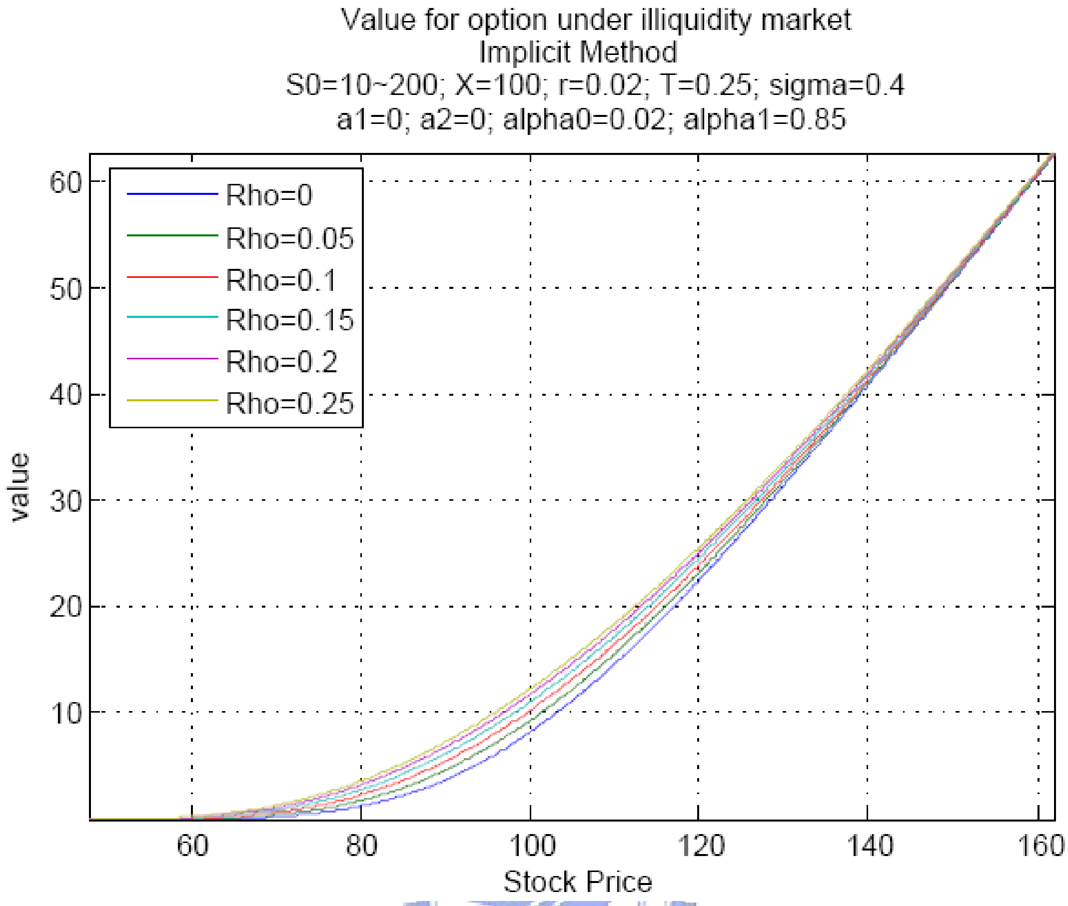
第二節 不同流動性之下的避險成本與 Greeks

首先利用第四章第四節所介紹的有限差分法，求得到期日相同但不同股價下的選擇權價格、Delta、Gamma 及 Vega，比較在不同流動性之下的選擇權價值如何改變與部位風險變化。

- 避險成本(hedge cost)

圖 5-2 為在不同流動性下($\rho = 0 \sim 0.25$)[1]，用有限差分法評價三個月到期(T=0.25)的歐式認購權證，分別計算起始股價(S0)不同的三個月到期選擇權價值，履約價 X=100，無風險利率 $r = 0.02$，波動度$\sigma = 0.4$，股價最小值為 10，最大值為 200。可看出隨著ρ變大，亦即流動性越不足時，波動度也因為流動性不足而大於預設的常數波動度 0.4，因此計算出來的選擇權理論價值會越高，假設券商沒有存在套利的情況下，選擇權的理論價格即可視為其避險成本，所以流動性越不足時，避險成本也就越高，並且在價平附近(S=X=100)的價格改變較大。。

[1] 由前一小節數值方法所得的 Gamma 與 Vega 值，在ρ太大時容易因為不同的參數設定而出現不穩定的狀況，且我們認為設定$\rho = 0 \sim 0.25$則約略可描述台灣認購權證其標的資產市場的流動性問題，因此以$\rho = 0 \sim 0.25$來做實證分析。



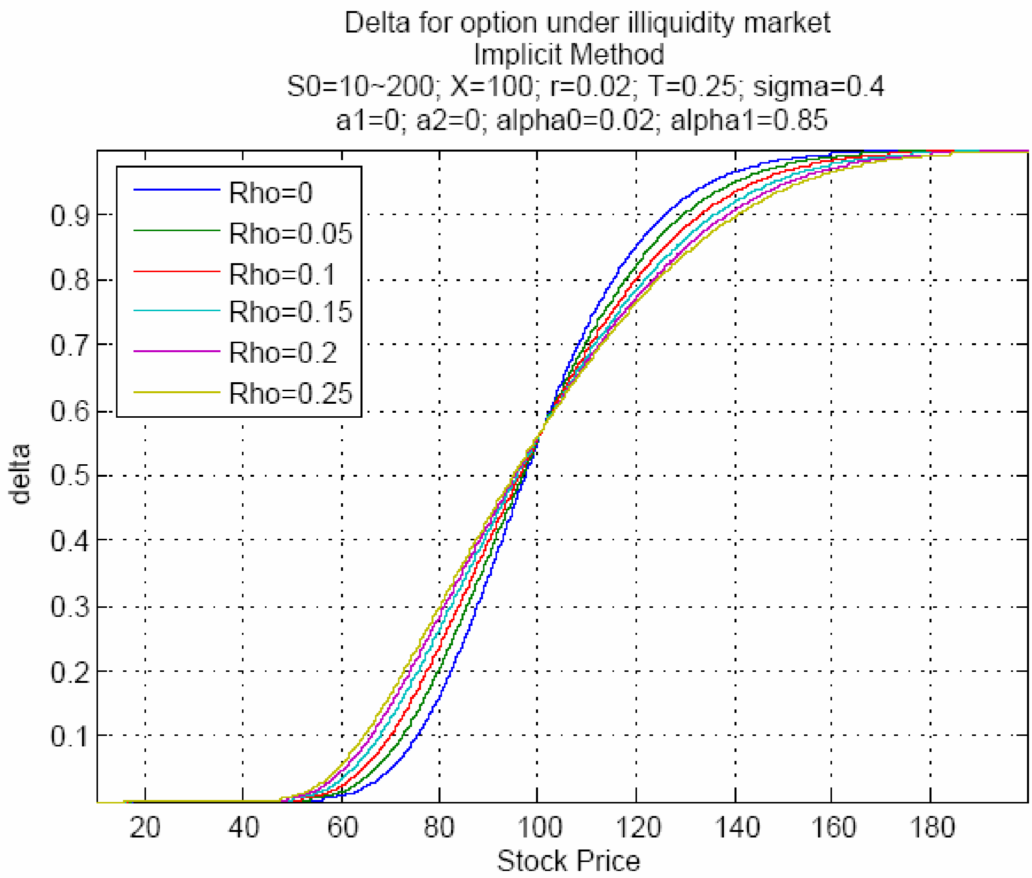
【圖 5- 2】不同股價下之選擇權定價

此圖只有繪出起始股價為 60~160 這段，隨著 ρ 增大流動性越不足時，模型所算出的選擇權理論價格逐漸提高，且可將此視為避險成本，在價平(S=X=100)附近的改變量較大。

- 避險比率（hedge ratio，Delta，$\frac{\partial u}{\partial S}$）

Delta 定義為選擇權價值的變動相對於其標的股票價格的變動之比率，因為我們通常使用 Delta 中立來規避風險，因此 Delta 又稱避險比率。由圖 5-3，避險比率在 S<X 的時候，隨著 ρ 增加而變大，例如 S=80，ρ=0 時其避險比率僅在 0.15 左右，當 ρ 上升至 0.25，其避險比率也上升至 0.3；反之，在 S>X 時避險比率卻隨著 ρ 增加而變小，ρ 越大 Delta 圖形越顯平坦。由圖可知當市場流動性不足時若用 BS 模型 Delta 中立來避險，在 S<X 時會避險不足(under hedge)，而在

S>X 會過度避險(over hedge)，如此一來會產生避險誤差而造成損失。



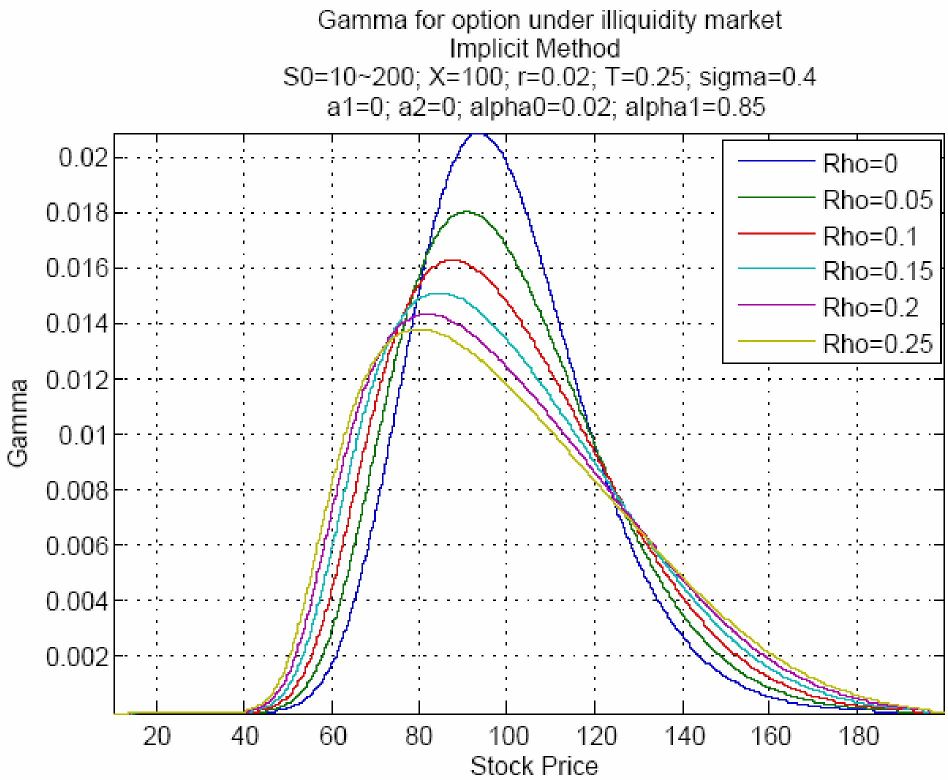
【圖 5- 3】不同股價下之避險比率 (Delta)

隨著 ρ 越大 Delta 圖形越顯平坦，若在流動性不足的情況下使用 BS 模型 Delta 中立來進行避險，在 S<X 時會避險不足，S>X 時會過度避險。

- Gamma（$\dfrac{\partial^2 u}{\partial S^2}$）

Gamma 是 Delta 的變動量再除以標的資產價格變動量，即可視為 Delta 變化量對於資產價格變化的敏感關係，若 Gamma 小表示 Delta 變動的較慢，那麼為了維持 Delta 中立的投資組合，就可以較不常做調整，相反的，若 Gamma 很大表示 Delta 對標的資產價格變化很敏感，則需時常調整投資組合部位，且調整幅度會較大。由圖 5-4 可知當流動性越不足，Gamma 的最高峰逐漸左移並且變低，

且在價平附近，原本ρ=0 的 Gamma 值為 0.02，但是當ρ=0.25 時，其 Gamma 下降至 0.012，可看出在價平附近 Delta 對標的資產價格變動逐漸不敏感，而價內與價外皆隨著流動性越不足，Delta 對股價變動的敏感度越高，但在價外時變動較大，當股價為 60 時，我們可以看出不同的市場流動性狀態下，Gamma 值的變化是非常大的，最多大約差了四倍左右。

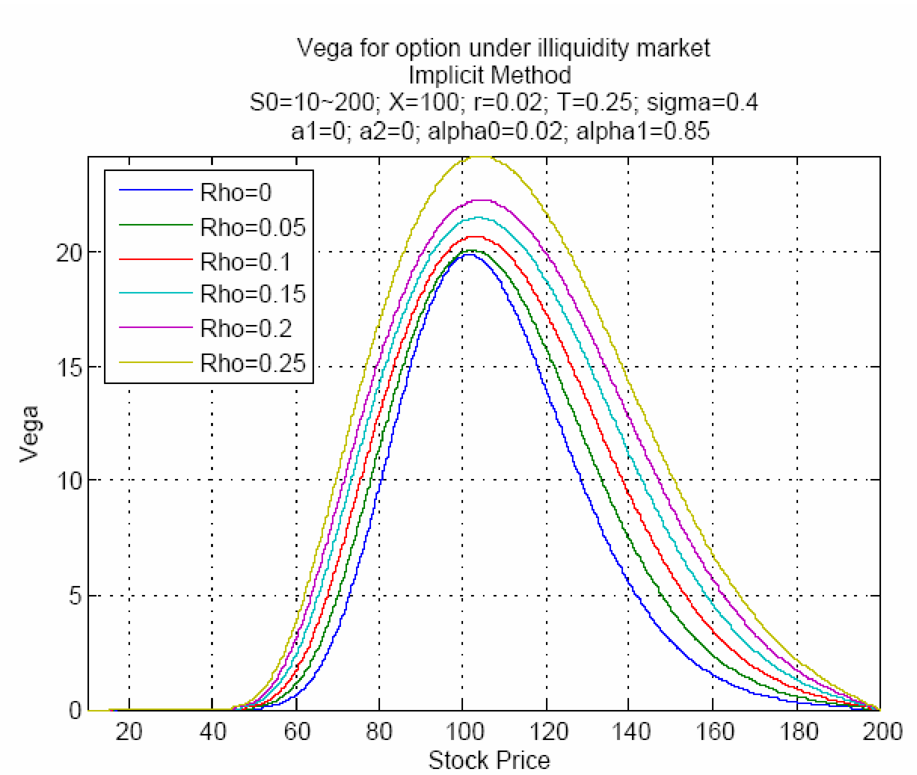


【圖 5- 4】不同股價下之 Gamma 值

當ρ逐漸變大，Gamma 值的高峰逐漸左移且降低，並在價平附近改變量最大。

● Vega（$\dfrac{\partial u}{\partial \sigma}$）

Vega 代表投資組合價值變動除以標的資產波動率的變動，若 Vega 的絕對值很大，代表投資組合價值對波動度微小變化即相當敏感，反之若 Vega 絕對值較小，則波動度變動影響投資組合價值變化相對較小。由圖 5-5 我們可知當市場流動性越差，Vega 絕對值越大，則代表投資組合價值對波動度的改變敏感程度越高，因此 Vega 越大，就必須要增加調整投資組合的頻率，適度地去調整複製的投資組合或是避險部位。



【圖 5- 5】不同股價下之 Vega 值

Vega 值隨著流動性越不足而逐漸變高

第三節 用 BS 與考慮流動性模型之定價誤差與避險損失比較

表 5-2 顯示各檔權證在不同流動性狀態下的定價誤差，在市場流動性可能不足之下，各檔認購權證均可用本文考慮流動性參數的訂價模型算出理論價格，經

由比較後可以發現其定價誤差都比用 BS 模型所計算出的定價誤差還小。另外，也可發現當 ρ= 0.25 時的誤差最小，其中有六檔權證的絕對誤差小於 1，然而，我們認為可能是因為權證標的股票的市價較小，才導致相對誤差百分比看起來比較大，當 ρ= 0.25 時，用本文模型算得之相對誤差大致比 BS 模型的相對誤差降低 16%到 29%，平均而言，可以降低 22.55%左右。

【表 5- 2】BS 模型與 Frey 模型(不同流動性)的定價誤差

絕對定價誤差 =|理論價格 — 市場價格|

相對定價誤差 =|(理論價格 — 市場價格) / 市場價格|

權證名稱	定價誤差	BS	Frey model					
			ρ=0	ρ=0.05	ρ=0.10	ρ=0.15	ρ=0.20	ρ=0.25
群益 03	絕對	2.5135	2.5150	2.0886	1.6930	1.3250	0.9830	0.6660
	相對	21.12%	21.13%	17.55%	14.23%	11.13%	8.26%	5.60%
群益 02	絕對	1.5960	1.5971	1.2846	0.9944	0.7252	0.4747	0.2393
	相對	19.11%	19.13%	15.38%	11.91%	8.69%	5.69%	2.87%
日盛 13	絕對	1.0644	1.0648	0.9417	0.8278	0.7211	0.6204	0.5262
	相對	43.44%	43.46%	38.44%	33.79%	29.43%	25.32%	21.48%
華信 01	絕對	4.5437	4.5469	4.2308	3.9331	3.6525	3.3886	3.142
	相對	53.77%	53.81%	50.07%	46.55%	43.22%	40.10%	37.18%
群益 11	絕對	3.7034	3.7051	3.3984	3.1081	2.8343	2.5773	2.3358
	相對	53.67%	53.70%	49.25%	45.04%	41.08%	37.35%	33.85%
元大 21	絕對	15.7050	15.7080	13.9460	12.2970	10.7590	9.3310	8.0030
	相對	52.35%	52.36%	46.49%	40.99%	35.86%	31.10%	26.68%
統一 09	絕對	0.5643	0.5645	0.5028	0.4432	0.3855	0.3299	0.2762
	相對	56.43%	56.45%	50.28%	44.32%	38.55%	32.99%	27.62%
統一 11	絕對	1.0337	1.0338	0.9546	0.8762	0.7994	0.7263	0.6546
	相對	68.91%	68.92%	63.64%	58.41%	53.29%	48.42%	43.64%
元大 31	絕對	1.0262	1.0263	0.9316	0.8396	0.7509	0.6652	0.5843
	相對	64.14%	64.14%	58.23%	52.47%	46.93%	41.58%	36.52%
台証 02	絕對	1.1088	1.1089	1.0084	0.9100	0.8137	0.7212	0.6330
	相對	65.23%	65.23%	59.32%	53.53%	47.87%	42.42%	37.24%

接著由第四章第二節所定義的追蹤誤差(tracking error)，其追蹤誤差定義為選擇權市場價值減去用自我融資動態調整策略複製的選擇權價值，目的是可以用

來衡量避險所造成的損失，可以作為避險績效評估的參考指標。

$$e_T^M \equiv h(S_T(\rho,\alpha)) - V_T^M = h(S_T(\rho,\alpha)) - \left(V_0 + \int_0^T \alpha_s dS_s\right) \tag{4.5}$$

若動態使用 Delta 中立來調整股票部位，則理論上避險誤差為零，但真實市場存在許多交易限制與交易成本，無法進行動態調整，所以投資人或券商大多以每日、每週或每隔一段時間，間斷去調整避險部位，因此會產生避險誤差，本研究也採用間斷調整策略，分為每天調整部位、每五日調整部位與每十日調整部位，並且以自我融資方式來複製選擇權價值，在不同流動性參數下，求得其到期日的追蹤誤差並加以比較。

追蹤誤差定義為到期日選擇權市場價格減去複製的選擇權價格，因此追蹤誤差越小代表複製的選擇權價值較大，且追蹤誤差為負值時，複製的選擇權價值比市場上的價值大，即達到避險目標。表 5-3 為每日調整部位所得到的避險誤差，用本文模型所做的間斷避險，十檔權證中，群益 11 與元大 21 有產生較嚴重數值誤差的問題，因為在到期日時權證為深度價外，此時權證價格過小而導致選擇權對股價二階微分的誤差較大，所以避險誤差有較大的誤差產生。除了群益 11 與元大 21，其餘八檔的追蹤誤差隨著 ρ 越大而逐漸變小，代表避險效果越好，而在 $\rho = 0.25$ 時有六檔權證的追蹤誤差為負值，比起用 BS 模型作間斷性避險，其追蹤誤差只有四檔為負值，顯示用本文模型所做的避險策略似乎有較好的表現。

表 5-4 為五日調整部位在到期日所得到的避險誤差，可知用 BS 模型所得到的避險誤差，十檔裡面有四檔權證的避險誤差為負值，其避險誤差一樣隨著 ρ 越大而逐漸變小， 在 $\rho = 0.25$ 時有五檔權證的追蹤誤差為負值而達到避險效果。

表 5-5 為十日調整部位到期日所得到的避險誤差，避險誤差也有隨著 ρ 越大而逐漸變小，不過用 BS 模型與用本文模型所做的避險誤差，一樣都是四檔為負值。

由此可知每日調整部位所得到的避險效果可能較好，可由四檔權證達到避險效果，$\rho = 0.25$ 時提升到六檔權證達到避險效果，隨著策略調整時間越長，到期

日達到避險效果的權證似乎有減少的趨勢。再看三種調整期間的平均追蹤誤差，不論流動性高低，隨著調整期間拉長而誤差逐漸變大，如每日調整部位，BS 模型的避險策略所得到的平均追蹤誤差為 0.8399，每五日調整部位得到平均追蹤誤差 1.1425，每十日調整部位得到平均追蹤誤差 1.3084；$\rho=0.25$ 時，每日調整部位得到的平均追蹤誤差 0.2261，每五日調整部位得到的平均追蹤誤差 0.3880，每十日調整部位得到平均追蹤誤差 0.5724，所以如果能夠不考慮交易成本而每日調整部位，本文所選取市場流動性較不足期間的權證資料作分析，結果為 $\rho=0.25$ 時所得到的平均避險誤差最小。

【避險效果衡量】

為了衡量用本文模型所做的避險誤差是否較小，在樣本數較少的情況下，使用無母數統計的檢定方法，利用符號等級檢定法（Wilcoxon Signed Rank Test），分別檢定在不同流動性參數下本文模型的追蹤誤差母體平均是否小於 BS 模型所做的追蹤誤差母體平均。

$$\begin{cases} H_0 : \mu_0 \geq \mu_{BS} \\ H_1 : \mu_0 < \mu_{BS} \end{cases}, \begin{cases} H_0 : \mu_{0.05} \geq \mu_{BS} \\ H_1 : \mu_{0.05} < \mu_{BS} \end{cases}, \ldots, \begin{cases} H_0 : \mu_{0.25} \geq \mu_{BS} \\ H_1 : \mu_{0.25} < \mu_{BS} \end{cases}$$

1. 每日調整部位所得到的避險誤差，檢定結果在 $\alpha=0.1$ 下，在 $\rho=0.1$、$\rho=0.15$、$\rho=0.2$ 與 $\rho=0.25$ 下皆拒絕虛無假設，其追蹤誤差皆顯著的比用 BS 模型所作的追蹤誤差小，避險效果比 BS 模型好。$\alpha=0.05$ 下，$\rho=0.15$、$\rho=0.2$ 與 $\rho=0.25$ 的追蹤誤差顯著比用 BS 模型的追蹤誤差小，在 $\alpha=0.01$ 下，只有在 $\rho=0.2$ 與 $\rho=0.25$ 下拒絕虛無假設，所作的追蹤誤差顯著比 BS 模型所作的追蹤誤差小，避險效果顯著比 BS 模型好。
2. 每五日調整策略的追蹤誤差，檢定結果在 $\alpha=0.01$ 下，$\rho=0.05$、$\rho=0.1$、$\rho=0.15$、$\rho=0.2$ 與 $\rho=0.25$ 皆拒絕虛無假設，用本文模型所得到的避險誤差皆顯著比 BS 模型操作策略所得到的避險誤差來的小。
3. 十日調整策略的追蹤誤差，檢定結果在 $\alpha=0.1$ 下，我們有證據說 $\rho=0.05$、

ρ= 0.1、ρ= 0.15、ρ= 0.2 與 ρ= 0.25 所得到的避險誤差皆顯著比 BS 模型策略所得到的避險誤差來的小。在 α =0.01 下，我們有證據說 ρ= 0.1、ρ= 0.15、ρ= 0.2 與 ρ= 0.25 下得到避險誤差顯著的比 BS 模型策略得到的誤差小。

由以上可知，假設券商採每日調整部位，則不管用哪個模型或不同流動性之下，其平均追蹤誤差都會比調整期間長的平均追蹤誤差來的小，因此較容易達到券商欲求的避險效果，亦即追蹤誤差為負值，所以儘管在每日調整策略時，BS 模型與本文模型追蹤誤差之差異，並沒有每五日調整或每十日調整策略來的顯著，由表 5-3，在 ρ= 0.25 時仍達到最好的避險效果，亦即有六檔權證算得的避險誤差小於零。相對的，若採取每五日調整或每十日調整部位，本文模型與 BS 模型得到的追蹤誤差相異程度，其顯著性雖然較高，但平均追蹤誤差卻比每日調整策略的追蹤誤差大，且每十日調整策略所得到的誤差最大，避險效果最不好。由這些結果顯示，當市場流動性較不足的時候，用本文所選取的十檔權證來分析，不管券商採取每日、五日或十日調整策略，本文模型所採取的策略皆可得到比 BS 模型之下所採取避險策略更佳的避險效果。

【表 5- 3】考慮流動性模型與 BS 模型所得到的到期日追蹤誤差比較

（每日調整部位）

隨著 ρ 越大其追蹤誤差逐漸變小，用 BS 模型操作策略有四檔權證達避險效果，在本文模型 ρ=0.25 時有六檔權證達到避險效果，由無母數檢定得知本文模型避險誤差比 BS 模型避險誤差小的顯著性（表中*號，其顯著程度見註解 2）。

權證名稱	每日調整部位所得之避險誤差						
	BS	Frey model					
		ρ=0	ρ=0.05	ρ=0.1	ρ=0.15	ρ=0.2	ρ=0.25
群益 03	1.1143	1.1168	0.9770	0.8484	0.7288	0.6143	0.5029
群益 02	-1.7703	-1.7262	-2.0481	-2.3320	-2.5914	-2.8370	-3.0815
日盛 13	-0.3250	-0.3221	-0.5152	-0.6949	-0.8711	-1.0375	-1.1658
華信 01	0.4890	0.4751	0.2938	0.1290	-0.0203	-0.1564	-0.2815
群益 11	1.1490	1.3242	1.2449	1.1530	1.0517	0.9441	0.8314
元大 21	7.1003	8.1216	8.0348	7.8905	7.6936	7.4448	7.1453
統一 09	-0.4836	-0.4541	-0.5478	-0.6418	-0.7346	-0.8223	-0.9038
統一 11	-0.4553	-0.4324	-0.5156	-0.5958	-0.6740	-0.7500	-0.8271
元大 31	0.6049	0.6230	0.4676	0.3187	0.1767	0.0417	-0.0842
台証 02	0.9757	0.9956	0.7999	0.6145	0.4392	0.2759	0.1254
平均追蹤誤差[2]	0.8399	0.9721	0.8191	0.6690*	0.5199**	0.3718***	0.2261***
追蹤誤差標準差	2.3842	2.6790	2.7146	2.7288	2.7248	2.7034	2.6655
平均/標準差	0.3523	0.3629	0.3017	0.2451	0.1908	0.1375	0.0848

[2] *表示在 α =0.1，其追蹤誤差母體平均顯著小於 BS 的追蹤誤差母體平均

**表示在 α =0.05，其追蹤誤差母體平均顯著小於 BS 的追蹤誤差母體平均

***表示在 α=0.01，其追蹤誤差母體平均顯著小於 BS 的追蹤誤差母體平均

顯著水準見 Daniel, W. W., 2000, Applied Nonparametric Statistics, Duxbury.

【表 5- 4】考慮流動性模型與 BS 模型所得到的到期日追蹤誤差比較
（五日調整部位）

隨著 ρ 越大其追蹤誤差逐漸變小，用 BS 模型策略有四檔權證達避險效果，用本文模型避險在 ρ=0.25 時有五檔權證達到避險效果，較每日調整部位達到避險效果的權證少，由無母數檢定得知本文模型避險誤差比 BS 避險誤差小的顯著性，較每日調整部位的顯著性高（表中*號，其顯著程度見註解 2）。

權證名稱	每五日調整部位所得之避險誤差						
	BS	Frey model					
		ρ=0	ρ=0.05	ρ=0.1	ρ=0.15	ρ=0.2	ρ=0.25
群益 03	0.1750	0.1754	0.0495	-0.0639	-0.1685	-0.2700	-0.3700
群益 02	-1.0551	-1.0230	-1.3488	-1.6575	-1.9525	-2.2371	-2.5189
日盛 13	-0.4008	-0.4045	-0.5708	-0.7374	-0.8981	-1.0526	-1.1853
華信 01	1.6116	1.6473	1.4400	1.2473	1.0719	0.9132	0.7696
群益 11	0.9791	1.1675	1.1018	1.0204	0.9267	0.8249	0.7167
元大 21	9.2873	9.5140	9.2569	8.9825	8.6867	8.3609	7.9994
統一 09	-0.4378	-0.4043	-0.5164	-0.6233	-0.7241	-0.8171	-0.9039
統一 11	-0.6882	-0.6521	-0.7170	-0.7825	-0.8477	-0.9123	-0.9790
元大 31	0.9155	0.9320	0.7514	0.5822	0.4238	0.2750	0.1377
台証 02	1.0387	1.0634	0.8684	0.6864	0.5164	0.3589	0.2135
平均追蹤誤差	1.1425	1.2016	1.0315***	0.8654***	0.7035***	0.5444***	0.3880***
追蹤誤差標準差	2.9934	3.0548	3.0292	2.9981	2.9600	2.9125	2.8542
平均/標準差	0.3817	0.3933	0.3405	0.2887	0.2377	0.1869	0.1359

【表 5- 5】考慮流動性模型與 BS 模型所得到的到期日追蹤誤差比較
（十日調整部位）

隨著ρ越大其追蹤誤差逐漸變小，用 BS 模型策略有四檔權證達避險效果，用本文模型避險在ρ=0.25 時亦只有四檔權證達到避險效果，由無母數檢定得知本文模型避險誤差比 BS 避險誤差小的顯著性，較每日調整部位的顯著性高（表中*號，其顯著程度見註解 2）。

權證名稱	每十日調整部位所得之避險誤差						
	BS	Frey model					
		ρ=0	ρ=0.05	ρ=0.1	ρ=0.15	ρ=0.2	ρ=0.25
群益 03	1.4581	1.4529	1.3267	1.1988	1.0680	0.9363	0.8027
群益 02	-0.9854	-0.9648	-1.2475	-1.5486	-1.8477	-2.1348	-2.4163
日盛 13	-0.4589	-0.4609	-0.6266	-0.7903	-0.9475	-1.0974	-1.2289
華信 01	1.6971	1.7483	1.5126	1.3050	1.1244	0.9657	0.8234
群益 11	0.8090	1.0960	1.0686	1.0196	0.9531	0.8740	0.7848
元大 21	9.6551	9.8854	9.7068	9.4785	9.2013	8.8745	8.4989
統一 09	-0.5074	-0.4801	-0.5846	-0.6866	-0.7839	-0.8742	-0.9574
統一 11	-0.7583	-0.7379	-0.8033	-0.8696	-0.9354	-0.9996	-1.0656
元大 31	1.0456	1.0631	0.8746	0.6995	0.5364	0.3841	0.2438
台証 02	1.1290	1.1432	0.9345	0.7408	0.5601	0.3930	0.2390
平均追蹤誤差	1.3084	1.3745	1.2162*	1.0547 ***	0.8929 ***	0.7322 ***	0.5724***
追蹤誤差標準差	3.0938	3.1544	3.1481	3.1302	3.0985	3.0513	2.9891
平均/標準差	0.4229	0.4357	0.3863	0.3369	0.2882	0.2399	0.1915

第六章 結論與建議

本文採用 Frey(2000)與 Frey 和 Patie(2001)在流動性不足之下的歐式選擇權定價模型，探討當流動性不足時，選擇權標的股價、波動度與選擇權價格會如何受到大型投資人動態避險策略影響，以及如何建立避險部位方能減少避險誤差，規避掉市場風險與流動性風險，加入無風險利率於模型中使模型更為一般化，且探討考慮流動性不足因素下，金融機構發行選擇權，該如何訂價與避險，Frey 和 Patie(2001)將 BS 偏微分方程修正為一非線性偏微分方程，並用有限差分法與牛頓法來解此非線性偏微分方程，求得理論的選擇權價格，但本文將此非線性方程先轉為線性偏微分方程再進行求解，因此預期可以減少相當多的程式運算時間，隨著標的證券價格變動，解出不同流動性之下的歐式買權理論價格與 Greeks，觀察其將會如何變化。實證部份挑選台股加權指數每月成交量較少的年度來做分析，採用台灣美式單一個股認購權證，挑選其中標的公司無發行股利的權證，因其性質將類似歐式買權。從券商的角度出發，當證券市場有流動性問題產生時，券商如何對認購權證做定價，並以此理論價格做為避險成本，在發行日建構一個包含標的股票與無風險性資產的投資組合，用此投資組合來複製認購權證，採用間斷調整投資組合股票與無風險性資產部位。本研究選用每日避險、五日避險與十日避險三種不同的調整期間來做比較，於到期日時求得追蹤誤差，其定義為認購權證市場真實價格減去複製的投資組合價值，比較用 BS 模型與本文模型所做的避險策略，研究其追蹤誤差在不同調整期間下的變化。本篇研究得到以下幾點結論：

一、在考慮流動性因素下，Frey 和 Patie(2001)將 BS 偏微分方程修正為一非線性偏微分方程，且利用牛頓法與隱性差分法解得歐式選擇權的理論價格，但利用牛頓法直接求解非線性方程可能會耗費過多時間，因此本文將此非線性偏微分方程先轉為一個線性的偏微分方程，再利用隱性差分法求解歐式選擇權

的理論價格，並求得選擇權的 Delta、Gamma 與 Vega 值，以及比較其在不同流動性之下的變化。

1. 歐式選擇權價格

   當流動性越不足，所計算出的選擇權理論價格越高，尤其在價平附近選擇權價格的變化程度最大，假若市場不存在套利的情況，此理論價格可視為避險成本，亦即流動性越不足，避險成本越高。

2. 避險比率（Delta，$\frac{\partial u}{\partial S}$）

   在股價小於執行價時，歐式買權的 Delta 會因為流動性越不足而變大，故此時用 BS 模型避險策略將會造成避險不足（under hedge）的問題；在股價大於執行價時，避險比率會因為流動性不足而減少，故使用 BS 模型避險策略會造成過度避險（over hedge）的狀況。整體而言 Delta 隨著流動性不足(ρ越大)而越顯平坦，因此在考慮流動性因素下，我們必須隨著流動性的不同來調整避險部位，以避免因為使用不當的模型而產生較大的避險誤差。

3. Gamma 值（$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$）

   Gamma 值隨著流動性越不足，其最高峰逐漸左移並降低，在價平附近 Gamma 值會因為流動性的變差而逐漸縮小，然而價內與價外則會隨著流動性不足而使 Gamma 值增加，其中以價內權證的 Gamma 值變動較明顯，因此可由 Gamma 值來了解 Delta 變化量對資產價格變化的敏感關係，以及觀察出正向回饋效果（positive feedback effect）的強弱。

4. Vega 值（$\frac{\partial u}{\partial \sigma}$）

   當證券市場的流動性越不足時，Vega 絕對值越大，表示投資組合價值對波動度改變的敏感程度越高，因此必須增加投資組合調整頻率，適度調整其避險部位，以反應市場波動度對於投資組合所造成的衝擊。

二、本文利用 Frey and Patie (2001)所提出的模型，且設定流動性參數 ρ 從 0 到 0.25 與 BS 模型所做的十檔認購權證做定價誤差的比較，在實證結果顯示使用本文模型所產生的定價誤差較小，尤其是在 $\rho = 0.25$ 時算得的定價誤差最小，其相對誤差與 BS 模型所算的相對訂價誤差做比較，平均可降低 22.55%，由此可顯示在我們選擇的這段期間內，用本文模型且 $\rho = 0.25$ 時，來評價權證價格應該是恰當的。

三、本研究分別使用兩種選擇權定價模型計算權證的理論價格作為券商避險成本，並且建構一個投資組合來複製認購權證價值，間斷地調整其避險部位，調整期間分成每日、每五日與每十日，以自我融資（self-financing）的方式來複製認購權證價值，求得不同流動性參數下的追蹤誤差並加以比較。

1. 研究發現不管調整期間多長，追蹤誤差大多隨著 ρ 變大而逐漸變小，亦即此時參數設定 $\rho = 0.25$ 算得的追蹤誤差最小，似乎較能符合當時市場狀況。
2. 每日的平均追蹤誤差會比每五日或每十日所算得的平均追蹤誤差來的小，顯示每日調整避險部位應較容易達到券商所要的避險效果，亦即追蹤誤差小於零，因此券商可複製出一個較市場認購權證價值高的投資組合。
3. 利用無母數檢定避險誤差是否小於 BS 模型的避險誤差，結果發現每日避險的檢定結果比每五日或每十日的檢定結果還不顯著，採取每五日調整避險部位檢定結果最為顯著，我們發現用本文模型 ρ 從 0.05 到 0.25 算得的追蹤誤差皆顯著比 BS 模型算得的追蹤誤差小。

因此每日調整部位所算得的追蹤誤差雖然較小，但是因為本文尚未考慮交易成本，若券商考慮交易成本採取五日避險或十日避險，由無母數檢定可知五日避險的檢定結果最為顯著，在本研究所定的流動性參數範圍內，本文模型所得之追蹤誤差皆顯著比 BS 模型的追蹤誤差小，其中又以 $\rho = 0.25$ 時追蹤誤差最小，表示此時券商用參數 $\rho = 0.25$ 來避險操作似乎可得到較佳的效

果。

最後對本研究做幾點建議：

一、本研究用有限差分法得到歐式選擇權價值與其他 Greeks，發現當 ρ 太大時，其餘參數設定變動可能會導致 Gamma 值與 Vega 值產生不穩定的狀況，且我們認為設定 $\rho = 0 \sim 0.25$ 則約略可描述台灣認購權證其標的資產市場的流動性狀況，因此以 $\rho = 0 \sim 0.25$ 來做實證分析，若後續研究欲在流動性更不足的市場下作研究，必需先解決此數值解不穩定的狀況，以免影響定價與避險效果。

二、理論上本文模型 $\rho = 0$ 與 BS 模型應該相同，所以用有限差分法對認購權證做定價與避險，若股價的網格切割越細，數值方法所得的選擇權價格誤差會越小，誤差為 $0(dS^2)$，因此可選擇不同的網格間距，觀察本文模型 $\rho = 0$ 與 BS 模型數值方法所算得的誤差收斂程度。

三、當 $\rho = 0$ 時直接用有限差分法解 BS 偏微分方程，而不要解本文模型的偏微分方程，應可降低本文模型 $\rho = 0$ 與 BS 模型間數值誤差的部份。

四、本文只衡量加權指數交易量來選擇流動性較不足的時段，但應該再繪出各個權證標的股票的交易量來判斷是否真的有流動性問題產生。另外，再選擇流動性較佳時段的認購權證作為對照組，比較本文模型與 BS 模型在不同流動性之下對認購權證做定價與避險的差異。

五、若認購權證市場有流動性不足的問題，是否會產生其他影響。

六、流動性參數應由市場真實資料估計出來，但本文尚未做估計，而是以情境分析的方式（scenario analysis）直接去看流動性參數如何設定才能較符合當時市場流動性而得到較佳的結果，而且市場流動性應會隨時間改變而非固定，後續研究可先將流動性視為隨機變動，並先把流動性參數估計出來再進行訂價與避險動作為佳。

七、本研究尚未考慮交易成本，後續研究可將交易成本併入，在考慮流動性不足因素下，研究出與市場更貼切的選擇權訂價模型。

八、流動性衝擊（illiquidity shock）可能會對漂移項（drift term）造成影響，產生風險貼水（risk premium），後續研究需將模型漂移項做調整。

參考文獻

詹場，胡星陽(民90，7月)，流動性衡量方法之綜合評論，國家科學委員會研究彙刊: 人文及社會科學，11(3)，205-221。

Brandimarte, P., 2002, *Numerical Methods in Finance: A MATLAB-Based Introduction*, Wiley.

Esser, A., and B. Moench, 2003, Modeling feedback effects with stochastic liquidity, *Working paper*.

Fausett, L. V., 2002, *Numerical Methods: Algorithms and Applications*, Prentice Hall.

Frey, R., and P. Patie, 2001, Risk management for derivatives in illiquid markets: A simulation study, RiskLab, ETH-Zentrum, Zurich, Switzerland.

Frey, R., 2000, Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging, in *Model Risk*, ed. by R. Gibson, RISK Publications, London.

Higham, D. J., 2004, *An introduction to financial option valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*, Cambridge.

Kyle, A., 1985, Continuous auctions and insider trading, *Econometrica*, 53, 1315-1335.

Leland, H., 1985, Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance,* 40, 1283-1301.

Lyukov, A., 2004, Option pricing with feedback effects, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7, 757-768.

Platen, E., and M. Schweizer, 1998, On feedback effects from hedging derivatives, *Mathematical Finance*, 8, 67-84.

Pritsker, M., 2002, Large investors and liquidity: A review of the literature, *Federal Reserve Board*, Washington, USA.

Schonbucher, P. J., and P. Wilmott, 2000, The feedback effect of hedging in illiquid markets, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(1), 232-272.

Shreve, S.E., 2004, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer.

Wilmott, P., 2000, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, 2 volume set, John Wiley & Sons.

附錄一、證明(4.7)與(4.8)式

由 *Itô-formula* 可得：

$$d\alpha_t = \phi_S(t,S_t)dS_t + \left(\phi_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\phi_{SS}(t,S_t)v^2(t,S_t)S_t^2\right)dt$$

代入（4.1）式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \rho\lambda(S_t)S_t d\alpha_t \qquad (4.1)$$

並轉換為風險中立機率測度

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t + \rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)dS_t + \rho\lambda(S_t)S_t\left(\phi_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\phi_{SS}(t,S_t)v^2(t,S_t)S_t^2\right)dt$$

將方程式左右移項稍作整理

$$\left(1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)\right)dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t + [\rho\lambda(S_t)S_t\left(\phi_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\phi_{SS}(t,S_t)v^2(t,S_t)S_t^2\right) + rS_t]dt$$

則可得到

$$dS_t = \frac{\sigma}{\left(1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)\right)}S_t d\tilde{W}_t$$
$$+[\frac{\rho\lambda(S_t)S_t}{\left(1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)\right)}\left(\phi_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\phi_{SS}(t,S_t)v^2(t,S_t)S_t^2\right) + \frac{rS_t}{\left(1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)\right)}]dt$$

將上式與（4.6）式比較可得

$$dS_t = v(t,S_t)S_t d\tilde{W}_t + b(t,S_t)S_t dt \qquad (4.6)$$

$$v(t,S_t) = \frac{\sigma}{1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_s(t,S_t)}$$

$$b(t,S_t) = \frac{\rho\lambda(S_t)}{1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_s(t,S_t)}\left(\phi_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\phi_{SS}\frac{\sigma^2 S_t^2}{\left(1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_S(t,S_t)\right)^2}\right) + \frac{r}{1-\rho\lambda(S_t)S_t\phi_s(t,S_t)}$$

附錄二、認購權證發行稅賦問題

現行稅法對營利事業的課稅是採成本與收入配合原則及量能課稅的精神，即收入必須先扣除相關成本與費用後，才課所得稅。但財政部卻將券商發行權證所收取的權利金，全數列為所得額，並課以 25%的營利事業所得稅，完全忽略券商避險成本的部分。對券商來說，發行券商依規定必須同時購進一定比率的現貨，無論股票漲跌，發行券商皆需避險操作，券商購進此檔股票後，若契約到期時，股價低於購進價格，券商就會出現跌價損失。據統計，目前發行權證時避險操作成本約為權利金收入 83%，也就是說券商發行權證僅獲利 17%，但主管機關卻認定需課 25%的營利事業所得稅，權證發行券商所繳交的稅額將大於發行權證所獲得的利益，有違所得稅法量能課稅原則。 就很像國內任何營利事業都是賺 100 元，繳交 25 元所得稅，唯獨券商只賺了 20 元，卻必須繳交 25 元的稅金。

認購權證課稅不公爭議自民國 91 年浮上檯面，歷經券商陸續提起行政訴訟、兩度罷發權證，期間風波不斷。權證課稅方式遲遲未能解決，台灣國內 24 家權證發行券商採取消極抗議手段，無限期全面停發權證，因為在現行的課稅制度下，使得券商多半發一檔賠一檔，權證佔台股市值比例也只有 8.7%，不像香港的 25.40%。這使台灣許多優秀的衍生性商品人才外流至香港和中國大陸，甚至因為外資發行權證只課徵 3.75%的稅率，國內券商也有考慮未來由外資發行，內資當承銷商。

在權證課稅議題上，發行券商要求的只是稅賦公平並非自身利益，因此，當務之急應在於先行通過權證避險損益併計的相關修法條文，以期解決券商權證發行時所面對的稅賦不公問題，進而提高券商復發權證的意願，促進衍生性金融商品發展，使台灣金融市場發展更趨健全。