

# 國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

風險值衡量：變幅 DCC 模型的應用

**Measuring the Value-at-Risk : An Application of Range-DCC model**



研究生：洪慎慈

指導教授：周雨田 博士

鍾惠民 博士

中華民國九十五年六月

風險值衡量：變幅 DCC 模型的應用

**Measuring the Value-at-Risk : An Application of Range-DCC model**

研究生：洪慎慈

Student : Shen-Tzu Hung

指導教授：周雨田 博士

Advisor : Dr. Yeutien Chou

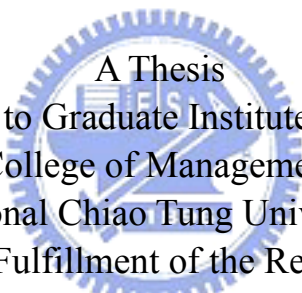
鍾惠民 博士

Dr. Huimin Chung

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文



A Thesis  
Submitted to Graduate Institute of Finance  
College of Management  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master  
of  
Science in Finance

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

# 風險值衡量：變幅 DCC 模型的應用

研究生：洪慎慈

指導教授：周雨田 博士

鍾惠民 博士

國立交通大學財務金融研究所

## 摘要

本研究針對不同財務資料特性所提出之風險值模型進行評比，包括考慮厚尾性質的極值理論（extreme value theory；簡稱 EVT）風險值模型，以及利用「時變」波動模型捕捉報酬具有條件異質變異特性的動態風險值模型。此外，將變幅（range）概念引入風險值估計中，利用 Chou (2005) 提出之 CARR（Conditional Autoregressive Range）模型估計波動性，得到變幅基礎下的風險值模型，並以美國 S&P 500 股價指數與十年期財政部政府公債日資料做為研究對象，進行變幅與報酬基礎下的風險值模型在風險值預測能力之比較，實證結果顯示，變幅基礎下的風險值模型表現優於報酬基礎下的風險值模型。

最後，更將分析維度擴大至投資組合風險值的估計，探討不同相關係數估計模型對投資組合風險值估計的影響，結果顯示 Chou, Liu 和 Wu (2005) 提出之變幅基礎下的 DCC（Dynamic Conditional Correlation）模型表現優於報酬基礎下的 DCC 模型，可獲得較準確的投資組合風險估計值，證實變幅可做為資產報酬風險評估之一良好指標。

**關鍵字：**風險值、極值理論、變幅、CARR、波動性、DCC

# Measuring the Value-at-Risk : An Application of Range-DCC model

Student : Shen-Tzu Hung

Advisor : Dr. Yeutien Chou

Dr. Huimin Chung

Graduate Institute of Finance  
National Chiao Tung University  
June 2006

## Abstract

This paper investigates the Value-at-Risk models that were proposed with different characteristics of financial data, including the extreme value theory (EVT) Value-at-Risk model and the dynamic models considering the heteroscedasticity problem. In addition, we adopt the concept of range to the Value-at-Risk estimation. We use the Conditional Autoregressive Range (CARR) model of Chou (2005) to measure the volatility, and get the range-based Value-at-Risk model. We use the daily data of the stock indices of S&P 500 and the 10-year Treasury bond yield for empirical analysis. The empirical results indicate that the range-based models have the better performance than the return-based models in the Value-at-Risk evaluation.

Finally, we expand the evaluation to larger dimensions for the portfolio situation, and examine the effect of different correlation estimating models on the Value-at-Risk measuring of a portfolio. We find that the range-based Dynamic Conditional Correlation (DCC) model gets more precise Value-at-Risk estimation than the return-based DCC model. In other words, range data is a good tool for risk measuring of the asset return.

**Keywords** : Value-at-Risk, extreme value theory, range, CARR, volatility, DCC

## 謝 辭

兩年的研究生涯即將告一段落，在這過程中要感謝的人實在太多，首先感謝指導教授 周雨田老師和鍾惠民老師的耐心指導，以及感謝任職於中原大學國貿系的巫春洲老師，在我遇到瓶頸時指引我撰寫的方向，並耐心的給予指正，也感謝口試委員 朱家祥老師的建議與指教，讓這篇論文更具價值，在此，謹致以最深的謝意。

在論文的撰寫過程中，我要感謝目前就讀於交大管科所博士班的劉炳麟學長，學長給予的許多程式上的建議與指正，讓我在程式的撰寫過程中更加順利。在研究所的求學旅程中，感謝交大財金所的伙伴們，有你們的陪伴，使得研究所生活更加多采多姿，謝謝你們平常時的照顧。

最後，謝謝父親與母親的栽培，您的全力支持讓我能夠心無旁騖地完成學業，您辛苦了，謝謝您。除此之外，感謝女友依依在程式上給我的協助，妳的陪伴與鼓勵讓我更加茁壯與自信，謝謝妳！

洪慎慈 謹誌

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十五年六月

# 目 錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
目 錄.....	IV
表目錄.....	VI
圖目錄.....	VII
第壹章、緒論.....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的.....	3
第貳章、文獻探討.....	5
第一節 風險值介紹.....	5
第二節 波動性模型的討論.....	7
第三節 極值理論的概念與相關應用的探討.....	9
一、 金融資產極值行為相關文獻.....	9
二、 尾部指數估計法.....	11
三、 VaR-x風險值模型.....	12
四、 動態極值理論模型.....	13
第四節 相關係數估計模型.....	14
第參章、研究方法.....	17
第一節 極值理論.....	17
一、 Block Maxima模型.....	18
二、 Peak-Over-Threshold (POT) 模型.....	20
三、 尾部指數之估計.....	22
第二節 風險值估計方法.....	24
一、 靜態 (非條件) 風險值模型 (unconditional Value-at-Risk model) ..	26
二、 動態 (條件) 風險值模型 (conditional Value-at-Risk model) ..	32
第三節 投資組合風險值估計方法.....	35
一、 Moving Average 100 (MA100) 模型.....	37
二、 Exponential Weighted Moving Average (EWMA) 模型.....	37
三、 Constant Conditional Correlation (CCC) 模型.....	38
四、 Dynamic Conditional Correlation (DCC) 模型.....	38
第四節 風險值模型評比準則.....	41
一、 保守性分析.....	42
二、 準確性分析.....	43

三、 效率性分析.....	47
第肆章、資料分析.....	50
第一節 資料來源與取樣期間.....	50
第二節 資料的基本統計分析.....	50
第三節 極端資料分析.....	55
第伍章、實證結果.....	56
第一節 尾部指數估計結果的分析.....	56
第二節 單一資產回溯測試結果.....	58
一、 失敗率分析.....	59
二、 靜態與動態風險值模型比較.....	65
三、 個別年度 (year by year) 回溯測試.....	67
四、 極端事件風險捕捉能力的探討.....	68
五、 模型檢定分析.....	69
第三節 投資組合回溯測試結果.....	74
一、 動態投資組合風險值模型的比較.....	74
二、 DCC模型相對於MA100與CCC模型的改善程度.....	78
第陸章、結論.....	82
參考文獻.....	115



## 表目錄

表 1.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債資料單根檢定.....	84
表 2.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率敘述統計表.....	85
表 3.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債殖利率日變幅敘述統計表.....	86
表 4.	ARMA(1, 1)–GARCH( $p, q$ )與CARR( $p, q$ )模型SBC值統計表.....	87
表 5.	ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與CARR(1, 1)模型參數估計結果.....	88
表 6.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率殘差項敘述統計表.....	89
表 7.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率極端損失間距之累積分配表.....	90
表 8.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率分配尾部指數估計值...91	
表 9.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下靜態（非條件）風險值模型之穿透次數表.....	92
表 10.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下動態（條件）風險值模型之穿透次數表.....	93
表 11.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下由靜態（非條件）風險值模型至動態（條件）風險值模型的改善百分比表.....	94
表 12.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 95%信心水準下風險值模型之逐年穿透次數表.....	95
表 13.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 99%信心水準下風險值模型之逐年穿透次數表.....	96
表 14.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 31 個最大損失以及所有損失在 99%信心水準下各風險值模型的穿透百分比.....	97
表 15.	S&P 500 股價指數日報酬在 95%信心水準下之風險值模型檢定分析...98	
表 16.	十年期政府公債日報酬在 95%信心水準下之風險值模型檢定分析.....	99
表 17.	S&P 500 股價指數日報酬在 99%信心水準下之風險值模型檢定分析.....	100
表 18.	十年期政府公債日報酬在 99%信心水準下之風險值模型檢定分析.....	101
表 19.	投資組合日報酬在 95%信心水準下動態風險值模型評比.....	102
表 20.	投資組合日報酬在 99%信心水準下動態風險值模型評比.....	103
表 21.	投資組合日報酬在 95%信心水準下搭配不同相關係數模型時之動態風險值模型評比.....	104
表 22.	DCC模型相較於MA100與CCC模型在 95%信心水準下之投資組合風險值模型估計準確性上的改善幅度.....	104
表 23.	投資組合日報酬在 99%信心水準下搭配不同相關係數模型時之動態風險值模型評比.....	105
表 24.	DCC模型相較於MA100與CCC模型在 99%信心水準下之投資組合風險值模型估計準確性上的改善幅度.....	105



## 圖目錄

圖 1.	S&P 500 指數收盤價與十年期政府公債殖利率走勢圖 .....	106
圖 2.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率直方圖vs常態分配圖.....	107
圖 3.	S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率QQ-plot.....	107
圖 4.	S&P 500 日報酬率與條件波動性走勢圖 .....	108
圖 5.	十年期政府公債日報酬率與條件波動性走勢圖.....	109
圖 6.	S&P 500 股價指數報酬率殘差項QQ-plot.....	110
圖 7.	十年期政府公債報酬率殘差項QQ-plot .....	110
圖 8.	S&P 500 日報酬率與尾部指數估計值走勢圖 .....	111
圖 9.	十年期政府公債日報酬率與尾部指數估計值走勢圖.....	112
圖 10.	S&P 500 日報酬率vs各風險值模型在 99%信心水準下之風險估計值 .	113
圖 11.	報酬基礎下DCC模型、MA100 模型與CCC模型的樣本外相關係數估計 值.....	114
圖 12.	變幅基礎下DCC模型、MA100 模型與CCC模型的樣本外相關係數估計 值.....	114



## 第壹章、緒論

### 第一節 研究動機

在進行投資決策過程中，期望報酬與風險一直為投資人最關心的兩項變數。另一方面，近年來國際間交易活動日益熱絡，導致全球金融市場交易價格波動性上升和不穩定，因此對於金融市場上的參與者來說，風險控管的能力越來越重要，如何建立更具體可行的風險評量控管系統以有效管理涉險狀況，即為目前學術界與實務界主要努力的目標之一。風險值(Value-at-Risk; 簡稱 VaR) 的概念就是在這樣的背景之下被提出來的，風險值不僅概念簡單易懂，更可將整個投資組合所面臨的各種風險暴露程度量化為單一數據來解釋，是一種相當實用且可用於改善下方風險 (downside risk) 管理的風險控管工具。

所謂風險值乃為一風險估計值，測度投資組合面對市場風險下，當最壞的情況發生時投資組合最大可能損失之額度，其中所指最壞的情況通常以機率分配中的分位數 (或稱為信賴機率水準) 定義之。一般而言，風險值是評估一段期間以既定的信心水準  $100(c)\%$  所計算出資產報酬的市場風險，或是此一資產報酬在此期間可能發生的最大損失金額。Hull 和 White (1998) 對風險值的定義為：「我們有  $100(c)\%$  的信心在未來  $h$  天內的損失不會超過  $V$  元」，其中  $V$  值即為風險值，此方法提供了實務上更明確的風險衡量方法。

雖然風險值估計模型不斷的發展，但究竟何者才是最適當的風險估計模型可以適用於不同的金融市場與金融資產，目前尚無定論<sup>1</sup>。許多實證研究發現金融資產之報酬分配具有厚尾 (fat tail) 的特性，而一般傳統風險值估計模型大

---

<sup>1</sup> 參照Hendricks (1996)有更深入探討。

都假設報酬為常態分配，往往無法有效捕捉尾部分配的情況，因此可以直接經由觀察樣本分配尾部極端值的情形來評估風險，期望能夠掌握真實的風險狀態。然而很多運用極端值相關理論來探討風險值問題的研究，都無法獲得有效率且估計簡便的風險評估方法，對此本研究將藉由Huisman, Koedijk和Pownall (1998)提出的風險值估計方法，探討其與一般傳統風險值估計方法的差異。

此外，也有許多研究將報酬波動性因時而異的特質納入考量，建立不同的波動性模型來描述報酬變異數變化的特性，冀盼提升風險值模型估計的準確性。Chou (2005)指出變幅 (range) 可做為報酬波動性的代理變數 (proxy)，且其所發展的變幅基礎 (range-based) 下的波動性估計模型，在波動性估計上的表現優於一般報酬基礎 (return-based) 下的波動性估計模型，本研究將進一步探討變幅基礎下的波動性估計模型應用在風險值的估計時，是否可獲得較報酬基礎下的波動性估計模型更準確的風險估計結果。

在全球各經濟體互動程度越來越頻繁的趨勢下，相較過去而言，財務風險逐漸升高，資產間相關係數的預測在進行投資組合風險值的估計時，也越來越重要，傳統的風險值評估模型往往假設資產報酬間的相關係數為一常數，以簡化問題的處理並認為資產報酬間的相關性不會隨著時間的不同而改變，然而近年來有許多研究指出資產報酬間的相關性並非固定不變，而會因市場結構的不同產生改變，因此相關係數可視為時間的函數，自此許多關於資產報酬間共變異數或相關係數的估計模型便成為被熱烈討論的議題，其中 Engle (2002)所提出的 DCC (Dynamic Conditional Correlation) 模型更為眾多相關係數模型中發展相對完備且估計方便的模型，本研究亦將由此模型為基礎，進而應用至投資組合風險值估計上，並探討 DCC 模型相較於其他模型，在投資組合風險值估計上的差異。此外，本文也藉由 Chou, Liu 和 Wu (2005)所提出的變幅基礎下的 DCC 模型，探討應用至投資組合風險值估計上的情形，並與原始報酬基礎下的

DCC 模型比較，藉以檢視變幅基礎下的投資組合風險值模型和報酬基礎下的投資組合風險值模型，在投資組合風險值估計上的相對表現。

## 第二節 研究目的

本研究以美國的金融市場資料為對象，探討此市場中不同投資組合可能面臨的市場風險，並以 S&P 500 股價指數與十年期財政部政府公債的日資料為主要研究樣本，比較傳統的風險值估計方法與極值理論（extreme value theory；簡稱 EVT）所發展出來的各種風險值估計方法是否存在差異？亦考慮條件波動性會因時而異的動態風險值估計模型在風險值估計上是否優於未考慮條件波動變異性的靜態模型？另外，若以變幅做為對波動性估計的代理變數時，其表現如何？最後，我們也會討論不同的相關係數估計模型對投資組合風險值估計的影響，並討論預測資產報酬間相關性的正確與否，對於投資組合報酬風險值的評估確實有相當大的影響。



本文的貢獻在於建立可以描述資產報酬具異質變異性與極端事件叢聚特性的風險值模型，更可簡化風險值的估計過程並在小樣本情形下提升風險值估計的準確性。除此之外，亦嘗試使用變幅的觀念代替報酬變異數來描述波動性，以檢視變幅基礎下風險值模型的績效表現。值得說明的是，在過去應用極值理論估計資產報酬風險值的研究中，大多只考慮單一資產的估計情況，鮮少研究是以投資組合為研究對象來估計風險值，本文首次嘗試將極值理論的估計概念應用在投資組合的風險值估計上，探討在極值理論架構下之投資組合風險值模型的績效表現，並驗證當無法精確估計資產間相關係數時，對於投資組合風險值估計的準確性可能造成的影響，由此也可以了解相關係數模型在風險值估計中的重要性。

本文架構如下：第一章為緒論，介紹本文的研究重點。第二章為文獻探討，第三章主要闡釋研究方法的設計，第四章為資料分析，說明研究過程中的分析對象及基本統計性質，第五章為實證結果，主要說明本研究的發現，第六章為本研究之結論。



## 第貳章、文獻探討

### 第一節 風險值介紹

1995 年四月，巴塞爾銀行監理委員會（Basel Committee on Banking Supervision）發佈一項諮詢文件，主要在修正 1988 年巴塞爾資本協定（Basel Accord）的內容，該文件即為眾所皆知的「1996 年巴塞爾資本適足協定修正案」，或者藉由其正式施行之年度—1998 年，而稱其為「BIS 98」，主張金融機構必須以風險值來衡量市場風險並藉以決定資本適足性之問題，且在其內部模型基準規定（an Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirement）中，准許銀行可自行選用本身發展的內部模型（internal model）來計算市場風險值，決定銀行的必要資本額，並且必須以回溯測試（backtesting）檢驗模型的信賴程度，以決定必要資本的提列乘數。風險值模型發展至今，最常見的估計方法可區分為四類：歷史模擬法（historical simulation method）、蒙地卡羅模擬法（Monte Carlo simulation method）、變異數—共變異數法（variance-covariance method）、以及極值理論，然而這些模型之優劣並無一致性的結果。

根據 Jorion (2000)，歷史模擬法為一種無母數方法（nonparametric method），假設資產過去的價格變化會在未來評估期間再出現，而可以利用過去實際資產價格變動資料來推估未來價格可能的變動情形；此法只需要將過去一段期間的資產報酬資料做排序，取其信心水準相對應的分位數，即可求得風險估計值。歷史模擬法的優點為概念易於了解且計算非常簡單，直接取實際資料的狀況來進行分析，不需對資料賦予任何統計分配上的假設，因此減少模型假設錯誤的風險，亦即降低模型風險，此法的缺點在於當歷史資料樣本數不足時，

便難以計算風險值，另外，若是未來的市場結構與過去明顯不同時，歷史模擬法所估計的風險值將不適合用來反應未來的情況。Danielsson 和 de Vries (2000) 指出，以歷史資料求出的風險值在樣本數小的時候會有嚴重的誤差，因為小樣本下極端事件的數量可能很少，如此一來以樣本內的資料估計樣本外事件的發生機率，很可能會發生估計上的偏差，所以歷史模擬法必須仰賴多年的歷史資料做為樣本。Goorbergh 和 Vlaar (1999) 則分別測試視窗長度為 250、500、1,000 及 3,038 筆的樣本資料，也同樣獲得歷史模擬法會嚴重受到歷史資料多寡影響的結論。

Jorion (2000) 指出蒙地卡羅模擬法屬於參數法 (parametric method)，其基本觀念是假設資產報酬型態符合某一過程 (process)，依據所設定的價格變動過程，大量模擬未來各種可能發生的情境，再建構投資組合的損益分配圖，並推估其風險值。蒙地卡羅模擬法的優點在於可以處理任何金融商品，解釋投資組合所面臨的各種不同風險，即使是非線性價格風險、波動風險或模型風險都可以使用，缺點在於需面對龐大的計算時間成本，根據 Jorion (2000) 的估計，若以 1,000 條價格路徑模擬由 1,000 項資產所構成之投資組合，所需的價格路徑次數將超過一百萬條。另外，若所假定的資產價格模型與財務變數或風險因子的隨機模型不合適，則模擬的結果也將與實際狀況差異甚大，產生模型假設錯誤的風險，這些都是蒙地卡羅模擬法進行實務推廣上所面臨的缺點。

J. P. Morgan 於 1994 年提出 RiskMetrics 風險值估計法，其計算方法主要以變異數—共變數矩陣 (variance-covariance metrics) 來計算風險值，故又稱為變異數—共變數法，此法為參數法的典型代表，假設資產報酬率為常態分配、各觀察值間相互獨立以及市場變數變動與資產價格變動呈線性關係。對於這種方式的風險值計算，其著重的重點在於資產報酬變異數與共變異數的估計，最早是使用固定權數的加權方式，即給予過去不同期別的變數相同的權重，故又稱

為簡單移動平均 (simple moving average) 模型，之後 J. P. Morgan 又提出以指數加權移動平均 (Exponential Weighted Moving Average; EWMA) 模型來估計變異數—共變異數矩陣，EWMA 模型在估計變異數時，主要假設近期市場波動對於未來變異數的估計有較大的影響力，因而得到較大的權重；而對於較遠期的資訊，則會隨著時間的增加而賦予較小的權重係數，且呈現指數型態的衰退方式，藉此一設計可以捕捉變異數波動性的叢聚效果，所謂波動性叢聚 (volatility clustering) 是指大波動伴隨著大波動，小波動伴隨著小波動的特性，而 J. P. Morgan 的 EWMA 模型在考慮指數型態權數之後，改善了固定權數方式之不合理的假設，相較於固定權數模型更能正確估算資產報酬之變異數—共變異數矩陣，因此 EWMA 模型為 RiskMetrics 法的核心模型。

## 第二節 波動性模型的討論



由前文可知，使用變異數—共變異數法估計風險值時，其著重的重點在於資產報酬變異數與共變異數的估計，因此資產報酬變異數與共變異數估計的準確性在風險值估計方法中扮演相當重要的角色，然而過去許多文獻證實金融資產報酬往往存在異質變異性 (heteroscedasticity) 問題，如 French, Schwert 和 Stambaugh (1987)、Bollerslev, Engle 和 Wooldridge (1988)、Ballie 和 DeGennaro (1990) 以及 Andersen 和 Bollerslev (1997) 等，皆觀察到資產報酬率分配變異數隨時間改變的情形，此外亦有相關文獻認為條件波動性變異具叢聚的現象，Engle (1982) 更將此波動性異質變異的性質予以模型化而提出自我迴歸條件異質變異 (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity; ARCH) 模型，並配適於英國市場資料獲得實證上的支持，Bollerslev (1986) 修正其模型，而提出一般化自我迴歸條件異質變異 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity; GARCH) 模型，使得條件變異數的動態結構更具彈性，在參數估計上也可以更



精簡 (parsimony)<sup>2</sup>，這類模型不但可以估算資產報酬的條件變異數，也能夠解釋金融資產報酬所產生的波動性叢聚現象，對於資產報酬未來的風險狀況更能掌握，關於ARCH與GARCH模型在財務與經濟上的應用及說明，可參考Bollerslev, Chou和Kroner (1992)的整理。由於波動性具異質變異的性質，故利用變異數—共變異數法來估計風險值時，若假設資產報酬波動性為常數將會產生嚴重的估計誤差，因此有動態（條件）波動性風險值模型被發展出來，常見的作法，基本上是將GARCH的特性納入模型之中，利用條件波動性模型來估計未來波動情況，進而預測風險值，J. P. Morgan所提出主要用來估計變異數—共變異數模型之變異數矩陣的方法，亦即EWMA模型，可視為GARCH模型的特例之一。Berkowitz和O'Brien (2002)特別針對六家銀行的內部風險值模型與時間數列風險值模型進行比較，發現由於時間數列風險值模型對於市場上波動性的掌握較內部模型更具彈性，能及時捕捉市場真實情況，故在風險值估計表現上並不會比這六家銀行現行使用的內部評估模型差，因此認為銀行在使用其內部模型評估風險時，最好可以搭配時間數列風險值模型做為輔助的評估工具。

在衡量時間數列風險值模型時，關於資產報酬波動性方面，除了如同ARCH或GARCH模型可以利用報酬平方項衡量波動性之外，也可以利用變幅當做波動性的代理變數，並定義變幅為某一固定取樣期間內，對數化資產價格最高價（high）與最低價（low）的價差<sup>3</sup>。財務文獻上亦有許多論述支持使用變幅的觀念來衡量波動性，Parkinson (1980)指出，相較於傳統歷史波動性的衡量方法，使用變幅來預測股價的波動性，會比只有使用收盤價資訊來進行波動性預測的表現為佳，但是在Parkinson (1980)的實證研究上卻無法得到一致性的佐證用以支持其推論，另一方面，Chou (2005)認為變幅在波動性的估計能力方面之所以無法彰顯，並不代表變幅無法當做波動性的代理變數，而是因為過去模型對波

<sup>2</sup> ARCH( $\infty$ )在某些條件下，可以轉換為GARCH(1, 1)，則參數估計可以更精簡。

<sup>3</sup> 參照Brooks (2004), ch8.6, p.444~445 有進一步說明。

動性的動態結構刻畫得不夠完備，因此將變幅的觀念納入GARCH模型而提出自我迴歸條件變幅（Conditional Autoregressive Range；CARR）模型，此模型巧妙的結合GARCH模型刻畫波動性的動態過程與變幅特有的屬性，把單位時間內價格變動的極端值情形表現在模型的動態結構當中，可以適當的描述變幅的動態結構，使得變幅在波動性的預測上相對於傳統GARCH模型更具有優勢，Chou (2005)並利用S&P 500 股價指數資料實證結果支持CARR模型確實較GARCH模型更能獲得準確的波動性估計值。

相較於傳統的 GARCH 模型，CARR 模型主要著眼於變幅條件均數的動態過程，而 GARCH 模型則是採用報酬平方項為代理變數，屬於二階動差函數的探討，故不如 CARR 模型利用一階動差來建構模型簡便，為了更加了解這兩種模型在波動性估計上的優劣，本研究將針對此兩種波動性模型在風險值估計上的表現進行完整的比較，探討 CARR 模型是否能夠如同其在波動性預測上較 GARCH 為優的表現一樣，同時在風險值估計上亦可獲得較準確的估計值。

### 第三節 極值理論的概念與相關應用的探討

#### 一、金融資產極值行為相關文獻

目前為止有許多文獻皆發現金融資產報酬的分配型態並非服從常態分配的假設，而有所謂極值（extreme value）行為及厚尾特性，所謂厚尾係指報酬分配的極端值發生頻率較常態分配為高，Danielsson和de Vries (2000)指出，RiskMetrics模型基於條件常態分配之假設並不適用於極端報酬之分析，因為在此假設下，會低估極端事件的次數而影響風險值估計的準確性，Duffie和Pan (1997)指出，假設市場因子之機率分配為常態之模型假設與市場實際情況差距

甚遠<sup>4</sup>，特別是當市場因子之機率分配具有厚尾現象時，發生極端狀況的頻率較常態分配為高，將使得變異數—共變異數法產生低估風險值的問題，Bollerslev (1986)亦提供實證證明在預測金融資產報酬時，即使考慮了資產報酬異質波動的情形，以條件波動性模型來估計金融資產報酬的波動性，亦無法完全捕捉金融資產報酬厚尾的現象，造成在高信心水準之下時會低估資產市場風險值的結果，由此可見金融資產報酬其實存在極端下方風險，或稱額外下方風險 (additional downside risk)，亦即風險在經濟蕭條或動盪較大的特別時期會變得更大、更難以掌控，Barone-Adesi, Bourgoin和Giannopoulos (1998)亦藉由GARCH模型來配適資產報酬分配的異質變異性，並結合歷史模擬法來估計GARCH模型下的殘差值分配以估算風險值，雖然解決報酬隨時間變動的自我相關性與異質變異問題，但缺點如前所述，利用歷史模擬法來推估未來損益機率分配型態，當歷史資料不足或是無法包含極端值時，此時歷史資料所形成的機率分配就無法反應所有的可能情況，因此必須在大樣本的情況下才能獲得準確性的估計值。



Jansen和de Vries (1991), Loretan和Phillips (1994)以及Longin (1996)皆研究股市的極值行為，並實證發現金融資產的極值分配為具有厚尾的分配型態。許多財務研究更進一步將金融資產的極值行為應用到風險管理議題的探討，運用極值理論估計金融資產的極值行為並進而提升風險值估計的準確性，Nefci (2000)利用美國四種利率及匯率資料為研究對象<sup>5</sup>，實證發現不論是樣本內或是樣本外的結果，採用極值理論風險值模型所估計的99%信心水準下風險值，皆較一般傳統常態假設下風險值模型的估計值準確，且可獲得較小的平均失敗誤差<sup>6</sup>，代表其所估計之風險值較接近實際報酬大小，而Huisman, Koedijk和Pownall (1998)、Pownall和Koedijk (1999)、Danielsson和de Vries (2000)等，亦比較常態

<sup>4</sup> Duffie和Pan (1997)以S&P 500 股價指數 1986 年至 1996 年之日報酬資料為例說明此結果。

<sup>5</sup> 此四種利率資料為三個月期國庫券利率、兩年期、五年期及七年期政府公債利率；四種匯率資料則為美元對德國馬克、法國法郎、英國英鎊及日本日圓的匯率。

<sup>6</sup> 平均失敗誤差 (mean excess) 的運算可參考本文後面的研究方法。

假設下風險值模型與極值理論風險值模型在風險估計上的表現，都證實極值理論風險值模型的估計表現確實優於常態假設下的風險值模型，而後也有越來越多的研究開始對極值理論之下的風險值模型進行探討。

## 二、尾部指數估計法

應用極值理論來做為風險值估計方法有一個很大的優點，即不需對資產報酬真實分配型態配適任何假設，而是直接觀察極端值的情形來判斷真實風險狀況，Longin (1996)指出資產報酬真實分配的尾部形狀即反應在其尾部指數 (tail index) 估計值上，它決定了分配函數尾部消失的速度，若原本分配函數其尾部越厚，則消失速度越慢，尾部指數也越大，此外，尾部指數估計值的倒數又稱為形狀參數 (shape parameter)，他提到極值分配中Frechet型態的形狀參數亦反應原本分配存在有限動差的最高階次<sup>7</sup>，若形狀參數估計值越大代表原本分配存在越高階次的動差函數，例如當形狀參數估計值等於 2 即代表原本分配存在一階及二階動差，因此極值理論可在不需了解極值的正確分配下，藉由尾部型態的估計了解金融資產的極值分配，進而估計風險值。

在應用極值理論估計資產報酬分配尾部指數時，依據Longin (1996)的分類可分為母數估計法與無母數估計法，Jansen和de Vries (1991)、Koedijk, Stork和de Vries (1992)、Danielsson和de Vries (1997)指出，無母數估計法在估計尾部指數時，由於不需假設極值是來自於何種極限分配而較母數估計法在估計上顯得有效率，然而在無母數估計法的估計式中，Longin (1996)以及Kearns和Pagan (1997)皆證明Hill估計式為一個較好的尾部指數估計法，Longin (1996)將NYSE股價指數由 1885 至 1990 年近一世紀的日資料，藉由極端值分配來配適，並利用母數估計法中的最大概似估計法 (maximum likelihood method)、迴歸方法

<sup>7</sup> 極值分配可分成Gumbel、Frechet以及Weibull三種分配型態，本文研究方法中有詳細介紹。

(regression method)以及無母數估計法中的Hill估計式與Pickand估計式<sup>8</sup>估計極端值分配中的尾端係數，結果顯示Hill估計式為一較有效率的尾部指數估計方法，並發現極端報酬的近似分配為Frechet分配。

然而如同McNeil和Frey (2000)所提到的，利用Hill估計式來估計尾部指數時會面臨到兩個問題：(1) 小樣本下的Hill估計式容易產生偏誤以及(2) 最適尾部觀察數目決定不易。因此Huisman, Koedijk, Kool和Plam (2001)針對Hill估計式的兩個問題，提出一個修正Hill尾部指數的估計式，Hill修正式除了在小樣本下具有不偏性外，也不需在求算尾部指數時事先決定尾部觀察數目，並用分配模擬的方式證明修正Hill估計式對資產報酬服從Burr分配<sup>9</sup>、柯西 (Cauchy) 分配或是t分配 (student's t) 而言，仍可得到一無偏誤的尾部指數估計值，此外在其實證分析中，根據匯率資料的實證結果<sup>10</sup>，亦顯示修正Hill估計式在尾部指數估計上較Hill估計式準確。Huisman, Koedijk, Kool和Palm (1998)亦利用修正Hill估計式檢視前述之匯率資料其非條件分配 (unconditional distribution) 的情形，發現匯率報酬率資料有近似於t分配的情形。

### 三、VaR-x 風險值模型

另一方面，Huisman, Koedijk 和 Pownall (1998)指出大部分金融資產之報酬分配較常態分配具有厚尾的特性，而採用 t 分配來配適資產報酬分配可較常態分配更能夠捕捉高狹峰的分配型態，因此其假設資產報酬分配服從 t 分配，並將形狀參數，亦即反應原本分配存在的最高階次動差的概念與 t 分配結合，首先利用修正 Hill 估計式來估計尾部指數值，並依據尾部指數估計值與 t 分配自

<sup>8</sup> Hill估計式的計算公式可參考本文後面的研究方法，Pickand估計式則參照Pickand (1975)說明。

<sup>9</sup> Burr分配的累積分配函數為  $F(x) = 1 - (x^2 + 1)^{-2}$  且其形狀參數等於 4。

<sup>10</sup> Huisman, Koedijk, Kool和Plam (2001)利用美元對法國法郎、德國馬克、英國英鎊、瑞士法郎及日本日圓的匯率資料做實證。

由度大小反向的關係，求得原始報酬在  $t$  分配假設下之自由度估計值，進一步估計風險值，稱之為 VaR-x 風險值估計法，同時指出當運用 VaR-x 法來估計風險值時，除了可以免除需事先決定一最適尾部觀察數目之繁雜的程序之外，對於樣本數不足或是必須將資料切割成為小樣本時，亦提供一個良好的不偏估計的特性，此外，他們利用美國 S&P 500 與十年期政府公債的資料實證發現，使用 VaR-x 估計法在風險值估計準確性上的表現亦較常態法為佳。

#### 四、動態極值理論模型

Jorion (2000)提到，使用極值理論估計法來估計風險值時，雖然極值法可以捕捉資產報酬的厚尾型態，但由於極值理論假設報酬的發生過程為來自獨立且相同的分配型態 (independently and identically distributed; 簡稱 *i.i.d.*)，此假設與金融資產報酬數列普遍存在異質變異數的情況不符，由於極值理論估計法忽略了金融資產報酬數列之異質性問題，可能會得到不正確的風險估計值。此外，Goorbergh 和 Vlaar (1999)比較歷史模擬法、變異數—共變異數法及尾部指數等數種估計方法，以估計荷蘭股價指數與道瓊工業指數之風險值，而由於未能處理波動性叢聚現象，使得採用尾部指數估計方法的結果不佳。為了同時解決金融資產具厚尾與波動異質性問題，McNeil 和 Frey (2000)提出了時間數列模型結合極端值分配的概念，利用 GARCH 模型與極值理論的結合形成動態 (條件) 風險值估計模型，其方法為先利用 GARCH 模型來估計資產報酬的波動性，再以極值理論架構下的無母數 Hill 估計式估計 GARCH 模型殘差項的尾部型態，最後根據尾部極限分配計算殘差項百分位數 (percentile) 以求得動態 (條件) 風險值，McNeil 和 Frey (2000)的實證結果顯示此模型比忽略厚尾分配或是隨機波動的估計方法更好。Bystrom (2004)亦比較結合 GARCH 模型以及極值理論下一般化極值分配 (generalized extreme value distribution; GEV) 與一般化柏拉圖分配 (generalized Pareto distribution; GPD) 所形成的動態風險值估計模型，發

現 GARCH-GEV 與 GARCH-GPD 模型在風險值估計績效表現上皆較其他非條件及常態假設下模型佳；結合極值理論與 GARCH 模型所得到的動態（條件）風險值估計模型，一方面可以使風險估計模型動態化，事先預測下一期樣本外波動性情況，另一方面利用 GARCH 模型的樣本內波動性配適值來標準化原始報酬率資料，使其滿足極值理論風險值估計架構下的獨立同態分配（*i.i.d.*）假設。由於動態極值理論風險值模型結合了波動性模型與極值理論的優點，可用以捕捉極端下方風險的情況，故應為一較精確的風險值估計方法。

Pownall 和 Koedijk (1999)提出結合 EWMA 模型與 VaR-x 估計法的條件 VaR-x 風險值估計模型，並實證發現此動態（條件）VaR-x 模型在風險值估計的準確性上，較靜態（非條件）VaR-x 模型與 J. P. Morgan 所提出的 RiskMetrics 模型有很大的改進，尤其在亞洲金融風暴期間，此差異更加顯著。然而 Pownall 和 Koedijk (1999)所使用的估計模型並未採用 McNeil 和 Frey (2000)的建議，先將原始報酬資料標準化，而是直接使用原始資料來估計尾部指數，可能存在如上所述的估計偏誤問題，且其波動性預測模型亦為較不具彈性的 EWMA 模型，可能存在改進空間，因此本文在應用極值理論估算金融資產報酬風險時，將延續 Pownall 和 Koedijk (1999)所提出的風險值估計模型，進一步結合 McNeil 和 Frey (2000)的建議，利用 GARCH 模型對原始資料事先進行過濾（標準化）的動作，在波動性預測上亦採用較具彈性的 GARCH 模型配適，推導出 GARCH-VaR-x 風險估計模型，此作法可以簡化條件風險值的估計過程並提升估計的準確性。

#### 第四節 相關係數估計模型

如同第一節所述，在變異數—共變異數風險值估計方法中，影響風險值估計準確與否的一個主要因素為對於變異數—共變異數矩陣估計的準確性，第二

節的波動性模型討論中曾提及，當我們在估計單一資產報酬的風險值時，若想精確的估計其風險狀況，則必須能確實掌握此資產報酬市場波動的變化情形，我們也已經於第二節對於波動性的估計模型做了詳細的探討。本節主要針對風險值估計標的為一投資組合時，對於其資產報酬間共變異數估計方法的探討。較早的作法中，常認為資產報酬間的相關性並不會隨著時間的移動有顯著改變，因此往往假設資產報酬間相關係數為一常數，然而近年有許多研究文獻指出，金融資產報酬間的相關性並非固定的且是時間的函數，Bollerslev, Engle 和 Wooldridge (1988)利用美國國庫券、債券及股票報酬資料實證發現條件變異數—共變異數矩陣存在強烈的自我相關情形，並拒絕變異數—共變異數矩陣為常數的假設，自此有越來越多有關資產報酬間相關係數變化情形的研究，開始嘗試模型化資產報酬間相關係數或是共變異數的動態過程 (dynamic process)，試圖捕捉資產報酬間的真實互動情況，因而發展出各式各樣的多元變數 (multivariate) 波動模型，例如 Bollerslev, Engle 和 Wooldridge (1988) 提出 VECH 模型、Bollerslev (1990) 提出 CCC (Constant Conditional Correlation) 模型以及 Engle 和 Kroner (1995) 提出的 BEKK 模型等，然而到目前為止所發展的多元模型皆存在一些問題，有些是模型假設上的不甚合理，有些則是變數過多導致參數估計上並不容易等等。

在 Engle (2002)、Engle 和 Sheppard (2001) 以及 Cappiello, Engle 和 Sheppard (2003) 一系列文章中，提出可以使用 DCC 模型來估計資產報酬間的條件相關係數，此作法不僅解決了前面提到的諸多問題，在 Engle (2002) 的實證研究中也證明 DCC 模型不論是在股價、債券殖利率或是匯率資料上，相較於其他如 BEKK 模型、MA100 估計式、EWMA 模型以及 Orthogonal GARCH 模型等，皆有相當好而且穩定的估計表現，而在 Engle 和 Sheppard (2001) 裡，除了對於 DCC 模型設定上的統計特性進行更深入探討之外，亦採用 S&P 500 與道瓊工業指數的資料實證發現，DCC 模型確實能夠正確的掌握資產報酬間的相關性，Wong 和



Vlaar (2003)使用美國與德國的股價指數及公債資料進行研究，發現使用 DCC 模型所得到的概似函數值較 CCC 模型及 J. P. Morgan 的 RiskMetrics 模型大，在相關係數估計上具相對效率性，Yang (2005)以日本對亞洲四小龍的股市報酬相關性為研究標的，結果發現國際股票市場間相關性隨著時間劇烈變化，且各市場的波動情況似乎存在傳染效果，同時相關係數和波動性間亦存在著高度相關，此情形將會減低國際分散投資的效益。

Chou, Liu 和 Wu (2005)延伸原始 DCC 模型，提出以變幅為基礎下的 DCC 模型，有別於原始報酬基礎下的 DCC 模型，他們對於波動性的估計採用 CARR 模型來處理，與原始 DCC 模型之下配適 GARCH 模型為波動性估計模型的處理方法不同，並利用美國 S&P 500、NASDAQ 以及十年期財政部政府公債資料實證發現，變幅基礎下的 DCC 模型在共變異數的估計上，顯著優於報酬基礎下的 DCC 模型，推論以變幅基礎之下的 DCC 模型捕捉資產報酬間的共變異數情形，較報酬基礎下的 DCC 模型更準確。因此本文實證研究中亦擬進一步比較這兩種相關係數估計模型在投資組合風險值估計上的表現。

## 第參章、研究方法

本章將介紹本文所採用的研究方法，共分為四個部分，第一部分介紹極值理論的概念與尾部指數估計方法，介紹極值理論的主要概念 Block Maxima 模型與 Peak-Over-Threshold 模型，以及修正 Hill 估計式，修正 Hill 估計式為一種近期發展的無母數尾部指數估計方法；第二部分說明風險值估計方法，包括本研究納入評量的靜態與動態風險值模型；第三部分介紹投資組合風險值的估計方法；第四部分則說明回溯測試的設計。

### 第一節 極值理論

風險值估計模型的主要精神在於估計投資組合在最壞的狀況下，可能的最大損失金額，因此如何將報酬機率分配的尾端特性真實的呈現出來，才是風險值估計模型所應該考量之最重要的問題。許多金融資產報酬率的分配已被驗證存在較常態分配厚尾的現象，因此使用平均數與變異數將無法正確描繪出報酬分配的機率特性，而藉由觀察樣本值尾部分配厚尾的程度，將能夠捕捉預期極端事件發生的機率。極值理論便是在探討分配的尾部特性，由於極值理論不需對原始報酬做任何分配上的假設，特別著重於機率分配尾端的描述，有助於正確估計資產報酬分配厚尾的程度。此外，Longin (1996)指出極值理論中重要的參數估計值—尾部指數，亦即反應此一機率分配厚尾的程度，也是極值理論研究中一個相當重要的發現及良好的特性。以下前兩段分析將依序介紹極值理論目前為止較為探討的兩種概念 Block Maxima 模型與 POT 模型，第三段分析則介紹 Huisman, Koedijk, Kool 和 Plam (2001)所提出的修正 Hill 尾部指數估計式，其具有小樣本下不偏以及不需事先決定尾部觀察數目的優點，為一估計相當準確且簡便的尾部指數估計式，亦為本研究主要採用之尾部指數估計方法。

## 一、Block Maxima 模型

Block Maxima 模型主要探討時間資料隨機變數中，每段期間（如：每年或每月）極端值的分配。假設有一平穩的隨機數列  $X_1, X_2, \dots, X_n$ （例如：每日的股價報酬率或匯率報酬率），服從某一累積機率分配且彼此統計獨立，令  $f_X$  為隨機變數  $X$  之機率密度函數； $F_X$  為隨機變數  $X$  之累積機率密度函數，並定義此數列之最大值为  $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ，且  $F_{Y_n}$  為  $Y_n$  的累積機率分配，如下：

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \text{prob}(Y_n < x) \\ &= \text{prob}(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) \\ &= [F_X(x)]^n \end{aligned} \quad (1)$$

（因為  $X_1, X_2, \dots, X_n$  彼此獨立且服從同一累積機率分配）

由於極值分配  $F_{Y_n}$  的真正型態亦無從獲悉，因此極值理論著重於極大值與極小值的漸近分配（asymptotic distribution）型態的研究。依據 Fisher 和 Tippett 在 1928 年的研究，可知經過標準化的極大值統計量  $y = \frac{Y_n - \beta_n}{\alpha_n}$  會有弱收斂（weakly converge）的傾向，其中  $\alpha_n$  為規模參數（scale parameter）， $\alpha_n > 0$ ，相當於標準差； $\beta_n$  為位置參數（location parameter），相當於平均數，且其漸進分配趨近於一個非退化極限分配（non-degenerate limiting distribution） $H$ ，以數學式表現如下：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}\left(\frac{Y_n - \beta_n}{\alpha_n} \leq x\right) &= F_{Y_n}(\alpha_n x + \beta_n) \\ &= [F_X(\alpha_n x + \beta_n)]^n \rightarrow H(x), \quad x \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (2)$$

$H$  稱為極值分配（extreme value distribution），它必須是以下三種標準極值分配的其中一種，分別為 Gumbel 分配、Frechet 分配以及 Weibull 分配：

型一：Gumbel 分配

$$F_{Y_n}(y) = \exp(-e^{-y}) \quad y \in \mathfrak{R} \quad (3)$$

型二：Frechet 分配

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-y^\alpha) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}, \alpha > 0 \quad (4)$$

型三：Weibull 分配

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-(-y)^{-\alpha}) & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}, \alpha < 0 \quad (5)$$

其中， $\alpha$  稱為形狀參數，主要決定分配尾部消失的速度及有限動差的最大階數，故為決定尾部的分配型態中最重要的參數。然而極值分配若以前述三種型態表示，在統計應用上會造成不便，因此 Jenkinson 於 1955 年導出可涵蓋上述三種分配的一般化極值分配（generalized extreme value distribution；GEV）。令標準化極大值統計量之極限分配定義為：

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \gamma \cdot y)^{\frac{1}{\gamma}}\right] & \gamma \neq 0, 1 + \gamma \cdot y > 0 \\ \exp(-e^{-y}) & \gamma = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\gamma$  稱為尾部指數（tail index），為形狀參數  $\alpha$  的倒數， $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ 。依據 Longin (1996) 的歸納，當  $\gamma = 0$  時，表示 GEV 屬於第一類型 Gumbel 分配，例如常態分配、指數分配、Gamma 分配、Lognormal 分配等屬之，這類分配稱為中等尾部（medium-tailed）的分配，分配尾端消失是以指數（exponential）的形式遞減。當  $\gamma > 0$  時，表示 GEV 屬於第二類型 Frechet 分配，例如柏拉圖（Pareto）分配、t 分配、柯西分配、Burr 分配和 Loggamma 分配等屬之，此類分配為厚尾或長尾（long-tailed）分配，尾部以次冪（power）的形式衰退，故衰退的速度比常態分配慢。由於多數財務資料都屬於厚尾分配，因此在財務領域上這個分配特

別受到矚目與探討。當  $\gamma < 0$  時，表示 GEV 屬於第三類型 Weibull 分配，例如均勻 (uniform) 分配及 Beta 分配等都包含在內，此類分配屬於薄尾或短尾 (short-tailed) 分配，尾部衰退速度比前兩類更快。此外，第一與第三類型分配的動差皆存在，不過第二類型分配的動差卻是受形狀參數  $\alpha$  所影響， $\alpha$  的值代表有限動差存在的最大階數，也就是說階次大於  $\alpha$  的動差是不存在的，比較小的  $\alpha$  就代表分配是較厚尾的，因此當  $\alpha > 4$  時，分配的平均數、變異數、偏態與峰態係數才會存在。

### H 函數的極限分配

#### 一般化極值分配 (GEV)

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \gamma \cdot y)^{\frac{1}{\gamma}}\right] & \gamma \neq 0, 1 + \gamma \cdot y > 0 \\ \exp(-e^{-y}) & \gamma = 0 \end{cases}$$

$\gamma = 0$	$\gamma > 0$	$\gamma < 0$
型一	型二	型三
Gumbel	Frechet	Weibull
$F_{Y_n}(y) = \exp(-e^{-y}) \quad y \in \mathfrak{R}$	$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-y^\alpha) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$	$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-(-y)^{-\alpha}) & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$
	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
例：常態分配 指數分配 Gamma 分配 Lognormal 分配	例：柏拉圖分配 t 分配 柯西分配 Loggamma 分配	例：均勻分配 Beta 分配

## 二、Peak-Over-Threshold (POT) 模型

Peak-Over-Threshold 模型的核心，敘述樣本中超過某特定門檻值的尾部分配，可以用一般化柏拉圖分配 (generalized Pareto distribution; GPD) 來描述。GPD 分配是比 GEV 分配發展較晚的模型，主要觀念在考慮資料超過某一個門

檻值以上的情況，以期能夠了解這些極端值的狀況，進而避免在估算風險值時，遺漏了這些重要的訊息。

假設有一平穩的隨機數列  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，皆服從某一累積機率分配  $F_X$  且彼此統計獨立，我們有興趣的是  $X_i$  大於某一個高的門檻值  $u$  的分配情況，稱為餘額分配 (excess distribution)，可以得到餘額分配函數  $F_u$  如下：

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \text{prob}(X - u \leq y \mid X > u) \\ &= \frac{\text{prob}(X \leq u + y, X > u)}{\text{prob}(X > u)} \\ &= \frac{F_X(u + y) - F_X(u)}{1 - F_X(u)} \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $0 \leq y \leq X_F - u$  且  $X_F \leq \infty$ ， $X_F$  是  $F_X$  的最右極端點。這裡需特別強調的是，此函數只描述樣本中超過門檻值  $u$  的分配，而非整個樣本的行為。Balkema 和 de Haan (1974) 以及 Pickands (1975) 提出理論，指出連續分配函數  $F_X$  中，當選取的門檻值  $u$  逐漸增加，則餘額分配函數  $F_u$  會向 GPD 收斂，可以數學式表示：

$$\lim_{u \rightarrow X_F} \sup_{0 \leq y \leq X_F - u} |F_u(y) - G_{\alpha, \beta}(y)| = 0 \quad (8)$$

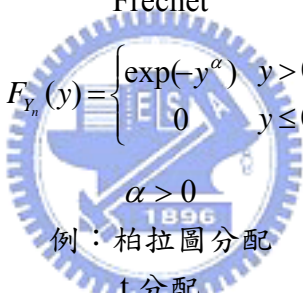
換句話說，即使面對一個不知名的連續分配，只要其門檻值  $u$  取得夠高，超過門檻值的餘額分配  $F_u$  就是 GPD，即當  $u \rightarrow X_F$  時， $F_u(y) \cong G_{\alpha, \beta}(y)$ ，其中 GPD 的分配， $G_{\alpha, \beta}(y)$ ，以兩個參數來表示：

$$G_{\alpha, \beta}(y) \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} y\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \alpha \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} & \alpha = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\beta > 0$  是規模參數，而  $\alpha$  是重要的形狀參數，用來描述尾部的衰退速度。當  $\alpha = 0$  時， $F_X$  的尾部會以指數的形式衰退，屬於中等尾部的分配，譬如說常態、指數、Gamma、Lognormal 等，都是這一類分配。當  $\alpha > 0$  時，原本的分配

$F_X$  尾部呈現次幂消失，屬於厚尾分配，如柏拉圖分配、Loggamma 分配、柯西分配、t 分配等，相似之前的 Frecht family；而許多財務資料，其參數為  $\alpha > 0$ ，是屬於這一類的分配。當  $\alpha < 0$  時， $F_X$  屬於短尾分配，例如均勻分配及 Beta 分配屬於此類。

$F_u$  函數的極限分配

一般化柏拉圖分配 (GPD)		
$G_{\alpha, \beta}(y) \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} y\right)^{-\frac{1}{\alpha}} & \alpha \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} & \alpha = 0 \end{cases}$		
$\gamma = 0$	$\gamma > 0$	$\gamma < 0$
型一	型二	型三
Gumbel	Frechet	Weibull
$F_{Y_n}(y) = \exp(-e^{-y}) \quad y \in \mathfrak{R}$	$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-y^\alpha) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$	$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} \exp(-(-y)^{-\alpha}) & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$
	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
例：常態分配 指數分配 Gamma 分配 Lognormal 分配	 例：柏拉圖分配 t 分配 柯西分配 Loggamma 分配	例：均勻分配 Beta 分配

三、尾部指數之估計

由前文敘述我們已經知道，應用極值理論來做為風險值估計方法不需對資產報酬真實分配型態做任何假設，而是直接藉由觀察極端值的情形來判斷真實風險狀況。而且資產報酬真實分配尾部厚薄的程度即反應在其尾部指數估計值  $\gamma$  上，因為尾部指數的大小反應其報酬分配機率密度函數尾端接近於零的速度，當分配尾部越厚時，其分配的機率密度函數尾部接近零的速度就越慢，所求得的尾部指數值也就越大；反之，當分配尾部越薄時，其分配的機率密度函

數尾部接近零的速度就越快，所求得的尾部指數值也就越小。由此可知，欲清楚了解資產報酬分配尾部的型態，必須準確估計出尾部指數估計值的大小。

最常被應用以估計尾部指數之估計式為 Hill 於 1975 年所提出之 Hill 估計式，此估計式具有易於求算且漸近不偏的特性。假設從一未知的厚尾分配中抽取一組  $n$  個正值且彼此獨立之樣本，令  $X(i)$  為第  $i$  個順序統計量 (order statistics) 並且  $X(i) \geq X(i-1)$ ， $i = 2, \dots, n$ 。假設從分配之右尾選擇  $k$  個觀察值以估計尾部指數，則 Hill 尾部指數估計式可表示如下：

$$\gamma(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(X(n-j+1)) - \ln(X(n-k)) \quad (10)$$

其中， $n$  為資料總數目， $k$  為尾部資料總數目，根據 Huisman, Koedijk, Kool 和 Plam (2001) 指出， $\gamma(k)$  為條件柏拉圖分配之最大概似估計式，且 Hill 估計式之困難處在於最適尾部觀察數目  $k$  的決定。由於  $k$  的選定對於尾部指數之估計不偏性極為重要，Dacorogna, Muller, Pictet 和 de Vries (1995) 提出 Hill 尾部指數估計偏誤值 (bias) 之漸近分配函數為：

$$F(x) = 1 - ax^{-\alpha}(1 + bx^{-\beta}) \quad (11)$$

其中  $\alpha, \beta > 0$  且  $a$  與  $b$  皆為實數。Hall (1990) 證明在  $k$  給定下，Hill 尾部指數估計值之漸近期望值與變異數各為：

$$E(\gamma(k)) \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{b\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} a^{-\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (12)$$

$$\text{Var}(\gamma(k)) \approx \frac{1}{k\alpha^2} \quad (13)$$

由(12)與(13)式可知，若從點估計之不偏性觀點分析，則  $k$  值越小越好；相反的若從點估計之有效性觀點分析，則  $k$  值越大越好。以上的說明顯示 Hill 尾部指數估計值隨  $k$  值的改變存在偏誤與有效性的抵換關係，同時，由(12)式可發現當  $k > 0$  時，Hill 尾部指數估計值均存在偏誤的現象。Dacorogna, Muller, Pictet 和 de Vries (1995) 利用模擬方式指出尾部指數估計值並不受  $\beta$  之選擇的影響，所



以即使  $\beta$  的假設值產生偏誤並不會對  $\alpha$  估計值造成很大的影響。

根據上述分析，Huisman, Koedijk, Kool 和 Plam (2001) 提出修正式解決 Hill 估計式的  $k$  值選擇問題，作法為在(12)式中加入  $\alpha = \beta$  限制式，使得漸近偏誤與  $k$  存在一線性關係，則(10)式可進一步轉換如下：

$$\gamma(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \varepsilon(k), \quad k = 1, \dots, \kappa \quad (14)$$

其中， $\beta_0$  與  $\beta_1$  為迴歸參數， $\varepsilon(k)$  為迴歸殘差項。根據(14)式，當  $k$  值接近於 0 時，可以得到一個具不偏性的尾部指數估計值，所以(14)式不需選擇最適尾部觀察數目來估計尾部指數，而是透過輸入不同的  $k$  值產生不同的尾部指數估計值  $\gamma$  的過程，來解決偏誤與有效性的抵換關係，進而得到一個小樣本下具有不偏性的尾部指數估計值  $\beta_0$ ，因此(14)式可以普通最小平方法（ordinary least squares；OLS）進行估計，所得到的截距項參數估計值  $\hat{\beta}_0$  即為小樣本下的尾部指數不偏估計值。Huisman, Koedijk, Kool 和 Plam (2001) 透過模擬過程發現，尾部觀察值個數  $\kappa$  的選擇並不影響修正後 Hill 尾部指數的估計，建議採用  $\kappa = n/2$  即可以獲得準確的估計結果。

相較於僅使用單一的 Hill 估計值，修正 Hill 估計值乃使用許多（在不同的  $k$  下）傳統 Hill 估計值計算而得的加權平均值，以推估尾部的型態。因此修正 Hill 估計值可視為一組傳統 Hill 估計值的加權平均，權重乃是使用普通最小平方法所求得。<sup>11</sup>

## 第二節 風險值估計方法

---

<sup>11</sup> Huisman, Koedijk, Kool 和 Plam (2001) 曾提到，由於  $\varepsilon(k)$  存在異質變異問題，故建議使用加權最小平方法（weighted least squares；WLS）來估計(14)式中的迴歸參數，因此本研究在迴歸參數估計上亦採用 WLS 法來估計，避開  $\varepsilon(k)$  的異質變異問題。

雖然風險值的觀念簡單易懂，估計方法卻有不同的方式。一般而言，風險值的衡量方法可區分為參數法 (parametric method) 與無母數法 (non-parametric method) 兩類，較常見的歷史模擬法屬於無母數法，而變異數—共變異數法與蒙地卡羅模擬法則屬於參數法，另外還有一種由極值分配統計理論發展出來的極值理論風險值評估法，可在不需了解金融資產報酬的正確分配下，藉由尾部型態的估計而了解金融資產的尾部分配進而估計風險值，亦為目前廣泛運用於研究金融資產極端情形的重要方法。

假設  $P_t$  為資產在時間  $t$  時之價格，在連續複利假設下，資產在時間  $t$  時的預期報酬率 (以百分比表示) 為  $X_t = 100 \times \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ ，則給定投資期間及原始投資金額  $V_0$  後，投資組合的預期價值  $V_t$  為：

$$V_t = V_0(1 + X_t) \quad (15)$$

由於目的僅在探求某一特定信心水準 ( $100(c)\%$ ) 下，投資組合在  $t+1$  時之最低價值 ( $V_{t+1}^*$ )，因此只需找出會造成投資組合價值為  $V_{t+1}^*$  的預期報酬率  $X_{t+1}^*$ ：

$$V_{t+1}^* = V_0(1 + X_{t+1}^*) \quad (16)$$

假定投資組合平均報酬率為  $\mu$ ，則投資組合相對風險值為：

$$VaR = V_0(1 + \mu) - V_0(1 + X_{t+1}^*) \quad (17)$$

經簡化可得：

$$VaR = -V_0(X_{t+1}^* - \mu) \quad (18)$$

由(18)式可知，若欲獲得準確的風險估計值，對於  $X_{t+1}^*$  的估計相當重要。

在信心水準  $100(c)\%$  下，在時間  $t$  預測時間  $t+1$  之資產報酬率  $X_{t+1}^*$  可以表示為：

$$\text{prob}(X_{t+1} \leq X_{t+1}^* | I_t) = 1 - c \quad (19)$$

上式中  $I_t$  表示在  $t$  時的資訊集合，若在時間  $t$  時，預測資產報酬在  $t+1$  時的累積機率分配，並以  $F(\bullet)$  表示，則可以寫成：

$$F(X_{t+1}^*) = 1 - c \quad (20)$$

因此， $X_{t+1}^*$  亦可由累積機率分配  $F(\bullet)$  之反函數表示，即：

$$X_{t+1}^* = F^{-1}(1 - c) \quad (21)$$

將(21)式所得  $X_{t+1}^*$  估計值代入(18)式，即可得到風險估計值，故風險值的各種估計方法，可視為對報酬的累積機率分配函數與反函數的估算。然而資產報酬機率分配往往是未知的，因此有許多風險值估算方法皆建立在預期報酬機率分配的假設上。以下將循序介紹本文實證研究中所討論之風險值估計方法，並依模型之靜態及動態特性分開解釋。



#### 一、靜態（非條件）風險值模型（unconditional Value-at-Risk model）

靜態風險值模型主要假設資產報酬來自於相同的機率分配— $F(\bullet)$ ，且機率分配並不隨著時間而改變。由此可知，靜態風險值模型主要的缺點是未能將隨時間變動的波動性變數納入考慮，因此無法反應市場新舊資訊的不同。本研究所採用的靜態風險值模型包括歷史模擬法、靜態（非條件）變異數—共變異數法、以及極值理論架構下的 VaR-x 法，其估計方法分述如下。

##### （一）歷史模擬法（Historical Simulation method；HS）

歷史模擬法主要藉由投資組合價值變動的歷史資料建構實際的報酬分配，藉以真實反應投資組合過去的風險狀況，此外並假設預期報酬之機率分配  $F(\bullet)$

等於其歷史報酬分配的型態，認為過去價格變化的趨勢會一再地重複，因此歷史模擬法不需針對金融資產的分配預做任何假設，也不需估計任何的參數，故視為無母數系統的風險值估計方法之一。至於投資組合風險估計值的求算可將過去歷史報酬由小到大排序，獲得投資組合之歷史報酬分配，再配合所欲觀測的信心水準（ $100(c)\%$ ），找出在  $t+1$  期時相對應的分位數（quantile）即  $X_{t+1}^*$ ，代入(18)式即可求得相對於平均報酬之風險估計值。例如有 500 筆投資組合歷史報酬，在 99% 的信心水準下，預期會有 5 筆觀察值超過  $X_{t+1}^*$ ，則  $X_{t+1}^*$  估計值將會落在依損失大小排序後的第 6 筆觀察值上。

由於歷史模擬法的概念易懂、計算簡便且可避免模型設定的風險，故在許多文獻上皆廣為應用，然而在使用歷史模擬法估測風險值時，必須考量資料觀察值的樣本數目是否足夠用以模擬未來可能的價格變化，並涵蓋可能發生的極端事件，以及投資組合風險因子之間的報酬分配是否為獨立且相同分配，這些皆是能否準確估計風險的重要因素。

## （二）靜態（非條件）變異數—共變異數法（unconditional variance-covariance method）

除了使用歷史報酬分配來推估  $X_{t+1}^*$  之外，另一種作法為事先假設  $F(\bullet)$  為某特定統計分配，並利用此統計分配可被特定參數描述的特性來求算  $X_{t+1}^*$ 。J. P. Morgan 於 1994 年首先在 RiskMetrics 提出以變異數—共變異數法來計算風險值，常態分配的假設是此作法使用的重要假設之一，即假設市場報酬率為聯合常態分配，另一個假設為獨立性，即假設個別觀察值之間彼此獨立，讓這個模型較容易推算，最後就是假設市場變數變動與資產價格變動呈線性關係。在估

計風險值方面，假設投資組合報酬率平均數為  $\mu$ ，變異數為  $\sigma^2$ ，所需要做的是算出實際資料的平均數與變異數估計值  $\hat{\mu}$  與  $\hat{\sigma}^2$ ，再配合給定信心水準下之標準常態分配臨界值  $N^*$ ，得到：

$$X_{t+1}^* = -N^* \hat{\sigma} + \hat{\mu} \quad (22)$$

再將  $X_{t+1}^*$  代入(18)式，即可得到相對風險估計值  $V_0 N^* \hat{\sigma}$ 。本文實證研究中皆假設  $V_0 = 1$ ，並不失一般性。

由於此處在求算  $\hat{\mu}$  與  $\hat{\sigma}^2$  時，是假設機率分配不會隨著時間而改變的靜態模型，故不需對  $\hat{\mu}$  與  $\hat{\sigma}^2$  做預測，並假設其等於歷史估計值，即  $\hat{\mu} = \bar{X}$  與  $\hat{\sigma}^2 = s^2$ ，再加上報酬分配為常態的假設後，(22)式可改寫為：

$$X_{t+1}^* = -N^* s + \bar{X} \quad (23)$$

因此在本研究中將這種估計方法命名為 Delta-Normal 法，即為一般傳統常態分配估計法。



### (三) 靜態（非條件）VaR-x 估計法（unconditional VaR-x method）

在 Delta-Normal 法中，對於  $N^*$  的估計是假設報酬分配為常態下的估計值，然而 Huisman, Koedijk 和 Pownall (1998) 所提出的 VaR-x 風險值估計法則是假設資產報酬分配服從 t 分配，因此在估計  $N^*$  之前，必須先決定 t 分配的自由度 ( $\nu$ ) 大小。他們指出 t 分配中決定分配尾部厚薄的因素在於自由度的多寡，而自由度的大小亦反應 t 分配動差存在的數目，表示在 t 分配下形狀參數即等於自由度，因此可藉由極值理論中可描述胖尾型態之 Frechet 分配函數中的尾部指數的估計，來決定 t 分配自由度的大小。VaR-x 風險值估計法主要先利用(14)式之修正 Hill 估計式估計尾部指數，再依據尾部指數與自由度之倒數關係 ( $\gamma = 1/\nu$ ) 求得 t 分配之自由度與 t 分配的尾部機率分配，進而計算出風險值。以下詳細

說明 VaR-x 法估計風險值的步驟：

1. 先利用(14)式之修正 Hill 估計式求出歷史報酬分配左尾的尾部指數估計值

$$\hat{\beta}_0。$$

2. 求算樣本期間內歷史報酬分配之平均數估計值  $\hat{\mu} = \bar{X}$  與標準差估計值  $\hat{\sigma} = s$ 。

3. 設定 t 分配的自由度數目等於尾部指數估計值  $\hat{\beta}_0$  的倒數。  $\hat{\nu} = \frac{1}{\hat{\beta}_0}$ ，其中  $\hat{\nu}$  為 t 分配自由度估計值。

4. 找出自由度為  $\hat{\nu}$  之標準化 t 分配，在信心水準為  $100(c)\%$  之下的臨界值  $S^*$ 。

由於  $S^* \sim t(0, \frac{\hat{\nu}}{\hat{\nu}-2})$ ，故在將  $S^*$  轉換成實際報酬率的臨界值  $X_{t+1}^*$  時，須採用轉換因子  $\Phi = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\nu}/\hat{\nu}-2}}$ ，得到  $X_{t+1}^* = -S^* \Phi + \hat{\mu}$ 。

5. 將上述  $X_{t+1}^*$  代入(18)式中，即可求得在  $100(c)\%$  信心水準下報酬率的相對風險值估計值為  $VaR - x = V_0 S^* \Phi$ 。



如 Jorion (2000)所述，若極值理論估計法忽略了金融資產報酬率數列之異質性問題時，可能會得到不正確的風險估計值，為解決此問題，本研究在使用修正 Hill 估計式估計尾部指數時，將納入 McNeil 和 Frey (2000)所提出來的觀念，先利用波動性模型配適資產報酬的產生過程以解決資產報酬波動性異質變異的問題，並獲得符合 *i.i.d.* 型態之標準化殘差數列，以進行尾部指數的估計。以下說明如何產生符合 *i.i.d.* 型態之標準化殘差數列，假設資產報酬率  $X_t$  的動態模型為：

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \tag{24}$$

其中， $X_t$  為第  $t$  日的資產報酬率，條件期望值  $\mu_t = E(X_t | I_{t-1})$ ，條件變異數

$\sigma_t^2 = Var(X_t | I_{t-1})$ ， $Z_t$  表第  $t$  日的標準化殘差，為一個平均數等於 0、變異數等

於 1 且獨立同分配的白噪音過程 (white noise process)。本研究在條件期望值  $\mu_t$  的估計上將利用自我迴歸移動平均 (autoregressive moving average; ARMA) 模型來描述資產報酬率的一階自我相關行程，稱為 ARMA( $m, n$ ) 模型；然而在條件波動性  $\sigma_t$  的估計上則設定兩種形式之估計模型做探討並比較其表現優劣，分別為報酬基礎下之 GARCH( $p, q$ ) 模型，以及變幅基礎下之 CARR( $p, q$ ) 模型。因此結合條件均數方程式 (mean equation) 與條件波動性方程式 (volatility equation) 後可形成 ARMA( $m, n$ )—GARCH( $p, q$ ) 模型以及 ARMA( $m, n$ )—CARR( $p, q$ ) 模型，模型設定如下所示。

ARMA( $m, n$ )—GARCH( $p, q$ ) 模型：

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^m \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^n \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_t^2) \quad (25)$$

$$\sigma_t^2 = \omega^G + \sum_{i=1}^p \alpha_i^G \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^G \sigma_{t-j}^2 \quad (26)$$

其中， $\varepsilon_t = X_t - E(X_t | I_{t-1})$ ， $\mu$ 、 $\phi_i$ 、 $\theta_j$ 、 $\omega^G$ 、 $\alpha_i^G$  和  $\beta_j^G$  為待估計參數，參數限制為  $\omega^G > 0$ 、 $\alpha_i^G \geq 0$ 、 $\beta_j^G \geq 0$  及  $\sum_{i=1}^p \alpha_i^G + \sum_{j=1}^q \beta_j^G < 1$ ， $i=1, \dots, p$  且  $j=1, \dots, q$ ，

由於 GARCH 模型的應用在許多文獻上已廣為探討，在此僅簡述其模型設定過程。在模型參數估計完成後，即可根據(25)式與(26)式求得報酬率的條件期望值數列 ( $\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t$ ) 與標準差數列 ( $\hat{\sigma}_{t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_t$ )，並將其代入(27)式求得符合

獨立同分配的標準化殘差數列 ( $z_{t-n+1}^G, \dots, z_t^G$ )：

$$(z_{t-n+1}^G, \dots, z_t^G) = \left( \frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \quad (27)$$

ARMA( $m, n$ )—CARR( $p, q$ ) 模型：

此模型對於條件期望值  $\mu_t$  的估計與 ARMA( $m, n$ )—GARCH( $p, q$ ) 模型相同，皆為(25)式：

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^m \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^n \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

在波動性的估計上則利用變幅為代理變數做估計，故條件波動性方程式為：

$$\mathfrak{R}_t = \lambda_t u_t \quad u_t | I_{t-1} \sim f(1, \xi_t) \quad (28)$$

$$\lambda_t = \omega^C + \sum_{i=1}^p \alpha_i^C \mathfrak{R}_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j^C \lambda_{t-j} \quad (29)$$

其中， $\mathfrak{R}_t$  表示資產價格  $P_t$  取自然對數後之變幅，即  $\mathfrak{R}_t = \ln(P_t^{high}) - \ln(P_t^{low})$ ； $\lambda_t$  表示在  $t-1$  期之前的資訊集合  $I_{t-1}$  已知的條件下，對第  $t$  期變幅  $\mathfrak{R}_t$  預測的條件期望值，亦即  $\lambda_t \equiv E(\mathfrak{R}_t | I_{t-1})$ ， $\lambda_t \geq 0$ ； $u_t$  為來自相同分配函數的干擾因子，且不同期間的干擾因子彼此獨立，其平均數與變異數皆為 1； $\omega^C$  表示變幅行程之內在不確定性，也可以代表對數化變幅的起始水準，且  $\omega^C > 0$ ； $\alpha_i^C$  是變幅落後

期項的係數，可代表變幅對變幅條件期望值之短期影響，且  $\alpha_i^C \geq 0$ ， $i=1, \dots, p$ ；

$\beta_j^C$  是變幅條件均數落後期項的係數，可用以協助說明長期的影響效果，且

$\beta_j^C \geq 0$ ， $j=1, \dots, q$ 。另外， $\sum_{i=1}^p \alpha_i^C + \sum_{j=1}^q \beta_j^C$  在刻畫條件變幅變動的持續性效果

上隱含重要的經濟意義，就長期變幅條件期望值的穩定條件來說，

$\sum_{i=1}^p \alpha_i^C + \sum_{j=1}^q \beta_j^C < 1$  方能滿足 CARR 模型收斂的條件，且其值越大代表波動持續性

越強。然而在參數估計上，則可採用準最大概似估計法（Quasi-Maximum Likelihood Estimation method；QMLE）來進行模型係數的估計，若假設  $\varepsilon_t$  的分配函數滿足以 1 為均數的指數分配<sup>12</sup>，則 CARR 模型的對數概似函數（log likelihood function）可表示如下<sup>13</sup>：

$$L(\omega^C, \alpha_i^C, \beta_j^C; \mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_T) = - \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\lambda_t) + \frac{\mathfrak{R}_t}{\lambda_t} \right] \quad (30)$$

<sup>12</sup> 由變幅的敘述統計量分析可知，假設  $u_t$  分配函數為指數分配雖然較強，不過在模型的配適方面，若與 Gamma 分配比較，兩者並無顯著差異，本研究在此問題的處理上仍承續 Chou (2005) 的論述。

<sup>13</sup> Engle 和 Russell (1998) 導出，此種分配之設定可得到具有一致性之參數估計。



在模型參數估計完成後，即可根據(25)式與(29)式求得報酬率的條件期望值數列  $(\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t)$  與條件變幅數列  $(\hat{\lambda}_{t-n+1}, \dots, \hat{\lambda}_t)$ ，並利用變幅可當做波動性代理變數的概念，將其代入(31)式以求得符合獨立同分配的標準化殘差數列  $(z_{t-n+1}^C, \dots, z_t^C)$ <sup>14</sup>：

$$(z_{t-n+1}^C, \dots, z_t^C) = \left( \frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\lambda}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\lambda}_t} \right) \quad (31)$$

在本研究中，為了比較 ARMA( $m, n$ )—GARCH( $p, q$ )模型與 ARMA( $m, n$ )—CARR( $p, q$ )模型做為資產報酬標準化模型的表現優劣，將比較兩種形式的 VaR-x 風險值估計法，分別為以 ARMA( $m, n$ )—GARCH( $p, q$ )模型做為標準化模型的 VaR-x (GARCH 過濾後) 估計法，以及以 ARMA( $m, n$ )—CARR( $p, q$ )模型做為標準化模型的 VaR-x (CARR 過濾後) 估計法。其風險值估計步驟大致與前面所列相同，差別僅在步驟一中估計尾部指數值時，VaR-x (GARCH 過濾後) 估計法利用  $(z_{t-n+1}^G, \dots, z_t^G)$  數列來估計，而 VaR-x (CARR 過濾後) 估計法則利用  $(z_{t-n+1}^C, \dots, z_t^C)$  數列來估計。

## 二、動態 (條件) 風險值模型 (conditional Value-at-Risk model)

動態風險值模型與靜態風險值模型的差異主要在於對  $\sigma$  的估計方式不同，靜態模型假設資產報酬的機率分配  $F(\bullet)$  為固定的，故設定過去的歷史標準差等同於未來的波動性估計值；動態模型則是假設資產報酬的機率分配  $F(\bullet)$  會隨著

<sup>14</sup> 實證上必須注意的是，由於CARR模型對於波動性的估計為利用樣本資料的一階動差來解釋報酬波動的變異情形，因此必須在維度上稍做調整，調整後條件變幅為  $\lambda_t^* = adj \times \lambda_t$ ，其中  $adj = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\lambda}}$ ， $\bar{\sigma}$  為報酬數列的非條件標準差， $\bar{\lambda}$  為條件變幅估計值的樣本平均值，並利用此調整後條件變幅數列  $(\hat{\lambda}_{t-n+1}^*, \dots, \hat{\lambda}_t^*)$  當做條件波動性的代理變數。

時間而改變，考慮報酬存在異質性變異的情況，故必須先利用過去的歷史資料對未來的波動性做預測，以求能夠準確的估計出未來的波動性行程，並進一步獲得準確的風險估計值，本研究所採用的動態風險值模型包括考慮條件波動下的動態（條件）變異數—共變異數法以及動態（條件）VaR-x 法，其估計方法如下所示。

#### （一）動態（條件）變異數—共變異數法（conditional variance-covariance method）

在前面的靜態（非條件）變異數—共變異數法中，已經知道決定其風險值大小的主要因素在於對(22)式  $X_{t+1}^* = -N^* \sigma + \mu$  的估計，然而不論是考慮條件波動下的動態（條件）變異數—共變異數法或者是靜態（非條件）變異數—共變異數法，皆假設資產報酬分配為常態分配，也就是說這兩種方法在估計(22)式中的  $N^*$  時是相同的，然而兩者在風險值估計上的差異主要在於(22)式中對  $\hat{\sigma}$  的估計上，在動態（條件）變異數—共變異數法下，認為波動性為時間的函數，可表示為  $\sigma_t$ ，因此在 t 期估計 t+1 期風險值時，必須先對 t+1 期之波動性  $\sigma_{t+1}$  做預測，故(22)式可改寫成：

$$X_{t+1}^* = -N^* \hat{\sigma}_{t+1} + \hat{\mu}_{t+1} \quad (32)$$

文獻上有許多不同的波動性估計模型可用來估計  $\sigma_{t+1}$ ，依據波動性估計模型的不同又可區分出不同的風險值估計模型，本研究採用三種不同的波動性估計模型來估計  $\sigma_{t+1}$ ，分別為 EWMA 模型法、GARCH 模型法、與 CARR 模型法，而其衍生出的風險值估計模型分別為 EWMA 估計法、GARCH-Normal 估計法、與 CARR-Normal 估計法，詳述如下：

##### 1、EWMA 估計法

EWMA 模型為 J. P. Morgan 提出以修正非條件波動模型的風險值估計法，此估計模型延續資產報酬分配為常態的假設，特點在於利用 EWMA 模型估計資產報酬下期的條件波動性  $\sigma_{t+1}$ ，再配合給定信心水準下之標準常態分配臨界值  $N^*$ ，代入(32)式即可求得 EWMA 風險估計值。

EWMA 模型其實為 GARCH(1, 1)模型之波動性方程式的一個特例，其假設 GARCH(1, 1)模型中波動性方程式的變數  $\alpha_1 = \lambda$  及  $\beta_1 = 1 - \lambda$ ，因此  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  又稱 I GARCH(1, 1)模型，模型設定如下：

$$\sigma_t^2 = \lambda \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \sigma_{t-1}^2 \quad (33)$$

其中  $\lambda$  稱為遞減因子或衰退因子，其主要顯示下期波動性估計值對於過去歷史資料中最近期資料的反應情形，RiskMetrics 依照日資料及月資料的不同，建議將  $\lambda$  分別設定為 0.94 與 0.97，本研究主要探討一日風險值的估計故採  $\lambda = 0.94$ 。由於僅使用一個估計參數  $\lambda$ ，EWMA 模型具有較容易估算且估計誤差較少的優點，但相反的在模型設定上亦較不具彈性。

## 2、GARCH-Normal 估計法

GARCH-Normal 估計法與 EWMA 估計法不同主要在於條件波動性  $\sigma_t$  的估計方式不同。GARCH-Normal 估計法利用文獻上常見的 GARCH 模型，預測下一期的條件波動性  $\sigma_{t+1}$ ，即估計(32)式中的  $\hat{\sigma}_{t+1}$ ，因此在模型設定上較 EWMA 模型更具彈性，除此之外其餘假設皆相同。

## 3、CARR-Normal 估計法

同樣在常態假設下，CARR-Normal 估計法在風險值的估計上利用 CARR 模型估計(32)式中的  $\hat{\sigma}_{t+1}$ ，試圖以變幅行程來捕捉條件波動性的動態結構，以探討變幅基礎下的波動性模型在對於未來波動性的捕捉能力上，是否優於報酬基礎下的波動性模型。

## (二) 動態 (條件) VaR-x 估計法 (conditional VaR-x method)

本研究所採用之動態 (條件) VaR-x 估計法有兩種，分別為 GARCH-VaR-x 估計法以及 CARR-VaR-x 估計法。GARCH-VaR-x 估計法主要修正 VaR-x (GARCH 過濾後) 估計法中對於波動性的估計問題，其作法與 VaR-x (GARCH 過濾後) 估計法不同主要在於步驟二中對於  $\hat{\sigma}$  的估計，GARCH-VaR-x 估計法利用 GARCH 模型預測下一期的條件波動性  $\hat{\sigma}_{t+1}$ ，而 VaR-x (GARCH 過濾後) 估計法則是設定下一期的條件波動性估計值即為歷史報酬標準差  $s$ ，作法如(32)式；同樣的道理，CARR-VaR-x 估計法與 VaR-x (CARR 過濾後) 估計法的主要差異亦只在步驟二中對於  $\hat{\sigma}$  的估計上，CARR-VaR-x 估計法利用 CARR 模型預測下一期的條件波動性  $\hat{\sigma}_{t+1}$ ，而 VaR-x (CARR 過濾後) 估計法則是假定歷史報酬標準差  $s$  為下一期的條件波動性估計值，作法如(23)式。

### 第三節 投資組合風險值估計方法

本文進一步嘗試探討當投資部位為多因子時可能的情況，因此考慮估計標的為一組投資組合的一日風險值<sup>15</sup>。本研究以最常見的投資組合同態為例，假設欲估計之投資組合報酬包含股價指數報酬 ( $x_1$ ) 與公債報酬 ( $x_2$ ) 兩種型態的資產報酬成分，若其投資權重分別為  $w_1$  與  $w_2$ ，且  $w_1 + w_2 = 1$ ，則投資組合之

<sup>15</sup> 一般作法將一日風險估計值乘以  $\sqrt{N}$ ，即可得到N日風險估計值。

平均報酬為  $\mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$ ，其中  $\mu_1$  為股價指數報酬  $x_1$  之平均報酬率， $\mu_2$  為公債報酬  $x_2$  之平均報酬率；投資組合報酬變異數為  $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ ，其中  $\sigma_1$  為股價指數報酬  $x_1$  之報酬標準差， $\sigma_2$  為公債報酬  $x_2$  之報酬標準差， $\rho_{12}$  為兩資產報酬間相關係數；由風險值的估計公式可以知道相對風險估計值為  $VaR = V_0\alpha_c\hat{\sigma}$ ，其中  $\alpha_c$  為報酬分配在既定信心水準 100(c)% 下之臨界值， $V_0$  如前所述在本研究中皆假設為 1，由此可推估投資組合之相對風險估計值為：

$$\begin{aligned} VaR_p &= V_p\alpha_c\hat{\sigma}_p = \sqrt{V_p^2\alpha_c^2\hat{\sigma}_p^2} \\ &= \sqrt{w_1^2V_1^2\alpha_c^2\hat{\sigma}_1^2 + w_2^2V_2^2\alpha_c^2\hat{\sigma}_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}(V_1\alpha_c\hat{\sigma}_1)(V_2\alpha_c\hat{\sigma}_2)} \quad (34) \\ &= \sqrt{w_1^2VaR_1^2 + w_2^2VaR_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}VaR_1VaR_2} \end{aligned}$$

其中  $VaR_1$  為股價指數報酬  $x_1$  之單一風險估計值， $VaR_2$  為公債報酬  $x_2$  之單一風險估計值。若投資標的包括  $q$  項資產組合，則(34)式可以一般式表示為<sup>16</sup>：

$$VaR_p = V_p\alpha_c\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \rho_{ij}w_iw_jVaR_iVaR_j}$$

由(34)式可知，在求算投資組合報酬風險值時，除了必須先估計單一資產的報酬風險值以及決定個別資產投資比率之外，還有一個很重要的因子必須事先決定，即資產報酬間的相關係數值  $\rho_{12}$ 。在投資組合的風險值估計上，即使採用相同的單一資產風險值估計模型，但卻搭配不同的相關係數估計值時，亦會產生不同的投資組合風險估計值。過去文獻上有許多相關係數估計模型被提出及討論，本研究將針對較為常見的幾種相關係數估計模型做探討，比較其應用在投資組合風險值估計上的表現優劣。以下依序介紹本研究所採用之相關係數估計模型。

<sup>16</sup> 參考Longin (2000)。

## 一、Moving Average 100 (MA100) 模型

MA100 模型採用過去 100 天的歷史資料，以相等權重的方式計算下一期的共變異數以及相關係數估計值，其共變異數與相關係數估計模型可設定如下：

$$COV_{12,t} = \frac{1}{100} \sum_{s=t-100}^{t-1} (x_{1,s} - \mu_1)(x_{2,s} - \mu_2) \quad (35)$$

$$\hat{\rho}_t = \frac{\sum_{s=t-100}^{t-1} (x_{1,s} - \mu_1)(x_{2,s} - \mu_2)}{\sqrt{\left( \sum_{s=t-100}^{t-1} (x_{1,s} - \mu_1)^2 \right) \left( \sum_{s=t-100}^{t-1} (x_{2,s} - \mu_2)^2 \right)}} \quad (36)$$

其中， $x_1$  為股價指數報酬率， $x_2$  為公債報酬率。此模型的優點在於計算方便，然而卻存在兩個問題：(1) 採用過去 100 筆歷史資料來推估下一期相關係數情形或許並非最好的觀測期間，因此究竟應採用過去多少筆歷史資料來估計？此問題值得商榷。(2) 給予過去 100 筆歷史資料相同的影響權重似乎亦不太合乎直覺思考邏輯，因為一般認為近期的資訊應該會有較大的影響可能，故應給予不同的估計權重，根據這個問題，RiskMetrics 的 EWMA 估計模型即對此提出解決辦法，將在下一段分析中討論。

## 二、Exponential Weighted Moving Average (EWMA) 模型

為了解決前面提到的第二個問題，RiskMetrics 的 EWMA 估計模型給予過去資料不同權重，且此權重隨著時間越久遠呈指數遞減的速度進行，因此較近期的資訊對於下一期估計值的影響程度較遠期資訊來的大，EWMA 估計模型在共變異數以及相關係數的估計上如下所示：

$$COV_{12,t} = (1 - \lambda) \sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (x_{1,s} - \mu_1)(x_{2,s} - \mu_2) \quad (37)$$

$$\hat{\rho}_t = \frac{\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (x_{1,s} - \mu_1)(x_{2,s} - \mu_2)}{\sqrt{\left( \sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (x_{1,s} - \mu_1)^2 \right) \left( \sum_{s=1}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (x_{2,s} - \mu_2)^2 \right)}} \quad (38)$$

其中遞減因子  $\lambda$  之設定如前所述設定  $\lambda = 0.94$ ，即在探討一日投資組合風險值估計情形。

### 三、Constant Conditional Correlation (CCC) 模型

Bollerslev (1990) 提出 Constant Conditional Correlation 模型，簡稱 CCC 模型，以下詳述其模型建構過程：

令資產報酬變數可以向量表示為  $X_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}$ ，且其殘差項可表示成

$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,t} - \mu_{1,t} \\ x_{2,t} - \mu_{2,t} \end{bmatrix} = x_t - \mu_t$ ，定義  $\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, H_t)$ ，則根據 CCC 模型的

假設變異數—共變異矩陣  $H_t = D_t R D_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix}$ ，其中  $R$  為樣本相關係數

矩陣，而  $D_t = \text{diag}\{H_t\}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} \end{bmatrix}$ ，其中  $\sigma_{i,t}$  之估計值為利用 GARCH 模型

所得估計值的平方根，因此，在此情形下所得之條件變異數—共變異矩陣  $H_t$  為非條件相關係數矩陣以及兩個條件標準差對角矩陣的乘積。

雖然 CCC 模型的設定似乎合理且有意義，然而由於許多文獻皆發現資產報酬間的相關係數值其實並非固定常數，而會隨著時間變動，因此 CCC 模型設定條件相關係數矩陣  $R$  為常數的假設似乎太強。

### 四、Dynamic Conditional Correlation (DCC) 模型

DCC 模型主要針對 CCC 模型中相關係數矩陣  $R$  為固定常數的假設而提出修正，DCC 模型認為資產報酬間的相關係數為時間的函數，因此相關係數矩陣可表示為  $R_t$ ，除此之外兩模型的設定大致上皆相同，以下分兩部分介紹 DCC 模型的建構過程，第一部分為報酬基礎下 DCC 模型的介紹，即為 Engle (2002) 所提出之原始 DCC 模型；第二部分則是介紹 Chou, Liu 和 Wu (2005) 所提出之變幅基礎底下的 DCC 模型。

### (一) 報酬基礎下 DCC (return-based DCC) 模型

DCC 模型與 CCC 模型主要不同點在於 DCC 模型假設資產報酬的變異數—共變異數矩陣為  $H_t = D_t R_t D_t$ ，其中  $R_t = \text{diag}\{Q_t\}^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-\frac{1}{2}}$ ，且

$D_t = \text{diag}\{H_t\}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} \end{bmatrix}$ ，而  $\sigma_{i,t}$  之估計值為利用 GARCH 模型所得估計值

的平方根。  $R_t = \text{diag}\{Q_t\}^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-\frac{1}{2}}$  式中的  $Q_t$  為利用標準化殘差值

$Z_t = D_t^{-1} \times \varepsilon_t$  配適 GARCH 模型所得之條件變異數—共變異數矩陣， $Q_t$  估計式

如下所述：

$$Q_t = S \circ (ii' - A - B) + A \circ Z_{t-1} Z_{t-1}' + B Q_{t-1} \quad (39)$$

其中， $A$  與  $B$  為參數， $i$  代表 1 向量，而  $S$  則為標準化殘差值之非條件共變異數矩陣，數學符號「 $\circ$ 」為 Hadamard 矩陣乘積計算式。此估計式之最大概似函數為：



$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( n \log(2\pi) + \log|H_t| + \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( n \log(2\pi) + \log|D_t R_t D_t| + \varepsilon_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( n \log(2\pi) + 2 \log|D_t| + \log|R_t| + Z_t' R_t^{-1} Z_t \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( n \log(2\pi) + \log|D_t|^2 + \varepsilon_t' D_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t - Z_t' Z_t + \log|R_t| + Z_t' R_t^{-1} Z_t \right)
\end{aligned} \tag{40}$$

令  $\theta$  為  $D_t$  部分的參數， $\phi$  為額外的  $R_t$  部分的參數，則概似函數又可拆成波動性與相關係數兩部分，如下所示：

$$L(\theta, \phi) = L_v(\theta) + L_c(\theta, \phi) \tag{41}$$

波動性部分概似函數為：

$$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( n \log(2\pi) + \log|D_t|^2 + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t \right) \tag{42}$$

根據 Engle (2002) 可知，波動性部分概似函數又可寫成個別 GARCH 模型概似函數之和，且在波動性部分參數  $\theta$  求解上，可藉由個別 GARCH 模型之概似函數最大化來求解，故(42)式可改寫成：

$$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \left( \log(2\pi) + \log(\sigma_{i,t}) + \frac{\varepsilon_{i,t}^2}{\sigma_{i,t}} \right) \tag{43}$$

相關係數部分概似函數為：

$$L_c(\theta, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \log|R_t| + Z_t' R_t^{-1} Z_t - Z_t' Z_t \right) \tag{44}$$

由於波動性部分參數  $\theta$  與相關係數部分參數  $\phi$  在估計上彼此獨立，故可採用兩階段估計方法估計，首先估計波動性部分參數  $\theta$  如下所示：

$$\hat{\theta} = \arg \max \{L_v(\theta)\} \tag{45}$$

在  $\theta$  已知下估計  $\phi$  如下所示：

$$\hat{\phi} = \arg \max_{\phi} \{L_c(\hat{\theta}, \phi)\} \tag{46}$$

## (二) 變幅基礎下 DCC (range-based DCC) 模型

Chou, Liu 和 Wu (2005) 提出變幅基礎底下的 DCC 模型，其與原始 DCC 模型的差異主要在於  $Z_t = D_t^{-1} \times \varepsilon_t$  式中對於  $D_t$  的估計上。有別於原始 DCC 模型以 GARCH 模型來估計  $D_t$ ，變幅基礎底下的 DCC 模型利用 CARR 模型做為條件波動性  $D_t$  的估計模型，求得標準化殘差值  $Z_t$ 。變幅基礎下 DCC 模型在估計上利用 CARR 模型求得之調整後條件變幅  $\lambda_{i,t}^*$  取代(43)式中之  $\sigma_{i,t}$ ，故其波動性部分之概似函數如下：

$$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \left( \log(2\pi) + \log(\lambda_{i,t}^*) + \frac{Z_{i,t}^2}{\lambda_{i,t}^*} \right) \quad (47)$$

其餘部分之估計步驟則與報酬基礎下 DCC 模型相同。

### 第四節 風險值模型評比準則



Hendricks (1996) 指出使用不同的風險值估計模型所得之風險估計值會有相當顯著的差別。根據巴塞爾銀行監理委員會的規範，金融機構必須使用回溯測試來評估模型的正確性，而回溯測試即在比較金融機構採用內部模型所估計的每日風險值與資產組合實際損益的差異，計算評估期間內實際損失超過風險值的次數，稱之為失敗次數（或穿透次數），失敗次數越接近理論值代表模型越佳。

除了穿透次數之外，過去文獻如 Kupiec (1995)、Hendricks (1996)、Christofferson (1998)、Lopez (1999) 和 Neftci (2000)，相繼提出許多不同的風險值模型評比準則，分別從不同的觀點切入，且對風險值模型的表現各有其判斷標準，因此，本研究仿照 Engel 和 Gizycki (1999) 所提出的分類方式，依模型的

保守性、準確性及效率性建構多向度評估指標，進行各風險值模型在一般情況下的績效評估，以下依序說明各績效評估指標的衡量方法及其意義。

## 一、保守性分析

對金融監理機關來說，金融機構依其內部模型所提列之最低資本適足額，是否可以有效的涵蓋其損失是一件最重要的事，換句話說，若從監理機關的角度來看，模型的保守性將是評斷風險性模型表現優劣的重要因子，所謂保守性係指相對於其他模型，是否能夠產生較大的風險估計值，使其在預測損失風險上較不會產生例外（失敗）事件的能力。本研究採 Hendricks (1996) 提出之平均相對偏差和均方根相對偏差來評估風險值模型的保守性，詳細內容說明如下。

### (一) 平均相對偏差 (Mean Relative Bias ; MRB)

根據 Engel 和 Gizycki (1999) 的分類定義，衡量風險值模型的保守性可視不同風險值模型所得風險估計值的相對大小來判斷。Hendricks (1996) 所提出的平均相對偏差評估方式即在比較不同風險值模型間估計值的相對大小，其值越大代表模型越保守。若假設  $T$  為樣本估計期間，而  $K$  為所欲評估之風險值模型個數，則第  $i$  個風險值估計模型的平均相對偏差評估指標可以下面公式計算：

$$MRB_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{VaR_{i,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \quad (48)$$
$$\overline{VaR}_t = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K VaR_{i,t}$$

必須注意的是，平均相對偏差指標是衡量模型估計值間的相對大小關係而非絕對大小概念，因此若改變其中一個所欲評比的風險值模型，則所得模型的保守性結果也會不一樣。

## (二) 均方根相對偏差 (Root Mean Squared Relative Bias ; RMSRB)

在探討風險值模型的保守性方面，除了比較不同模型所得風險估計值的相對大小之外，風險值模型間的相對變異程度亦為必須考量的因素之一，考慮 Hendricks (1996) 所提出的均方根相對偏差指標，以衡量風險值估計模型的相對變異程度，亦即衡量模型估計的風險值相較於所有模型之平均風險值的偏離程度。其公式定義如下：

$$RMSRB_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{VaR_{i,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \right)^2} \quad (49)$$
$$\overline{VaR}_t = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K VaR_{i,t}$$

其中  $RMSRB_i$  係指第  $i$  個風險值估計模型的均方根相對偏差， $T$  為樣本估計期間，而  $K$  為所欲評估之風險值模型個數。若所求的 RMSRB 數值越大者，表示該模型的風險值相較於其他模型有較大的偏離程度。

## 二、準確性分析

準確性主要在評估模型的正確性，即衡量實際損失超越風險估計值的次數。模型的準確性對所有風險值使用者來說十分重要，然而不同的風險值使用者對於準確性會有不同程度的要求，一般而言，金融機構基於內部風險管理的需求將會力求模型預測的正確，以確實有效掌控風險狀況，亦即實際損失超越風險估計值的失敗次數，應與模型在估算風險值時所預設的顯著水準相等；相對的，金融監管機關則是要求風險值模型的估計值能有效涵蓋實際損失，換言之，實際損失超越風險估計值的失敗率應小於或等於風險值模型所預測的顯著水準。本研究嘗試參考相關文獻 (Kupiec (1995)、Hendricks (1996)、Christofferson

(1998)、Lopez (1999)和 Neftci (2000)) 建構以下六個準確性參考指標，詳細內容說明如下。

(一) 二元損失函數 (Binary Loss Function ; BLF)

此一損失函數所衡量的是實際損益超過風險估計值的次數。依據 Lopez (1999)所提出之一般損失函數 (general loss function) 來測度管制者所關注的金融機構風險監控變數，在  $t$  時點，特定  $i$  銀行的損失函數可設定如下：

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} f(\Delta P_{i,t+1}, VaR_{i,t}) & \text{if } \Delta P_{i,t+1} < VaR_{i,t} \\ g(\Delta P_{i,t+1}, VaR_{i,t}) & \text{if } \Delta P_{i,t+1} \geq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (50)$$

式中，損失函數  $f(\bullet)$  和  $g(\bullet)$  滿足  $f(\bullet) \geq g(\bullet)$  條件，其中  $\Delta P$  表示實際損益。就此一般損失函數，可進一步設定二元損失函數，用以衡量特定時日的實際損益超越風險估計值的次數。二元損失函數之虛擬變數設定方式如下：

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta P_{i,t+1} < VaR_{i,t} \\ 0 & \text{if } \Delta P_{i,t+1} \geq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (51)$$

此虛擬變數表示，當實際損失超過風險估計值時，即記離位 (outlier) 一次，亦稱失敗或穿透，每個離位不論損失多寡權重均相同，實際損失未超過風險估計值者，權重即為零。將觀察期間內累計的離位點總次數除以總樣本數，即為失敗率 (failure rate) 或稱穿透率，亦為平均二元損失函數值。如果失敗率大於預設的風險值信心水準，表示失敗次數過多，模型低估風險，此時風險值模型無法發揮其預警之目的；反之，如果失敗率小於預設的風險值信心水準，則表示模型高估風險，此時可能持有過多的預備金，資本的配置較不具效率；實際失敗率接近預期失敗率的模型則表現較為一致，可視為較佳的模型。

(二) 平均失敗誤差 (mean excess)

一般普遍以失敗率做為評估風險值在失敗次數方面的準確性，但通常忽略失敗的誤差大小是影響風險值估計準確與否的另一項重要指標。對風險管理者而言，其所需要的風險衡量工具除了必須在失敗次數方面預測準確之外，更重要的是必須在失敗發生時得到較小誤差，也就是能降低未預期的損失金額。Neftci (2000)提出平均失敗誤差的概念，即特別針對未預期損失的大小探討各風險值模型的估計準確性，其作法為將實際損失超過風險估計值的部分加總取平均，便可得到平均失敗誤差值，此評比指標越小代表所得風險估計值越接近實際損失，失敗時的未預期損失越小。第  $i$  個風險值模型的平均失敗誤差的計算概念大致如下所示：

$$\text{第 } i \text{ 個模型平均失敗誤差} = E(\Delta P_{i,t+1} - VaR_{i,t} \mid \Delta P_{i,t+1} > VaR_{i,t}) \quad (52)$$

值得注意的是，當不同的風險值估計模型所得的失敗率一樣時，此評比指標所得的模型之間差異情況將更具比較意義。



### (三) 非條件涵蓋比率檢定 (LR test of unconditional coverage ; $LR_{uc}$ )

非條件涵蓋比率檢定是由 Kupiec 於 1995 年提出，以統計的方式進一步檢定估計的失敗率。假設每日風險值與每日損益皆為序列獨立，則損失超過風險值之次數  $L_{i,t}$  可視為 Bernoulli 分配，且累積失敗次數  $N$  會服從一個二項分配：

$$P(N) = \binom{T}{N} \alpha_c^N (1 - \alpha_c)^{T-N} \quad (53)$$

其中， $T$  為樣本期間，而  $\alpha_c = 1 - c$  表示在給定信心水準  $100(c)\%$  之下風險值模型失敗的機率。準確的風險值估計模型其實際失敗率  $N/T$  會接近於  $\alpha_c$  值。

Kupiec (1995)建議以概似比 (Likelihood Ratio ; 簡稱 LR) 檢定來進行。在

已知樣本數及風險值理論失敗率  $\alpha_c$  下，令估計的失敗率  $\hat{\alpha}_c = N/T$ ，虛無假設  $H_0: \alpha_c = \hat{\alpha}_c$  的檢定統計量記為  $LR_{uc}$ ，定義如下：

$$LR_{uc} = 2 \cdot \frac{\ln[(1 - \hat{\alpha}_c)^{T-N} \hat{\alpha}_c^N]}{\ln[(1 - \alpha_c)^{T-N} \alpha_c^N]} \sim \chi_{1, \alpha_c}^2 \quad (54)$$

在虛無假設成立下，此檢定統計量為自由度 1 的卡方分配。

#### (四) 獨立性概似比率檢定 (LR test of independence; $LR_{ind}$ )

若風險值模型能準確地捕捉投資組合報酬的條件分配，以及隨時間變動的變異性，則實際損失超過風險估計值的例外事件應該是不可預測且獨立地分佈在測試區間。本研究利用 Christofferson (1998) 所提出的獨立性統計量  $LR_{ind}$ ，來檢定各風險值模型發生例外事件的獨立性，以茲判定模型的準確性。 $LR_{ind}$  檢定的虛無假設及檢定統計量分別如下所示：

$$H_0: \pi_{01} = \pi_{11} = \pi$$

$$LR_{ind} = 2 \cdot \frac{\ln[(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}]}{\ln[(1 - \pi)^{(n_{00} + n_{10})} \pi^{(n_{01} + n_{11})}]} \sim \chi_{1, \alpha_c}^2 \quad (55)$$

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} ;$$

$$\pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} ;$$

$$\pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

上式中， $n_{ij}$  為本期指標變數狀態為  $j$  且前期指標變數狀態為  $i$  之下的總天數，且  $\alpha_c$  為風險值模型的顯著水準。在虛無假設成立下，此檢定統計量為自由度 1 的卡方分配。

#### (五) 條件涵蓋比率檢定 (LR test of conditional coverage; $LR_{cc}$ )

根據 Christofferson (1998)的定義，條件涵蓋比率檢定是結合非條件涵蓋比率及獨立性概似比率兩種特性的檢定所形成，其檢定統計量為：

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi_{2, \alpha_c}^2 \quad (56)$$

其中  $\alpha_c$  為風險值模型的顯著水準，在虛無假設成立下， $LR_{cc}$  服從自由度 2 的卡方分配。此外，虛無假設成立亦代表模型能正確衡量實際超限次數，與捕捉報酬率具有條件異質性的特性。

#### (六) 覆蓋風險乘數 (Multiple to Obtain Coverage ; MOC)

當風險值模型的失敗率不等於所設定之顯著水準時，意謂著風險估計值有估計偏誤。為了進一步了解風險估計值相對於實際損失的偏誤程度，Hendricks (1996)指出可以將風險值估計偏誤改以相對應的等量乘數 (equivalent multiplier) 來表示，之後再經由乘數大小的比較，判定風險值模型估計的準確性。此乘數即為覆蓋風險乘數，其求算方式如下：

$$F_i = T\alpha_c, \text{ 式中 } F_i = \sum_{t=1}^T \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta P_{i,t+1} < MOC_i \cdot VaR_{i,t} \\ 0 & \text{if } \Delta P_{i,t+1} \geq MOC_i \cdot VaR_{i,t} \end{cases} \quad (57)$$

其中， $T$  為樣本數目， $\alpha_c$  為風險值模型的顯著水準， $MOC_i$  即為第  $i$  個風險值模型的覆蓋風險乘數。當乘數大於 1 時，代表風險估計值低估；乘數小於 1 時，代表風險估計值高估；乘數越接近 1，則風險值模型的準確性越高。

### 三、效率性分析

風險值模型的效率性係指在既定的準確性下 (風險估計值能涵蓋實際損失的程度) 其所必須提撥成本 (決定於所估計的風險值) 的大小，既定的準確性



下，所需提撥的成本越小則效率性越高。以下說明本研究所採用的兩項效率性指標。

(一) 平均相對規模偏差 (Mean Relative Scaled Bias ; MRSB)

平均相對規模偏差為 Hendricks (1996)提出的效率性指標，此指標融合了準確性的第六個指標 MOC 以及衡量保守性的 MRB 指標，求算方式是先將各模型所估計的風險值分別乘上各自的 MOC，再以 MRB 方式計算各模型風險值的相對偏差，以此指標來檢視模型的效率性。其求算公式設定如下：

$$MRSB_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{MOC_i \cdot VaR_{i,t} - \overline{MOC \cdot VaR_t}}{\overline{MOC \cdot VaR_t}} \quad (58)$$

$$\overline{MOC \cdot VaR_t} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K MOC_i \cdot VaR_{i,t}$$

當模型的平均相對規模偏差越小，意謂在既定準確性之下，所需提撥的成本越少（風險估計值越小），效率性即越佳。

(二) 誤差效率性 (error efficiency)

由於風險值必須有效衡量最大損失，但是若估計的風險值過度放大，而使得損失皆未超過風險估計值，將會失去風險值的真正意義。由於不希望風險值模型為了使穿透率較低而高估風險值，如此金融機構會因而提存過多的資金準備，造成無謂的資金成本提高，因此考慮誤差效率性以衡量實際報酬損益和風險估計值的相對距離，定義誤差效率性為：

$$\text{第 } i \text{ 個模型誤差效率性} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{|\Delta P_{i,t+1}| - VaR_{i,t}}{VaR_{i,t}} \right| \quad (59)$$

其中  $T$  為測試樣本數。值得注意的是，此處所討論的誤差效率性與前面所提的

平均失敗誤差有所不同，平均失敗誤差只考量未預期損失部分的情況，而誤差效率性則同時衡量未預期損失之準確性及已預期到的損失之成本，亦即同時衡量穿透及未穿透值與風險估計值的差異大小，因此若其值越小代表模型估計值不論是在預期範圍內或是未預期範圍內皆越接近實際損益，代表模型估計不僅越準確，且所需計提之成本亦越小，故越具效率性。此外，採用誤差效率性比較各風險值模型之優劣時，在失敗率越接近顯著水準時將更具意義。



## 第肆章、資料分析

### 第一節 資料來源與取樣期間

為研究美國金融資產報酬的投資組合風險值估計，在此以美國證券市場的 S&P 500 股價指數與債券市場的十年期財政部政府公債 (10-year treasury bond ; Tbond)<sup>17</sup> 日資料為研究對象進行分析並計算每日風險值，選取的樣本期間為 1993 年 11 月 1 日至 2006 年 3 月 17 日近 12 年多的資料<sup>18</sup>，總計 3100 筆變幅及報酬率日資料觀察值，資料來源取自雅虎的財務資料庫系統 (Yahoo Finance)。

### 第二節 資料的基本統計分析

圖 1 為 S&P 500 股價指數收盤價與十年期政府公債殖利率走勢圖，由圖中兩資產原始價格走勢圖可發現，兩資產原始價格資料似乎皆為非定態 (non-stationary) 資料<sup>19</sup>，為了確認資料是否真的存在非定態情形，先將資料進行單根檢定 (unit root test)。由表 1 可知股票與債券價格資料皆無法拒絕資料為單根的虛無假設，代表原始價格資料為非定態資料，因此將每日價格資料取一階差分後轉換為報酬率資料再進行單根檢定，結果皆拒絕報酬為單根的虛無

<sup>17</sup> 本文以下簡稱十年期政府公債。

<sup>18</sup> 雅虎財務資料庫系統 (Yahoo Finance) 所收錄的 S&P 500 股價指數與十年期政府公債資料，自 1993 年 10 月 28 日起才開始有每日最高價及最低價的記載。因此為符合日變幅的定義，本文的研究期間起點乃設定為 1993 年 11 月 1 日。另外在樣本期間內 S&P 500 股價指數具 3118 個日資料，而十年期政府公債則只包含 3100 個日資料，為求兩者之投資組合報酬故予以捨棄 18 筆日資料，只採取兩資產共有的 3100 筆日資料做實證分析。

<sup>19</sup> 定態 (stationarity) 指的是時間數列變數的資料產生過程之性質，一個時間數列變數  $y_t$  如果是定態變數 (stationary variable)，則必須具有下列之性質：

$$(1) E(y_t) = \mu$$

$$(2) E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = \sigma^2 < \infty$$

$$(3) E(y_{t_1} - \mu)(y_{t_2} - \mu) = \gamma_{t_2 - t_1} \quad \forall t_1, t_2$$

其中  $\mu$ 、 $\sigma$ 、 $\gamma$  都是有限 (finite) 的常數。(依據 Brooks (2004), ch5.2, p.231 之定義)

假設，而得到一平穩的報酬數列，以下將對此報酬數列進行分析。

研究期間報酬率資料相關之敘述統計量列於表 2，發現S&P 500 股價指數的日平均報酬率明顯較十年期政府公債為高，約為其 6 倍之多，顯示股票報酬較債券報酬來得高，此外針對其常態性方面的統計分析，股票與債券報酬資料分配偏態係數值 (skewness) 皆為負值，表示兩資產分配皆為左偏，實際資料分配型態皆為左邊尾部較長的不對稱分配，而兩者之峰態係數 (kurtosis) 皆大於常態分配假設下的值 (在常態假設下此數值為 3)，代表實際資料分配在尾部發生的頻率較常態分配來得大，具高狹峰以及厚尾的現象 (leptokurtic)，除此之外亦採用Jarque-Bera (JB) 統計量<sup>20</sup>對樣本分配進行常態性檢定，由表 2 可知S&P 500 資料的JB值為 1722.171 而十年期政府公債資料的JB值為 680.11，兩組資料JB值都明顯拒絕資產報酬為常態分配的虛無假設，代表資料皆為非常態的型態。此外變幅資料相關之敘述統計量則列於表 3 中，S&P 500 資料的JB值為 13593.94 而十年期政府公債資料的JB值為 5008.238，兩組資產報酬JB值亦都顯示資料為非常態的分配型態。當比較兩資產日變幅資料的標準差與日報酬率資料的標準差時，可以發現S&P 500 股價指數與十年期政府公債價格的日變幅資料的標準差分別為 0.821 與 0.873，較日報酬率資料的標準差 1.07 與 1.18 為小，隱含用變幅資料來捕捉波動性應該會優於報酬率資料。值得特別說明的是GARCH模型與CARR模型在衡量波動性上的取樣不同，GARCH模型是選取每個區間股價指數或債券殖利率的變動率，即報酬率 (return)<sup>21</sup>；而CARR模型則是擷取股價指數或債券殖利率極端值的變動範圍，即變幅 (range)。本文所

---

<sup>20</sup>  $JB = \frac{N}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2 \right) \sim \chi^2(2)$ ，可以對樣本分配進行常態性檢定，虛無假設為樣本服從常態分配， $N$ 為樣本個數、 $S$ 為偏態係數、 $K$ 為峰態係數，又當顯著水準 $\alpha=5\%$ ，則 $\chi^2_{1-\alpha}(2) = 5.99$ ，即在 95%的信賴水準下，若所求得樣本的Jarque-Bera值大於臨界值 5.99 時，則拒絕常態分配的假設。

<sup>21</sup> 由於雅虎財務資料庫系統 (Yahoo Finance) 所收錄的十年期政府公債資料為其殖利率資料，故本文債券殖利率之報酬率計算方法參照 Engle (2002)，十年期政府公債報酬率  $= -100 \times [\ln(r_t^{close}) - \ln(r_{t-1}^{close})]$ 。

定義的報酬率及變幅的計算方式如下所示：

$$\text{報酬率} = 100 \times [\ln(P_t^{close}) - \ln(P_{t-1}^{close})],$$

$$\text{變幅} = 100 \times [\ln(P_t^{high}) - \ln(P_t^{low})]$$

接著將 S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率資料劃上直方圖與標準常態分配的 QQ-plot，圖 2 的直方圖中，曲線為常態分配的配適線，由圖形可以發現該資料較常態具厚尾及高峽峰現象，且由圖 3 的 S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率對標準常態分配的 QQ-plot 也可以發現，資料的確不符合常態假設。

從表 2 下方的報酬與報酬平方項自我相關情形的 Ljung-Box (1978)  $Q$  統計量檢定結果可知，不論是報酬本身或是其平方項皆顯著存在序列自我相關的情形 (P 值皆小於 0.1)，代表資產報酬及資產報酬平方的前後期表現皆具高度相關性，資料可能存在 ARMA 效果與 GARCH 效果 (波動叢聚效果)；另一方面，表 3 下方的變幅一階自我相關  $Q$  統計量檢定結果亦皆顯著拒絕變幅資料不具序列自我相關的虛無假設，表示兩資料皆存在 CARR 效果，前後期變幅具自我相關情況，其中十年期政府公債報酬的自我相關情形較為顯著，而 S&P 500 股價指數報酬平方項與變幅的自我相關情形較為明顯。以下試著針對資產報酬的波動異質變異以及波動叢聚性質做更深入分析。

首先探討資產報酬率的自我相關情形，本研究仿效 Berkowitz 和 O'Brien (2002) 的作法，在條件均數方程式方面採取 ARMA(1, 1) 模型來配適資產報酬率的條件期望值，以求正確捕捉資產報酬率數列的自我相關特性。此外，針對資產報酬率的異質變異與波動叢聚現象，在條件波動性方程式方面依序配適 GARCH(1, 1)、GARCH(1, 2)、GARCH(2, 1) 與 GARCH(2, 2) 模型，藉由 SBC

(Schwarz Bayesian information criterion; 簡稱SBC) 準則, 結果列於表 4 上半部, 顯示不論是S&P 500 股價指數或是十年期政府公債報酬率資料, 皆以ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)模型之SBC值最小, 為報酬基礎下相對較佳之波動性配適模型, 故本研究選擇ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)模型為資產報酬率條件均數和條件波動性的配適模型<sup>22</sup>。在變幅的模型結構配適方面, 利用變幅資料配適CARR(1, 1)、CARR(1, 2)、CARR(2, 1)和CARR(2, 2)四種模型, 其SBC值結果列於表 4 下半部, 結果顯示CARR(1, 1)模型不論配適S&P 500 股價指數或十年期政府公債日變幅資料, 皆可獲得較小的SBC值, 故本研究在變幅基礎底下的配適模型乃採ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型做為資產報酬與波動性的配適模型。

ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型的參數估計結果列於表 5, 由表 5 中的ARCH項與GARCH項係數之和 (即  $\alpha_1 + \beta_1$ ) 可得知, GARCH(1, 1)模型的  $\alpha_1^G + \beta_1^G$  係數和皆較CARR(1, 1)模型的  $\alpha_1^C + \beta_1^C$  係數和大, 代表殘差項平方之序列相關程度較變幅高, 做為波動性代理變數時, 其波動叢聚的持續性 (persistent) 效果較強, 反之若以日變幅做為波動性代理變數, 其回復效果 (mean reverting effect)<sup>23</sup>較日報酬資料強, 正好呼應前面日變幅資料標準差小於日報酬率資料標準差的發現, 資料波動情形以日報酬率資料較為嚴重, 因此所得  $\alpha_1 + \beta_1$  係數和以GARCH(1, 1)較大。再比較GARCH(1, 1)模型及CARR(1, 1)模型的係數, 可看出CARR(1, 1)模型的  $\alpha_1^C$  係數估計值在S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬資料分別為 0.1372 與 0.0683, 較GARCH(1, 1)模型的  $\alpha_1^G$  係數估計值 0.0714 與 0.0449 來得高, 似乎可以說明CARR模型對於短期反應的敏感度比GARCH模型高。

<sup>22</sup> 此模型選取結果與Berkowitz和O'Brien (2002)相同, 在他們的實證研究當中, 即以ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)模型為其時間數列風險值估計模型。

<sup>23</sup> 回復效果 (mean reverting effect) 係指時間數列資料重回平均水準的情形, 若  $\alpha_1 + \beta_1$  係數和較小則回復效果較強, 資料重回平均水準的速度也越快。

圖 4 所示的上半部分是 S&P 500 股價指數日報酬率的走勢圖，中間是以 GARCH(1, 1)模型配適後的條件標準差，下圖則是以 CARR(1, 1)模型配適後的條件變幅，對照發現當報酬率變化大時，如 1997 年 11 月，GARCH(1, 1)模型配適出來的條件標準差與 CARR(1, 1)模型配適出來的條件變幅也會比較大，表示不論是 GARCH(1, 1)模型的條件標準差或是 CARR(1, 1)模型的條件變幅估計值，皆可適當反應報酬率波動的變化情形，相同情形下，十年期政府公債日報酬率數列的異質波動情形，如圖 5 所示，亦可被 GARCH(1, 1)的條件標準差估計值與 CARR(1, 1)模型的條件變幅估計值有效捕捉。

表 6 為 S&P 500 與十年期政府公債兩項資產報酬皆經由 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型過濾（標準化）後，所得標準化殘差項之敘述統計表，表中數據顯示此四項殘差項的  $Q$  統計量之  $P$  值相較於原始報酬資料皆變得不顯著，表示 ARMA(1, 1)模型確實能夠捕捉資產報酬的一階自我相關情形。根據表中  $Q^2$  統計量的  $P$  值皆不顯著的情況，顯示經由 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型過濾後所得殘差項的平方都不再存在自我相關情形，因此不論是 GARCH(1, 1)或 CARR(1, 1)模型皆可成功捕捉到資產報酬異質變異及波動叢聚的現象。此外，雖然兩資產報酬殘差項的 JB 值相較原始報酬已明顯下降，但仍然拒絕資產報酬為常態的虛無假設。圖 6 為 S&P 500 股價指數報酬經由 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型過濾（標準化）後，所得標準化殘差值之 QQ-plot，同樣作法下，圖 7 則為十年期政府公債報酬的情形，由圖可知其尾端仍然存在非常態分配現象，因此雖然可以經由移除資產報酬波動叢聚的效果來改善其厚尾的情形，但是其實資產報酬分配的厚尾情形並未因此完全獲得改善，仍然存在一些所謂的極值情形，即文章前面提到的極端下方風險，此風險主要來自某些特別時期或特別事件，由於極端下方風險的存在使得資產報酬的厚尾情形比想像中嚴重，

因此有必要進一步使用極值理論來看報酬分配的尾部情況，以求更精確捕捉資產報酬的分配型態。

### 第三節 極端資料分析

前面已經針對整個報酬分配的敘述統計量進行分析，然而誠如前一小節所得到結果，我們有興趣也有必要特別針對資產報酬分配的左尾尾部極端值進行探討，關心所謂的極端下方風險，本研究關心的是資產報酬買方部位的風險，故以下只針對報酬損失的情況做說明。首先要看的是這些極端值的大小，S&P 500 股價指數報酬最為嚴重的 3 天日報酬為-7.11%、-7.04%與-6.01%，且有 6 天日報酬小於-4%，有 378 筆損失（約樣本的 12.2%）低於平均值一個標準差之外，而十年期政府公債報酬最嚴重的 3 天損失分別為-5.97%、-5.62%與-5.46%，有 20 天報酬小於-4%，有 384 筆損失（約樣本的 12.4%）低於平均值一個標準差之外。再來探討這些極端值的相依情形，即其前後自我相關情況，表 7 針對過去 12 年來 31 個最嚴重的報酬率極端損失發生頻率之分配做了一個簡單的統計表，顯示不論是 S&P 500 股價指數報酬或是十年期政府公債報酬，約有一半的極端損失前後期發生時間小於一個月（21 個交易日），即下次極端損失發生的日子會在一個月之內，而約有三分之二的極端損失發生時間小於三個月，換句話說，極值損失間可能存在中、長期叢聚效果，且兩項資產報酬的中、長期極端損失叢聚效果相當類似，而短期叢聚效果則不太一樣，對 S&P 500 股價指數報酬來說，約有五分之一極端損失前後期會發生在 3 天內，而對十年期政府公債報酬來說此現象只占十分之一，因此似乎 S&P 500 股價指數報酬具短期極端損失叢聚效果。



## 第五章、實證結果

### 第一節 尾部指數估計結果的分析

前面資料分析中發現 S&P 500 股價指數與十年期政府公債的報酬分配確實具有厚尾的特性，而報酬分配尾部厚薄的程度會反應在其尾部指數大小上，因此只要求得尾部指數的數值，即可藉此判斷所求報酬分配的尾部型態，也間接捕捉到報酬分配可能存在的偏態情形，因此本小節進一步利用修正 Hill 估計式來估計 S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬分配的尾部指數，藉此觀測兩資產報酬分配的尾部型態。

本文主要目的在評估資產報酬的風險狀態，因此在估計 S&P 500 股價指數與十年期政府公債兩資產報酬分配的尾部指數時僅納入全部樣本中低於平均數之負報酬資料，亦即我們所求得的尾部指數值其實只是在描述報酬分配的左尾型態，再進一步利用此尾部指數求得風險值，即為某信心水準下的最大可能損失。本文在進行尾部指數動態估計時，是以 500 筆資料為移動窗口估計下一期的尾部指數，以進行一日風險值的計算。由表 8 看出，整體而言無論是 S&P 500 股價指數或是十年期政府公債報酬資料，在 GARCH(1, 1)及 CARR(1, 1)模型過濾後資料所求得的尾部指數估計值( $\gamma$ )皆大於 0(介於 0.1653 到 0.2216 之間)，顯示 S&P 500 股價指數報酬與十年期政府公債報酬極值資料屬於具有厚尾特性的 Frechet 分配，亦即兩資產報酬極值分配皆較常態分配的兩端為厚(常態分配尾部指數應為 0)，根據 Koedijk, Schafgans 和 de Vries (1990)的研究，當描述分配尾部型態的形狀參數  $\alpha$ ，即尾部指數的倒數，介於 0 到 2 之間時該分配屬於柏拉圖穩定 (Pareto stable) 分配，當尾部型態大於 2 時則屬於 t 分配，因此由尾部指數的估計結果可知，S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬資料的分

配型態皆漸近於  $t$  分配。值得注意的是，本研究所求得 S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬的左尾尾部指數分別為 0.17 與 0.22 左右，表示 S&P 500 股價指數報酬分配厚尾的情形較十年期政府公債報酬不明顯，即 S&P 500 股價指數報酬的下方風險小於十年期政府公債報酬，此結果與 Huisman, Koedijk 和 Pownall (1998) 所得到的結果相反，他們認為 S&P 500 股價指數報酬的下方風險大於十年期政府公債報酬，對於此一差異可能因為其所選取的資料型態為雙週報酬資料，與本文的日資料不同，且其資料期間為 1980 年到 1998 年亦與本文所選取的期間有很大差異，因此產生不同的結果，隱含資料的分配型態可能隨時間而有所變動。

除此之外，表 8 也顯示經由 CARR(1, 1) 模型過濾後資料所求得的尾部指數亦小於經由 GARCH(1, 1) 模型過濾後資料所求得的尾部指數，隱含利用 CARR(1, 1) 模型做為估計資產報酬尾部指數前的資料標準化模型時，其所求得的資產報酬尾部型態呈現厚尾的情形不若 GARCH(1, 1) 模型所求得的結果明顯，代表用 CARR(1, 1) 模型來標準化資料時可以解決更多的異質波動或波動叢聚問題。

在探討以 GARCH(1, 1) 與 CARR(1, 1) 做為資料過濾模型的優劣之前，可以先觀察表 8 裡所列出的個別年度尾部指數估計值，由表中結果可以發現此尾部指數估計值會隨著時間而變動，在經濟情勢波動較大的期間所得到的估計值也會較大，代表極端下方風險存在於此一時期，例如在 1997、1998 年極端波動期間所反應出的  $\gamma$  估計值即明顯大於其他期間的估計值，證實尾部指數估計值的大小可反應資料分配違反常態分配的程度，因此藉由估計左尾尾部指數可以捕捉到資產報酬的極端下方風險，由圖 8 及圖 9 的資產報酬與  $\gamma$  估計值的走勢圖亦可約略看出當資產報酬波動情形越激烈時所對應的  $\gamma$  值也越大，偏離常態的情形也就越嚴重。由於我們已經證實資產報酬分配的尾部型態在經濟情勢不穩定的期間具有尾部分配較厚的情況，依此推測使用  $\gamma$  值於 VaR-x 風險值估計法

下所得到的風險值估計模型，相較於其他風險值模型由於能捕捉到極端下方風險的情況，即對於特別時期風險的掌控能力較佳，所以應該能提供較為準確的估計結果。

## 第二節 單一資產回溯測試結果

根據前一節的結果知道，尾部指數估計值可以捕捉到極端下方風險的情況，因此本節將實證檢視當運用此尾部指數估計值於風險值的估計模型上時，是否可以獲得較佳的風險估計結果。模型比較基準採回溯測試方法來比較風險值估計模型的估計準確性，即針對風險值模型估計出的風險值與實際報酬損益比較所得到的實際失敗次數，與特定信心水準之下的理論失敗次數相比較，除此之外，本文尚針對各個風險值模型的表現以不同的測度指標進行更深入的分析，依評估模型之保守性、準確性和效率性指標進行分類整理。我們也探討動態（條件）風險值模型相較於靜態（非條件）風險值模型，在風險值估計上是否確實能獲得顯著的改善，另外，利用 CARR 模型之下的風險值估計是否可獲得較 GARCH 模型之下的風險值估計有更準確的效果？

前面提到本文在進行動態尾部指數估計時，是以 500 筆資料為移動窗口<sup>24</sup>，因此為符合一致性，在進行模型參數估計以及下一日風險值計算時亦採估計日之前 500 筆日資料為歷史資料，以此 500 筆歷史資料當做下一日風險估計值的參考依據，如此向後移動重複 2,600 次獲得 2,600 個風險估計值，再以此 2,600 個估計值與實際報酬資料相比即可獲得回溯測試的實證結果，以下我們將依據資產的種類以及信心水準的差異一一說明風險值評估模型實證的結果。

---

<sup>24</sup> 根據巴塞爾銀行監理委員會的建議，測試採用過去至少一年的資料（約 250 天），本文為求獲得較準確的模型參數估計值，故以 500 天為移動窗口估計期間。

## 一、失敗率分析

### (一) 靜態（非條件）風險值模型績效評比

本節內容主要在比較幾個較常被使用的風險值評估方法，包括歷史模擬法（HS）、靜態（非條件）變異數—共變異數估計法（Delta-Normal）以及極值理論架構之下的 VaR-x 風險值估計法，表 9 即為其風險值估計結果，值得注意的是在 VaR-x 風險值估計模型架構下，依據資料標準化模型的不同，又分為兩種估計模型，一為以 GARCH(1, 1)模型做為資料過濾模型的 VaR-x 模型，另一個則為以 CARR(1, 1)模型做為資料過濾模型的 VaR-x 模型，因此本節所比較的幾個風險值評估模型皆為靜態（非條件）的風險值模型。





表 9 中的統計數字表示在 99.5%、99%、97.5%與 95%四種信心水準下，以此四種風險值評估模型進行風險值評估的累積失敗總次數，由累積失敗總次數與其相對應之理論失敗次數（估計期間總天數乘以信心水準之值）相比的結果可以發現，在 95%信心水準之下，不論是 S&P 500 股價指數或是十年期政府公債報酬資料表現最佳的風險值評估模型皆為 Delta-Normal 估計法，使用 Delta-Normal 估計法所得到累積失敗總次數最接近理論失敗次數 130 次。其次是歷史模擬法(HS)、以 GARCH(1, 1)模型為過濾模型的 VaR-x 法和以 CARR(1, 1)模型為過濾模型的 VaR-x 法，此結果顯示極值理論風險值估計模型在較低的信心水準時，由於其累積失敗次數高於理論值很多，不僅無法獲得較傳統風險值評估模型更準確的估計結果，反倒是傳統的風險評估方法表現相對較好，累積失敗次數較接近理論值。而在 97.5%信心水準之下則以歷史模擬法（HS）的風險值估計表現最佳，其次依序為 Delta-Normal 法、GARCH(1, 1)過濾後 VaR-x 法和 CARR(1, 1)過濾後 VaR-x 法，後面三種評估方法的表現皆較理論值 65 次高出許多。在 99%信心水準之下時，S&P 500 資料中表現最佳的是 CARR(1, 1)

過濾後的 VaR-x 法，十年期政府公債資料則仍以歷史模擬法最為準確，但大致上來說極值理論架構下的 VaR-x 風險值估計法的表現已漸趨準確，甚至到了 99.5% 信心水準時，其風險值估計表現已明顯優於其他模型，雖然在十年期政府公債資料中仍以歷史模擬法所得到的估計值最接近理論值 13 次，但由於歷史模擬法是在未來與現在資產波動情形一樣的假設下運作，且其估計需要大量的資料才能獲得正確的風險估計值，尤其是在越高信心水準之下所需要的資料越多，因此是否有足夠的極端歷史資料做為風險值估計資料以及未來報酬型態是否與現在同屬相同分配，是歷史模擬法能否準確估計風險值的兩個重要因素，所以在靜態風險值評比上我們獲得歷史模擬法仍為一不錯之風險值估計方法的結果，但在資料效率性及合理性的考量下，此結果之正確性及穩健性仍有待進一步驗證。



綜上所述，大致可以知道在較低信心水準時，常態假設之下的風險值模型表現優於極值理論架構下的風險值模型，而在較高信心水準之下時則是極值理論架構下的風險值模型表現較好，其實此結果並不令人意外。在表 9 的敘述統計數字裡，我們可以發現 S&P 500 與十年期政府公債報酬原始資料中，低於距離平均報酬 1.96 個標準差的報酬資料分別只占全部資料的 3.69% 與 4%，並未達常態分配假設下的標準值 5%。而低於距離平均報酬 2.33 個標準差的報酬資料則分別占全部資料的 2.04% 與 2.27%，此值遠大於常態分配假設下的標準值 1%，代表報酬資料分配較常態分配厚尾的情形只發生在非常極端的分配兩端，在較不極端的報酬分配兩端資料中此厚尾現象較不顯著，也就是說當使用極值理論下的風險值估計模型 VaR-x 估計法於較低信心水準之下估計風險值時，由於在此信心水準左右兩端的原始報酬分配資料，並未較常態分配假設下資料的發生頻率高，因此無法獲得較歷史模擬法或是常態分配假設下的風險值估計模型準確的估計結果，相反的若是在較高信心水準之下時，由於原始報酬極端資料發生頻率高於常態假設之下許多，因此使用極值理論下的風險值估計模型即

可發揮其善於捕捉資產報酬厚尾的優勢，而獲得較其他模型準確的風險值估計量。此結果同時可以解釋前面的推論，亦即使用  $\gamma$  值於 VaR-x 風險值估計架構下所得到的風險值估計模型，相較於其他風險值模型由於能捕捉到極端下方風險的情況，所以在高信心水準情形下能夠提供較準確的風險值估計結果。

此外為了探討 GARCH(1, 1)及 CARR(1, 1)模型做為資料過濾模型的表現情形，我們進一步比較 VaR-x 風險值估計法架構下，用 GARCH(1, 1)與 CARR(1, 1)模型來標準化原始報酬資料所得的風險值評估績效，結果發現使用 CARR(1, 1)模型做為資料過濾模型，所得到的風險值估計結果表現並沒有比 GARCH(1, 1)模型佳，雖然在前文中我們曾經提到 CARR(1, 1)模型相較於 GARCH(1, 1)模型過濾後資料，所得到的尾部指數估計值較 GARCH(1, 1)模型的估計值來的小，因此猜測 CARR(1, 1)模型相較於 GARCH(1, 1)模型可以解決更多的異質波動或波動群聚問題，但是在本小節的實證研究中此命題並沒有辦法得到支持，可能的解釋是 CARR(1, 1)模型的樣本內波動性配適情形並不若 GARCH(1, 1)模型配適的好，因此造成在靜態模型底下風險值估計情形較差的結果，為了更進一步探討此兩種波動性估計模型的樣本外表現，以下將針對動態（條件）模型底下的風險值估計模型進行比較。

## （二）動態（條件）風險值模型績效評比

在上一段分析裡已經針對文獻上幾個常見的風險值估計模型，探討其在靜態情況的績效表現，並證實 VaR-x 風險值估計法下所得到的風險值估計值，相較於其他模型在高信心水準下能夠提供較準確的風險值估計，然而金融資產報酬的波動情況並不是固定的，而是隨著時間變化存在波動性異質變異的情況，幾乎在所有風險值估計模型當中波動性皆為一重要的影響因子，主要因為波動性的大小往往也反應市場風險的大小，雖然波動性在反應資產價格未來的不確

定狀況中，包含未來價格上升與下降兩種可能性，但投資者所關心的往往只是下方風險的部分，許多文獻顯示，當市場處於不景氣時期波動幅度也會比較大，隱含下方風險的程度其實也反應在波動性的大小當中。因此，唯有準確的估計市場上真實的波動情形，才能確實了解市場風險，進一步求算出下方風險。以下分析將針對上述 Delta-Normal 風險值估計法與極值理論下的 VaR-x 風險值估計模型，在考慮報酬的異質性波動情形下所發展出的動態（條件）風險值評估模型進行比較，探討在多個不同動態風險值估計模型中，哪一個模型的績效表現相對較佳，並藉此比較找出適當的波動性估計模型。

底下說明可以描述資產報酬異質波動的動態風險值模型，包括（1）J. P. Morgan 的 RiskMetrics 法中的 EWMA 風險值估計模型（2）在資產報酬為常態分配假設下，結合 Delta-Normal 法與 GARCH(1, 1) 模型所衍生出的 GARCH-Normal 風險值估計模型（3）在資產報酬為常態分配假設下，結合 Delta-Normal 法與 CARR(1, 1) 模型所衍生出的 CARR-Normal 風險值估計模型（4）極值理論架構下結合 VaR-x 法與 GARCH(1, 1) 模型所衍生出的 GARCH-VaR-x 風險值估計模型（5）極值理論架構下結合 VaR-x 法與 CARR(1, 1) 模型所衍生出的 CARR-VaR-x 風險值估計模型。由於本文風險值模型的回溯測試乃採取移動窗口的方式進行，因此必須將每一個窗口所使用的 EWMA、GARCH 與 CARR 模型固定，亦即使用相同階數的模型，因為若在每一個窗口都要判斷這些模型的階數以及參數的顯著性，在實務上並不可行；同時，如果模型是變動的，則進行回溯測試的比較並無重大意義。表 10 為此五種動態風險值模型的累積失敗次數統計表，由表中統計數字可以看出在 95% 的信心水準之下資料為 S&P 500 股價指數報酬時，表現最佳的風險評估模型是 CARR-Normal 風險值估計模型，所得到的累積失敗次數 137 次最接近理論穿透值的 130 次<sup>25</sup>，其次依序是 GARCH-Normal 法、

<sup>25</sup> 穿透值的意思與累積失敗次數是一樣的，當模型預測的風險估計值大於實際資產報酬時即記為一次穿透，整個樣本期間中全部穿透次數之和即為穿透值。

EWMA法、GARCH-VaR-x以及CARR-VaR-x，十年期政府公債風險值方面則以RiskMetrics的EWMA法最接近理論值，而CARR-Normal與GARCH-Normal法的績效表現亦與EWMA法差不多，都相當接近理論值的 130 次穿透，只有VaR-x風險評估方法下的兩種估計模型GARCH-VaR-x與CARR-VaR-x表現較差，由此可知，在 95%的信心水準之下並不適合採用極值理論風險值模型來評估風險，即使是考慮資產波動的異質性問題所發展出來的動態模型，反而以傳統常態假設下的GARCH或CARR模型甚至是RiskMetrics所研發出來的EWMA風險估計模型表現較好。在 97.5%信心水準下時，利用S&P 500 股價指數為分析對象時，估計的準確程度，依序是CARR-Normal法、CARR-VaR-x法、GARCH-VaR-x法、GARCH-Normal法及EWMA法，而十年期政府公債方面則依序是CARR-Normal法、CARR-VaR-x法、EWMA法、GARCH-VaR-x法、GARCH-Normal法，因此不論是S&P 500 股價指數資料或者是十年期政府公債資料，皆無法簡單區分出常態假設之下或是極值理論架構下的風險值估算模型孰優孰劣，不過當信心水準提高到 99%時，則可以明顯的發現GARCH-VaR-x法以及CARR-VaR-x法所估計的結果逐漸証實，不論是S&P 500 或是十年期政府公債資料皆以VaR-x法下的模型較接近理論值的 26 次穿透次數，甚至到了更高的 99.5%信心水準時，使用極值理論架構下，VaR-x法的估計績效表現更是較其他風險值模型出色，且相對估計準確度差異更大。依模型估計風險值的準確性排列依序為CARR-VaR-x法、GARCH-VaR-x法、CARR-Normal法、GARCH-Normal法及EWMA法。

由前述分析，可以知道在 95%的信心水準之下，以結合條件波動性估計模型與Delta-Normal法所得到的風險值估計表現相對較好，而結合條件波動性估計模型與極值理論架構體系下的風險值評估模型表現相對不佳，即便其納入了波動性的預測模型而可以捕捉到靜態模型無法捕捉到的未來風險情況<sup>26</sup>，但在

<sup>26</sup> 關於此一方面更詳細的比較說明，將於下一段（第三段）之個別年度（year by year）回溯測試分析中作更深入解釋。



較低信心水準之下仍有低估風險的情形。然而，當信心水準提高到 99% 以上時，由於資產報酬極值情形的發生頻率大於標準常態假設下的極值發生頻率，因此，極值理論架構體系下的動態風險值模型，在較高信心水準之下，即顯著的優於標準常態假設下的動態模型，亦即同樣考慮資產報酬異質波動的所有動態風險值估計模型中，額外考慮極端下方風險的極值理論動態風險值模型（如 GARCH-VaR-x 與 CARR-VaR-x），由於對於極值情形的掌握較佳，故較常態假設下的動態風險值模型（如 EWMA、GARCH-Normal、CARR-Normal）表現優異，對於高信心水準之下的風險估計也更準確。

根據巴塞爾銀行監理委員會的建議，對於金融機構風險值的估計應採 99% 的信心水準為基準，在這樣高信心水準的要求下，表現相對最好的風險值模型為極值理論架構下的 VaR-x 法風險值估計模型。換言之，一個好的風險值評估模型不僅需具備能夠捕捉到金融資產報酬未來風險情形的能力，尚應能捕捉到資產報酬的極端下方風險情形。



使用 CARR(1, 1) 模型當做風險值估計模型是否會優於 GARCH(1, 1) 模型？由於 CARR(1, 1) 模型的樣本內波動性配適情形並不若 GARCH(1, 1) 模型配適的好，造成在靜態模型底下 CARR(1, 1) 模型的一日風險值估計情形相對較差，但 CARR(1, 1) 模型的樣本內配適情形不如 GARCH(1, 1) 模型，並不表示 CARR(1, 1) 模型在樣本外波動性預測上亦不若 GARCH(1, 1) 模型準確。在動態風險值估計模型之下，不論是 S&P 500 股價指數或是十年期政府公債報酬資料，甚至不論是常態假設下模型或是極值理論架構下模型，在各個不同信心水準下的風險估計皆觀察到 CARR(1, 1) 模型表現優於 GARCH(1, 1) 模型的傾向，由此顯示 CARR(1, 1) 模型對於波動性的結構掌握優於 GARCH(1, 1) 模型，其在樣本外波動性預測的能力在統計上明顯優於 GARCH(1, 1) 模型，造成使用 CARR(1, 1) 模型做為風險值估計模型時，可以獲得較 GARCH(1, 1) 模型準確的結果。在前一

章的資料分析中，曾經提到日變幅資料的變異情形小於日報酬資料的變異情形，因此猜測使用變幅資料來捕捉波動性的情形應該會優於使用報酬率資料的結果，這個猜測在本節的動態風險值實證分析中獲得了證實，此外，若更進一步從 GARCH(1, 1)與 CARR(1, 1)模型的係數來看時，可以發現 (1) CARR(1, 1)模型的  $\alpha$  係數較 GARCH(1, 1)模型大，隱含 CARR(1, 1)模型受到短期極端事件影響的程度較 GARCH(1, 1)模型大的意思，CARR(1, 1)模型對於突發事件的反應較快。也就是說 CARR(1, 1)模型在資產報酬短期波動情形的捕捉能力上較 GARCH(1, 1)模型表現優異。因此，CARR(1, 1)模型較能捕捉到 GARCH(1, 1)模型無法刻劃的極值情形，(2) 由於 CARR(1, 1)模型的  $\alpha_1^C + \beta_1^C$  係數和較 GARCH(1, 1)的  $\alpha_1^G + \beta_1^G$  係數和小，代表使用 CARR(1, 1)模型做為動態風險值估計法的波動性預測模型時，其所受到突發事件影響而造成波動性估計值增加現象的延續期間比較不若 GARCH(1, 1)模型持久，因此 CARR(1, 1)模型雖然較 GARCH(1, 1)模型更能夠捕捉到資產報酬短期波動現象，但是 CARR(1, 1)模型受到短期極端事件影響的持續時間並不會像 GARCH(1, 1)模型一般長久，也就是說 CARR(1, 1)模型受到突然極端事件干擾影響而回復到平均水準的速度較快，影響較不若 GARCH(1, 1)模型，綜合以上因素即為 CARR(1, 1)動態風險值估計模型表現優於 GARCH(1, 1)動態風險值估計模型的主要原因。

## 二、靜態與動態風險值模型比較

在前面的動態風險值模型績效評比分析中，只提到當額外考慮波動預測情形時，所建構的動態風險值模型相較於靜態模型，由於更能掌握報酬波動的情形，因此可以捕捉到靜態模型無法捕捉到的未來風險情形，然而我們並不知道，未來風險的不確定性因素存在於資產報酬的嚴重情況，以及利用波動性模型是否能完全掌握到此不確定因素（即未來的風險），若此命題為真，則造成風險值估計的差異程度是否顯著。為了得到以上幾個問題的解答，我們嘗試比較當風

險值模型由靜態轉換到動態時，所造成風險估計上的改善情況，若此改善情況相當顯著，代表金融資產報酬波動情形的確存在明顯的不確定風險狀況，而且也可以說經由波動性的評估與配適，使得更能掌握未來的風險型態，並獲得較佳之風險估計值。

表 11 為由靜態風險值模型轉換至動態風險值模型時所造成風險估計準確度的改善比率 (improvement ratio)<sup>27</sup>，主要探討兩類情況下總共五種的估計改善情形，第一類為在常態分配假設下，由Delta-Normal模型轉至EWMA模型、GARCH-Normal模型以及CARR-Normal模型，所造成的風險值估計改善情形，第二類則為極值理論架構下，由VaR-x(GARCH過濾後)模型轉至GARCH-VaR-x模型以及VaR-x(CARR過濾後)模型轉至CARR-VaR-x模型的改善情形，由表 11 的統計數字，可以發現在各個不同的信心水準下，以十年期政府公債資料為風險估計標的時，幾乎所有的動態風險值估計模型皆優於靜態風險值估計模型 (除了Delta-Normal變化至GARCH-Normal模型之外)。若以S&P 500 股價指數報酬為風險估計標的資料時，則此動態模型改善的情形在較低信心水準下並不全然一致，唯有在較高的信心水準下時，方可獲得一致的結果，即動態模型相較靜態模型在估計準確度上有顯著改善，亦即在越高的信心水準下，利用波動性模型來捕捉市場真實波動情況的動態風險值模型，在捕捉未來不確定風險的能力，會比在較低信心水準下為佳。此外，進一步比較GARCH(1, 1)與CARR(1, 1)模型下由靜態轉換至動態風險值模型時的改善情況，CARR(1, 1)模型的改善情況普遍較GARCH(1, 1)模型明顯，代表CARR(1, 1)模型對樣本外波動性的估計情形的確較GARCH(1, 1)為佳。因此，即使CARR(1, 1)模型在樣本內的波動性配適度不若GARCH(1, 1)模型好，由於靜態轉換成動態模型的過程當中，CARR(1, 1)模型可獲得較大的改善空間，再加上CARR(1, 1)模型的樣本外估計

<sup>27</sup> 此改善比率的計算方式如下：改善比率 = ( | 靜態模型實際穿透次數 - 理論穿透次數 | - | 動態模型實際穿透次數 - 理論穿透次數 | ) ÷ 理論穿透次數。

情形較GARCH(1, 1)模型佳，所以造成在衡量動態風險值模型的表現時，CARR(1, 1)風險值估計模型，更明顯的優於GARCH(1, 1)風險值估計模型，因此推論CARR(1, 1)模型用來估計風險值的表現比GARCH(1, 1)模型更適合。

### 三、個別年度 (year by year) 回溯測試

為了探討這些風險值模型是在何時低估風險，可以將回溯測試總期間分割成 10 個子期間，個別計算每個子期間內風險估計值的失敗次數，以檢視風險值模型的穩定度評比，就學理而言，一個好的風險值模型，其估計風險狀態的表現應該要相當平均，也就是說失敗次數的分配應該平均分攤至各個子期間，舉例來說，若有一風險估計模型，就整個樣本期間來說，可以做到實際失敗次數和理論失敗次數一樣的估計準確度，但若將樣本期間切開來看時，卻發現其失敗次數都集中在某個時期，一般不認為此風險值模型真的能確實掌握實際風險情形，因為這樣的風險值模型對於風險管理人員來說是另一個「風險」，因為他們依然無法知道此風險值模型何時能做出正確的估計，代表風險依舊存在。

本研究將樣本期間區分成 10 個子期間，除了 1996 年及 2005 年之外，其餘子期間皆以一年為單位 (平均 250 個交易日)，並以 95% 及 99% 信心水準為例，結果如表 12 及表 13 所示，由表中統計數字可看出，動態風險值模型對於風險估計失敗次數的分配情形較靜態風險值模型平均，也就是說動態風險值模型由於考慮到市場隨著時間波動的情形，可以掌握到未來風險的狀況，因此獲得較靜態模型佳的評估表現。觀察兩者差異，可以看出在市場整體表現較差的時期，靜態模型低估風險的情形更為嚴重 (如 S&P 500 資料在 1997、1998 年左右的波動時期以及十年期政府公債資料在 2001 年左右的不景氣時期)，而在整體市場表現較為穩定的時期，靜態模型亦存在高估風險的情形 (如 S&P 500 資料在 2004 年以及十年期政府公債資料在 2005 年的情形)，因此動態風險值模型，不

僅在市場動盪時期能充分改善靜態模型反應市場情形較慢的缺點，在市場平穩的年代，動態模型亦能改善靜態模型風險估計的準確性，亦即動態風險值模型對於風險的掌握確實優於靜態風險值模型。圖 10 為 S&P 500 股價指數報酬與其 99%信心水準下風險估計值走勢圖，由圖中靜態與動態風險值個別走勢情形可以發現，動態風險值模型較靜態模型更能夠快速反應市場波動的情況。

#### 四、極端事件風險捕捉能力的探討

先看看前面提到的 1997、1998 年波動時期對 S&P 500 股價指數報酬影響的例子，例子中雖然動態模型在此段不穩定的期間確實改善了風險估計的準確度，但綜觀全部模型仍然無法找到一個風險值模型在此段期間是沒有低估風險的，換句話說，即便動態風險值模型可以迅速的反應市場真實波動的情形，也不保證就能確實捕捉到最極端損失的情形，仍然可能對於突然或未預期的極端損失有反應不及的情形，這就是極端下方風險。

為了探討這個問題，本研究以 99%信心水準下的風險估計值為例，比較整個樣本期間內最嚴重的 31 個報酬損失(約為總樣本之 1%)穿透風險值的情形，表 14 所示為 31 個極端損失穿透 99%風險值以及全部樣本穿透 99%風險值的比率，以 S&P 500 為例，由 Delta-Normal 法與常態假設下動態風險值模型的比較，可以發現此兩種型態風險值模型皆約略可捕捉到 98%左右的全部樣本風險，然而若仔細探討極端損失(extreme loss)情形時，則發現動態模型可捕捉到約 50%的極極端損失，而靜態模型卻只能捕捉到 20%左右的極端損失。同樣的，比較極值理論架構下動態及靜態風險值模型時，可看出動態極值風險值模型及靜態極值風險值模型皆約略可以捕捉 99%左右的全部樣本風險，但對於極端損失的捕捉能力上，動態模型可捕捉到 60%左右的極端損失，靜態模型只能捕捉到 35%左右的極端損失，換句話說，對動態風險值模型而言，並非所有的失敗次數皆

來自於這些極端損失，大部分比率的極端損失皆可被動態風險值模型捕捉到。除此之外，也可以發現，不論是靜態或動態模型，極值理論架構下，風險值模型對於極端損失的捕捉能力皆優於常態假設下的風險值模型，因此像 GARCH-VaR-x 與 CARR-VaR-x 這類的動態極值理論風險值模型之所以可以表現得比其他模型出色，可能是來自於對極端情形的捕捉能力方面，較能捕捉極端下方風險，以致於能將穿透情形分散在整個期間內，而在十年期政府公債的實證上，結果亦大致相同，因此正如同表 12 及表 13 所示，波動性只能被動態風險值模型掌握的結果，在表 14 中我們也看見極端報酬只能被動態風險值模型捕捉到。

進一步比較 GARCH(1, 1)模型以及 CARR(1, 1)模型對於極端損失方面的捕捉狀態時，可以發現，除了 S&P 500 資料在靜態極值理論風險值模型的情況之外，其餘不論是在 S&P 500 或十年期政府公債資料、動態或靜態模型以及常態或極值理論架構下，CARR(1, 1)模型對於極端損失的捕捉效果皆優於 GARCH(1, 1)模型，分析其原因，可能來自於模型設定上的差異，由於 CARR(1, 1)模型對於波動性的估計是利用樣本的一階動差（條件變幅行程方程式），而 GARCH(1, 1)模型則主要建立在樣本觀察值的二階動差（條件變異數方程式），顯然在模型設定上有所區別，CARR(1, 1)模型由於擷取每天最高點及最低點的資料，因此較能追蹤每天的極端情形，造成對於極值的掌握表現較 GARCH(1, 1)模型出色，因此 CARR(1, 1)模型在風險值預測上，尤其在高信心水準之下時，確實為一很好的風險估計輔助工具。

## 五、模型檢定分析

前面的實證分析中，用來評估風險值模型的主要指標，都是比較風險值模型的穿透次數。然而，單獨靠一項指標就要認定模型的優劣排序似乎不夠嚴謹，

而且依照審核者的不同，其對風險值模型評比的觀點也會不同，以下將在 95% 及 99% 信心水準之下<sup>28</sup>，依據保守性、準確性以及效率性三個觀點，依序探討各個風險值模型的表現，各風險值模型進行回溯測試所估計之各向度評比指標值結果如表 15、表 16、表 17 及表 18 所示（表 15 與表 16 分別為 95% 信心水準下 S&P 500 及十年期政府公債資料的情形，表 17 與表 18 分別為 99% 信心水準下 S&P 500 及十年期政府公債資料的情形）。

表 15 為 95% 信心水準之下，S&P 500 股價指數日報酬，利用各個風險值模型評估風險的回溯測試檢定結果，首先探討模型保守性情形，全部模型的平均相對偏差（MRB）統計量皆介於 0.0486 與 -0.0547 之間，顯示所列風險值模型對於風險估計的保守性差異不大。然而在眾多模型中以 Delta-Normal 法所得到的平均相對偏差值最大，亦即 Delta-Normal 法為全部風險值模型中相對最保守的方法。在均方根相對偏差（RMSRB）分析中，以 GARCH-VaR-x 所得到的模型相對變異程度最低，表示其模型估計值與所有模型平均值相差最小，所得風險估計值較為平穩保守，其次表現較佳的模型依序為 GARCH-Normal 法、CARR-VaR-x 法、CARR-Normal 法、VaR-x（CARR 過濾後）法、Delta-Normal 法、歷史模擬法、VaR-x（GARCH 過濾後）法及 EWMA 法。

在模型估計準確性分析中，二元損失函數（BLF）的表現與前述穿透率的比較結果相同，以 CARR-Normal 模型估計最為準確。平均失敗誤差表現較佳的前四個風險估計法依序為 CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、EWMA 法與 CARR-VaR-x 法，表示用這幾個模型估計風險，所得到的未預期平均失敗誤差最小，亦即其風險估計值最接近實際報酬率，因此，即使模型預測風險失敗，

---

<sup>28</sup> 事實上，本研究共比較 95%、97.5%、99% 以及 99.5% 等四種信心水準下之情況，發現結果差異不大，故文章內僅以較具代表性的兩種信心水準為例做說明，分別為代表較低信心水準下的 95% 信心水準的結果，與代表較高信心水準且為巴塞爾銀行監理委員會建議的 99% 信心水準的結果。

其所造成後果也較不嚴重。此外，在非條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{uc}$ ) 方面，除了 CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、EWMA 法、Delta-Normal 法及歷史模擬法等估計法之外，其餘估計法皆拒絕失敗率等於理論顯著水準值的虛無假設，代表模型統計上顯著低估或是高估風險。在獨立性概似比檢定 ( $LR_{ind}$ ) 方面，所有模型皆不拒絕失敗事件為序列無相關的虛無假設，亦即所有的模型皆能說明報酬率分配具有條件異質性的特性。在同時考慮模型實際超限次數的正確性，以及是否能說明報酬率分配具有條件異質性的特性的條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{cc}$ ) 方面，結果與非條件涵蓋比率檢定一致，只有 CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、EWMA 法、Delta-Normal 法及歷史模擬法等估計法不拒絕模型綜合表現佳的虛無假設，也就是說共有五個風險值模型通過統計檢定。在覆蓋風險乘數 (MOC) 方面，所有模型的覆蓋風險乘數皆大於 1，而覆蓋乘數最接近 1 的前四個模型依序為 CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、Delta-Normal 法及歷史模擬法。從準確性分析可看出在 95% 信心水準下，常態假設下的風險值模型表現明顯優於極值理論架構下的模型。

最後，在模型效率性分析方面，平均相對規模偏差 (MRSB) 指標上表現最佳的前四個模型依序是 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法、GARCH-Normal 法及 CARR-Normal 法，顯示這些模型在達到理論要求的風險覆蓋程度時，所提供的風險估計值相對其他模型估計值為小，故在風險估計上最具效率，在模型誤差效率性指標上，表現較佳的前四個模型依序為 CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、EWMA 法及 CARR-VaR-x 法，表示全部樣本期間中不論是失敗或成功估計風險，模型的風險估計值與實際報酬相差程度最小。綜合保守性、準確性與效率性分析的結果大致可以發現在 95% 信心水準之下 CARR-Normal 模型的表現不管是在哪一個指標上皆有很好的績效表現，而表現次佳的模型則是 GARCH-Normal 模型，此結果與前面的失敗次數分析法所得結果相當一致。十年期政府公債風險值模型的檢定結果列於表 16 中，可大致看出



綜合保守性、準確性與效率性分析的結果，表現最佳的風險值模型為 EWMA 法，其次為 CARR-Normal 模型與 GARCH-Normal 模型。

表 17 為 99%信心水準之下，S&P 500 股價指數日報酬利用各個風險值模型評估風險的回溯測試檢定結果，首先在模型保守性分析方面，全部模型的平均相對偏差 (MRB) 統計量皆介於 0.0828 與 -0.0720 之間，顯示所列風險值模型對於風險估計的保守性差異雖然稍稍大於 S&P 500 的情形，但一般來說差異仍屬不大。然而，在眾多模型中以 VaR-x (GARCH 過濾後) 法所得到的平均相對偏差值最大，亦即 VaR-x (GARCH 過濾後) 法為全部風險值模型中相對最保守的一個。在均方根相對偏差 (RMSRB) 分析中，以 GARCH-Normal 所得到的模型相對變異程度最低，表示其模型估計值與所有模型平均值相差最小，所得風險估計值較為平穩保守，其次表現較佳的模型依序為 CARR-Normal 法、GARCH-VaR-x 法、VaR-x (CARR 過濾後) 法、CARR-VaR-x 法、歷史模擬法、Delta-Normal 法、EWMA 法及 VaR-x (GARCH 過濾後) 法。

在模型估計準確性分析中，二元損失函數 (BLF) 的表現與前文所提到的穿透率比較結果相同，以 GARCH-VaR-x 模型估計最為準確，其次是 CARR-VaR-x 模型。平均失敗誤差表現較佳的前四個風險估計法依序為 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法、VaR-x (GARCH 過濾後) 法及 CARR-Normal 法，表示用這幾個模型估計風險所得到的未預期平均失敗誤差最小，亦即其風險估計值最接近實際報酬率，因此即使模型預測風險失敗，其所造成後果也較不嚴重。此外，在非條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{uc}$ ) 方面，除了 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法及 VaR-x (GARCH 過濾後) 法等估計法之外，其餘估計法皆拒絕失敗率等於理論顯著水準值的虛無假設，代表模型統計上顯著低估或是高估風險。在獨立性概似比檢定 ( $LR_{ind}$ ) 方面，CARR-VaR-x 法、CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法及 EWMA 法皆不拒絕失敗情形為序列無相關的虛無假

設，代表這些模型皆能說明報酬率分配具有條件異質性的特性。另外，在同時考慮模型實際超限次數的正確性，以及是否能說明報酬率分配具有條件異質性的特性的條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{cc}$ ) 方面，只有 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法及 CARR-Normal 法三個估計法不拒絕模型績效綜合表現佳的虛無假設，也就是說只有這三個風險值模型通過統計檢定。在覆蓋風險乘數 (MOC) 方面，所有模型的覆蓋風險乘數皆大於 1，而覆蓋乘數最接近 1 的前四個模型依序為 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法、VaR-x (GARCH 過濾後) 法及歷史模擬法。從準確性分析可看出在 99% 信心水準下，極值理論架構下的模型表現明顯優於常態假設下的風險值模型。

最後，在模型效率性分析方面，平均相對規模偏差 (MRSB) 指標上表現最佳的前五個模型依序是 CARR-VaR-x 法、CARR-Normal 法、GARCH-Normal 法、EWMA 法及 GARCH-VaR-x 法，顯示這些模型在達到理論要求的風險覆蓋程度時，所提供的風險估計值相對其他模型估計值為小，故在風險估計上最具效率。在模型誤差效率性指標上，表現較佳的前四個模型依序為 CARR-VaR-x 法、GARCH-VaR-x 法、CARR-Normal 法及 GARCH-Normal 法，表示全部樣本期間中不論是失敗或成功估計風險，模型的風險估計值與實際報酬相差程度最小。綜合保守性、準確性與效率性分析的結果大致可以發現在 99% 信心水準之下 CARR-VaR-x 模型的表現不管是在哪一個指標上皆有很好的績效表現，而表現次佳的模型則是 GARCH-VaR-x 模型，此結果與前面的失敗次數分析法所得結果相當一致。十年期政府公債風險值模型的檢定結果列於表 18 中，可大致看出綜合保守性、準確性與效率性分析的結果後，表現最佳的風險值模型為 CARR-VaR-x 模型，而 GARCH-VaR-x 模型則僅次於 CARR-VaR-x 模型為表現次佳的風險值估計模型。

由此可知，在較低信心水準下以 CARR-Normal 模型的綜合表現較佳，反

之在較高信心水準之下則以 CARR-VaR-x 模型的綜合表現較好。值得一提的是，在對於風險值模型的評估觀點上，雖然內部風險管理者為了遵守資本適足規定的評估角度，與外部監理機構的評估角度大不相同，一般仍然認為風險值模型的準確性是所有風險值模型評估法中最重要指標，且經由回溯測試的結果顯示，CARR(1, 1)模型下的風險值模型，由於對於波動性的敏感程度大於 GARCH(1, 1)模型下的風險值模型以及其他風險值模型，更可捕捉資產報酬分配厚尾的情況，因此變幅基礎的風險值模型表現較報酬基礎的風險值模型優異，故提供金融機構或實務界一個絕佳的風險評估指標。

### 第三節 投資組合回溯測試結果

本文底下進一步嘗試將極值理論風險值模型的估計方法運用到投資組合上，求算一個投資組合部位的一日風險值。當風險值求算的對象是一個投資組合部位時，影響風險值估計準確性的主要因素，除了個別資產報酬的波動性之外，投資組合資產部位中各資產報酬間的相關係數也扮演關鍵角色。由於相關係數的控制，在投資組合的風險值估計中越來越重要，本研究以 DCC 模型為基礎，將其應用至投資組合風險值估計上，比較以 DCC 模型當做資產報酬相關係數估計模型，在投資組合風險值估計上，與其他相關係數模型的差異。此外，本文也特別針對 Chou、Liu 和 Wu (2005)所提出的變幅基礎下的 DCC 模型，探討其應用至投資組合風險值估計上的表現，並將變幅 DCC 模型與報酬基礎下的 DCC 模型在投資組合風險值估計上的表現進行比較，藉以檢視結合變幅基礎下的波動性模型與相關係數估計模型，所形成的變幅基礎下投資組合風險值模型，以及結合報酬基礎下的波動性模型與相關係數估計模型，所形成的報酬基礎下投資組合風險值模型，在投資組合風險值估計上的相對表現。

#### 一、動態投資組合風險值模型的比較

本研究以 95%及 99%兩種不同信心水準，分別求算投資組合報酬的風險估計值，本文旨在探討美國金融市場投資組合的風險評估問題，故此處投資組合的資產成分主要由 S&P 500 與十年期政府公債所組成，分別為美國金融市場投資人在股票與債券兩種型式資產配置上，最常考慮的投資標的，因此相當具代表性且可反應美國金融市場的大致情況。在投資比例上本實證研究以相等權重 (equally weighted) 投資組合來進行分析，結果如表 19 及表 20 所示，表的左邊算起第一欄為 J. P. Morgan 所提出的 EWMA 風險值估計模型、第二欄為 GARCH-Normal 單一資產風險值模型，搭配報酬基礎 DCC 模型為相關係數估計模型，所形成的 GARCH-Normal-DCC 投資組合風險值估計模型、第三欄為 CARR-Normal 單一資產風險值模型，搭配變幅基礎 DCC 模型為相關係數估計模型，所形成的 CARR-Normal-DCC 投資組合風險值估計模型、第四欄為 GARCH-VaR-x 單一資產風險值模型，搭配報酬基礎 DCC 模型為相關係數估計模型，所形成的 GARCH-VaR-x-DCC 投資組合風險值估計模型、第五欄為 CARR-VaR-x 單一資產風險值模型，搭配變幅基礎 DCC 模型為相關係數估計模型，所形成的 CARR-VaR-x-DCC 投資組合風險值估計模型。

值得特別說明的是，在估計投資組合風險值時，除了針對條件波動性的預測提出動態估計式之外，亦同時考慮資產報酬間相關係數會隨時間改變的動態結構，因此本研究稱之為動態投資組合風險值模型，表 19 顯示，在 95%信心水準下，GARCH-Normal-DCC 模型與 CARR-Normal-DCC 模型的實際穿透次數最接近理論穿透值，且其他模型的表現明顯低估實際風險情形許多。在保守性分析方面，以 CARR-Normal-DCC 模型所得之平均相對偏差 (MRB) 值最大，代表為所有風險值模型中最保守的一個，其次依序是 GARCH-Normal-DCC 模型、EWMA 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型及 GARCH-VaR-x-DCC 模型。在均方根相對偏差 (RMSRB) 分析中，模型估計風險值與所有風險值估計模型的平


均值差異最小的模型依序是 GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型及 EWMA 模型。

在模型準確性分析方面，二元損失函數 (BLF) 的表現與穿透率比較結果相同，以 GARCH-Normal-DCC 模型與 CARR-Normal-DCC 模型估計最為準確，其次是 EWMA 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型及 GARCH-VaR-x-DCC 模型。在平均失敗誤差指標中，模型表現較佳者依序為 CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型、EWMA 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型及 GARCH-VaR-x-DCC 模型。在非條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{uc}$ )、獨立性概似比檢定 ( $LR_{ind}$ ) 以及條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{cc}$ ) 三方面檢定上，所有風險值模型皆無法拒絕模型可正確估計風險值的虛無假設，顯示此五種投資組合風險值模型在風險值估計上皆通過統計檢定。在覆蓋風險乘數 (MOC) 方面，除了 CARR-Normal-DCC 模型與 GARCH-Normal-DCC 模型之外，其餘的風險值模型的覆蓋風險乘數皆大於 1，表示 CARR-Normal-DCC 模型與 GARCH-Normal-DCC 模型高估風險，其他模型則是低估風險，而覆蓋乘數最接近 1 的模型依序為 GARCH-Normal-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型、EWMA 模型及 CARR-VaR-x-DCC 模型。

在模型效率性分析方面，平均相對規模偏差 (MRSB) 指標上以 GARCH-VaR-x-DCC 模型最具效率，其次依序是 CARR-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型與 EWMA 模型。在模型誤差效率性指標上，表現較佳的模型依序為 CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型、EWMA 模型與 GARCH-VaR-x-DCC 模型。綜合保守性、準確性與效率性分析的結果大致可以發現，在 95% 信心水準之下，CARR-Normal-DCC 模型的表現不管是在哪一個指標上皆有很好的績效表現，而表現次佳的模型則是 GARCH-Normal-DCC 模

型。

由表 20 可發現，在 99%信心水準下 CARR-VaR-x-DCC 模型的實際穿透次數最接近理論穿透值，其次為 GARCH-VaR-x-DCC 模型，而其他模型的表現明顯低估實際風險情形許多。在保守性分析方面，以 GARCH-VaR-x-DCC 模型所得之平均相對偏差 (MRB) 值最大，代表為所有風險值模型中最保守的一個，其次依序是 CARR-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型及 EWMA 模型。在均方根相對偏差 (RMSRB) 分析中，模型估計風險值與所有風險值估計模型的平均值差異最小的模型依序是 GARCH-Normal-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-VaR-x-DCC 模型及 EWMA 模型。



在模型準確性分析方面，二元損失函數 (BLF) 的表現與穿透率比較結果相同，以 CARR-VaR-x-DCC 模型估計最為準確，其次是 GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型與 EWMA 模型。在平均失敗誤差指標中，模型表現較佳者依序為 CARR-VaR-x-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型與 EWMA 模型。在非條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{uc}$ ) 上，除了 CARR-VaR-x-DCC 模型及 GARCH-VaR-x-DCC 模型之外，其餘模型皆拒絕失敗率等於理論顯著水準值的虛無假設，代表其餘模型皆無法準確估計風險值。在獨立性概似比檢定 ( $LR_{ind}$ ) 方面，所有風險值模型皆無法拒絕失敗事件具序列無相關的虛無假設，代表全部模型皆能說明報酬率分配具有條件異質性的特性。在條件涵蓋比率檢定 ( $LR_{cc}$ ) 方面，除了 CARR-VaR-x-DCC 模型與 GARCH-VaR-x-DCC 模型之外，其餘模型皆拒絕風險值模型能正確估計風險值的虛無假設，顯示只有 CARR-VaR-x-DCC 與 GARCH-VaR-x-DCC 兩種投資組合風險值模型在風險值估計上通過統計檢定。在覆蓋風險乘數 (MOC) 方面，所有的風險值模型的覆

蓋風險乘數皆大於 1，表示所有的風險值模型皆低估風險，而覆蓋乘數最接近 1 的模型依序為 CARR-VaR-x-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型與 EWMA 模型。

在模型效率性分析方面，平均相對規模偏差（MRSB）指標上以 CARR-VaR-x-DCC 模型最具效率，其次依序是 CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型與 EWMA 模型。在模型誤差效率性指標上，表現較佳的模型依序為 CARR-VaR-x-DCC 模型、GARCH-VaR-x-DCC 模型、CARR-Normal-DCC 模型、GARCH-Normal-DCC 模型與 EWMA 模型。故綜合保守性、準確性與效率性分析的結果大致可以發現，在 99%信心水準之下，CARR-VaR-x-DCC 模型的表現不管是在哪一個指標上皆有很好的績效表現，而表現次佳的模型則是 GARCH-VaR-x-DCC 模型。

總結以上結果顯示，變幅基礎底下的投資組合風險值模型在風險估計上的表現明顯優於報酬基礎底下的投資組合風險值模型，因此變幅基礎下的風險值模型不僅在單一資產報酬的風險值估計上優於報酬基礎下的風險值模型，即使在考慮動態相關係數的動態投資組合風險值模型中，變幅基礎下模型的表現仍然優於報酬基礎下模型。

## 二、DCC 模型相對於 MA100 與 CCC 模型的改善程度

在前面實證研究中已經知道在單一資產報酬底下時，變幅基礎下的風險值模型對於風險的估計，會比報酬基礎下的風險值模型精準。在投資組合報酬風險值估計的情形中，亦得到變幅基礎下的投資組合風險值模型較報酬基礎下的投資組合風險值模型，更能準確估計風險的結果。然而我們無法得知此一變幅基礎模型優於報酬基礎模型的結果，究竟是來自於單一資產報酬的風險估計結

果，還是來自於相關係數估計模型的結果，因此，為了區分此兩種效果所帶來的影響，探討在單一資產報酬風險值模型固定的情況下，搭配不同的相關係數模型所得投資組合風險值模型的表現差異，如此便可以明確看出不同相關係數估計模型對投資組合風險值估計的影響。

以下主要針對文獻上常見的三種相關係數模型，DCC、MA100 與 CCC 模型，探討其應用於投資組合資產報酬風險值估計上的績效表現，並藉此檢視在估計投資組合的風險值時，若只關心資產報酬的波動性而忽略資產報酬間相關性的動態結構，可能造成錯估市場風險的嚴重程度，以驗證相關係數估計模型在「動態」投資組合風險值模型中的重要性。圖 11 為報酬基礎 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型的樣本外相關係數估計值配適圖，圖 12 為變幅基礎 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型的樣本外相關係數估計值配適圖。

前面已經證實在 95% 信心水準之下時，以 CARR-Normal 模型與 GARCH-Normal 模型為較佳之風險估計模型，而非常態假設之風險值模型相對表現較差，因此在 95% 信心水準下比較 GARCH-VaR-x-DCC、GARCH-VaR-x-MA100<sup>29</sup> 與 GARCH-VaR-x-CCC<sup>30</sup> 模型的優劣，或是比較 CARR-VaR-x-DCC、CARR-VaR-x-MA100 與 CARR-VaR-x-CCC 模型的優劣，其意義不大，甚至可能發生估計偏誤的情形。為了將評比重點放在相關係數模型的比較上，本節研究在 95% 信心水準下，以 GARCH-Normal 模型與 CARR-Normal 模型為單一資產報酬的風險值估計模型，並依序搭配 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型做為相關係數的估計模型，藉以比較在 95% 信心水準下此三種相關係數模型在投資組合風險值估計上的表現；反之，在 99% 信心水準之下時，如前

<sup>29</sup> GARCH-VaR-x-MA100 風險值模型係指在單一資產報酬風險估計模型為 GARCH-VaR-x 模型下，搭配 MA100 相關係數估計法，所形成的投資組合風險值模型。

<sup>30</sup> GARCH-VaR-x-CCC 風險值模型係指在單一資產報酬風險估計模型為 GARCH-VaR-x 模型下，搭配 CCC 相關係數估計模型，所形成的投資組合風險值模型。



文所證實CARR-VaR-x模型與GARCH-VaR-x模型為較佳之風險估計模型，而常態假設之風險值模型在 99%信心水準下往往會低估風險，因此在 99%信心水準下比較GARCH-Normal-DCC、GARCH-Normal-MA100 與GARCH-Normal-CCC模型的優劣，或是比較 CARR-Normal-DCC、CARR-Normal-MA100 與CARR-Normal-CCC模型的優劣時意義不大，且為了排除估計偏誤的發生可能以及將評比重點放在相關係數模型的比較上，本節研究在 99%信心水準下，以GARCH-VaR-x模型與CARR-VaR-x模型為單一資產報酬的風險值估計模型，並依序搭配DCC模型、MA100 模型與CCC模型做為相關係數的估計模型，藉以比較在 99%信心水準下此三種相關係數模型在投資組合風險值估計上的表現。

表 21 為 95%信心水準下，投資組合風險值的估計結果表，我們將表分成兩個部分討論，左半部為單一資產報酬的風險值模型採用 GARCH-Normal 模型，並搭配 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型做為相關係數估計模型，所得到的 GARCH-Normal-DCC 估計法、GARCH-Normal-MA100 估計法以及 GARCH-Normal-CCC 估計法，表的右半部為單一資產報酬的風險值模型採用 CARR-Normal 模型，並搭配 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型做為相關係數估計模型，所得到的 CARR-Normal-DCC 估計法、CARR-Normal-MA100 估計法以及 CARR-Normal-CCC 估計法。由表中各模型穿透次數的比較可以得知，不論在報酬基礎下或是變幅基礎下，利用 DCC 模型做為相關係數估計模型，所求得的投資組合風險值模型，表現皆較 MA100 甚至是 CCC 模型為佳。為了更進一步探討 DCC 模型相較於 MA100 與 CCC 模型，對於投資組合風險值估計的改善幅度，我們求算以 DCC 模型做為相關係數估計模型時，在投資組合風險值估計的準確性上，相對於 MA100 與 CCC 模型的改善百分比，結果列於表 22，顯示 DCC 模型相較於 MA100 與 CCC 模型，對於風險值估計的準確性皆有改善，且變幅基礎下的 DCC 模型改善幅度較報酬基礎下的 DCC 模型為大。

表 23 則為 99%信心水準下投資組合風險值的估計結果表，由表中各模型穿透次數的比較可以得知，不論在報酬基礎下或是變幅基礎下，利用 DCC 模型做為相關係數估計模型，所求得的投资組合風險值模型，表現皆較 MA100 甚至是 CCC 模型為佳，而在相關係數模型比較上，其結果列於表 24，顯示 DCC 模型相較於 MA100 與 CCC 模型，對於風險值估計準確性的改善情形，甚至比信心水準為 95%下時顯著，且變幅基礎下的 DCC 模型的改善幅度亦略比報酬基礎下的 DCC 模型顯著。由此可知，變幅基礎下的 DCC 相關係數估計模型提供投資組合風險值模型一個很好的輔助工具。



## 第陸章、結論

風險值模型對於真實分配的掌握是計算風險值準確性最重要的因素，而其中非常態特徵與資料波動性會因時而異的特性，是真實分配最顯著且普遍的性質。因此，本文藉由美國 S&P 500 股價指數與十年期財政部政府公債為研究對象，從資產報酬分配的厚尾性質、條件波動性以及 CARR 模型在波動性預測上的適用性三個面向出發，探討不同風險值模型的衡量績效，實證所得的結論大致可歸納為下列四點：

- 一、在資產報酬分配型態的認定上，考慮報酬分配厚尾性質的極值理論風險值模型，在信心水準較高的情形下，表現較傳統常態分配假設的風險值模型佳；而在低信心水準的情形下，則以常態假設下的模型對於風險值的掌握較好。
- 二、在條件波動性性質的衡量上，考量條件波動性的動態風險值模型，不論是在整體風險值衡量或是捕捉極值的能力上，皆較靜態模型穩定，顯示對資產報酬波動性的掌握，之於風險值估計來說相當重要。
- 三、相對於 GARCH 模型只採用收盤價進行波動性預測，CARR 模型引入了最高價及最低價兩種不同資訊協助建立模型並進行波動性行為的分析。直觀上，CARR 模型所蘊含的市場資訊相對豐富，因此在波動性行為的預測上，CARR 模型應該可以較 GARCH 模型精確。本文實證發現，利用 CARR 模型做為波動性預測指標的動態風險值模型，在風險值的衡量上，比 GARCH 模型做為波動性預測指標的動態風險值模型估計準確，因此可以驗證 CARR 模型的樣本外波動性預測較 GARCH 模型準確的推論，顯示出變幅

在波動性的衡量上的確較報酬率為佳。

四、在投資組合風險值評估方面，得到變幅基礎下的投資組合風險值模型優於報酬基礎下的投資組合風險值模型的結果。此外，DCC 模型對於資產報酬間相關性的捕捉能力亦明顯優於 MA100 與 CCC 模型，顯示資產報酬相關係數的估計，對投資組合的風險值估計來說相當重要。

除此之外，本研究尚針對風險值模型的保守性、準確性及效率性，綜合分析各模型表現，結果更強化上述四點論述的成立。



## 表附錄

表 1. S&P 500 股價指數與十年期政府公債資料單根檢定 (1993/11/1~2006/3/17)

資料型態	ADF
S&P 500 (收盤價)	-1.4598
十年期政府公債 (殖利率)	-1.4325
	ADF
S&P 500 (日報酬率)	-56.5833***
十年期政府公債 (日報酬率)	-52.9150***

註：(1) ADF (Augment Dickey-Fuller) 為 Dickey 和 Fuller (1979, 1981) 單根檢定的統計值。ADF 檢定落後階數的選擇是以 SBC (Schwarz Bayesian information criterion) 為基準，選定階數結果為 0 期。

(2)  $H_0$ ：資料具有單根， $H_1$ ：資料不具有單根。

(3) \*\*\*表示在 1% 顯著水準下顯著。



表 2. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率敘述統計表 (1993/11/1~2006/3/17)

敘述統計量	S&P500	十年期政府公債
平均數 (%)	0.033	0.005
中位數 (%)	0.051	0
最大值 (%)	5.574	5.090
最小值 (%)	-7.113	-5.972
標準差 (%)	1.070	1.180
偏態係數	-0.115	-0.381
峰態係數	6.644	5.164
常態性檢定		
Jarque-Bera	1722.171***	680.110***
	(0)	(0)
< -1.65 樣本比例 (%) <sup>a</sup>	5.923%	5.962%
< -1.96 樣本比例 (%)	3.692%	4%
< -2.33 樣本比例 (%)	2.039%	2.269%
一階自我相關檢定		
Q(6)	10.321*	16.032**
	(0.1)	(0.014)
Q(12)	24.105**	26.274***
	(0.02)	(0.01)
二階自我相關檢定		
Q <sup>2</sup> (6)	598.84***	232***
	(0)	(0)
Q <sup>2</sup> (12)	948.47***	408.93***
	(0)	(0)

註：(1) 偏態係數檢視分配的偏態分佈情形，偏態係數為 0 代表為對稱分配；峰態係數檢視分配的峰度高低，常態分配的峰態係數為 3。

(2)  $Jarque-Bera = \frac{N}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2 \right) \sim \chi^2(2)$ ，可以對樣本分配進行常態性檢定，虛無假設為樣本服從常態分配，

$N$  為樣本個數、 $S$  為偏態係數、 $K$  為峰態係數，又當顯著水準  $\alpha=5\%$ ，則  $\chi^2_{1-\alpha}(2) = 5.99$ ，即在 95% 的信賴水準下，若所求得樣本的 Jarque-Bera 值大於臨界值 5.99 時，則拒絕常態分配的假設。

(3)  $a$  係指標準化資料小於此臨界值之個數佔總樣本數之比例。

(4)  $Q$  係指 Ljung-Box (1978) 所提出修正 Box 與 Pierce (1970) 的檢定統計量， $Q^* = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\tau}_k^2}{T-k} \sim \chi_m^2$ ， $\hat{\tau}_k$  為

落後  $k$  期的 ACF、 $T$  為樣本數、 $m$  為最大落後期數。 $Q(6)$  表示日報酬率落後 6 期的  $Q$  統計值，其虛無假設表示直到 6 期之前日報酬率不存在統計上的自我相關。 $Q^2(6)$  表示日報酬率平方項數列落後 6 期的  $Q$  統計值，其虛無假設表示直到 6 期之前日報酬率平方項數列不存在統計上的自我相關。

(5) 括號內數值為 P 值。\*、\*\*及\*\*\*分別表示在 10%、5%及 1%顯著水準下顯著。

表 3. S&P 500 股價指數與十年期政府公債殖利率日變幅敘述統計表 (1993/11/1~2006/3/17)

敘述統計量	S&P500	十年期政府公債
平均數 (%)	1.318	1.399
中位數 (%)	1.111	1.193
最大值 (%)	8.479	7.259
最小值 (%)	0.239	0
標準差 (%)	0.821	0.873
Jarque-Bera	13593.940*** (0)	5008.238*** (0)
一階自我相關檢定		
$Q(6)$	4395.3*** (0)	1279.8*** (0)
$Q(12)$	7870.4*** (0)	2343.3*** (0)

註：(1) 變幅 =  $100 \times [\ln(P_t^{high}) - \ln(P_t^{low})]$ ，其中  $P_t^{high}$  為最高價而  $P_t^{low}$  為最低價。

(2)  $Q(6)$  表示日變幅數列落後 6 期的  $Q$  統計值，其虛無假設表示直到 6 期之前日變幅數列不存在統計上的自我相關。

(3) 括號內數值為 P 值。

(4) \*\*\*表示在 1% 顯著水準下顯著。



表 4. ARMA(1, 1)–GARCH( $p, q$ )與 CARR( $p, q$ )模型 SBC 值統計表 (1993/11/1~2006/3/17)

此表為使用 S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率配適 ARMA(1, 1)–GARCH( $p, q$ )模型，以及 S&P 500 股價指數與十年期政府公債殖利率日變幅配適 CARR( $p, q$ )模型，所得之 SBC 值統計表，ARMA(1, 1)–GARCH( $p, q$ )與 CARR( $p, q$ )模型公式如下：

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega^G + \sum_{i=1}^p \alpha_i^G \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^G \sigma_{t-j}^2$$

$$\mathfrak{R}_t = \lambda_t u_t, \quad u_t | I_{t-1} \sim f(1, \xi_t)$$

$$\lambda_t = \omega^C + \sum_{i=1}^p \alpha_i^C \mathfrak{R}_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j^C \lambda_{t-j}$$

模型設定	SBC	
	S&P 500	十年期政府公債
ARMA(1, 1)–GARCH( $p, q$ )		
ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)	2.707647	3.054365
ARMA(1, 1)–GARCH(1, 2)	2.708116	3.056855
ARMA(1, 1)–GARCH(2, 1)	2.710445	3.056854
ARMA(1, 1)–GARCH(2, 2)	2.708884	3.059316
	SBC	
CARR( $p, q$ )		
CARR(1, 1)	2.706156	3.145479
CARR(1, 2)	2.708431	3.147904
CARR(2, 1)	2.707892	3.147961
CARR(2, 2)	2.709374	3.150371

註：SBC (Schwarz Bayesian information criterion) =  $\ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{L}{T} \ln(T)$ ， $\hat{\sigma}^2$  為殘差變異數， $L$

為待估參數總數， $T$  為樣本總數。



表 5. ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與 CARR(1, 1)模型參數估計結果 (1993/11/1~2006/3/17)

此表為使用 S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率資料配適 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1) 模型，以及使用 S&P 500 股價指數與十年期政府公債殖利率日變幅資料配適 CARR(1, 1)模型，所得之模型參數估計結果表，ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)與 CARR(1, 1)模型公式如下：

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | I_{t-1} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega^G + \alpha_1^G \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^G \sigma_{t-1}^2$$

$$\mathfrak{R}_t = \lambda_t u_t, \quad u_t | I_{t-1} \stackrel{iid}{\sim} f(1, \xi_t)$$

$$\lambda_t = \omega^C + \alpha_1^C \mathfrak{R}_{t-1} + \beta_1^C \lambda_{t-1}$$

ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)		
	S&P 500	十年期政府公債
$\mu$	0.0561*** (3.9315)	0.0154 (0.8147)
$\phi_1$	-0.8810*** (-3.8841)	-0.3867* (-1.6963)
$\theta_1$	0.8730*** (3.7317)	0.4282* (1.9306)
$\omega^G$	0.0069*** (2.7161)	0.0139*** (2.4017)
$\alpha_1^G$	0.0714*** (6.1137)	0.0449*** (4.8773)
$\beta_1^G$	0.9245*** (86.0830)	0.9451*** (81.0940)
CARR(1, 1)		
	S&P 500	十年期政府公債
$\omega^C$	0.0150*** (3.7937)	0.0164*** (3.2064)
$\alpha_1^C$	0.1372*** (11.3993)	0.0683*** (8.0726)
$\beta_1^C$	0.8514*** (66.3967)	0.9198*** (87.1971)

註：(1)  $\mu$ 、 $\phi_1$ 與 $\theta_1$ 為 ARMA(1, 1)模型中的參數估計值， $\omega^G$ 、 $\alpha_1^G$ 與 $\beta_1^G$ 為 GARCH(1, 1)模型中的參數估計值， $\omega^C$ 、 $\alpha_1^C$ 與 $\beta_1^C$ 為 CARR(1, 1)模型中的參數估計值。

(2) 括號內數值為 t 值。

(3) \*及\*\*\*分別表示在 10%及 1%顯著水準下顯著。

表 6. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率殘差項敘述統計表(1993/11/1~2006/3/17)

敘述統計量	ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)		ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)	
	S&P 500	十年期政府公債	S&P 500	十年期政府公債
平均數 (%)	-0.003	0.012	-0.002	0.009
標準差 (%)	0.9995	0.9988	0.9225	0.9753
偏態係數	-0.419	-0.161	-0.333	-0.185
峰態係數	4.579	4.506	3.965	4.653
常態性檢定				
Jarque-Bera	412.94***	306.49***	177.45***	370.81***
	(0)	(0)	(0)	(0)
一階自我相關檢定				
$Q(6)$	6.226	5.465	3.935	6.22
	(0.398)	(0.486)	(0.685)	(0.399)
$Q(12)$	17.144	13.299	15.857	13.877
	(0.144)	(0.348)	(0.198)	(0.309)
二階自我相關檢定				
$Q^2(6)$	4.358	6.548	4.082	10.409
	(0.628)	(0.365)	(0.666)	(0.108)
$Q^2(12)$	5.507	9.471	6.791	13.484
	(0.939)	(0.662)	(0.871)	(0.335)

註：(1) 左邊欄位為  $(z_{t-n+1}^G, \dots, z_t^G) = \left( \frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right)$  之敘述統計量及檢定表，

其中  $\hat{\mu}_t$  和  $\hat{\sigma}_t$  為利用 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1) 模型所求得的估計值。右邊欄位為

$(z_{t-n+1}^C, \dots, z_t^C) = \left( \frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\lambda}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\lambda}_t} \right)$  之敘述統計量及檢定表，其中  $\hat{\mu}_t$  和  $\hat{\sigma}_t$

為利用 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1) 模型所求得的估計值。

- (2) 偏態係數檢視殘差分配的偏態分佈情形，偏態係數為 0 代表殘差分配為對稱分配；峰態係數檢視殘差分配的峰度高低，常態分配的峰態係數為 3。
- (3)  $Q(6)$  表示日報酬率殘差項數列落後 6 期的  $Q$  統計值，其虛無假設表示直到 6 期之前日報酬率殘差項數列不存在統計上的自我相關。 $Q^2(6)$  表示日報酬率殘差平方項數列落後 6 期的  $Q$  統計值，其虛無假設表示直到 6 期之前日報酬率殘差平方項數列不存在統計上的自我相關。
- (4) 括號內數值為 P 值。
- (5) \*\*\* 表示在 1% 顯著水準下顯著。

表 7. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率極端損失間距之累積分配表  
(1993/11/1~2006/3/17)

此表主要檢視 S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率極端損失的波動叢聚效果。表中統計數字為 31 個最大損失的前後期時間間距，小於目標交易天數的累積次數。由於有 31 個極端值，共 30 個時間區間，故累積總次數為 30 次。

極端值時間間距	時間間距累積次數	
	S&P 500	十年期政府公債
1 天	2	2
≤ 3 天	6	3
≤ 1 週	6	5
≤ 2 週	10	8
≤ 1 月	17	13
≤ 1 季	22	21
≤ 半年	26	25
≤ 1 年	28	27
≤ 2 年	30	29
≤ 3 年		30

註：1 週交易天數有 5 天，1 個月交易天數有 21 天，1 季交易天數有 63 天，半年交易天數有 126 天，1 年交易天數有 252 天。

表 8. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率分配尾部指數估計值 (1995/10/30~2006/3/17)

S&P 500	全部 期間	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$\gamma$ (GARCH)	0.174	0.207	0.250	0.281	0.287	0.226	0.149	0.122	0.127	0.146	0.107	0.062	0.068
$\gamma$ (CARR)	0.165	0.202	0.257	0.285	0.287	0.223	0.141	0.099	0.091	0.137	0.095	0.053	0.055
$\alpha$ (GARCH)	5.749	4.824	3.996	3.564	3.489	4.418	6.710	8.216	7.868	6.862	9.347	16.212	14.760
$\alpha$ (CARR)	6.051	4.953	3.887	3.504	3.483	4.484	7.084	10.087	10.938	7.304	10.514	18.914	18.318
樣本數	2600	43	251	250	250	250	252	248	250	252	252	250	52
十年期政府公債	全部 期間	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$\gamma$ (GARCH)	0.222	0.238	0.306	0.336	0.262	0.233	0.192	0.185	0.156	0.158	0.228	0.169	0.161
$\gamma$ (CARR)	0.220	0.242	0.293	0.314	0.270	0.227	0.196	0.210	0.171	0.137	0.212	0.172	0.173
$\alpha$ (GARCH)	4.513	4.199	3.273	2.976	3.816	4.294	5.211	5.394	6.396	6.329	4.380	5.910	6.195
$\alpha$ (CARR)	4.551	4.139	3.412	3.189	3.698	4.408	5.100	4.751	5.832	7.288	4.711	5.803	5.776
樣本數	2600	43	251	250	250	250	252	248	250	252	252	250	52

註：(1)  $\gamma$  (GARCH) 係指利用 ARMA(1, 1)-GARCH(1, 1)模型標準化後的殘差項資料所求得的尾部指數估計值， $\gamma$  (CARR) 係指利用 ARMA(1, 1)-CARR(1,

1)模型標準化後的殘差項資料所求得的尾部指數估計值。

(2)  $\alpha$  (GARCH) 估計值為  $\gamma$  (GARCH) 估計值的倒數， $\alpha$  (CARR) 估計值為  $\gamma$  (CARR) 估計值的倒數。

(3) 由於取樣期間的關係，故 1995 年與 2006 年分別只有 43 與 52 筆資料。

表 9. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下靜態（非條件）風險值模型之穿透次數表（1995/10/30~2006/3/17）

	HS	Delta-Normal	VaR-x	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後
<b>95%信心水準</b>				
S&P 500	139	138	159	166
十年期政府公債	141	131	174	176
<b>97.5%信心水準</b>				
S&P 500	78	81	80	88
十年期政府公債	74	89	86	90
<b>99%信心水準</b>				
S&P 500	39	53	34	37
十年期政府公債	38	58	44	43
<b>99.5%信心水準</b>				
S&P 500	19	33	15	18
十年期政府公債	20	45	25	25

註：(1) HS 係指歷史模擬法，Delta-Normal 指傳統常態假設下靜態風險值模型，VaR-x（GARCH 過濾後）模型係指 GARCH 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，VaR-x（CARR 過濾後）模型係指 CARR 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型。表中統計數字為各模型穿透次數。

(2) 95%信心水準下之理論失敗次數為 130 次、97.5%信心水準下之理論失敗次數為 65 次、99%信心水準下之理論失敗次數為 26 次、99.5%信心水準下之理論失敗次數為 13 次。

表 10. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下動態（條件）風險值模型之穿透次數表（1995/10/30~2006/3/17）

	常態假設下			極值理論之下	
	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
<b>95%信心水準</b>					
S&P 500	144	144	137	163	167
十年期政府公債	130	128	131	150	157
<b>97.5%信心水準</b>					
S&P 500	96	87	73	84	77
十年期政府公債	78	83	77	81	78
<b>99%信心水準</b>					
S&P 500	51	46	39	30	31
十年期政府公債	52	52	45	37	28
<b>99.5%信心水準</b>					
S&P 500	34	29	27	12	13
十年期政府公債	36	36	31	20	15

註：(1) EWMA 係指 RiskMetrics 的變異數—共變異數法以 EWMA 模型為波動性估計模型所得之動態（條件）風險值模型，GARCH-Normal 係指變異數—共變異數法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態（條件）風險值模型，CARR-Normal 係指變異數—共變異數法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態（條件）風險值模型，GARCH-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型，CARR-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型。表中統計數字為各模型穿透次數。

(2) 95%信心水準下之理論失敗次數為 130 次、97.5%信心水準下之理論失敗次數為 65 次、99%信心水準下之理論失敗次數為 26 次、99.5%信心水準下之理論失敗次數為 13 次。

表 11. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 95%、97.5%、99%及 99.5%信心水準下由靜態（非條件）風險值模型至動態（條件）風險值模型的改善百分比表（1995/10/30~2006/3/17）

	常態假設下			極值理論之下	
	Delta-Normal	Delta-Normal	Delta-Normal	VaR-x	VaR-x
	至 EWMA	至 GARCH-Normal	至 CARR-Normal	至 GARCH-VaR-x	至 CARR-VaR-x
<b>95%信心水準</b>					
S&P 500	-4.62%	-4.62%	0.77%	-3.08%	-0.77%
十年期政府公債	0.77%	-0.77%	0.00%	18.46%	14.62%
<b>97.5%信心水準</b>					
S&P 500	-11.54%	-4.62%	6.15%	-3.08%	8.46%
十年期政府公債	8.46%	4.62%	9.23%	3.85%	9.23%
<b>99%信心水準</b>					
S&P 500	1.54%	5.38%	10.77%	3.08%	4.62%
十年期政府公債	4.62%	4.62%	10.00%	5.38%	11.54%
<b>99.5%信心水準</b>					
S&P 500	-0.77%	3.08%	4.62%	0.77%	3.85%
十年期政府公債	6.92%	6.92%	10.77%	3.85%	7.69%

註：(1) 此表主要檢視由靜態至動態風險值模型的估計改善情形。上列的模型如 Delta-Normal 法及 VaR-x 法為靜態風險值模型，下列的模型如 EWMA 法、GARCH-Normal 法、CARR-Normal 法、GARCH-VaR-x 法及 CARR-VaR-x 法則為動態風險值模型。表中統計數字為由上列模型轉換至下列模型的估計準確度改善百分比。

(2) 95%信心水準下之理論失敗次數為 130 次、97.5%信心水準下之理論失敗次數為 65 次、99%信心水準下之理論失敗次數為 26 次、99.5%信心水準下之理論失敗次數為 13 次。

表 12. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 95%信心水準下風險值模型之逐年穿透次數表 (1995/10/30~2006/3/17)

信心 水準	年份	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
				GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
95%	1995-1996	21 (18)	20 (12)	26 (20)	26 (19)	18 (13)	17 (13)	18 (13)	23 (16)	20 (18)
	1997	25 (8)	26 (7)	29 (10)	29 (10)	13 (8)	16 (8)	17 (6)	19 (10)	20 (9)
	1998	21 (21)	18 (18)	21 (20)	24 (20)	14 (10)	18 (14)	15 (12)	20 (16)	23 (16)
	1999	12 (15)	10 (13)	15 (18)	17 (18)	16 (14)	14 (13)	11 (16)	17 (17)	15 (20)
	2000	16 (3)	18 (3)	21 (8)	22 (9)	19 (8)	18 (7)	18 (7)	19 (11)	19 (8)
	2001	13 (29)	16 (28)	16 (32)	16 (33)	13 (16)	13 (17)	13 (21)	15 (19)	15 (22)
	2002	20 (24)	19 (23)	20 (28)	20 (29)	13 (16)	14 (18)	11 (16)	14 (18)	14 (19)
	2003	4 (15)	4 (17)	4 (21)	4 (21)	8 (15)	6 (14)	6 (11)	7 (16)	7 (11)
	2004	0 (3)	0 (4)	0 (11)	1 (11)	15 (12)	14 (10)	12 (13)	15 (12)	16 (17)
	2005-2006	7 (5)	7 (6)	7 (6)	7 (6)	15 (18)	14 (14)	16 (16)	14 (15)	18 (17)

註：(1) HS 係指歷史模擬法，Delta-Normal 指傳統常態假設下靜態風險值模型，VaR-x (GARCH 過濾後) 模型係指 GARCH 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，VaR-x (CARR 過濾後) 模型係指 CARR 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，EWMA 係指 RiskMetrics 的變異數—共變異數法以 EWMA 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-Normal 係指變異數—共變異數法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，CARR-Normal 係指變異數—共變異數法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型，CARR-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型。

(2) 表中統計數字為各模型逐年穿透次數，無括號數值為 S&P 500 的穿透次數，括號內數值為十年期政府公債的穿透次數。

(3) 除了 1995-1996 年的平均穿透次數約為 14.7 次而 2005-2006 年的平均穿透次數約為 15.1 次之外，其餘年度的平均穿透次數皆為 12.5 次。



表 13. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率在 99%信心水準下風險值模型之逐年穿透次數表 (1995/10/30~2006/3/17)

信心 水準	年份	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
				GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
99%	1995-1996	8 (5)	13 (7)	10 (4)	10 (4)	11 (7)	11 (7)	10 (7)	8 (6)	9 (5)
	1997	7 (2)	10 (4)	7 (2)	7 (1)	5 (4)	5 (4)	6 (4)	5 (3)	4 (2)
	1998	6 (7)	7 (11)	6 (7)	6 (7)	8 (3)	7 (5)	6 (3)	4 (3)	6 (2)
	1999	0 (2)	1 (4)	0 (4)	0 (4)	3 (8)	3 (7)	2 (5)	0 (4)	1 (3)
	2000	4 (0)	7 (0)	4 (0)	5 (0)	6 (3)	6 (0)	6 (2)	4 (0)	4 (0)
	2001	4 (10)	5 (14)	3 (10)	4 (10)	4 (8)	3 (9)	2 (8)	2 (6)	2 (8)
	2002	6 (7)	6 (9)	3 (8)	4 (8)	3 (7)	4 (7)	2 (5)	2 (7)	2 (4)
	2003	1 (4)	1 (8)	0 (8)	0 (8)	1 (7)	0 (7)	1 (5)	0 (6)	0 (3)
	2004	0 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (1)	6 (2)	3 (1)	0 (4)	2 (1)	0 (1)
	2005-2006	3 (0)	3 (0)	1 (0)	1 (0)	4 (3)	4 (5)	4 (2)	3 (1)	3 (0)

註：(1) HS 係指歷史模擬法，Delta-Normal 指傳統常態假設下靜態風險值模型，VaR-x (GARCH 過濾後) 模型係指 GARCH 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，VaR-x (CARR 過濾後) 模型係指 CARR 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，EWMA 係指 RiskMetrics 的變異數—共變異數法以 EWMA 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-Normal 係指變異數—共變異數法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，CARR-Normal 係指變異數—共變異數法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型，CARR-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型。

(2) 表中統計數字為各模型逐年穿透次數，無括號數值為 S&P 500 的穿透次數，括號內數值為十年期政府公債的穿透次數。

(3) 除了 1995-1996 年的平均穿透次數約為 2.94 次而 2005-2006 年的平均穿透次數約為 3.02 次之外，其餘年度的平均穿透次數皆為 2.5 次。

表 14. S&P 500 股價指數與十年期政府公債日報酬率 31 個最大損失以及所有損失在 99%信心水準下各風險值模型的穿透百分比 (1995/10/30~2006/3/17)

	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
S&P 500									
極端值穿透百分比	77%	83%	57%	67%	47%	50%	43%	43%	43%
所有損失穿透百分比	1.50%	2.04%	1.31%	1.42%	1.96%	1.77%	1.50%	1.15%	1.19%
十年期政府公債									
極端值穿透百分比	80%	93%	93%	93%	80%	83%	70%	77%	53%
所有損失穿透百分比	1.46%	2.23%	1.69%	1.65%	2.00%	2.00%	1.73%	1.42%	1.08%

註：(1) HS 係指歷史模擬法，Delta-Normal 指傳統常態假設下靜態風險值模型，VaR-x (GARCH 過濾後) 模型係指 GARCH 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，VaR-x (CARR 過濾後) 模型係指 CARR 模型過濾後資料利用 VaR-x 法所得之風險值模型，EWMA 係指 RiskMetrics 的變異數—共變異數法以 EWMA 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-Normal 係指變異數—共變異數法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，CARR-Normal 係指變異數—共變異數法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 (條件) 風險值模型，GARCH-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 GARCH 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型，CARR-VaR-x 係指 VaR-x 估計法以 CARR 模型為波動性估計模型所得之動態 VaR-x 風險值模型。

(2) 表中統計數字為穿透百分比。極端值穿透百分比係指 31 個最大極端損失被 99%信心水準下之風險估計值穿透的次數佔此 31 個極端損失數目的百分比。所有損失穿透百分比係指所有報酬率資料被 99%信心水準下之風險估計值穿透的次數佔全部資料數目的百分比。

表 15. S&P 500 股價指數日報酬在 95%信心水準下之風險值模型檢定分析 (1995/10/30~2006/3/17)

	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
理論穿透次數	130	130	130	130	130	130	130	130	130
實際穿透次數	139	138	159	166	144	144	137	163	167
<b>保守性分析</b>									
MRB	0.0353	0.0486	0.0050	-0.0262	0.0029	0.0074	0.0212	-0.0395	-0.0547
RMSRB	0.1610	0.1600	0.1690	0.1550	0.1832	0.1353	0.1457	0.1184	0.1356
<b>準確性分析</b>									
BLF	5.35%	5.31%	6.12%	6.38%	5.54%	5.54%	5.27%	6.27%	6.42%
平均失敗誤差	0.0384	0.0375	0.0423	0.0450	0.0366	0.0346	0.0308	0.0390	0.0374
$LR_{uc}$	0.6420	0.5084	6.3774**	9.6858**	1.5358	1.5358	0.3902	8.1892***	10.2105***
$LR_{ind}$	1.6888	1.8070	2.8372	3.8092	0.5359	0.5359	1.9295	0.3354	2.6164
$LR_{cc}$	2.3308	2.3154	9.2146***	13.4950**	2.0717	2.0717	2.3197	8.5245**	12.8268***
MOC	1.0444	1.0280	1.0806	1.1120	1.0582	1.0240	1.0136	1.0687	1.0776
<b>效率性分析</b>									
MRSB	0.0241	0.0210	0.0284	0.0254	0.0054	-0.0227	-0.0191	-0.0276	-0.0349
誤差效率性	1.0792	1.0774	1.0919	1.0981	1.0674	1.0647	1.0576	1.0763	1.0739

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。

表 16. 十年期政府公債日報酬在 95%信心水準下之風險值模型檢定分析 (1995/10/30~2006/3/17)

	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
理論穿透次數	130	130	130	130	130	130	130	130	130
實際穿透次數	141	131	174	176	130	128	131	150	157
<b>保守性分析</b>									
MRB	0.0256	0.0449	-0.0367	-0.0396	0.0216	0.0269	0.0481	-0.0534	-0.0375
RMSRB	0.1273	0.1226	0.1143	0.1151	0.1531	0.1091	0.1307	0.1121	0.1134
<b>準確性分析</b>									
BLF	5.42%	5.04%	6.69%	6.77%	5.00%	4.92%	5.04%	5.77%	6.04%
平均失敗誤差	0.0483	0.0482	0.0554	0.0566	0.0393	0.0411	0.0384	0.0479	0.0464
$LR_{uc}$	0.9546	0.0081	14.2378***	15.5003***	0.0000	0.0325	0.0081	3.0926	5.5516**
$LR_{ind}$	11.8015***	4.0310**	3.4846	1.4731	0.0441	0.0165	0.4673	0.0575	0.2626
$LR_{cc}$	12.7560***	4.0390	17.7223***	16.9733***	0.0441	0.0490	0.4754	3.1501	5.8142
MOC	1.0324	1.0023	1.0920	1.0921	1.0000	0.9956	1.0011	1.0749	1.0744
<b>效率性分析</b>									
MRSB	0.0190	0.0078	0.0122	0.0092	-0.0168	-0.0161	0.0099	-0.0209	-0.0049
誤差效率性	1.0657	1.0630	1.0782	1.0800	1.0602	1.0603	1.0534	1.0746	1.0681

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。

表 17. S&P 500 股價指數日報酬在 99%信心水準下之風險值模型檢定分析 (1995/10/30~2006/3/17)

	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
理論穿透次數	26	26	26	26	26	26	26	26	26
實際穿透次數	39	53	34	37	51	46	39	30	31
<b>保守性分析</b>									
MRB	0.0380	-0.0237	0.0828	0.0416	-0.0720	-0.0667	-0.0544	0.0389	0.0156
RMSRB	0.1575	0.1592	0.1777	0.1444	0.1684	0.1290	0.1307	0.1401	0.1477
<b>準確性分析</b>									
BLF	1.50%	2.04%	1.31%	1.42%	1.96%	1.77%	1.50%	1.15%	1.19%
平均失敗誤差	0.0119	0.0151	0.0111	0.0120	0.0136	0.0127	0.0111	0.0093	0.0084
$LR_{uc}$	5.6920**	21.7769***	2.2668	4.1558**	18.9639***	12.6459***	5.6920**	0.5923	0.9149
$LR_{ind}$	5.2891**	4.9683**	6.7442***	5.8371**	2.7523	3.6705	0.2510	3.8961**	0.7556
$LR_{cc}$	10.9811***	26.7452***	9.0110**	9.9929***	21.7162***	16.3163***	5.9430	4.4884	1.6705
MOC	1.0950	1.1971	1.0919	1.0963	1.1628	1.1526	1.1346	1.0630	1.0143
<b>效率性分析</b>									
MRSB	0.0239	0.0524	0.0648	0.0285	-0.0282	-0.0311	-0.0334	-0.0050	-0.0718
誤差效率性	1.0250	1.0335	1.0254	1.0267	1.0250	1.0249	1.0223	1.0184	1.0172

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。

表 18. 十年期政府公債日報酬在 99%信心水準下之風險值模型檢定分析 (1995/10/30~2006/3/17)

	HS	Delta-Normal	VaR-x		常態假設下			極值理論之下	
			GARCH 過濾後	CARR 過濾後	EWMA	GARCH-Normal	CARR-Normal	GARCH-VaR-x	CARR-VaR-x
理論穿透次數	26	26	26	26	26	26	26	26	26
實際穿透次數	38	58	44	43	52	52	45	37	28
<b>保守性分析</b>									
MRB	0.1074	-0.0643	0.0533	0.0461	-0.0846	-0.0798	-0.0611	0.0345	0.0486
RMSRB	0.1763	0.1154	0.1258	0.1207	0.1607	0.1253	0.1254	0.1078	0.1273
<b>準確性分析</b>									
BLF	1.46%	2.23%	1.69%	1.65%	2.00%	2.00%	1.73%	1.42%	1.08%
平均失敗誤差	0.0128	0.0216	0.0158	0.0160	0.0148	0.0156	0.0137	0.0104	0.0094
$LR_{uc}$	4.8972**	29.4716***	10.4223***	9.3794***	20.3508***	20.3508***	11.5115***	4.1558**	0.1516
$LR_{ind}$	9.5619***	9.8061***	7.4430***	7.7666***	2.1234	2.1234	0.0596	1.0687	1.0360
$LR_{cc}$	14.4592***	39.2778***	17.8654***	17.1460***	22.4742***	22.4742***	11.5711***	5.2245	1.1876
MOC	1.1400	1.3098	1.2357	1.2356	1.2264	1.2259	1.1749	1.0972	1.0590
<b>效率性分析</b>									
MRSB	0.0636	0.0324	0.0966	0.0890	-0.0542	-0.0496	-0.0703	-0.0435	-0.0640
誤差效率性	1.0138	1.0233	1.0164	1.0163	1.0238	1.0230	1.0194	1.0168	1.0138

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。

表 19. 投資組合日報酬在 95%信心水準下動態風險值模型評比 (1995/10/30~2006/3/17)

	EWMA	常態假設下		極值理論之下	
		GARCH-Normal-DCC	CARR-Normal-DCC	GARCH-VaR-x-DCC	CARR-VaR-x-DCC
理論穿透次數	130	130	130	130	130
實際穿透次數	145	126	126	151	151
<b>保守性分析</b>					
MRB	0.0010	0.0275	0.0452	-0.0401	-0.0381
RMSRB	0.1664	0.1330	0.1501	0.1200	0.1269
<b>準確性分析</b>					
BLF	5.58%	4.85%	4.85%	5.81%	5.81%
平均失敗誤差	0.0273	0.0247	0.0226	0.0287	0.0275
$LR_{uc}$	1.7591	0.1308	0.1308	3.4022	3.4022
$LR_{ind}$	1.8751	0.0021	0.3409	0.5950	0.1860
$LR_{cc}$	3.6342	0.1330	0.4717	3.9972	3.5882
MOC	1.0539	0.9950	0.9875	1.0531	1.0591
<b>效率性分析</b>					
MRSB	0.0174	-0.0141	-0.0142	-0.0252	-0.0176
誤差效率性	1.0726	1.0619	1.0557	1.0749	1.0711

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。

表 20. 投資組合日報酬在 99%信心水準下動態風險值模型評比 (1995/10/30~2006/3/17)

	EWMA	常態假設下		極值理論之下	
		GARCH-Normal-DCC	CARR-Normal-DCC	GARCH-VaR-x-DCC	CARR-VaR-x-DCC
理論穿透次數	26	26	26	26	26
實際穿透次數	58	51	46	31	27
<b>保守性分析</b>					
MRB	-0.0882	-0.0638	-0.0477	0.0516	0.0480
RMSRB	0.1700	0.1302	0.1363	0.1378	0.1444
<b>準確性分析</b>					
BLF	2.23%	1.96%	1.77%	1.19%	1.04%
平均失敗誤差	0.0107	0.0090	0.0078	0.0058	0.0053
$LR_{uc}$	29.4717***	18.9640***	12.6459***	0.9149	0.0384
$LR_{ind}$	0.0758	0.0000	0.0411	0.7485	0.5669
$LR_{cc}$	29.5474***	18.9640***	12.6870***	1.6634	0.6053
MOC	1.2505	1.2064	1.1243	1.0817	1.0216
<b>效率性分析</b>					
MRSB	0.0389	0.0293	-0.0242	0.0367	-0.0242
誤差效率性	1.0282	1.0237	1.0211	1.0172	1.0160

註：(1) MRB 為平均相對偏差值、RMSRB 為均方根相對偏差值、BLF 為二元損失函數值即失敗率、 $LR_{uc}$  為非條件涵蓋比率檢定統計量、 $LR_{ind}$  為獨立性概似比率檢定統計量、 $LR_{cc}$  為條件涵蓋比率檢定統計量、MOC 為覆蓋風險乘數值、MRSB 為平均相對規模偏差值。

(2) \*\*及\*\*\*分別表示在 5%及 1%顯著水準下顯著。



表 21. 投資組合日報酬在 95%信心水準下搭配不同相關係數模型時之動態風險值模型評比 (1995/10/30~2006/3/17)

	GARCH-Normal			CARR-Normal		
	DCC	MA100	CCC	DCC	MA100	CCC
理論穿透次數	130	130	130	130	130	130
實際穿透次數	126	135	63	126	136	62
穿透率	4.85%	5.19%	2.42%	4.85%	5.23%	2.38%

註：第一欄所示為 GARCH-Normal 模型搭配報酬基礎下 DCC 相關係數模型所形成的 GARCH-Normal-DCC 估計法。第二欄所示為 GARCH-Normal 模型搭配 MA100 相關係數模型所形成的 GARCH-Normal-MA100 估計法。第三欄所示為 GARCH-Normal 模型搭配 CCC 相關係數模型所形成的 GARCH-Normal-CCC 估計法。第四欄所示為 CARR-Normal 模型搭配變幅基礎下 DCC 相關係數模型所形成的 CARR-Normal-DCC 估計法。第五欄所示為 CARR-Normal 模型搭配 MA100 相關係數模型所形成的 CARR-Normal-MA100 估計法。第六欄所示為 CARR-Normal 模型搭配 CCC 相關係數模型所形成的 CARR-Normal-CCC 估計法。

表 22. DCC 模型相較於 MA100 與 CCC 模型在 95%信心水準下之投資組合風險值模型估計準確性上的改善幅度 (1995/10/30~2006/3/17)

	GARCH-Normal		CARR-Normal	
	MA100 至 報酬基礎 DCC	CCC 至 報酬基礎 DCC	MA100 至 變幅基礎 DCC	CCC 至 變幅基礎 DCC
改善百分比	0.77%	48.46%	1.54%	49.23%

註：表中第一欄統計數字指單一資產風險值模型為 GARCH-Normal 法，當相關係數估計模型由 MA100 轉換至報酬基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第二欄統計數字指單一資產風險值模型為 GARCH-Normal 法，當相關係數估計模型由 CCC 轉換至報酬基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第三欄統計數字指單一資產風險值模型為 CARR-Normal 法，當相關係數估計模型由 MA100 轉換至變幅基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第四欄統計數字指單一資產風險值模型為 CARR-Normal 法，當相關係數估計模型由 CCC 轉換至變幅基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。

表 23. 投資組合日報酬在 99%信心水準下搭配不同相關係數模型時之動態風險值模型評比 (1995/10/30~2006/3/17)

	GARCH-VaR-x			CARR-VaR-x		
	DCC	MA100	CCC	DCC	MA100	CCC
理論穿透次數	26	26	26	26	26	26
實際穿透次數	31	32	12	27	31	11
穿透率	1.19%	1.23%	0.46%	1.04%	1.19%	0.42%

註：第一欄所示為 GARCH-VaR-x 模型搭配報酬基礎下 DCC 相關係數模型所形成的 GARCH-VaR-x-DCC 估計法。第二欄所示為 GARCH-VaR-x 模型搭配 MA100 相關係數模型所形成的 GARCH-VaR-x-MA100 估計法。第三欄所示為 GARCH-VaR-x 模型搭配 CCC 相關係數模型所形成的 GARCH-VaR-x-CCC 估計法。第四欄所示為 CARR-VaR-x 模型搭配變幅基礎下 DCC 相關係數模型所形成的 CARR-VaR-x-DCC 估計法。第五欄所示為 CARR-VaR-x 模型搭配 MA100 相關係數模型所形成的 CARR-VaR-x-MA100 估計法。第六欄所示為 CARR-VaR-x 模型搭配 CCC 相關係數模型所形成的 CARR-VaR-x-CCC 估計法。

表 24. DCC 模型相較於 MA100 與 CCC 模型在 99%信心水準下之投資組合風險值模型估計準確性上的改善幅度 (1995/10/30~2006/3/17)

	GARCH-VaR-x		CARR-VaR-x	
	MA100	CCC	MA100	CCC
	至	至	至	至
	報酬基礎 DCC	報酬基礎 DCC	變幅基礎 DCC	變幅基礎 DCC
改善百分比	3.85%	34.62%	15.38%	23.08%

註：表中第一欄統計數字指單一資產風險值模型為 GARCH-VaR-x 法，當相關係數估計模型由 MA100 轉換至報酬基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第二欄統計數字指單一資產風險值模型為 GARCH-VaR-x 法，當相關係數估計模型由 CCC 轉換至報酬基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第三欄統計數字指單一資產風險值模型為 CARR-VaR-x 法，當相關係數估計模型由 MA100 轉換至變幅基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。表中第四欄統計數字指單一資產風險值模型為 CARR-VaR-x 法，當相關係數估計模型由 CCC 轉換至變幅基礎下 DCC 模型時，風險值估計準確性的改善百分比率。

### 圖附錄

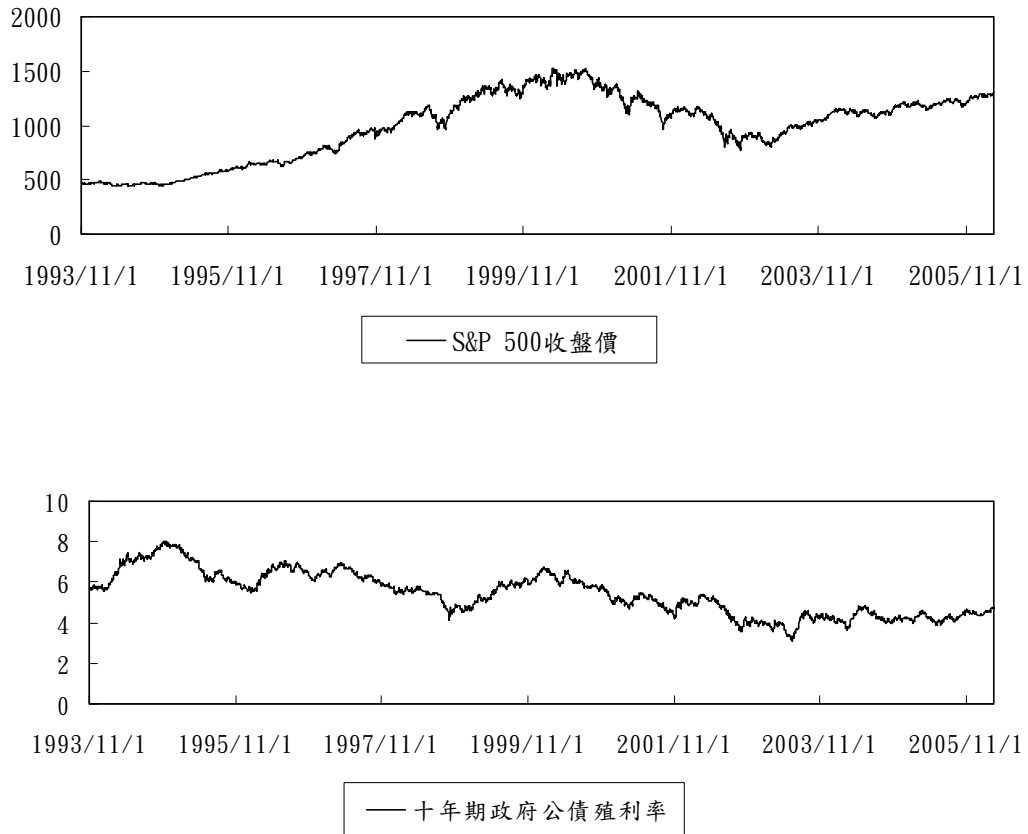
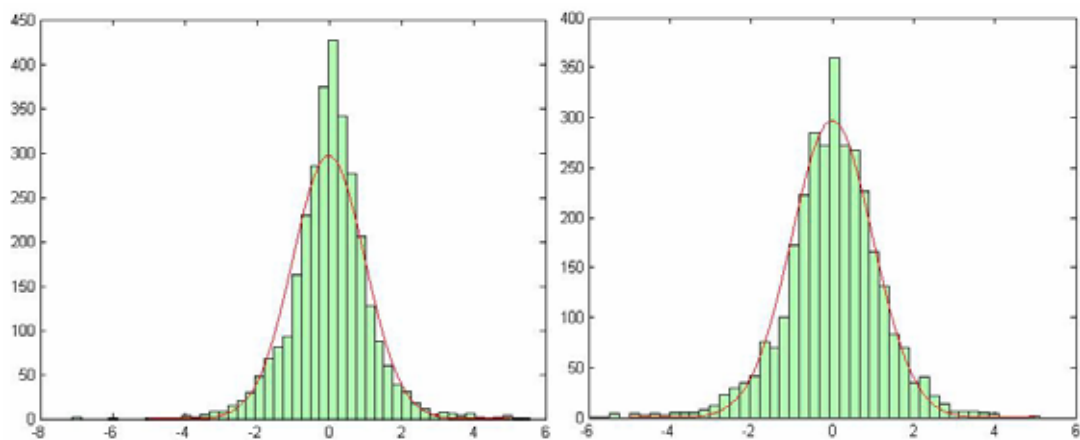


圖 1. S&P 500 指數收盤價與十年期政府公債殖利率走勢圖  
(1993/11/1~2006/3/17)



S&P 500 日報酬率直方圖

十年期政府公債日報酬率直方圖

圖 2. S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率直方圖 vs 常態分配圖  
(1993/11/1~2006/3/17)

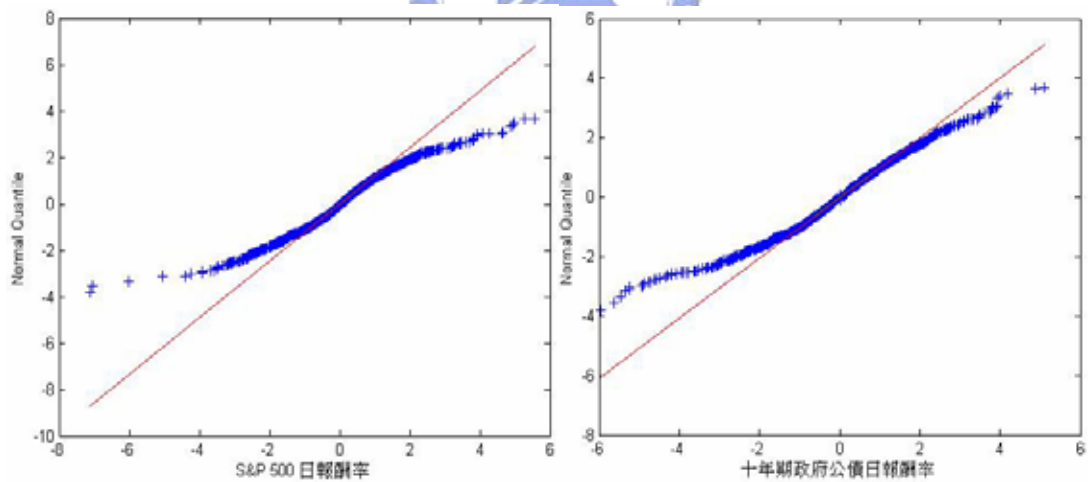


圖 3. S&P 500 股價指數與十年期政府公債報酬率 QQ-plot  
(1993/11/1~2006/3/17)

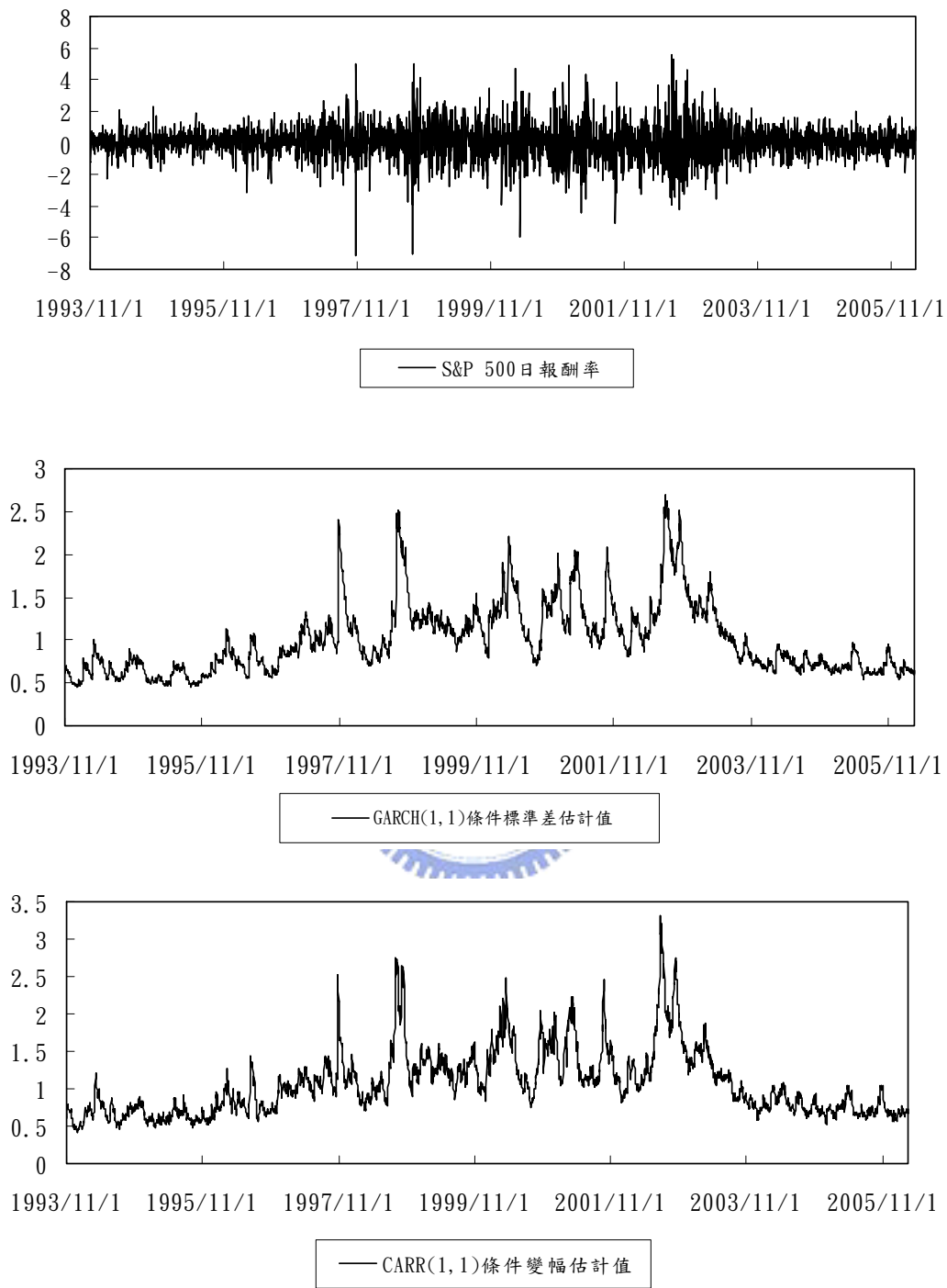


圖 4. S&P 500 日報酬率與條件波動性走勢圖 (1993/11/1~2006/3/17)

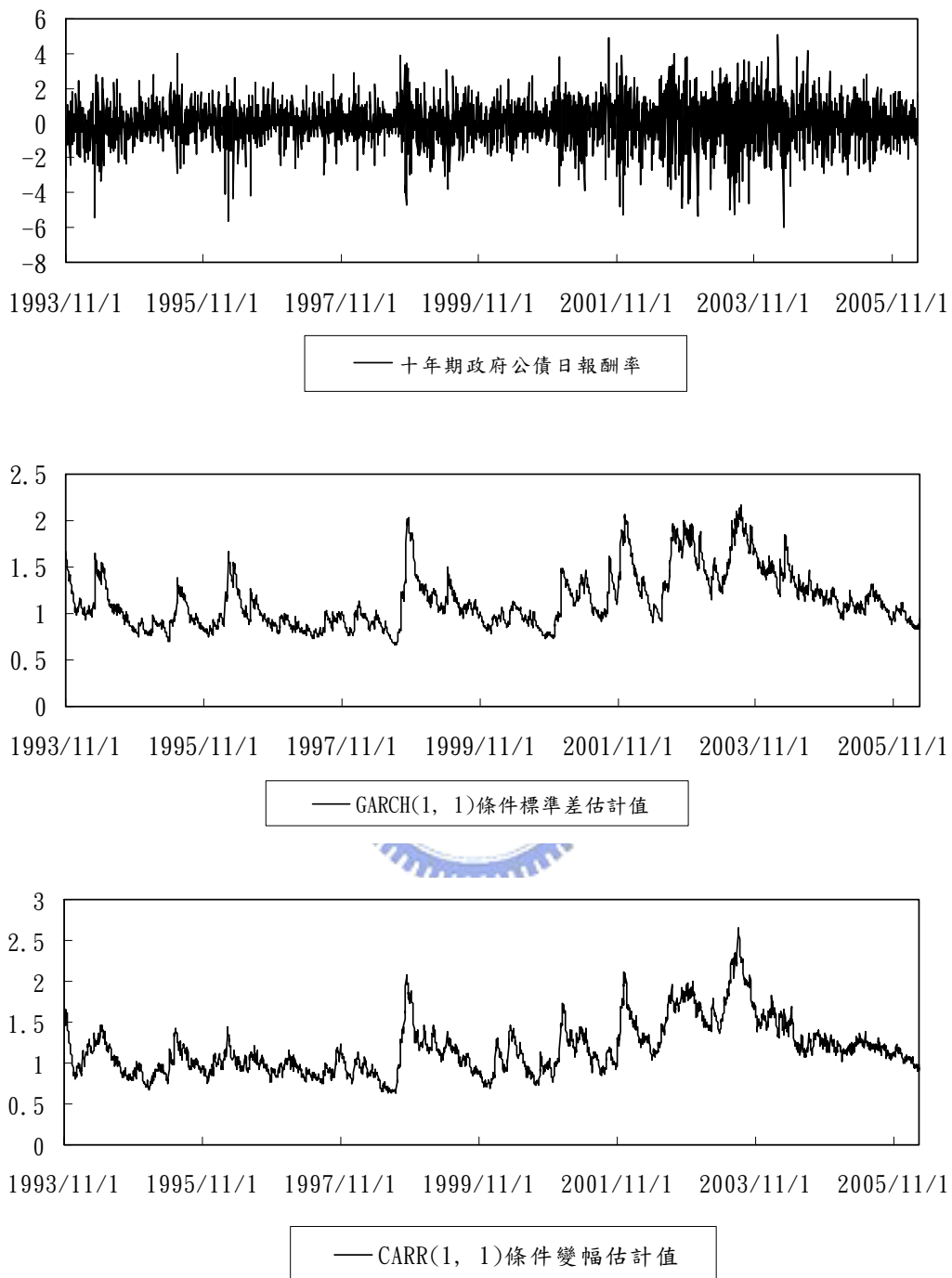


圖 5. 十年期政府公債日報酬率與條件波動性走勢圖 (1993/11/1~2006/3/17)

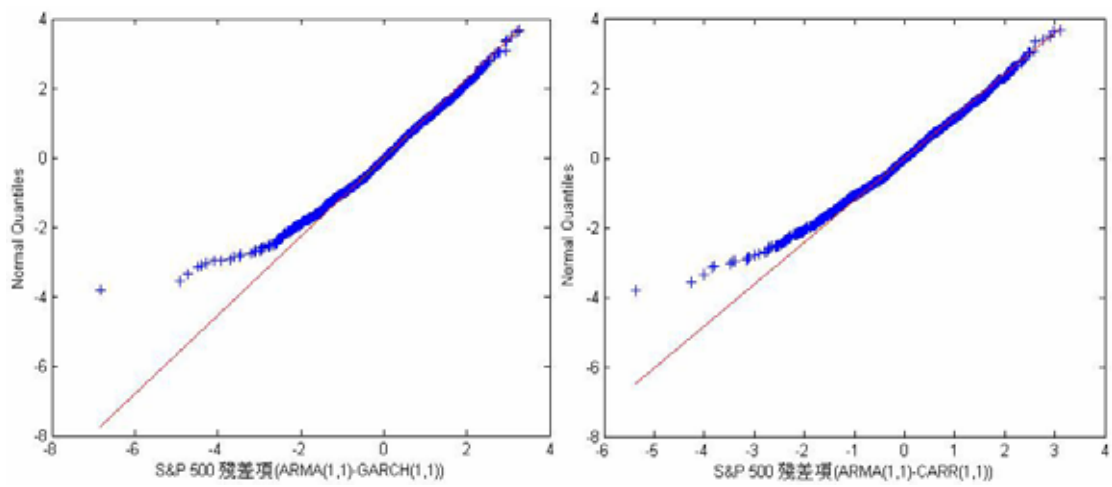


圖 6. S&P 500 股價指數報酬率殘差項 QQ-plot (1993/11/1~2006/3/17)

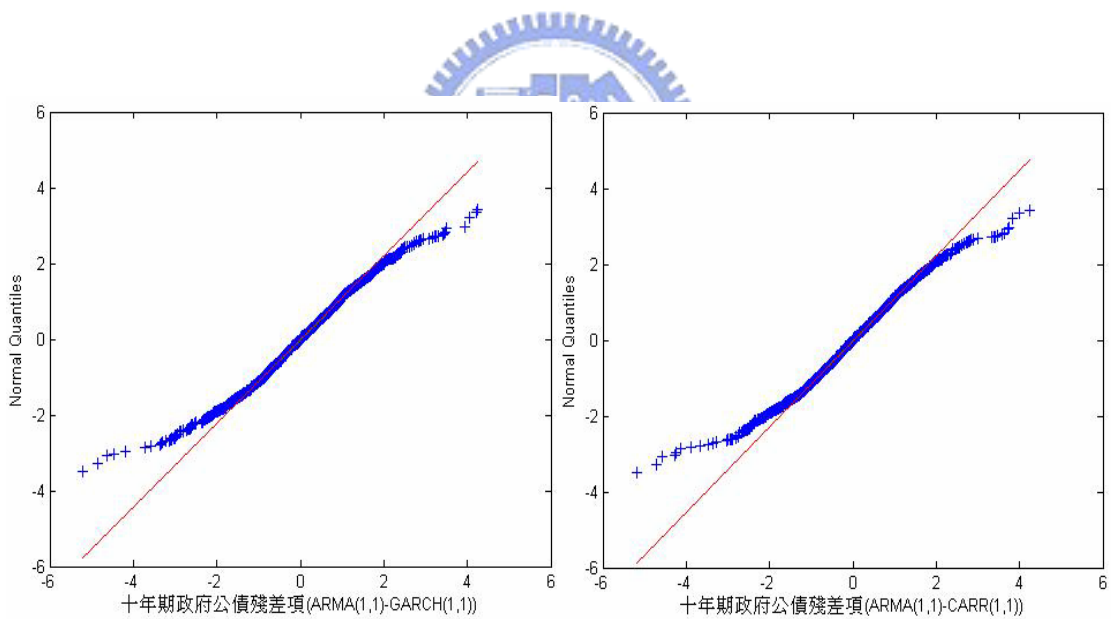
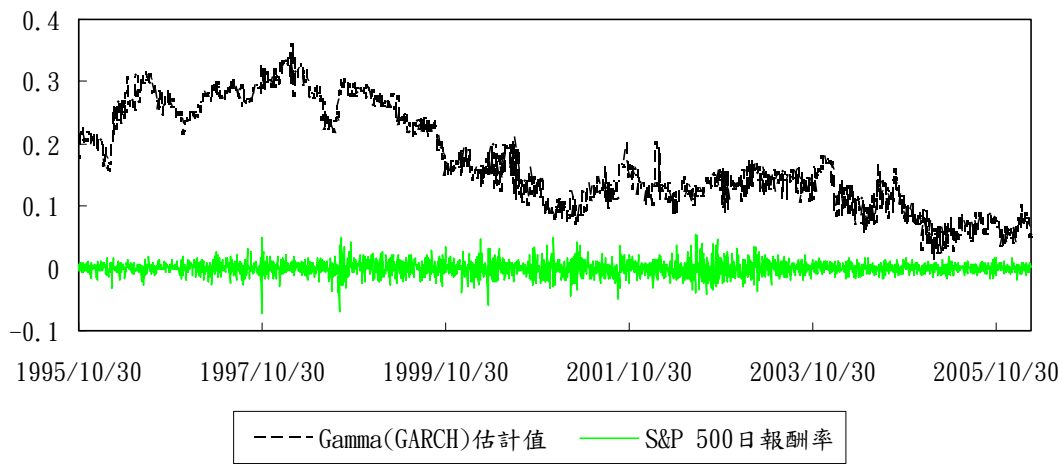
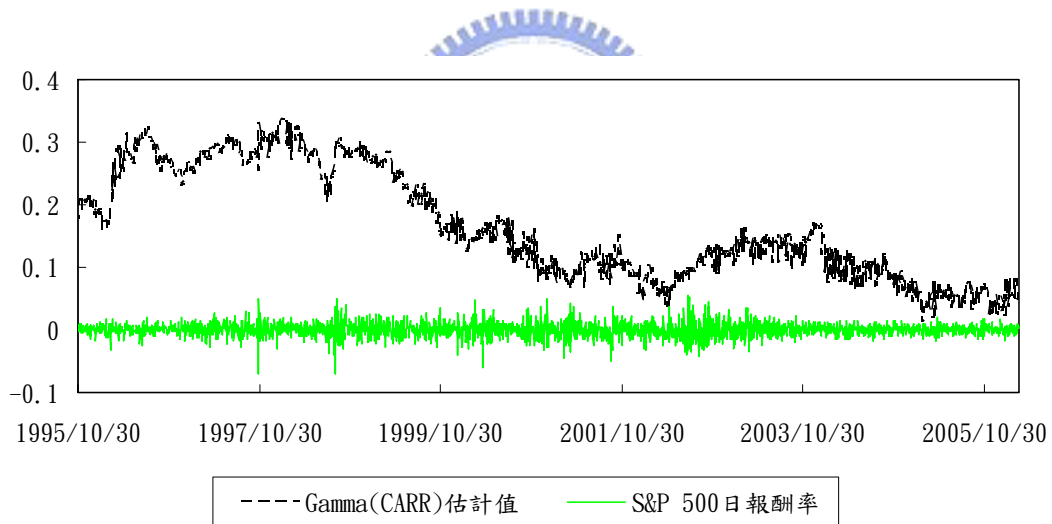


圖 7. 十年期政府公債報酬率殘差項 QQ-plot (1993/11/1~2006/3/17)



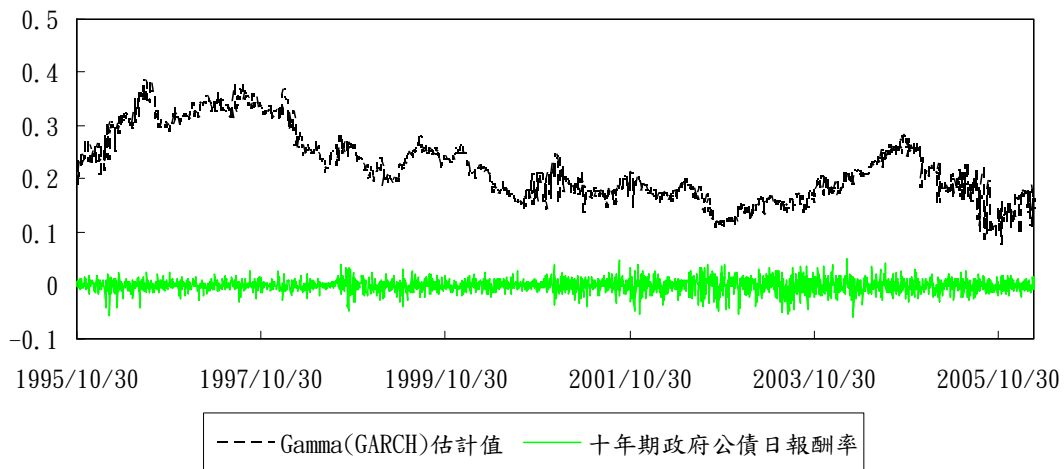
Panel A. S&P 500 日報酬率與利用 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)模型過濾後資料所求得之尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖



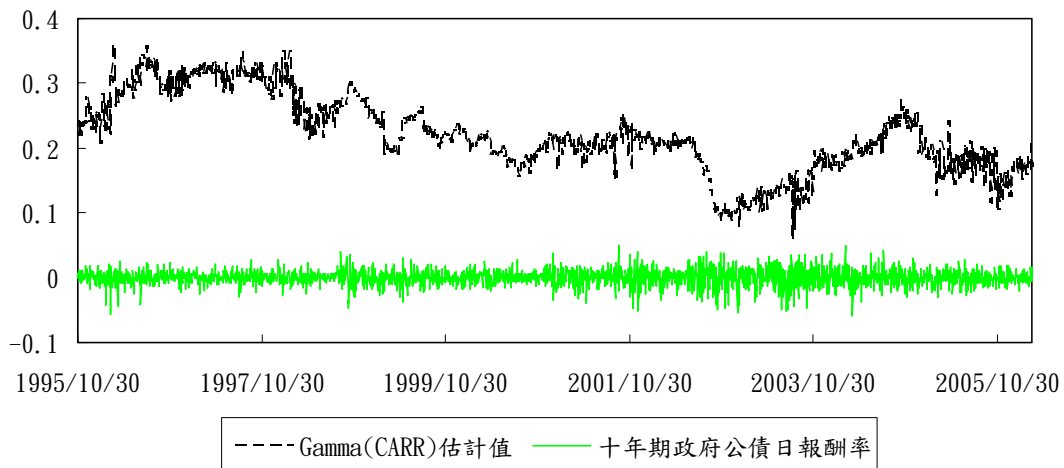
Panel B. S&P 500 日報酬率與利用 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型過濾後資料所求得之尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖

圖 8. S&P 500 日報酬率與尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖  
(1995/10/30~2006/3/17)





Panel A. 十年期政府公債日報酬率與利用 ARMA(1, 1)–GARCH(1, 1)模型過濾後資料所求得之尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖



Panel B. 十年期政府公債日報酬率與利用 ARMA(1, 1)–CARR(1, 1)模型過濾後資料所求得之尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖

圖 9. 十年期政府公債日報酬率與尾部指數估計值 ( $\gamma$  ; Gamma) 走勢圖 (1995/10/30~2006/3/17)

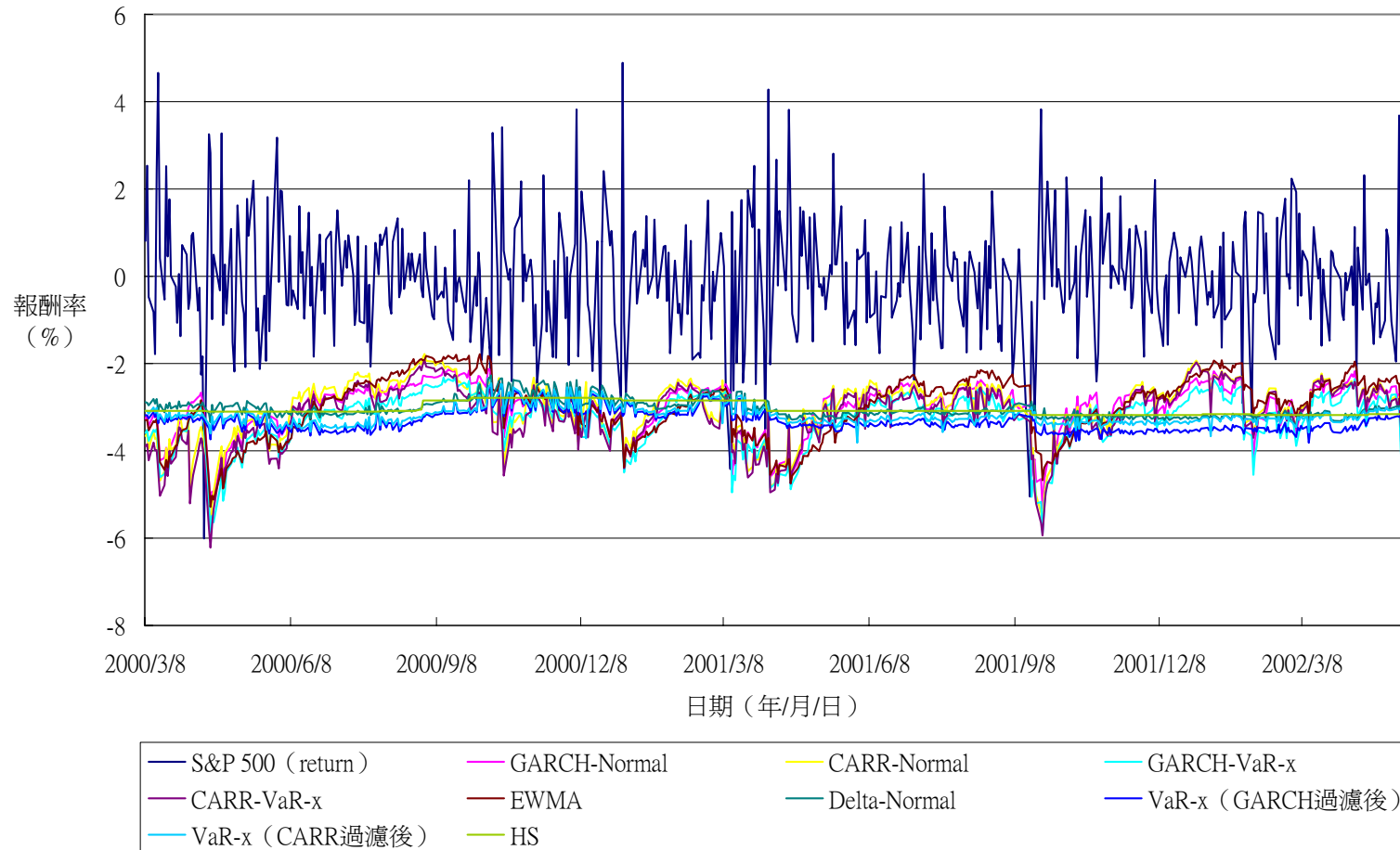


圖 10. S&P 500 日報酬率 vs 各風險值模型在 99%信心水準下之風險估計值 (2000/3/8~2002/5/13)

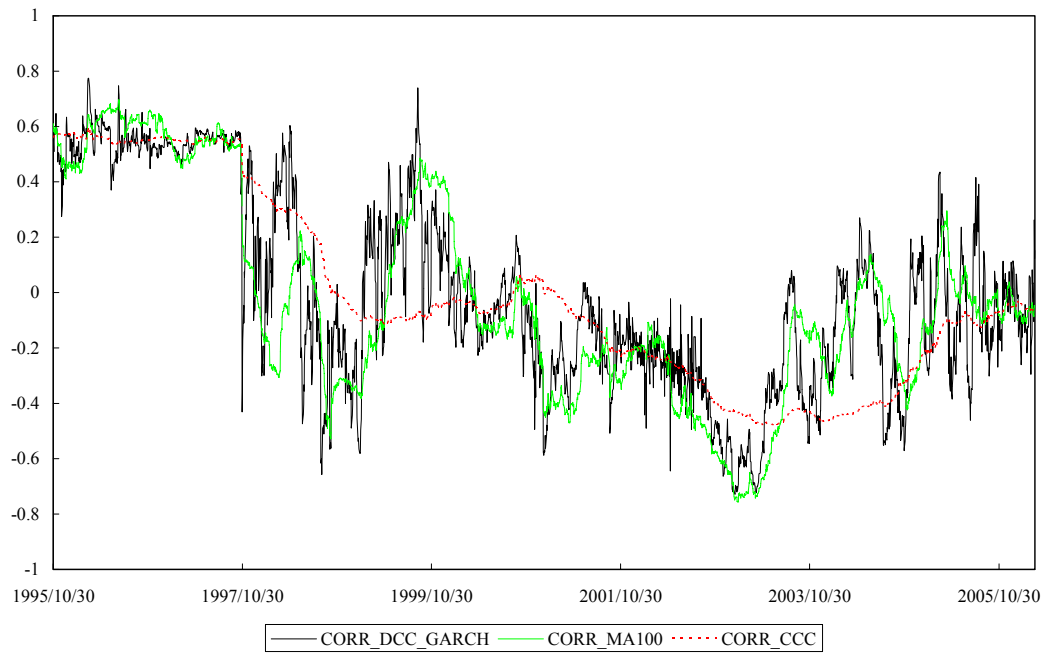


圖 11. 報酬基礎下 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型的樣本外相關係數估計值 (1995/10/30~2006/3/17)

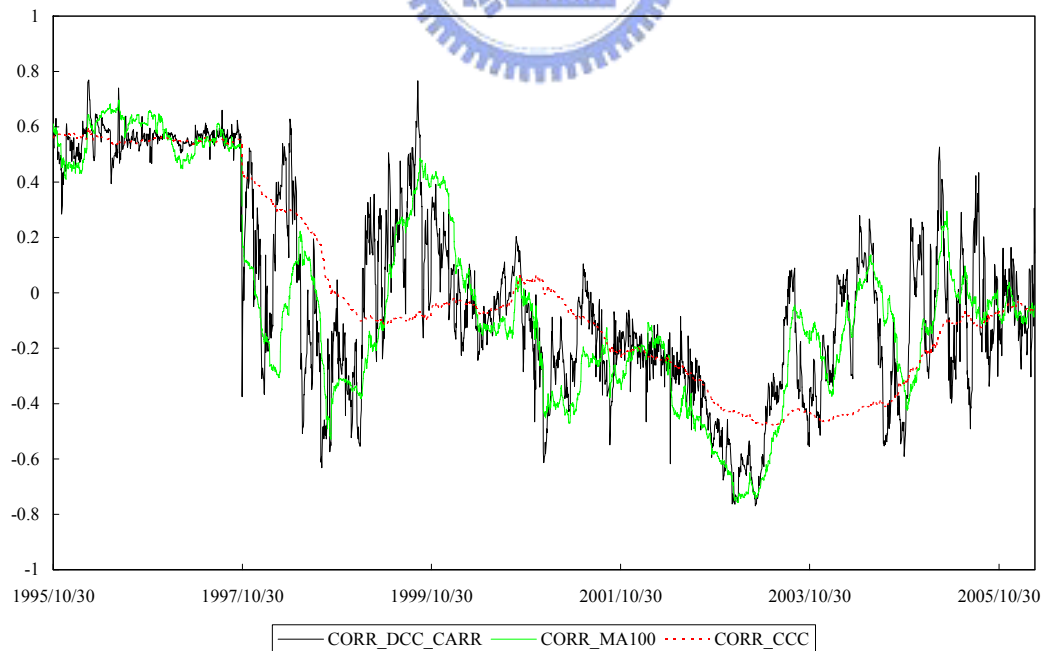


圖 12. 變幅基礎下 DCC 模型、MA100 模型與 CCC 模型的樣本外相關係數估計值 (1995/10/30~2006/3/17)

## 參考文獻

- Andersen, Torben G., and Tim Bollerslev (1997), “Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns,” *Journal of Finance*, 52(3), 975-1005.
- Baillie, Richard T., and Ramon P. DeGennaro (1990), “Stock Returns and Volatility,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(2), 203-214.
- Balkema, A. A., and L. de Haan (1974), “Residual Life Time at Great Age,” *The Annals of Probability*, 2(5), 792-804.
- Barone-Adesi, Giovanni, Frederick Bourgojn, and Kostas Giannopoulos (1998), “A Probabilistic Approach to Worst Case Scenarios,” *RISK Magazine*.
- Berkowitz, Jeremy, and James O’Brien (2002), “How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?” *Journal of Finance*, 57(3), 1093-1111.
- Bollerslev, Tim (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev, Tim (1990), “Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model,” *Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498–505.
- Bollerslev, Tim, Ray Yeutien Chou, and Kenneth F. Kroner (1992), “ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence,” *Journal of Econometrics*, 52(1-2), 5–59.
- Bollerslev, Tim, Robert F. Engle, and Jeffrey M. Wooldridge (1988), “A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances,” *Journal of Political Economy*, 96(1), 116-131.
- Brooks, Chris (2004), *Introductory econometrics for finance*, Cambridge University

Press, New York.

Bystrom, Hans (2004), "Managing Extreme Risks in Tranquil and Volatile Markets Using Conditional Extreme Value Theory," *International Review of Financial Analysis*, 13(2), 133-152.

Cappiello, Lorenzo, Robert F. Engle, and Kevin Sheppard (2003) "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns," Working Paper Series 204, European Central Bank.

Chou, Ray Yeutien (2005), "Forecasting Financial Volatilities with Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model," *Journal of Money, Credit and Banking*, 37(3), 561-582.

Chou, Ray Yeutien, Nathan Liu, and Chun-Chou Wu (2005), "Forecasting Correlation and Covariance with a Range-Based Dynamic Conditional Correlation Model," Working Paper, Institute of Economics, Academia Sinica.

Christoffersen, Peter F. (1998), "Evaluating Interval Forecasts," *International Economic Review*, 39, 841-862.

Danielsson, Jon, and Casper G. de Vries (1997), "Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data," *Journal of Empirical Finance*, 4(2), 241-257.

Danielsson, Jon, and Casper G. de Vries (2000), "Value-at-risk and Extreme Returns," *Annales D'Economie et de Statistique*, 60, 239-270.

Dacorogna, Michel M., Ulrich A. Muller, Olivier V. Pictet, and Casper G. de Vries (1995), "The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets," Tinbergen Institute Discussion Paper, 70-95.

Duffie, Darrell, and Jun Pan (1997), "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, New York, 4(3), 7-49.

Engel, James, and Marianne Gizycki (1999), "Conservatism, Accuracy and Efficiency: Comparing Value-at-Risk Models," Working Paper 2, Australian Prudential

Regulation Authority.

- Engle, Robert F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation," *Econometrica*, 50(6), 987-1008.
- Engle, Robert F. (2002) "Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Engle, Robert F., and Riccardo Colacito (2004) "Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation" NYU Working Paper.
- Engle, Robert F., and Kenneth F. Kroner (1995), "Multivariate Simultaneous GARCH," *Econometric Theory*, 11, 122–150.
- Engle, Robert F., and Kevin Sheppard (2001), "Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH," NBER Working Paper No. 8554.
- Fisher, R., and L. Tippett (1928), "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-190.
- Goorbergh, R. Van den, and P. Vlaar, (1999), "Value-at-Risk Analysis of Stock Returns. Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?" Econometric Research and Special Studies Department, Research Memorandum WO&E no. 579.
- Hall, Bronwyn H. (1990), "The Manufacturing Sector Master File: 1959-1987," NBER Working Paper No. 3366.
- Hendricks, Darryll (1996), "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data," *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, 2(1), 36-69.
- Hill, Bruce M. (1975), "A Simple General Approach to Inference About the Tail of a

- Distribution,” *The Annals of Statistics*, 3(5), 1163-1174.
- Huisman, Ronald, Kees G. Koedijk, Clemens J. M. Kool, and Franz Palm (1998), ”The Fat-Tailedness of FX Returns,” LIFE Working Paper.
- Huisman, Ronald, Kees G. Koedijk, Clemens J. M. Kool, and Franz Palm (2001), “Tail-index Estimates in Small Samples,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(1), 208-216.
- Huisman, Ronald, Kees G. Koedijk, and Rachel A. J. Pownall (1998), “VaR-x: Fat Tails in Financial Risk Management,” *Journal of Risk*, 1(1), 47-62.
- Hull, John, and Alan White (1998), “Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are Not Normally Distributed,” *Journal of Derivatives*, 5(3), 9-19.
- Jansen, Dennis W., and Casper G. de Vries (1991), “On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective,” *Review of Economics and Statistics*, 73(1), 18-24.
- Jenkinson, A. F. (1955), “The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or minimum) Values of Meteorological elements,” *Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society*, 73, 145-158.
- Jorion, Philippe (2000), *Value at Risk*, McGraw Hill, New York.
- Kearns, Phillip, and Adrian Pagan (1997), “Estimating the Density Tail Index for Financial Time Series,” *Review of Economics and Statistics*, 79(2), 171-175.
- Kenneth, R. French, G. William Schwert, and Robert F. Stambaugh (1987), “Expected Stock Returns and Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.
- Koedijk, Kees G., M. Schafgans, and Casper G. de Vries (1990), “The Tail Index of Exchange Rate Returns,” *Journal of International Economics*, 29(11), 93-108.
- Koedijk, Kees G., Philip A. Stork, and Casper G. de Vries (1992) “Differences between Foreign Exchange Rate Regimes: The View from the Tails,” *Journal of International Money and Finance*, 11(5), 462-473.

- Kroner, Kenneth F., and Victor K. Ng (1998), "Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns," *Review of Financial Studies*, 11(4), 817-844.
- Kupiec, Paul H. (1995), "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
- Liu, Mei-Ying (2005), "VaR Evaluation of Bank Portfolio-Conservativeness, Accuracy and Efficiency," *Journal of Financial Studies*, 13(2), 97-128.
- Lopez, Jose A. (1999), "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates," *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 2, 3-17.
- Longin, Francois M. (1996), "The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns," *Journal of Business*, 69(3), 383-408.
- Longin, Francois M. (2000), "From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach," *Journal of Banking and Finance*, 24(7), 1097-1130.
- Loretan, Mico, and Peter C. B. Phillips (1994), "Testing the Covariance Stationarity of Heavy-tailed Time Series," *Journal of Empirical Finance*, 1, 211-248.
- McNeil, Alexander J., and Rudiger Frey (2000), "Estimation of Tail-related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach," *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4), 271-300.
- Neftci, Salih N. (2000), "Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation," *Journal of Derivatives*, 7(3), 23-37.
- Parkinson, Michael (1980), "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return," *Journal of Business*, 53(1), 61-65.
- Pickands, James III (1975), "Statistical Inference Using Extreme Order Statistics," *The Annals of Statistics*, 3(1), 119-131.
- Pownall, Rachel A.J., and Kees G. Koedijk (1999), "Capturing Downside Risk in Financial Markets: The Case of the Asian Crisis," *Journal of International Money and Finance*, 18(6), 853-870.



Wong A.S.K., and P.J.G. Vlaar (2003), “Modeling Time-varying Correlations of Financial Markets,” Econometric Research and Special Studies Department, Research Memorandum WO&E no.739.

Yang Sheng-Yung (2005) “A DCC Analysis of International Stock Market Correlations: The Role of Japan on The Asian Four Tigers,” *Applied Financial Economics Letters*, 1(2), 89-93.

