

國立交通大學

電機學院與資訊學院
電機與控制學程

碩士論文



壓電平台遲滯模型
Piezo stage hysteresis modeling

研究生：黃煥祺

指導教授：林錫寬 教授

中華民國九十五年八月

壓電平台遲滯模型
Piezo stage hysteresis modeling

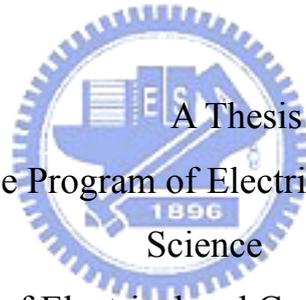
研究生：黃煥祺

Student : Huan-Chi Huang

指導教授：林錫寬

Advisor : Shir-Kuan Lin

國立交通大學
電機學院與資訊學院專班 電機與控制學程
碩士論文



Submitted to Degree Program of Electrical Engineering and Computer
Science

College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Electrical and Control Engineering

August 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年八月

壓電平台遲滯模型

研究生：黃煥祺

指導教授：林錫寬

國立交通大學 電機學院與資訊學院 電機與控制學程（研究所）碩士班

摘 要

本論文之主要目的在於修改 Maxwell slip model 成為一套改良型 Maxwell 彈滑模型，然後利用此一改良型 Maxwell 彈滑模型模擬壓電平台固有的響應遲滯現象(Hysteresis)。本論文並將改良型 Maxwell 彈滑元件參數求解問題，簡化成為一個參數鑑別的最佳化問題。利用遞迴最小平方和誤差法 (Recursive least-squares algorithm)，即時求取彈滑模型之參數，使得彈滑元件所描繪的線段與壓電平台響應曲線之間的平方誤差和最小，作為將來設計前饋補償控制器的依據。

實驗結果證明，利用遞迴最小平方和誤差法可以即時且有效地求取彈滑模型之參數，使得由改良型 Maxwell 彈滑元件所組合的線段趨近於壓電平台的響應曲線。

Piezo stage hysteresis modeling

Student : Huan-Chi Huang

Advisor : Dr.Shir-Kuan Lin

Degree Program of Electrical Engineering and Computer Science
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This paper presents an improved Maxwell Slip Model, and also presents a procedure for real time on-line identification of hysteresis functions, which are encountered in Piezoelectric actuators.

This paper shows that the on-line identification of hysteresis functions boils down to a well understood recursive least squares estimation problem if the hysteresis function is modeled as a weighted superposition of extended linear stop operators with fixed parameters.

Experiment results show that this technique has been successfully applied to model the hysteresis behaviour of a piezoelectric actuator.

誌 謝

感謝指導老師林錫寬教授，老師認真與嚴謹的治學態度讓我感受到紮實的學術理論是研究工作的基礎。

感謝所有的授課老師，帶領我一窺知識殿堂之美，讓我了解學術存在的重要，證實了我重回校園的價值。

感謝全體口試評審委員，各位詳細地指出論文的錯誤，並且提出建議修改方向，給了學生寶貴的一課。由於各位的指引，學生發現了原本思緒不足之處以及將來應該努力的方向。

感謝各位長官、前輩與學長，沒有各位的領導、協助，我不會勇敢的參加入學考試，不會鎖定碩士論文題目；沒有各位的長期支持與容忍，我不可能順利完成學業。

最後，感謝我的家人一路默默地支持我，讓我無後顧之憂，在此致上最真摯的感謝。



目 錄

第一章 緒 論	- 1 -
1.1 前言	- 1 -
1.2 研究動機與目的	- 1 -
1.3 本文貢獻	- 2 -
1.4 本文架構	- 2 -
第二章 壓電材料、壓電致動器與壓電平台簡介	- 4 -
2.1 PZT 壓電材料、壓電效應與遲滯效應	- 4 -
2.2 壓電致動器的基本特性	- 6 -
2.3 壓電平台簡介	- 6 -
2.4 實驗過程與數據	- 9 -
第三章 文獻回顧	- 12 -
3.1 PREISACH 模型	- 12 -
3.2 電荷控制	- 13 -
3.3 小腦模型類神經網路	- 14 -
3.4 MAXWELL SLIP MODEL	- 16 -
第四章 彈滑模型的改良與參數鑑別	- 19 -
4.1 改良型 MAXWELL 彈滑模型	- 19 -
4.2 決定彈滑元件的參數	- 21 -
4.3 彈滑元件數量的決策機制	- 22 -
4.4 模型參數鑑別流程	- 23 -
4.5 模型參數鑑別結果	- 26 -
第五章 結論與未來發展方向	- 28 -
5.1 結論	- 28 -
5.2 未來發展方向	- 28 -
參考文獻	- 29 -
附錄 A	- 31 -
A.1 THE LEAST-SQUARES OPTIMIZATION PROBLEM	- 31 -
A.2 RECURSIVE LEAST-SQUARES ALGORITHM	- 34 -

第一章 緒 論

1.1 前言

由於人類對微小化元件的殷切需求，製程與檢測技術已漸由微米(10^{-6}m)進入了奈米(10^{-9}m)範圍的時代。在面臨二十一世紀高科技發展的競爭中，奈米技術已經成為國家高科技發展政策的一環。奈米科技涵蓋之領域非常廣泛，包括機械微加工、材料、光學、微電子、量測、生化醫藥及原子物理等，而奈米級形貌量測設備是奈米科技的基礎工具。其中，原子力顯微鏡 (Atomic Force Microscope) 與白光干涉儀 (Scanning White-Light Interferometric Microscope) 是最知名的奈米級形貌量測設備。這兩種形貌量測設備都需要對於探針或顯微物鏡進行奈米級位移操縱。

1.2 研究動機與目的

根據 S. Vorndran[1]的分析，當傳統的微米級定位系統想要升級成為奈米級定位系統，首先出現的問題為摩擦力、間隙、剛性等干擾問題。在高精度下，微米尺度中被忽略的庫倫力變成系統動態模型需要考慮的重要因素。這使得微米級定位系統常見的伺服馬達、滾珠、滾柱、滑軌、穿透式光學尺等元件被壓電致動器 (Piezo actuator)、撓性鉸 (Flexures)、電容感測器、反射式光學尺或雷射干涉儀取代。

壓電致動器具有體積小、重量輕、消耗功率低、響應快、位移解析度高等優點，但是以電壓信號控制壓電致動器進行高速精密定位時，壓電致動器的輸出位置與輸入電壓的關係受限於本身固有的遲滯現象，使得輸入和輸出呈非線性關係。其本身所固有的遲滯現象 (Hysteresis) 會降低動態響應特性，限制致動器的定位精度。

為了達到更快速的動態響應及較高的定位精度，在設計控制器時必須對壓電材料之遲滯效應作補償，因此必須先建立一模型以描述遲滯現象，接著選擇適當的模型參數，嘗試在無感測器開迴路控制架構下，消除壓電致動器的非線性效應達到接近奈米等級的定位精度。

Maxwell slip model 具有參數少、結構簡單的優點，但是存在著彈滑元件參數耦合、只能描述對稱遲滯曲線等問題。

本研究首先利用 Maxwell slip model 為基礎，將並聯結構修改成為串並

聯結構，推導出新的數學表示式，然後利用遞迴最小平方和誤差法（Recursive least-squares algorithm）發展出一套即時自動參數鑑別法則，作為將來前饋控制器設計基礎。

1.3 本文貢獻

本文以 Maxwell slip model 為基礎，修改模型結構成為一套改良型 Maxwell 遲滯模型以建構出壓電平台的遲滯行為，並利用遞迴最小平方和誤差法（Recursive least-squares algorithm）針對此模型發展一套即時參數鑑別法則。本研究增加一個閾值參數 *Threshold* 供操作者使用，當壓電平台的遲滯響應與改良型 Maxwell 遲滯模型之估測值的絕對誤差大於閾值參數 *Threshold* 時，將命令改良型 Maxwell 彈滑模型增加一組新的彈滑元件，加入遞迴計算。本文克服了 Maxwell slip model 遲滯曲線對稱的限制，並且依據使用者對於模型誤差的期望值有系統的鑑別出合適的彈滑元件與各組參數。從解決參數耦合、參數計算、元件數量、以及描述曲線的角度，分析 Maxwell slip model 與改良型 Maxwell 遲滯模型的差異，比較結果如表 1.1。

實驗證明，此一改良型 Maxwell 遲滯模型經過遞迴最小平方和誤差法之即時參數鑑別，具有結構簡單、參數少、適應性強等優點。

表 1.1 Maxwell slip model 與改良型 Maxwell 遲滯模型比較

Maxwell slip model 缺點	參數耦合	批次計算參數	利用嘗試錯誤決定元件數量	只能描述對稱曲線
改良型 Maxwell 彈滑模型優點	參數獨立	即時計算參數	依據條件自動演算元件數量	可以描述非對稱曲線
解決方法	修改模型結構	RLS	運用閾值判斷	區分上升/下降元件組

1.4 本文架構

本文共分成五章，第二章將介紹壓電材料的原理與遲滯效應的原因、壓電致動器基本特性以及壓電平台構造。第三章文獻回顧，介紹目前壓電致動器或壓電平台特性曲線判斷方法，以及壓電致動器常見的控制方法。第

四章將以 Maxwell slip model 為基礎，發展一套改良型 Maxwell 遲滯模型以描述壓電平台非線性遲滯效應，同時利用遞迴最小平方和誤差法 (Recursive least-squares algorithm) 發展出一套鑑別模型未定參數的流程。第五章為結論與未來發展方向。



第二章 壓電材料、壓電致動器與壓電平台簡介

壓電材料是目前精密定位系統廣泛使用的致動器材料，其原理是在壓電材料上施予電場使其產生應變，主要優點在於出力大且精度高，但它也有位移量小和響應遲滯的先天缺陷。因此，本章將介紹壓電材料的原理、壓電致動器的基本特性以及壓電平台構造，讓吾人對於壓電元件有深入的了解。

2.1 PZT 壓電材料、壓電效應與遲滯效應

”piezo”一字源於希臘文，表示壓力的意思。1880 年居里兄弟(Jacques and Pierre Curie) 實驗發現，石英晶體受到壓力的時候，兩端會出現與應力大小成比例的電動勢，並將此現象命名為壓電效應 (piezo effect)。之後，居里兄弟又發現了當石英晶體處於大小不同的電場，石英晶體會產生不同的形變，並將此現象命名為逆壓電效應 (inverse piezo effect)。逆壓電效應首先於第一次世界大戰應用於太陽能系統，1940 年科學家發現鈦酸鋇 (barium titanate) 在電場之下具有較佳之壓電特性，壓電材料之應用從此進入突破性發展。

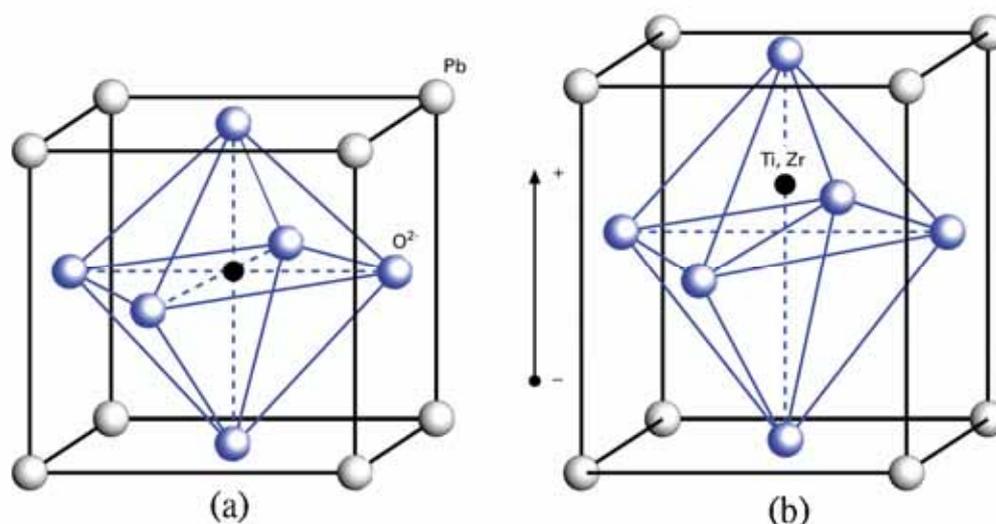


圖 2.1 PZT 極化(a)前(b)後的晶格形狀

圖 2.1 顯示鉛鋇鈦 (plumbum zirconate titanate, PZT) 晶體極化前後的晶格變化。(a)極化前 PZT 晶格呈現立方對稱;(b)當溫度低於居禮溫度 (Curie temperature), 晶格因自發極化而顯現非對稱變形[2]。

自然界的材料,例如石英 (quartz)、電氣石 (tourmaline)、羅雪鹽 (Rochelle salt) 等具有較小的壓電效應,複晶鐵電陶瓷材料 (polycrystalline ferroelectric ceramic materials) 例如鈦酸鋇 (barium titanate) 與鉛鋇鈦 (plumbum zirconate titanate, PZT) 因為具有較佳的特性,成為發展主流。

遲滯現象為壓電材料的一種特性,由材料來說,對於沒有經過特別處理的結晶,由於各電域之極化方向隨機排列,總體之極化量為零。當外加電場時,每一電域之極化方向會隨電場方向排列,而有一淨極化值;此時若除去電場,因為分子間的摩擦關係造成其極化值並不回到零,會殘留淨值。飽和極化後,除去電場所剩下的極化量,稱為殘留極化 (remanent polarization)。要讓極化回歸於零,需加一反向的矯頑電場 (coercive field)。這種極化與電場間之關係,使得上升路徑和下降路徑的不一致,稱為遲滯曲線。壓電致動器在奈米級的運動路徑中,會出現追蹤誤差達全行程 (Full scale) 10~20% 的遲滯現象。

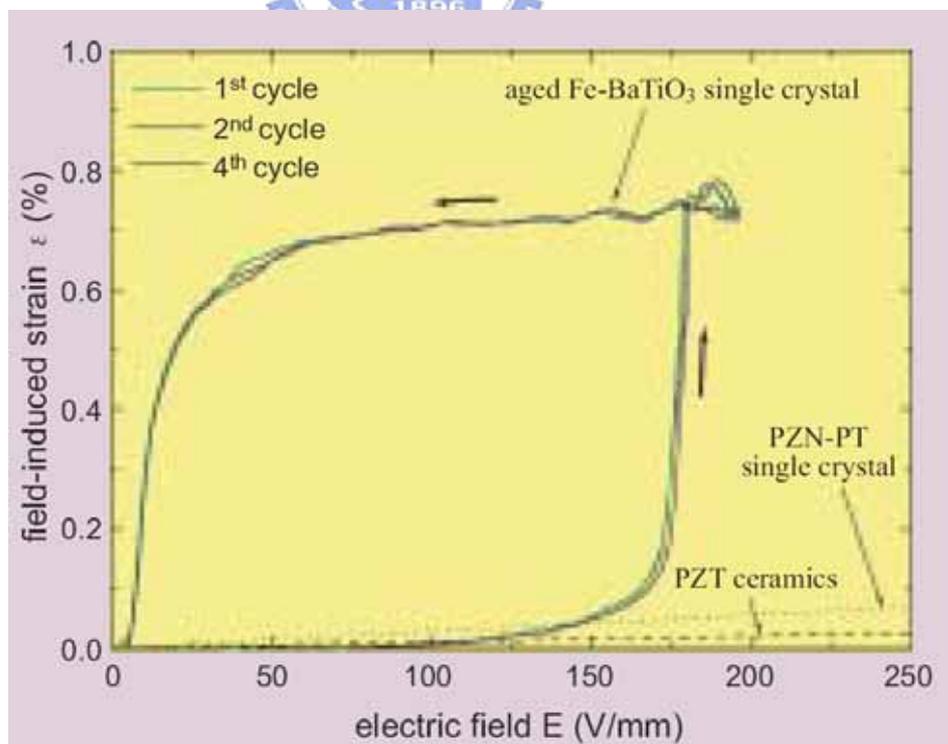


圖 2.2 小林理研研究所發表 Fe-BaTiO₃ 與 PZT 對電場的響應比較圖

2004 年（平成 16 年）日本小林理研研究所任曉兵 (Ren Xiaobing)發表 Fe-BaTiO₃ 與 K-BaTiO₃ 兩種壓電材料具有巨大的逆壓電效應[3]。圖 2.2 顯示單層的 Fe-BaTiO₃ 與單層的 PZT 對於電場的響應，雖然 Fe-BaTiO₃ 提供了巨大的電歪效果，同時也暗示著更嚴厲的遲滯與非線性現象等待克服。

2.2 壓電致動器的基本特性

利用多層壓電材料堆疊而成的壓電致動器對於輸入之驅動電壓具有快速響應之特性，使得壓電致動器受到原子力顯微鏡、白光干涉儀、高速伺服閥、主動式避震器等設備之青睞。

在電壓驅動器提供足夠之電流與響應的條件下，壓電致動器能以 1/3 其共振頻率之速度完成標稱位移量之移動。例如，一個 10kHz 共振頻率之壓電致動器能在 30 μs 的時間到達標稱位移量。如果沒有經過適當的量測與迴授補償，這種快速響應的特性將使得壓電平台產生嚴重的超越量。

$$T \approx \frac{1}{3f_0} \quad (1)$$

式(1)說明在電壓驅動器提供足夠之電流與響應的條件下，壓電致動器之上升時間。其中，

$$T = \text{time [s]}$$

$$f_0 = \text{壓電致動器共振頻率 [Hz]}$$

電壓驅動器的雜訊是影響壓電致動器位置穩定(解析)的因素之一。當電壓驅動器的雜訊頻率遠大於壓電致動器共振頻率，此雜訊對於壓電致動器之定位可以忽略；如果電壓驅動器的雜訊頻率接近壓電致動器共振頻率，此雜訊對於壓電致動器之定位影響甚大。

此一特性雖然與本文並無直接關係，但是將來進行控制時非常重要，特別在此提出。

2.3 壓電平台簡介

壓電致動器的輸出範圍有限，若要使平台的工作行程達到實用的目標，就必須應用放大機構來放大壓電致動器的輸出。以壓電材料為致動器的設計中，常見的平台機構形式有形變式、摩擦式與尺蠖式三種，形變式的優

點在於系統有較高的解析度，但是缺點為系統的最大行程往往比其他兩種設計形式短；此外，形變式擁有裝配容易與控制成本較低之優點。本文實驗設備採用工研院機械所朱怡銘[4]先生設計之壓電平台，屬於形變式 X-Y 二自由度微定位平台之設計。

此一定位平台採用最大位移輸出為 $11.6\mu\text{m}$ 之壓電致動器，並採用對稱型肘節放大機構（toggle mechanism）將行程放大數倍。由於預壓的關係，壓電致動器的最大位移輸出遠低於標稱值。圖 2.3 顯示對稱型肘節機構將 X 軸受力 F_{in} 轉換成為 Y 軸施力 F_{out} 之幾何關係示意圖。

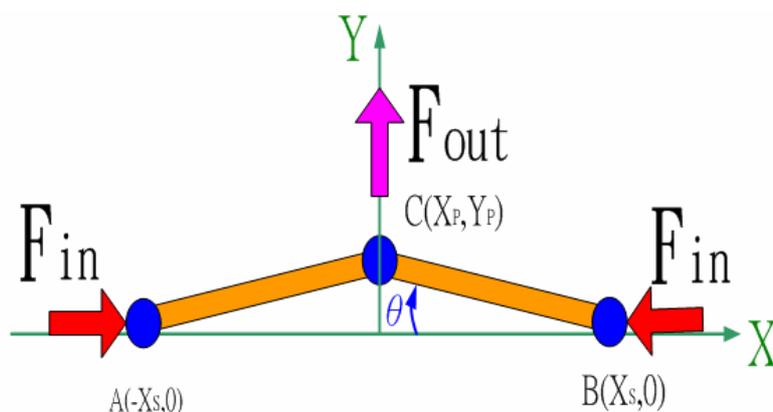


圖 2.3 對稱型肘節機構之幾何關係示意圖

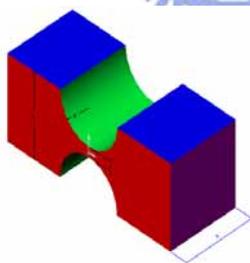


圖 2.4 撓性鉸鏈

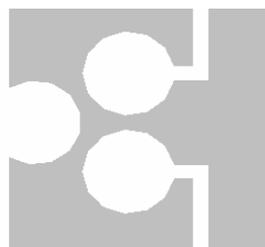


圖 2.5 撓性複接頭



圖 2.6 平板葉片彈簧導引



圖 2.7 輸入滑動之導引彈簧

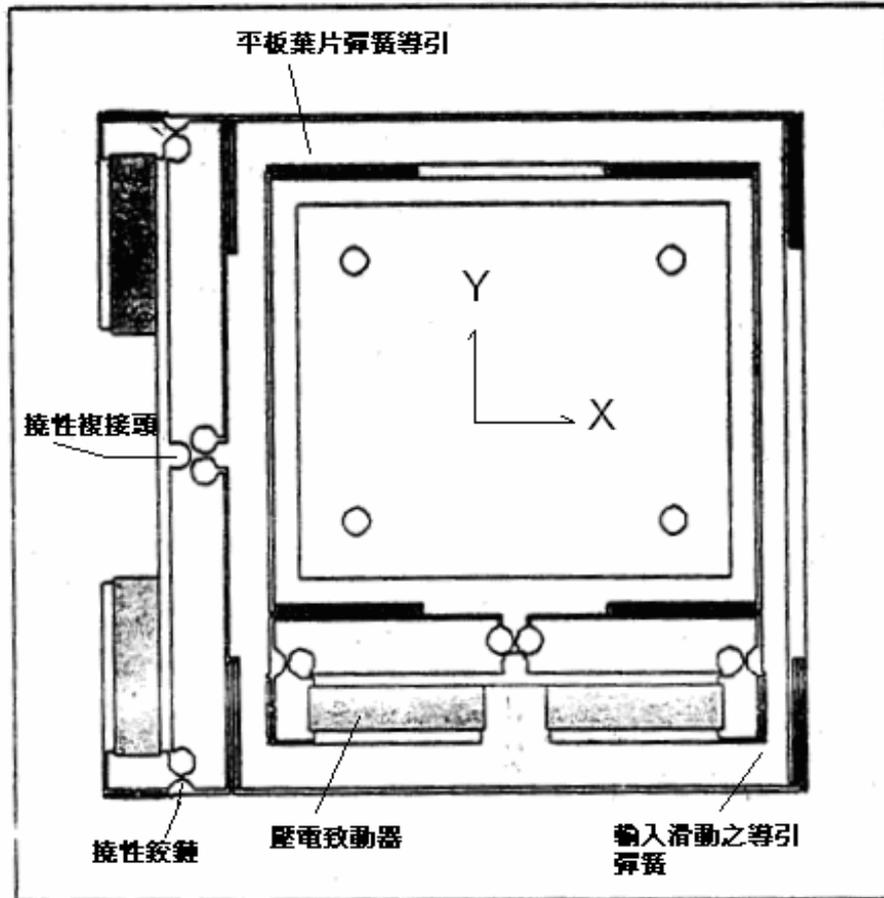


圖 2.8 X-Y 二自由度微定位平台設計圖(圖中陰影長方形者為 PZT 壓電致動器，每軸有兩支 PZT)

為了滿足精密微定位之需求，此定位平台利用撓性結構加以微形化轉換，其中

旋轉對：撓性鉸鏈(flexure hinge)，如圖 2.4，使用於圖 2.3 點 A、B 處。撓性鉸鍊是在結構上形成一尺寸最薄處，利用其最易變形的特點來達成旋轉的功能。

複接頭：撓性複接頭，如圖 2.5，使用於圖 2.3 點 C 處。在最薄處以彼

此相隔 120° 的環狀分佈方式達成連接三個連桿的撓性複接頭功能。

輸出滑動對：平板葉片彈簧導引，如圖 2.6。平板葉片彈簧導引的目的在於提高輸出方向剛性，減少側向偏移量。

輸入滑動對：壓電致動器與導引彈簧，如圖 2.7。導引彈簧主要目的是將壓電致動器提供的位移及作用力經導引彈簧的導引，使工作平台與固定座達到相對的位移效果。

完整的 X-Y 二自由度微定位平台設計圖如圖 2.8，圖中陰影長方形者為 PZT 壓電致動器，每軸有兩支 PZT。X-Y 二自由度微定位平台採用 Y 軸搭載在 X 軸的輸出。此一串聯方式的優點在於可以大幅消除各軸間干涉問題，且機構設計只需考慮單軸放大機構；串聯方式的缺點在於 X 軸的負擔較 Y 軸大。實驗結果顯示，X 軸接受 100V 直流驅動電壓產生約 $45\mu\text{m}$ 位移，Y 軸接受 100V 直流驅動電壓產生約 $60\mu\text{m}$ 位移。

2.4 實驗過程與數據

本研究架設一組 X-Y 二自由度微定位平台，並且對此平台進行系統判別。實驗架構如圖 2.9，以下說明實驗設備與實驗結果。

雷射位移偵測器：

Keyence LD2510+LD2500，以三角定位法測量目標位置，目標位置可由面板數字顯示與類比輸出信號得知，類比信號輸出範圍 $\pm 5\text{V}/\pm 500\mu\text{m}$ 。

AD/DA：

ADLINK DAQ2501，具有 4-CH, 12-Bit, 1MS/s Analog Output 與 8-CH, 400 kS/s, 14-bit single-ended analog inputs；參考電壓最高 $\pm 10\text{v}$ 。

高壓驅動器：

PI E-663，具有 3 個獨立運作電壓輸出通道(Channel)，每個通道最大輸出功率 14W，最大吞吐(source and sink)電流 $140\text{mA}<5\text{ms}$ ，平均吞吐電流 $60\text{A}>5\text{ms}$ ，輸入電壓 -2 到 12V，輸出電壓範圍 -20 到 120V。

將 DAQ2501 架設於 PC 內部，使用 Labview 撰寫輸出命令趨使 DAQ2501 DA channel 以類比信號對高壓驅動器下達 $5+5\sin(\omega t)$ 命令。高壓驅動器對

壓電平台施以 $50+50\sin(\omega t)$ 弦波信號，壓電平台的位移經由雷射位移偵測器感知，並且變更類比輸出值。此一類比信號透過 DAQ2501 AD channel 讀取，經由 Labview 資料擷取程式紀錄與存檔。

由實驗設備規格換算，AD 的讀值變換一個 LSB(Least Significant Bit)相當於目標位置移動 120.5nm。因此，量測解析度為 120.5nm/digit。

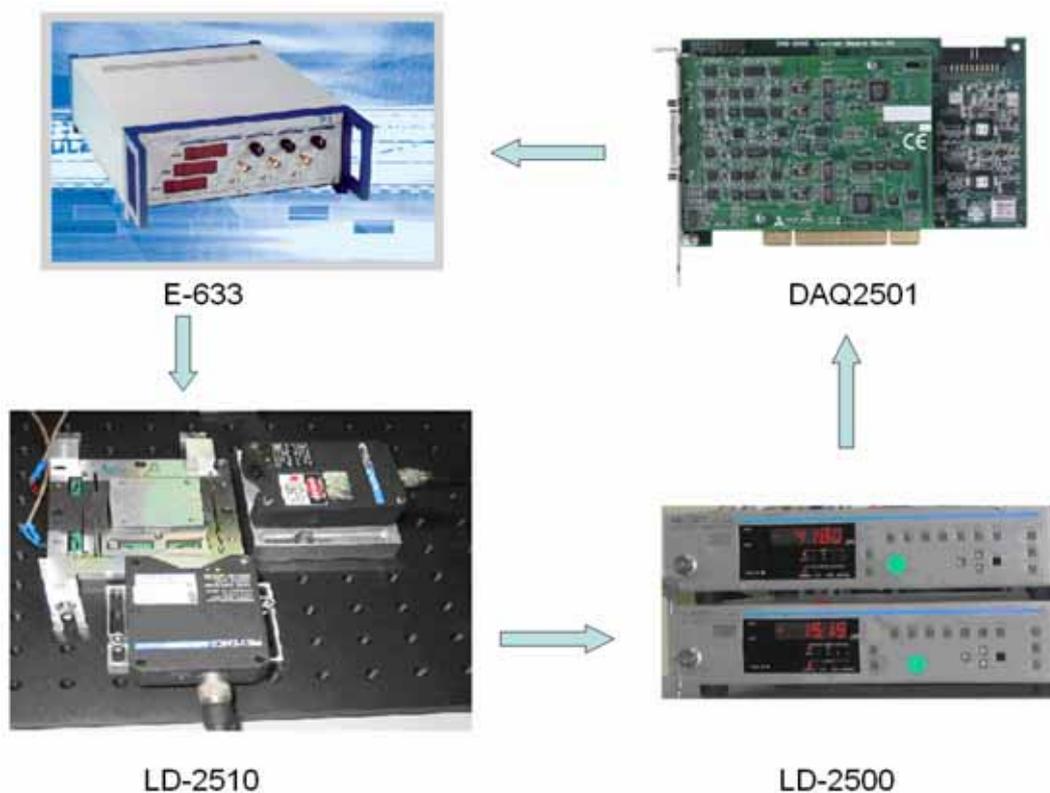


圖 2.9 實驗架構

圖 2.10 顯示，在高壓驅動器對壓電平台施以兩個週期的弦波信號時，壓電平台位移響應與輸入電壓呈現響應遲滯的非線性關係，而且每個迴圈的路徑存在著某種程度的非重複性。

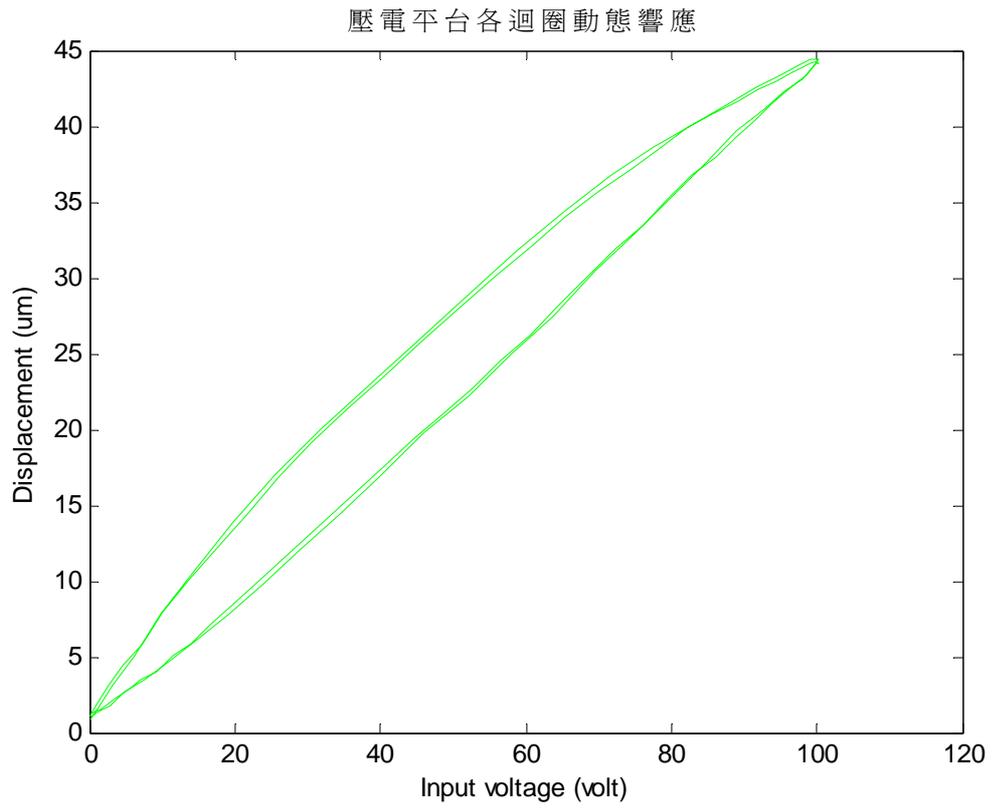


圖 2.10 壓電平台位移響應與輸入電壓關係



第三章 文獻回顧

由於奈米級定位系統實為奈米科技之基礎，近年來對於壓電致動器模型之研究可說是不勝枚舉。文獻上的建模方式分為顯性模型和隱性模型。

3.1 Preisach 模型

P. Ge and M. Jouaneh[5]提出以輸入上升及下降時俱有不同轉換值 (switching value)和權重之 Preisach 遲滯模型建立前饋非線性補償控制器，並搭配 PID (proportional integral derivative)進行回授控制。Preisach 模型的數學式如下

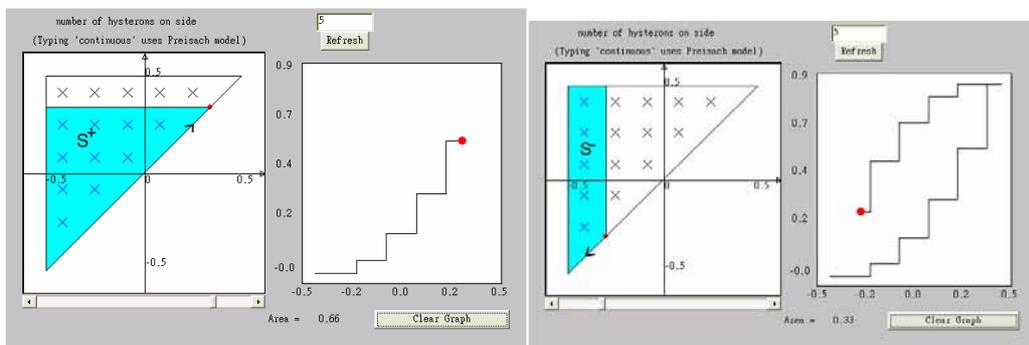
$$H[v(t)] = \iint_{[\alpha, \beta] \in S} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta}[v(t)] d\alpha d\beta \quad (2)$$

其中 $H[v(t)]$ 為系統輸出， $v(t)$ 為系統輸入， $\gamma_{\alpha, \beta}$ 是 Preisach 參數，其取決於 $\alpha\beta$ 之值，而產生一個滑動控制項，其值為+1 或者是-1， $\mu(\cdot): S \rightarrow R$ 是為一個權重函數， $S = \{(\alpha, \beta) \mid v_{\min} \leq \alpha \leq \beta \leq v_{\max}\}$ ，這在 $\alpha\beta$ 平面上為一個三角形的區塊，

$$\begin{aligned} S^+ &:= \{[\alpha, \beta] \in S \mid \gamma_{\alpha, \beta}[v(t)] = +1\} \\ S^- &:= \{[\alpha, \beta] \in S \mid \gamma_{\alpha, \beta}[v(t)] = -1\} \end{aligned} \quad (3)$$

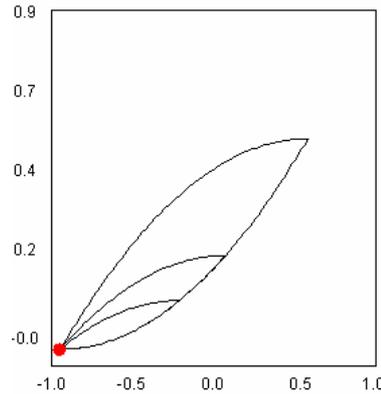
其中 v_{\min} 和 v_{\max} 為輸入的最小和最大值。

Discrete Preisach model applet



(a)：上升段

(b)：下降段



(c) 典型的 Preisach 遲滯模型

圖 3.1 離散 Preisach 之工作方式。

(取自: <http://euclid.ucc.ie/hysteresis/node17.htm>)。

利用以上的定義，可以把原式(2)改寫成：

$$H[v(t)] = \iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta}[v(t)] d\alpha d\beta - H[v(t)] - \iint_{S^-} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta}[v(t)] d\alpha d\beta \quad (4)$$

由(4)可以發現，決定 $H[v(t)]$ 值的參數取決於 S^+ 和 S^- (如圖 3.1 的區域) 交界面出現的區域，而其界面是取決於輸入的變化如圖 3.1。圖 3.1(a)代表當輸入值上升，Preisach 模型輸出因權重值增加所產生之非線性曲線；圖 3.1(b)代表當輸入值減少，不對稱之 Preisach 輸出因權重值減少，產生另一條與上升輸入值不重疊之非線性曲線。圖 3.1(c)顯示，權重點適當地增加與分布，將產生典型 Preisach 模型。此模型優點在於具有明確的數學式，方便模型輸出值計算。不便處則在於參數難以即時上傳至演算式，使得物理參數無法即時演算得到最適切的遲滯迴圈，而且其積分的動作會增加計算的困難度。

3.2 電荷控制

P. Ronkanen 等人[6]發現，壓電致動器的形變響應與輸入電荷呈現正比關係，而且壓電致動器潛變(Creep)現象可以解釋為漏電現象。

實驗發現，壓電致動器對於輸入的 300nA 步階電流，產生線性形變斜坡響應，40 秒之後形變到達 $170 \mu\text{m}$ 。之後如欲維持壓電致動器的變形量於某一固定值(非 $170 \mu\text{m}$ 處)，必需持續供應壓電致動器 5nA 電流。圖 3.2 顯示對於壓電致動器提供靜態消耗電流，就能克服壓電致動器潛變的現象。

為了利用壓電致動器之形變與輸入電荷呈現線性關係之優點，P. Ronkanen 等人提出以系統鑑別之方式，求出壓電材料之漏電阻抗模型，並運用前饋補償之方式，改善定位精度。

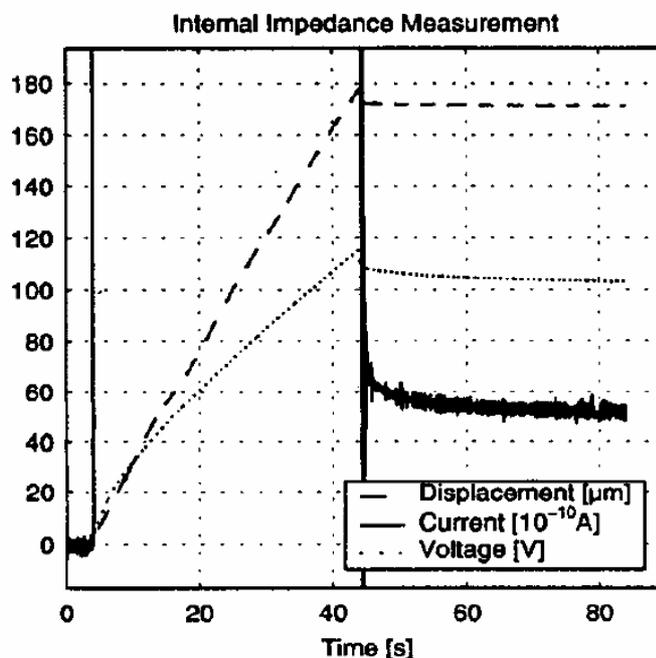


圖 3.2 壓電致動器靜態消耗電流

$$X = \frac{21G\Omega}{\sqrt{(3.4 \times 10^7 \times i)^2 + 1}} \quad (5)$$

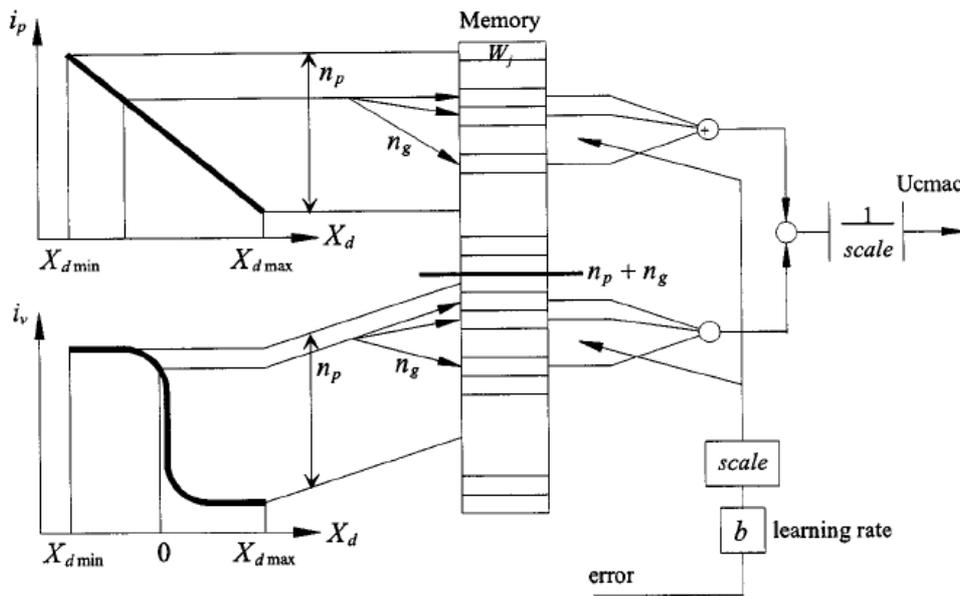
$$i_t(t) = i_c(t) + i_l(t) = i_c(t) + \frac{V(t)}{X} \quad (6)$$

但是此一方法必須使用解析度為 10pA 的電流感知器才能滿足電荷計算之需求，但是此一電流感知器的電流吞吐量將限制了壓電致動器之響應速度。

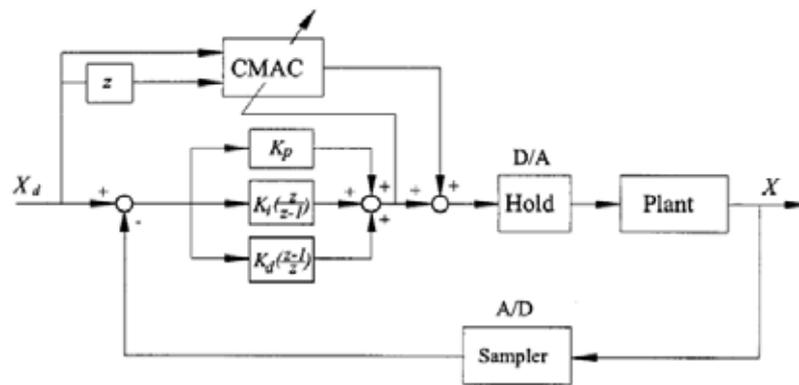
3.3 小腦模型類神經網路

S. S. Ku 等人[7]使用小腦模型類神經網路 (A cerebellar model articulation controller (CMAC) neural network)，疊代學習壓電致動器結合撓性鉸之平台逆系統模型。圖 3.3(a)顯示小腦模型類神經網路應用查表方式，將各個參數映射到不同的記憶體，每個參數是由一個或多個記憶體交集而成。利用記

憶體內的記憶內容加乘相加成為 CMAC 輸出值。CMAC 輸出值和期望值作比較，其差值再平均分佈在各個原本取出的記憶空間。此一方式對非線性系統參數，具備適應性學習、快速收斂之類化 (generalization) 能力。圖 3.3(b) 顯示小腦模型利用 PID 控制器的輸出值隱含著前饋控制器補償值與系統響應之誤差，疊代學習壓電致動器結合撓性鉸之平台逆系統模型。此方法對軌跡追隨問題有其實用性。對於動態響應具有重複性的系統，[8] 小腦模型已經證實了在多次學習之後，CMAC 輸出值可以逼近期望值。



(a) 小腦模型映射示意圖



(b) CMAC 搭配 PID 離散控制系統控制架構圖

圖 3.3 小腦模型映射示意圖與控制架構圖

由於 CMAC 對於雜訊很敏感，當追蹤軌跡具有高頻分量時，CMAC 容

易出現不穩定現象。雖然 C.C. Lin 等人[9]提出藉由修改疊代學習權重與增加不反應區方式，但是當追蹤軌跡存在著三角波、步階等非可微分函數之高频分量時，仍然無法改善 CMAC 不穩定現象問題。

3.4 Maxwell slip model

M. Goldfarb[10]、G. S. Choi[11]與 T. J. Yeh [12] 等人則以 Maxwell slip model 建立遲滯模型，利用簡單的機械元件描述遲滯的非線性。

這模型是利用一群包含滑塊、線性彈簧的簡單機械平移系統所組成，藉外力與位移間的關係來建立其遲滯非線性關係。但此模型為靜態模型，與速度、加速度或頻率無關。可調整的參數多達十多個以上。M. Goldfarb 考慮電機內部包含電荷與遲滯電壓之關係，將此遲滯模型帶入其中，得到完整壓電致動器模型。

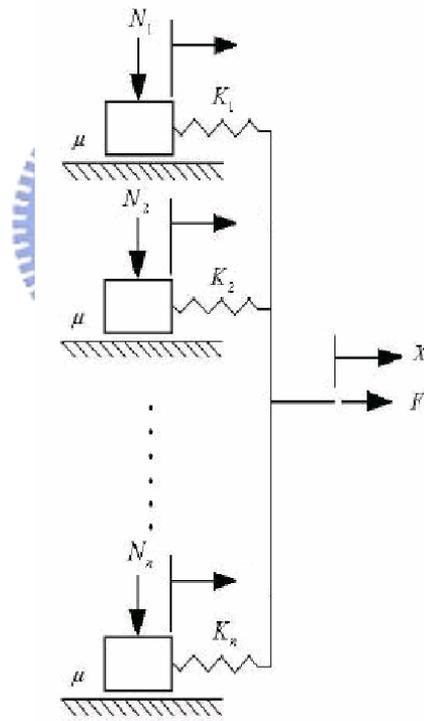


圖 3.4 利用多個並聯彈滑元件來模擬遲滯曲線

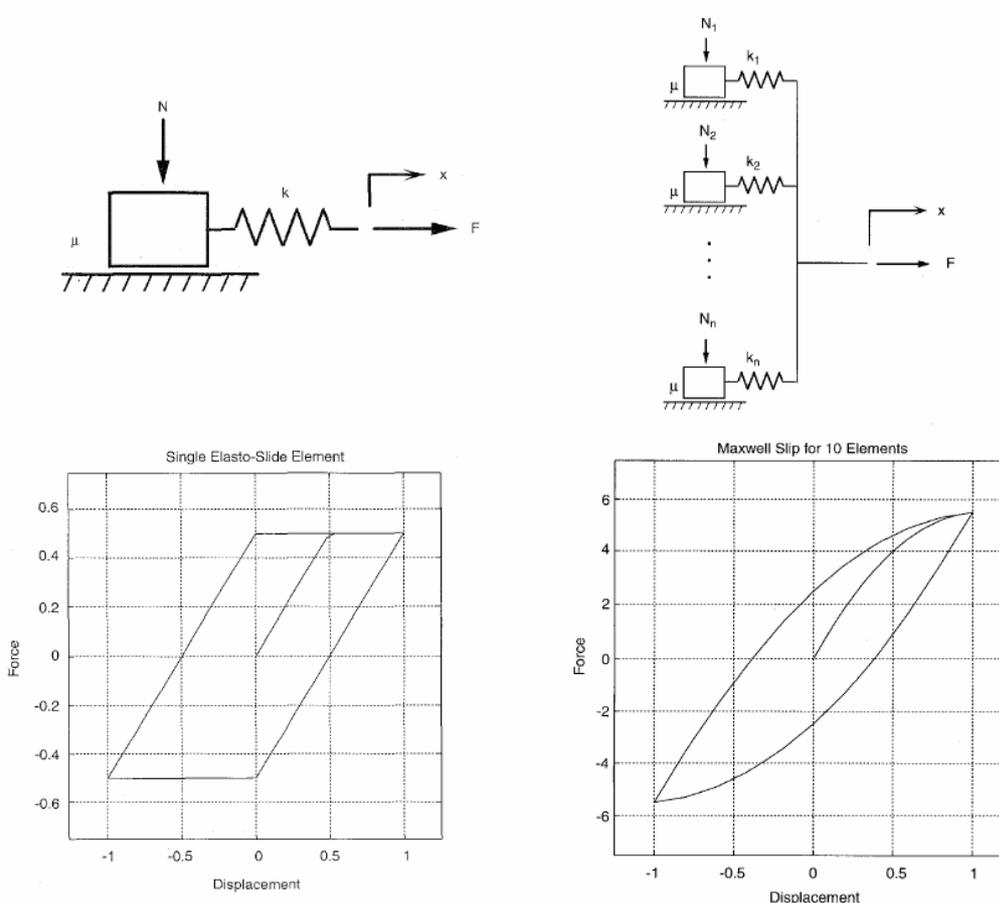
當多個彈滑元件組成如圖 3.4 的結構時，其方程式如下：

$$\begin{cases} F_i = k_i(x - x_{bi}) & , \text{for } |k_i(x - x_{bi})| < f_i \\ F_i = f_i \times \text{sgn}(\dot{x}) \text{ and } x_{bi} = x - \frac{f_i}{k_i} \times \text{sgn}(\dot{x}) & , \text{for } |k_i(x - x_{bi})| \geq f_i \end{cases} \quad (7a)$$

$$F = \sum F_i \quad (7b)$$

其中 k_i 、 f_i 、 x_{bi} 分別代表為第 i 個彈滑元件之虎克常數、庫倫摩擦力、滑塊之初始位移值；而其輸入為多個彈滑元件所組成的系統位移值（如圖 3.4 中的輸入 x ）， F 為輸出之力量， \dot{x} 則是其輸入位移對時間的變化量，也就是輸入的速度。

當彈滑元件之彈力大於庫倫摩擦力時，滑塊開始移動，進入滑動區。若是組合多個彈滑元件，各彈滑元件受力 F_i 由各彈滑元件參數 k_i 、 x_{bi} 計算，然後輸出的力量相加。以上的方程式代表了一個很重要的意義，就是當彈滑元件的滑塊元件開始滑動，其外加施力只需克服庫倫摩擦力，而位移增加並不能使彈簧伸張量增加，而使得力量上升。



(a)

(b)

圖 3.5 Maxwell slip model 架構與遲滯曲線圖：(a) 1 個元件；(b) 10 個元件。

圖 3.5(a) 為彈滑元件個數為 1 時，模型路徑為一個斜方形，非一平滑型

的曲線。若為十個彈滑元件所並聯，則為圖 3.5(b)路徑。式(7a)第二項

$$x_{b_i} = x - \frac{f_i}{k_i} \times \text{sgn}(\dot{x}) \quad , \text{for } |k_i(x - x_{b_i})| \geq f_i$$

針對彈滑元件進入滑動區時，隨時修正 x_{b_i} 值，使得 $\text{sgn}(\dot{x})$ 變號的瞬間，
 $|k_i(x - x_{b_i})| < f_i$ ，彈滑元件立即由滑動區進入線性區。

Y. I. Somov[13] 提到遲滯曲線分成 type A (順時針，圖 3.6(a))與 type B (逆時針，圖 3.6(b))兩種，並且說明壓電致動器之遲滯曲線屬於 type B。從圖 3.6 可以看出若限定 $(x - x_{b_i})$ 不得小於零，則 Maxwell slip model 僅能逼近 Type A 的遲滯曲線。本文提出改良型 Maxwell 彈滑模型，使其適用於 Type B 的遲滯曲線，並且利用遞迴最小平方和誤差法學習改良型 Maxwell 彈滑模型以求得最佳的元件參數值，一舉解決係數設定的問題，作為日後控制壓電平台的基礎。

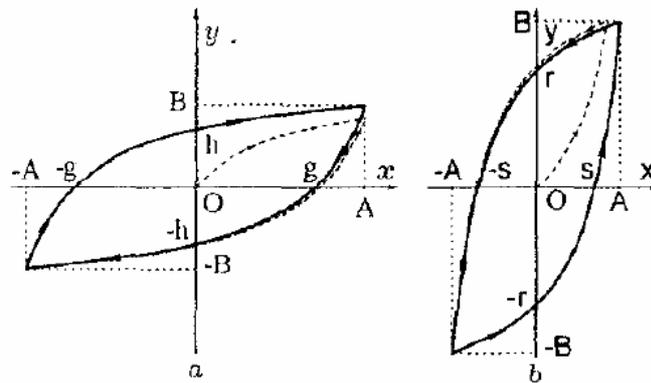


圖 3.6 典型遲滯曲線：(a) 負方向(順時針);(b) 正方向(逆時針)。

第四章 彈滑模型的改良與參數鑑別

根據前一章 Maxwell slip model 之說明，本研究修改滑車架構，將參數 x_{bi} 解釋成間隙參數，並且利用遞迴最小平方和誤差法即時求取模型參數的最佳係數值，作為日後控制壓電平台的基礎。

4.1 改良型 Maxwell 彈滑模型

過去所發表的 Maxwell slip model 雖然利用式(7a)第二項

$$x_{bi} = x - \frac{f_i}{k_i} \times \text{sgn}(\dot{x}) \quad , \text{ for } |k_i(x - x_{bi})| \geq f_i$$

修正 x_{bi} 值，使得 $\text{sgn}(\dot{x})$ 變號的瞬間 $|k_i(x - x_{bi})| < f_i$ ，彈滑元件立即由滑動區進入線性區。但是不論 $\text{sgn}(\dot{x}) > 0$ 或者 $\text{sgn}(\dot{x}) < 0$ ，依據式(7a)、(7b)所繪之遲滯曲線必然存在對稱性。若使用此一具對稱性的遲滯曲線預測實際的壓電平台響應，將遭遇極大的預測誤差。針對實際的壓電平台響應曲線多為非對稱之特點，本研究將彈滑元件區分為兩組，並依據 $\text{sgn}(\dot{x}) > 0$ 以及 $\text{sgn}(\dot{x}) < 0$ 之狀態，選擇啟動一組彈滑元件。

由於每個滑塊增加一組間隙參數，當 $(x - x_{bi}) \times \text{sgn}(\dot{x}) < 0$ 的時候，並不啟動該組彈滑元件。透過適當安排參數 x_{bi} ，使得彈滑元件 F_i 依序影響輸出力量 F ，達成修正 Maxwell slip model 的目的，使其適用於無對稱性 Type B 遲滯曲線。

式 8(a)說明改良型 Maxwell 彈滑模型單一彈滑元件位移與施力響應關係，式 8(b)說明系統響應方程式。

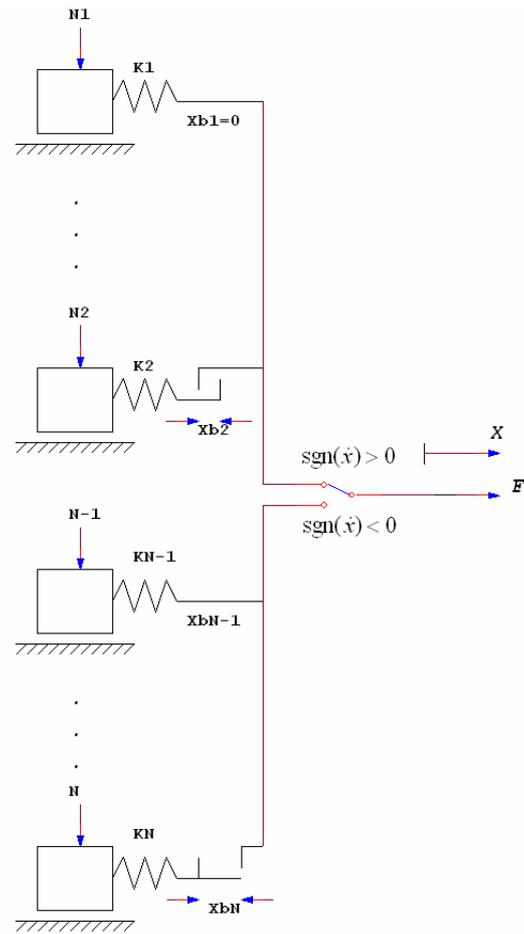
圖 4.1(a)(b)分別顯示改良型 Maxwell 彈滑模型架構圖以及彈滑模型響應曲線圖。

$$\begin{cases} F_i = 0 & , \text{ for } (x - x_{bi}) \times \text{sgn}(\dot{x}_n) < 0 \\ F_i = k_i(x - x_{bi}) & , \text{ for } |k_i(x - x_{bi})| < f_i \\ F_i = f_i & , \text{ for } |k_i(x - x_{bi})| \geq f_i \end{cases} \quad (8a)$$

$$x_n = x - x_{bi}$$

$$F_n = \sum F_i \quad , \text{ for all } \text{sgn}(\dot{x}_n) \quad (8b)$$

$$F_n = F_{n-1} \quad , \text{ for } \text{sgn}(\dot{x}_n) \neq \text{sgn}(\dot{x}_{n-1})$$



(a)

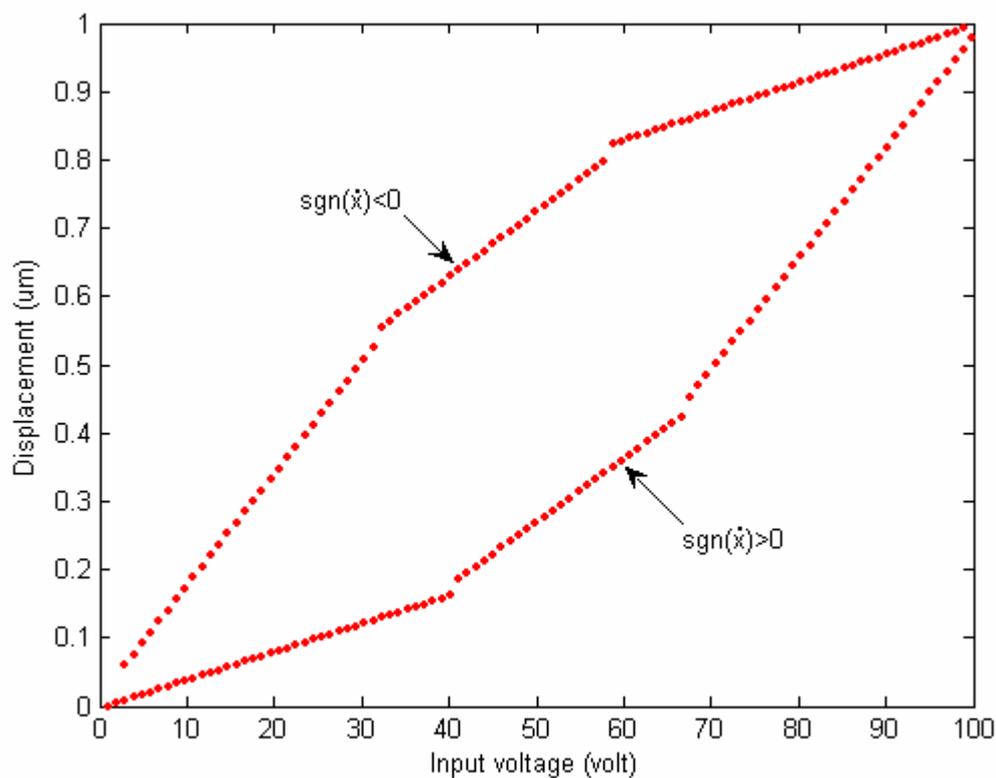


圖 4.1 改良型 Maxwell 彈滑模型 (a)架構圖; (b)響應曲線

4.2 決定彈滑元件的參數

傳統的 Maxwell slip model 因為採用並聯的彈滑元件，在求取元件參數的時候將遭遇參數耦合的問題。T. J. Yeh [12]以 linear programming [14]方式，先算出最後一個彈滑元件的參數，再由後往前代入下一個。

4.1 節討論的改良型 Maxwell 彈滑模型，將彈滑元件改為串聯方式，消除了參數耦合的問題，也就是任何時刻，只有一顆彈滑元件處於線性工作區，其餘元件不是尚未啟動，就是進入滑動狀態。這使得彈滑元件參數鑑別的問題，變成了如何使用一顆彈滑元件描述遲滯曲線某一區段的曲線擬合問題。

由於壓電平台響應曲線具有非重複的特性，而量測系統又存在著雜訊干擾，我們只能期望經由實驗數據，在某一段壓電平台響應曲線中，找出一個彈滑元件之 k 值，使得由此 k 值描述的直線與實驗數據所形成的曲線誤差最小。

對於彈滑元件 k 值的訓練，能被闡述為一個最佳曲線擬合的問題[14]，

所以採用遞迴最小平方和誤差法，適當地選擇彈滑元件之 k 值，使得彈滑元件所描繪的直線與遲滯曲線之間的平方和誤差最小。附錄記載了利用遞迴最小平方和誤差法（Recursive least-squares algorithm）求取彈滑元件參數的過程。

但是，應該使用幾個彈滑元件以及何時啟動下一個彈滑元件？下一節將探討彈滑元件數量以及參數 x_{bi} 的決策機制。

4.3 彈滑元件數量的決策機制

T. J. Yeh [12]採用等間距的方式對 X 軸等分 N 個區段，經由量測實際值與估測值的差異，決定區段數量 N 的增減。本研究提出一種決策機制，開放一個閾值參數(*Threshold*)供操作者設定使用，當遲滯曲線的量測實際值與改良型 Maxwell 彈滑模型之輸出估測值的絕對誤差大於閾值參數時，將命令改良型 Maxwell 彈滑模型增加一組新的彈滑元件，加入遞迴計算。

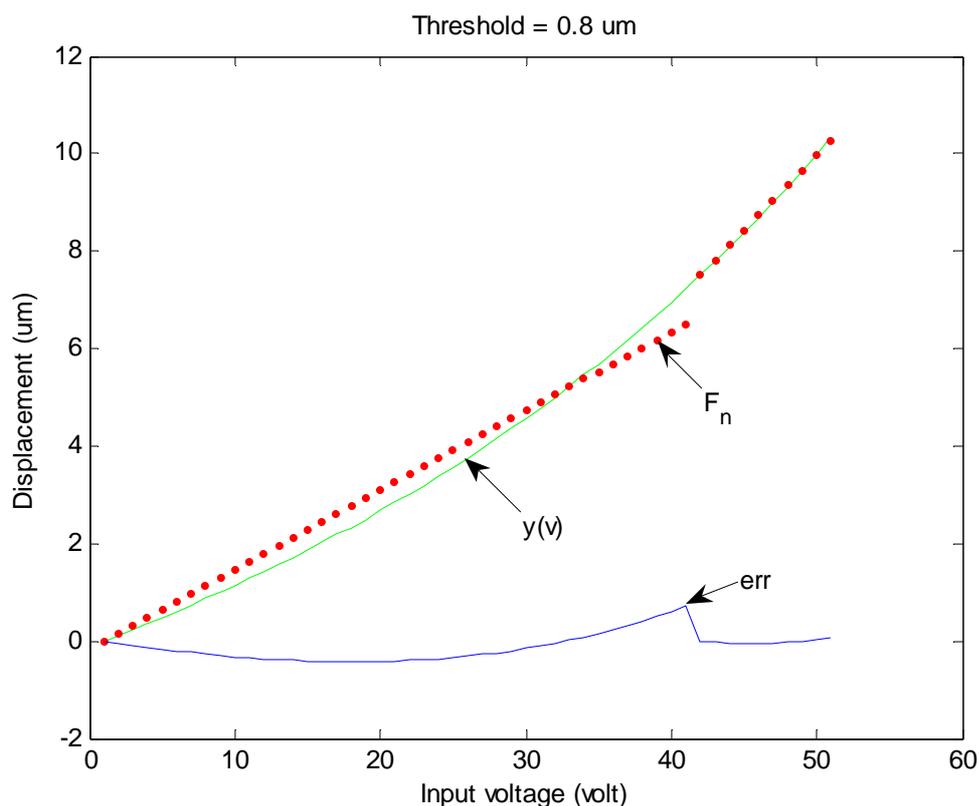


圖 4.2 改良型 Maxwell 彈滑模型依據估測誤差與閾值參數，增加一組新的彈滑元件

圖 4.2 說明改良型 Maxwell 彈滑模型依據估測誤差與閾值參數，增加一

組新的彈滑元件的情形。綠色連續曲線表示壓電平台對輸入電壓的模擬位移響應 $y(v)$ 。紅色點狀表示改良型 Maxwell 彈滑模型利用 4.2 節所述遞迴最小平方和誤差法即時計算第一顆彈滑元件參數，並且利用第一顆彈滑元件描述壓電平台對 0~41 伏特輸入電壓的響應曲線進行估測的結果 F_n 。下方的藍色連續曲線表示壓電平台遲滯曲線與彈滑元件估測的誤差 $err = y(v) - F_n$ 。由於壓電平台對輸入電壓的遲滯曲線 $y(v)$ ，在 41~42 伏特附近出現明顯的轉折點，第一顆彈滑元件對壓電平台響應曲線的估測誤差將超過閾值參數 (*Threshold*)。因此，在輸入電壓 42 伏特處，產生了第二顆彈滑元件，並使用輸入電壓 42 伏特之後的遲滯曲線值計算第二顆彈滑元件參數。

4.4 模型參數鑑別流程

整理前述章節，將本研究遲滯模型之建立與參數鑑別方式整理如下：

令

$v(t)$ ：輸入之電壓對時間函數。

$y(v)$ ：壓電平台對輸入電壓之位移響應。

且

$$Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y(v) * \delta(t - nT) \quad (9)$$

$$x_n = v(t) * \delta(t - nT)$$

其中， T 為取樣週期，

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t \neq 0 \end{cases}$$

設定初始值 $P_1 = 1$ ， $k_1 = 0$ ，令 $F_{n+1} = Y_n$ 代入遞迴最小平方和誤差法 (Recursive least-squares algorithm)，就可以得到針對 $y(v)$ 逐次疊代修正彈滑元件之 k_{n+1} 值：

$$k_{n+1} = k_n + \frac{P_n x_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} [F_{n+1} - x_{n+1} k_n]$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T P_n}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}}$$

令 $k_i = k_{n+1}$ 代入改良型 Maxwell 彈滑模型，得到改良型 Maxwell 彈滑模型之輸出值 F_n ：

$$\begin{cases} F_i = 0 & , \text{for } (x - x_{bi}) \times \text{sgn}(\dot{x}_n) < 0 \\ F_i = k_i(x - x_{bi}) & , \text{for } |k_i(x - x_{bi})| < f_i \\ F_i = f_i & , \text{for } |k_i(x - x_{bi})| \geq f_i \end{cases}$$

$$x_n = x - x_{bi}$$

$$F_n = \sum F_i \quad , \text{for all } \text{sgn}(\dot{x}_n)$$

$$F_n = F_{n-1} \quad , \text{for } \text{sgn}(\dot{x}_n) \neq \text{sgn}(\dot{x}_{n-1})$$

本研究增加一個閾值參數 *Threshold* 供操作者使用，當壓電平台的響應 Y_n 與改良型 Maxwell 彈滑模型之輸出 F_n 的絕對誤差大於閾值參數 *Threshold*，將遞迴最小平方和誤差法所計算之 k_n 、輸入電壓取樣值 x_n 、壓電平台響應值 Y_n ，分別儲存至改良型 Maxwell 彈滑模型之彈滑元件參數 k_i 、 x_{bi} 、 f_i ，然後命令改良型 Maxwell 彈滑模型增加一只新的彈滑元件，加入遞迴計算。圖 4.3 說明改良型 Maxwell 彈滑模型根據壓電平台響應曲線取樣值進行遞迴最小平方和誤差法，計算彈滑元件參數 k_i 的流程。



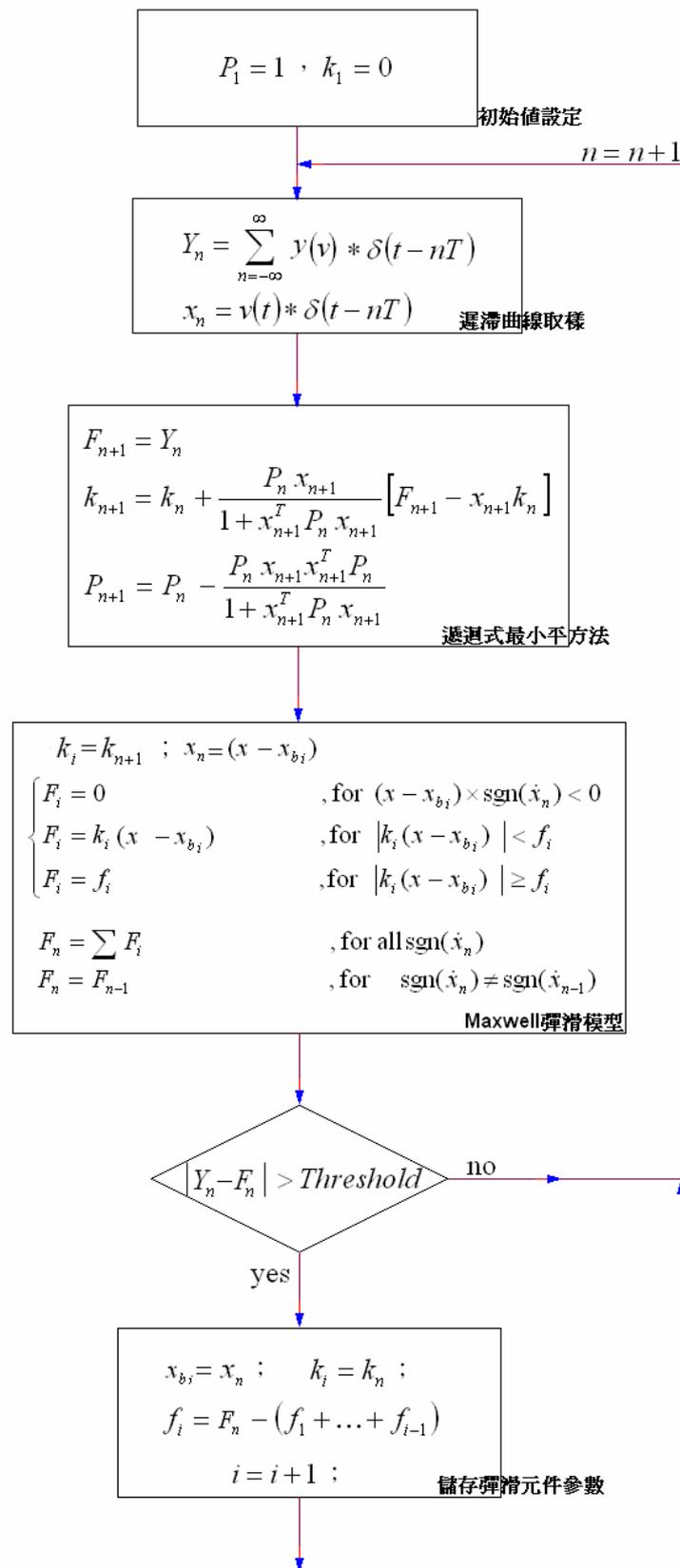


圖 4.3 使用遞迴最小平方和誤差法計算改良型 Maxwell 彈滑元件參數流程圖

4.5 模型參數鑑別結果

利用 2.4 節的實驗數據，驗證改良型 Maxwell 彈滑模型。實驗證明，利用遞迴最小平方和誤差法逐次疊代修正改良型 Maxwell 彈滑元件參數之結果確實能夠有效預測壓電平台次一迴圈之動態行為。

令閾值參數 $Threshold$ 設定為 $0.5\mu\text{m}$ ，遞迴最小平方和誤差法針對經過取樣的壓電平台響應 Y_n 逐次疊代修正並產生一組 $3*6$ Maxwell 彈滑元件參數，結果如表 4.1。

表 4.1 對經過取樣的壓電平台響應 Y_n 逐次疊代修正並產生彈滑元件參數結果

參數/數量	1	2	3	4	5	6
x_{bi}	0	9.1877	19.538	97.908	65.378	21.593
F_i	1.205	3.9765	8.3145	43.862	33.981	14.46
k_i	0.3547	0.3547	0.44513	0.2777	0.42597	0.59484

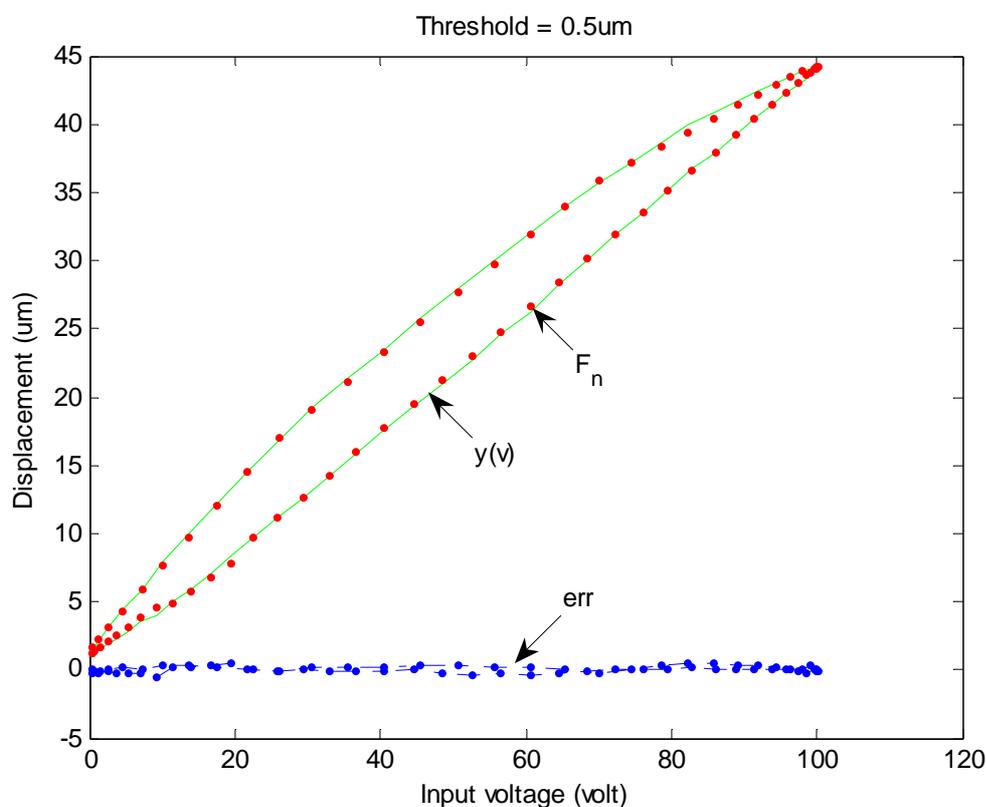


圖 4.4 逐次疊代修正產生的改良型 Maxwell 彈滑元件與實驗數據比較

圖 4.4 綠色連續曲線代表壓電平台對應輸入電壓的響應曲線 Y_n ；紅色點狀代表改良型 Maxwell 遲滯模型對應輸入電壓的響應曲線 F_n ；下方的藍色點線表示誤差 $err = Y_n - F_n$ 。由表 4.1 參數 x_{bi} 的數值分布可以看出來，彈滑元件 1、2、3 描述壓電平台上升響應曲線，彈滑元件 4、5、6 描述壓電平台下降響應曲線；壓電平台上升曲線的轉折點集中在輸入電壓 20 伏特以下，壓電平台下降響應曲線之轉折點則較為分散。

為了驗證本方法所得之改良型 Maxwell 彈滑模型是否能有效地預測壓電平台次一迴圈之動態行為，使用第一迴圈實驗數據所產生的改良型 Maxwell 彈滑模型與第二迴圈實驗數據比較，結果如圖 4.5。相較於圖 4.4，雖然圖 4.5 顯示較大的 err ，但是仍然小於壓電平台的非重複性誤差。

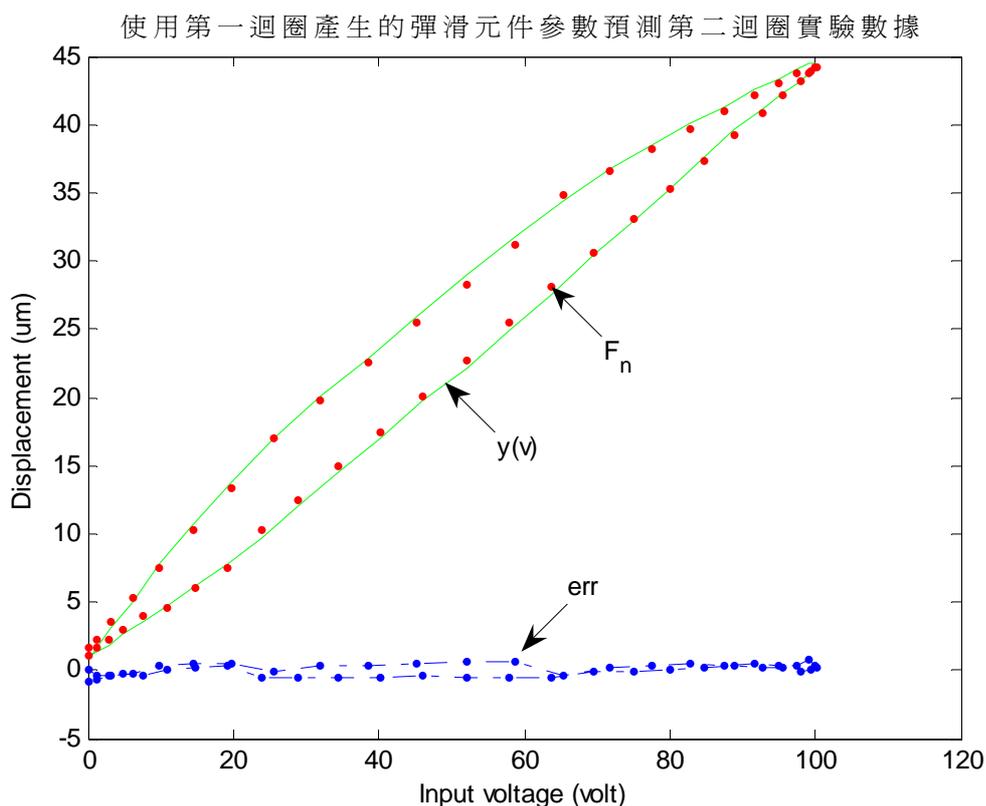


圖 4.5 使用第一迴圈實驗數據逐次疊代修正產生的改良型 Maxwell 彈滑元件參數預估壓電平台次一迴圈響應結果

第五章 結論與未來發展方向

5.1 結論

雖然使用壓電致動器的奈米級定位系統因為具有體積小、重量輕響應快、解析度高等特性，然而壓電材料固有的遲滯現象(Hysteresis)卻會降低動態響應特性及定位精度，使得輸入輸出呈非線性關係。為了減低遲滯現象對壓電平台的影響，本文以 Maxwell slip model 為基礎，修改成為一套改良型 Maxwell 遲滯模型，作為描述壓電平台遲滯現象的有效模型，並利用遞迴最小平方和誤差法 (Recursive least-squares algorithm) 針對此模型發展一套即時參數鑑別法則。

實驗證明，此一改良型 Maxwell 遲滯模型經過遞迴最小平方和誤差法之即時參數鑑別，具有結構簡單、參數少、適應性強等優點。

5.2 未來發展方向

未來將根據 H. Tolle[15] 所提之控制架構，以此一改良型 Maxwell 遲滯模型在開迴路架構下設計一前饋補償器(Feedforward compensator)，如圖 5.1 所示，以補償遲滯效應所造成的相位延遲及定位誤差，並且設計回授控制器以增加系統之強健性。

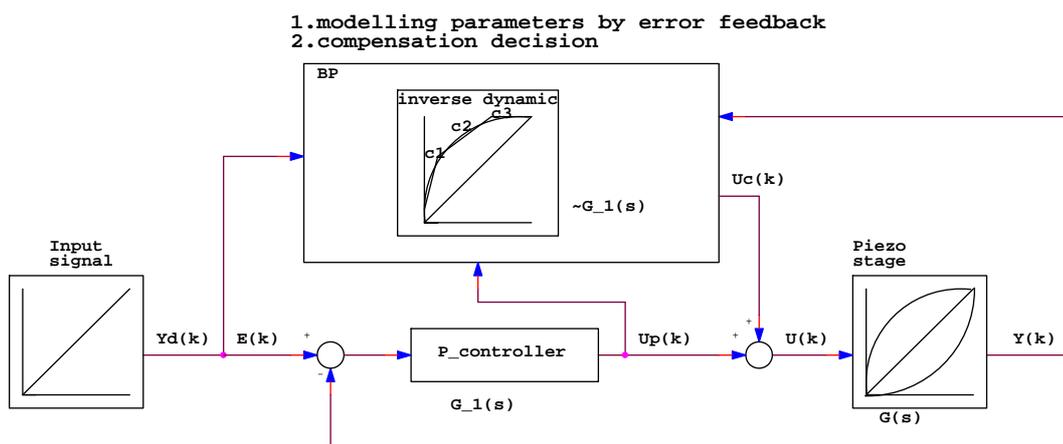


圖 5.1 前饋補償器

參考文獻

- [1] S. Vorndran, “Why Nanopositioning is More than Just Nanometers—or How to Find a State-of-the-Art System”, *Physik Instrumente*, 2002-2003
- [2] Physik Instrumente, “MicroPositioning, NanoPositioning, NanoAutomation Solutions for Cutting-Edge Technologies”, *Physik Instrumente Piezo-University*, 2001
- [3] X. Ren, *Nature Materials*, 3, 91-94, 2004
- [4] 朱怡銘, “奈米級 XYZ 三自由度微定位平台之設計製造與分析”, 國立臺灣大學機械工程學研究所碩士論文, 1999
- [5] P. Ge and M. Jouaneh, “Tracking control of a piezoelectric actuator”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.4, no.3, pp. 209-216, 1996
- [6] P. Ronkanen, P. Kallio, H.N. Koivo, “Current control of piezoelectric actuators with power loss compensation”, *Intelligent Robots and System, 2002. IEEE/RSJ International Conference on 1948- 1953*, vol.2, 2002
- [7] S. S. Ku, U. Pinoson, S. Cetinkunt and S. Nakajima, “Design, fabrication, and real-time neural network, control of a three-degrees-of-freedom nanopositioner” , *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 5, no. 3, 2000
- [8] T. Tao, T.H. Hung and S.F. Su, “ Credit assigned CMAC and its application to online learning robust controllers”, *IEEE Transactions on Systems, Man , and Cybernetics , Part B- Cybernetics*, vol.33, no.2, 2003.
- [9] C.C. Lin;, F.C. Chen, “On a new CMAC control scheme, and its comparisons with the PID controllers”, *American Control Conference*, vol.2, pp. 769-774 2001
- [10] M. Goldfarb and C. Nikola , “Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation”, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, pp. 69-79, 1997
- [11] G. S. Choi, H. S. Kim and G. H. Choi, “A study on position control of piezoelectric actuators”, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, vol. 3, pp. 851 -855, 1997

- [12] T.J. Yeh, S.W. Lu, and T.Y. Wu, "Modeling and Identification of Hysteresis in Piezoelectric Actuators", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 128, Issue 2, pp. 189-196, June 2006
- [13] Y. I. Somov, "Modelling Physical Hysteresis and Control of a fine Piezo-drive", *Physics and Control, 2003. Proceedings. 2003 International Conference*, Vol. 4, pp. 20-22, Aug. 2003
- [14] E.K.P. Chong, S.H. Zak, *An Introduction to Optimization*, second edition, John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.
- [15] H. Tolle, "Learning control and its place in automation", *Intelligent Systems Engineering, 1994, Second International Conference on 'Intelligent Systems Engineering'*, (CP395), p. 9 -36 Sept. 1994



附錄 A

A.1 The least-squares Optimization Problem

考慮雜訊對於彈滑元件的影響，預期彈滑元件的虎克常數 k 與位移變數 x 、施力 F_i 的關係為

$$\begin{cases} kx_1 = F_1 + \varepsilon_1 \\ kx_2 = F_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ kx_n = F_n + \varepsilon_n \end{cases} \rightarrow k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

其中 $x_n = (x_i - x_{bi})$ ， ε_i 表示第 i 次測量誤差

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

將上述式子寫成向量矩陣形式

$$k\mathbf{x} - \mathbf{F} = \mathbf{e} \quad (\text{A2})$$

欲使用一顆彈滑元件描述遲滯曲線的某一區段，必須求解該彈滑元件之 k 值（虎克常數）。這個對於彈滑元件 k 值的訓練問題，能被闡述為一個最佳化的問題。利用最佳化的最小平方和誤差法，適當地選擇彈滑元件之 k 值，使得彈滑元件所描繪的直線與遲滯曲線之間的平方誤差和最小。

此一彈滑元件 k 值的訓練問題，寫成數學式

$$\begin{aligned} & \min_k \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ & = \min_k (k\mathbf{x} - \mathbf{F})^T (k\mathbf{x} - \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

這是一個無邊界且過度限定的系統，適合利用最小平方和誤差法求彈滑元件 k 值最佳解。設成本函數 \mathbf{J} ，

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(k) &= (k\mathbf{x} - \mathbf{F})^T (k\mathbf{x} - \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{x}^T k^T - \mathbf{F}^T)(k\mathbf{x} - \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{x}^T k^T k\mathbf{x} - \mathbf{x}^T k^T \mathbf{F} - \mathbf{F}^T k\mathbf{x} + \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\
&= \mathbf{x}^T k^T k\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T k^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{A4}$$

根據 Chong's book[14] Ch6.2 二階充分條件，

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{J}(k^*) &= \left. \frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial k} \right|_{k^*} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}k^* - 2\mathbf{x}^T \mathbf{F} = 0 \\
F(k^*) &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial k^2} \right|_{k^*} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} > 0
\end{aligned} \tag{A5}$$

其中，

$\nabla \mathbf{J}(k^*)$ 是成本函數 \mathbf{J} 對 k 的一階微分，然後取轉置矩陣。

$F(k^*)$ 是成本函數 \mathbf{J} 對 k 的二階微分。

從 $\nabla \mathbf{J}(k^*) = 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}k^* - 2\mathbf{x}^T \mathbf{F} = 0$ 可以得知在 k^* 處，成本函數 \mathbf{J} 存在著區域性的極值。由於 $2\mathbf{x}^T \mathbf{x}k^* - 2\mathbf{x}^T \mathbf{F} = 0$ ，可以得知

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \mathbf{x}k^* &= \mathbf{x}^T \mathbf{F} \\
k^* &= (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{A6}$$

意即，存在唯一最佳解 $k = k^*$ ，使得彈滑元件所描繪的直線與遲滯曲線的平方誤差和最小。

圖 A.1 顯示利用 $k^* = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{F}$ 對於一組數據進行最佳化線性迴歸批次計算的結果。

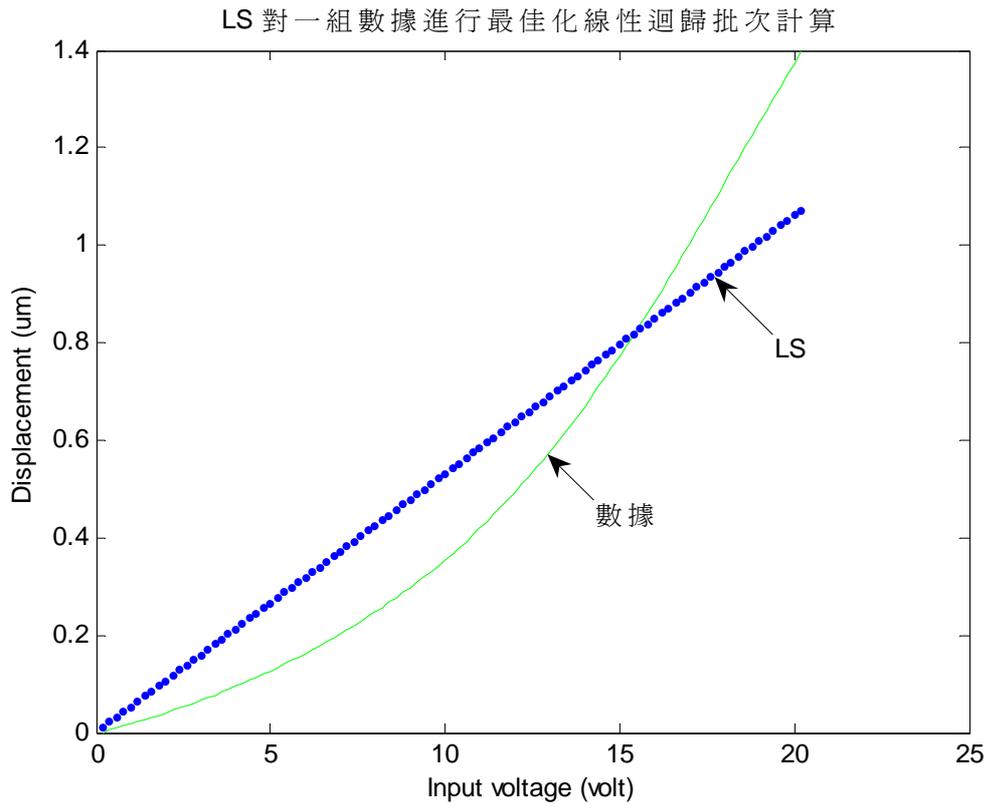


圖 A.1 利用最小平方和誤差法對於一組數據進行最佳化線性迴歸批次計算結果



A.2 Recursive least-squares algorithm

前面提到，存在唯一最佳解 $k^* = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{F}$ ，使得彈簧元件所描繪的直線與遲滯曲線的平方誤差和最小。如果每次都要重新計算 $(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1}$ ，不但耗費時間而且必須等候所有資料收集完整才能進行計算。為了減少 $(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1}$ 計算時間，利用遞迴最小平方和誤差法（Recursive least-squares algorithm）逐次疊代修正彈簧元件之 k 值。

彈簧元件的虎克常數 k 與位移變數 x 、施力 F_i 的關係為

$$\begin{cases} kx_1 = F_1 + \varepsilon_1 \\ kx_2 = F_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ kx_n = F_n + \varepsilon_n \end{cases} \Rightarrow k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

其中 $x_n = (x_i - x_{bi})$ ， ε_i 表示第 i 次測量誤差

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$


利用 N 組實驗數據可以求得最佳解

$$k_n^* = (\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{x}_n^T \mathbf{F}_n \quad (\text{A8})$$

當增加一組新的實驗數據，便形成一組新的方程式

$$kx_{n+1} = F_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

將此方程式併入既有的 N 組方程式，並解出新的最佳解 k_{n+1}^*

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow k_{n+1}^* = (\mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{x}_{n+1})^{-1} \mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} \quad (\text{A9})$$

為了省下重新計算 $(\mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{x}_{n+1})^{-1}$ 的時間，使用矩陣反演公式（the matrix

inversion lemma）

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A10})$$

並且令 $P_n = [\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n]^{-1}$ 使得方程式看起來短一點，則

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{-1} &= \mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{x}_{n+1} \\ &= \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n + x_{n+1} x_{n+1}^T \\ &= P_n^{-1} + x_{n+1} x_{n+1}^T \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (P_n^{-1} + x_{n+1} \cdot \mathbf{I} \cdot x_{n+1}^T)^{-1} \\ \Rightarrow &= P_n - P_n x_{n+1} (1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1})^{-1} x_{n+1}^T P_n \\ &= P_n - \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T P_n}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned} k_{n+1}^* &= (\mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{x}_{n+1})^{-1} \mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} \\ &= P_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} \\ &= P_{n+1} [\mathbf{x}_n^T \mathbf{F}_n + x_{n+1} F_{n+1}] \\ &= \left(P_n - \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T P_n}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} \right) [\mathbf{x}_n^T \mathbf{F}_n + x_{n+1} F_{n+1}] \\ &= k_n^* - \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T k_n^*}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} + P_n x_{n+1} F_{n+1} \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T P_n x_{n+1} F_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} \\ &= k_n^* + \frac{P_n x_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} [F_{n+1} - x_{n+1} k_n^*] \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

整理上式，得到沒有反矩陣的方程式

$$k_{n+1}^* = k_n^* + \frac{P_n x_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}} [F_{n+1} - x_{n+1} k_n^*]$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{P_n x_{n+1} x_{n+1}^T P_n}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}}$$

其中， k_n^* 是利用 N 組實驗數據求得的最佳解， k_{n+1}^* 是被新增的一組實驗數據修正過的最佳解。 $[F_{n+1} - x_{n+1} k_n^*]$ 相當於預估誤差， $\frac{P_n x_{n+1}}{1 + x_{n+1}^T P_n x_{n+1}}$ 相當於調整修正的增益。