

結合線性近似法則之灰色估測器應用於離散型順滑
模態之控制

Grey Predictor Design Combined with Linear Approximation
Algorithm and Applied to Discrete Sliding-Mode Control

研究生：葉志暉

Student: Chih-Huei Yeh

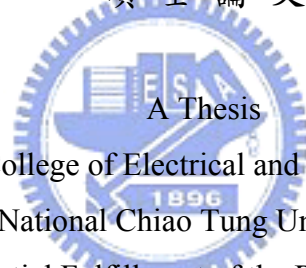
指導教授：陳永平 博士

Advisor: Dr. Yon-Ping Chen

國立交通大學

電機學院 電機與控制學程

碩士論文



Submitted to College of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Electrical and Control Engineering

December 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年十二月

結合線性近似法則之灰色估測器應用於離散型順滑模態之控制

學生：葉志暉

指導教授：陳永平 博士

國立交通大學 電機學院 電機與控制學程碩士班

摘要

灰色模型GM(1,1)適合用於單一指數變化率的數列估測。然而，對於其他非單一指數變化率或是非單調數列(non-monotone sequence)而言，則需要採用高階的灰色模型或者以其他方法來降低估測誤差。由於高階灰色模型的運算太過繁雜，並不適用於微處理器的即時運算。基於快速運算效能的需求，本論文提出一種簡單而有效的誤差補償方法，來提高估測的精確度。

類似的問題，也可以應用於離散型順滑模態控制(discrete sliding-mode control)系統，其未知範圍的外部匹配式干擾訊號估測。離散型滑模控制針對系統不定值與干擾的穩健性已被普遍證明並加以應用。不過，在實際應用上卻經常面臨無法得知系統外部干擾訊號界限或是干擾訊號太大的窘境。為了解決此一問題，本論文根據可量測的狀態變數、系統動態方程式以及順滑函數，首先透過代數運算，求得系統外部匹配式干擾(external matched disturbance)訊號的歷史資料。然後，再以灰色模型GM(1,1)結合傳統線性近似的補償法則，得到干擾訊號的估測值。接著，以其估測結果作為受控體的前饋控制輸入，並與離散型滑模控制器整合成為離散型灰色滑模控制器(discrete grey sliding-mode controller, DGSMC)。

最後，以模擬的方式說明以灰色估測器應用於離散型滑模控制器的可行性，同時比較GM(1,1)模型經過誤差補償與修正之後的效能。

Grey Predictor Design Combined with Linear Approximation Algorithm and Applied to Discrete Sliding-Mode Control

Student: Chih-Huei Yeh

Advisor: Dr. Yon-Ping Chen

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

The grey model GM(1,1) is applicative to the prediction of a monotone sequence. For those multiple-rate or non-monotone sequences, however, it needs another method to alleviate prediction errors by means of a grey model of higher order or some other compensation algorithms. Unfortunately, the use of higher order grey model implies the demand of more complicated computations, and thus makes it difficult for real-time process in microprocessors. To achieve an efficient real-time process, this thesis introduces a novel and simple scheme not only to save the computation time, but also improve the prediction accuracy.

The proposed simple scheme is also suitable for the discrete sliding-mode control (DSMC) system to forecast the unbounded external matched disturbances. Recently, the DSMC has been widely adopted to deal with system uncertainties and perturbations. Nevertheless, there often exist quandaries about unknown disturbances in physical utilizations. To overcome this issue, at first, the historical data of external matched disturbances are obtained by algebraic computations based on the measurable states, system dynamic equation, and sliding function. The modified grey model GM(1,1), combined with linear approximation, shows a more precise prediction. The integration of the DSMC and the proposed prediction algorithm results in a discrete grey sliding-mode controller (DGSMC). Numeric simulation results are given to illustrate the feasibility and successfulness of the DGSMC.

誌 謝

關於攻讀碩士學位，對個人而言是一項成就，也是一項挑戰。畢竟在繁忙工作之餘，同時又要兼顧課業上的學習與研究，沒有週遭親友、師長、以及同事的支持與鼓勵，勢必無法持續保有學習的動力。首先要感謝父母與兩位兄長的建議與鼓勵，以及女友的體貼與幫助，使得個人的背後彷彿有一股強勁的推力；加上指導教授陳永平老師對於研究的啟發以及耐心的指導，始終引導著明確的途徑；最後，工作單位的長官徐經理與其他同事給予的理解與協助，不至於讓工作與課業兩者之間有互相的衝突。事實上除了學位，其他方面的獲得甚至更多；所以，藉此機會要再次感謝所有相關人士的慷慨付出。



目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖列	vi
表列	viii
第一章 緒論	1-1
1.1 灰色系統簡介	1-1
1.2 順滑模態與離散型滑模控制發展	1-1
1.3 研究動機	1-3
1.4 論文架構	1-4
第二章 灰色理論與灰色模型	2-1
2.1 一階單變數灰色模型GM(1,1)	2-1
2.2 虛擬二階單變數灰色模型PGM(2,1)	2-4
2.3 結合線性近似法則之一階單變數灰色模型GM(1,1)	2-7
2.4 數據模擬與比較	2-11
2.4.1 不同函數數列的模擬比較	2-12
2.4.2 相同函數、不同取樣頻率數列的模擬比較	2-16
2.4.3 自然指數近似運算導入的模擬比較	2-18
第三章 離散型滑模控制	3-1
3.1 離散型滑模控制條件	3-1
3.2 離散型滑模控制器設計	3-6
3.2.1 系統介紹與轉換	3-6
3.2.2 二層式離散滑模控制器設計	3-8
3.3 數據模擬	3-14
第四章 離散型灰色滑模控制	4-1
4.1 應用灰色估測器之離散型滑模控制設計	4-1

4.2 數據模擬與比較.....	4-4
第五章 結論.....	5-1
附錄A 符號說明.....	A-1
參考文獻.....	R-1



圖 列

圖 2.1	數列1之原始資料與估測資料圖	2-13
圖 2.2	數列1之估測誤差比較圖	2-14
圖 2.3	數列2之原始資料與估測資料圖	2-15
圖 2.4	數列2之估測誤差比較圖	2-16
圖 2.5	數列3之原始資料與估測資料圖	2-17
圖 2.6	數列3之估測誤差比較圖	2-18
圖 2.7	數列1之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖	2-19
圖 2.8	數列1之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖	2-20
圖 2.9	數列2之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖	2-21
圖 2.10	數列2之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖	2-22
圖 2.11	數列3之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖	2-23
圖 2.12	數列3之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖	2-24
圖 3.1	離散型滑模條件(3.2)之反例圖	3-2
圖 3.2	迫近條件(3.3)與(3.9)之收斂軌跡圖	3-4
圖 3.3	二層概念系統軌跡圖	3-6
圖 3.4	狀況一之受控系統軌跡圖	3-12
圖 3.5	狀況二之受控系統軌跡圖	3-13
圖 3.6	順滑函數 s_1 與 s_2 模擬結果圖	3-16
圖 3.7	控制輸入 u_1 與 u_2 模擬結果圖	3-17
圖 3.8	狀態變數 x_1 、 x_2 與 x_3 模擬結果圖	3-18
圖 3.9	修正之後的順滑函數 s_1 與 s_2 模擬結果圖	3-19
圖 3.10	修正之後的控制輸入 u_1 與 u_2 模擬結果圖	3-20
圖 3.11	修正之後的狀態變數 x_1 、 x_2 與 x_3 模擬結果圖	3-21
圖 4.1	不同系統控制作用週期之DGeaL2SMC順滑函數 s_1 模擬結果比較圖	4-6

圖 4.2	不同系統控制作用週期之DGeaL2SMC順滑函數 s_2 模擬結果比較圖	4-7
圖 4.3	估測初始值改進之DGeaL2SMC順滑函數 s_1 模擬結果圖	4-8
圖 4.4	估測初始值改進之DGeaL2SMC順滑函數 s_2 模擬結果圖	4-9
圖 4.5	小範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_1 模擬結果比較圖	4-10
圖 4.6	小範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_2 模擬結果比較圖	4-11
圖 4.7	小範圍外部匹配式干擾之DSMC控制輸入模擬結果圖	4-12
圖 4.8	小範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC控制輸入模擬結果圖	4-13
圖 4.9	小範圍外部匹配式干擾之DSMC狀態變數模擬結果圖	4-14
圖 4.10	小範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC狀態變數模擬結果圖	4-15
圖 4.11	大範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_1 模擬結果比較圖	4-16
圖 4.12	大範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_2 模擬結果比較圖	4-17
圖 4.13	大範圍外部匹配式干擾之DSMC控制輸入模擬結果圖	4-18
圖 4.14	大範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC控制輸入模擬結果圖	4-19
圖 4.15	大範圍外部匹配式干擾之DSMC狀態變數模擬結果圖	4-20
圖 4.16	大範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC狀態變數模擬結果圖	4-21

表 列

表 2.1 自然指數簡化近似運算的估測效能比較表 2-25



第一章 緒論

1.1 灰色系統簡介

灰色理論是由鄧聚龍博士於1982年正式發表[9]，主要是針對部分數據資料未知的系統，又稱為灰色系統(grey system)，以特定的演算方式將其轉換成為訊息已知的白色系統(white system)，進而得到相關數據的估測值。鄧博士認為一般控制的觀點可視為透過白色(已知)系統將狀態空間(state space)轉換成控制空間(control space)。然而，對於灰色系統而言，卻必須先將灰色(部份未知)狀態空間轉換成白色狀態空間，接著才轉換成白色控制空間[9]。灰色系統的轉換主要有以下幾種要素：灰色模型(grey model)之建構、灰色模型的基本運算，以及該系統的白化模型(whitening model)[50][51]。灰色理論已被廣泛運用到各種研究領域上，例如：溫度預測[19][22]、經濟分析[42]、電力需求[18][46]以及系統控制[31][43][44]等方面。

1.2 順滑模態與離散型滑模控制發展


順滑模態(sliding mode)是屬於可變結構系統(variable structure systems, VSS)的一種特殊行為。所謂的可變結構系統乃是包含了兩個以上的次系統以及適當的切換邏輯，並且依據此切換邏輯來改變系統結構從而得到有利的特性[38]。其發展的起源可以追溯到1950年代，前蘇聯的一批學者與工程師提出允許改變系統結構的控制法則，結合並利用每一個結構的特性，藉以達到控制的目的。其中，學者V. I. Utkin在1970年代所發表關於VSS的設計與分析[38]，以及探討順滑模態(或簡稱為滑模)的理論與應用[39]等相關著作，成為日後學者設計與研究的重要參考。傳統的滑模控制是以連續型(continuous)滑模控制來討論，其設計的步驟如下[38]：首先選取適當的參數以建立順滑函數(sliding function)。其次，根據順滑條件(sliding condition)，以不連續的控制輸入保證順滑模態存

在於狀態空間之中的超平面(hyper plane)上的每一點，該超平面又稱為順滑面(sliding plane)。最後，基於接近條件(reaching conditions)，或稱之為迫近條件(approaching conditions)，控制輸入必須能夠將所有狀態控制到順滑面上。滑模控制的優點是快速響應、良好的暫態反應以及對於系統不定值(uncertainties)與外部干擾(disturbances)具有某種程度的穩健性(robustness)[1][38][47]。不過，卻也伴隨著需要改進的地方，例如：切跳(chattering)現象以及系統不定值與干擾訊號等對系統穩定可能的影響程度。切跳現象肇因於不連續的控制輸入，其結果極易引發系統高頻部份未模式化的動態行為(unmodeled dynamics)而造成系統共振，對於一些需要做到動力輸出或角度位置的控制設備，甚至會造成結構的損壞。對此，許多文獻中所提出的改善方案大致可以分為兩種途徑：其一是以邊界層(boundary layer)概念來修正不連續的切換輸入[20][34]；其二則是採用較高階的順滑模態，將控制輸入的不連續性隱藏在高階微分項之中[3][33]。滑模控制雖以其對系統不定值與外部干擾的穩健性而著稱，但是在系統控制器設計之初必須先獲得足夠精確的狀態變數資訊，以及特定範圍的不定值與干擾，才能夠將狀態誤差控制在可以接受的範圍之內。不過，即使在狀態變數資訊無法取得的情況下，仍然有可能達到滑模控制，一般採取的對策是利用輸出回授(output feedback)[23][48]或是額外加入的觀測器(observer)[24][27][41]來重建系統的相關數據。

連續型滑模控制意謂著控制作用發生的時機可以在任一時間點，對於現實狀況而言卻是不切實際。同時，隨著晶片製造技術的日益提升，帶動了微處理器的低價與廣泛運用，於是離散型(discrete)滑模系統理論與控制器設計遂成為工程研究的重點。最初被提出的離散型滑模是透過簡單的等效轉換，將連續型滑模的充要條件直接轉換成差分不等式的離散型滑模條件[11]。Milosavljevic認為將切換法則或狀態誤差作離散化處理之後，配合上述的離散型滑模條件，幾乎無法得到理想的順滑模態，而是成為所謂的類滑模(quasi-sliding mode, QSM)[29]；雖然提到了迫近條件的必要，不過卻未能進一步說明。Sarpturk等人指出上述滑模條件的不足並加以修正[32]，同時又提出控制輸入必須有上、下邊界值，以確保狀態軌跡的收斂與穩定。Furuta採用離散Lyapunov函數作為滑模條件[14]以期達到漸進式的穩定(asymptotic stability)，並且利用切換區(switching region)內外不同的回授增益做為切換條件，來對抗系統狀態的不定值。Spurgeon強調在有限範圍不定值(bounded uncertainties)的前提下，簡單的線性控制結合選擇恰當的超平面，將會比

複雜的非線性控制搭配不合適的順滑面較有更好的效能表現[35]。Wu的碩士論文中則是提出二層概念(two-layered concept)[45]，確保系統軌跡不會超出順滑區(sliding phase)；而Chang更加以補充[5]，利用Spurgeon的one-step控制法則[35]迫使滑模軌跡進入到內層的迫近層(approaching layer)，保證一旦進入迫近層之後，滑模軌跡不會超出外層的擬態滑模層(pseudo-sliding layer)之外，並且以預先設計的滑模軌跡，使整個控制過程不會有太大的輸入增益。W. Gao等人[15]將離散型滑模軌跡區分成三種模式，定義該軌跡必需同時符合三項特性，提出新的迫近法則來彌補Milosavljevic、Sarpturk以及Furuta等人所提滑模條件的不足，確保系統軌跡在有限時間進入且維持在類滑模帶(QSM band)之內；同時在進入之後，以之字型的移動(zigzagging motion)來回穿越順滑面。另外，如同連續型滑模控制，觀測器也被用來處理離散系統的輸出量測值，藉此獲得系統狀態誤差與外部干擾的估測與前饋(feedforward)[2][21][40]，可達到例如運算時間延遲(computational time delay)[30]的修正，或者，嘗試建立干擾訊號的預估動態模型[27]。

1.3 研究動機



離散型滑模控制針對系統干擾的穩健性已被普遍證明並加以應用[17][26]；然而，在實際應用上卻經常面臨無法得知系統外部干擾訊號上界限的窘境。對於上一節所提及的離散型滑模控制法則，除了觀測器之外，全部都只能夠處理已知範圍且數值不大的外部干擾。典型滑模觀測器的作法，基於系統具備可觀測性(observability)，利用已知受控體的動態方程式以及系統的輸出回授，經由設計過的觀測器處理之後，即可得到狀態變數、不定值或干擾訊號的估測值[21][28]。本論文嘗試以不同於滑模觀測器的作法，針對狀態變數可以量測的前提之下，在系統可控制的頻寬與振幅限制之內，任意範圍且變化平緩的外部匹配式干擾(external matched disturbance)訊號，藉由系統動態方程式的代數運算求得其的歷史資料。然後，再根據這些已知的資料，利用灰色模型GM(1,1)得到干擾訊號的估測值。但是由於GM(1,1)在某些狀況下的估測精確度不甚理想，例如曲線轉折的區域；所以嘗試利用運算簡單而有效的補償方式，使得干擾訊號估測值的誤差減小，而且不至於造成太大的運算負擔。接著，以其估測結果作為受控體的前饋控制輸入，

並與離散型滑模控制器整合成為離散型灰色滑模控制器(discrete grey sliding-mode controller, DGSMC)[7][8][25]。

1.4 論文架構

下一章將描述灰色模型(grey model)的推導與灰色估測器(grey predictor)的建立；其次提出灰色模型的修正方法，以及估測誤差的比較。第三章主要重點在於離散型滑模控制器的設計與討論；先概觀現有文獻報告之中離散型滑模條件的發展與改進，然後提出新的修正條件；接著針對已知的小範圍干擾訊號設計出不同以往的離散型滑模控制器並以數據模擬來驗證結果。第四章則是將結合前兩章的研究主題(離散型滑模控制器與灰色估測器)，期望達到本論文最主要的目的，即是：有效對抗在系統可控制的頻寬與振幅限制之內、任意範圍而且變化平緩的匹配式外部干擾訊號。同時以數據模擬的結果，來驗證設計的可行性與效能。



第二章 灰色理論與灰色模型

本章將由一階單變數灰色模型(first-order single-variable grey model, 簡稱為GM(1,1)或是GM11)之建構作為起始, 介紹灰色理論的幾種基本運算式, 以及其白化模型(whitening model)[50][51]。其次要探討的是 Li所提出的虛擬二階單變數灰色模型(second-order single-variable pseudo grey model, 簡稱為PGM(2,1)或是PGM21)[6], 該模型利用指數型態的灰色輸入(grey input), 實現類似於二階模型的曲率變化, 但卻可以大量減少二階運算的繁雜。本章另外亦提出結合數值方法(numerical methods)來達到估測誤差的補償; 本方法除了提高估測的精確度, 在相對於PGM21的作法上, 更是避免了指數運算的時間耗費。最後比較上述三種模型的估測效能。

2.1 一階單變數灰色模型GM(1,1)

本節首先簡單說明一階單變數灰色模型, 以GM(1,1)表示之, 並利用該模型求得估測資料。已知一組包含有 m 個數據資料的正序列如下:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(m)\} \quad (2.1)$$

其中 $x^{(0)}(k) > 0, k = 1, 2, \dots, m, m \geq 4$ 。灰色模型具有以下三種基本運算式, 分別為: 累加生成運算(accumulated generating operation, AGO)、平均運算(mean operation, MEAN)、以及逆累加生成運算(inverse accumulated generating operation, IAGO)。其定義分別如下:

$$\text{AGO - } x^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x^{(0)}(j), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$\text{MEAN} - z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)], \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (2.3)$$

$$\text{IAGO} - \begin{cases} x^{(0)}(1) = x^{(1)}(1) \\ x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (2.4)$$

根據灰色系統理論，GM(1,1)的灰色微分方程式(grey differential equation)定義為[10]：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (2.5)$$

其中 a 與 b 分別為未知常數： a 被稱為發展係數(development coefficient)，而 b 則可被視為灰色輸入； $z^{(1)}(k)$ 則是在(2.4)式已經定義。將(2.5)式改寫成以下的矩陣表示式：

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.6)$$



其中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(m) & 1 \end{bmatrix}$$

經由灰色模型的基本運算(2.2)與(2.3)式，可以得知 $z^{(1)}(k) > z^{(1)}(k-1)$ ，同時也意謂 \mathbf{B} 是為全秩(full rank)矩陣；所以利用最小平方法(least square method)計算(2.6)式，得到係數 a 與 b 如下列所示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y} \quad (2.7)$$

相較於下列的一階常微分方程式，或者稱為白化方程式(whitening equation)，

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (2.8)$$

(2.5)式之中的 $x^{(0)}(k)$ 可以視為將(2.8)式之中的 $\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}$ 等效轉化而來的。根據(2.4)式逆累

加生成運算，其轉化如下：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} \rightarrow x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k) \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (2.9)$$

另外，(2.5)式之中 $z^{(1)}(k)$ 則是相當於 $x^{(1)}(t)$ 等效轉化：

$$x^{(1)}(t) \rightarrow 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) = z^{(1)}(k) \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (2.10)$$

事實上， $z^{(1)}(k)$ 在原始的GM(1,1)模型中定義為

$$z^{(1)}(k) = \alpha_k x^{(1)}(k) + (1 - \alpha_k)x^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, m \quad (2.11)$$

因此 α_k 的大小會影響到建模的誤差。為求簡化，本文在此假設連續兩點的變化不大，所以取固定的 $\alpha_k = 0.5$ ，將其定義成為(2.3)式的平均運算。欲求(2.5)式之解，可利用灰色微分方程式在數學觀點上近似於白化方程式(2.8)式的特點，直接將白化方程式的解答轉化為灰色微分方程式的估測解答[50]，轉化如下：

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

再進一步利用(2.4)式得到下列方程式，

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)}(k) &= \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \\ &= (1 - e^{-a}) \cdot \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-a(k-1)} \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (2.13)$$

對於已知數列 $x^{(0)}$ 而言，第 $m+p$ 筆資料的估測值可以表示為

$$\hat{x}^{(0)}(m+p) = (1 - e^{-a}) \cdot \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-a(m+p-1)} \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

當 $p=1$ 時，即可得到已知數列的下一個估測數據，如下所示：

$$\hat{x}^{(0)}(m+1) = (1 - e^{-a}) \cdot \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-am} \quad (2.15)$$

在(2.14)式中，可以明顯地發現包含有指數項 $e^{-a(m+p-1)}$ ，也就是說GM(1,1)模型適合於單一指數變化率的估測。然而，對於其他非單一指數變化率或是非單調數列 (non-monotone sequence) 而言，則需要採用高階的灰色模型或者以其他方法來降低估測誤差。下一節將介紹一種新的灰色模型，稱為PGM(2,1)；該模型僅需透過些許的改變，即可實現類似於高階灰色模型所產生的估測效果。

2.2 虛擬二階單變數灰色模型PGM(2,1)

根據(2.13)式顯示得知當 $k \geq 2$ 時，任意連續兩筆資料的比值是

$$\frac{\hat{x}^{(0)}(k+1)}{\hat{x}^{(0)}(k)} = e^{-a} \quad (2.16)$$

亦即表示(2.13)式的數列是為單調遞增或是單調遞減，而其變化率固定為 e^{-a} ；簡言之，GM(1,1)只適用於估測單一指數變化率的單調數列。然而，實際上大部分的數據資料所

呈現出來的數列卻是擁有不同曲率變化或是非單調數列。為了降低估測誤差，Li在文獻[6]之中提出新的灰色模型，利用簡單的矯正項(remedial term)來模擬二階模型的曲率變化特性，進而達到提升估測的準確度，但又不失GM(1,1)運算簡單的優點。本節將就PGM(2,1)的架構，探討該模型在估測精確度方面提升的效果。

就連續估測在系統控制的運用而言，GM(1,1)模型是採用最近 n 筆被觀測數據作為估測的依據。考慮以下資料序列

$$x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n) \quad n > m \geq 4 \quad (2.17)$$

其中所有的數據資料是依據被觀測到的先後順序排列而成。當第一組被觀測資料數列 $x^{(0)}(1), \dots, x^{(0)}(m)$ 已獲得之後，藉由(2.14)式即可得到之後第 p 筆數據的估測值 $\hat{x}^{(0)}(m+p)$, $p=1, 2, \dots$ 。在此為了方便起見，第一組資料數列被定義為

$$\mathbf{x}_1^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(m)\} \quad m \geq 4, \quad (2.18)$$

同時，其後的估測值則可表示成 $\hat{x}_1^{(0)}(m+p)$, $p=1, 2, \dots$ 。其次，當新的一筆數據 $x^{(0)}(m+1)$ 被觀測到之後，則GM(1,1)立刻採用該筆數據作為新的資料數列 $\mathbf{x}_2^{(0)} = \{x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(m+1)\}$ ，以便估測接下來的數據 $\hat{x}_2^{(0)}(m+1+p)$ ，(表示成 $\hat{x}_2^{(0)}(m+p)$, $p=1, 2, \dots$)。依此類推，第 i 組包含有 m 個最新數據的資料數列可以表示成以下

$$\mathbf{x}_i^{(0)} = \{x^{(0)}(i), x^{(0)}(i+1), \dots, x^{(0)}(i+m-1)\} \quad i=1, 2, \dots, n-m+1 \quad (2.19)$$

其相應的估測數據則為 $\hat{x}_i^{(0)}(m+p)$, $p=1, 2, \dots$ 。根據(2.14)式，得到(2.19)資料數列的估測值如下：

$$\hat{x}_i^{(0)}(m+p) = (1 - e^{a_i}) \cdot \left[x_i^{(0)}(1) - \frac{b_i}{a_i} \right] \cdot e^{-a_i(m+p-1)} \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

其中， a_i 與 b_i 是根據(2.7)式並且利用最小平方法而得到的。回溯到前一組資料數列，

$$\mathbf{x}_{i-1}^{(0)} = \{x^{(0)}(i-1), x^{(0)}(i), \dots, x^{(0)}(i+m-2)\} \quad (2.21)$$

該數列的估測值為

$$\hat{x}_{i-1}^{(0)}(m+p) = (1 - e^{a_{i-1}}) \cdot \left[x_{i-1}^{(0)}(1) - \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} \right] \cdot e^{-a_{i-1}(m+p-1)} \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

即使連續的兩組資料數列(2.19)與(2.21)有 $m-1$ 筆數據因重疊而相同， $x^{(0)}(i), x^{(0)}(i+1), \dots, x^{(0)}(i+m-2)$ ，但是卻仍然造成不同的指數變化率 a_i 以及 a_{i-1} 。假設 a_i 與 a_{i-1} 差異不大，則透過(2.20)式與(2.22)式分別對數列 $\mathbf{x}_i^{(0)}$ 與 $\mathbf{x}_{i-1}^{(0)}$ 所估測的結果亦不會有太大的差異。然而，一旦 a_i 與 a_{i-1} 之間差異大到特定程度以上時，則兩估測數據之間的變化關係至少牽涉到兩種不同的指數變化率。直覺上，採用二階單變數灰色模型GM(2,1)是較佳的解決方式，不過GM(2,1)的複雜運算使得它在應用時受到很大的限制[7]。然而，PGM(2,1)模型則是利用增加的矯正項來改變灰色輸入，藉以達到估測值的運算式中包含有兩種不同的指數變化率，修正式如下

$$\hat{x}_i^{(0)}(m+p) = (1 - e^{a_i}) \cdot \left[x_i^{(0)}(1) - \frac{b_i e^{-(a_i - a_{i-1})p}}{a_i} \right] \cdot e^{-a_i(m+p-1)} \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

其中灰色輸入由原本的 b_i 修改成 $b_i e^{-(a_i - a_{i-1})p}$ 。矯正項 $e^{-(a_i - a_{i-1})p}$ 之中包含有 $e^{a_{i-1}p}$ ，隱含有來自於數列 $\mathbf{x}_{i-1}^{(0)}$ 的相關資訊。根據(2.16)關係式可得到

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = e^{-a} \cdot \hat{x}^{(0)}(k), \quad (2.24)$$

明顯看出估測值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$ 是由前次的估測結果 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 再乘上 e^{-a} 而得來的。換言之，如果本次的估測值於前次估測的資料數列有關，則本次的估測值將會包含有這一項 e^a 。既然灰色輸入 b_i 被視為由前一組數列 $x_{i-1}^{(0)}$ 所得到的結果，則矯正項加入 $e^{a_{i-1}D}$ 作為補償便顯得合理。

2.3 結合線性近似法則之一階單變數灰色模型GM(1,1)

關於提高灰色估測的精確度，有些學者則是提出以補償GM(1,1)估測誤差的方式，藉以達到提升估測精確度的目的。譬如：類神經網路[18]、Fourier級數結合馬可夫鏈(Markov chain)[36]、迴歸模型(regression model)[4]，以及統計學上誤差的計算[44]等各種近似估算與針對冗餘數的估測方法。所謂的冗餘數，也就是估測誤差，在此定義為：實際與估測之間的差異值，如下列所示：

$$\tilde{x}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}(k) \quad k = 1, 2, \dots, m \quad m \geq 4 \quad (2.25)$$

其中 $\hat{x}(k)$ 是利用已知的數據經由估測運算而得到的估測值。本章的第一節中提到GM(1,1)適用於單一指數變化率的估測，因此，利用GM(1,1)來估測，勢必在某些特定狀況下，例如估測曲線的轉折處，會有較大的估測誤差。所以有必要針對估測誤差的部份再作補償，以期達到較精確的估測。本節開頭所提到的各種方法中，不論是類神經網路或是Fourier級數，雖然都可以有效地提高估測的準確性，然而對於控制器的即時運算處理能力卻是一項極大的考驗。在簡化運算時間的前提下，除了提高GM(1,1)的估測精確度，也期望在補償誤差的同時，仍然能夠保有快速的運算能力。針對這一點，可以分成兩個部份來考量：一是簡化GM(1,1)本身所包含的指數運算，另一方面則是應用簡單而有效的補償法則。

已知自然指數 e^x 可以被展開成

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.26)$$

在此取其前4項，得到其近似簡化值為

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad (2.27)$$

代入(2.15)式，得到另外的估測值

$$\hat{x}_{\tilde{e}}(m+1) = -\left(a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}\right) \cdot \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right] \cdot \left(1 - am + \frac{a^2 m^2}{2} - \frac{a^3 m^3}{6}\right) \quad (2.28)$$

其中下標記 \tilde{e} 代表經過近似簡化的自然指數運算。所以(2.25)式可被改寫成

$$\tilde{x}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}_{\tilde{e}}(k) \quad (2.29)$$



由於GM(1,1)原本就有估測誤差，其估測結果以近似簡化的運算來取代亦屬合理，因為接下來都需要再輔以誤差的補償。

事實上，由於存在自然界的訊號變化或多或少與自然指數有關，而GM(1,1)正適合應用於自然指數變化曲線的估測。關於GM(1,1)估測誤差補償的法則，基於實際干擾訊號有其變化的趨勢，即使經過GM(1,1)的估測，雖然變化不同，但是趨勢仍然存在。所以本文嘗試以傳統數值方法之中的多項式推估法(polynomial extrapolation)[16]來達到誤差曲線變化的線性近似推估，並且探討修正之後的估測表現。

已知一組由(2.29)式所得到的GM(1,1)估測冗餘數列，

$$\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \dots, \tilde{x}(m)\} \quad (2.30)$$

將(2.29)式移項重寫之後，可得到下列關係式：

$$x^{(0)}(k) = \hat{x}_e(k) + \tilde{x}(k) \quad (2.31)$$

根據(2.30)數列資料，採用 n 階的Lagrange多項式(Lagrange polynomial)[49]，

$$Ln(k) = \sum_{j=1}^{n+1} r(j) \cdot l_j(k), \quad 0 \leq n \leq m-1 \quad (2.32)$$

其中，

$$l_j(k) = \prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} \frac{(k-i)}{(j-i)}, \quad r(j) = \tilde{x}(m-n+j-1) \quad (2.33)$$

m 值是GM(1,1)估測所需的數列長度。利用已知連續三點 $r(1)$ 、 $r(2)$ 與 $r(3)$ ，相當於冗餘數值 $\tilde{x}(m-2)$ 、 $\tilde{x}(m-1)$ 與 $\tilde{x}(m)$ ，代入(2.32)、(2.33)式，即得到二階Lagrange多項式如下：

$$L2(k) = \left[\frac{r(1)}{2} - r(2) + \frac{r(3)}{2} \right] k^2 - \left[\frac{5 \cdot r(1)}{2} - 4 \cdot r(2) + \frac{3 \cdot r(3)}{2} \right] k + [3 \cdot r(1) - 3 \cdot r(2) + r(3)] \quad (2.34)$$

由於Lagrange多項式主要是針對已知各點數據之間的內插數值近似，所以並不保證各點以外的推估數值。但是，因為已知曲線存在著平滑變化，所以內插數值的變化趨勢勢必也將延伸到推估數值。因此，若以 $k=4$ 代入(2.34)式，其化簡結果如下：

$$L2(4) = r(1) - 3 \cdot r(2) + 3 \cdot r(3) \quad (2.35)$$

即可得到 $L2(4)$ 是下一個冗餘數 $\tilde{x}(m+1)$ 的推估值，定義成 $\hat{x}_{L2}(m+1)$ ，其中 \hat{x}_{L2} 的下標記 $L2$ 代表二階Lagrange多項式。進一步得到以下通式：

$$\begin{aligned}\hat{x}_{L2}(m+1) &= r(1) - 3 \cdot r(2) + 3 \cdot r(3) \\ &= \tilde{x}(m-2) - 3 \cdot \tilde{x}(m-1) + 3 \cdot \tilde{x}(m)\end{aligned}\quad (2.36)$$

因此，透過二階Lagrange多項式的線性近似補償，可得修正之後的推估值

$$\hat{x}^{(0)}(m+1) = \hat{x}_{\tilde{x}}(m+1) + \hat{x}_{L2}(m+1)\quad (2.37)$$

(2.37)式又可以改寫成

$$\hat{x}^{(0)}(m+1) = \hat{x}_{\tilde{x}}(m+1) + \tilde{x}(m-2) - 3 \cdot \tilde{x}(m-1) + 3 \cdot \tilde{x}(m)\quad (2.38)$$

其中， $\hat{x}_{\tilde{x}}(m+1)$ 可由(2.28)式的計算求得；而 $\tilde{x}(m-2)$ 、 $\tilde{x}(m-1)$ 與 $\tilde{x}(m)$ 則是包含在已知的冗餘數列(2.30)之中。同理，利用已知四點可以得到三階Lagrange多項式的線性近似補償估測值

$$\hat{x}^{(0)}(m+1) = \hat{x}_{\tilde{x}}(m+1) - \tilde{x}(m-3) + 4 \cdot \tilde{x}(m-2) - 6 \cdot \tilde{x}(m-1) + 4 \cdot \tilde{x}(m)\quad (2.39)$$

由於記憶體空間有限、增加運算的時間以及微處理器運算時的截斷誤差(truncation error)，所以一味地提高多項式的階級並無太大的意義；另外，經過GM(1,1)估測過後的誤差數列，其數值大小已經大大地縮減，低階多項式近似已足夠勝任。不過，一旦低階Lagrange多項式無法滿足近似的需求，即誤差仍然過大，則此時也許可以考慮將多項式升階，或者甚至是將灰色模型升階。然而，畢竟二階灰色模型的運算太過複雜，不利於現實應用的考量；反之，將二階Lagrange多項式提升成為三階多項式，相較之下卻顯得容易許多。

2.4 數據模擬與比較

總結本章所討論與提出的估測法有：GM(1,1)、PGM21、結合線性近似估測誤差的GM(1,1)以及自然指數近似運算的導入等四種不同的法則，並且以三種不同的函數數列作為例子，如(2.40)~(2.42)式。

$$\text{數列 1: } x_1(kT) = 2 + 3 \cdot e^{-0.5 \cdot kT} \cos(2kT) \quad k = 1, 2, \dots \quad T = 0.05 \text{ sec} \quad (2.40)$$

$$\text{數列 2: } x_2(kT) = 4 + \sin(2kT) + \cos(3kT) \quad k = 1, 2, \dots \quad T = 0.05 \text{ sec} \quad (2.41)$$

$$\text{數列 3: } x_3(kT) = 4 + \sin(2kT) + \cos(3kT) \quad k = 1, 2, \dots \quad T = 0.1 \text{ sec} \quad (2.42)$$

以上三組皆為正數列，然而第三組數列的取樣時間 T 與其他兩組不同，藉以觀察取樣頻率變化時，對於估測準確度所產生的影響。三組資料的輪動序列(rolling sequence)長度訂定為 $m = 4$ ，

$$\mathbf{x}_i^{(0)} = \{x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), x_i^{(0)}(3), x_i^{(0)}(4)\} \quad (2.43)$$

而模擬的結果將以實際估測資料與估測誤差兩種圖形呈現，其中，估測誤差(prediction error)定義如下：

$$e(k) = |x(kT) - \hat{x}^{(0)}(k)| = |x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)| \quad (2.44)$$

其估測效能，在此以平均估測誤差(average prediction error)以及最大估測誤差值(maximal prediction error)定義之，

$$\bar{E}_{\text{Case } i}^{\text{model}} = \frac{\sum_k |e(k)|}{\text{total steps}}, \quad \max E_{\text{Case } i}^{\text{model}} = \max\{|e(k)|\} \text{ for all steps} \quad (2.45)$$

首先針對前三種法則以不同函數數列作估測準確度比較，其中的線性近似補償又分為二階與三階Lagrange多項式。其次，比較取樣頻率變化之後，對於前三種估測法則的影響。最後，探討自然指數近似運算導入之後，對於結合線性近似估測誤差的GM(1,1)估測效能影響的程度。

2.4.1 不同函數數列的模擬比較

針對不同數列，但是相同的取樣時間，得到以下平均估測誤差

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{\text{Case 1}}^{\text{GM11}} &= 0.0069, & \bar{E}_{\text{Case 2}}^{\text{GM11}} &= 0.0233 \\
 \bar{E}_{\text{Case 1}}^{\text{PGM21}} &= 0.0026, & \bar{E}_{\text{Case 2}}^{\text{PGM21}} &= 0.0097 \\
 \bar{E}_{\text{Case 1}}^{\text{GM11L2}} &= 2.41 \times 10^{-5}, & \bar{E}_{\text{Case 2}}^{\text{GM11L2}} &= 1.0 \times 10^{-4} \\
 \bar{E}_{\text{Case 1}}^{\text{GM11L3}} &= 8.64 \times 10^{-6}, & \bar{E}_{\text{Case 2}}^{\text{GM11L3}} &= 2.61 \times 10^{-5}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

以及最大估測誤差

$$\begin{aligned}
 \max E_{\text{Case 1}}^{\text{GM11}} &= 0.049, & \max E_{\text{Case 2}}^{\text{GM11}} &= 0.0521 \\
 \max E_{\text{Case 1}}^{\text{PGM21}} &= 0.0128, & \max E_{\text{Case 2}}^{\text{PGM21}} &= 0.0228 \\
 \max E_{\text{Case 1}}^{\text{GM11L2}} &= 4.02 \times 10^{-4}, & \max E_{\text{Case 2}}^{\text{GM11L2}} &= 5.54 \times 10^{-4} \\
 \max E_{\text{Case 1}}^{\text{GM11L3}} &= 2.23 \times 10^{-4}, & \max E_{\text{Case 2}}^{\text{GM11L3}} &= 2.51 \times 10^{-4}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

從以上數據，又可以歸納出以下結果：

$$\bar{E}_{\text{Case } i}^{\text{GM11}} > \bar{E}_{\text{Case } i}^{\text{PGM21}} > \bar{E}_{\text{Case } i}^{\text{GM11L2}} > \bar{E}_{\text{Case } i}^{\text{GM11L3}} \tag{2.48}$$

$$\max E_{\text{Case } i}^{\text{GM11}} > \max E_{\text{Case } i}^{\text{PGM21}} > \max E_{\text{Case } i}^{\text{GM11L2}} > \max E_{\text{Case } i}^{\text{GM11L3}} \tag{2.49}$$

從模擬圖(2.1)~圖(2.4)與數據(2.46)~(2.49)來看，顯而易見地，無論是平均估測誤差或是最大估測誤差，利用線性近似法則補償之後，其估測效能有很大程度的改善；而三階線性近似補償GM11L3又比二階GM11L2的估測效能較好。

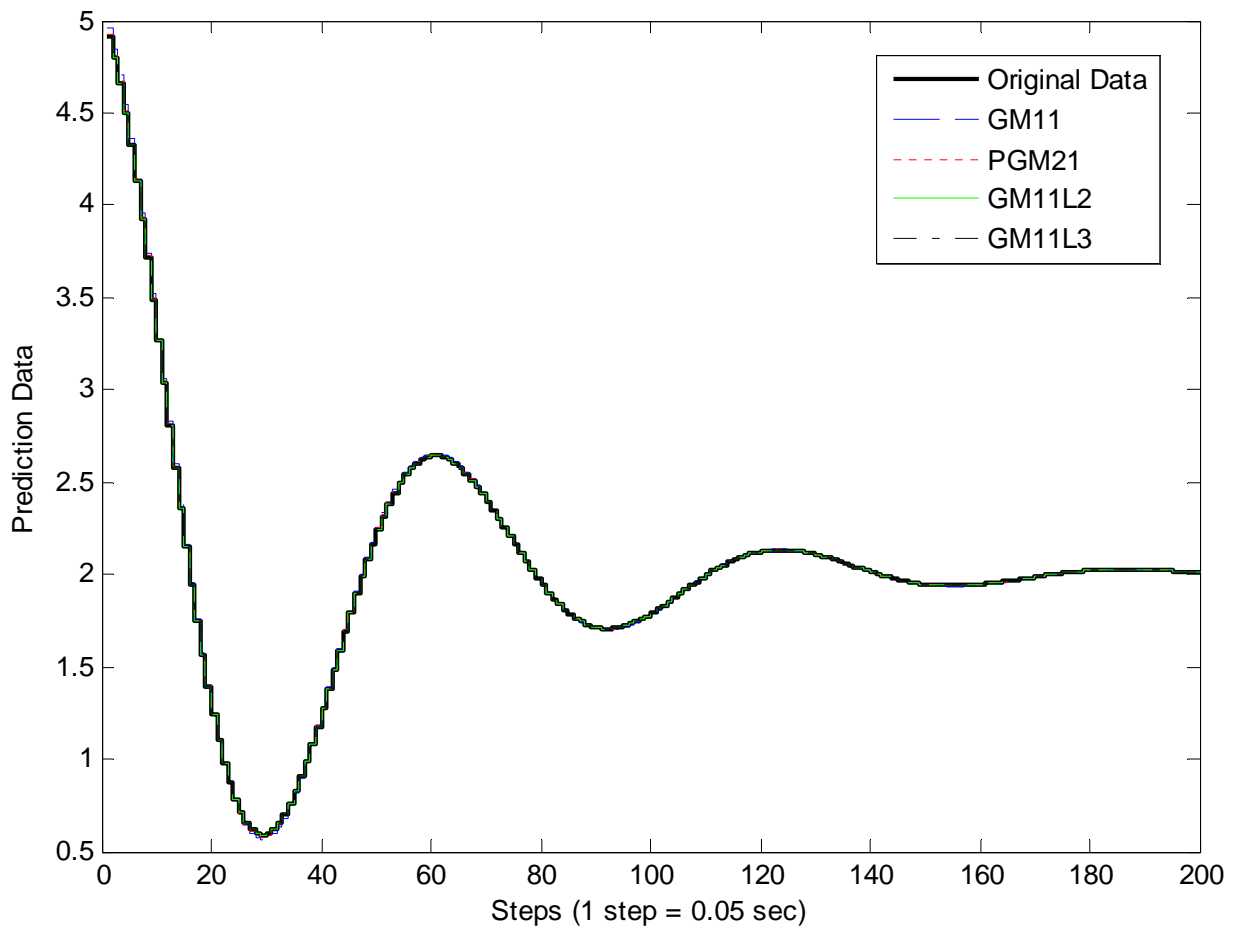


圖2.1 數列1之原始資料與估測資料圖

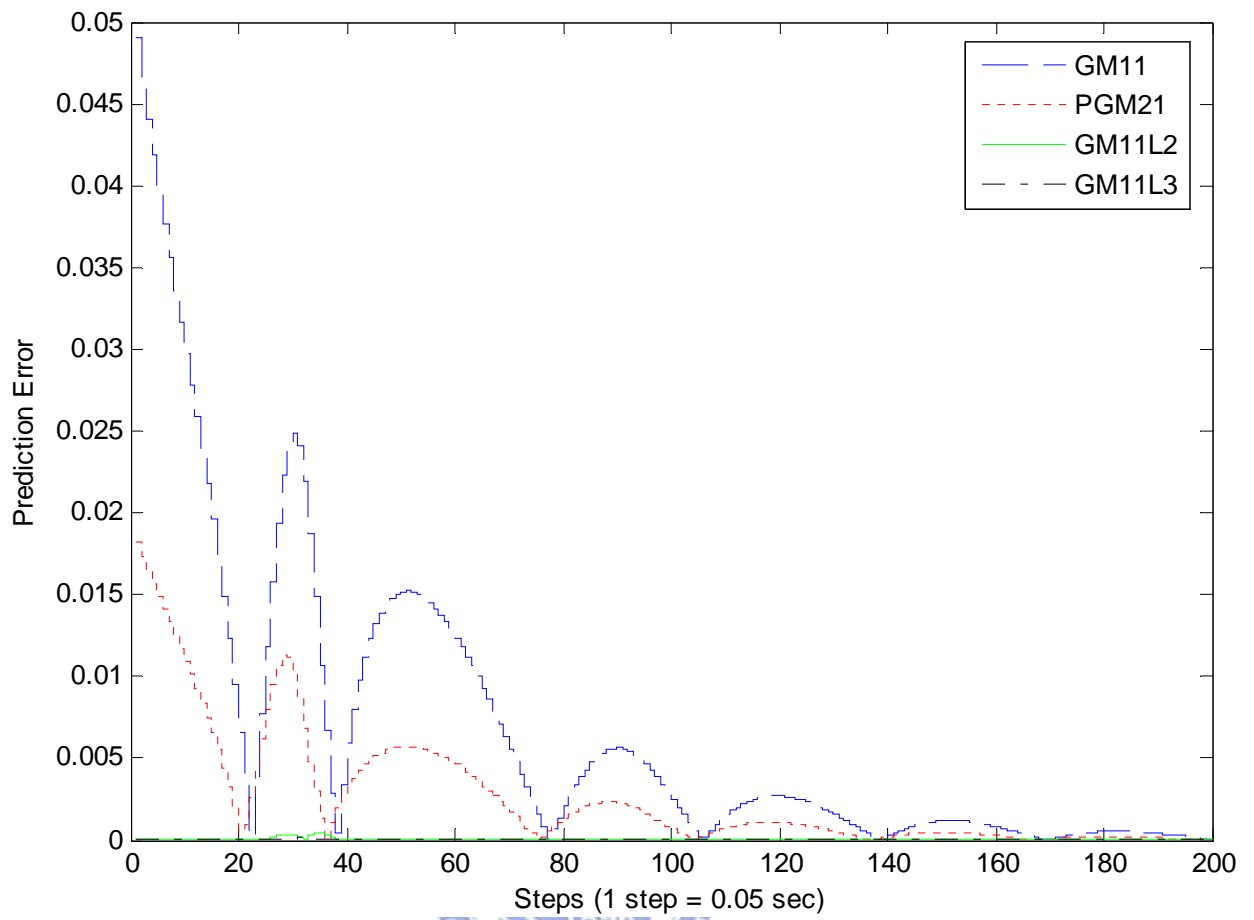


圖2.2 數列1之估測誤差比較圖

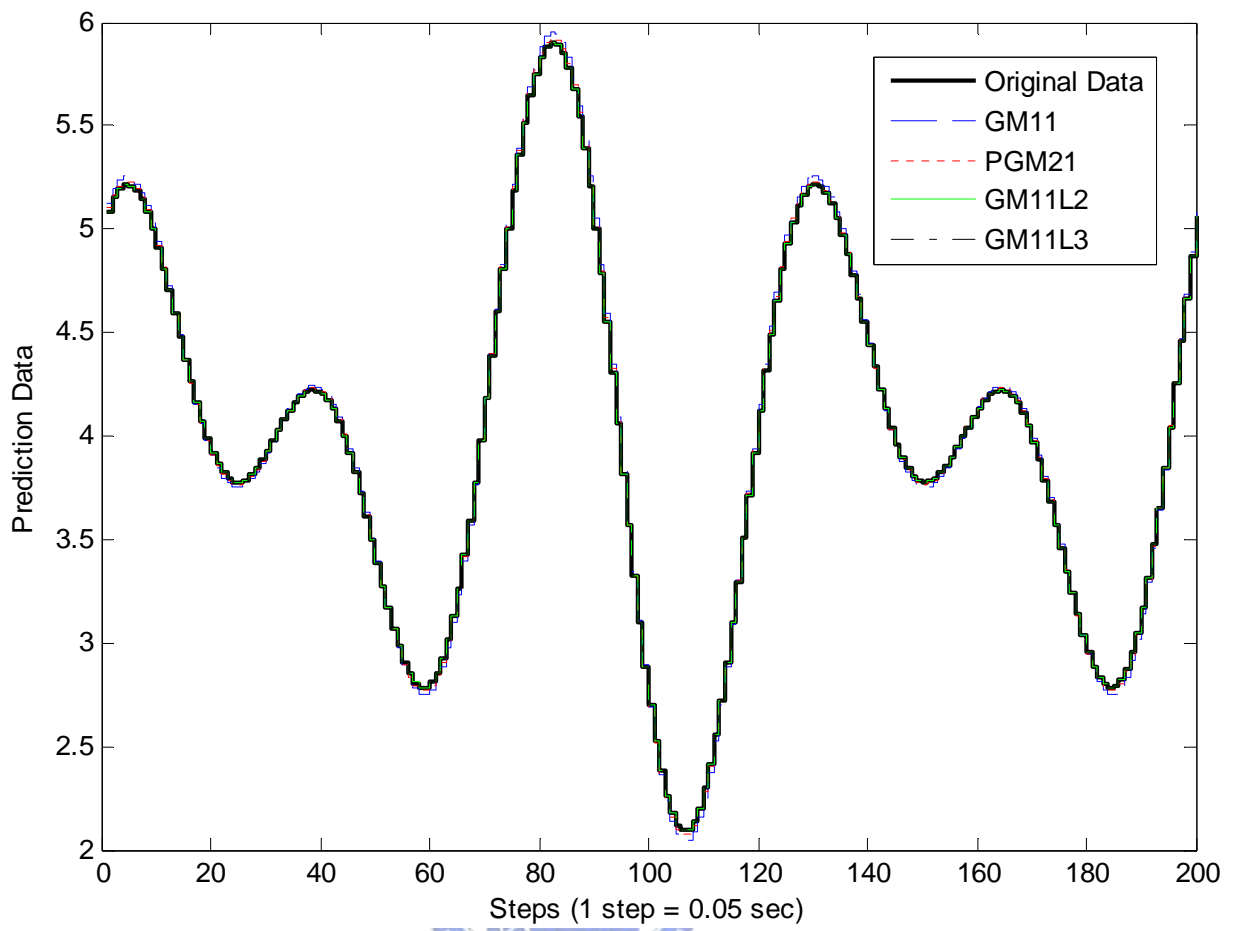


圖2.3 數列2之原始資料與估測資料圖

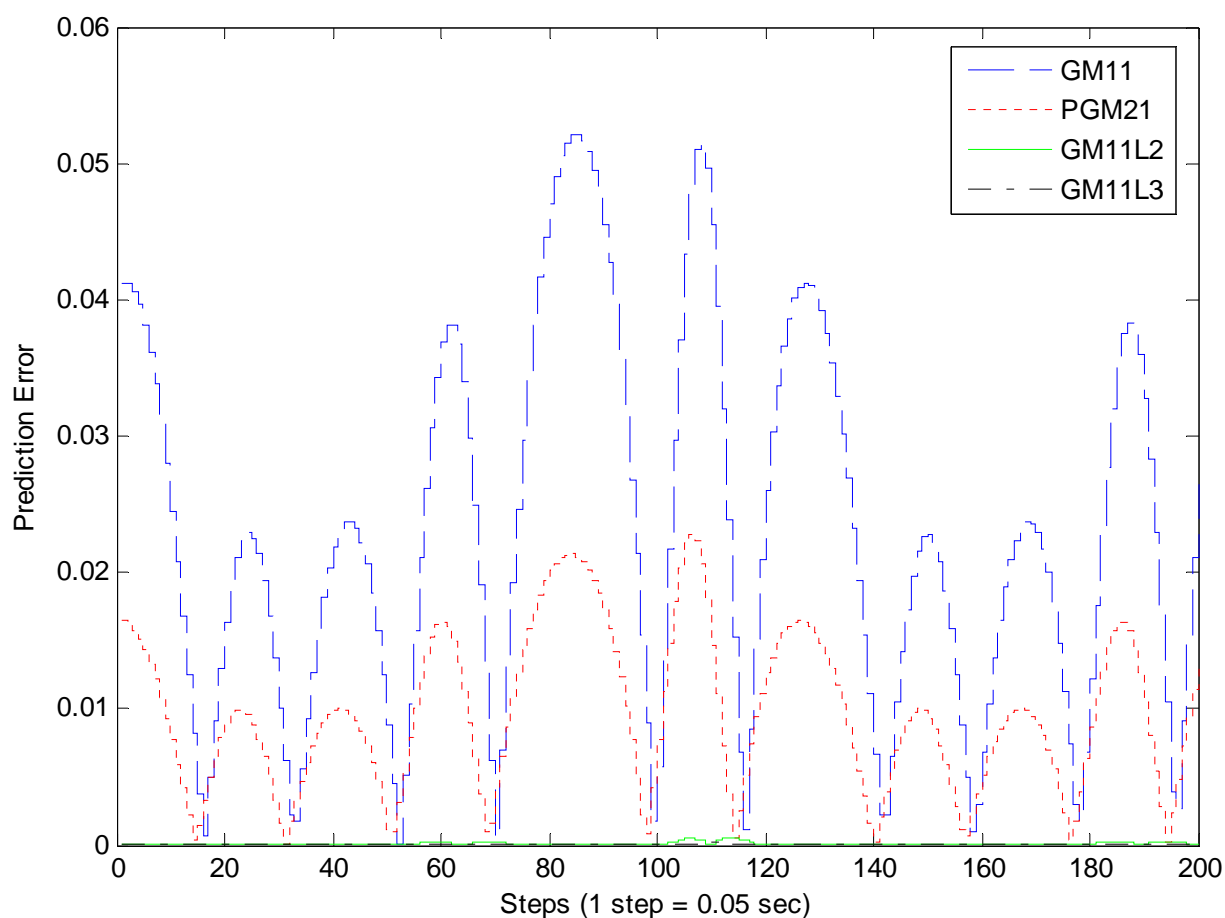


圖2.4 數列2之估測誤差比較圖

2.4.2 相同函數、不同取樣頻率數列的模擬比較

更改Case 2的數值取樣頻率後，得到Case 3的數列資料，其平均估測誤差

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{\text{Case 3}}^{\text{GM11}} &= 0.0923 & , & & \bar{E}_{\text{Case 3}}^{\text{PGM21}} &= 0.043 & , \\
 \bar{E}_{\text{Case 3}}^{\text{GM11L2}} &= 0.0031 & , & & \bar{E}_{\text{Case 3}}^{\text{GM11L3}} &= 0.0015 &
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

以及最大估測誤差

$$\begin{aligned}
\max E_{\text{Case 3}}^{\text{GM11}} &= 0.2058 & , & & \max E_{\text{Case 3}}^{\text{PGM21}} &= 0.1027 \\
\max E_{\text{Case 3}}^{\text{GM11L2}} &= 0.0164 & , & & \max E_{\text{Case 3}}^{\text{GM11L3}} &= 0.0139
\end{aligned}
\tag{2.51}$$

模擬結果如圖(2.5)~(2.6)所示。比較平均估測誤差或是最大估測誤差，得到的數據顯示 Case 3的估測效能變差。其原因是由於取樣時間變長，造成數列變化加大，使得GM(1,1)的估測誤差也隨之變大。

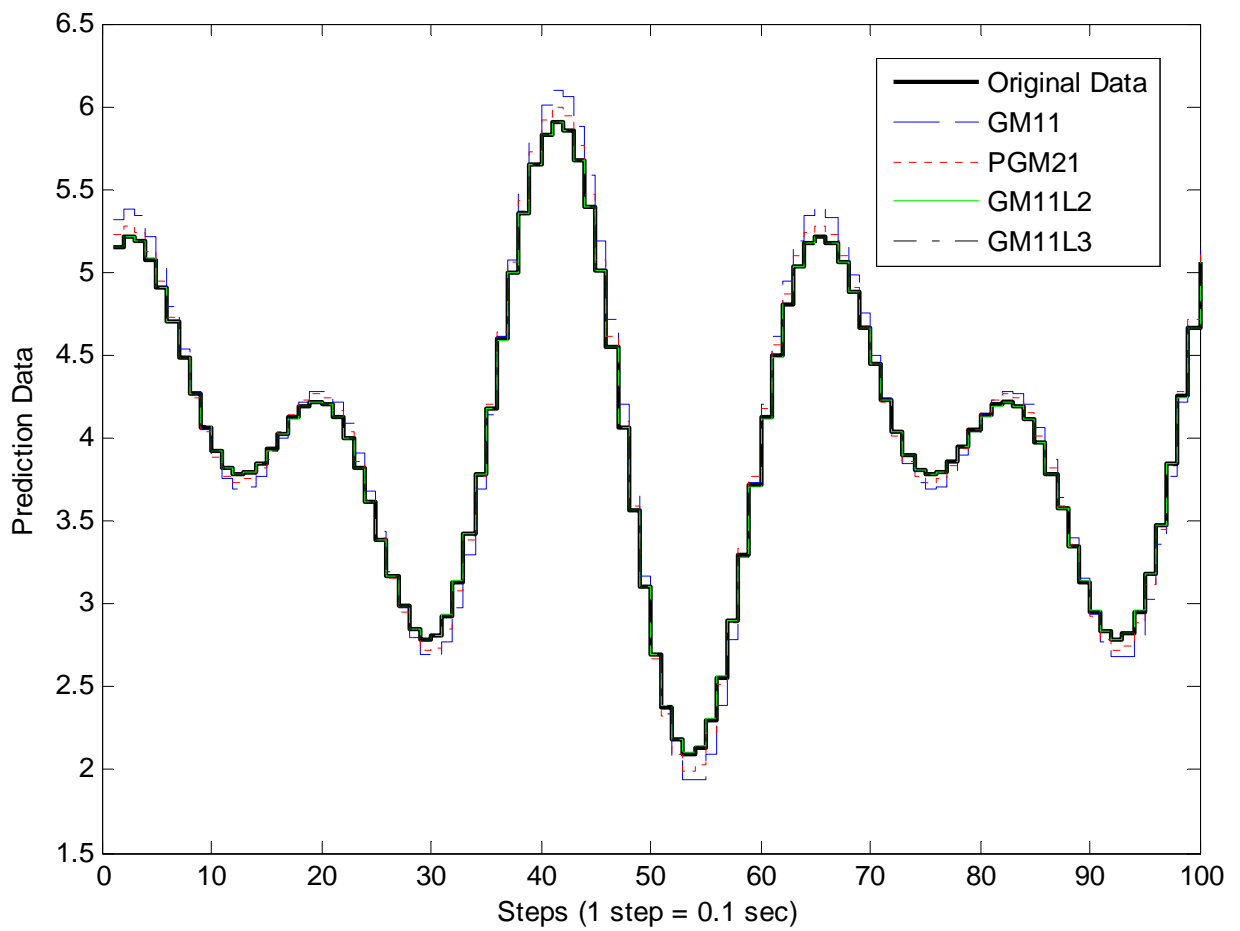


圖2.5 數列3之原始資料與估測資料圖

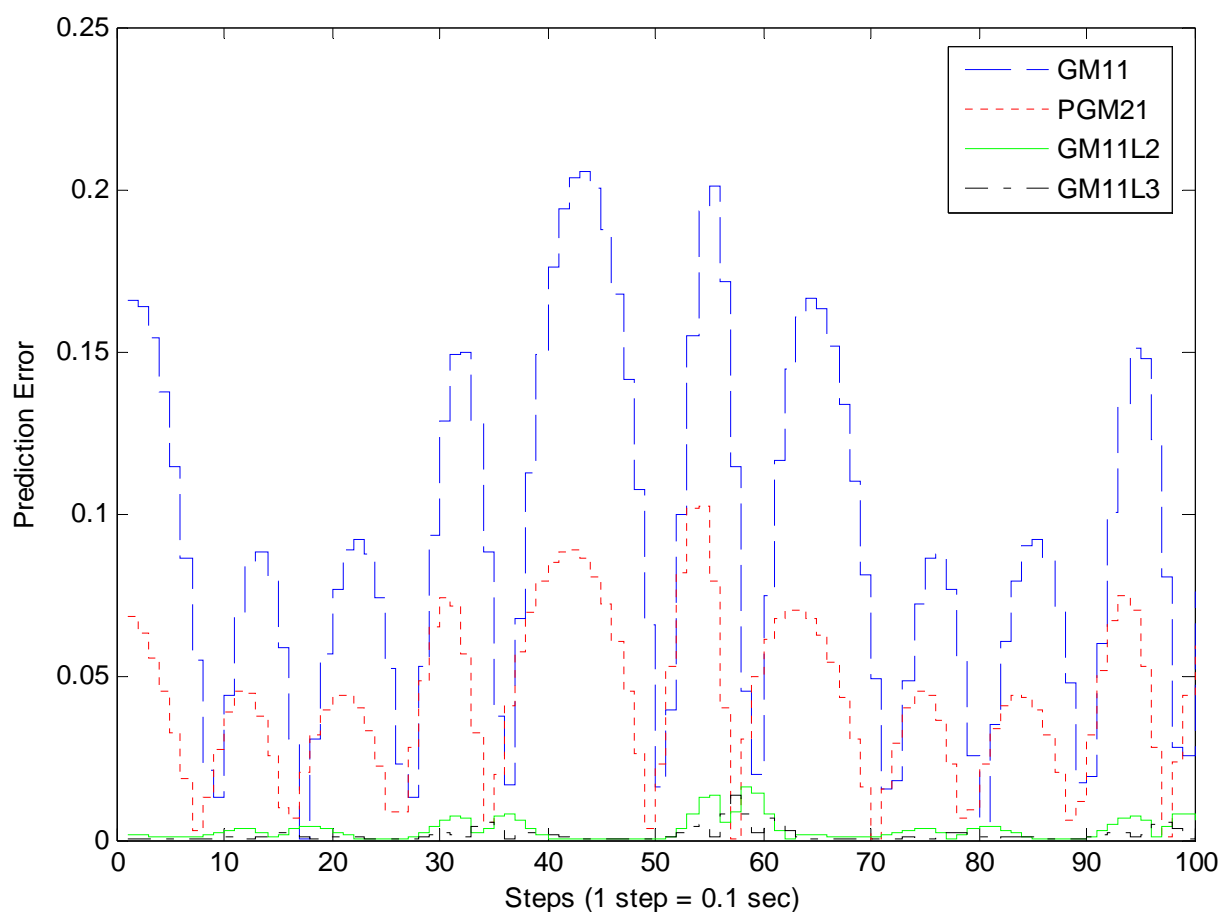


圖2.6 數列3之估測誤差比較圖

2.4.3 自然指數近似運算導入的模擬比較

前兩小節的模擬顯示，對於變化平緩的數列而言，灰色模型GM(1,1)結合線性近似法則的誤差補償之後，可以得到明顯的效能改善，更重要的是加入的只是簡單的補償法則運算。但是對於GM(1,1)本身而言，其內含的自然指數對於實際微處理器的運算可能造成負擔；因此利用自然指數經過近似簡化之後得到GM(1,1)的簡化運算(2.28)式。比較簡化運算與否對於估測效能影響的程度。以下同樣利用數列(2.40)~(2.42)比較GM11L2與GM11eaL2，以及GM11L3與GM11eaL3的估測效能，其中GM11eaL2與GM11eaL3分別代表導入自然指數簡化近似運算的GM11L2與GM11L3。

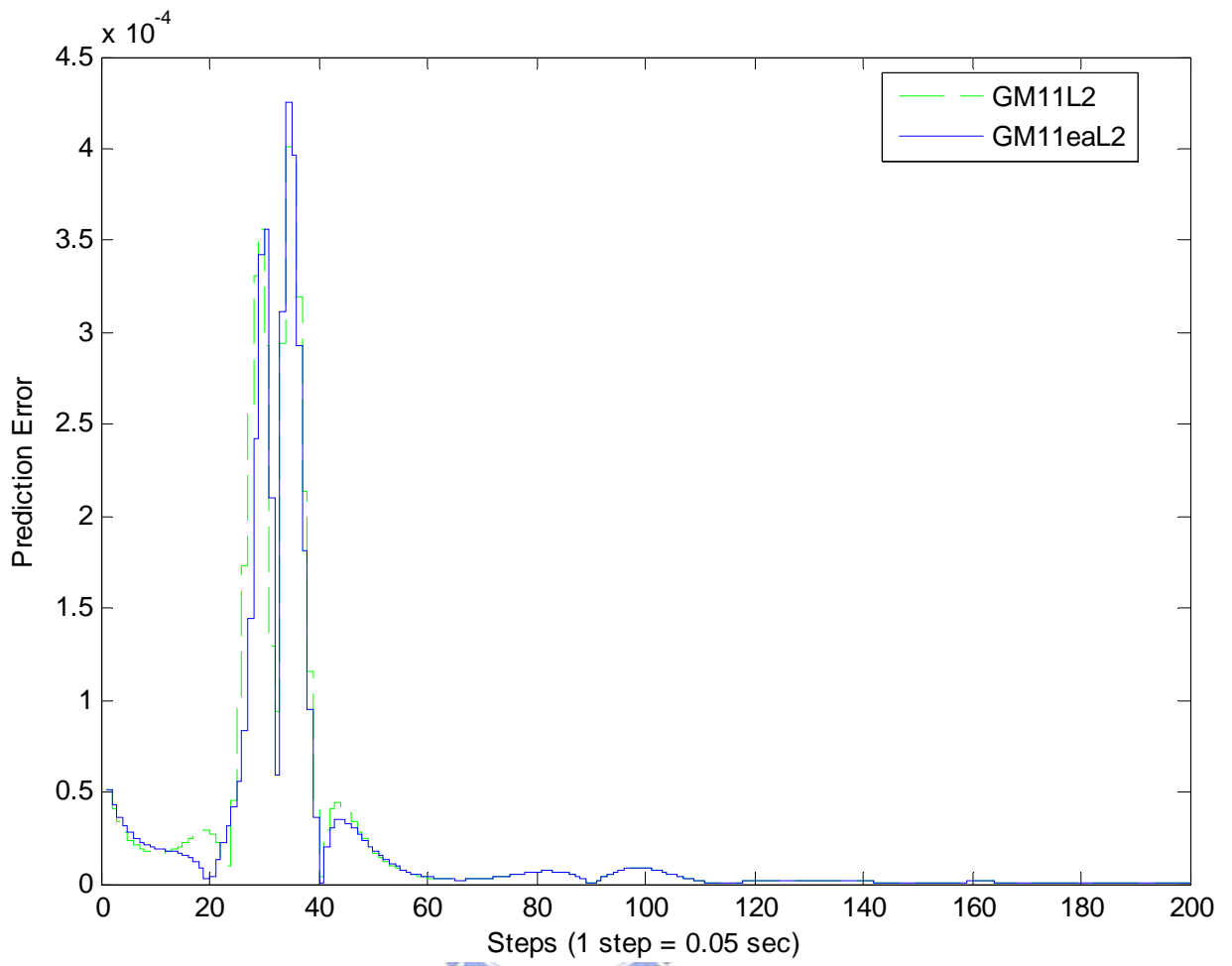


圖2.7 數列1之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖

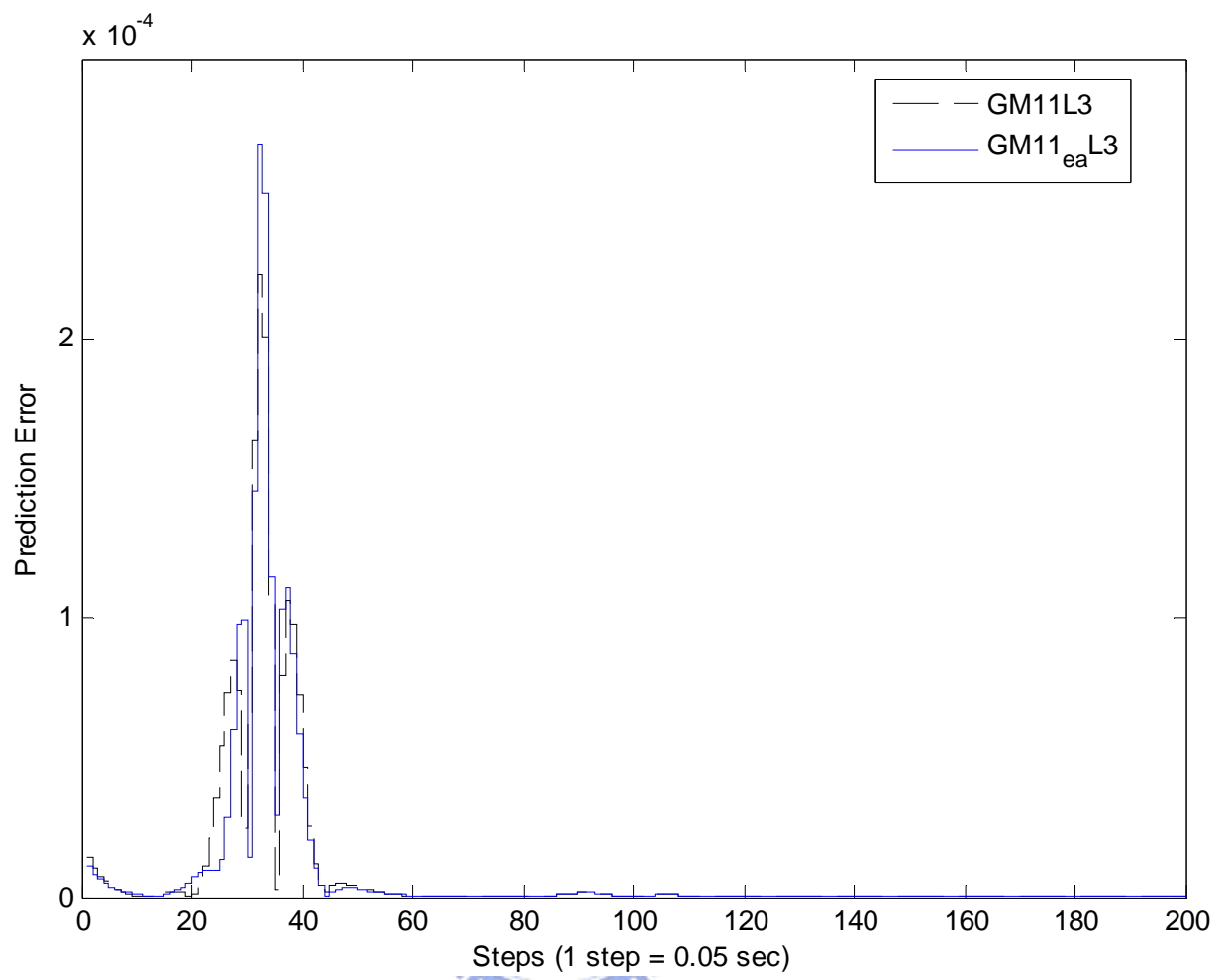


圖2.8 數列1之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖

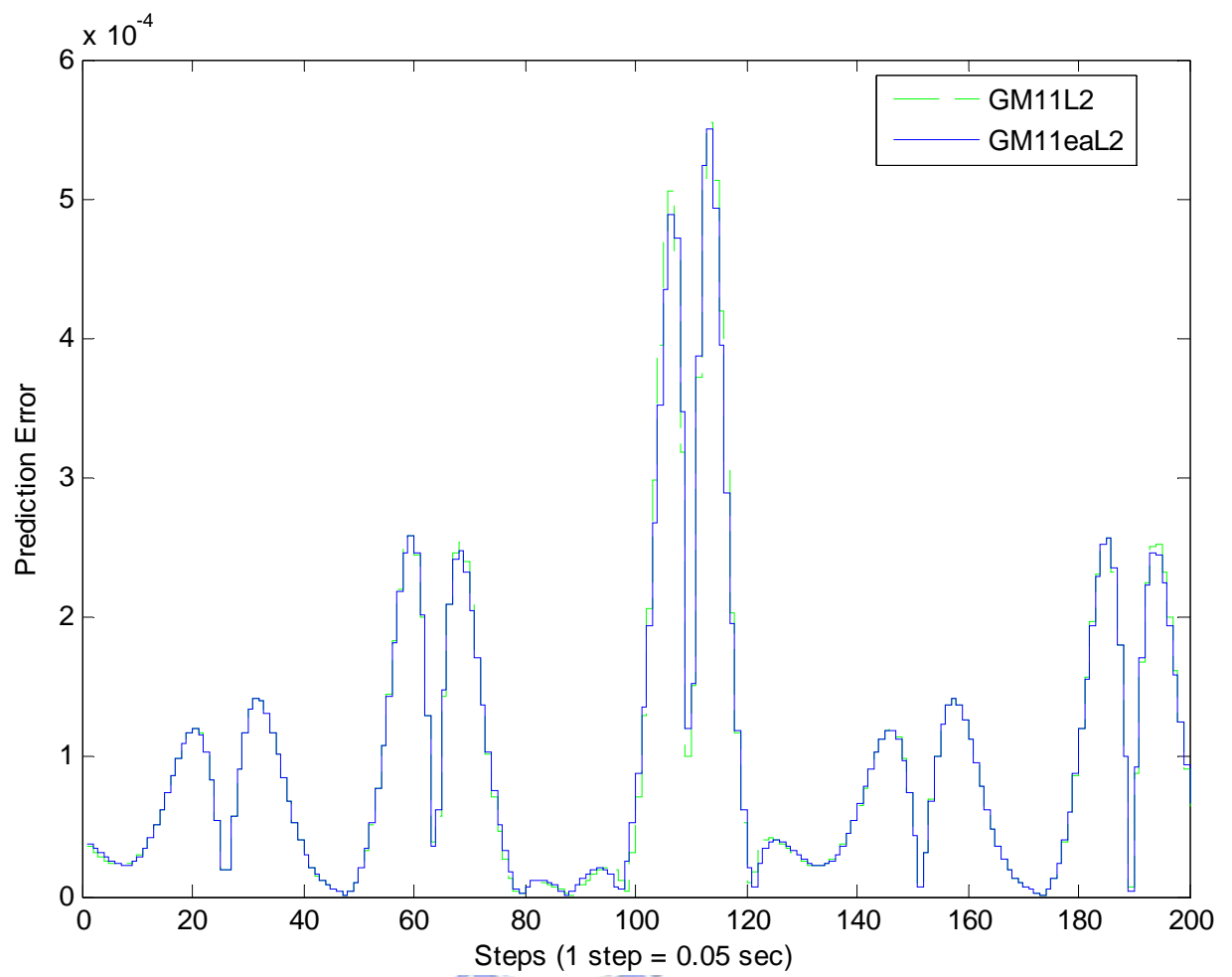


圖2.9 數列2之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖

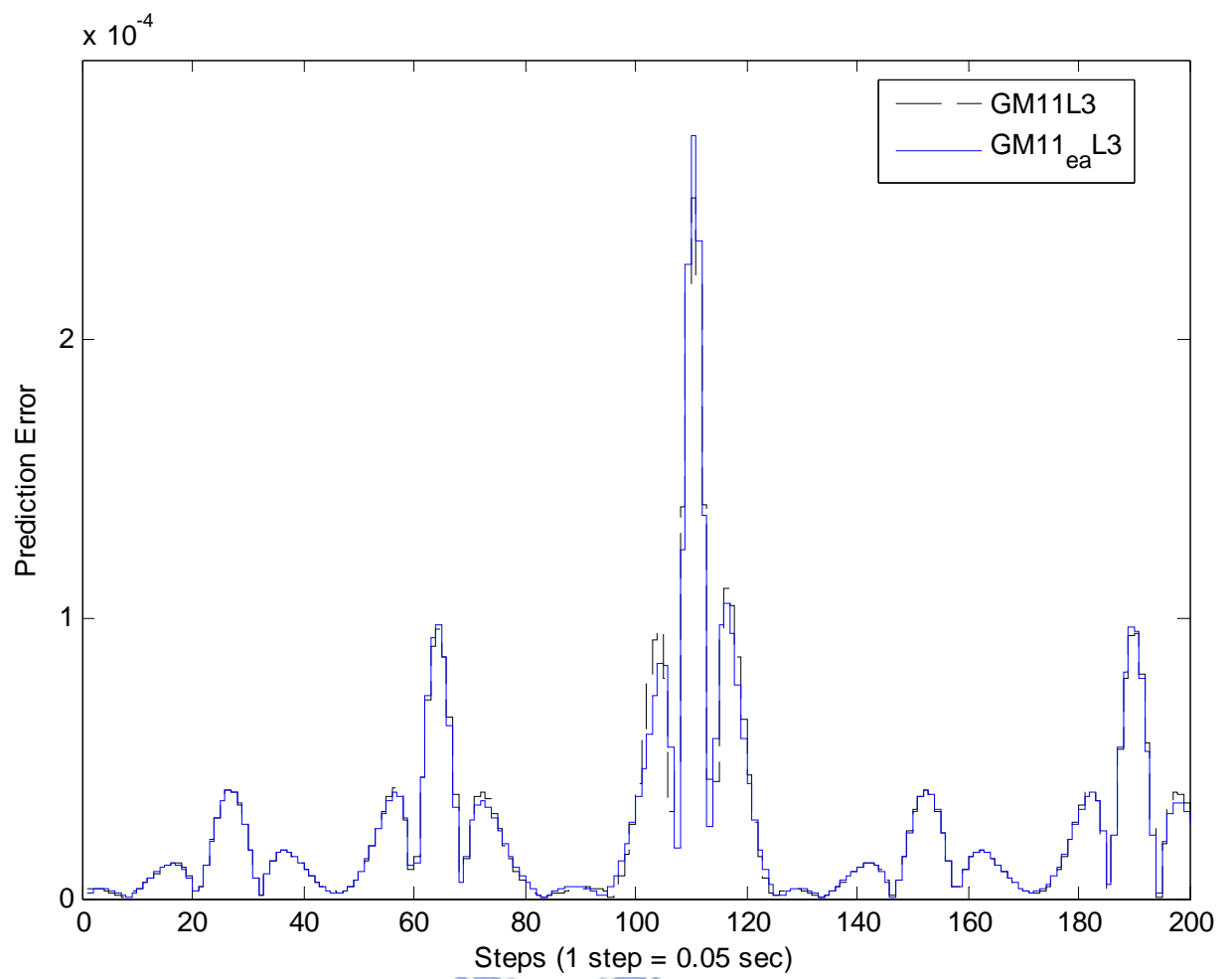


圖2.10 數列2之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖

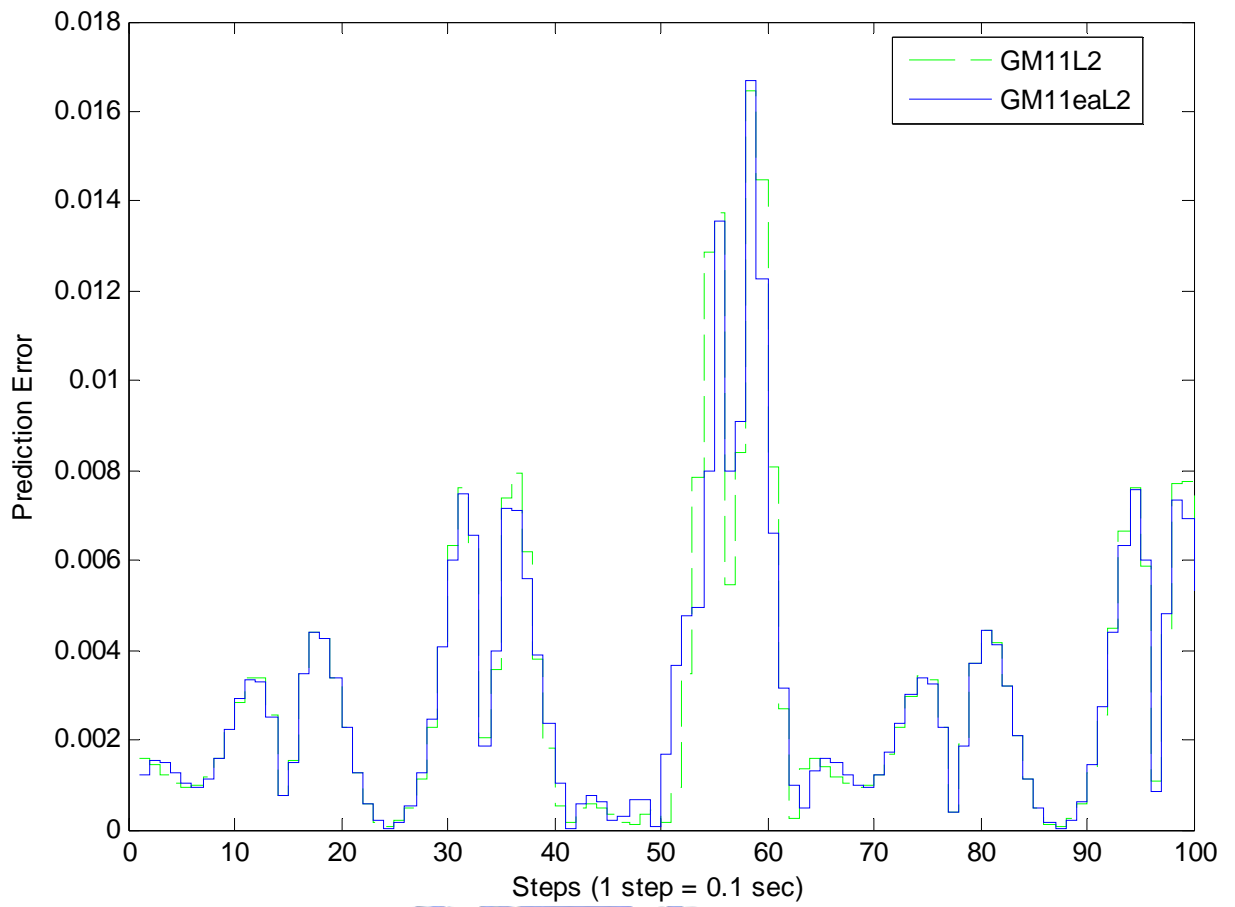


圖2.11 數列3之GM11L2與GM11eaL2估測誤差比較圖

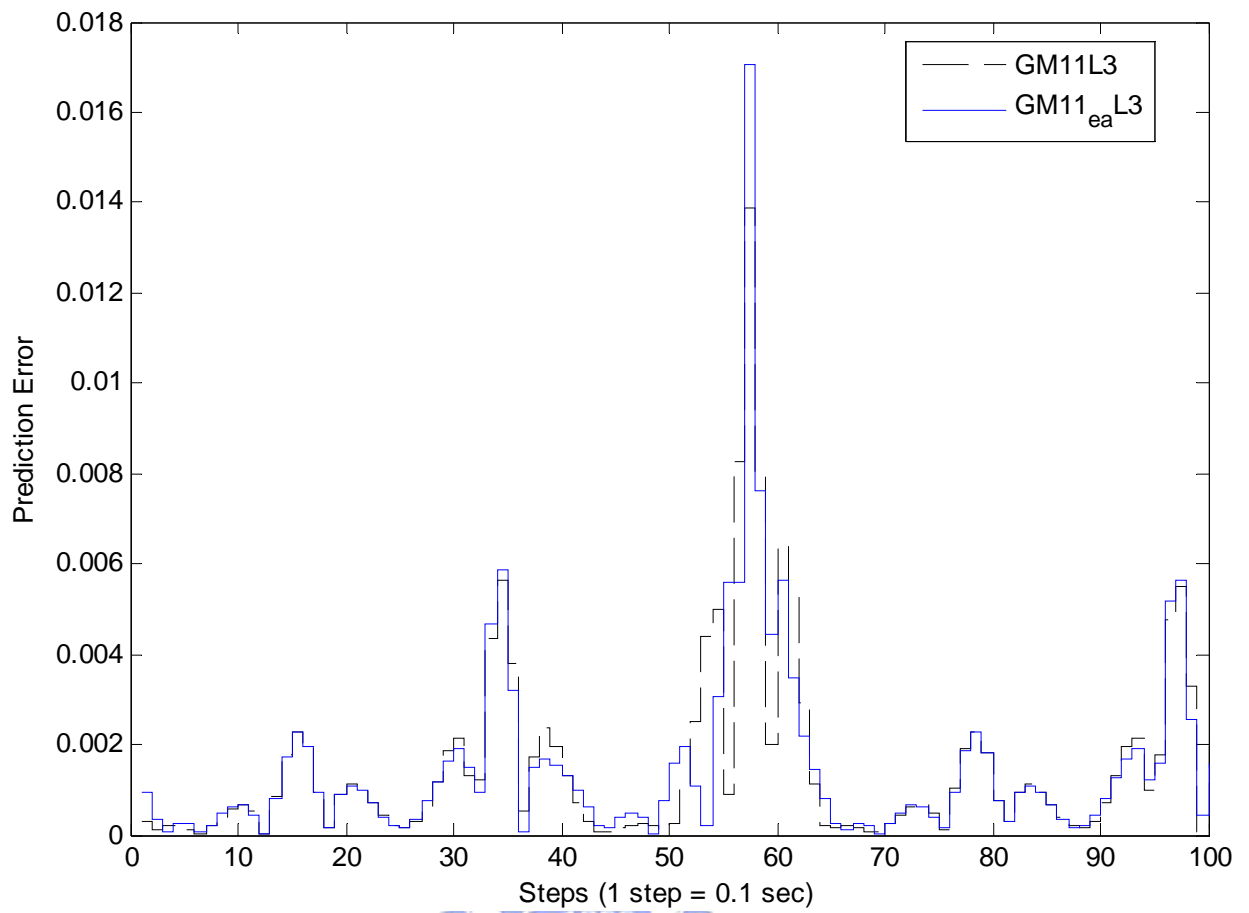


圖2.12 數列3之GM11L3與GM11eaL3估測誤差比較圖

		Case 1	Case 2	Case 3
GM11L2	平均誤差	2.41×10^{-5}	1.0×10^{-4}	0.0031
	最大誤差	4.02×10^{-4}	5.54×10^{-4}	0.0164
GM11eaL2	平均誤差	2.22×10^{-5}	9.97×10^{-5}	0.0031
	最大誤差	4.25×10^{-4}	5.5×10^{-4}	0.0167
GM11L3	平均誤差	8.64×10^{-6}	2.63×10^{-5}	0.0015
	最大誤差	2.23×10^{-4}	2.51×10^{-4}	0.0139
GM11eaL3	平均誤差	8.65×10^{-6}	2.59×10^{-6}	0.0015
	最大誤差	2.7×10^{-4}	2.73×10^{-4}	0.0171

表2.1 自然指數簡化近似運算的估測效能比較表

根據圖(2.7)~圖(2.12)的模擬結果以及表(2.1)數據比較，可以得知自然指數經過簡化近似運算之後，其最後的估測效能足以匹配於未經處理的模擬數據，代表在實際微處理器的運算能力考量上，確實能夠予以採用。

第三章 離散型滑模控制

3.1 離散型滑模控制條件

由於晶片製造技術的提升與微處理器的廣泛運用，屬於離散時間的系統理論與控制器設計日漸受到學者與工程師們的關注，滑模控制亦不例外。有別於連續型滑模，離散型滑模因為系統的控制只能在取樣點上發生作用，對於兩取樣點之間的時段則無能為力，所以在這個時段，即使不討論雜訊作用，系統軌跡也會因為控制能力與實際情況的不匹配使得系統軌跡幾乎不可能保持在順滑面上，而是在順滑面的附近移動，此行為模式被稱之為類滑模[29]。

初期的離散型滑模控制認為直接修改連續型滑模存在的充要條件(sufficient condition)[38]，

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\dot{s} < 0 \quad (3.1)$$

即可得到離散型滑模條件[11][29]。

$$s_k (s_{k+1} - s_k) < 0 \quad (3.2)$$

Milosavljevic在文獻[29]之中指出將系統作離散化處理之後，配合條件(3.2)，幾乎無法得到理想的順滑模態，而是成為所謂的類滑模；但是該篇文章只討論順滑面附近的行為，卻未進一步對遠離順滑面的初始值提出迫近條件的說明。另一方面，以條件(3.2)作為滑模條件卻有明顯不足的地方，例如可能呈現出震盪發散的趨勢，如圖(3.1)所示。

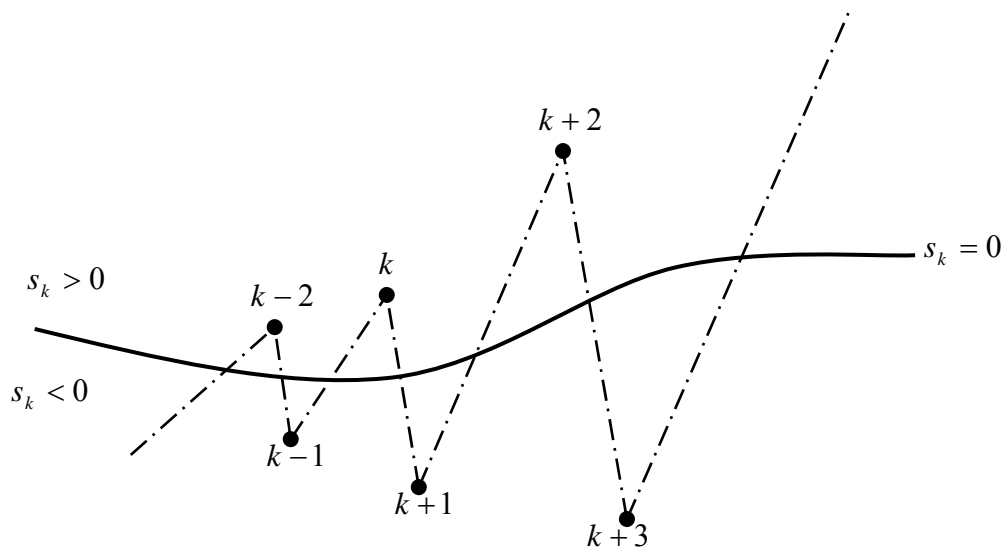


圖3.1 離散型滑模條件(3.2)之反例圖

針對上述離散滑模條件的不足，Sarpturk等學者提出以下的修正條件[32]，

$$|s_{k+1}| < |s_k| \quad (3.3)$$



進而得到等效關係式，

$$(s_{k+1} - s_k) \operatorname{sgn}(s_k) < 0 \quad (3.4)$$

$$(s_{k+1} + s_k) \operatorname{sgn}(s_k) > 0$$

另外，Furuta則是利用離散Lyapunov函數[14]，如下

$$V_k = \frac{1}{2} s_k^2 \quad \text{與} \quad \Delta s_{k+1} = s_{k+1} - s_k \quad (3.6)$$

同時提出如果以下條件成立，

$$s_k \Delta s_{k+1} < -\frac{1}{2}(\Delta s_{k+1})^2 \quad \text{當} \quad s_k \neq 0 \quad (3.7)$$

則可得到

$$(s_{k+1})^2 < (s_k)^2 \quad (3.8)$$

以及

$$V_{k+1} < V_k \quad (3.9)$$

條件(3.8)又可進一步得到如同條件(3.3)的結果。無論是條件(3.3)或是條件(3.8)固然能保證收斂，然而該條件卻只適用於順面的附近；否則，系統軌跡有可能以極緩慢的收斂速度向著順滑面迫近，甚至沿著順滑面作來回跳動的軌跡，如圖(3.2a)與(3.2b)所示。也就是說，這兩份文獻尚未提出適當的迫近條件。



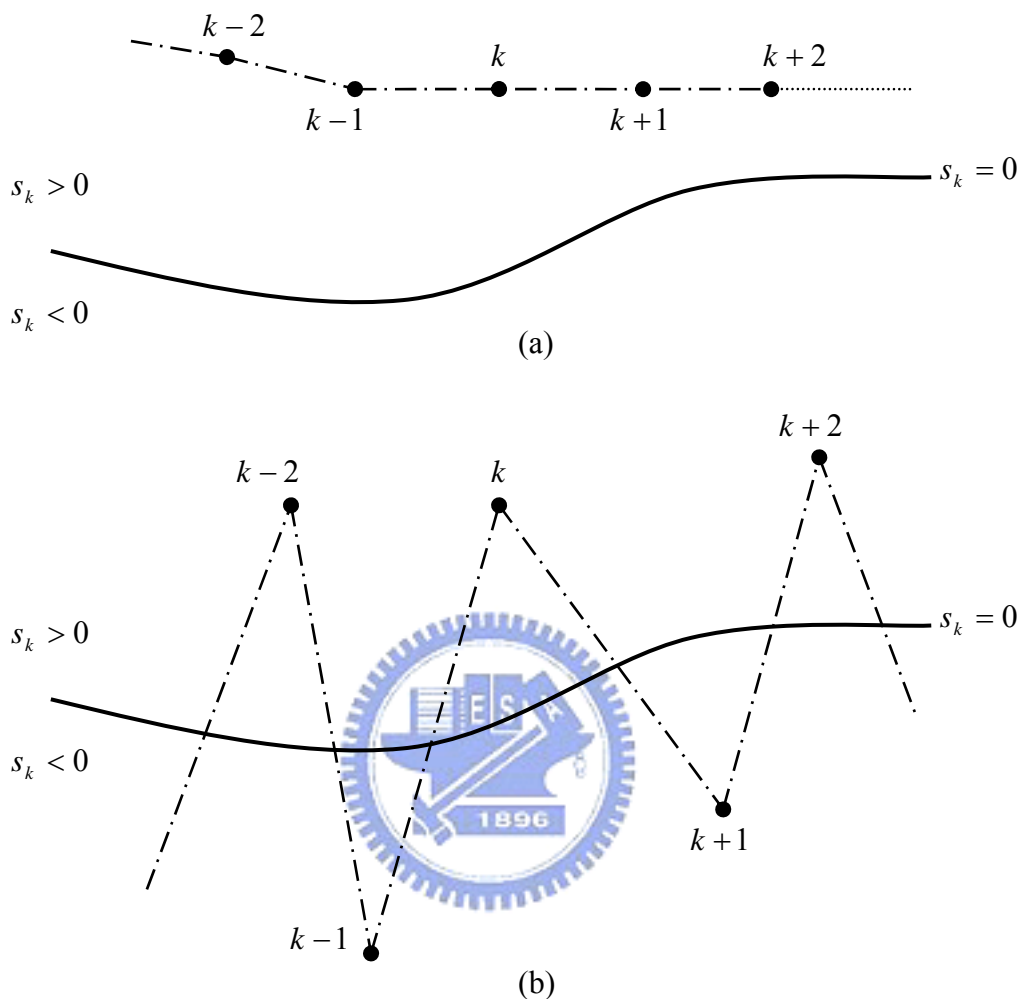


圖3.2 迫近條件(3.3)與(3.9)之收斂軌跡圖

實際上，迫近條件可以分成兩個部份來討論：方向條件與距離遞減條件。條件(3.2)以及條件(3.3)基本上都符合方向條件，即系統軌跡都是朝著順滑面的方向移動。然而，條件(3.2)卻有可能違反了軌跡與順滑面之間的距離遞減條件，而導致軌跡發散。條件(3.3)雖然遵守距離遞減的原則，卻因為遞減速率未納入考量，所以達到類順滑區的時間無法保證。

為了使系統軌跡不至於如上述般地緩慢收斂，於是根據二層概念[45]以及文獻[5]之中收斂速率調整的方法，整合出以下的迫近條件

$$|s_{k+1}| - \varepsilon \leq \omega |s_k| - \varepsilon, \quad \text{當 } |s_k| > \varepsilon \quad (3.10)$$

其中 $0 < \omega < 1$ 代表收斂速率，在稍後的控制器設計中將會討論該值的選用， $\varepsilon > 0$ 是迫近層的邊界值，與系統不定值或是干擾訊號的最大值有關。由條件(3.10)可以瞭解：當 s_k 位於迫近層的外面時，收斂速率 ω 使得軌跡越來越靠近迫近層，同時滿足了迫近方向與距離遞減的條件，並且保證滑模軌跡在有限的時間之內進入迫近層 $|s_k| \leq \varepsilon$ ，或者趨近於迫近層的邊界值。

一旦軌跡進入了迫近層，此時可以直接採用條件(3.3)的順滑條件，

$$|s_{k+1}| < |s_k|, \quad \text{當 } |s_k| \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

或是如同文獻[5]所提出的方法，只依靠經過設計的傳統回授控制，而不理會系統不定值與外部干擾。實際上，在迫近層的範圍之內所需要考慮的重點是滑模軌跡的穩定能力，而該穩定能力又與不定值或干擾的數值範圍有關，因此，當軌跡一旦進入滑模層之後，則可以保證會被限制的範圍將是

$$|s_{k+1}| < |s_k| + \varepsilon \leq 2\varepsilon, \quad \text{當 } |s_k| \leq \varepsilon \quad (3.12)$$

由條件(3.12)，又稱為順滑條件，可以得知在軌跡在進入迫近層 $|s_k| \leq \varepsilon$ 之後，下一個時間點的軌跡位置必定被限制在 $|s_{k+1}| < 2\varepsilon$ 之內，而此限制區域被稱為擬態順滑層 (pseudo-sliding layer)[5]，如圖(3.3)所示。然而，迫近條件(3.10)有可能逼近卻無法使滑模軌跡進入迫近層，但是終究能夠在有限時間之內進入(3.12)式的範圍限制；就控制目的而言，依舊算是達到目標。

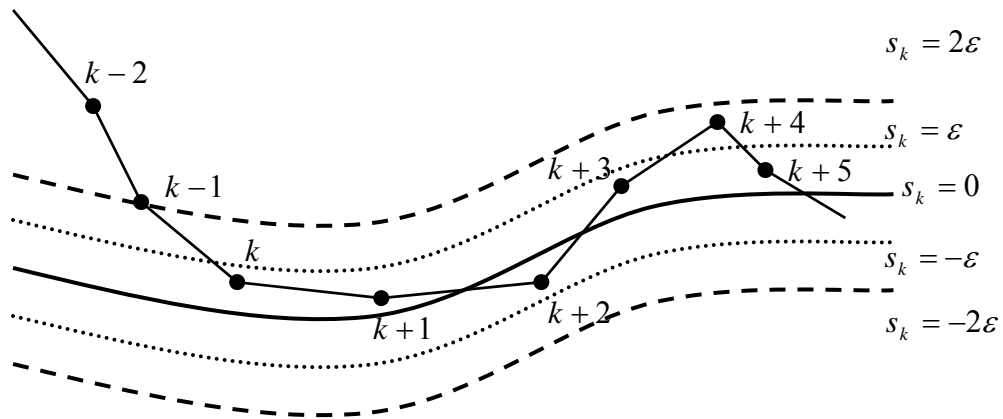


圖3.3 二層概念系統軌跡圖

圖(3.3)顯示一條可能的系統軌跡。首先系統以迫近條件(3.10)在時間 k 時進入迫近層 $|s_k| \leq \varepsilon$ ，接著切換成為順滑條件(3.12)式。根據(3.12)式可以得知此時的軌跡可能維持在迫近層內，如時間 k 到時間 $k+3$ ；也有可能因為系統不定值或外部干擾而離開迫近層，但仍然會保持在擬態順滑層之內，例如時間 $k+4$ 。而一旦系統軌跡離該迫近層，立刻又切換成迫近條件(3.10)式，使得系統軌跡又被拉回迫近層之內，如時間 $k+5$ 所示。根據條件(3.10)與(3.12)的交互切換使用，使得系統最後被保證控制在擬態順滑層 $|s_k| < 2\varepsilon$ 之內。

下一節，藉由離散化的方式將連續時間的線性非時變系統轉換成離散型系統，並且設計出離散型二層式擬態滑模控制器，達到對抗小範圍的匹配式雜訊。

3.2 離散型滑模控制器設計

3.2.1 系統介紹與轉換

考慮下列的連續時間系統動態方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t)) \quad (3.13)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ 是狀態向量(state vector)， $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ 表示控制輸入向量(control input vector)， $\mathbf{d}(t) \in \mathcal{R}^m$ 代表小範圍、可微分的外部匹配式雜訊，以及已知係數矩陣 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 與 $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ，同時假設 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是一組可控對(controllable pair)。在連續時間系統的前級加入取樣時間為 T 的零階保持器(zero-order holder)，藉以將系統作離散化的處理，也就是當連續時間介於 $kT \leq t < (k+1)T$, $k \geq 0$ ，離散時間變數的定義如下：系統的狀態向量為 $\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}(kT) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ 、控制輸入向量為 $\mathbf{u}[k] = \mathbf{u}(kT) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ 、雜訊干擾為 $\mathbf{d}[k] = \mathbf{d}(kT) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ 。因此，連續時間系統動態方程式可以被轉換成以下等效離散時間系統動態方程式[5][37]：

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{G}\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}\mathbf{u}[k] + \boldsymbol{\varphi}[k] \quad (3.14)$$

其中 $\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 與 $\mathbf{H} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}d\tau \in \mathcal{R}^{n \times m}$ 分別為常數矩陣，而離散化之後的等效雜訊向量則表示為 $\boldsymbol{\varphi}[k] = e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}d(\tau)d\tau$ 。另外，由於 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是一組可控對，因此 (\mathbf{G}, \mathbf{H}) 亦為可控[5]。

假設外部干擾是為有限的小範圍匹配式雜訊，則可以得到以下的近似關係式：

$$\mathbf{d}(t) \approx \mathbf{d}[k] + (t - kT)\dot{\mathbf{d}}[k], \quad \text{for } kT \leq t < (k+1)T \quad (3.15)$$

其中 $\dot{\mathbf{d}}[k]$ 代表在時間為 $t = kT$ 時， $\mathbf{d}[k]$ 的一階微分式。以上的假設是基於取樣頻率足夠快，換言之，在取樣間隔時間 T 之內， $\mathbf{d}[k]$ 的變化量很小。因此離散時間系統(3.14)的雜訊向量可以寫成

$$\boldsymbol{\varphi}[k] = \mathbf{H}\mathbf{w}[k] - \mathbf{E}\dot{\mathbf{d}}[k] \quad (3.16)$$

其中 $w[k] = d[k] + T\dot{d}[k]$, $E = T^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{(i+2)!} B$ 。假設雜訊的變化量甚微，於是可忽略(3.16)

式之中非匹配式的部分 $Ed[k]$ ，即 $\varphi[k] \approx Hw[k]$ 。所以(3.14)的近似關係式可被重新整理成

$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k] + Hw[k] \quad (3.17)$$

其中 $w[k] \in \mathfrak{R}^m$ 是匹配式雜訊向量，受限範圍定義成 $\|w[k]\| \leq \delta$ ， δ 為正數。下一小節，將以(3.17)式作為受控系統的離散動態方程式，設計二層式離散型滑模控制器。

3.2.2 二層式離散滑模控制器設計

利用相同於連續型滑模控制器的設計方法[38]，得到以下的設計步驟：

首先，將離散型滑動函數指定成

$$s[k] = Cx[k] \quad (3.18)$$

其中 $s \in \mathfrak{R}^m$ 是順滑控制變數。而 $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 則是將順滑面作參數化的矩陣，將在稍後設計。因此，得到的理想離散型順滑面(以下簡稱順滑面)如下，

$$s[k] = Cx[k] = 0 \quad (3.19)$$

關於(3.19)式之中的 C 矩陣，有許多方法可以求得[12][37][40]，本文則是利用Chen與Chang所提出的虛擬根值法(virtual eigenvalue method)[52]，求得特徵向量矩陣(eigenvector matrix) $\begin{bmatrix} J \\ C \end{bmatrix}$ ，使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ 與 $\mathbf{\Omega} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ 為對角線矩陣，該兩矩陣的對角線上分別為設計者指定的滑模特徵值(sliding-mode eigenvalues) $\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-m}\}$ 以及虛擬特徵值(virtual eigenvalues) $\{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_m\}$ 。 $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 則代表回授增益矩陣(feedback gain matrix)，是根據極點指定法(pole assignment method)而得到的。另外，矩陣 $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times n}$ 是由對角線矩陣 \mathbf{A} 的各個特徵值其相對應的特徵向量所組成的； $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 矩陣則是對應於對角線矩陣 $\mathbf{\Omega}$ 。重新整理(3.20)式可得到

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q}) = \mathbf{A}\mathbf{J} \\ \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q}) = \mathbf{\Omega}\mathbf{C} \end{cases} \quad (3.21)$$

虛擬根值法的虛擬特徵值 ω_i 並不會影響順滑模態(順滑模態的行為乃是受到滑模特徵值 λ_i 的影響)，但是卻能調整逼近模態時的逼近速率。也就是說，文獻[38]之中的最後一個控制器的設計步驟，在利用虛擬根值法設計的過程中，也一併被考慮進去。

其次，先不考慮系統不定值與外部干擾的影響，利用等效控制法則(equivalent control law)[13][34]，得到系統在順滑面移動時的等效控制輸入，

$$\mathbf{u}_{eq}[k] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] \quad (3.22)$$

其中，

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{C}\mathbf{H})^{-1} \mathbf{C}\mathbf{G} \quad (3.23)$$

即是(3.20)式之中的回授增益矩陣。根據虛擬根值法所滿足的特徵值條件，得知 $\mathbf{C}\mathbf{H}$ 為全秩矩陣，表示 $\mathbf{C}\mathbf{H}$ 的反矩陣存在。

再來，考慮外部匹配式干擾訊號的導入，以及控制法則對應的策略設計。參考文獻 [5]，令滑模控制法則如下：

$$\mathbf{u}[k] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \quad (3.24)$$

其中 \mathbf{v} 為切換函數，代入(3.17)式後成為

$$\mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q})\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}(\mathbf{v}[k] + \mathbf{w}[k]) \quad (3.25)$$

明顯地，向量 \mathbf{v} 隨即成為新的控制輸入，被用來對抗雜訊干擾 \mathbf{w} 。將(3.17)式代入(3.18)式，再根據(3.21)式將其改寫成

$$\begin{aligned} \mathbf{s}[k+1] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k+1] \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q})\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{v}[k] + \mathbf{w}[k]) \\ &= \mathbf{\Omega}\mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{v}[k] + \mathbf{w}[k]) \end{aligned} \quad (3.26)$$

進一步處理，最後得到

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{\Omega}\mathbf{s}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{v}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{w}[k] \quad (3.27)$$

根據上一節的假設，雜訊的大小範圍是 $\|\mathbf{w}[k]\| \leq \delta$ ，又已知 $\mathbf{C}\mathbf{H}$ 為全秩矩陣；針對矩陣 $\mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{w}[k]$ 取泛數(norm)，得到以下的不等式

$$\|\mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{w}[k]\| \leq \|\mathbf{C}\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{w}[k]\| \leq \|\mathbf{C}\mathbf{H}\| \delta = \sigma \quad (3.28)$$

其中 σ 是常數，由(3.28)式得知 σ 取決於雜訊的大小範圍 δ 。不等式(3.28)意謂

$$|(\mathbf{CH})_i \mathbf{w}| \leq \sigma, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.29)$$

而 $(\mathbf{CH})_i$ 代表矩陣 \mathbf{CH} 之中的第 i 個列向量(row vector)。

茲將文獻[5]中所提出的切換函數作修改，得到以下切換函數

$$\mathbf{v}[k] = -(\mathbf{CH})^{-1} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \text{sign}(\mathbf{s}[k]), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & & & \mathbf{0} \\ & \sigma & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \sigma \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times m} \quad (3.30)$$

至此，控制器 $\mathbf{u}[k] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k]$ 的設計已告完成。

最後，證明系統軌跡將被限制在特定範圍之內。不同於文獻[5]中所提出的切換函數，是將系統本身的動態行為抵銷之後，改以設計過的軌跡路徑，控制系統達到的期望目標。而本文所提出的控制方式，則是因為利用虛擬根值法，在設計之初已經考量到系統該有的路徑，所以切換函數(3.30)式主要的目的在於迫使滑模軌跡進入迫近層，以及進入迫近層之後，將軌跡限制在擬態滑模層之內。

為了評估本控制器的效能，首先將切換函數(3.30)代入(3.26)式，得到下列的純量表示式

$$s_i[k+1] = \omega_i (|s_i[k] - \sigma| \cdot \text{sign}(s_i[k]) + (\mathbf{CH})_i \cdot \mathbf{w}[k]), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.31)$$

參考條件(3.28)，將(3.31)式改寫以下的不等式

$$\begin{aligned} |s_i[k+1]| &\leq |\omega_i (|s_i[k] - \sigma| \cdot \text{sign}(s_i[k]) + (\mathbf{CH})_i \cdot \mathbf{w}[k])| \\ &\leq \omega_i (|s_i[k] - \sigma| + \sigma) \end{aligned} \quad (3.32)$$

相較於前面提到的(3.10)與(3.12)式，在此，控制器則是根據(3.32)式作為迫近條件。將(3.32)式移項整理後得到

$$|s_i[k+1] - \sigma \leq \omega_i (|s_i[k] - \sigma) \quad (3.33)$$

依照滑模函數可能的移動軌跡，可以分成以下兩種狀況來討論：

狀況一：軌跡從初始狀態開始，尚未進入迫近層 $|s_i[k] \leq \sigma$ ，即 $|s_i[k] > \sigma$ 。假設事先指定的虛擬特徵值範圍是 $1 < \omega_i < 0$ ，根據條件(3.33)得知，不等式的左邊項代表下一個時間點軌跡位置與迫近層邊界值 σ 的距離；而不等式的右邊項則是目前的軌跡位置與 σ 的距離再乘上小於1的迫近參數 ω_i 。其結果顯而易見，系統軌跡一直朝著迫近層接近甚至是最後進入其中，如圖(3.4a)與(3.4b)。

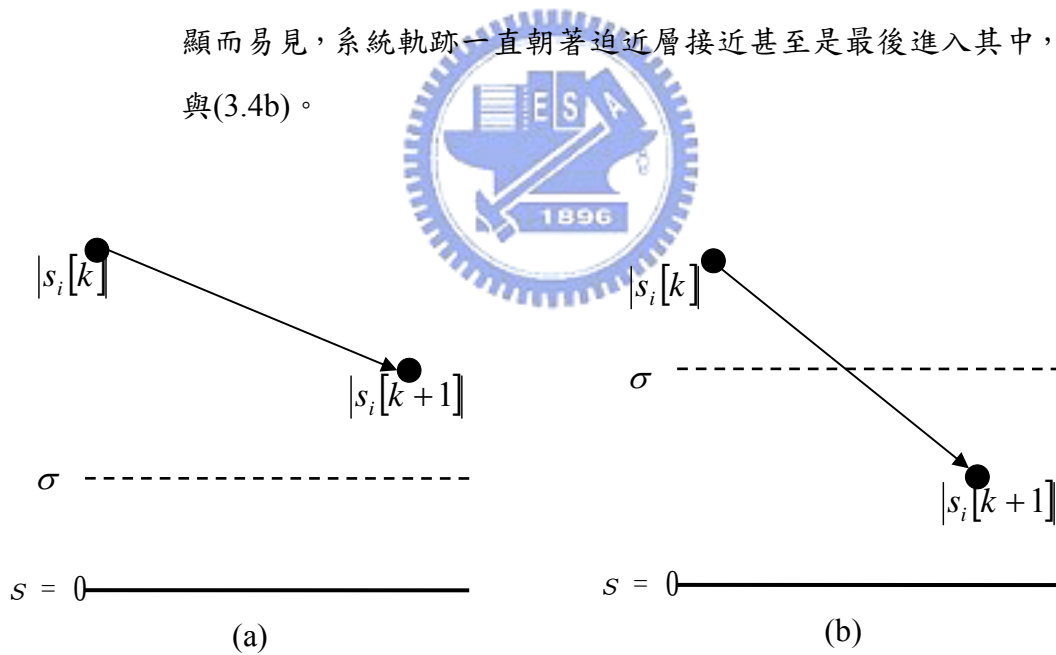


圖3.4 狀況一之受控系統軌跡圖

更進一步地，設計者還可藉由虛擬特徵值的大小變化，來調整進入迫近層的速度。例如，在 $\omega_i = (0,1)$ 的範圍之內，特徵值愈大，迫近的速度愈慢；反之，則愈快。

狀況二：目前的滑模函數軌跡已在迫近層之內，即 $|s_i[k]| \leq \sigma$ 。

在此狀況下，意謂

$$|(s_i[k] - \sigma)| \leq \sigma \quad (3.34)$$

將不等式(3.34)代入(3.32)式，得到

$$|s_i[k+1]| \leq \omega_i |(s_i[k] - \sigma)| + \sigma \leq (1 + \omega_i)\sigma \quad (3.35)$$

其結果顯示一旦系統軌跡進入的迫近層之後，下一個時間點的軌跡位置必定不會超出擬態順滑層，該邊界值為 $(1 + \omega_i)\sigma$ ，如圖(3.5a)與(3.5b)。但是，其位置卻有可能超出迫近層，如圖(3.5b)；此時，系統又回到狀況一的狀態，而接下來軌跡則又會被拉回迫近層之中，同時也代表著系統的誤差可以被保證在特定範圍之內。

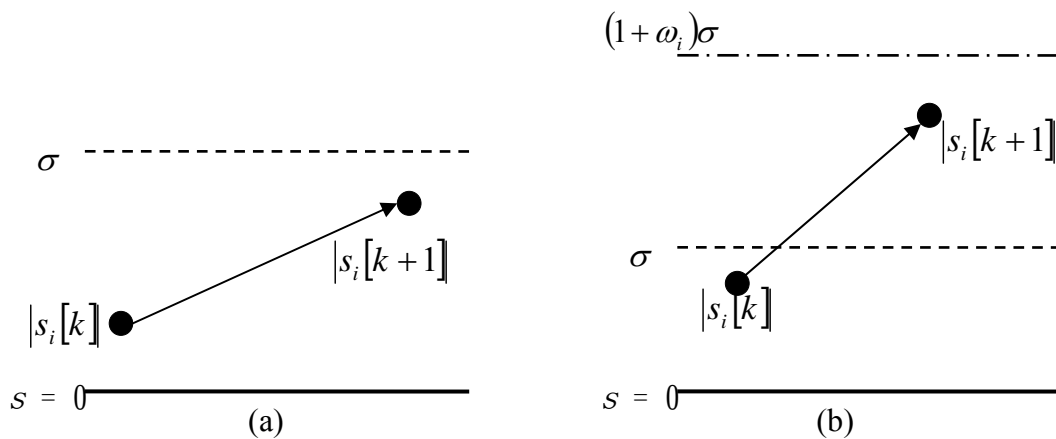


圖3.5 狀況二之受控系統軌跡圖

理論上，狀況一之中還有一種特例必須被考慮。就條件(3.33)而言，滑模軌跡有可能逼近迫近層 $s = \sigma$ ，但是卻不會落在或進入其內。這種狀況似乎並不符合二層概念設計的第一步要求，即是：使軌跡在有限時間之內進入到迫進層之內。實際上，除非干擾總是維持在最大值 σ ，而且又同時符合 $s_i[k] > \sigma, s_i[k+1] > \sigma$ ，使得(3.33)式成為

$$s_i[k+1] - \sigma = \omega_i(s_i[k] - \sigma), \quad (3.36)$$

如此，滑模軌跡無法進入迫近層的狀況才會發生；否則，必定落在迫近層的範圍之內。另一方面，即使上述狀況確實發生，但是就整體的控制效能而言，滑模軌跡還是能夠保持在擬態順滑層之內 $|s_i[k]| < (1 + \omega_i)\sigma$ ，足以達到設計的效能要求。

雖然本節設計達到了控制目的，但是僅能處理已知範圍而且數值不大的雜訊干擾，對於未知範圍的雜訊卻無能為力，其主要原因是因為無法得到控制法則所需的切換函數；此外，該控制器還有一個重要的限制，即是雜訊的數值範圍不能過大，否則，迫近層與擬態順滑層也會隨之增加，導致失去控制的精確度。因此，下一章將探討另一種因應對策，以解決未知或是大範圍雜訊對系統的干擾。

3.2.3 數據模擬

考慮以下的連續時間系統

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 1 \\ -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t)) \quad (3.37)$$

其中已知匹配式雜訊為 $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ ，取樣時間為 $T = 0.02 \text{ sec}$ ，系統狀態變數初始值為

$\mathbf{x}_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ 。轉換之後的離散時間系統如下

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{G}\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}\mathbf{u}[k] + \mathbf{H}\mathbf{w}[k] \quad (3.38)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.996 & 0.002 & 0.0198 \\ -0.001 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9802 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.02 \\ 0 & 0.014 \\ 0.02 & 0 \end{bmatrix}$$

已知雜訊干擾的範圍是

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}[k]\| &= \|\mathbf{d}[k] + T\dot{\mathbf{d}}[k]\| \\ &\leq \|\mathbf{d}[k]\| + T\|\dot{\mathbf{d}}[k]\| = \delta = 1.02 \end{aligned} \quad (3.39)$$

令滑模函數為 $\mathbf{s}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k]$ ，利用虛擬根值法以及指定的滑模特徵值 $\lambda = 0.9$ 、虛擬特徵值 $\omega_1 = \omega_2 = 0.7$ ，結果得到

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -7.3212 & 9.8644 & -1.3803 \\ 0 & -1.8193 & 0.1155 \end{bmatrix} \text{ 以及 } \|\mathbf{C}\mathbf{H}\|\delta = \sigma = 0.0317$$

因此，得到迫近層的邊界值0.0317以及擬態順滑層的邊界值0.0538。最後獲得的系統控制法則如下

$$\mathbf{u}[k] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k]$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 73.7557 & -105.7175 & 18.3579 \\ 6.5555 & 11.9453 & 0.3774 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}[k] = \begin{bmatrix} 0.7504 & -0.2427 \\ 0.0674 & 0.8487 \end{bmatrix} \cdot \text{sign}(\mathbf{s}[k])$$

模擬結果如圖(3.6)、(3.7)、(3.8)所示。

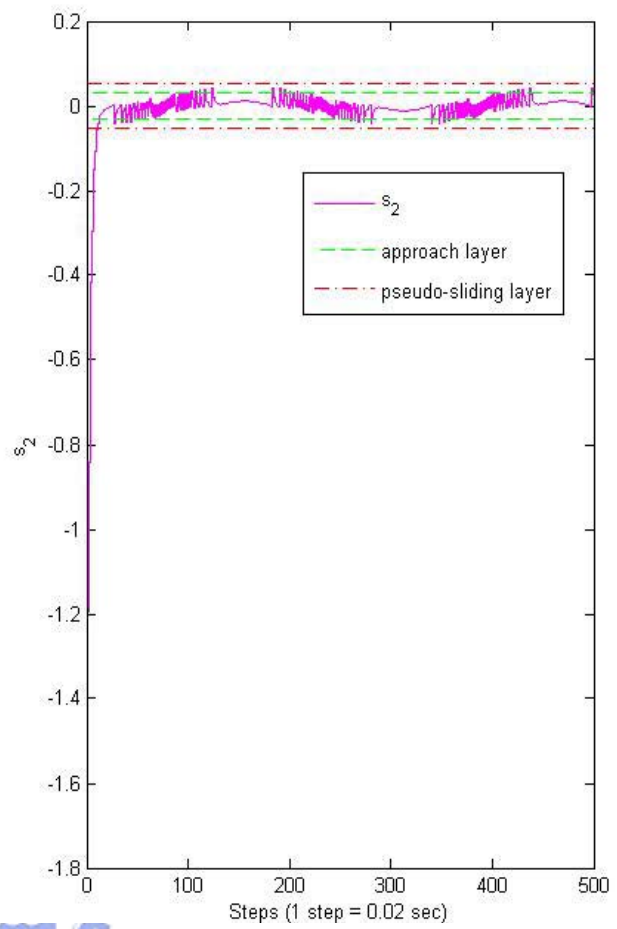
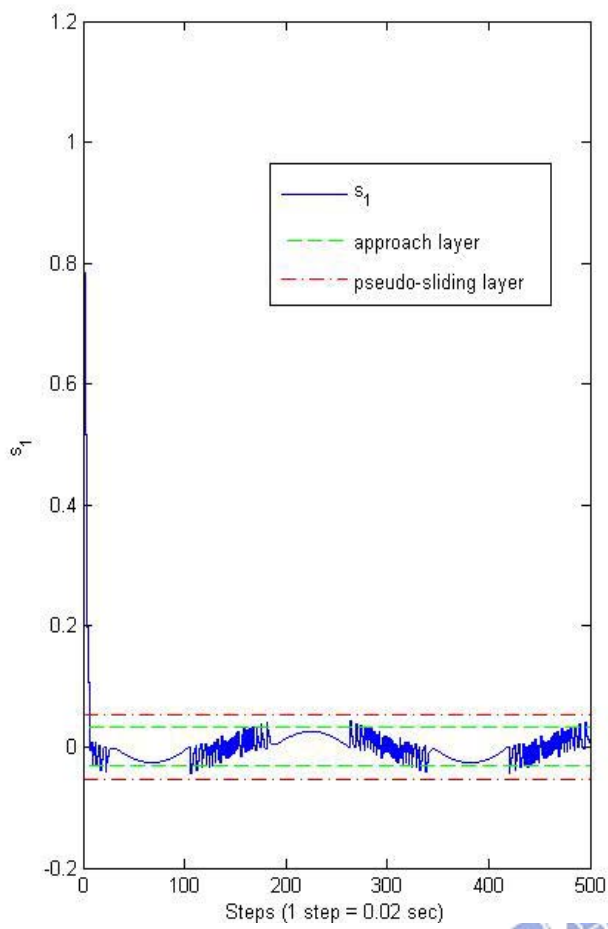


圖3.6 順滑函數 s_1 與 s_2 模擬結果圖

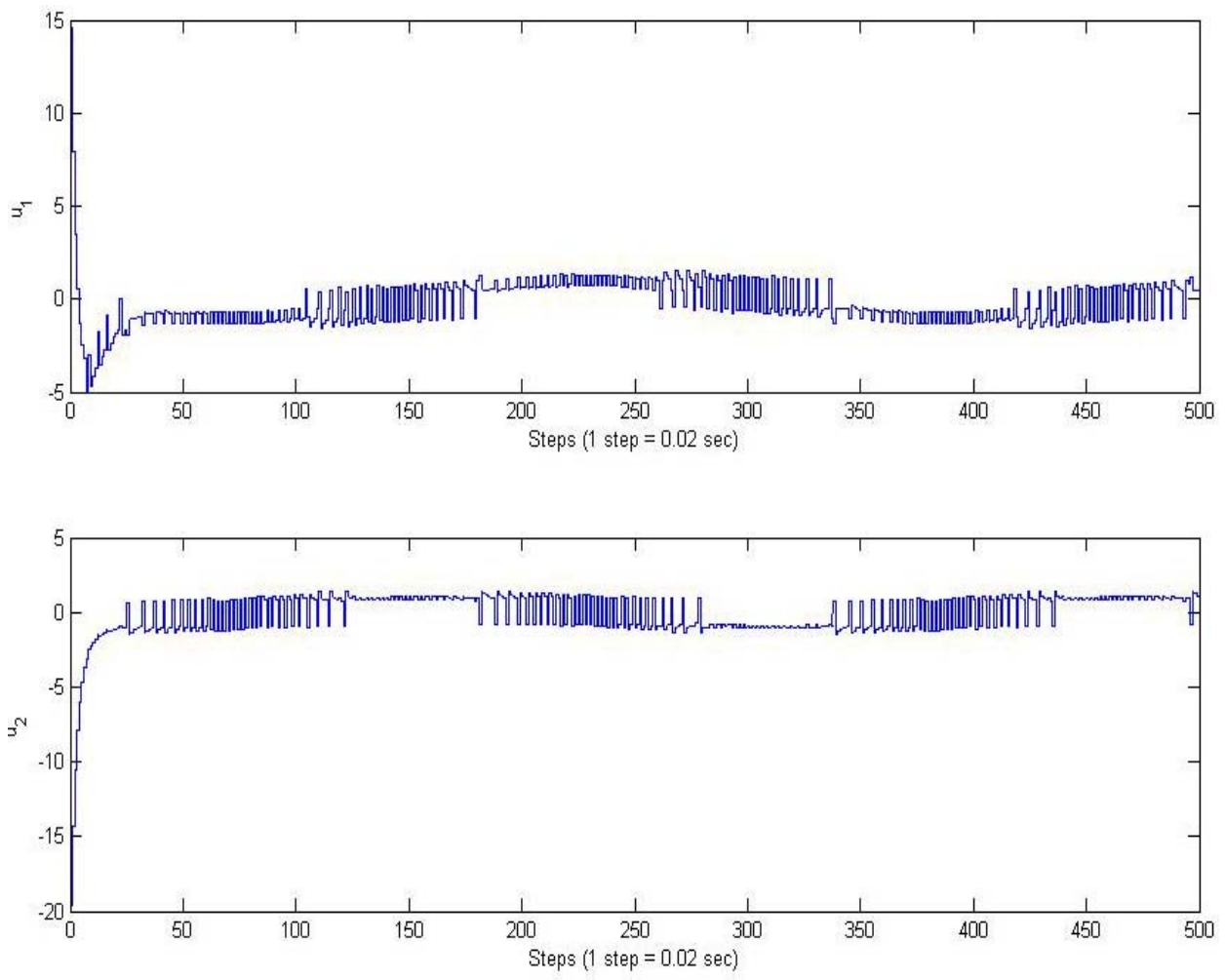


圖3.7 控制輸入 u_1 與 u_2 模擬結果圖

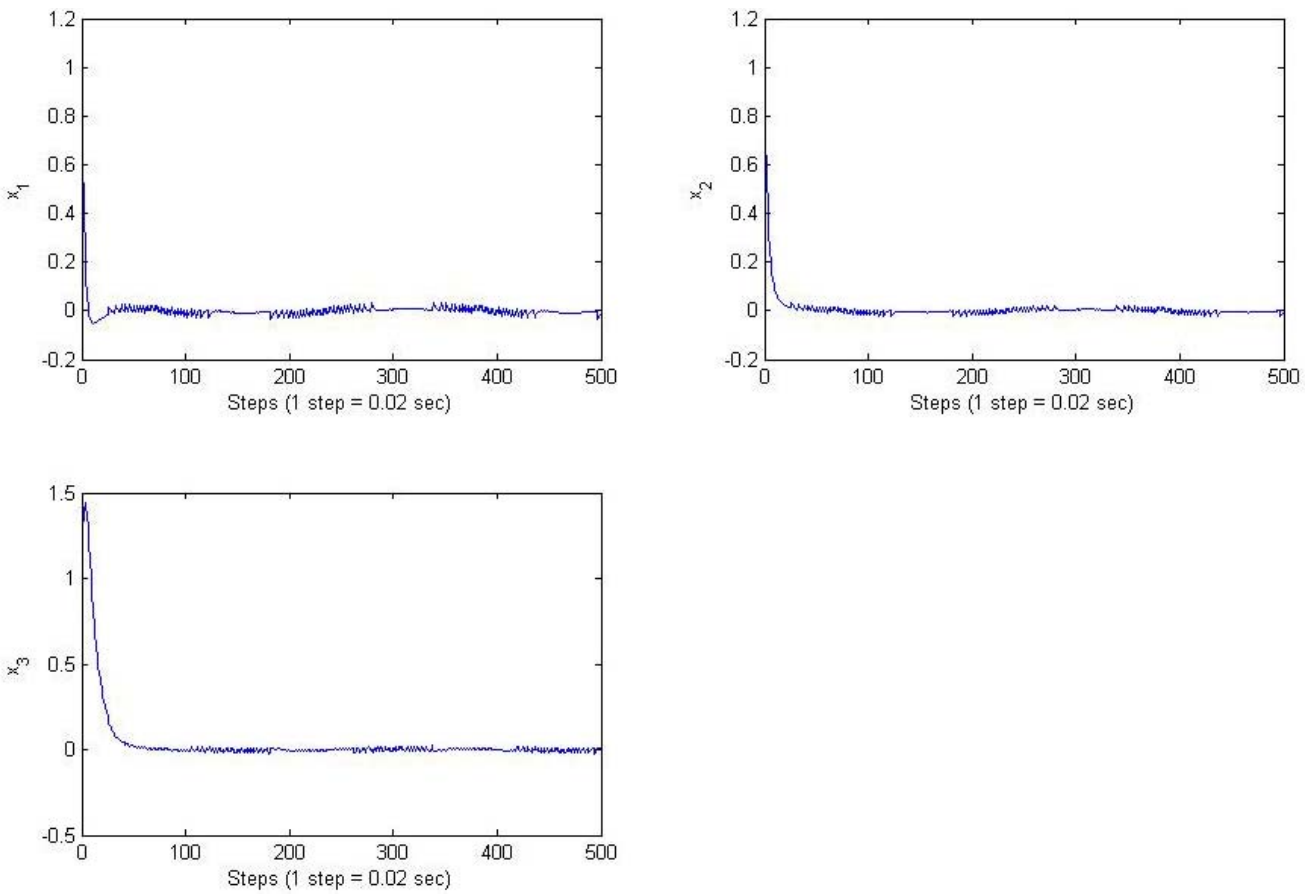


圖3.8 狀態變數 x_1 、 x_2 與 x_3 模擬結果圖

其結果可以發現順滑函數在接近順滑面 $s = 0$ 時，會產生跳切的現象。關於此，可依據(3.31)式來說明，該式如下：

$$s_i[k+1] = (\omega_i |s_i[k] - \omega_i \sigma) \cdot \text{sign}(s_i[k]) + (CH)_i \cdot w[k], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.40)$$

很明顯可以看出當等式右邊兩項同號而疊加時，於是 $s_i[k+1]$ 便有機會超出逼近層 $s_i[k] \leq \sigma$ 的範圍。接著，超出範圍的 $s_i[k+1]$ 改為受到逼近條件的控制，使得 $s_i[k+2]$ 再度進入逼近層。然而，一旦再次進入範圍之後，又可能重現等式右邊兩項同號的疊加，於是同樣的狀況再次發生。直到下次的軌跡位置不會超出逼近層，這種跳切的現象才會暫時停止。對付這種高增益的切換動作，一般採取的方法是將切換函數之中的sign函數改以saturation函數代替[34]，即可有效消除不當的跳切。其改進之後的切換函數如下：

$$v[k] = \begin{bmatrix} 0.7504 & -0.2427 \\ 0.0674 & 0.8487 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{sat}(s_1[k]) \\ \text{sat}(s_2[k]) \end{bmatrix}$$

$$\text{sat}(s_i[k]) = \begin{cases} \text{sign}(s_i[k]), & |s_i| > \sigma \\ \frac{s_i[k]}{\sigma}, & |s_i| \leq \sigma \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (3.41)$$

改進之後的模擬結果如圖(3.9)、(3.10)、(3.11)所示，切跳現象已被消除。

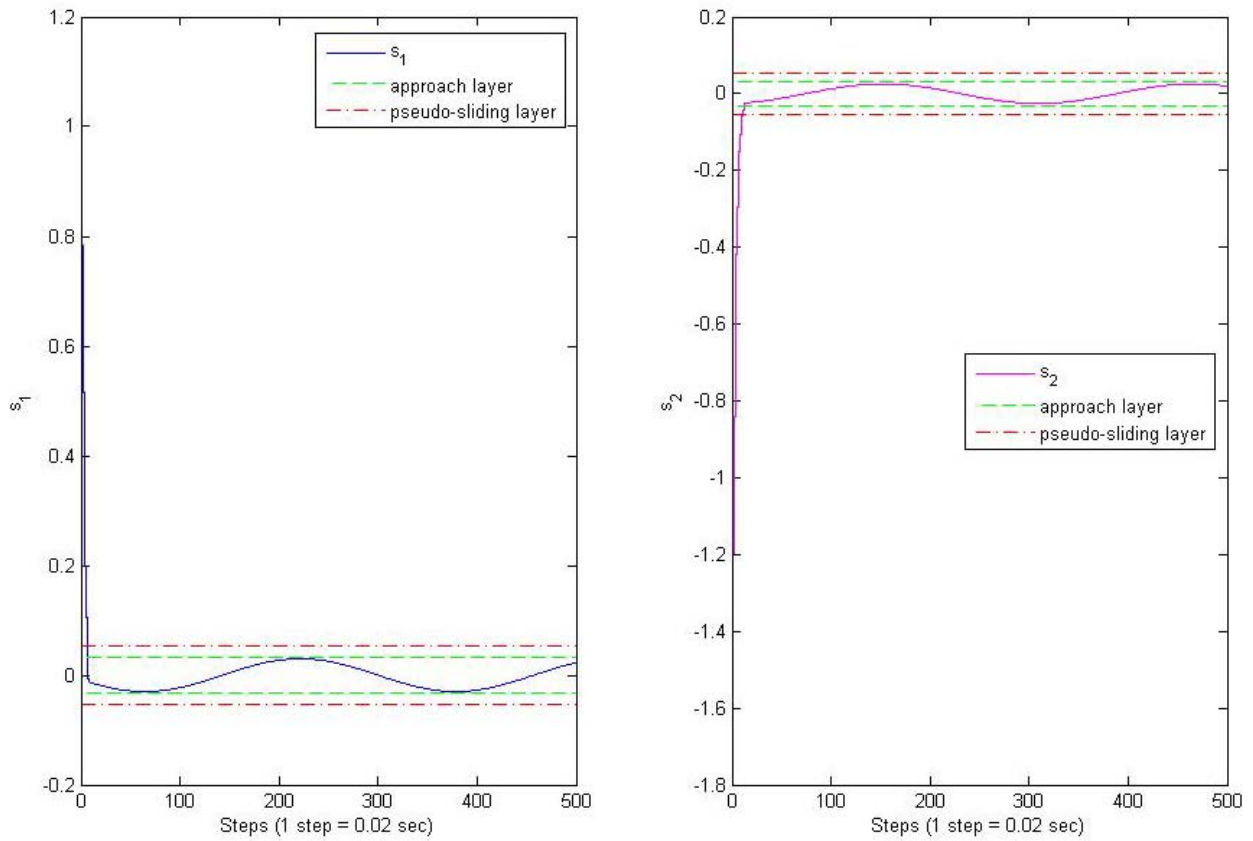


圖3.9 修正之後的順滑函數 s_1 與 s_2 模擬結果圖

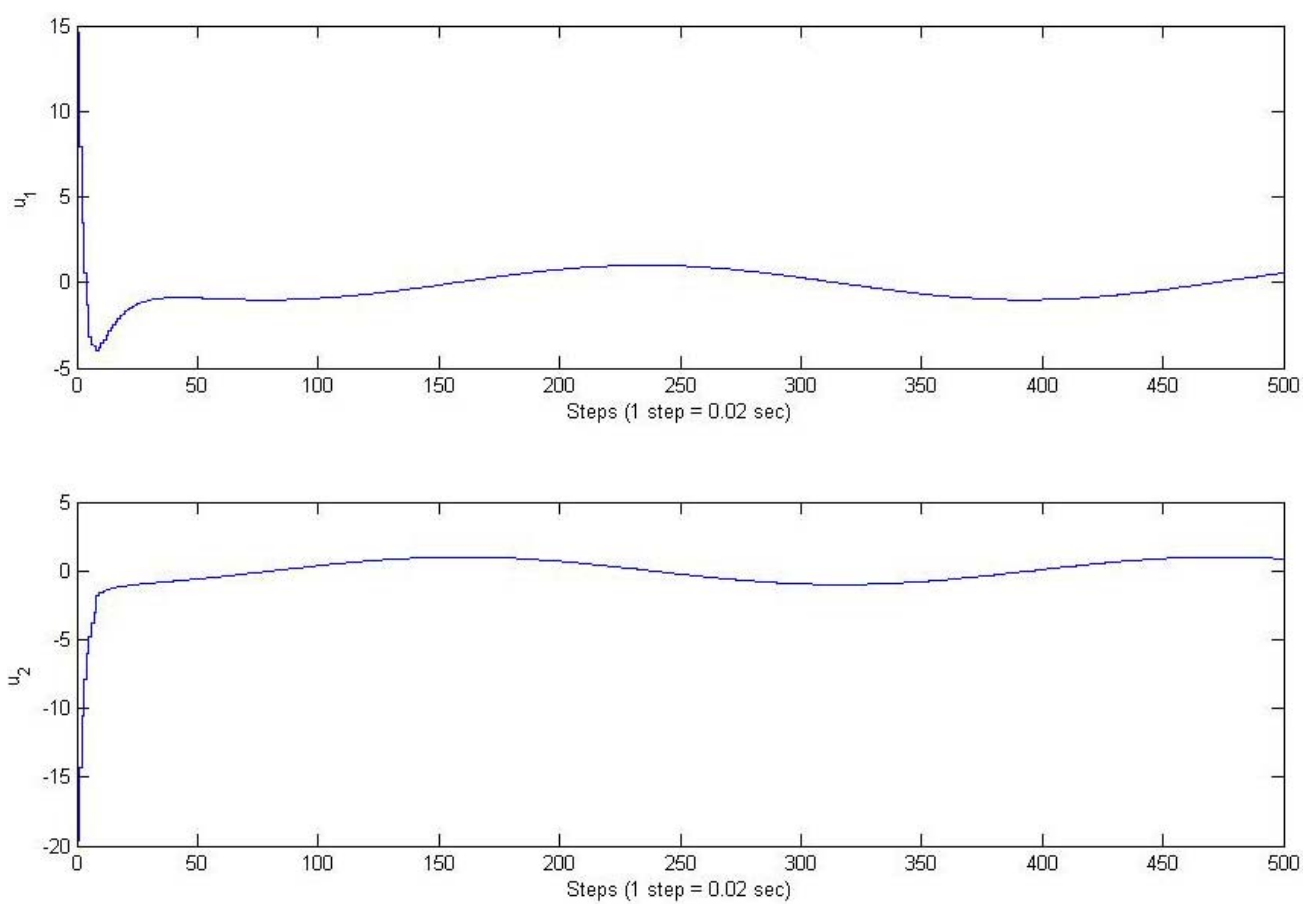


圖3.10 修正之後的控制輸入 u_1 與 u_2 模擬結果圖

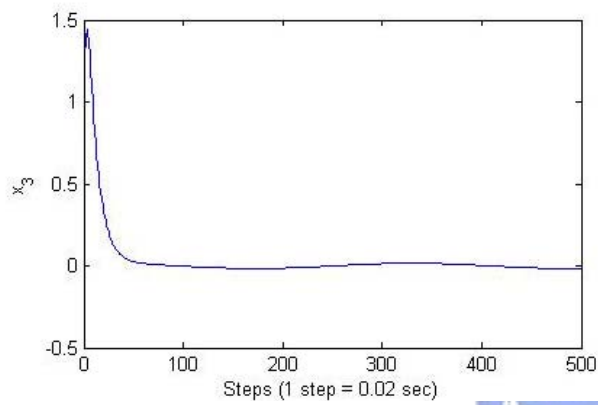
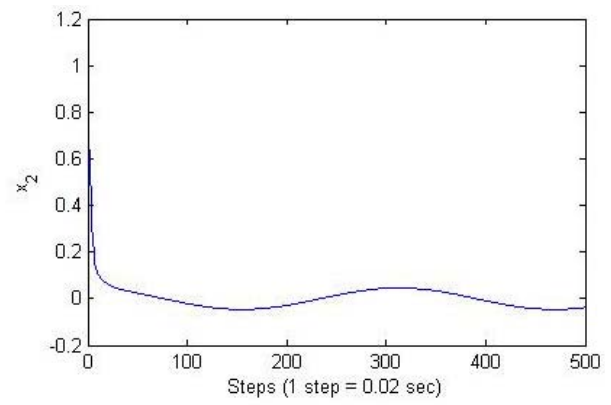
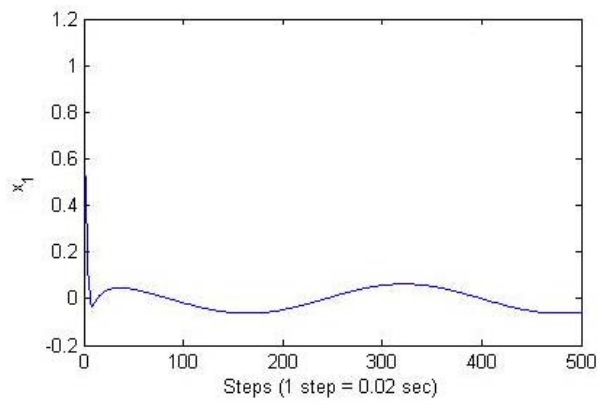


圖3.11 修正之後的狀態變數 x_1 、 x_2 與 x_3 模擬結果圖



第四章 離散型灰色滑模控制

4.1 應用灰色估測器之離散型滑模控制設計

上一章設計的離散型滑模控制器無法對抗未知或是大範圍的雜訊干擾，但是卻並不代表系統對於該雜訊的資料一無所知。透過可量測的狀態變數以及系統動態方程式(前提是可以確保量測到的狀態變數足夠精確)，經過簡單的代數運算，還是可以獲得各個過去時間點的雜訊資料。有了這些資料，再導入第二章所敘述的灰色理論及其估測器的設計，便可以完成雜訊估測。

已知離散系統動態方程式如下：

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{G}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{H}\mathbf{u}[k-1] + \mathbf{H}\mathbf{w}[k-1] \quad (4.1)$$

將等式的兩邊同乘上矩陣 \mathbf{C} ，再代入已量測到目前與上一個時間點的狀態變數 $\mathbf{x}[k]$ 與 $\mathbf{x}[k-1]$ ，重新整理之後，可得到上一個時間點的實際雜訊值

$$\mathbf{w}[k-1] = (\mathbf{C}\mathbf{H})^{-1} \{ \mathbf{C}\mathbf{x}[k] - \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}[k-1] - \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{u}[k-1] \} \quad (4.2)$$

將控制法則(3.24)稍作修改之後，得到以下新的控制輸入

$$\mathbf{u}[k] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] - \hat{\mathbf{w}}[k] \quad (4.3)$$

其中 $\hat{\mathbf{w}}[k] \in \mathbb{R}^m$ 表示在 k 時間點的干擾雜訊估測值。既然藉由(4.2)式可以求得雜訊的歷史資料，因此利用運算後得到的資料 $\mathbf{w}[k-1]$ 、 $\mathbf{w}[k-2]$ 、 $\mathbf{w}[k-3]$ 、 $\mathbf{w}[k-4]$ ，配合第二章敘

述的灰色模型GM(1,1)與二階Lagrange多項式冗餘數推估的誤差補償，即可得到目前時間點的雜訊估測值 $\hat{w}[k]$ 。

首先，令

$$\hat{w}_{GM11}[k] = \begin{bmatrix} \hat{w}_1^{(0)}(k) \\ \hat{w}_2^{(0)}(k) \\ \vdots \\ \hat{w}_m^{(0)}(k) \end{bmatrix}$$

根據灰色模型的三種基本運算，得到

$$\text{AGO - } w_i^{(1)}(p) = \sum_{j=k-4}^p w_i^{(0)}(j), \quad p = (k-4), (k-3), (k-2), (k-1) \quad (4.4)$$

$$\text{MEAN - } z_i^{(1)}(p) = \frac{1}{2} [w_i^{(1)}(p) + w_i^{(1)}(p-1)], \quad p = (k-3), (k-2), (k-1) \quad (4.5)$$

$$\text{IAGO - } \begin{aligned} w_i^{(0)}(k-4) &= w_i^{(1)}(k-4) \\ w_i^{(0)}(p) &= w_i^{(1)}(p) - w_i^{(1)}(p-1), \quad p = (k-3), (k-2), (k-1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

以上三個基本運算之中， $i=1,2,\dots,m$ 。

將(2.15)式作對應的變數修改之後，得到以下表示式

$$\hat{w}_i^{(0)}(k) = (1 - e^{-a_i}) \cdot \left[w_i^{(0)}(k-4) - \frac{b_i}{a_i} \right] \cdot e^{-4a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

其中係數 a_i 與 b_i 是

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i)^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{y}_i$$

以及

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} w_i^{(0)}(k-3) \\ w_i^{(0)}(k-2) \\ w_i^{(0)}(k-1) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -z_i^{(1)}(k-3) & 1 \\ -z_i^{(1)}(k-2) & 1 \\ -z_i^{(1)}(k-1) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

根據(2.38)式以及自然指數的近似化簡，得到經過二階Lagrange多項式修正的推估值

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}[k] &= \hat{\mathbf{w}}_z[k] + \begin{bmatrix} 3 \cdot r_1(k-1) - 3 \cdot r_1(k-2) + r_1(k-3) \\ 3 \cdot r_2(k-1) - 3 \cdot r_2(k-2) + r_2(k-3) \\ \vdots \\ 3 \cdot r_m(k-1) - 3 \cdot r_m(k-2) + r_m(k-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{w}_{z_1}^{(0)}(k) + 3 \cdot r_1(k-1) - 3 \cdot r_1(k-2) + r_1(k-3) \\ \hat{w}_{z_2}^{(0)}(k) + 3 \cdot r_2(k-1) - 3 \cdot r_2(k-2) + r_2(k-3) \\ \vdots \\ \hat{w}_{z_m}^{(0)}(k) + 3 \cdot r_m(k-1) - 3 \cdot r_m(k-2) + r_m(k-3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

將運算結果(4.9)以向量式代入控制法則(4.3)式之中，即可得到下一次系統控制時間點所需的控制輸入值。如同上一章的設計步驟，指定順滑函數為 $\mathbf{s}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k]$ ，以及利用虛擬根值法得到控制參數矩陣 \mathbf{C} 與回授增益矩陣 $\mathbf{Q} = (\mathbf{C}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{G}$ ，再考慮已經加入干擾估測值的控制輸入(4.3)式，使得系統動態方程式成為

$$\mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{Q})\mathbf{x}[k] + \mathbf{H}(\mathbf{w}[k] - \hat{\mathbf{w}}[k]) \quad (4.10)$$

將(4.10)等式的兩邊同乘以矩陣 \mathbf{C} ，得到

$$\mathbf{s}[k+1] = \mathbf{\Omega}\mathbf{s}[k] + \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{w}[k] - \hat{\mathbf{w}}[k]) \quad (4.11)$$

以純量表示，

$$s_i[k+1] = \omega_i s_i[k] + (CH)_i (w_i[k] - \hat{w}_i[k]) \quad (4.12)$$

其中 $(CH)_i$ 代表矩陣 CH 的第 i 個列向量。關於控制效能的分析，接下來將根據(4.12)式來討論。

當初始條件遠離順滑面時，可知 $\omega_i |s_i| \gg (CH)_i |w_i - \hat{w}_i|$ ， $\omega_i s_i[k]$ 成為等式(4.12)式右邊的主導項，所以軌跡將朝著順滑面迫近。逐漸地，當 $\omega_i |s_i| \approx (CH)_i |w_i - \hat{w}_i|$ ，滑模軌跡受到干擾估測誤差的影響也愈大。最後，勢必產生 $\omega_i |s_i| \ll (CH)_i |w_i - \hat{w}_i|$ 的情況，而 $(CH)_i |w_i - \hat{w}_i|$ 也順理成章地成為主導項。此時，干擾估測的誤差便成為決定系統穩定的主要因素。根據2.4節的數據模擬結果，證明本文提出的估測法對於變化平緩的序列資料，可以得到良好的估測效能，而應用在本章的干擾估測上，也將有同樣的效果。

4.2 數據模擬與比較

首先，假設雜訊干擾是在系統可控的範圍之內，既然DSMC無法處理的未知或是大範圍的外部匹配式雜訊干擾，所以在此僅僅單獨進行DGeaL2SMC的順滑軌跡模擬。本系列模擬特別針對不同的系統控制作用頻率，來探討本控制器在未處理初始估測值（即是在系統初始的前幾個步驟，其灰色估測值與線性近似補償值因為歷史資料的不足，所以兩種估測值只能以0取代）時，不同控制作用頻率下的暫態控制能力。沿用第三章數據模擬所採用的系統與外部匹配式干擾，指定離散型滑模控制器(DSMC)的滑模特徵值 $\lambda = 0.9$ 、虛擬特徵值 $\omega_1 = \omega_2 = 0.7$ ，分別以三種不同的系統控制作用週期 $T = 0.02$ 、 0.05 、 0.1 秒，但是外部匹配式干擾的振幅增加成為原本的10倍，即

$$w[k] = 10 \times \left(\begin{bmatrix} \sin(kT) \\ \cos(kT) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \cos(kT) \\ -\sin(kT) \end{bmatrix} \right) \quad (4.13)$$

；另外加入的bias為12，進行DGeaL2SMC的順滑軌跡模擬，如圖(4.1)與圖(4.2)所示。全程的模擬時間為5秒，得到的各個效能數據如下所列：

(1) 當系統控制作用週期 $T = 0.02$ 秒時，

順滑函數 s_1 的 settling time 大約為0.2秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為 4.93×10^{-6} ；順滑函數 s_2 的 settling time 也是大約為0.2秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為 9.23×10^{-5} 。

(2) 當系統控制作用週期 $T = 0.05$ 秒時，

順滑函數 s_1 的 settling time 大約為0.7秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為 3.0×10^{-4} ；順滑函數 s_2 的 settling time 是大約為0.8秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為 2.82×10^{-4} 。

(3) 當系統控制作用週期 $T = 0.1$ 秒時，

順滑函數 s_1 的 settling time 大約為2秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為0.004；順滑函數 s_2 的 settling time 也是大約為2秒，與理想順滑面的最大偏移量分別為0.0036。



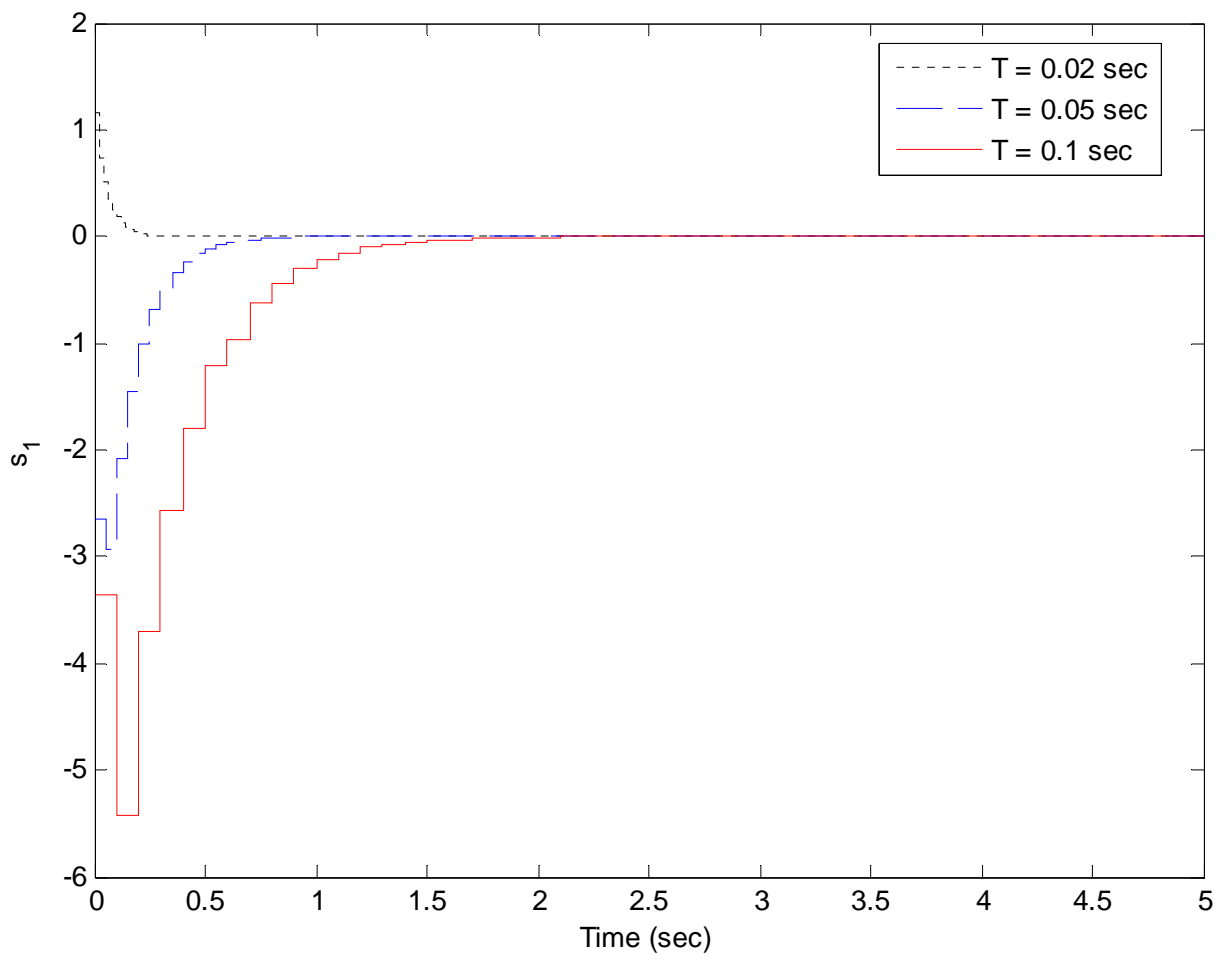


圖4.1 不同系統控制作用週期之DGeaL2SMC順滑函數 s_1 模擬結果比較圖

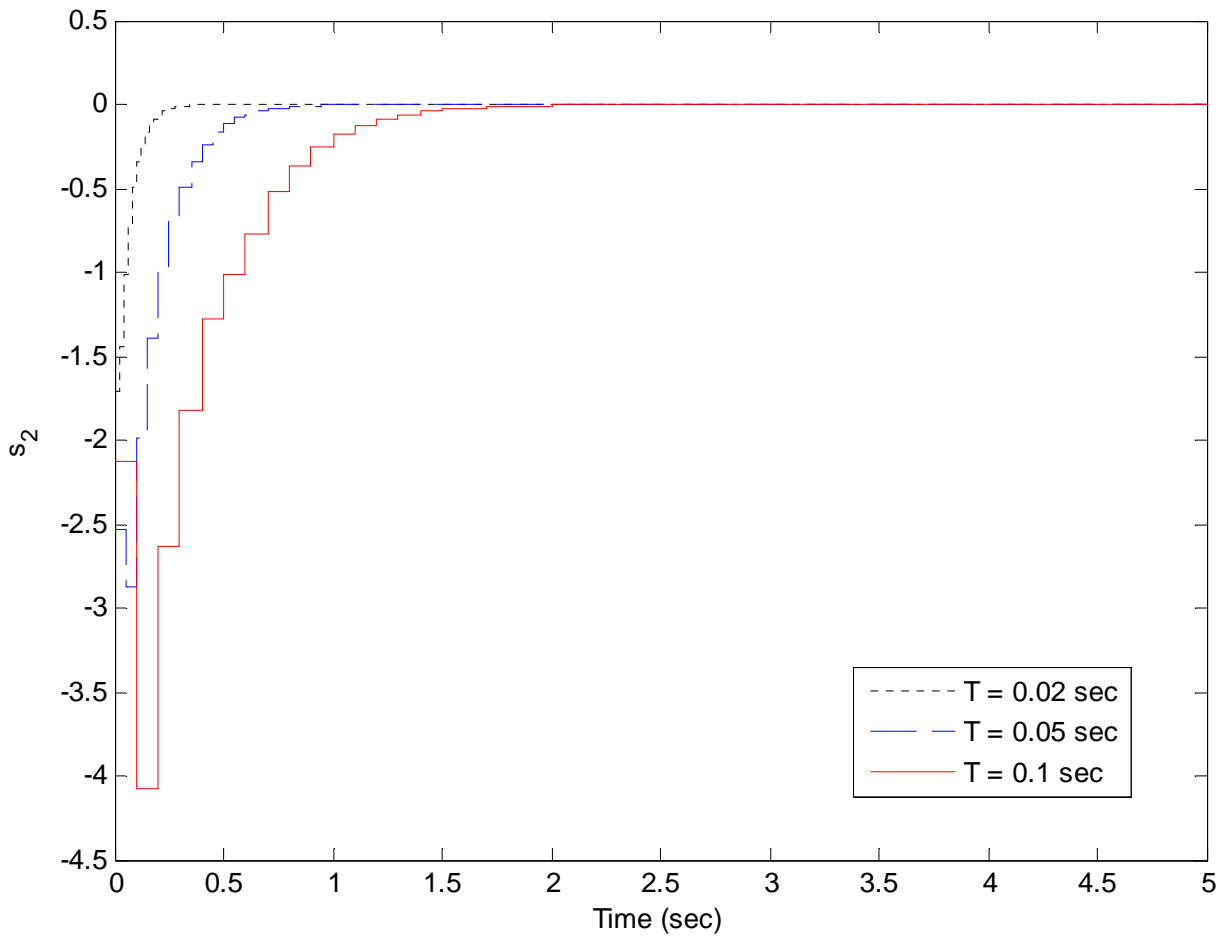


圖4.2 不同系統控制作用週期之DGeaL2SMC順滑函數 s_2 模擬結果比較圖

圖(4.1)與圖(4.2)可以明顯看出系統控制週期變大時，控制作用週期時間為0.05秒與0.1秒的暫態控制能力不足，導致滑模函數軌跡無法直接向順滑模態逼近。對於前幾個步驟估測值為0的問題，或許灰色估測是無能為力，但是線性近似的推估卻可以有所作為。最直接的想法是在得到第一個干擾值的歷史資料之後，立即以Lagrange 零階多項式的近似補償，加入到控制輸入，而能夠對下一個控制作用點產生作用；在得到第二個干擾值的歷史資料，則以Lagrange 一階多項式的近似補償，加入到控制輸入。以此類推，當干擾值的歷史資料足夠時，即可馬上結合灰色估測值，而得到更精確的估測。改進之後的模擬結果，如圖(4.3)與(4.4)所示。

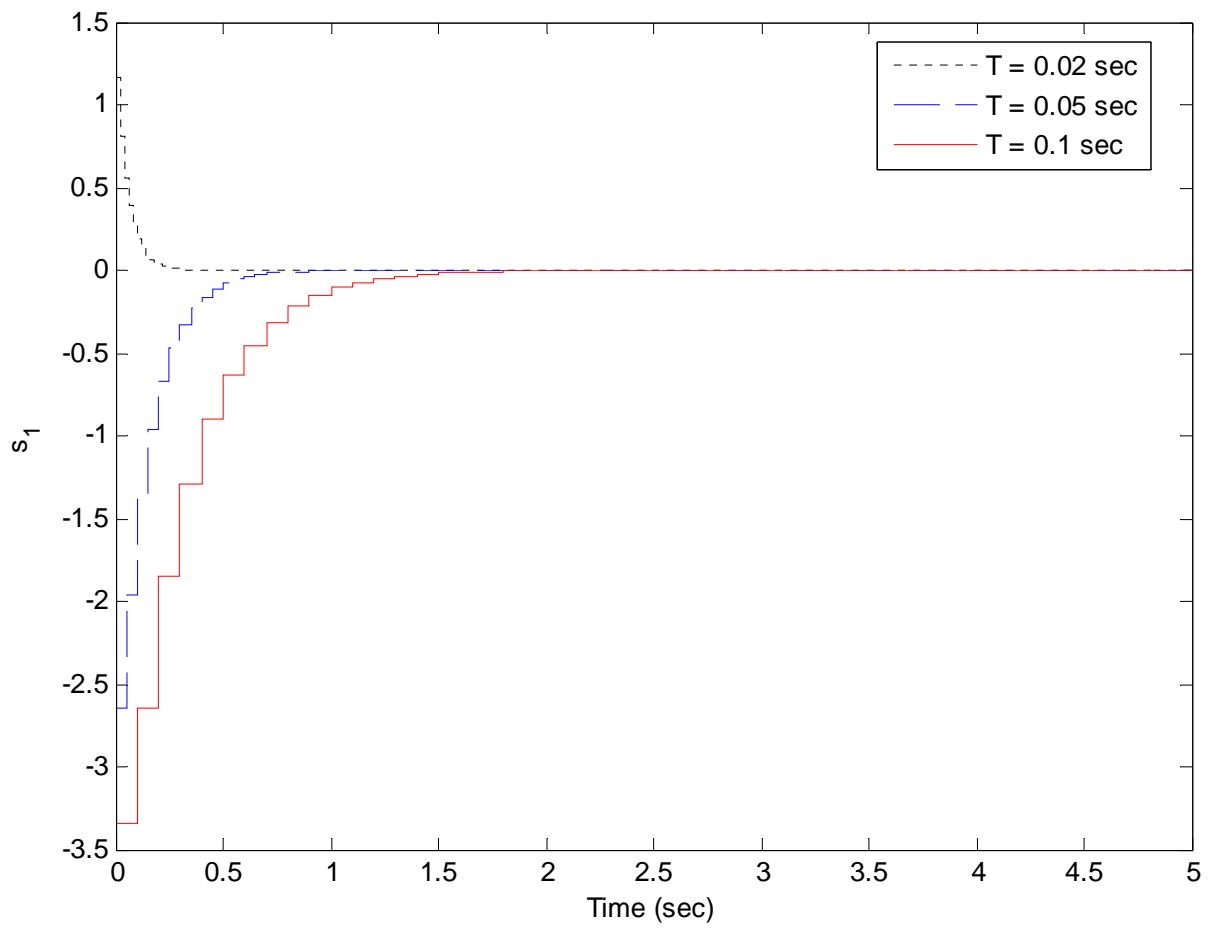


圖4.3 估測初始值改進之DGeaL2SMC平滑函數 s_1 模擬結果圖

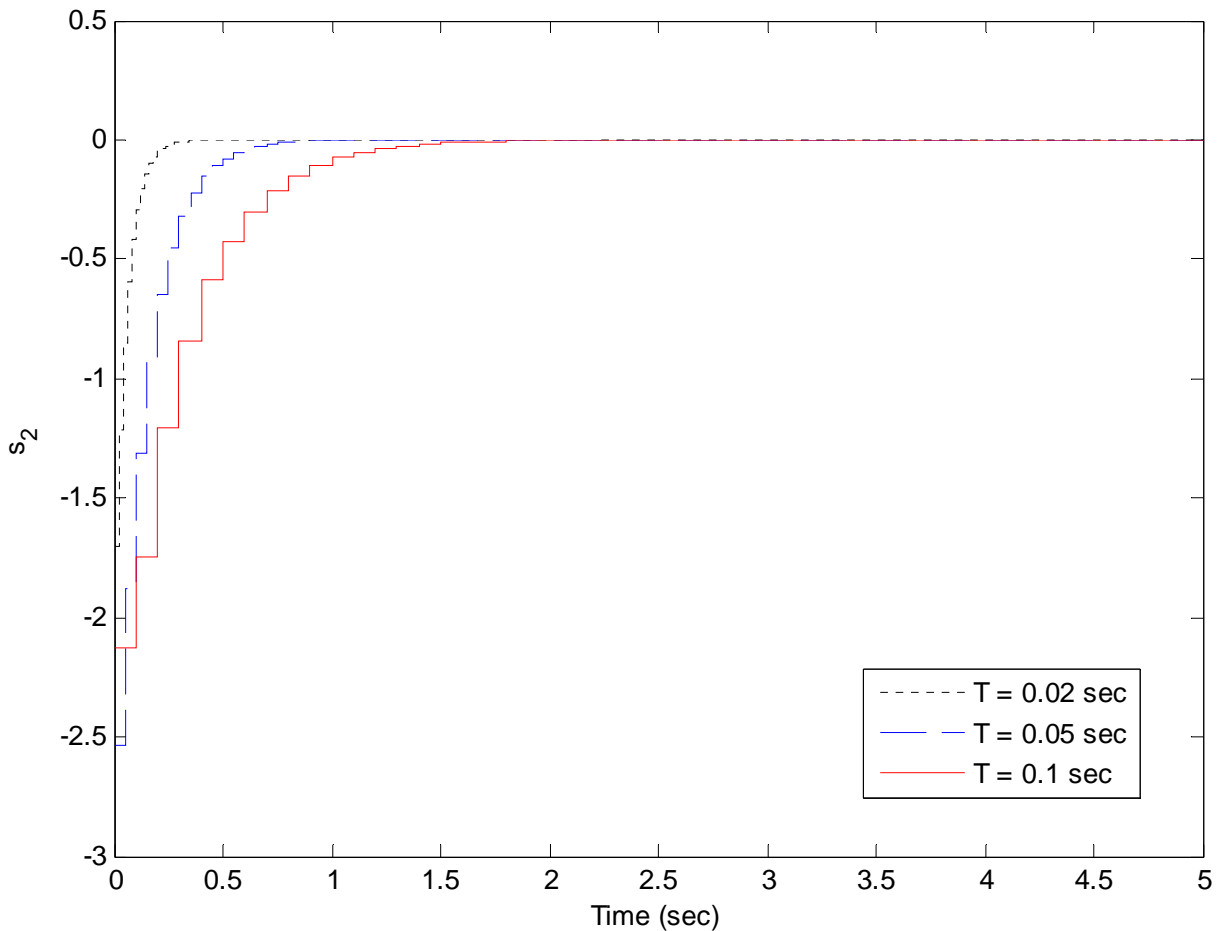


圖4.4 估測初始值改進之DGeaL2SMC順滑函數 s_2 模擬結果圖

其次，評估結合灰色估測器的離散型滑模控制器對於已知範圍且數值不大的外部匹配式干擾的控制效能，並且與第三章的離散型滑模控制器做比較。沿用前次模擬所採用的相關數據，以及相同的雜訊干擾(4.13)式，採用取樣時間週期 $T=0.02$ 秒；得到雜訊逼近速率為 $\omega_1 = \omega_2 = 0.7$ ，干擾值範圍 $\|w[k]\| \leq \delta = 1.02$ ，逼近層的邊界值為 $\sigma = \|CH\| \delta = 0.0317$ ，擬態順滑層的邊界值為 $(1 + \omega_1)\sigma = (1 + \omega_2)\sigma = 0.0538$ ，以及滑模軌跡 s_1 的settling time大約為0.2秒與 s_2 的settling time大約為0.25秒。至於採用自然指數近似簡化運算的離散型灰色滑模控制器(DGeaL2SMC)，藉由在settling time以及之後的滑模軌跡最大誤差值來作為穩態效能的評估參考。由於此處的干擾雜訊包含負號數值，因此無法採用GM(1,1)來估測，必須將所有由計算獲得的雜訊歷史資料統一加上bias(本模擬的

加入值為2)，使其成為正序列。最後的模擬結果得到滑模函數 s_1 的settling time大約為0.4秒、與理想順滑面的最大偏移量為 9.17×10^{-5} ；滑模函數 s_2 的settling time大約為0.4秒、與理想順滑面的最大偏移量為 5.87×10^{-5} 。

其模擬結果，如圖(4.5) ~ (4.10)所示，可以明顯看出兩者的迫近軌跡相差無幾，因為這段期間外部干擾對於順滑軌跡的影響甚微，所以軌跡大致以虛擬特徵值 ω_1 與 ω_2 的遞減速度，向迫近層逼進，直到進入迫近層之內。在進入迫近層之後，依據條件(3.35)式，DSMC的順滑軌跡雖然保證被限制在擬態順滑層之內，但是為了消除切跳現象而導入的邊界層控制，會造成此時的控制增益降低，使得受到干擾影響的順滑軌跡呈現隨著干擾訊號的擾動。反觀DGeaSMC的順滑軌跡，因為干擾訊號的估測誤差全程都能維持在極小的誤差，所以產生的穩態效能也較佳。

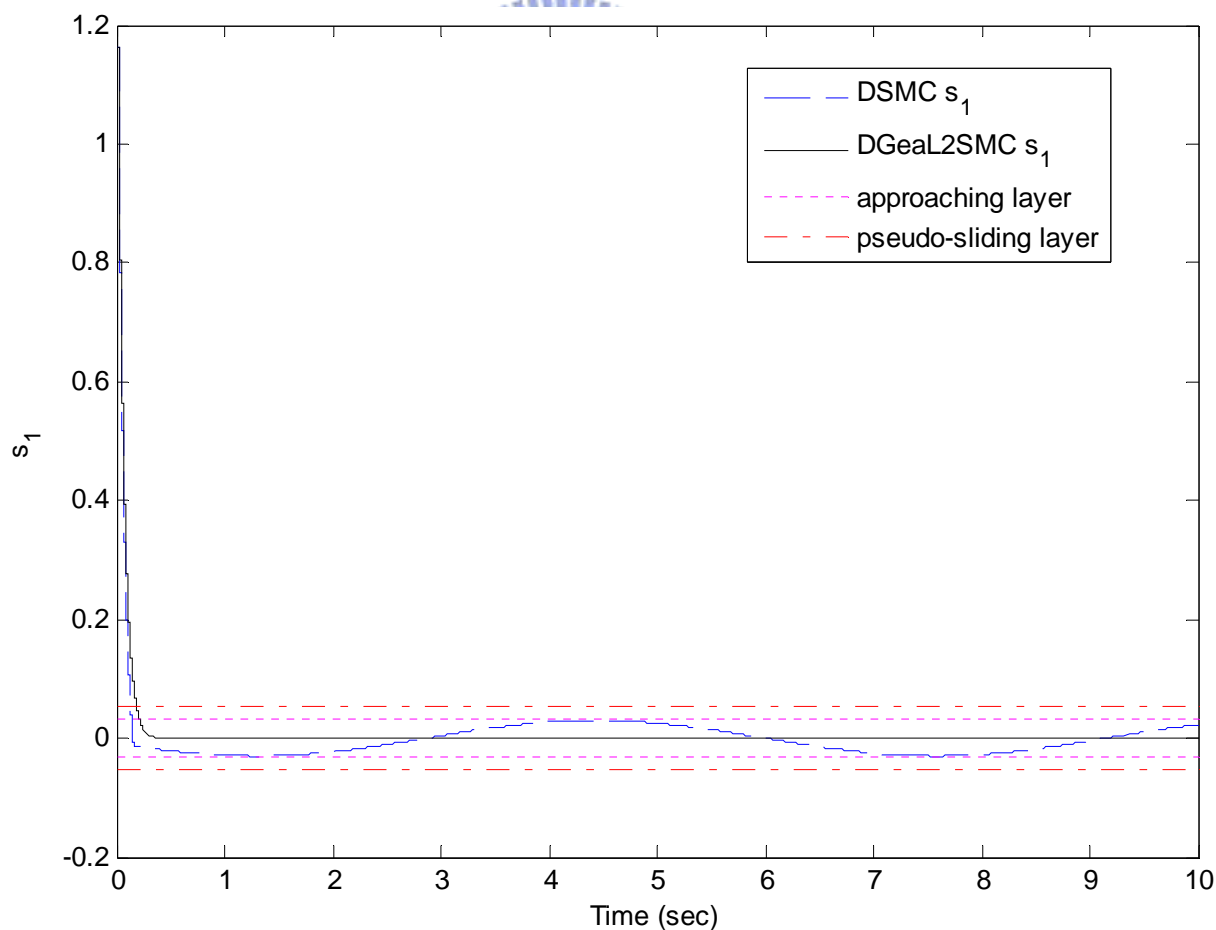


圖4.5 小範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_1 模擬結果比較圖

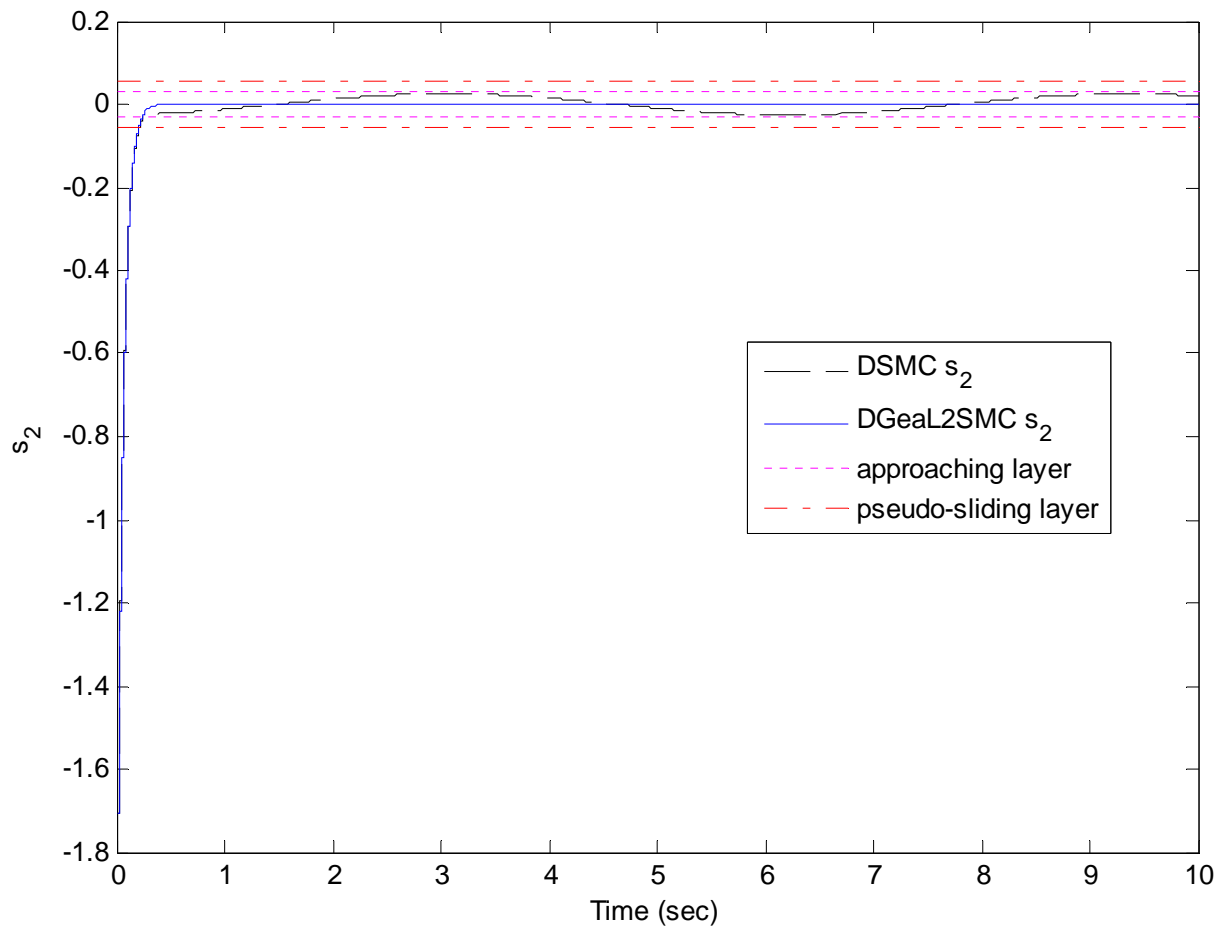


圖4.6 小範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_2 模擬結果比較圖

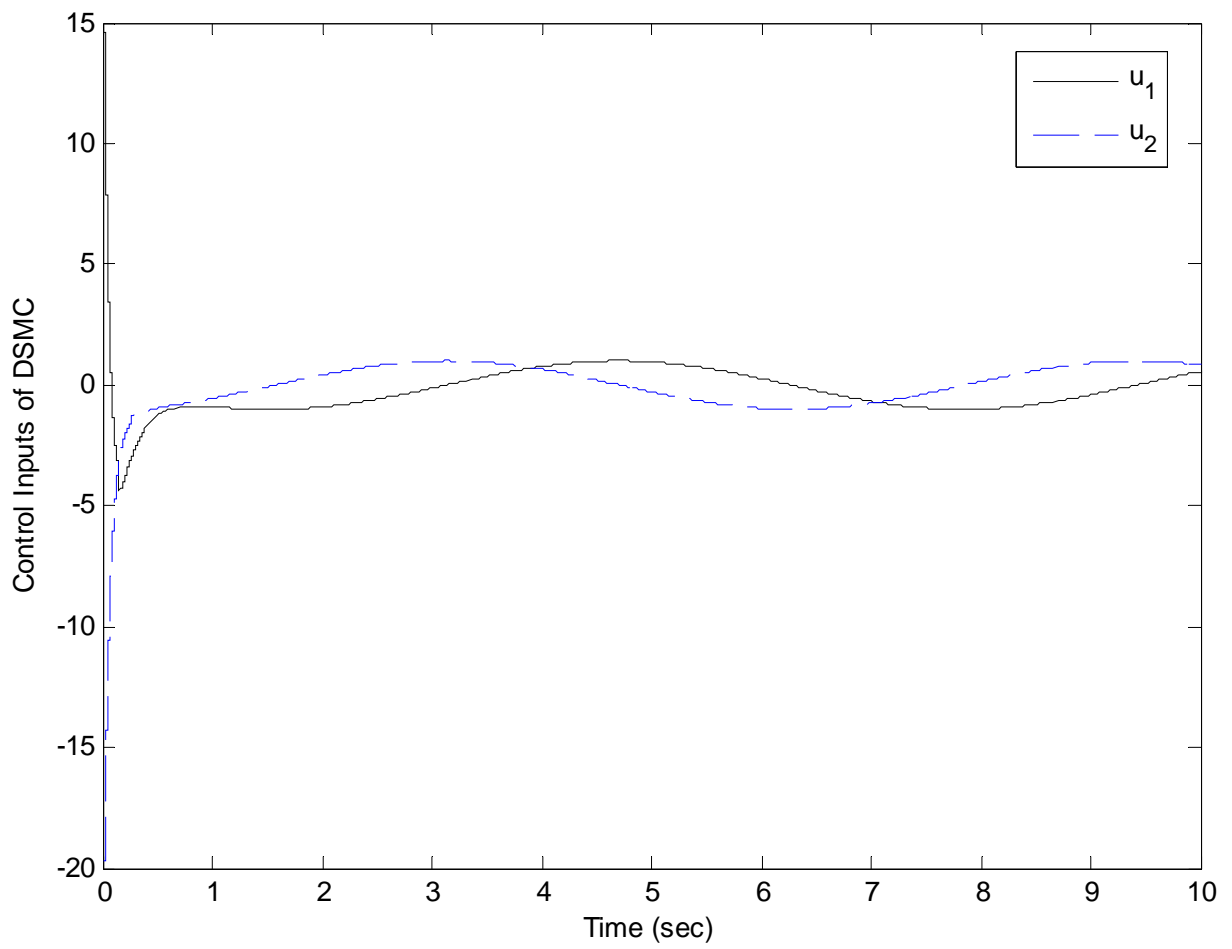


圖4.7 小範圍外部匹配式干擾之DSMC控制輸入模擬結果圖

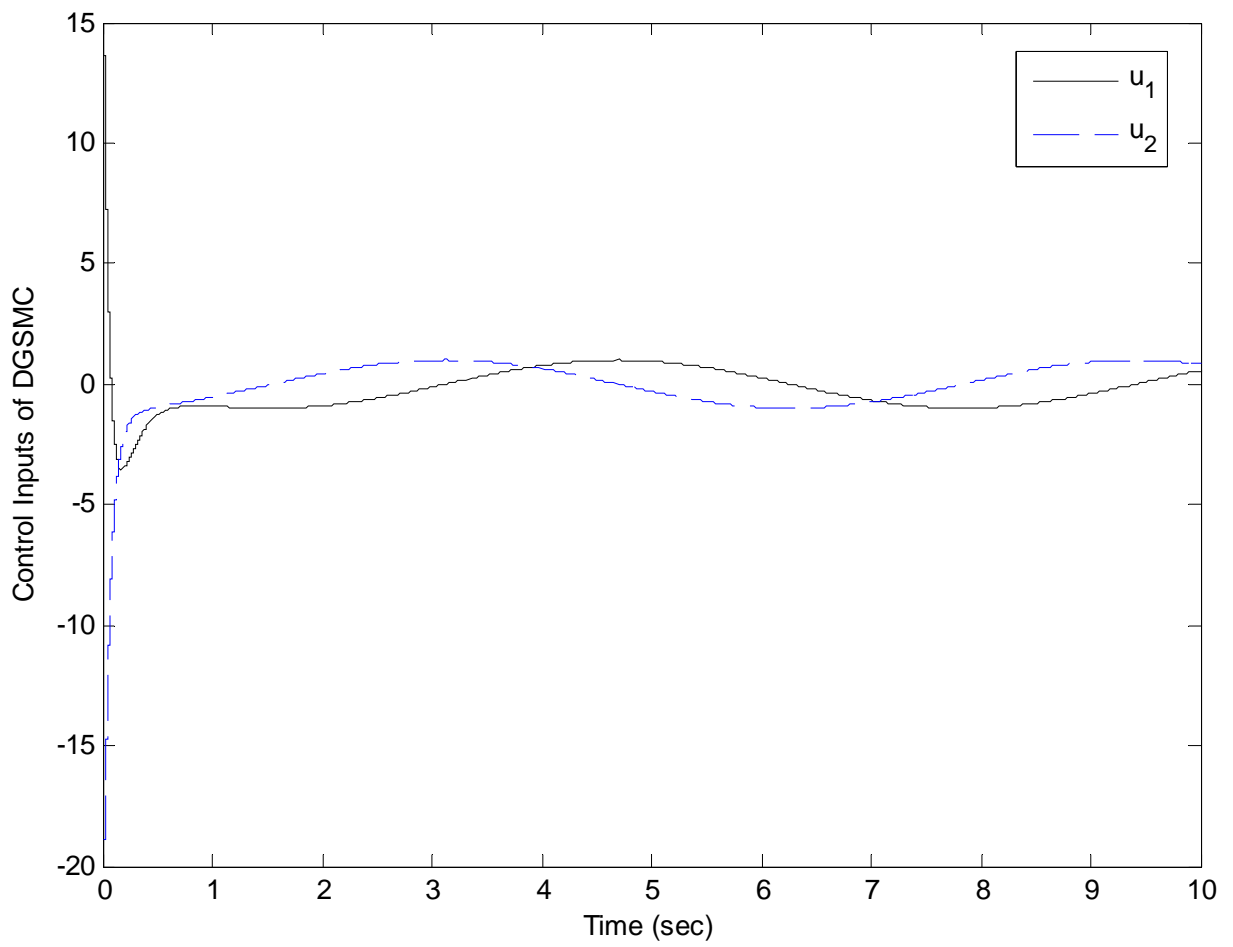


圖4.8 小範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC控制輸入模擬結果圖

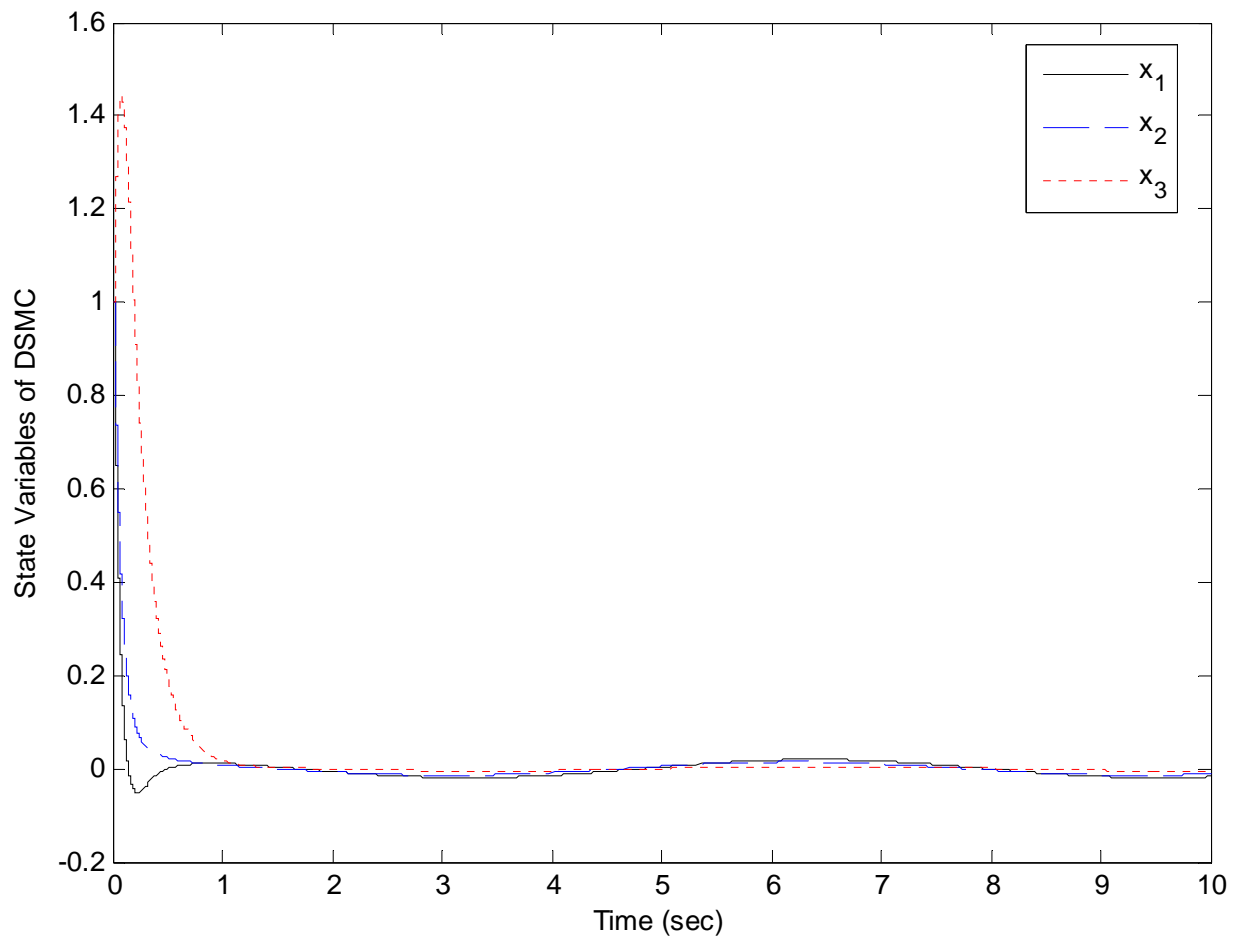


圖4.9 小範圍外部匹配式干擾之DSMC狀態變數模擬結果圖

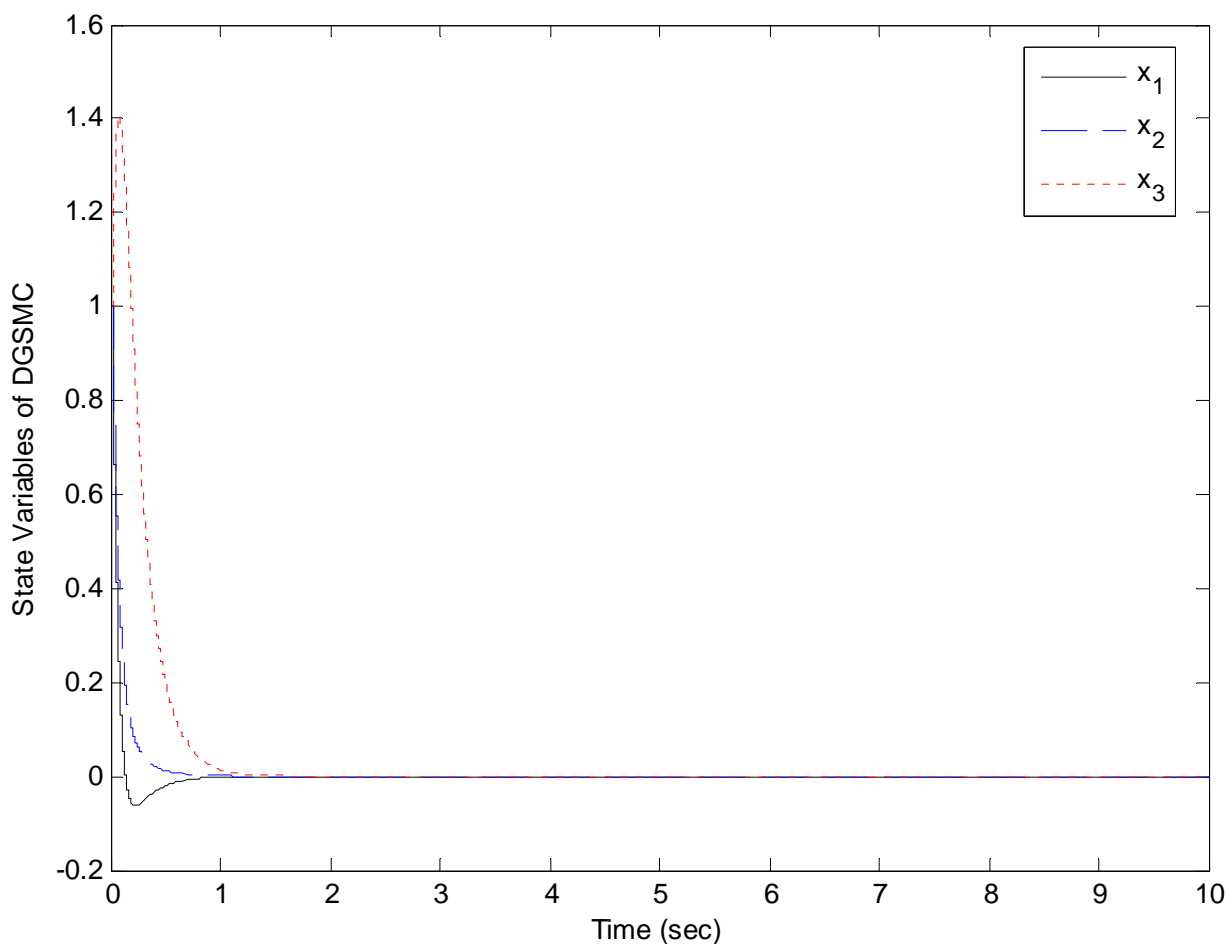


圖4.10 小範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC狀態變數模擬結果圖

最後，針對已知範圍且數值較大的外部匹配式干擾，比較兩者的控制效能。依舊沿用上述數據，但是外部匹配式干擾的振幅增加成為原本的10倍，即(4.13)式，因此得到雜訊干擾的範圍

$$\|w[k]\| \leq 10 \times \left(\left\| \begin{bmatrix} \sin(kT) \\ \cos(kT) \end{bmatrix} \right\| + T \left\| \begin{bmatrix} \cos(kT) \\ -\sin(kT) \end{bmatrix} \right\| \right) = 10.2 \quad (4.14)$$

是原本數值的10倍，所以迫近層邊界值 $\sigma = \|CH\|\delta = 0.3165$ ，與擬態平滑層的邊界值 $(1 + \omega_1)\sigma = (1 + \omega_2)\sigma = 0.5381$ 也都增加10倍；另外，加入的bias為12。模擬結果如圖(4.11)

~ (4.16)。此時明顯看出DSMC因為擬態順滑層變寬，而導致穩態效能變差；相對地，DGeaL2SMC在全部模擬期間滑模函數 s_1 的settling time大約為0.2秒、與理想順滑面的最大偏移量為 4.93×10^{-6} ；滑模函數 s_2 的settling time大約為0.4秒、與理想順滑面的最大偏移量為 9.23×10^{-5} 。其滑模函數軌跡誤差範圍雖然也同樣有大約10倍的增加，但是相對於DSMC，仍然有相當可靠的穩定程度。

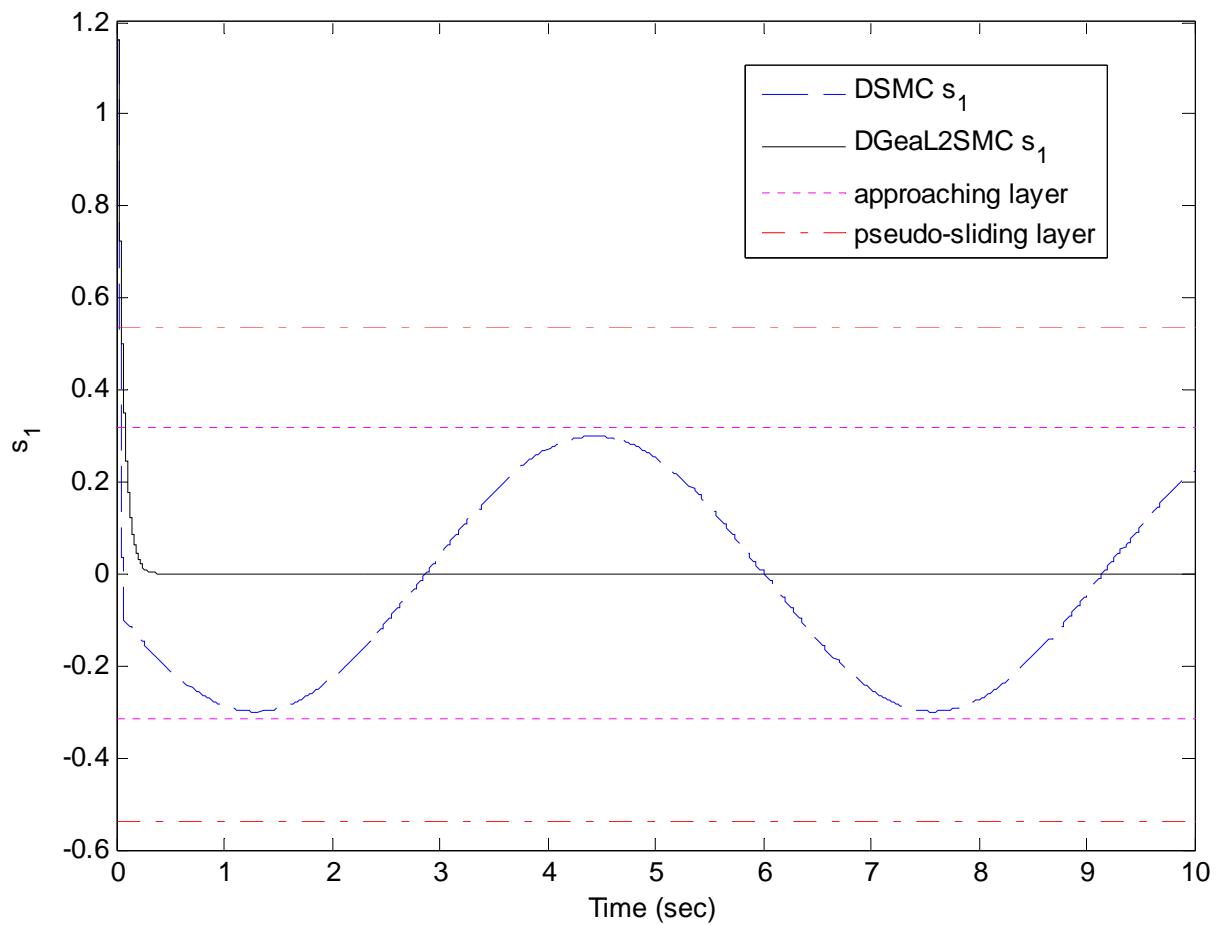


圖4.11 大範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_1 模擬結果比較圖

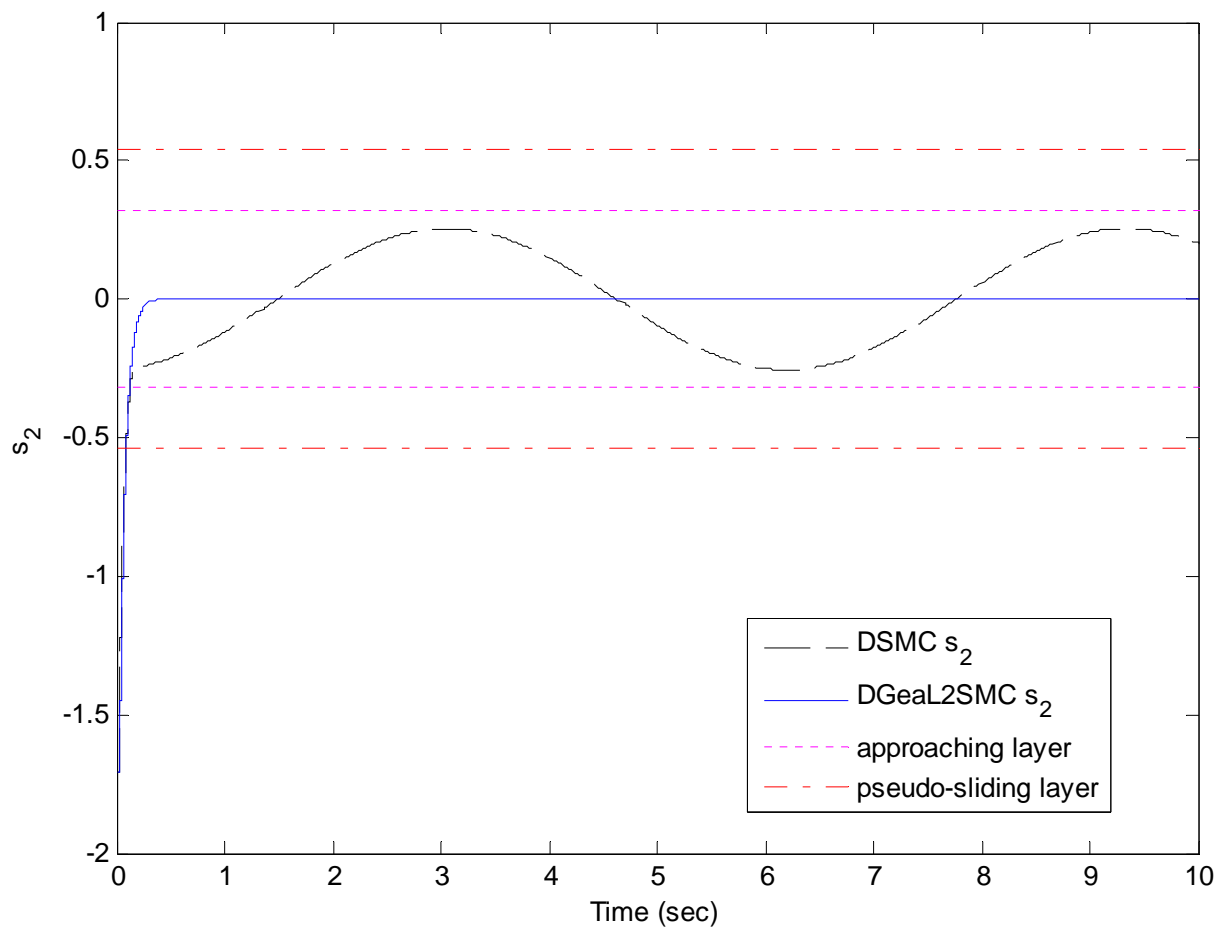


圖4.12 大範圍外部匹配式干擾之順滑函數 s_2 模擬結果比較圖

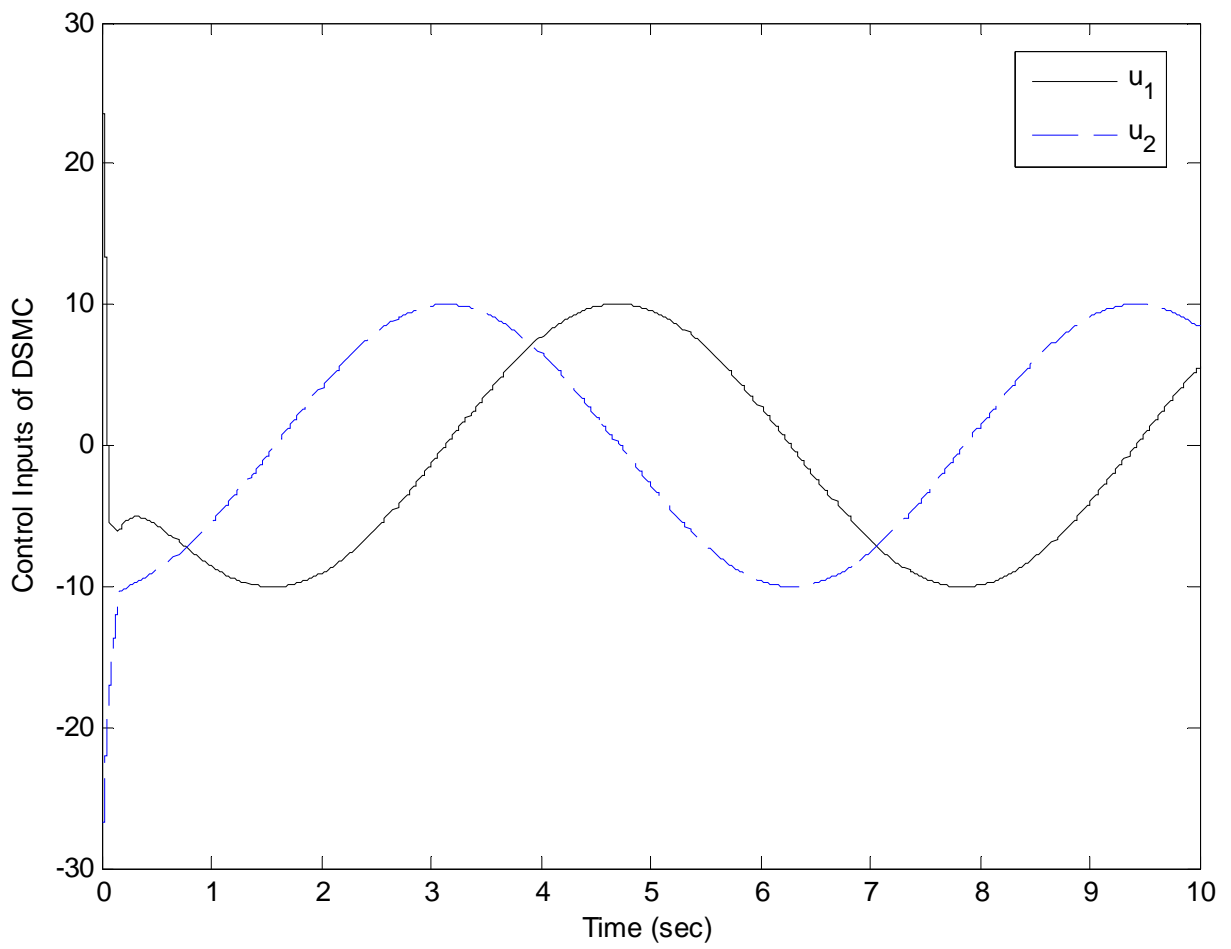


圖4.13 大範圍外部匹配式干擾之DSMC控制輸入模擬結果圖

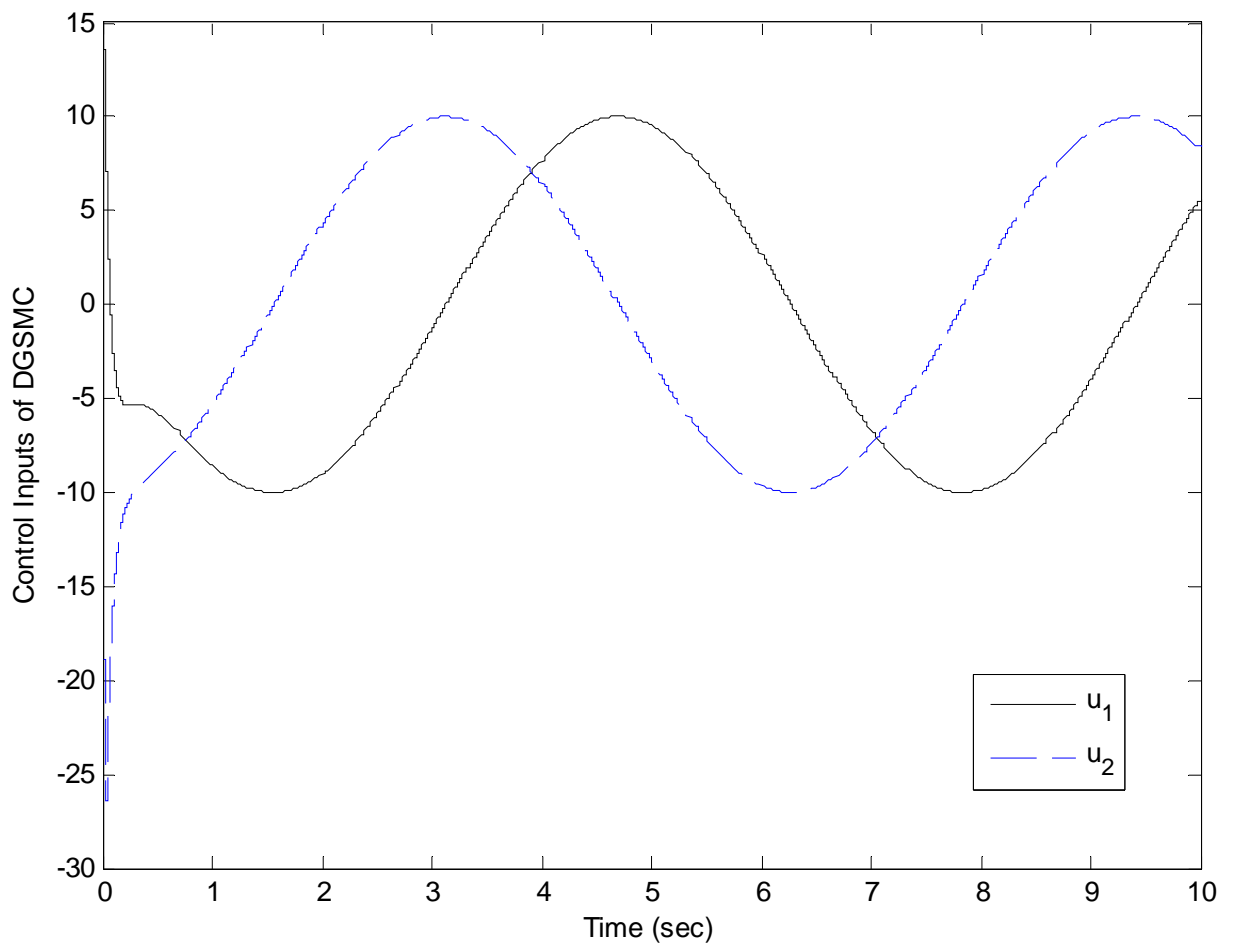


圖4.14 大範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC控制輸入模擬結果圖

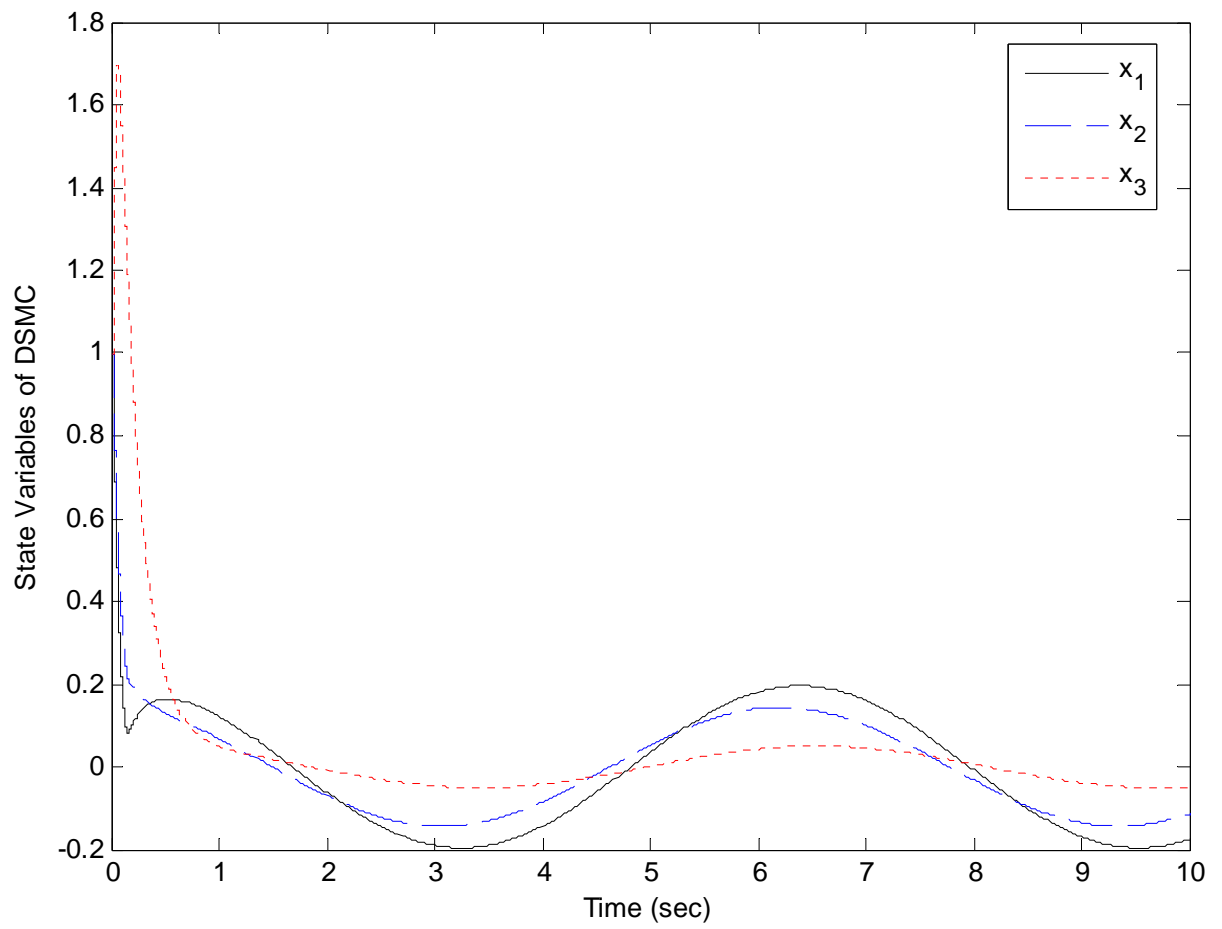


圖4.15 大範圍外部匹配式干擾之DSMC狀態變數模擬結果圖

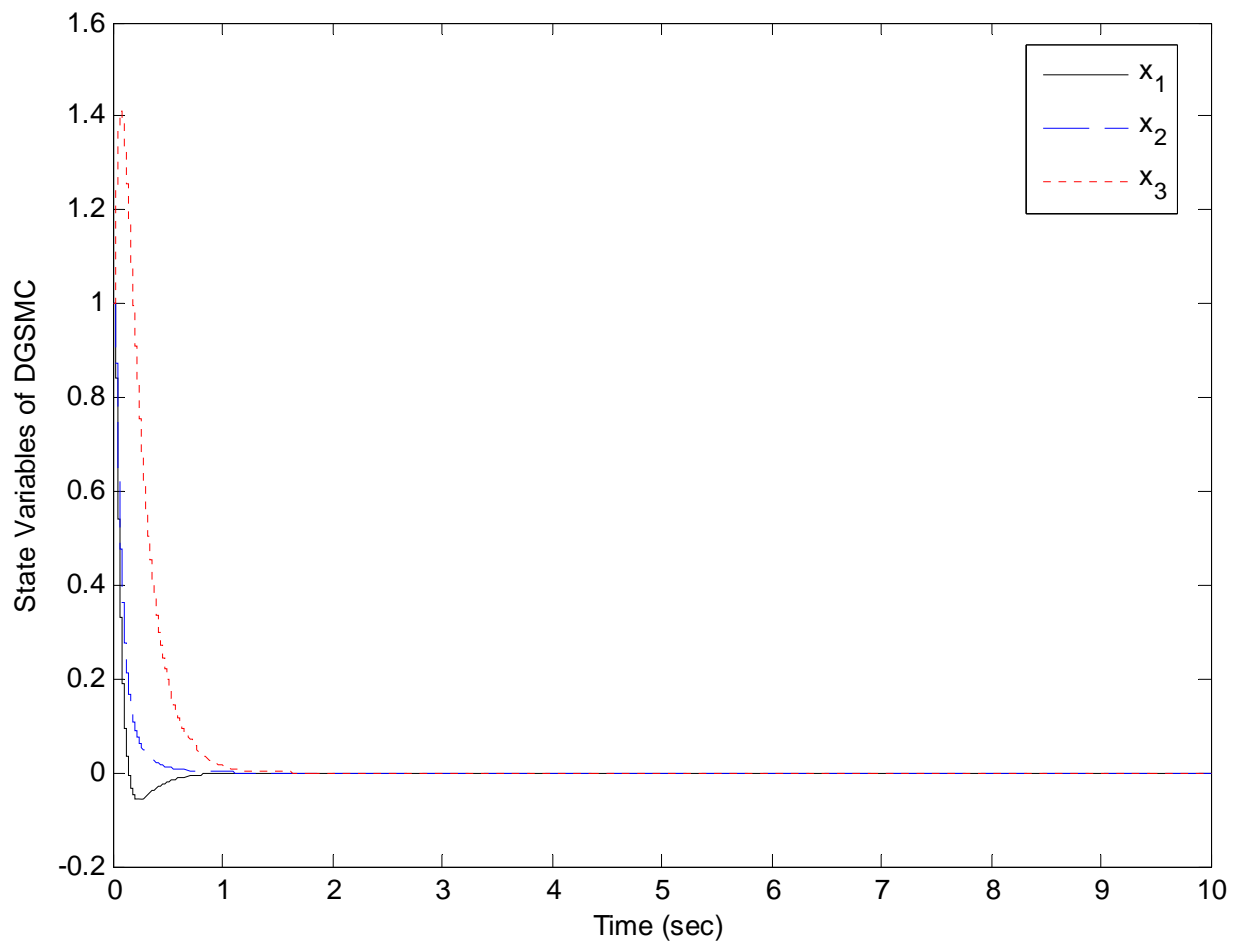


圖4.16 大範圍外部匹配式干擾之DGeaL2SMC狀態變數模擬結果圖

第五章 結論


灰色估測與離散型滑模控制分別都已經歷長時間的發展，但是將兩者結合探討的相關文獻卻不多見，而本文將估測的對象放在匹配式雜訊上更是一項挑戰。

從第二章的推導過程中，不難發現典型的灰色模型GM(1,1)估測值在非指數變化趨勢的區段，尤其是曲線轉折處，有較大的估測誤差出現；即使以PGM21的方法來針對轉折處的調整修正，仍然略顯不足。基於自然界的訊號皆有其變化的趨勢所在，所以利用已知的歷史資料搭配傳統線性近似法則，設法找出一條可能的變化趨勢，作為誤差補償的依據，進而得到令人滿意的估測結果。選擇以Lagrange多項式作為補償的法則，另外一個重要的目的就是其運算簡單，對於微處理器的運算速度不會有太大的拖累。縱使面臨GM(1,1)的自然指數運算可能對處理速度造成不利的影響，藉由忽略指數高次項的簡化處理，其簡化誤差仍然可以根據近似法則的補償而得到應有的修正。

對於離散型滑模控制方面的研究，本文分成已知小範圍雜訊以及未知範圍雜訊等兩種不同狀況來討論。在第三章中，提出利用虛擬根值法與二層概念的設計方式，得到一種新的控制法則，足以對抗已知而且小範圍變化的外部匹配式雜訊。更進一步地在第四章之中，結合線性近似補償的灰色估測器，針對未知範圍的外部匹配式雜訊力求得到更精確的估測，使得滑模控制器能夠根據該估測值事先將可能影響系統的訊號加以處理，達到控制的目的。

不過，本文的相關控制法則皆是建立在足夠精確的系統狀態變數，以及干擾訊號的變化足夠平緩。換言之，狀態變數量測精確與否，對於實際控制器的效能是一項重要的因素；而處理器的運算時間，則會影響到訊號變化的緩急。由於精確的量測器在成本上是一大考量，所以，如何有效而且又能大量節省成本的量測方式，是未來所要面對的課題。至於處理器的運算時間，除了加快晶片的運算時脈之外，如何簡化程式而縮短運算處理週期，或許在運算式的近似簡化過程中，仍需加以思考改變，以配合實際應用。

附錄 A 符號說明

$x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(m)$	GM(1,1)之原始正序列
$x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(m)$	GM(1,1)之AGO序列
$z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(m)$	GM(1,1)之MEAN序列
$\hat{x}^{(0)}(m+1)$	GM(1,1)之估測值
$\hat{x}_e(m+1)$	經過自然指數近似簡化運算之GM(1,1)估測值
$\tilde{x}(m+1), e$	估測誤差與誤差絕對值
$Ln(k)$	 n 階Lagrange多項式
$\hat{x}_{Ln}(m+1)$	n 階Lagrange多項式之推估值
GM11, GM(1,1)	一階單變數灰色模型
PGM21	虛擬二階單變數灰色模型
GM11L2	結合二階Lagrange多項式誤差修正之GM(1,1)
GM11L3	結合三階Lagrange多項式誤差修正之GM(1,1)
GM11eaL2	結合二階Lagrange多項式誤差修正與自然指數近似運算導入之GM(1,1)
GM11eaL3	結合三階Lagrange多項式誤差修正與自然指數近似運算導入之GM(1,1)
$\bar{E}_{Case i}^{GM11}$	採用GM(1,1)估測Case i 數列之平均估測誤差
$\bar{E}_{Case i}^{PGM21}$	採用PGM21估測Case i 數列之平均估測誤差
$\bar{E}_{Case i}^{GM11L2}$	採用GM11L2估測Case i 數列之平均估測誤差
$\bar{E}_{Case i}^{GM11L3}$	採用GM11L3估測Case i 數列之平均估測誤差
$\max E_{Case i}^{GM11}$	採用GM(1,1)估測Case i 數列之最大估測誤差

$\max E_{\text{Case } i}^{\text{PGM21}}$	採用PGM21估測Case i 數列之最大估測誤差
$\max E_{\text{Case } i}^{\text{GM11L2}}$	採用GM11L2估測Case i 數列之最大估測誤差
$\max E_{\text{Case } i}^{\text{GM11L3}}$	採用GM11L3估測Case i 數列之最大估測誤差
s_k	離散滑模函數
V_k	離散Lyapunov函數
A, B	連續時間系統動態方程式之常數矩陣
d	連續時間外不匹配式干擾訊號向量
G, H	A, B 經離散轉換之後的常數矩陣
φ	d 經離散轉換之後的向量
w	匹配式雜訊向量
C	將順滑面作參數化的矩陣
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m}, A$	滑模特徵值及其對角線矩陣
$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \Omega$	虛擬特徵值及其對角線矩陣
u_{eq}	等效控制輸入向量
Q	根據極點指定法所得到的回授增益矩陣
δ	匹配式雜訊的邊界值
v	離散型滑模控制之切換函數
\hat{w}_{GM11}	匹配式雜訊向量之GM(1,1)估測值
\hat{w}	\hat{w}_{GM11} 結合線性近似法則修正之估測值

參考文獻

- [1] J. Ackermann, J. Guldner, W. Sienel, R. Steinhauser, and V. I. Utkin, “Linear and Nonlinear Controller Design for Robust Automatic Steering”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Volume 3, Issue 1, pp. 132 – 143, March 1995.
- [2] V. C. Aitken and H. M. Schwartz, “Towards Robust Discrete-time Sliding Mode Observers”, Proceedings of the 1995 American Control Conference, Volume 5, pp. 3730 – 3734, June 21-23, 1995.
- [3] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai, and V. I. Utkin, “On multi-input chattering-free second-order sliding mode control”, IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 45, Issue 9, pp. 1711 – 1717, Sept. 2000.
- [4] Ting-Cheng Chang, Kun-Li Wen, and Mei-Li You, “The Study of Regression Based on Grey System Theory”, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 5, pp. 4307 – 4311, Oct. 11 – 14, 1998.
- [5] Yon-Ping Chen and Jeang-Lin Chang, “On Discrete Pseudo-Sliding Control”, Journal of Control System and Technology, Vol. 6, No.4, pp. 253 – 257, 1998.
- [6] Yon-Ping Chen and Keh-Tsong Li, “A novel modified grey model”, SICE 2003 Annual Conference, Vol. 1, pp. 890 – 895, 2003.
- [7] Huann-Keng Chiang and Chih-Huang Tseng, ”The grey GM(2,1) integral variable structure controller of synchronous reluctance motor drive”, Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications, Volume 1, pp. 278 – 283, September 2 – 4, 2004.
- [8] Chien-Hsin Chou, "A variable structure controller based on the grey prediction technology", Proceedings of the 2001 American Control Conference, Volume 2, pp. 1505 – 1506, June 25-27, 2001.
- [9] Julong Deng, “Control problems of grey systems”, System & Control Letters, Vol. 1, pp. 288 – 294, 1982.
- [10] Julong Deng, “Introduction of grey system theory”, The Journal of Grey System, Vol. 1, No. 1, pp. 1 – 24, 1989.

- [11] Y. Dote and R. G. Hoft, "Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drivers", presented at the Industrial Applications Society Annual Meeting, Cincinnati, OH, 1980.
- [12] O. M. E. Elghezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach", *International Journal of Control*, Vol. 38, pp. 657 – 671, 1983.
- [13] A. F. Filippov, "Differential Equation with Discontinuous Right-sides", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1988.
- [14] Katsuhisa Furuta, "Sliding mode control of a discrete system", *System & Control Letters*, Vol. 4, pp. 145 – 152, 1990.
- [15] Weibing Gao, Yufu Wang, and Abdollah Homaifa, "Discrete-Time Variable Structure Control Systems", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 42, No. 2, pp. 117 – 122, April 1995.
- [16] M. H. Hamza and M. A. Sheirah, "Polynomial Extrapolation in Sampled-Data Control Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, Issue 1, pp. 102 – 103, Feb. 1971.
- [17] İbrahim Haskara, Ümit Özgiiner, and Vadim Utkin, "Variable Structure Control for Uncertain Sampled Data Systems", *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, Volume 4, pp. 3226 – 3231, December 10 – 12, 1997.
- [18] Che-Chiang Hsu and Chia-Yon Chen, "Applications of improved grey prediction model for power demand forecasting", *Energy Conversion and Management*, Vol. 44, pp. 2241 – 2249, 2003.
- [19] Yo-Ping Huang and Tai-Min Yu, "The hybrid grey-based models for temperature prediction", *IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics*, Part B, Vol. 27, Issue 2, pp. 284 – 292, April 1997.
- [20] P. Kachroo, "Existence of solutions to a class of nonlinear convergent chattering-free sliding mode control systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Volume 44, Issue 8, pp. 1620 – 1624, Aug. 1999.
- [21] A. J. Koshkouei and A. S. I. Zinober, "Sliding mode state observers for SISO linear discrete-time systems", *UKACC International Conference on Control '96*, Volume 2, pp. 837 – 842, Sept. 2-5, 1996.
- [22] Hsing-Chia Kuo and Li-Jen Wu, "Prediction on heat-affected zone using Grey theory", *Journal of Materials Processing technology*, Vol. 120, Issue 1 – 3, pp. 151 – 168, January 15, 2002.

- [23] C. M. Kwan, "On Variable Structure Output Feedback Controllers", IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 41, Issue 11, pp. 1691 – 1693, Nov. 1996.
- [24] Yong Liu, "Switching Observer Design for Uncertain Nonlinear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 42, Issue 12, pp. 1699 – 1703, Dec. 1997.
- [25] Hung-Ching Lu, "Grey prediction approach for designing grey sliding mode controller", 2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Volume 1, pp. 403 – 408, Oct. 10-13, 2004.
- [26] M. Lu and Robert N. K. Loh, "Modeling, design and implementation of discrete sliding mode control for an engine idle speed control system", Proceedings of the 2002 American Control Conference, Volume 3, pp. 1984 – 1989, May 8-10, 2002.
- [27] R. T. Lyle and E. A. Misawa, "Discrete Time Variable Structure Control and Disturbance Observer for Disk Drives", Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications, pp. 704 – 708, Sept. 25-27, 2000.
- [28] R. A. McCann, M. S. Islam and I. Husain, "Application of a Sliding-Mode Observer for Position and Speed Estimation in Switched Reluctance Motor Drives", IEEE Transactions on Industry Applications, Volume 37, Issue 1, pp. 51 – 58, Jan.- Feb. 2001.
- [29] C. Milosavljevic, "General conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems", Automatic Remote Control, Vol. 46, pp. 307 – 314, 1985.
- [30] E. A. Misawa, "Observer-based Discrete-Time Sliding Mode Control with Computational Time Delay : The Linear Case", Proceedings of the 1995 American Control Conference, Volume 2, pp. 1323 – 1327, June 21-23, 1995.
- [31] Honghua Pan, Jiasheng Hu, and Dehu Wang, "Study of Predictive Functional Control Algorithm based on Grey System Model", The Fourth International Conference on Control and Automation (ICCA'03), pp. 380 – 384, June 10 – 12, 2003.
- [32] Sami Z. Sarpturk, Yorgo Istefanopulos, and Okyay Kaynak, "On the Stability of Discrete-Time Sliding Mode Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 10, pp. 930 – 932, October 1987.
- [33] I. A. Shkolnikov, Y. B. Shtessel, and M. D. J. Brown, "A second-order smooth sliding mode control", Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Volume 3, pp. 2803 – 2808, Dec. 4 – 7, 2001.
- [34] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991.

- [35] S. K. Spurgeon, “Hyperplane design techniques for discrete-time variable structure control systems”, International Journal of Control, Vol. 55, No. 2, pp. 445 – 456, 1992.
- [36] Shun-Feng Su, Chan-Ben Lin, and Yen-Tseng Hsu, “A High Precision Global Prediction Approach Based on Local Prediction Approaches”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part C: Application and Reviews, Vol. 32, No. 4, pp. 416 – 425, Nov. 2002.
- [37] W. C. Su, S. V. Drakunov, and U. Ozguner, “Constructing discontinuity surfaces for variable structure system: a Lyapunov approach”, Automatica, Vol. 32, pp. 925 – 928, 1996.
- [38] Vadim I. Utkin, “Variable Structure Systems with Sliding Modes”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, April 1977. Page(s): 212 – 222.
- [39] Vadim I. Utkin, “Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems”, Moscow: Nauka, 1974 (in Russian); published in English by Mir, Moscow, 1978.
- [40] Vadim I. Utkin and K. D. Young, “Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems”, Automation Remote Control, Vol. 39, pp. 1466 – 1470, 1979.
- [41] K. C. Veluvolu, Y. C. Soh, W. Cao, and Z. Y. Liu, “Discrete-time Sliding Mode Observer Design for a Class of Uncertain Nonlinear Systems”, Proceedings of the 2006 American Control Conference, pp. 2605 – 2610, June 14-16, 2006.
- [42] Xuemeng Wang and Xiaomei Wu, “Application of grey system models to rural economy analysis in China”, Proceedings of First International Symposium on Uncertainty modeling and Analysis, pp. 511 – 516, December 1990.
- [43] Dong-Feng Wang, Pu Han, and Hong-Jun Liu, “Typical Grey Prediction Control Methods and Simulation Studies”, Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Xi’an, pp. 513 – 518, November 2 – 5, 2003.
- [44] Ziliang Wang and Sifeng Liu, “Trend Testing of Grey Dynamic Models”, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 3, pp. 2438 – 2442, Oct. 10 – 13, 2004.
- [45] J. H. Wu, “A two-layer strategy applied to discrete sliding-mode control”, National Chiao Tung University, Thesis, 1994.
- [46] Albert W. L. Yao, S. C. Chi, and J. H. Chen, “An improved grey-based approach for electricity demand forecasting”, Electric Power Systems Research, Vol. 67, Issue 3, pp. 217 – 224, December 2003.

- [47] Young, Kar-Keung, Kokotovic, P., and Utkin, V. I., “A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 22, Issue 6, pp. 931 – 938, December 1977.
- [48] S. H. Zak and S. Hui, “Output feedback variable structure controllers and state estimators for uncertain / nonlinear dynamic systems”, IEE Proceedings-Control Theory and Applications, Volume 140, Issue 1, pp. 41 – 50, January 1993.
- [49] Christopher J. Zarowski, “Interpolation”, An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers, John Wiley & Sons, Inc., Published Online, pp. 251 – 289, April 27, 2004.
- [50] 溫坤禮, 黃宜豐, 陳繁雄, 李元秉, 連志峰, 賴家瑞, 「灰預測原理與應用」, 全華科技圖書股份有限公司, 2000。
- [51] 鄧聚龍, 「灰理論中的灰信息包」, 高立圖書有限公司, 2002。
- [52] 陳永平、張浚林, 「可變結構控制設計(修訂版)」, 全華科技圖書股份有限公司, 91年9月。

