

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究

A Study of Applying Info-technology
to Mathematical Gifted High School Students

研究生：李吉彬

指導教授：黃大原 教授

中華民國九十五年六月

資訊科技融入高中數學資優教育之實務研究
A Study of Applying Info-technology
to Mathematical Gifted High School Students

研 究 生：李吉彬

Student：Chi-Pin Lee

指 導 教 授：黃大原

Advisor：Tayuan Huang

國 立 交 通 大 學
理 學 院 網 路 學 習 學 程
碩 士 論 文

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem with a gear-like border. Inside the circle, there is a stylized building and the year '1959'. The text 'A Thesis' is written across the center of the logo.

A Thesis
Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Degree Program of E-Learning

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究

學生：李吉彬

指導教授：黃大原

國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班

摘要

資訊科技融入各科教學已是時代趨勢，高中數學資優教育中的加速教育與充實教育更是需要資訊科技的輔助，本研究主要針對加速教育與充實教育此二方面，作資訊科技融入教學設計的探討。

加速教育部分，運用資訊科技作教學素材的開發，以提升教學素材品質與學生學習效率，包含平面環境下與立體環境下的教學素材開發。範圍包括積化和差與餘弦定理的動態圖說證明(Dynamic Proof without Words)，讓學生在正規嚴謹的數學證明之外，多些不同的觀點去體會數學之美；並利用 MathPS 提供的準確定位與按鈕式互動功能，實作了排容原理等重要觀念。立體環境下的教學素材開發，以 Cabri-3D 為主要開發工具，用動態立體幾何的方式，模擬呈現立體圖形，協助學生培養清楚的空間概念。

充實教育部分，在 GSP 動態平面幾何環境下，引導學生作專題導向式學習研究，選定的題材是圓錐曲線，讓學生透過自己動手實作，對圓錐曲線的各種基本性質有更深刻的體會，再探討圓錐曲線的各種進階性質。並將圓錐曲線的性質應用到面積平分的研究，進而推廣到體積平分。體積平分部份改以 Maple 軟體環境下作立體曲面的呈現。

關鍵字：數學簡報系統、動態幾何、專題導向式研究

A Study of Applying Info-technology to Mathematical Gifted High School Students

student : Chi-Pin Lee

Advisors: Dr. Tayuan Huang

Degree Program of e-Learning
National Chiao Tung University

Abstract

It is an inevitable tendency to apply info-technology to the school teaching. This is especially true to mathematical gifted education in high schools. With the assistance of info-technology, it becomes easy to accelerate the teaching programs and enrich the teaching materials. In this thesis, there are particular discussions referring to how info-technology contributes to the acceleration and enrichment in mathematical gifted education.

To accelerate learn programs, the application of some softwares such as PowerPoint with MathPS, GSP, Cabri-3D are recommended. With these softwares, mathematics teaching materials are not only presented on plane but also displayed in three-dimensional pictures, which no doubt enhances the quality of teaching materials and students' learning efficiency. For example, in addition to strict mathematical proofs, Dynamic Proof without Words of Product-Sum/Difference Identities enables learners to appreciate the insights of mathematics from various view points. Moreover, the mighty interactive functions in MathPS make it easier to illustrate some important concepts such as inclusion-exclusion principle, while Cabri-3D can help students to build clear ideas about dimension through dynamic solid geometry.

As for the enrichment of teaching materials, GSP is a quite powerful dynamic geometry software to encourage students to explore projects. For instance, students would understand conic sections better by sketching the geometric patterns on their own with the help of this software. If students gain better understanding about the properties of conic sections, they could go further to such categories as area bisection and volume bisection. Besides, by using Maple, students can even sketch solid geometric patterns to help themselves comprehend the solid curves in volume bisection.

Keywords: MathPS, dynamic geometry, project-based study

誌謝

論文能夠順利完成，首先最要感謝指導教授黃大原老師，兩年來辛苦指導與費心指正，不只給予我許多寶貴的建議，並讓我學會從事研究的態度與方法，使我獲益良多，在此致上最誠摯的謝忱。感謝陳明璋老師引領我們在資訊領域成長，他靈活的技術、超強的研發功力、對軟體系統的熟悉，充分利用各種軟體的優勢，使資訊科技完美融入數學教學，讓我學到許多資訊上的實用教學技術。

感謝專班主任莊祚敏老師對我們的諄諄教誨，及專班所有教授認真且精彩的課程內容，讓我入寶山滿載而歸。感謝清華大學全任重老師引領我進入動態立體幾何的世界，讓我在幾何教學方面多所成長。感謝交大應數所李榮耀教授對論文的指導與建議。感謝中原大學袁媛老師帶領我們進入數學教育的領域，提供許多寶貴的教材與資訊，指導我們從學生學習的角度，來思考教學的方向與素材設計的內容。感謝白啟光教授帶領我們順利突破在 Maple 所遇到的瓶頸。

感謝台中一中蔡炳坤校長與所有同仁，對我的支持與關懷，讓我能在工作之餘順利完成進修。感謝政樺、主安、心怡及專班所有同學一起陪我走過這段忙碌卻充實的日子。尤其每當開車往返台中與新竹之間時，彼此的討論切磋讓我獲得許多寶貴的意見。

由衷地感謝我的家人，尤其是愛妻櫻珍的體諒與支持，讓我無後顧之憂而能專心完成課業；還有我疏於照顧的兩位小寶貝—冠蓁、冠穎，因為妳們的乖巧懂事，讓為人父的我得以順利完成學業。以及我親愛的父母親、岳父母及所有家人們，你們都是支持我完成進修的幕後功臣。

二年的研究所生涯中，要感謝的人很多，無法在此一一表達，謹向所有關心我、協助我的人，表達最誠摯的謝意。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	v
一、	緒論	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究動機與目的	2
1.3	研究方法	2
1.4	研究範圍與限制	2
1.5	論文結構	3
二、	文獻探討	4
2.1	資優教育	4
2.2	資訊科技融入教學	5
2.3	數學簡報系統MathPS	6
2.4	相關軟體簡介	8
三、	平面環境下的教學素材開發	9
3.1	積化和差	10
3.2	餘弦定理(MathPS版)	17
3.3	餘弦定理(GSP版)	23
3.4	排容原理	28
3.5	複數的 n 次方根	32
四、	立體環境下的教學素材開發	37
4.1	常見立體觀念	38
4.2	三垂線定理	44
4.3	空間中的歪斜線	46
4.4	正四面體的高	48
4.5	圓錐截痕	49
五、	資訊科技輔助專題導向式學習	55
5.1	圓錐曲線的基本性質	56
5.2	圓錐曲線的配極	60
5.3	圓錐曲線與直線的交點	64
5.4	決定圓錐曲線的條件	66
5.5	多邊形面積平分	69
5.6	四面體體積平分	77
參考文獻	88
附錄	90

圖目錄

圖 3.1.1 積化和差(一).....	11
圖 3.1.2 積化和差(二).....	11
圖 3.1.3 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(6).....	12
圖 3.1.4 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(7)~(14).....	13
圖 3.1.5 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ 圖解步驟(1)~(12).....	14
圖 3.1.6 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(12).....	15
圖 3.1.7 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(12).....	16
圖 3.2.1 餘弦定理(一).....	17
圖 3.2.2 餘弦定理(二).....	17
圖 3.2.3 餘弦定理圖解步驟(1)~(11).....	18
圖 3.2.4 餘弦定理圖解步驟(12)~(23).....	19
圖 3.2.5 餘弦定理圖解步驟(24)~(35).....	20
圖 3.2.6 餘弦定理圖解步驟(36)~(47).....	21
圖 3.2.7 餘弦定理圖解步驟(48)~(53).....	22
圖 3.3.1 餘弦定理(一).....	23
圖 3.3.2 餘弦定理(二).....	23
圖 3.3.3 餘弦定理圖解步驟(1)~(12).....	24
圖 3.3.4 餘弦定理圖解步驟(13)~(24).....	25
圖 3.3.5 餘弦定理圖解步驟(25)~(36).....	26
圖 3.3.6 餘弦定理圖解步驟(37)~(44).....	27
圖 3.4.1 二個事件的排容原理圖解步驟(1)~(6).....	29
圖 3.4.2 三個事件的排容原理圖解步驟(1)~(10).....	30
圖 3.5.1 一的一次方根 $x^1 = 1$	32
圖 3.5.2 一的二次方根 $x^2 = 1$	32
圖 3.5.3 一的三次方根 $x^3 = 1$	32
圖 3.5.4 一的四次方根 $x^4 = 1$	32
圖 3.5.5 一的五次方根 $x^5 = 1$	33
圖 3.5.6 一的六次方根 $x^6 = 1$	33
圖 3.5.7 一與二的五次方根.....	34
圖 3.5.8 二的五次方根第 1 根.....	34
圖 3.5.9 二的五次方根第 2 根.....	34
圖 3.5.10 二的五次方根第 3 根.....	34
圖 3.5.11 二的五次方根第 4 根.....	34
圖 3.5.12 二的五次方根第 5 根.....	34
圖 3.5.13 二的五次方根所成正五邊形.....	34
圖 3.5.14 求 1 的五次方根.....	35
圖 3.5.15 求 2 的五次方根.....	35
圖 3.5.16 求 $-1 + \sqrt{3}i$ 的五次方根.....	35
圖 4.1.1 正立方體.....	38

圖 4.1.2 平面截正立方體.....	38
圖 4.1.3 當 $0 < R < \sqrt{2}$ 交點 0 個.....	39
圖 4.1.4 當 $R = \sqrt{2}$ 交點 12 個.....	39
圖 4.1.5 當 $\sqrt{2} < R < \sqrt{3}$ 交點 24 個.....	39
圖 4.1.6 當 $R = \sqrt{3}$ 交點 8 個.....	39
圖 4.1.7 當 $R > \sqrt{3}$ 交點 0 個.....	39
圖 4.1.8 平面截正立方體的截面為四邊形.....	40
圖 4.1.9 平面截正立方體的截面為六邊形.....	40
圖 4.1.10 正八面體(一).....	41
圖 4.1.11 正八面體(二).....	41
圖 4.1.12 正八面體(三).....	41
圖 4.1.13 四角錐展開圖.....	42
圖 4.1.14 四角錐.....	42
圖 4.1.15 四角錐的高.....	42
圖 4.1.16 正立方體.....	43
圖 4.1.17 四面體.....	43
圖 4.1.18 四面體.....	43
圖 4.2.1 三垂線定理.....	44
圖 4.2.2 作輔助線.....	44
圖 4.2.3 側視圖.....	44
圖 4.2.4 後視圖.....	44
圖 4.2.5 紅三角形全等.....	44
圖 4.2.6 藍三角形全等.....	44
圖 4.2.7 綠三角形全等.....	45
圖 4.2.8 三個垂直.....	45
圖 4.3.1 歪斜線(一).....	46
圖 4.3.2 歪斜線(二).....	46
圖 4.4.1 正四面體底面中線.....	48
圖 4.4.2 正四面體的高.....	48
圖 4.4.3 正四面體內切球.....	48
圖 4.4.4 正四面體外接球.....	48
圖 4.4.5 正四面體分解圖.....	48
圖 4.4.6 正四面體分解圖.....	48
圖 4.5.1 圓錐截痕 橢圓模型.....	49
圖 4.5.2 圓錐截痕 雙曲線模型.....	49
圖 4.5.3 圓錐截痕 拋物線模型.....	49
圖 4.5.4 平面截圓錐.....	50
圖 4.5.5 作二切球.....	50
圖 4.5.6 切線段軌跡.....	50
圖 4.5.7 切線段等距.....	50
圖 4.5.8 距離和定值.....	50
圖 4.5.9 橢圓定義.....	50
圖 4.5.10 平面截圓錐.....	51
圖 4.5.11 作二切球.....	51
圖 4.5.12 切線段軌跡.....	51
圖 4.5.13 切線段等距.....	51
圖 4.5.14 距離差定值.....	51
圖 4.5.15 雙曲線定義.....	51
圖 4.5.16 平面截圓錐.....	52
圖 4.5.17 作切球.....	52
圖 4.5.18 切線段軌跡.....	52

圖 4.5.19 切線段等長.....	52
圖 4.5.20 作準線.....	52
圖 4.5.21 過P作垂足.....	52
圖 4.5.22 同位角相等.....	53
圖 4.5.23 同位角相等.....	53
圖 4.5.24 $d(P, F) = d(P, L)$	53
圖 4.5.25 拋物線定義.....	53
圖 4.5.26 平面截圓柱.....	54
圖 4.5.27 作二切球.....	54
圖 4.5.28 切線段軌跡.....	54
圖 4.5.29 切線段等距.....	54
圖 4.5.30 距離和相等.....	54
圖 4.5.31 距離和定值.....	54
圖 4.5.32 橢圓定義.....	54
圖 5.1.1 拋物線定義.....	57
圖 5.1.2 拋物線光學性質.....	57
圖 5.1.3 拋物線切線.....	57
圖 5.1.4 拋物線切線作圖.....	57
圖 5.1.5 橢圓定義.....	58
圖 5.1.6 橢圓光學性質.....	58
圖 5.1.7 橢圓切線.....	58
圖 5.1.8 橢圓切線作圖.....	58
圖 5.1.9 雙曲線定義.....	59
圖 5.1.10 雙曲線光學性質.....	59
圖 5.1.11 雙曲線切線.....	59
圖 5.1.12 雙曲線切線作圖.....	59
圖 5.2.1 圓外點反演.....	60
圖 5.2.2 圓內點反演.....	60
圖 5.2.3 圓外點配極軸.....	60
圖 5.2.4 圓內點配極軸.....	60
圖 5.2.5 線配極點(一).....	61
圖 5.2.6 線配極點(二).....	61
圖 5.2.7 圓錐曲線的極軸(內).....	62
圖 5.2.8 圓錐曲線的極軸(外).....	62
圖 5.2.9 極軸(曲線上點).....	63
圖 5.2.10 極軸(曲線外點).....	63
圖 5.2.11 極軸(曲線內點).....	63
圖 5.3.1 伸縮求橢圓與直線交點.....	64
圖 5.3.2 配極求橢圓與直線交點.....	64
圖 5.3.3 配極求雙曲線與直線交點.....	65
圖 5.3.4 配極求拋物線與直線交點.....	65
圖 5.4.1 PQR 共線.....	66
圖 5.4.2 作定點 P	66
圖 5.4.3 作動線(PQR 所在直線).....	66
圖 5.4.4 作動點 Q	66
圖 5.4.5 作動點 R	67
圖 5.4.6 作動點 B_3	67
圖 5.4.7 拋物線的三切線.....	68
圖 5.4.8 斜拋物線的三切線.....	68
圖 5.5.1 平行作面積平分線.....	69
圖 5.5.2 面積平分線軌跡.....	69



圖 5.5.3 面積平分線軌跡.....	70
圖 5.5.4 解析幾何求面積平分線.....	70
圖 5.5.5 面積平分包絡曲線.....	72
圖 5.5.6 三角形內部面積平分包絡曲線.....	72
圖 5.5.7 曲線內側單邊面積平分線.....	73
圖 5.5.8 曲線內側全部面積平分線.....	73
圖 5.5.9 曲線外側面積平分線.....	73
圖 5.5.10 不平行線段包絡軌跡.....	74
圖 5.5.11 作輔助線成三角形.....	74
圖 5.5.12 平行線段包絡軌跡.....	75
圖 5.5.13 降低邊數.....	76
圖 5.5.14 凸四邊形面積平分線.....	76
圖 5.6.1 四面體 1-3 分.....	79
圖 5.6.2 曲面 $xyz = \frac{1}{54}$ 的圖形.....	80
圖 5.6.3 雙曲面.....	80
圖 5.6.4 單片包絡曲面.....	80
圖 5.6.5 四片包絡曲面.....	80
圖 5.6.6 斜三角柱.....	82
圖 5.6.7 四面體 2-2 分.....	82
圖 5.6.8 第一片包絡曲面.....	83
圖 5.6.9 第二片包絡曲面.....	83
圖 5.6.10 第三片包絡曲面.....	83
圖 5.6.11 三片包絡曲面.....	83
圖 5.6.12 七片包絡曲面.....	83
圖 5.6.13 七片包絡曲面.....	83
圖 5.6.14 包絡曲面邊線.....	85
圖 5.6.15 包絡曲面邊線.....	86
圖 5.6.16 正四面體的包絡曲面.....	86



一、 緒論

本章旨在說明研究的背景、研究動機、研究目的、研究方法及研究範圍與限制，並概略說明整個論文的結構。

1.1 研究背景

在 1960 年代，美國伊利諾大學發展 PLATO(Programmed Logic for Automatic Teaching Operation)系統，首度將電腦應用帶入教育，開啟了電腦輔助教學(Computer Assisted Instruction, CAI)的時代(李映良，2005)。隨著時代逐漸演變，傳統的教學模式，已經無法符合現代教學的需求。教育也漸漸失去獨立思考的啟發，使得學習數學變成以追求考試高分為目的，而不是以互動討論來研究數學。學生僅能單方面自教師的講述中獲得數學知識，與教師之互動不足，讓學習數學變得越來越枯燥乏味，而為了應付考試，學生被迫背誦大量的公式，對數學逐漸失去興趣。因此，將資訊科技融入數學教學以提升教學品質與提高學生對數學的興趣，是今後必然之趨勢。

對教師而言，隨著資訊科技的快速變遷，電腦技術不斷更新，再加上知識的多元化、多量化，確實為教育界帶來很大的影響。由於資訊科技的發達，使得數學的實作學習活動除了紙筆運算、摺紙活動(幾何作圖)、模型教具外，還可利用動態幾何系統與電腦代數系統來進行數學實驗。NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)也指出數學的教與學當中，電腦是不可或缺的，它不但影響了數學教學的方式，也提高了學生的學習能力，因此 NCTM 建議各層級的老師教導數學技能與概念時，為了讓學生達到有效的學習，都應該使用科技的工具，NCTM 並提到電腦繪圖技術，使我們能更便利的探討代數與幾何的關連性(郭亮偉，2005)。而資優教育在學習的速度、深度、廣度各方面的需求更是迫切，更需要資訊科技融入數學教學，以協助課程的發展與教材的開發。

在資訊科技融入數學的教學上，經常利用 GSP、Cabri-3D、Cabri Geometry II plus、Maple、Flash、Excel、...等軟體進行輔助教學。為了學習新的軟體來輔助教學，教師常需配合時代潮流，不斷學習新的軟體技術，但當千辛萬苦熟練一套軟體之後，可能已經推出另一套更新的軟體，教師只得又開始學習另一套新的軟體，這樣的情形讓教師疲於奔命，也嚴重影響教師使用資訊科技融入教學的意願。但現在情形逐漸改觀，因為 Microsoft 的 Office 套裝軟體內含的 PowerPoint 本身是一個商業簡報軟體，簡報軟體的特點就在於視覺上多樣化的呈現，而且新的版本又增加了互動式呈現的功能，這些特點便可利用成為課堂上教學用的工具。再者 PowerPoint 的普及率高、製作成本低，對於一般非資訊專業的教師而言，可以無需花費太多心力在軟體的學習與使用上，只需專心於教學素材專業領域上的開發，即可完成互動式電腦輔助教學媒體。因此，PowerPoint 已成為目前眾多的電腦輔助教學軟體中一個很不錯的選擇。

1.2 研究動機與目的

傳統講述式的教學法，學生單方向的聽教師講述，被動地接受大量的知識，少有機會師生互動與同儕互動，或是透過積極主動的參與各種學習活動來達成教學目標。偏重講述的教學雖然可以讓學生獲得知識，但對於培養學生在真實生活中應用知識解決問題的技巧與能力仍顯不足。

利用電腦視覺化的增強有利於學生在幾何上的學習，電腦產生的具體圖像能對學生的視覺化學習產生激勵的影響。建議在幾何學習上可採用適當的電腦軟體來輔助學習。現在電腦已是日常生活的一部份，電腦輔助教學將可更廣泛地運用在各階段的數學教學上(郭亮偉, 2005)。而多數教師所面臨的難題是，如何將資訊技術完整的應用在教學上，一方面提升教學效率，另一方面使得學生具有主動思考探索的能力。透過電腦的輔助教學，將使學生對於數學的概念有更具體的了解。

本研究希望在資訊科技的輔助下能在數學教學上達成以下目的：了解電腦套裝軟體在數學教學上的應用，以動態具體效果呈現教材來提升學習效率，以及引導學生具有個人主動思考探索能力。

1.3 研究方法

先由高中課程中可加速加廣加深的部份，找出適合的教材內容，針對教學目標，視需要搭配各種相關軟體，來設計教學活動，使學生更容易理解課程內容，並進一步藉由資訊科技輔助，呈現出紙本無法展現的內容。舉例來說，關於餘弦定理，嚴謹的推導證明是必須的，除此之外，再利用數學軟體，做出動態變換的效果，更能加深學生對此定理的了解。另外，立體空間中的圖形，黑板難以真實呈現三維空間圖形，以致於學生對於空間圖像僅能憑空想像，故無法得到很好的學習效果，如果我們使用數學立體幾何軟體來輔助課程進行，會得到更好的教學效果，也會使學生對空間的概念更加理解。諸如此類的探討將陸續在本論文後續章節中呈現。而且，資訊科技融入數學教學之中，學生在家中也可以自行利用相關軟體研究數學概念，激發學生對數學研究的興趣。

本研究主要針對兩方面的教學設計加以探討。其一是運用資訊科技作教學素材的開發，以提升教學效率與教學素材品質，達到加速的目標；其二是在數學軟體輔助下，引領學生作專題導向式的學習探索，達到加廣加深的目標。

1.4 研究範圍與限制

資訊科技融入教學能對數學教學方式有所助益，但不能完全取代傳統教學，電腦模擬產生的許多現象性質，仍須經過數學的嚴謹推導論證方能成立。模擬產生的相關性質對於正規推論有幫助，但勿以軟體模擬的部份情形套用於所有情形。

本研究主要針對台中一中的學生為教學對象，學生多屬高學習成就的族群，部分內容配合專題研究課程之需要而設計，且參與學生多數已對數學相關軟體有過初步學習經驗，因此不宜將本研究作過度解讀。

1.5 論文結構

本論文除第一章緒論、第二章文獻探討之外，分三個章節概述如下。

第三章探討平面環境下的教學素材開發，主要是利用 MathPS 來開發，包含數個圖說證明(Proof without Words)的呈現，讓學生在正規嚴謹的數學證明之外，多些不同的觀點去體會數學之美。本文挑選了積化和差與餘弦定理二種素材來實作，其中餘弦定理更以二種軟體 MathPS 與 GSP 分別製作教學素材來討論比較。另外利用 MathPS 提供的精準定位與按鈕式強大互動功能，實作了排容原理以及複數的 n 次方根等重要觀念。

第四章探討立體環境下的教學素材開發，用 Cabri-3D 為開發工具，以動態立體幾何的方式，讓學生可以實際看到空間立體圖形，而非看著黑板上粉筆留下的二維圖形再自行努力想像對應的立體圖形。Cabri-3D 提供的功能讓學生可以從多種不同的視角觀察同一個圖形，讓學習立體觀念不再瞎子摸象，協助學生培養清楚的空間概念。本章節將挑選幾個實際應用的例子，包含近幾年大學入學考試中相關的立體空間概念試題，以及三垂線定理、歪斜線、正四面體、圓錐截痕等相關素材作立體展示。

第五章是作專題導向式學習研究，選定的題材是高二的圓錐曲線部分，透過 GSP 軟體的協助，讓學生經由自己動手操作摸索，對圓錐曲線各種性質有更深入的了解，對於課程內容能有更深的體會，並熟悉尺規作圖的規則。然後將圓錐曲線的性質應用到面積的平分研究，在軟體的輔助下，嘗試將平面的性質推廣到立體的體積平分，立體部份是以 Maple 為輔助工具，作立體圖形的呈現。

二、 文獻探討

本章旨在探討資優教育、資訊科技融入教學、數學簡報系統 MathPS 與數學軟體的相關文獻。

2.1 資優教育

由於科技發展迅速、資訊快速流通及社會邁向多元化的腳步加遽，人類正迎接第三次產業革命，一個以腦力決勝負，「知識經濟」時代的來臨。面臨「知識經濟」時代的挑戰，如何提昇教育品質來進行全方位人才之培育，以增進國家競爭優勢，儼然成為新世紀教育的重要指標。而一向以「發展個體潛能、培育優秀人才，進而造福國家社會」為目標的資優教育，恰與當前政府所強調「全方位人才培育，以提昇國家競爭力」之教育目標相輔相成；因此，資優教育品質的提昇將強化我國競爭力，資優教育的落實推展便成為開創新世紀教育的重要指標。(臺北市資優教育白皮書，2004)

資優教育之教材設計，依相關課程標準及學生個別學習需要，由教師整合各類學習資源，自編加深、加廣之教材及教學活動，以提供資優學生區分性充實課程。資優教育因無課程綱要，亦缺乏可參考選用的教材，大多仰賴資優班教師自行設計，故多數充實教學模式缺乏系統性及銜接性。(資優教育簡訊第 27 期，2005)

學校為協助資優生發揮最大潛能，必須安排能增進學習經驗的課程，為使資優生有效學習，有些以正式課程呈現，有些則以潛在課程的方式呈現，由於資優生和普通生有其共同之處和相異之處，所以學校所安排的課程，除普通課程外，尚需特殊課程，以滿足資優生的特殊需求。資優學生擁有傑出的心智能力與學習潛能，於是他們可以學得比較快、比較深、比較廣，為因應他們這樣的特質，在資優學生的課程安排上，可採「加速教育」以滿足他們學得快快的需求；可採「充實教育」以符合他們學得深學得廣的特質。(吳武雄，2000)

「加速教育」在資優教育中所扮演的角色是在幫助學生發揮學習潛能，使他們不受限於普通的課程及教學進度，而能在較短時間內修讀完一般課程，以多餘的時間學習適合他們能力的課程。課程濃縮是一個能夠讓加速學習的學生更有效精熟正規課程的方法，課程濃縮的最大好處之一就是節省時間，學生濃縮了課程，多出的時間可以去參加資優方案，從事獨立研究，閱讀自選讀物，或做其他選擇。

配合「充實教育」在現行的中學資優課程中有各種專題課程以提供資優學生更寬廣的學習機會。專題式學習是一種「做中學」(learning by doing)的學習方式，整個歷程以專題為學習主軸，在相關情境的引導下，根據主題，經由學生的設計、問題的解決、決策的擬定或是研究的行動，給予學生機會，在一段期間內從事相關的工作，並且完成研究報告。專題式學習是以學生為主體，並以小組方式進行的學習策略，而教師則是一個輔助者，而非講述者，教師引導學生到一個能引發其興趣的問題，學生即針對此問題進行一連串的探索，包括提出問題或假設、規劃研究計畫、蒐集可以驗證或解答的資料及數據、分析資料或數據、進行假設的驗證或問題的解決，最後製作出一個作品或成品，並與他人分享，甚至進行同儕互評。(白承軒，2005)

2.2 資訊科技融入教學

二十世紀最大的改變就是資訊科技以及網路的蓬勃發展，隨著科技的進步，教學工具(個人筆記型電腦、單槍投影機)逐步普及便宜，部分都會學校教師更是人手一台筆記型電腦，每間教室有桌上型電腦、單槍投影機、都能連接上校園網路。在這條件下，傳統的教學方式，開始受到衝擊。(邱建偉，2005)

Roblyer 和 Edwards(2000)認為有以下原因可解釋為何要將資訊科技融入學科：

1. 資訊科技可增加學生學習動機。
2. 資訊科技具備特殊的教學潛力。
3. 資訊科技可支援不同的教學型態。
4. 資訊科技可增加教師的工作績效。
5. 資訊科技可培養學生資訊時代所需的技能。

Jonassen(2000)以建構學習的觀點，認為資訊科技融入教學可以在學生的學習上的提供以下五項 5 支援：

1. 電腦支援知識建構(Knowledge Construction)。
2. 電腦支援知識探索(Knowledge Explorations)。
3. 電腦支援做中學(Learning by Doing)。
4. 電腦支援合作學習(Collaborative Learning)。
5. 電腦支援反思學習(Learning by Reflection)。

Jonassen(2000)指出資訊科技的發展有三個階段，分別是「從電腦學(learning from computer)」、「學電腦(learning about computer)」和「用電腦學(learning with computer)」。



將此三階段與我國資訊教育發展的進程對照，分別是電腦輔助教學、電腦課程的實施、資訊科技融入教學。

我國資訊教育的發展是從電腦輔助教學起，經由電腦課程的實施，到九年一貫課程中的資訊融入教學。這種脈絡正符合現今學習科技的發展，也滿足學習觀點的改變(張國恩，2002)。其中，學習觀點受到建構論主張知識是經學生探索等思考活動而建立的影響，強調以學生為中心的學習環境，老師的角色由知識傳遞者轉變為知識建立的協助者；學習科技則由早期注重如何利用科技建立一個學習環境，提供一些教學資源，讓學生從中獲得知識，轉變為注重如何把科技當作學習工具、伙伴，利用這些工具發展知識。(蘇柏奇，2006)

「資訊科技融入教學」不但是國內教學的新型態，也是世界各先進國家教學的趨勢，但是教師要如何將科技融入課程、教材、教學及學習之中，才能使電腦成為教學環境中不可缺少的工具(邱貴發，1990)而且由於資訊科技日漸普及且軟體操作介面親和，目前輔助教學的實施大多利用電腦科技來完成。尤其在數學的教學上，經常利用 PowerPoint、GSP、Cabri-II、Cabri-3D、Maple、Excel、Flash、…軟體進行輔助教學。(李進福，2006)因此使用數學軟體輔助數學教學，已經不再是困難重重的了。

2.3 數學簡報系統 MathPS

2.3.1 簡介

在考量降低數位落差以及提升普及性的前提下，交通大學陳明璋教授自 2001 年開始積極開發「數學簡報系統(Mathematical Presentation System, MathPS)」。該系統以高普及的軟體 Microsoft PowerPoint 為平台，運用簡單的介面，重組 PowerPoint 的互動功能，提供一個按鈕式動態呈現(Button-based Animation)的教材呈現環境。此一兼具繪圖及互動的教學環境，結合數學教材多元呈現之特性，建構了一個數學教材的編輯及課堂授課的環境，提供數學教師們整體性的協助(陳明璋，2006)。MathPS 的研發主要用來解決 PowerPoint 對於數學處理能力不足之缺陷，透過 MathPS 可以強化 PowerPoint 對於繪圖系統、複雜結構、數學物件、互動功能，可以滿足數學媒體設計的需求(邱建偉，2005)。

MathPS 上的 Geometer 功能提供簡單的介面以協助幾何構圖。PowerPoint 的動態呈現提供自訂動畫，處理物件出現、強調、消失、及移動路徑等功能；在 2002 版之後，更提供觸發程序的重要互動功能，提供藉由觸動一個物件，啟動一系列的動態呈現。MathPS 上按鈕式動態呈現一系列功能就是建立在 PowerPoint 的前述基礎之上(陳明璋，2006)。以下簡單介紹 MathPS 的幾何構圖功能與互動按鈕功能。

2.3.2 幾何構圖功能

在安排一個簡報呈現時，首先選取擬處理的物件，再處理包含幾何變換、屬性設定、以及動態呈現等動作。其中處理物件的幾何變換(Geometrical Transformations)包含平移(Translation)、縮放(Scaling)、旋轉(Rotation)、及鏡射(Reflection)等。MathPS 提供結構式自我複製的環境，透過定位機制及磁力作用的協助，使幾何變換能有效定位。定位機制包含格線、格點、輔助線來呈顯全座標系統定位，MathPS 系統另外提供了自訂格線、顯示等分點來呈顯區域座標定位；以鏡框法處理大小不一的圖案；磁力作用則包含貼齊格線及貼齊物件等功能，它們協助滑鼠準確的定位，本系統另外提供了自訂磁力點的功能，以彌補 PowerPoint 上沒有幾何繪圖能力的弱點。(陳明璋，2006)

在幾何上，點可決定線，線可決定面，而面中有線的訊息，線中有點的訊息。點、線、面之間訊息的轉換及取得，是 MathPS 構圖環境上的一個重要的環節；掌握點、線、面之間訊息的轉換及取得，再搭配本系統所提供的結構式複製法，我們可以運用滑鼠，透過點、線、面所提供的訊息處理複雜結構。最後我們以結合 PowerPoint 及 MathPS 所提供的環境為基礎，針對數學教材的特性，開發一系列的方法，讓整個系統的運作簡易而流暢，發揮強大的效果。(陳明璋，2006)

2.3.3 互動按鈕式動態呈現(Button-based Animation)

多媒體動態呈現普遍被用來引導學習者的注意力，然而在運用上有諸多的問題。比如：呈現速度太快以致於學習者無法吸收，或訊息太多以致於學習者無法分辨，或訊息無法步驟化呈現，造成訊息的消失等教學上的障礙。按鈕式動態呈現可以克服上述的困難。按鈕式動態呈現是 MathPS 的特點之一，可以提供步驟化呈現以及隨意呈現兩種方式，其特點是在一張投影片上可以設定許多的觸動程序之動畫，操作者可以在投影片上，視需要觸動不同按鈕，彈性呈現動畫，對教材的適性化有相當的效果。(陳明璋，2006)

PowerPoint(2002 版以後)的動畫呈現方式，可初分為主程序(main sequences)及觸動程序(interactive sequences)兩種。主程序在處理每一張投影片時，其動畫循序出現；而觸動程序則允許在投影片上設置按鈕，以操控不同物件的動態呈現。循序呈現適用於一般的簡報用途；但對滿足課堂上課的需求，則力有未逮。MathPS 系統基於數學教學的需求，組合 PowerPoint 動畫中的「出現」及「消失」兩功能，運用簡單的介面來取代 PowerPoint 上的複雜設定，根據不同的按鈕與訊息呈現模式，設計了一組包含「開關、關閉、多元開關設定、序列開關、分層開關、照亮、線開關、接龍，全開關」的按鈕動態設定，稱之為按鈕式動態呈現，以及有關動態物件的複製和維護等功能。(陳明璋，2006)

按鈕式動態呈現的特質包含訊息的步驟化呈現，以及由操作者觸動按鈕啟動步驟化呈現。這樣的設計可以將複雜的訊息步驟化切割處理，再透過觸動，讓訊息由簡而繁的逐一以動態方式呈現。按鈕設計的功能可用來協助設計教材，讓投影片上的資訊可以隨著課堂教學活動的進行，在教師的掌握下，選擇性的運作，以步驟化、非循序的方式呈現，達到動態呈現以及適性教學的效果。這樣的環境也可以強化一般簡報的互動性，提升簡報的效果。(陳明璋，2006)

2.4 相關軟體簡介

- 1.PowerPoint:由 Microsoft 公司開發，是一個簡報系統的軟體，可以呈現非常多樣的效果，後來增加了互動的功能，使得簡報呈現效果更加豐富。針對 PowerPoint 原先數學特性不足的缺點，交通大學的陳明璋教授研發的 MathPS 系統為 PowerPoint 增強了很多的功能，使得 PowerPoint 在數學教學活動的素材設計與視覺化圖像的呈現效果愈來愈精采與多元，是一個普及化且上手容易的軟體。
- 2.GSP(The Geometer's Sketchpad)：是一個尺規作圖功能強大的平面幾何構圖電腦輔助教學軟體，可精確地構造動態幾何。學生經由動態幾何圖形的變換及度量來描述他們所發現的一些幾何關係，增強開放式的猜測與研究，適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察。可對結構性作圖作巨集建構、文字說明，形成簡易操作鈕，提供使用者一個最佳化幾何學習環境。
- 3.Cabri-3D: 這個軟體是一套動態立體幾何軟體，延續尺規作圖的方式，讓使用者透過視覺及滑鼠完成立體幾何圖形，點選工具列可以構作並操作一些立體幾何物件；從功能表中可以對所構作的立體幾何圖形作屬性及視角的改變，並且可以同時開啟多個觀看視窗以及各種角度的透視圖像，還可以拖曳滑鼠右鍵，來作立體視角的改變。透過這個 Cabri-3D 立體幾何軟體的輔助與視覺呈現的優勢，相信在立體幾何課程的資訊融入教學設計會有令人驚艷的效果。
- 4.Maple:是由加拿大滑鐵廬大學發展出的一套計算功能強大的數學代數軟體，其可用來作代數方面的一些高等代數計算，讓使用者可解決複雜與高難度的數學問題。也可用參數式來繪製二維、三維空間的幾何圖形，更具備符號計算的功能，可說是一個計算強、繪圖功能大的軟體，但其操作使用對中學生而言上手不易。
- 5.Flash:是由 Macromedia 公司推出的一個呈現動畫功能強大的互動式動畫設計工具軟體，可以將音樂，聲效，動畫等融合在一起，以製作出高品質的網頁動態效果，適合製作數學模型教具的圖像，如球、圓柱、圓錐。由於互動性高，也很適合製作數學遊戲，但呈現數學的精確性或計算的功能比較弱一點，所以，在高層次的數學就少使用。轉換成執行檔的動畫(.swf)檔非常小，幾 K 位元組的動畫檔已經可以實現許多令人心動的動畫效果，網路流通性非常好。
- 6.Cabri-II:是由著名的法國大學 Universite Joseph Fourier 與法國國家研究所和 Texas Instruments 合作設計而成的新一代數學幾何電腦軟體，是動態幾何軟體的先驅。專門為平面幾何作圖而設計，具有動態變換、幾何量的測量、軌跡方法求解等對學習幾何非常有幫助的功能。可以快捷地生成各種幾何圖形。平面曲線、自動計算軌跡，可用於解析幾何、代數與物理的學習與教學。

三、 平面環境下的教學素材開發

本章主要應用資訊科技輔助平面環境下的教學素材開發，主要是利用 MathPS 來開發，包含數個「圖說證明」(Proof without Words)的呈現，讓學習者在正規嚴謹數學證明之外，多些不同的觀點去輔助了解。另外利用 MathPS 提供的準確定位性與按鈕式強大互動功能，實作了排容原理以及複數的 n 次方根等學習難度較高的單元。

數學教師常常用盡心思把數學公式證明得嚴謹而周全，這當然是數學教育中一項重要的訓練，也是學生必備的基本素養之一。然而難以從直觀的角度來理解抽象的數學公式，卻也是高中學生學習數學的困難源之一(李政豐，2003)。在數學中，一個公式或定理的證明有各種不同方式，其中的「圖說證明」(Proof without Words)，具有直觀輕巧雅緻之趣(蔡聰明，2000)。由美國數學協會 (The Mathematical Association of America, MAA)發行的期刊「Mathematics Magazine」推出「Proof Without Words」專欄深受各方好評，並由 Roger B. Nelsen 教授兩度集結成單行本發行。幾何圖形具有直觀易明的優點，「一個圖勝過千言萬語」這就是圖說證明之最佳寫照(顏貽隆，2003)。交通大學理學院網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網」也有不少相關研究探討。

然而並非每一個靜態的圖形都能讓大部分的學生「一看就懂」，如今的資訊科技發達，若能化靜態的圖形為動態方式呈現，一個步驟接一個步驟的出現在學習者的眼前，不僅能達到學習的效果，也讓學生能有更深刻的印象(黃國忠，2006)。利用現今很普及的軟體 PowerPoint 將三角函數部分的圖說證明賦予動態(Dynamic)呈現的效果，更能突顯「圖說一體，不證自明」的本質。

本章將應用動態圖說證明(Dynamic Proof Without Words)步驟式呈現高中數學中的兩個三角函數主題：積化和差與餘弦定理，並利用 MathPS 來增強 PowerPoint 在數學方面的不足，以達到更好的呈現效果。除此之外，也以 GSP 製作餘弦定理的動態圖說證明，比較分析兩種呈現方式的不同。另外利用 MathPS 提供的準確定位性與按鈕式強大互動功能，實作了排容原理以及複數的 n 次方根等學習難度較高的單元。

3.1 積化和差

(黃國忠, 2006)在其碩士論文中, 對高中數學三角函數部分的圖說證明有相當完整的探討與整理, 文中提到, 唯一的限制就是未能完成積化和差的部份。本節將對四個積化和差公式分別討論如後。

高中數學課程中的積化和差公式是由和角公式推導而得, 一般的推導過程如下:

由正弦函數與餘弦函數的和角公式

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots (1) \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots (2) \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cdots \cdots (3) \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

將上述四式加以運算

$$\frac{(1)+(2)}{2} \text{ 得 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{(1)-(2)}{2} \text{ 得 } \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\frac{(3)+(4)}{2} \text{ 得 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\frac{(4)-(3)}{2} \text{ 得 } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

以上過程雖然不難, 但學生的理解度卻不高, 另外這些公式的相似度很高, 更讓學生容易混淆。本節中將以圖形化的觀點來協助學生的理解。

3.1.1 積化和差的圖說證明

本公式的主要觀念如下，如圖 3.1.1 與圖 3.1.2, 假設圓的直徑 $\overline{AB}=1$, 圓周角 $\angle CAB = \alpha$, 圓周角 $\angle DAB = \beta$. \overline{OE} 垂直 \overline{CD} 交 \overline{CD} 於 F , 過 B 分別作 \overline{CD} 、 \overline{OE} 垂足於 G, H , 過 A 作 \overline{AJ} 垂直 \overline{CD} 於 J , 過 O 作 \overline{OK} 垂直 \overline{AJ} 於 K .

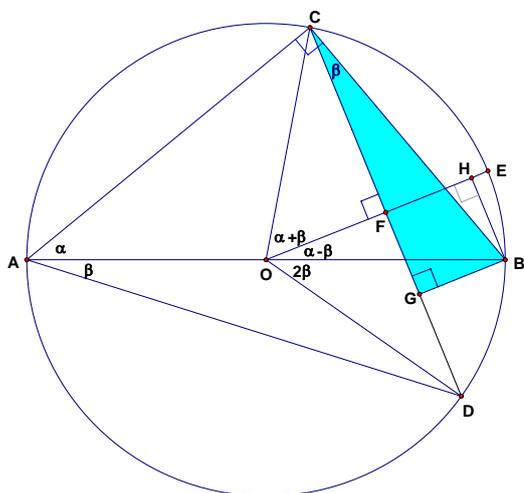


圖 3.1.1 積化和差(一)

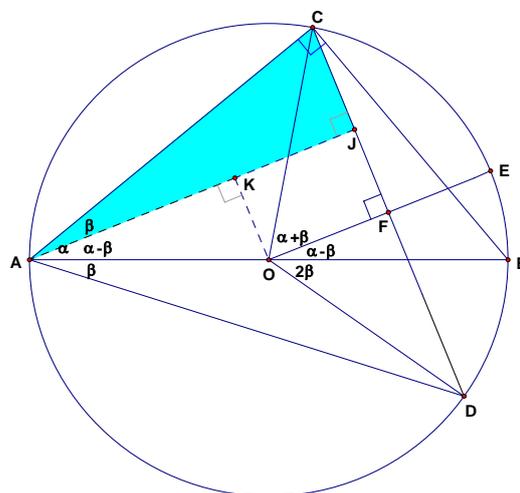


圖 3.1.2 積化和差(二)

在圖 3.1.1 中，

$$\text{由 } \overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG} \text{ 得 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta),$$

$$\text{由 } \overline{FH} = \overline{OH} - \overline{OF} \text{ 得 } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

在圖 3.1.2 中，

$$\text{由 } \overline{AJ} = \overline{KJ} + \overline{AK} \text{ 得 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta),$$

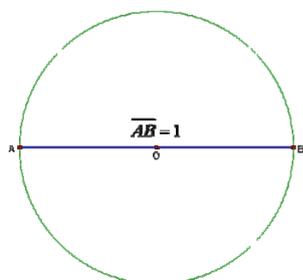
$$\text{由 } \overline{CJ} = \overline{CF} - \overline{JF} \text{ 得 } \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

相關限制：用到直角三角形的性質，故限定在 α, β 均為銳角的情形

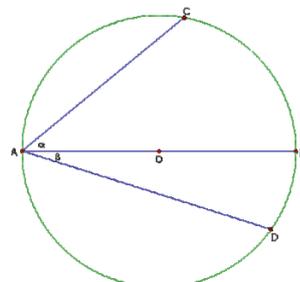
為求更好的動態呈現效果以提升學生學習效率，將圖 3.1.1 與 3.1.2 的觀念由 PowerPoint 呈現，輔以 MathPS 來製作，在 PowerPoint 的呈現請參閱 3.1.2 節至 3.1.5 節

3.1.2 積化和 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

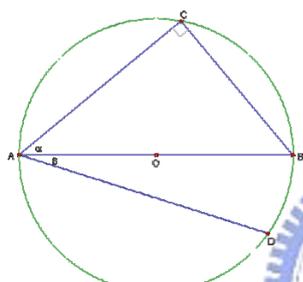
在圖 3.1.1 中，由 $\overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG}$ 得 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ ，在 PowerPoint 裡的呈現情形詳述如下(圖 3.1.3~圖 3.1.4)：



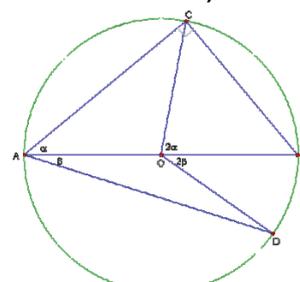
(1) 以 $\overline{AB} = 1$ 為直徑作圓



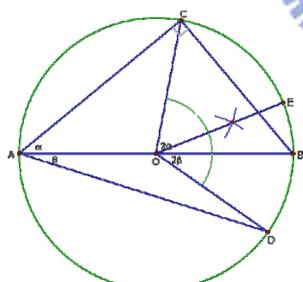
(2) 作圓周角 $\angle CAB = \alpha$ ，圓周角 $\angle DAB = \beta$



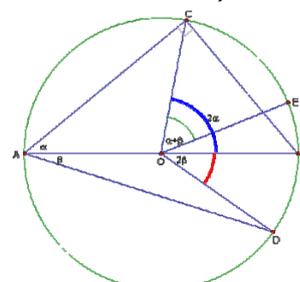
(3) 連 \overline{BC} ，因 \overline{AB} 為直徑， $\angle ACB = 90^\circ$



(4) 作圓心角 $\angle COB = 2\alpha$ ，圓心角 $\angle DOB = 2\beta$

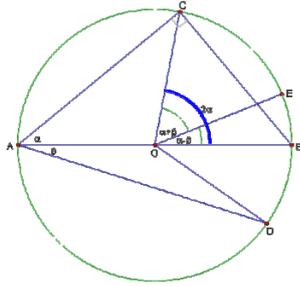


(5) 作 $\angle COD = 2\alpha + 2\beta$ 的角平分線

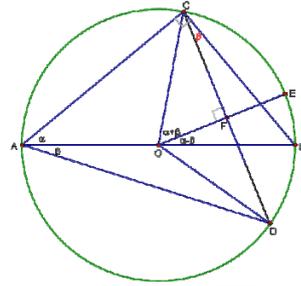


(6) $\angle COE = \frac{1}{2} \angle COD = \alpha + \beta$

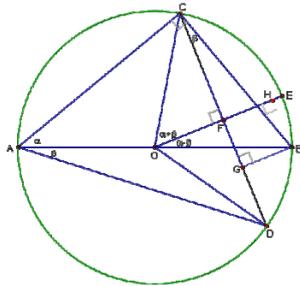
圖 3.1.3 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(6)



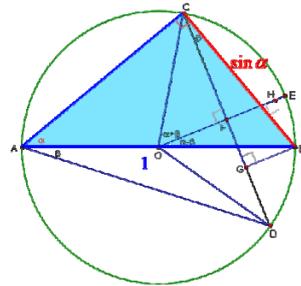
(7) $\angle BOE = \angle COB - \angle COE$
 $= 2\alpha - (\alpha + \beta) = \alpha - \beta$



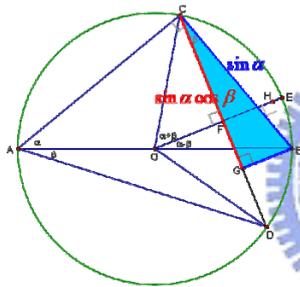
(8) 連 \overline{CD} 垂直 \overline{OE} ,
 $\angle BCD = \angle BAD = \beta$ (對同弧 \widehat{BD})



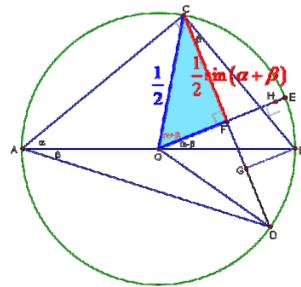
(9) 過 B 作 \overline{CD} 、 \overline{OE} 垂足於 G, H



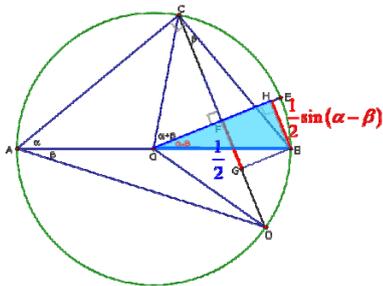
(10) $\triangle ACB$ 中, $\overline{AB} = 1 \Rightarrow \overline{BC} = \sin \alpha$



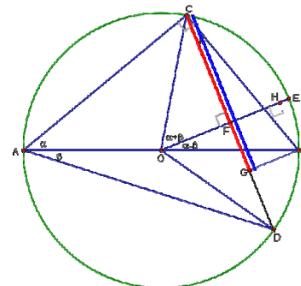
(11) $\triangle CGB$ 中,
 $\overline{BC} = \sin \alpha \Rightarrow \overline{CG} = \sin \alpha \cos \beta$



(12) $\triangle OFC$ 中,
 $\overline{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$



(13) $\triangle OHB$ 中, $\overline{OB} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \overline{FG} = \overline{BH} = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$



(14) $\overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG}$
 $\Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

圖 3.1.4 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(7)~(14)

如此完成了積化和公式 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 的圖說證明。

3.1.3 積化差 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

如圖 3.1.1，由 $\overline{FH} = \overline{OH} - \overline{OF}$ 得 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ 。

PowerPoint 呈現如下(圖 3.1.5)

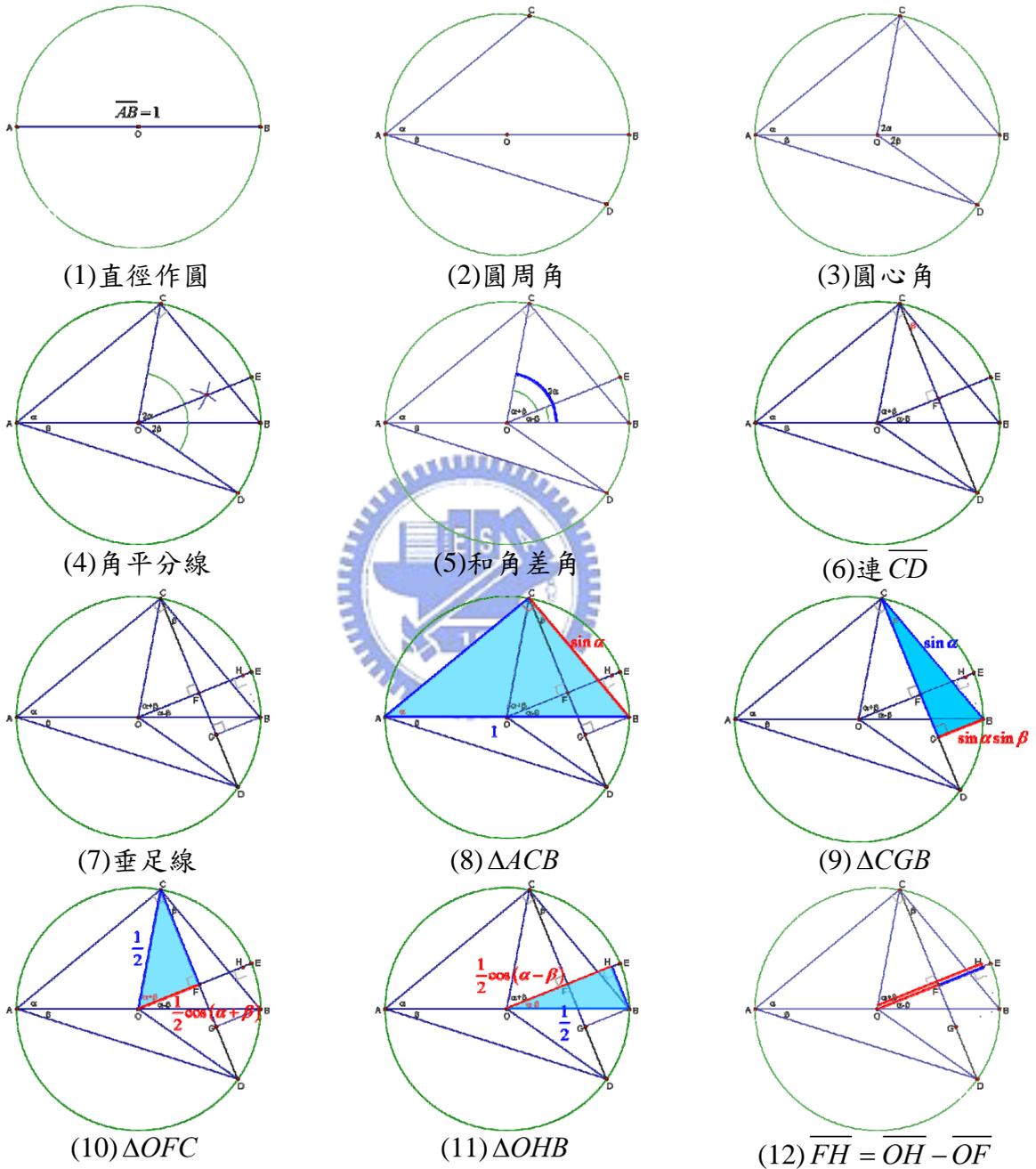


圖 3.1.5 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$ 圖解步驟(1)~(12)

3.1.4 積化和 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$

如圖 3.1.2，由 $\overline{AJ} = \overline{KJ} + \overline{AK}$ 得 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ 。

PowerPoint 呈現如下(圖 3.1.6)

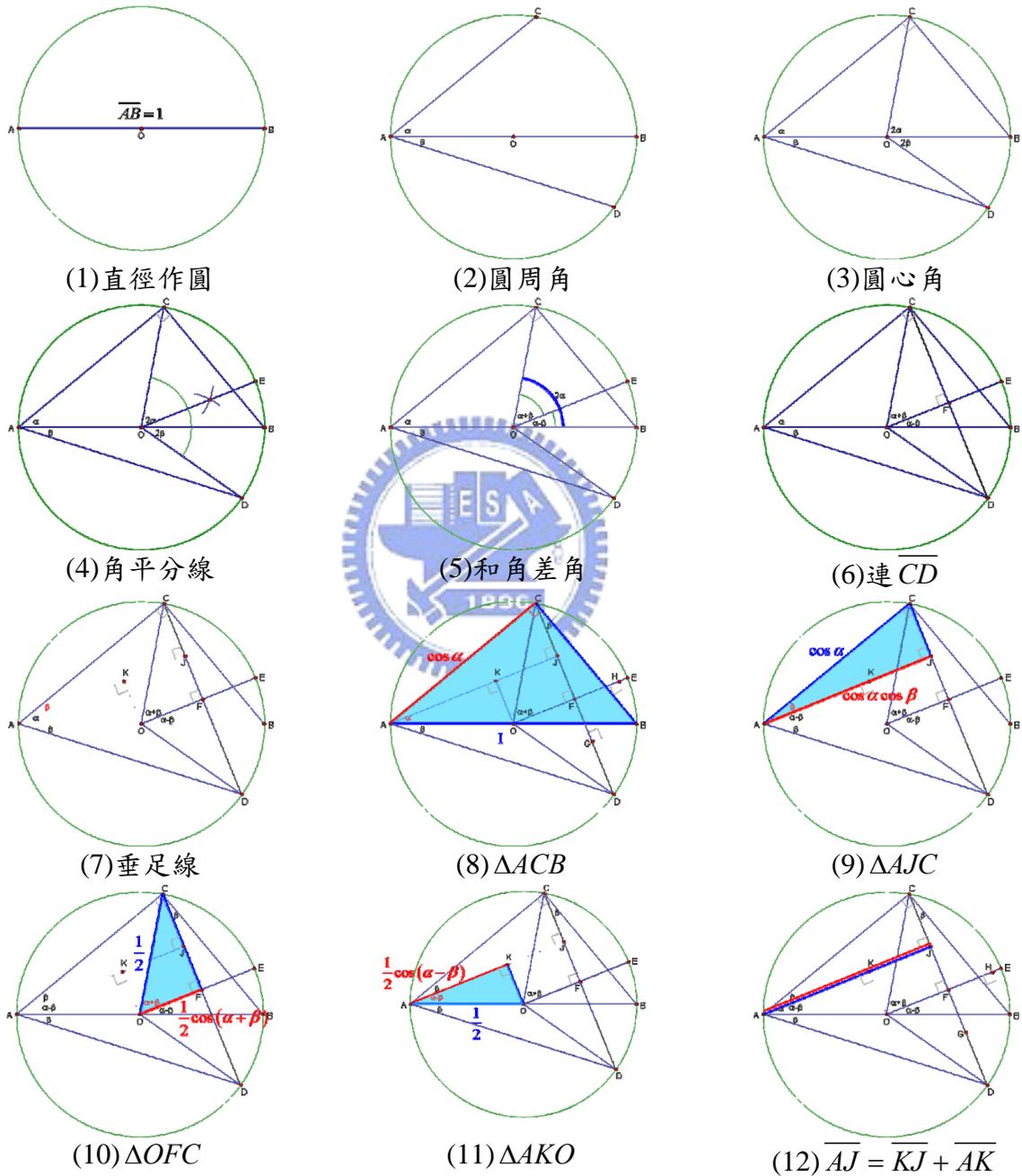


圖 3.1.6 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(12)

3.1.5 積化差 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

如圖 3.1.2，由 $\overline{CJ} = \overline{CF} - \overline{JF}$ 得 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

PowerPoint 呈現如下(圖 3.1.7)

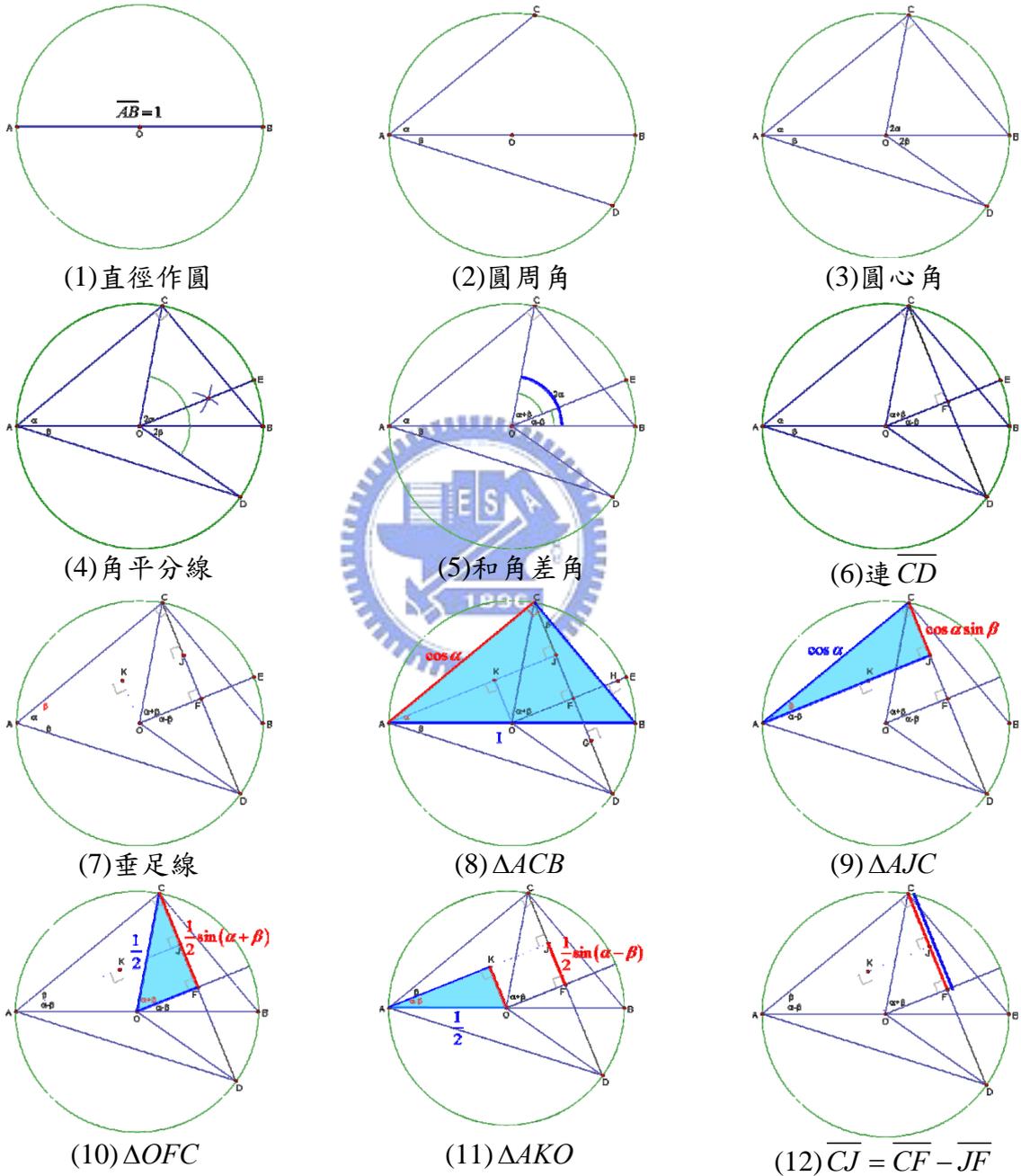


圖 3.1.7 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$ 圖解步驟(1)~(12)

3.2 餘弦定理(MathPS 版)

談幾何非談餘弦定理不可。餘弦定理既承畢氏定理於先，又啟內積的概念於後，在幾何學中具樞紐的地位，它的證明值得一提(張海潮，2004)。(黃國忠，2006)對餘弦定理提出了兩個不同版本的圖說證明，一個應用相似形的邊成比例關係，另一則利用托勒密定理(Ptolemy's Theorem)，二者皆是利用邊長關係去探討餘弦定理。本文採用張海潮先生所提出的面積觀點來圖解餘弦定理，並進一步利用平面變換中推移與旋轉來詮釋面積恆定。在 MicrosoftPowerPoint 中輔以 MathPS 來作動態呈現。

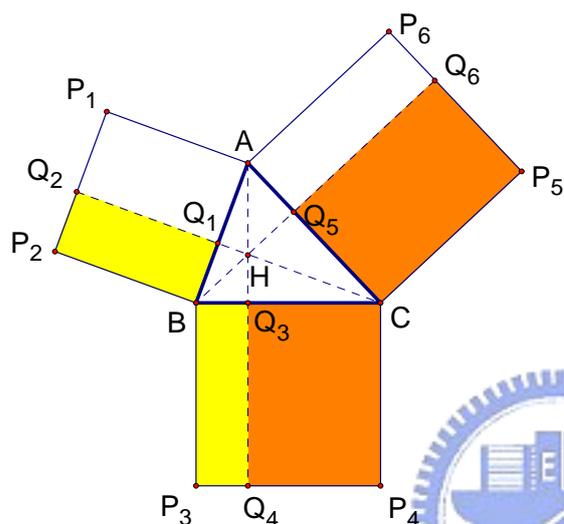


圖 3.2.1 餘弦定理(一)

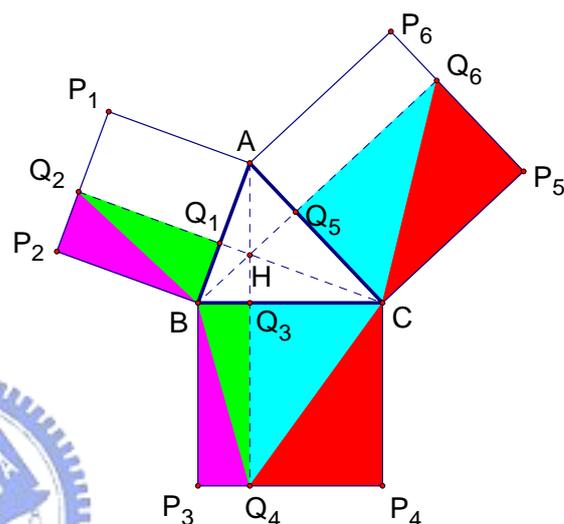


圖 3.2.2 餘弦定理(二)

圖 3.2.1 中，矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 的面積為 $b^2 - bc \cos A$ ，矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 的面積為 $c^2 - bc \cos A$ ，正方形 BCP_4P_3 的面積為 a^2 。餘弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 在此的幾何意義為矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 與矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 的面積和為正方形 BCP_4P_3 的面積。

因為三角形比較適合在推移與旋轉上處理，所以將圖 3.2.1 的四個矩形，調整成八個三角形分別處理。如圖 3.2.2。

將矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 分割為二個三角形 $\triangle CP_5Q_6$ 與 $\triangle CQ_6Q_5$ ，

將矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 分割為二個三角形 $\triangle BQ_1Q_2$ 與 $\triangle BQ_2P_2$ ，

將矩形 $BP_3Q_4Q_3$ 分割為二個三角形 $\triangle BP_3Q_4$ 與 $\triangle BQ_4Q_3$ ，

將矩形 $CQ_3Q_4P_4$ 分割為二個三角形 $\triangle CQ_3Q_4$ 與 $\triangle CQ_4P_4$ 。

原先應該是連續動畫的推移與旋轉，因論文書面呈現的關係，僅擷取局部圖片表示，每個變換約取三個圖片呈現。另外，因為 PowerPoint 目前尚未能完整呈現推移的動畫效果，故本素材開發時，推移的呈現採用非連續動畫，就像卡通動畫一樣，用多個分隔片段逐步呈現以達動畫效果，一個推移變換約取五到八個分段點來處理，因為書面呈現的關係，每個推移變換亦僅取三個圖片呈現。

以下是圖說證明動態呈現部份

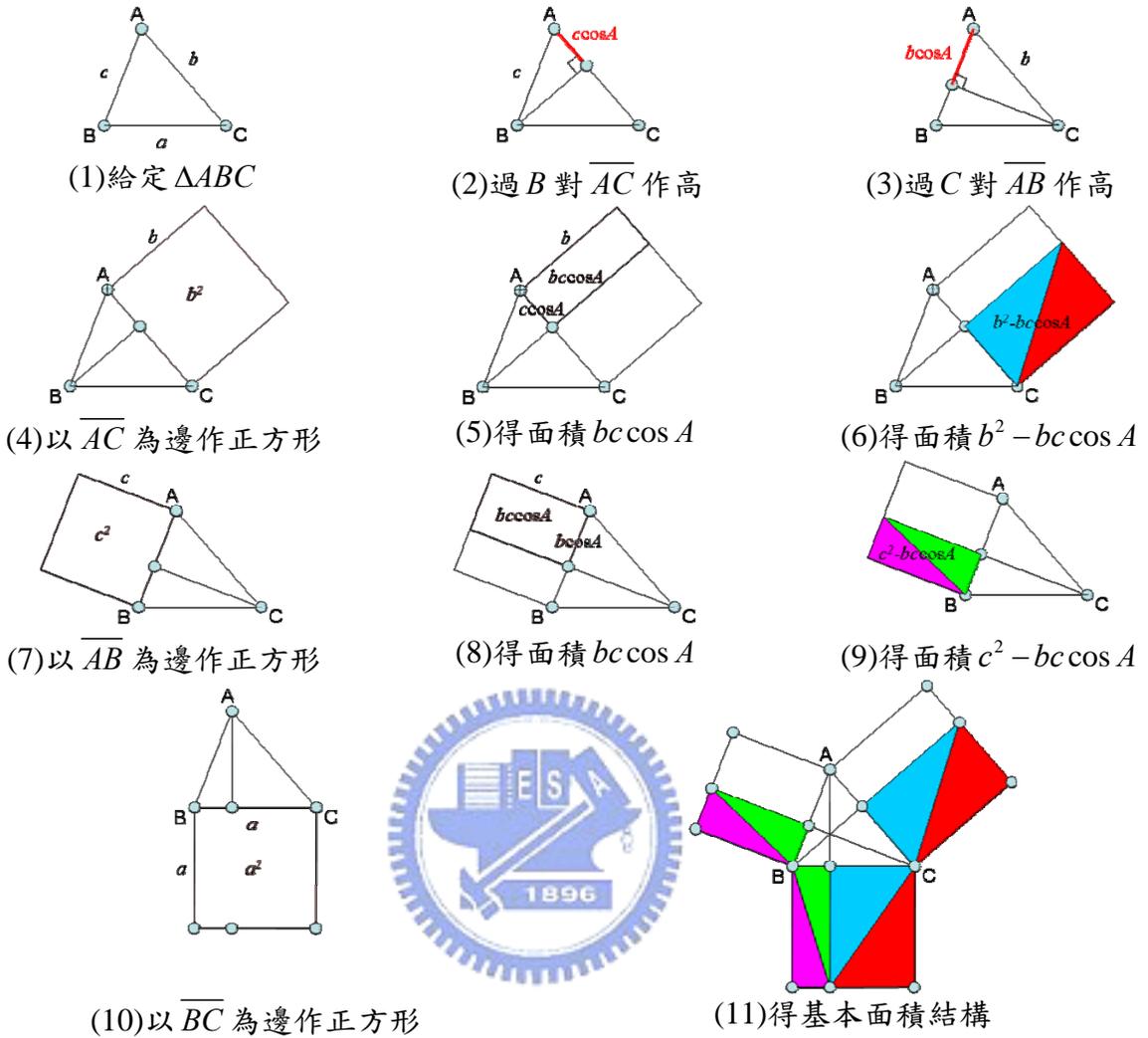
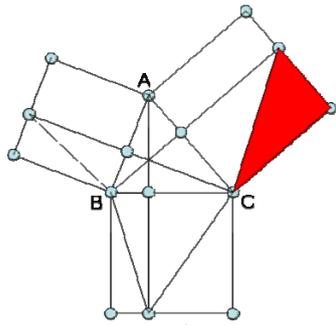
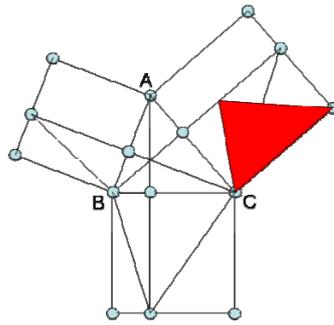


圖 3.2.3 餘弦定理圖解步驟(1)~(11)

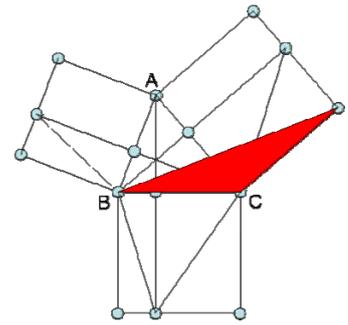
依四色三角形分別處理推移旋轉等變換



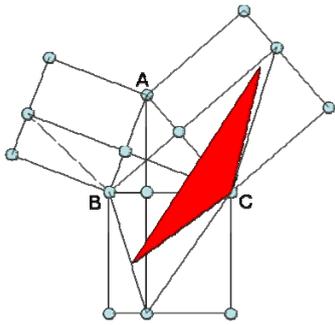
(12)紅色沿邊推移頂點



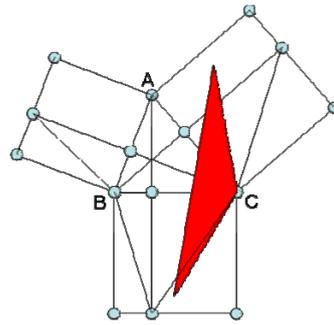
(13)推移過程



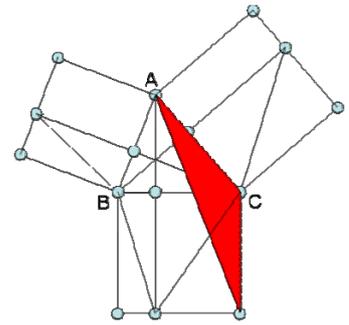
(14)推移終點



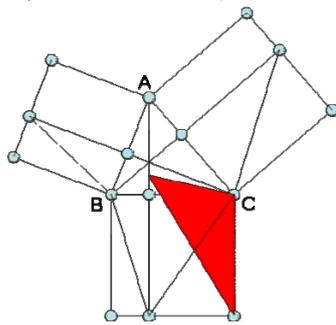
(15)紅色以頂點為中心旋轉



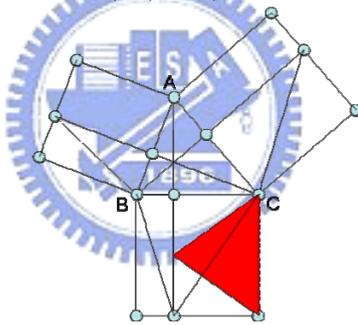
(16)旋轉過程



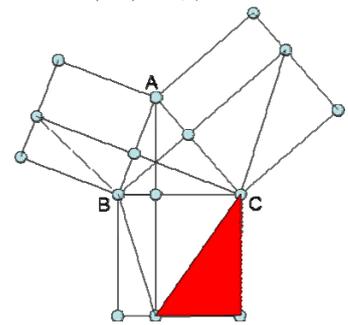
(17)旋轉終點



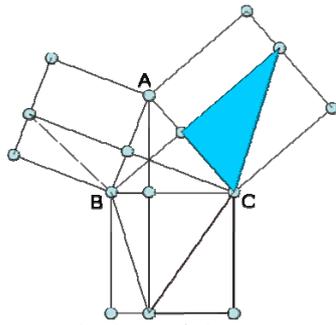
(18)紅色沿邊推移頂點



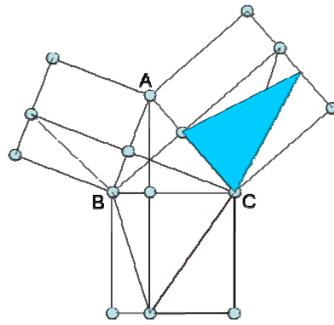
(19)推移過程



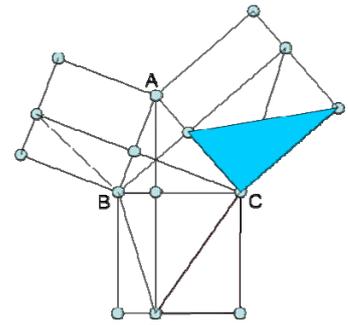
(20)推移終點



(21)藍色沿邊推移頂點

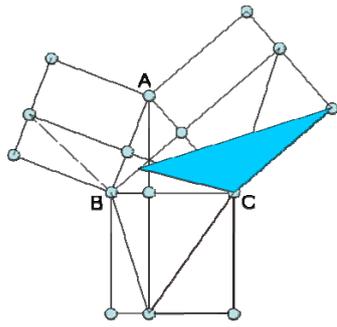


(22)推移過程

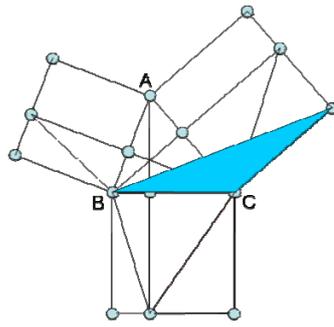


(23)推移終點

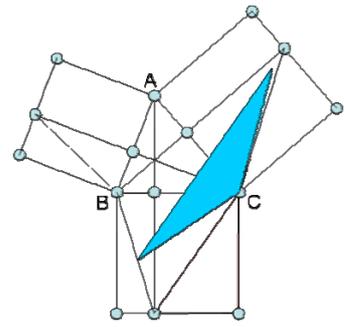
圖 3.2.4 餘弦定理圖解步驟(12)~(23)



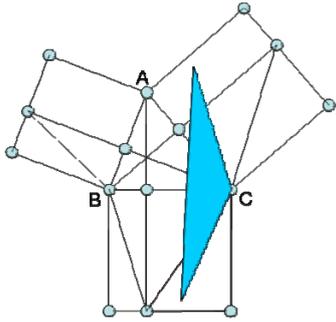
(24)藍色沿邊推移頂點



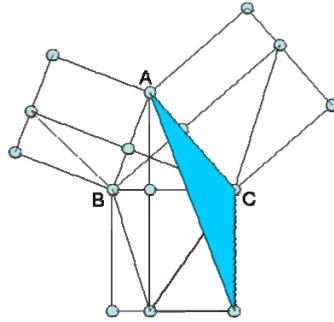
(25)推移過程



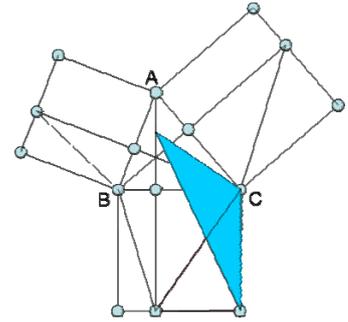
(26)推移終點



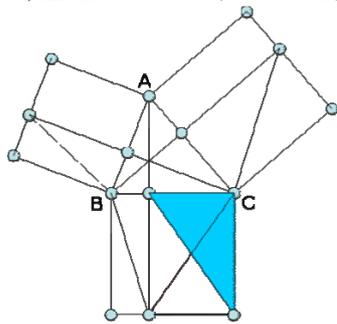
(27)藍色以頂點為中心旋轉



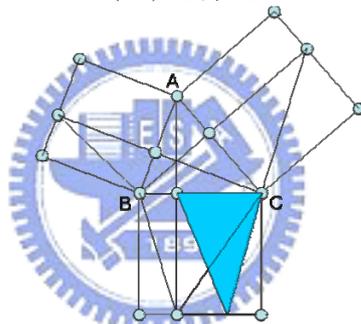
(28)旋轉過程



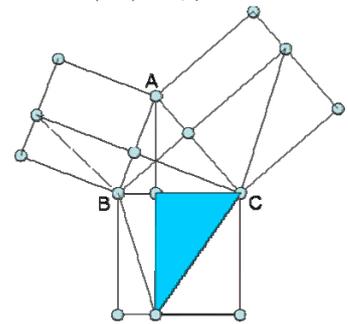
(29)旋轉終點



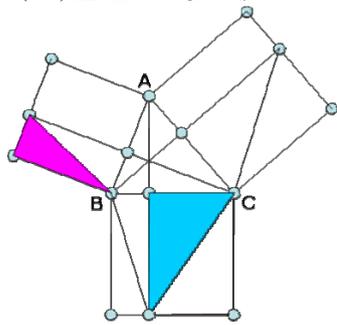
(30)藍色沿邊推移頂點



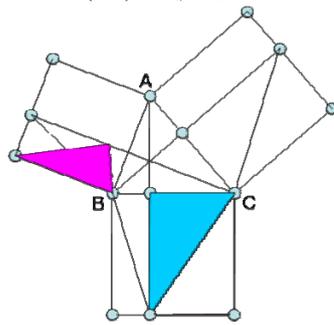
(31)推移過程



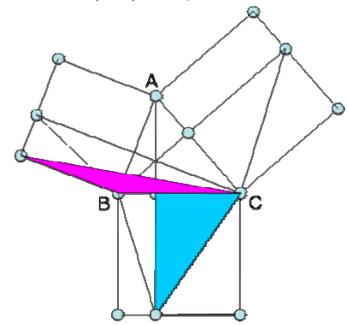
(32)推移終點



(33)紫色沿邊推移頂點



(34)推移過程



(35)推移終點

圖 3.2.5 餘弦定理圖解步驟(24)~(35)

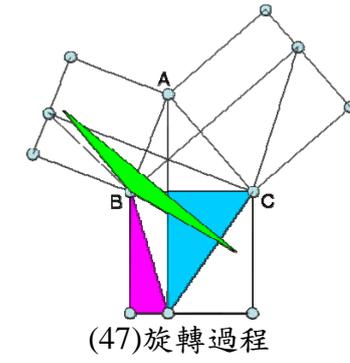
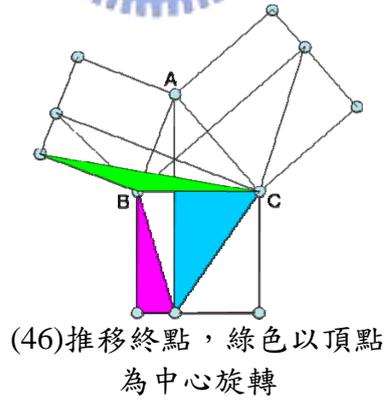
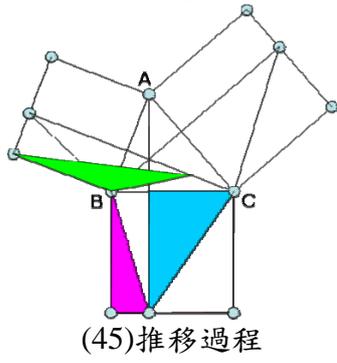
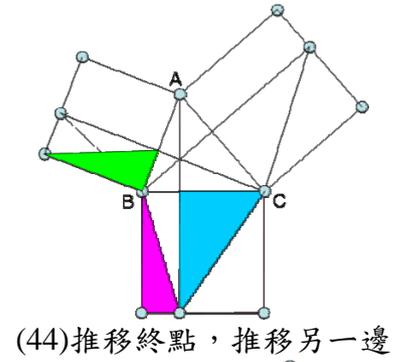
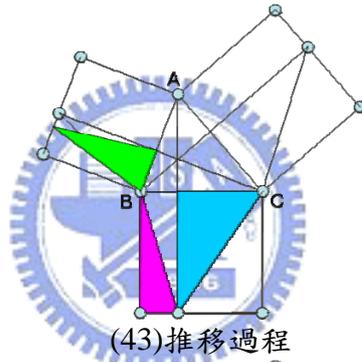
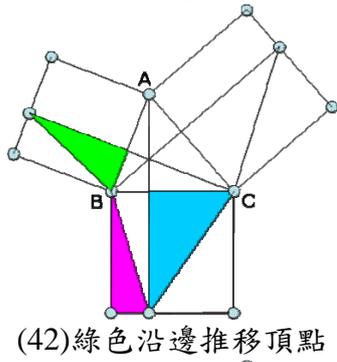
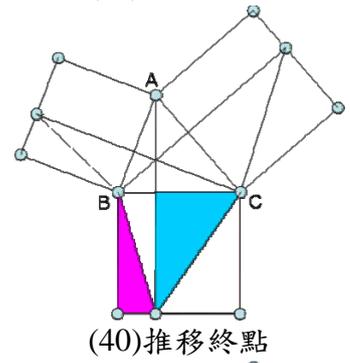
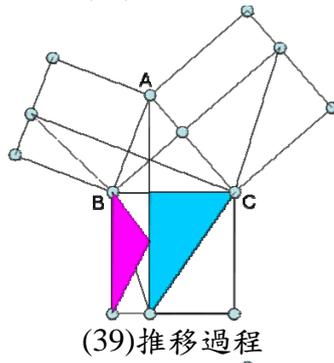
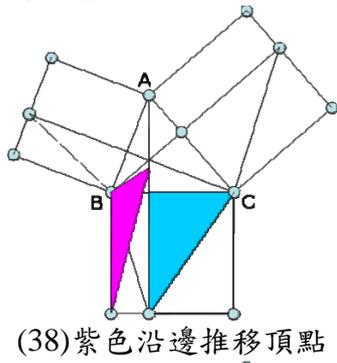
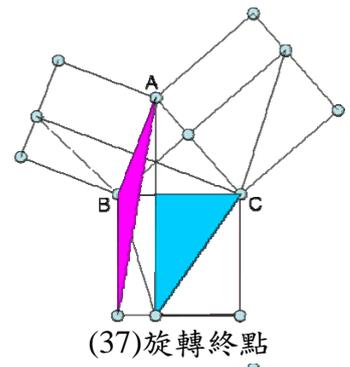
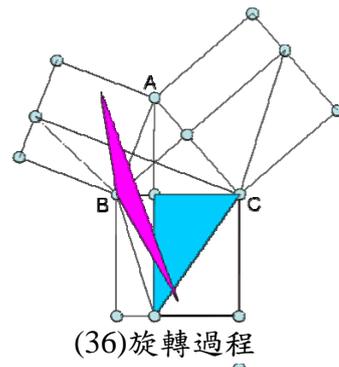
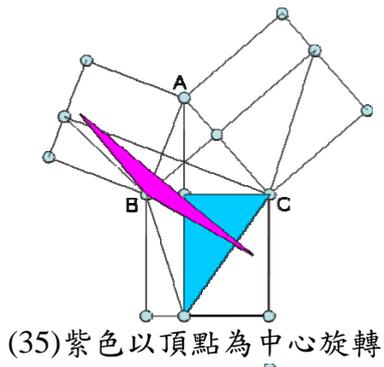
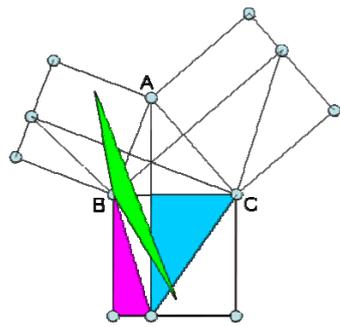
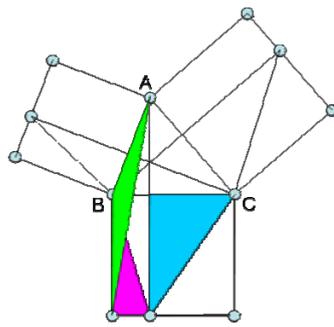


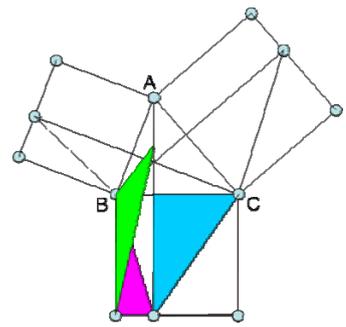
圖 3.2.6 餘弦定理圖解步驟(36)~(47)



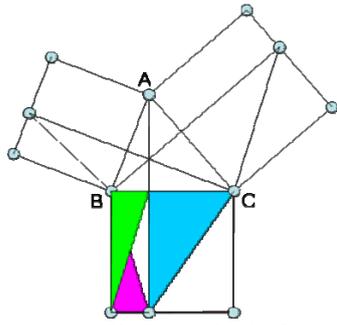
(48)旋轉過程



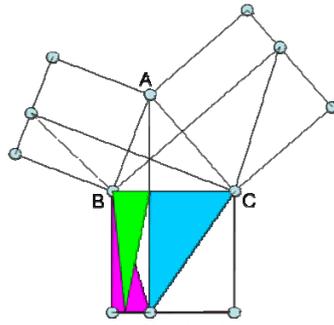
(49)旋轉終點，
綠色沿邊推移頂點



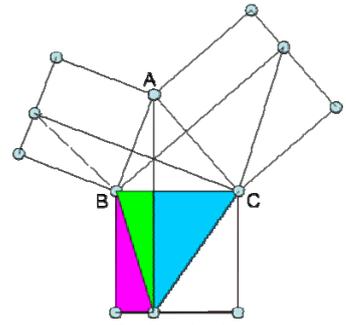
(50)推移過程



(51)推移終點，推移另一邊



(52)推移過程



(53)推移終點

圖 3.2.7 餘弦定理圖解步驟(48)~(53)

由圖 3.2.3 至圖 3.2.7 的動態過程中，因為推移與旋轉均保持面積不變，所以可得四組同色的三角形面積相等(如圖 3.2.2)，亦即餘弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

相關限制：用到三角形的性質，故限定 $\angle A \in (0, \pi)$ 的情形

3.3 餘弦定理(GSP 版)

GSP4 的新增功能中動作按鈕(Action Buttons)的 Movement 與 Presentation 對於教學素材的動態呈現上頗有助益，本節中將以 GSP 來實作餘弦定理的圖說證明，與 3.2 節作對照比較分析。

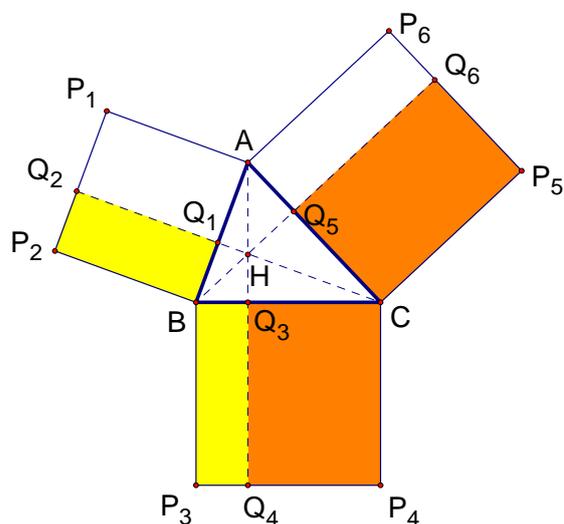


圖 3.3.1 餘弦定理(一)

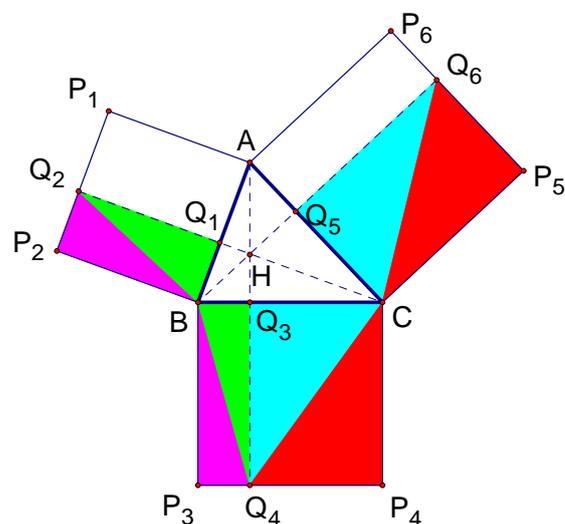


圖 3.3.2 餘弦定理(二)

圖 3.3.1 中，矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 的面積為 $b^2 - bc \cos A$ ，矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 的面積為 $c^2 - bc \cos A$ ，正方形 BCP_3P_4 的面積為 a^2 。餘弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 在此的幾何意義為矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 與矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 的面積和為正方形 BCP_3P_4 的面積。

因為三角形比較適合在推移與旋轉上處理，所以將圖 3.3.1 的四個矩形，調整成八個三角形分別處理。如圖 3.3.2。

將矩形 $CP_5Q_6Q_5$ 分割為二個三角形 $\triangle CP_5Q_6$ 與 $\triangle CQ_6Q_5$ ，

將矩形 $BQ_1Q_2P_2$ 分割為二個三角形 $\triangle BQ_1Q_2$ 與 $\triangle BQ_2P_2$ ，

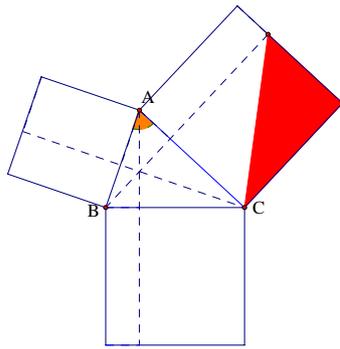
將矩形 $BP_3Q_4Q_3$ 分割為二個三角形 $\triangle BP_3Q_4$ 與 $\triangle BQ_4Q_3$ ，

將矩形 $CQ_3Q_4P_4$ 分割為二個三角形 $\triangle CQ_3Q_4$ 與 $\triangle CQ_4P_4$ 。

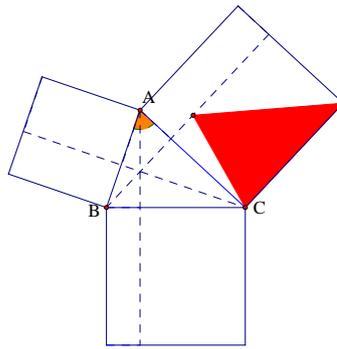
GSP 軟體中的動畫，主要是取一個半自由點，在其所屬軌跡上移動，所造成的效果，因此在製作時，選取的軌跡若是直線，則能呈現平移或推移的效果，選取的軌跡若是圓弧，則能呈現旋轉的效果。GSP 作教材呈現的優點是可以隨時動態調整，整個相關架構會隨之修正，而且圖形非常精準。

原先應該是連續動畫的平移、旋轉與推移，因論文書面呈現的關係，僅擷取局部圖片表示，每個變換約取三個圖片呈現。

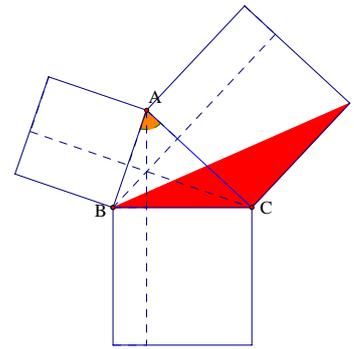
以下依四色分別處理推移旋轉等變換，來呈現餘弦定理的圖說證明。



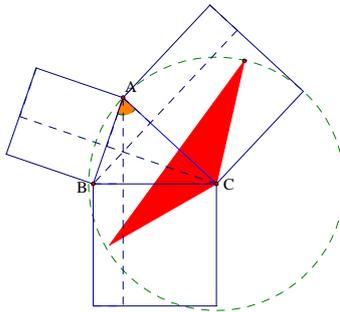
(1)紅色沿邊推移頂點



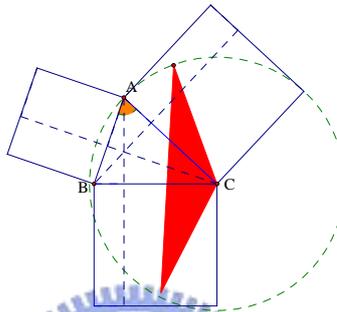
(2)推移過程



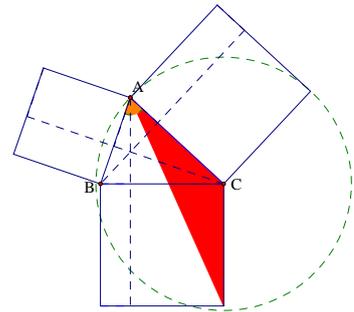
(3)推移終點



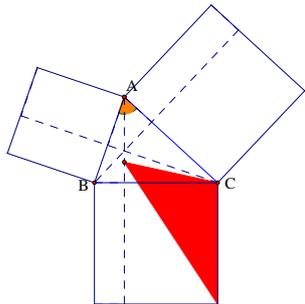
(4)紅色以頂點為中心旋轉



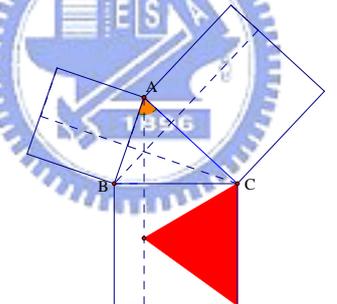
(5)旋轉過程



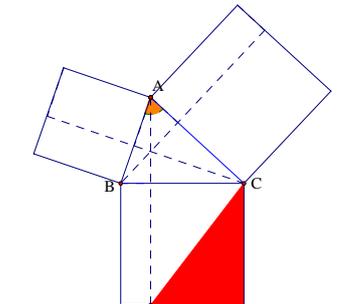
(6)旋轉終點



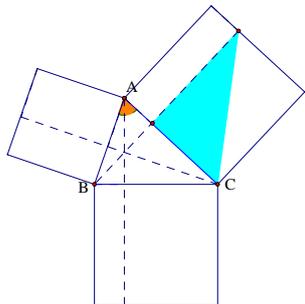
(7)紅色沿邊推移頂點



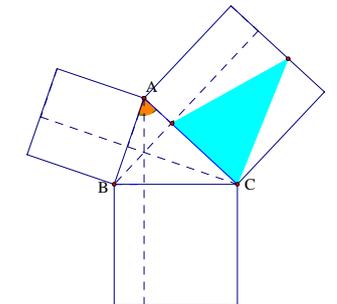
(8)推移過程



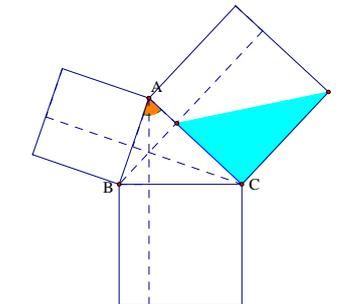
(9)推移終點



(10)藍色沿邊推移頂點

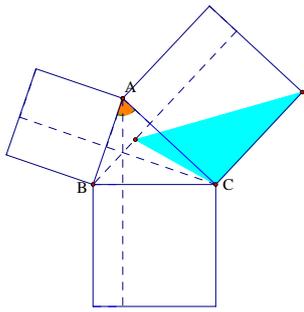


(11)推移過程

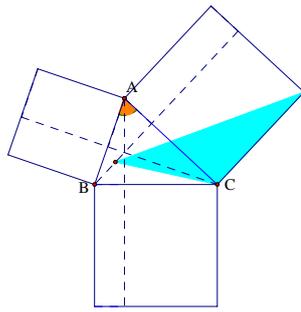


(12)推移終點

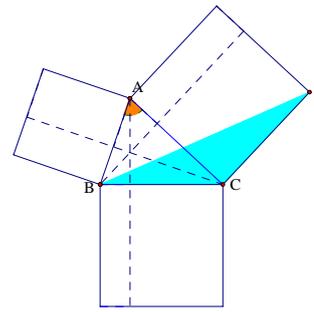
圖 3.3.3 餘弦定理圖解步驟(1)~(12)



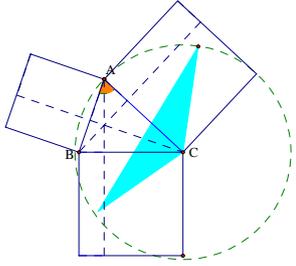
(13)藍色沿邊推移頂點



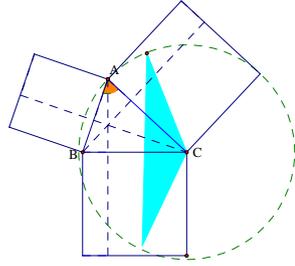
(14)推移過程



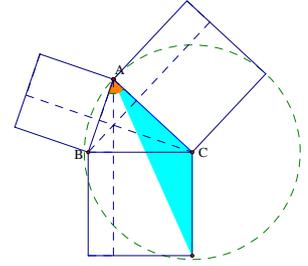
(15)推移終點



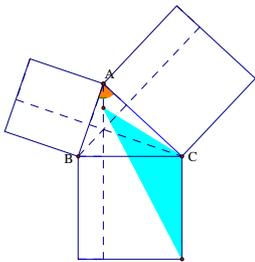
(16)藍色以頂點為中心旋轉



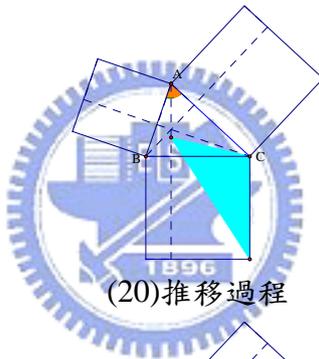
(17)旋轉過程



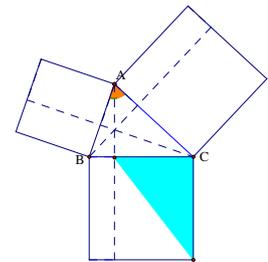
(18)旋轉終點



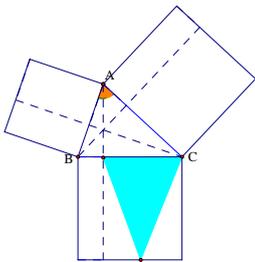
(19)藍色沿邊推移頂點



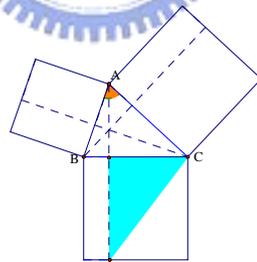
(20)推移過程



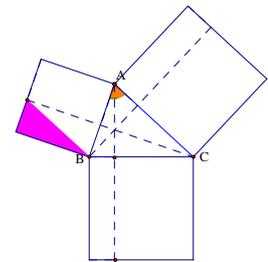
(21)推移終點，推移另一邊



(22)推移過程

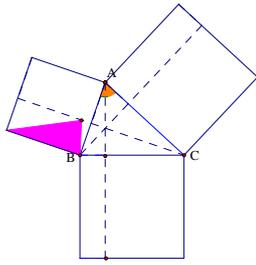


(23)推移終點

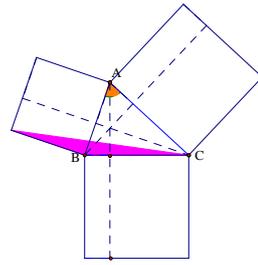


(24)紫色沿邊推移頂點

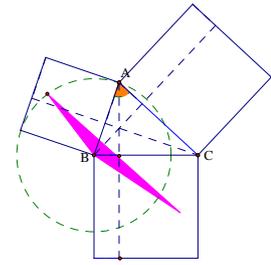
圖 3.3.4 餘弦定理圖解步驟(13)~(24)



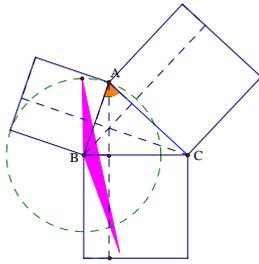
(25) 推移過程



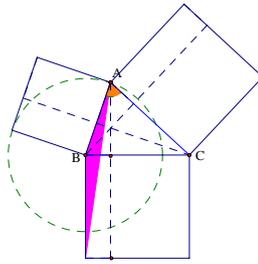
(26) 推移終點



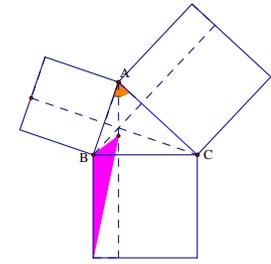
(27) 紫色以頂點為中心旋轉



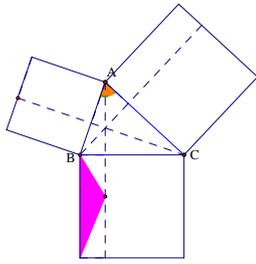
(28) 旋轉過程



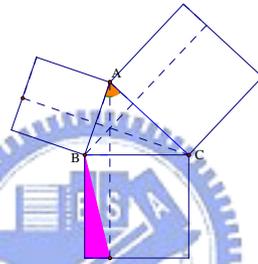
(29) 旋轉終點



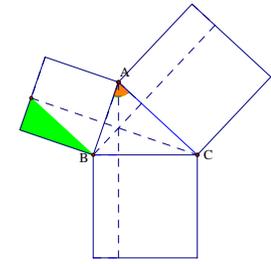
(30) 紫色沿邊推移頂點



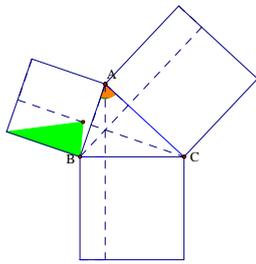
(31) 推移過程



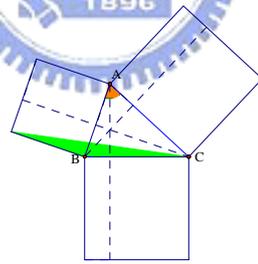
(32) 推移終點



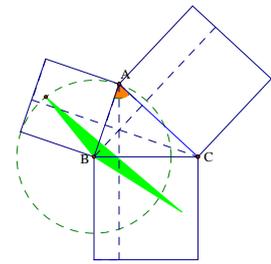
(33) 綠色沿邊推移頂點



(34) 推移過程

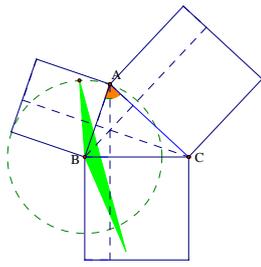


(35) 推移終點

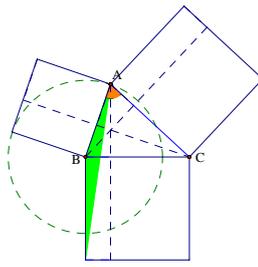


(36) 綠色以頂點為中心旋轉

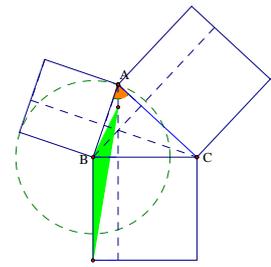
圖 3.3.5 餘弦定理圖解步驟(25)~(36)



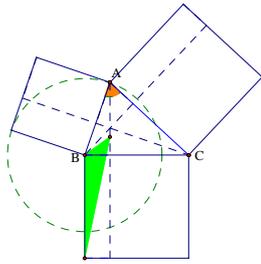
(37)旋轉過程



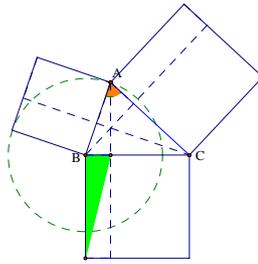
(38)旋轉終點



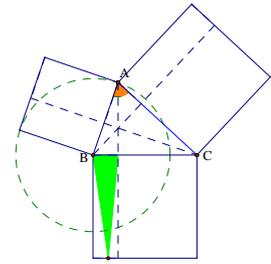
(39)綠色沿邊推移頂點



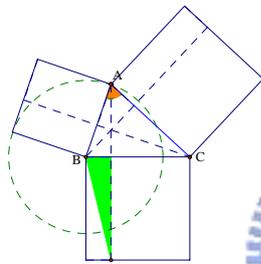
(40)推移過程



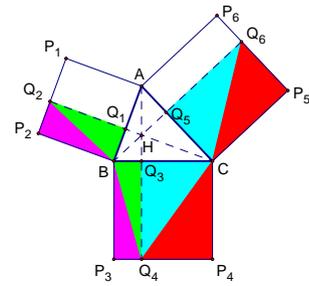
(41)推移終點，推移另一邊



(42)推移過程



(43)推移終點



(44)完整四色圖形

圖 3.3.6 餘弦定理圖解步驟(37)~(44)

相關限制：用到三角形的性質，故限定 $\angle A \in (0, \pi)$ 的情形

3.4 排容原理

關於排容原理，我們先看二個常見的排列組合例題如下：

例 1：ABCDE 五個字母排成一列，A 不排首位，B 不排次位的方法數有幾種？

解法：

- (1)任意排列有 $5! = 120$ 種
 - (2)當 A 排在首位時，有 $1 \times 4! = 24$ 種
 - (3)當 B 排在次位時，有 $1 \times 4! = 24$ 種
 - (4)當 A 排在首位且 B 排在次位，有 $1 \times 1 \times 3! = 6$ 種
- 第(2)(3)種情形屬違規，應當扣除一次
第(4)種情形屬違規，應當扣除，但(2)(3)被扣除二次，應當加回一次
因此總方法數應該為 $5! - 2 \times 4! + 3! = 78$

例 1 裡的(4)要加還是減，對部分學生已經有點猶豫了，如果限制條件再增加一個，情況就更複雜了。

例 2：ABCDE 五個字母排成一列，A 不排首位，B 不排次位，C 不排第三位的方法數有幾種？

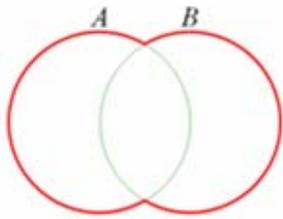
解法：

- (1)任意排列有 $5! = 120$ 種
 - (2)當 A 排在首位時，有 $1 \times 4! = 24$ 種
 - (3)當 B 排在次位時，有 $1 \times 4! = 24$ 種
 - (4)當 C 排在第三位時，有 $1 \times 4! = 24$ 種
 - (5)當 A 排在首位且 B 排在次位，有 $1 \times 1 \times 3! = 6$ 種
 - (6)當 B 排在次位且 C 排第三位，有 $1 \times 1 \times 3! = 6$ 種
 - (7)當 C 排在第三位且 A 排在首位，有 $1 \times 1 \times 3! = 6$ 種
 - (8)當 A 排在首位且 B 排在次位且 C 排第三位，有 $1 \times 1 \times 1 \times 2! = 2$ 種
- 第(2)(3)(4)種情形屬違規，應當扣除一次
第(5)(6)(7)種情形屬違規，應當扣除，但被扣除二次，應當加回一次
第(8)種情形屬違規應扣除，但被扣除三次又加回三次相當於沒扣，應補扣一次
因此總方法數應該為 $5! - 3 \times 4! + 3 \times 3! - 2! = 64$

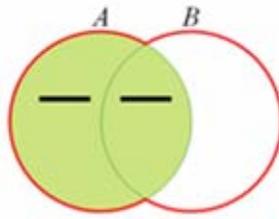
排容原理是在排列組合裡很基本的一個性質，但是在反反覆覆的加加減減之後，學生常無法理解為何要如此操作，本節中將利用 MathPS 的互動功能來開發教學素材，以期讓學生能更容易了解排容原理的精神。利用互動功能的好處之一是教師可以視教學現場的需求，隨時改變素材呈現速度與順序。而不像看教學影片一樣從頭播到尾，無法適當掌控教學內容。

3.4.1 二個事件的排容原理：

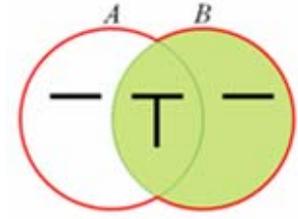
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



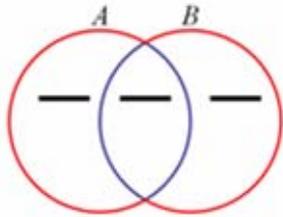
(1)以紅粗線凸顯
 $A \cup B$ 部分



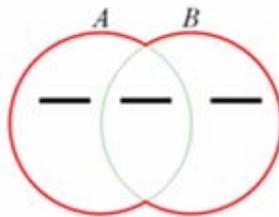
(2)以底色凸顯 A 集合
並在每個區域內畫記



(3)以底色凸顯 B 集合
並在每個區域內畫記



(4)以藍粗線凸顯
 $A \cap B$ 部分
取消內部一次畫記



(5)完成畫記，
 $A \cup B$ 部分內
恰各畫記一次

$$n(A \cup B) = \begin{matrix} n(A) \\ +n(B) \end{matrix} - n(A \cap B)$$

1 2 1

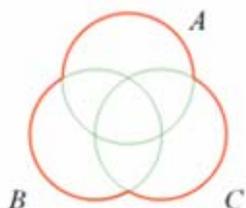
(6)項數之間的關係
恰為巴斯卡三角形
1,2,1

圖 3.4.1 二個事件的排容原理圖解步驟(1)~(6)

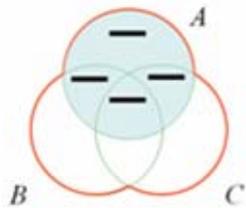


3.4.2 三個事件的排容原理

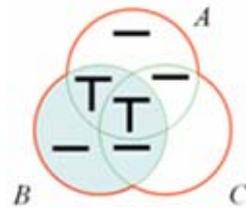
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$



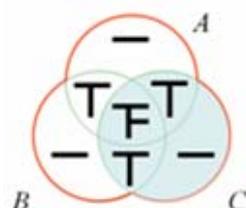
(1)以紅粗線凸顯 $A \cup B \cup C$ 部分



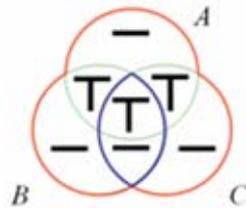
(2)以底色凸顯 A 集合並在每個區域內畫記



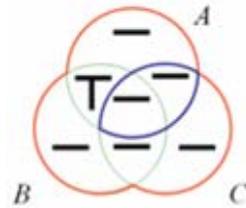
(3)以底色凸顯 B 集合並在每個區域內畫記



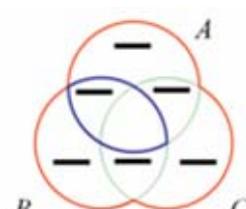
(4)以底色凸顯 C 集合並在每個區域內畫記



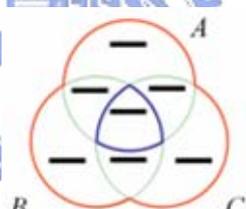
(5)以藍粗線凸顯 $B \cap C$ 部分
取消內部一次畫記



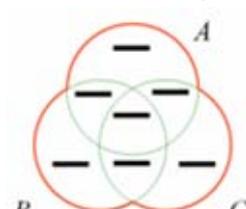
(6)以藍粗線凸顯 $A \cap C$ 部分
取消內部一次畫記



(7)以藍粗線凸顯 $A \cap B$ 部分
取消內部一次畫記



(8)以藍粗線凸顯 $A \cap B \cap C$ 部分
在區域內畫記



(9)完成畫記， $A \cup B \cup C$ 部分內
恰各畫記一次

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ + n(B) - n(C \cap A) \\ + n(C) - n(A \cap B)$$

1 3 3 1

(10)項數之間的關係

恰為巴斯卡三角形 1,3,3,1

圖 3.4.2 三個事件的排容原理圖解步驟(1)~(10)

如果對排容原理能有清楚的認識，剛剛的例子不管幾個限制條件都很容易想通。

例 3：ABCDE 五個字母排成一列，A 不排首位，B 不排次位，C 不排第三位，D 不排第四位，E 不排第五位，的方法數有幾種？

解法：

$$\begin{aligned} & C_0^5 \times 5! - C_1^5 \times 4! + C_2^5 \times 3! - C_3^5 \times 2! + C_4^5 \times 1! - C_5^5 \times 0! \\ & = 1 \times 5! - 5 \times 4! + 10 \times 3! - 10 \times 2! + 5 \times 1! - 1 \times 0! = 44 \end{aligned}$$



3.5 複數的 n 次方根

本節將介紹 1 的 n 次方根並推廣到正實數 a 的 n 次方根與複數的 n 次方根。

3.5.1 1 的 n 次方根

1 的 n 次方根，在複數平面上恰構成單位圓上正 n 邊形的頂點，且有一頂點在 x 軸正向上，透過 MathPS 的精準定位與互動式按鈕呈現，實作簡報呈現如下：

當 $n=1$ 時，恰一根 $x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1 + 0i = 1$ ，如圖 3.5.1

當 $n=2$ 時，恰二根 $\begin{cases} x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1 + 0i = 1 \\ x_2 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 + 0i = -1 \end{cases}$ ，如圖 3.5.2

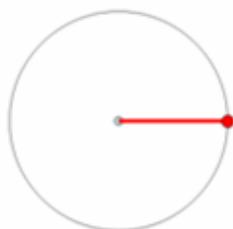


圖 3.5.1 一的一次方根 $x^1 = 1$

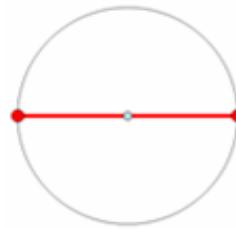


圖 3.5.2 一的二次方根 $x^2 = 1$

當 $n=3$ 時，恰三根 $\begin{cases} x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \\ x_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ \\ x_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ \end{cases}$ ，如圖 3.5.3

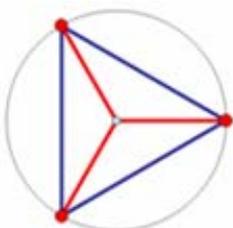


圖 3.5.3 一的三次方根 $x^3 = 1$

當 $n=4$ 時，恰四根 $\begin{cases} x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \\ x_2 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ \\ x_3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ \\ x_4 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ \end{cases}$ ，如圖 3.5.4

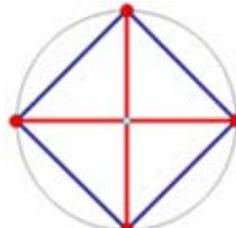


圖 3.5.4 一的四次方根 $x^4 = 1$

$$\text{當 } n=5 \text{ 時，恰五根} \begin{cases} x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \\ x_2 = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ \\ x_3 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ, \text{ 如圖 3.5.5} \\ x_4 = \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ \\ x_5 = \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ \end{cases}$$

$$\text{當 } n=6 \text{ 時，恰六根} \begin{cases} x_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ \\ x_2 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \\ x_3 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, \text{ 如圖 3.5.6} \\ x_4 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ \\ x_5 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ \\ x_6 = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ \end{cases}$$

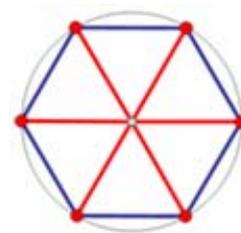
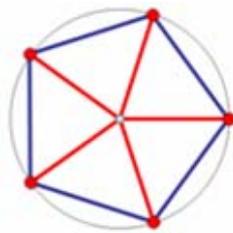


圖 3.5.5 的五次方根 $x^5 = 1$ 圖 3.5.6 的六次方根 $x^6 = 1$

依此類推，可得 $x^n = 1$ 的 n 個根為 $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ，圖形恰構成單位圓上的正 n 邊形

3.5.2 正實數 a 的 n 次方根

正實數 a 的 n 次方根在複數平面上也構成圓上正 n 邊形的頂點，且有一頂點在 x 軸正向上，圓的半徑為 $\sqrt[n]{a}$ ，可將 1 的 n 次方根經過伸縮變換之後得到，以五次方根為例，利用 MathPS 的精準定位與互動式按鈕呈現，實作簡報擷取畫面如下：

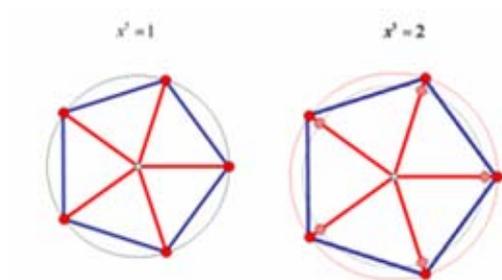


圖 3.5.7 一與二的五次方根

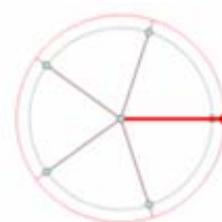


圖 3.5.8 二的五次方根第 1 根

從圖 3.5.7 不難看出， $x^5 = 1$ 與 $x^5 = 2$ ，只是圓的半徑變大而已，且變大的幅度為 $\sqrt[5]{2}$ 倍，所以只要知道 $x^5 = 1$ 的五次方根，就可推得 $x^5 = 2$ 的五次方根。

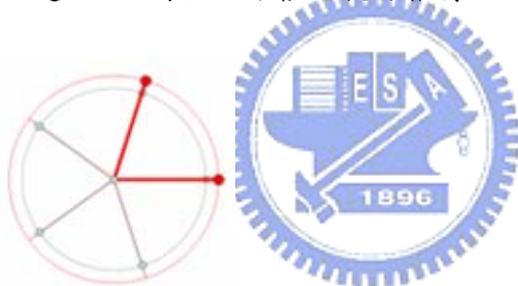


圖 3.5.9 二的五次方根第 2 根

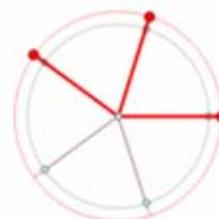


圖 3.5.10 二的五次方根第 3 根



圖 3.5.11 二的五次方根第 4 根



圖 3.5.12 二的五次方根第 5 根

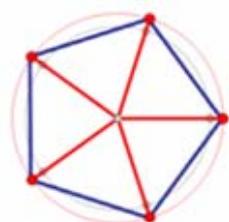


圖 3.5.13 二的五次方根所成正五邊形

3.5.3 複數的 n 次方根

一般複數的 n 次方根，我們以 $x^5 = -1 + \sqrt{3}i$ 為例討論如下：

首先將 $x^5 = -1 + \sqrt{3}i$ 改成複數的極式表示法 $x^5 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

由棣美弗定理 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ 可知

$x_1 = \sqrt[5]{2}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ 為 $x^5 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ 的一根

考慮 150° 的同界角 510° 時， $x^5 = 2(\cos 510^\circ + i \sin 510^\circ)$

$x_2 = \sqrt[5]{2}(\cos 102^\circ + i \sin 102^\circ)$ ，此根與 x_1 在同一個圓上，但輻角多了 72°

考慮 150° 的同界角 870° 時， $x^5 = 2(\cos 870^\circ + i \sin 870^\circ)$

$x_3 = \sqrt[5]{2}(\cos 174^\circ + i \sin 174^\circ)$ ，此根與 x_2 在同一個圓上，但輻角又多了 72°

考慮 150° 的同界角 1230° 時， $x^5 = 2(\cos 1230^\circ + i \sin 1230^\circ)$

$x_4 = \sqrt[5]{2}(\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ)$ ，此根與 x_3 在同一個圓上，但輻角又多了 72°

最後考慮 150° 的同界角 1590° 時， $x^5 = 2(\cos 1590^\circ + i \sin 1590^\circ)$

$x_5 = \sqrt[5]{2}(\cos 318^\circ + i \sin 318^\circ)$ ，此根與 x_4 在同一個圓上，但輻角又多了 72°

由以上的討論知， $x^5 = -1 + \sqrt{3}i$ 的五次方根，仍為圓上的正五邊形，只是起始點不在 x 軸正向上。

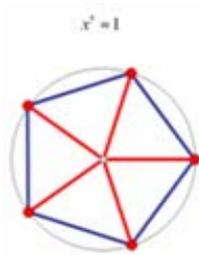


圖 3.5.14 求 1 的五次方根

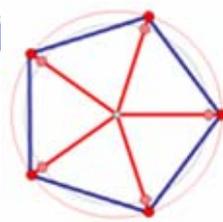


圖 3.5.15 求 2 的五次方根

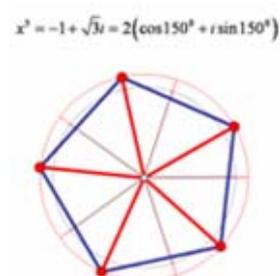


圖 3.5.16 求 $-1 + \sqrt{3}i$ 的五次方根

因此，我們可以推得一般通解，如下：

$x^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r > 0$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ ，的 n 次方根為

$$x = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

臺上十分鐘，臺下十年功，教學素材的製作，耗時費神，幸虧近年來資訊軟體的發展，已大大降低製作成本，更大幅提升製作出來的品質。

由於 GSP 非簡報軟體，故素材畫面的呈現須由使用者自行逐步處理，動畫部分製作的負擔較大。並不像 PowerPoint 可以做很多的分頁，依次呈現，GSP 常在同一個頁面中包含大量物件來處理大量的動作，動畫需製作一堆按鈕，使得後續的維護修改難度大增。另外，PowerPoint 簡報系統可以前後跳躍至想呈現的分頁，隨時快轉或倒帶，這是 GSP 的動畫呈現較難處理的部份。

如果是作上課教學素材的呈現，建議用 PowerPoint with MathPS 來開發，腳本維護會比較容易。如果是作教材內容的探索研究，建議用 GSP。也可以將二者並用，先利用 GSP 構作一些基本架構圖形如拋物線或雙曲線，然後將內容複製至 PowerPoint 內貼上，取消群組後，便可在 PowerPoint 內作後續處理呈現。

PowerPoint 的軟體普及率較高，而 GSP 則未必每台電腦都有安裝，因此 GSP 檔案的流通較不方便。Macromedia 推出了一套 Flash Captivate 的軟體，可以將電腦上的螢幕畫面直接錄製成 Flash 檔，可以將 GSP 作出來的動畫效果錄製成 Flash 檔播放，就像在看動畫影片一樣，可以改善 GSP 檔的流通性，不過，製成 Flash 檔後，就不能再編修為其缺點。

如果每位教師都得自行開發教學素材，勢必大量重複教學資源，有待商榷，故教學資源的分享流通是必然的趨勢。但每位教師的上課風格、教學方式不同，很難用同一套教學素材套用給所有教師使用。因此，在教學素材的流通分享上，必須兼顧可適性修正調整的功能。由 GSP 或 PowerPoint with MathPS 所開發出來的教材，絕大多數教師都可迅速上手，並適性調整成適合自己使用的素材。

四、立體環境下的教學素材開發

本章主要利用立體動態幾何軟體 Cabri-3D 來輔助高中數學立體幾何的教學課程，挑選幾題相關題目作實例分析，另外，針對課程中的幾個重要觀念作教學素材開發。

初次接觸 Cabri-3D 這套軟體，是在交通大學理學院在職專班網路學習組素材課程中，聽清華大學全任重教授演講，如何利用幾何動態繪圖軟體來輔助高中數學圓錐曲線的教學，全教授示範了幾個立體的構圖範例，從平面切割立體圓錐產生的截痕就是圓錐曲線，讓我為這套軟體的立體展示功能驚艷不已，也決定要好好學這套 Cabri-3D 軟體來作教學輔助。用 Cabri-3D 為開發工具，以動態立體幾何的方式，讓學生可以實際看到空間立體圖形，而非看著黑板上粉筆留下的二維圖形再自行努力想像對應的立體圖形。Cabri-3D 提供的功能讓學習者可以從多種不同的視角觀察同一個圖形，讓學習立體觀念不再瞎子摸象，協助學生培養清楚的空間概念。Cabri-3D 的相關應用很多，本文僅著重在高中數學相關部分稍加探討，如有興趣鑽研更深者可在清大全教授的網站上找到許多寶貴的參考資料。

4.1 節為應用 Cabri-3D 來作大考試題的範例圖形解析，之後是為教學素材開發實作，探討的主題分別是 4.2 節三垂線定理、4.3 節歪斜線距離、4.4 節正四面體的高、4.5 節圓錐截痕與圓柱截痕。

各節範例原均為動態幾何效果，可於螢幕上轉換各種不同視角以利觀察，因論文書面輸出，無法呈現動態效果，故各節中僅擷取代表性靜態圖片展示。



4.1 常見立體觀念

我們先從幾個簡單的範例著手，慢慢推廣到較複雜的圖形，以下我們舉幾題大學入學考試與立體空間相關的題目，應用 Cabri-3D 來呈現其立體圖形。

例 1. 圖 4.1.1 為一正立方體， A, B, C 分別為所在的邊之中點。通過 A, B, C 三點的平面與此立方體表面相截，問下列何者為其截痕的形狀？(1) 直角三角形 (2) 非直角的三角形 (3) 正方形 (4) 非正方形的長方形 (5) 六邊形 (88 學測單選第 3 題)

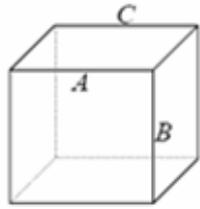


圖 4.1.1 正立方體

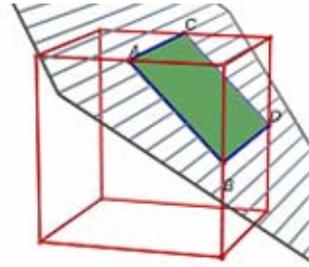


圖 4.1.2 平面截正立方體

如圖 4.1.2 所示，截痕為長方形，邊的比例是 $\sqrt{2}:1$ 。答案選(4)。

從這個題目可以看出來，其實學習目標未必都需要複雜計算，觀念清楚很重要。



例 2. 設一球之球心與一正立方體之中心重合，考慮球面與正立方體所有邊的交點，則交點的個數 不可能是(A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24(90 指考數甲單選第 3 題)

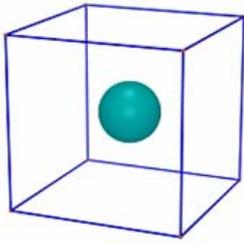


圖 4.1.3
當 $0 < R < \sqrt{2}$
交點 0 個

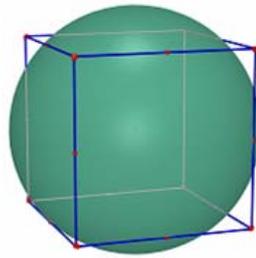


圖 4.1.4
當 $R = \sqrt{2}$
交點 12 個

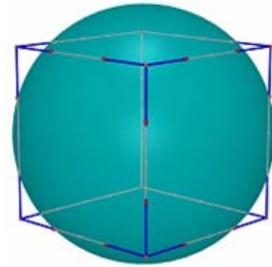


圖 4.1.5
當 $\sqrt{2} < R < \sqrt{3}$
交點 24 個

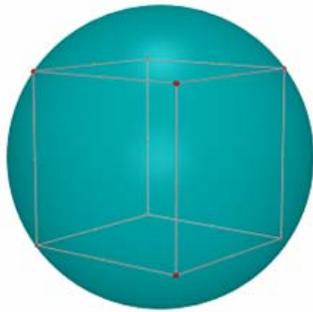


圖 4.1.6 當 $R = \sqrt{3}$ 交點 8 個

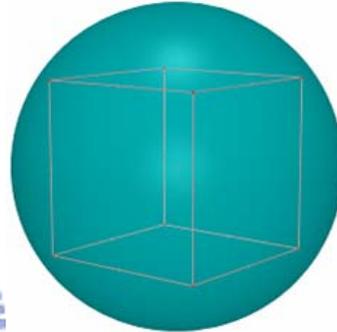


圖 4.1.7 當 $R > \sqrt{3}$ 交點 0 個

假設正立方體的稜長為 2，球半徑為 R ，在 Cabri-3D 環境下，將球的半徑逐步放大，可得圖 4.1.3~4.1.7。故知交點數可能為 0, 8, 12, 24 個。答案選(D)

例 3. 在空間中，一平面與一正方體相截，若在平面的兩側各有正立方體的 4 個頂點，則其截面的形狀可能是下列哪種圖形？(1) 三角形(2) 四邊形(3) 五邊形(4) 六邊形(5) 八邊形(93 指考數乙多選第 5 題)

如圖 4.1.8 與 4.1.9，本題答案應選(2)與(4)。

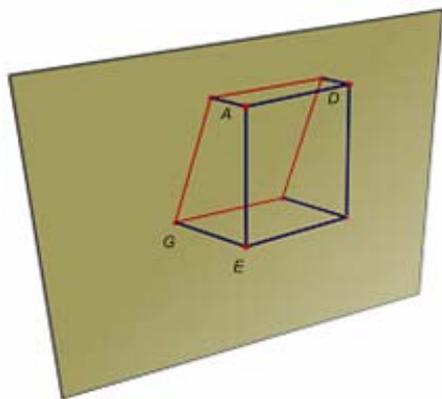


圖 4.1.8
平面截正立方體的截面為四邊形

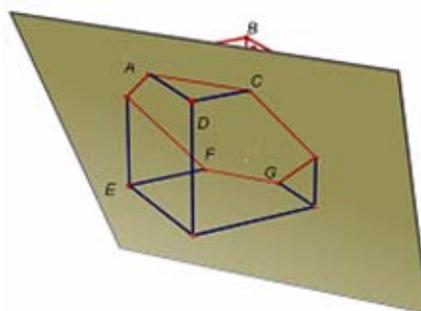


圖 4.1.9
平面截正立方體的截面為六邊形

如果沒有立體圖形，很難憑空想像，如果能用 Cabri-3D 輔助，如圖 4.1.8 與圖 4.1.9 就很清楚知道有四邊形與六邊形兩種，當然考試時，是不能帶電腦進去跑軟體，平時若有這種訓練，養成清楚的空間概念，評量時，自然能想像出該立體畫面。

Cabri-3D 這套軟體的操作介面很親合，很容易上手，適合學生摸索操作。

例 4. 將一個正四面體的四個面上的各邊中點用線段連接，可得四個小正四面體及一個正八面體，如圖 4.1.10 所示。如果原四面體 $ABCD$ 的體積為 12，那麼此正八面體的體積為何？(90 學測填充第 H 題)

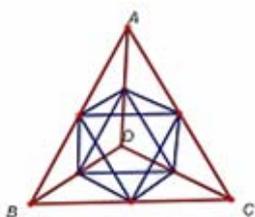


圖 4.1.10 正八面體(一)

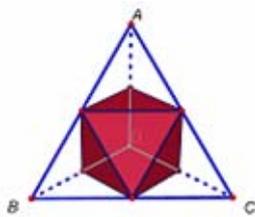


圖 4.1.11 正八面體(二)

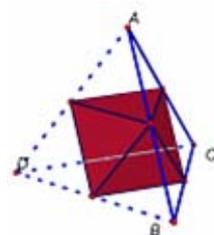


圖 4.1.12 正八面體(三)

如圖 4.1.11 與 4.1.12, 從不同的視角觀察圖形，可以發現將四個角落的小正四面體減掉，剩下的就是正八面體，因為小正四面體的稜長為原正四面體稜長的 $\frac{1}{2}$ ，而體積比例是邊長比例的立方，因此其小正四面體體積為原正四面體體積的 $\frac{1}{8}$ ，正八面體體積

$$\text{積} = 12 \times \left(1 - 4 \times \frac{1}{8} \right) = 6$$



例 5. 如圖 4.1.13 的四角錐展開圖，四角錐底面為邊長 2 的正方形，四個側面都是腰長為 4 的等腰三角形，則此四角錐的高度為何？(90 學測填充第 F 題)

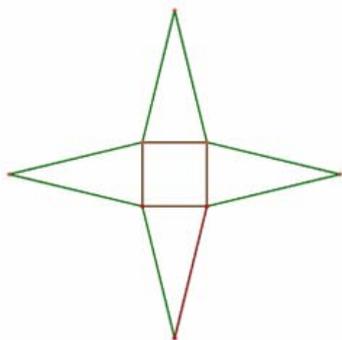


圖 4.1.13 四角錐展開圖



圖 4.1.14 四角錐

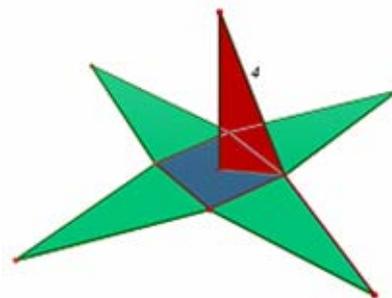


圖 4.1.15 四角錐的高

將四角錐展開圖摺起，如圖 4.1.14 所示，再將其展開後如圖 4.1.15，等腰三角形的腰長 4 會對應到圖中紅色直角三角形的斜邊，另一股為底面正方形對角線的一半 $\sqrt{2}$ ，根據畢氏定理得此四角錐的高為 $\sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{14}$



例 6.圖 4.1.16 為一單位正立方體 $ABCDEFGH$ ，(即稜長 1)。則四面體 $ACFH$ 的表面積為何？體積為何？(92 指考數乙填充第 G,H 題)

由圖 4.1.17 與 4.1.18 可看出，四面體 $ACFH$ 為正四面體，其中任一面都是正三角形，故四面體 $ACFH$ 的表面積 = 4 個 $\triangle ACH$ 面積 = $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\overline{AC})^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$
 四面體 $ACFH$ 的體積 = 正立方體 $(ABCD-EFGH)$ 減四個四面體 $(A-EFH)$ 體積
 $= 1 \times 1 \times 1 - 4 \times \left(\frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 1 \right) = \frac{1}{3}$

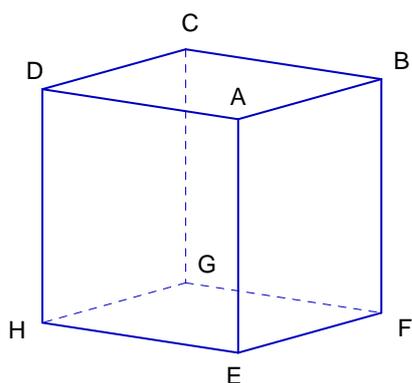


圖 4.1.16 正立方體

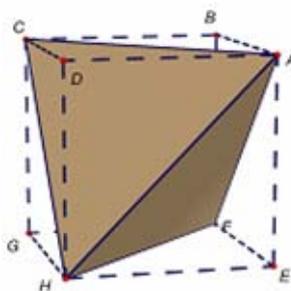


圖 4.1.17 四面體

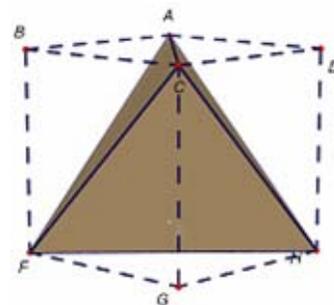


圖 4.1.18 四面體

在 Cabri-3D 軟體中，操作者只要用滑鼠右鍵拖曳，就可以變換各種視角來看立體圖形，對於空間概念的建構有很大的幫助。

4.2 三垂線定理

三垂線定理是立體幾何中一個基本性質，以 Cabri-3D 輔助環境下，來重新檢視一下這個重要的定理。

三垂線定理：如圖 4.2.1，空間中直線 \overline{PH} 垂直平面 E 於 H 點，若直線 \overline{PM} 與直線 L 垂直於點 M，則直線 \overline{HM} 與直線 L 垂直。

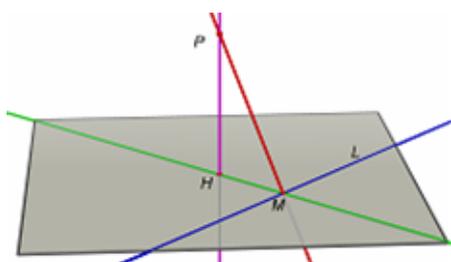


圖 4.2.1 三垂線定理

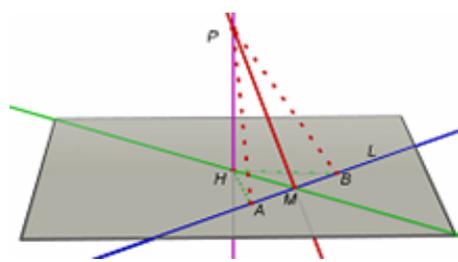


圖 4.2.2 作輔助線

證明：如圖 4.2.2，在直線 L 上取 A, B 兩點，使滿足 \overline{AB} 的中點為 M。連結 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{HA}, \overline{HB}$ ，如圖 4.2.3 與圖 4.2.4 所示。

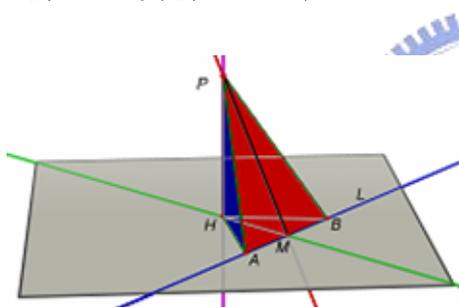


圖 4.2.3 側視圖



圖 4.2.4 後視圖

$\because \overline{PM} = \overline{PM}, \angle PMA = \angle PMB, \overline{MA} = \overline{MB}$ ，如圖 4.2.5，紅色三角形全等 $\Delta PMA \cong \Delta PMB(SAS)$ ，得 $\overline{PA} = \overline{PB}$

$\because \overline{PA} = \overline{PB}, \angle PHA = \angle PHB, \overline{PH} = \overline{PH}$ ，如圖 4.2.6，藍色三角形全等 $\Delta PHA \cong \Delta PHB(RHS)$ ，得 $\overline{HA} = \overline{HB}$

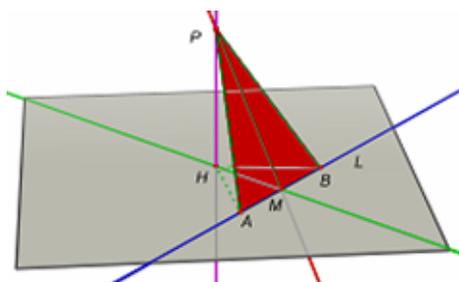


圖 4.2.5 紅三角形全等

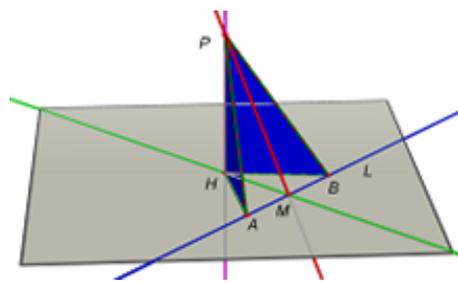


圖 4.2.6 藍三角形全等

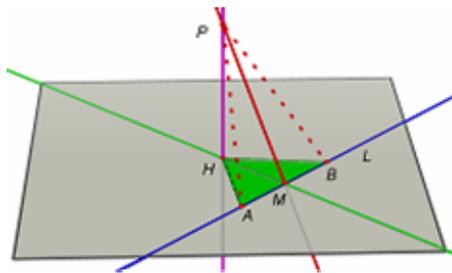


圖 4.2.7 綠三角形全等

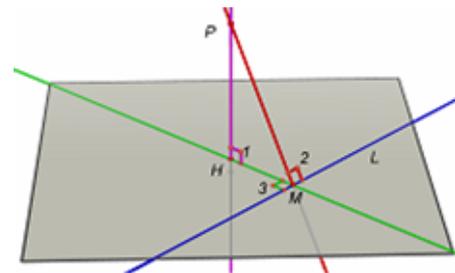


圖 4.2.8 三個垂直

$\because \overline{HA} = \overline{HB}, \overline{HM} = \overline{HM}, \overline{MA} = \overline{MB}$ ，如圖 4.2.7，綠色三角形全等 $\Delta HMA \cong \Delta HMB (SSS)$ ，得 $\angle HMA = \angle HMB = 90^\circ$ ，即 $\overline{HM} \perp L$ ，三垂線定理得證。

如圖 4.2.8，三垂線定理是由三個垂直條件所構成，若已知編號 1 與 2 的垂直條件成立，則編號 3 的垂直條件亦成立。事實上，若已知編號 1 與 3 的垂直條件成立，則編號 2 的垂直條件亦成立。證明方式仿剛才的全等證明，僅順序改成綠、藍、紅而已。

三垂線的證明，牽涉到多個不同平面上的全等證明，在 Cabri-3D 的環境下，可以從不同的角度去觀察這些性質，讓學生更容易理解這個定理。

除了上述利用全等性質的證明，以下再提供一個利用向量內積的證明方式，用向量證明簡短俐落很多，但向量內積觀念要夠清楚才能理解。

三垂線定理的向量版證明：

$$\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{L} = \left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PH} \right) \cdot \overrightarrow{L} = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{L} - \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{L} = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{L} - 0 = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{L}$$

$$\text{故 } \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{L} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{L} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{L} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{L} \text{，得證。}$$

4.3 空間中的歪斜線

空間中二條直線，若不平行且不相交則稱此二直線歪斜，很多高中學生一開始不太容易想像其相對關係，後來要算此歪斜線的最短距離，更是很多學生放棄的部份，如果空間概念能輔以 3D 動態幾何軟體來具體呈現其圖形，對學生的學習效率上可以有很大的提升，本節中將討論空間中二歪斜線的距離。

例：求直線 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$ 與直線 $M: \frac{x-7}{2} = \frac{y+13}{1} = \frac{z-5}{1}$ 的距離

法一：利用點到面距離來計算，如圖 4.3.1

$$\text{利用外積求出公垂向量 } \vec{N} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2, -5, 1)$$

則平行 L 且包含 M 的平面方程式為 $E: 2(x-7) - 5(y+13) + 1(z-5) = 0$

$$\text{由 } L \text{ 上點 } (1, 1, -3) \text{ 到平面 } E \text{ 的距離 } \frac{|2(1-7) - 5(1+13) + 1(-3-5)|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{90}{\sqrt{30}} = 3\sqrt{30}$$

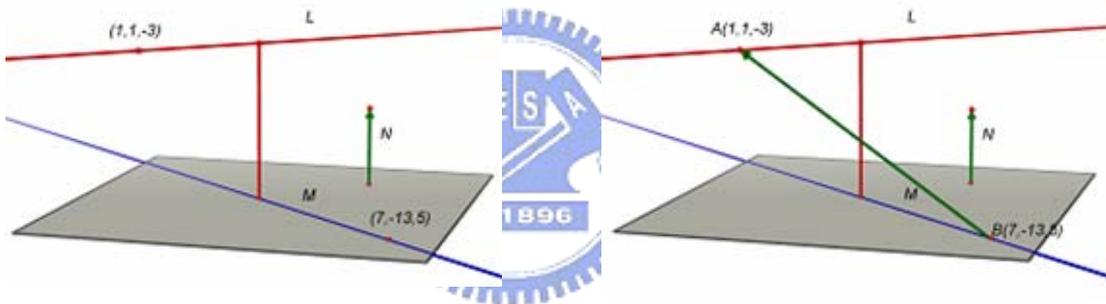


圖 4.3.1 歪斜線(一)

圖 4.3.2 歪斜線(二)

法二：利用向量的正射影來計算，如圖 4.3.2

$$\vec{N} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2, -5, 1), \quad \vec{BA} = (-6, 14, -8)$$

$$\vec{BA} \text{ 在 } \vec{N} \text{ 的正射影長度為 } \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} = \frac{|-12 - 70 - 8|}{\sqrt{30}} = 3\sqrt{30}$$

法三：設 L 上一點 $P(1+3t, 1+2t, -3+4t)$ ，設 M 上一點 $Q(7+2k, -13+k, 5+k)$

使得向量 \vec{PQ} 同時垂直 L 與 M ，因 $\vec{PQ} = (2k-3t+6, k-2t-14, k-4t+8)$

由 \vec{PQ} 垂直 L ，得 $3(2k-3t+6) + 2(k-2t-14) + 4(k-4t+8) = 0$

由 \vec{PQ} 垂直 M ，得 $2(2k-3t+6) + 1(k-2t-14) + 1(k-4t+8) = 0$

$$\text{整理得聯立方程式 } \begin{cases} 12k - 29t + 22 = 0 \\ 6k - 12t + 6 = 0 \end{cases}$$

解得 $t = 2, k = 3$

代回得 $P(7,5,5), Q(13,-10,8)$

$$\text{所求} = \overline{PQ} = \sqrt{(7-13)^2 + (5-(-10))^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{30}$$

法三固然可以求出解答，但一堆純代數運算，往往讓學生迷失在運算之中。雖然法三計算量最多最辛苦，但多數學生還是選擇法三，原因是法三比較好理解，學生只要願意付出計算時間當代價，就可以得到分數。法一與法二顯然計算上比較簡短，但相對的，學生必須對空間概念有清楚的認識，才能順利使用這樣的解法，而現在高中生的空間概念普遍比較薄弱，如果能將 Cabri-3D 融入高中數學空間概念教學，對提升學生的空間概念理解力會有很大的幫助。



4.4 正四面體的高

正四面體是課程中常用到的立體基本圖形，我們利用 Cabri-3D 的立體繪圖功能來輔助探討一下它的一些基本性質。

如圖 4.4.1, 正四面體 $A-BCD$, 稜長= a , 則底面 $\triangle BCD$ 為正三角形, 因此 $\overline{BM} = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, H 為 $\triangle BCD$ 重心, 如圖 4.4.2, $\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

又 $\triangle ABH$ 為直角三角形, 因此 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$,

以內切球球心將 \overline{AH} 長度分成二段 \overline{AO} 與 \overline{OH} ,

以 \overline{OH} 為半徑作球得內切球(如圖 4.4.3), 以 \overline{OA} 為半徑作球得外接球(如圖 4.4.4),

將正四面體分割成四個小三角錐逐漸拉開(如圖 4.4.5),

將小三角錐的表面改成斜線透視內部(如圖 4.4.6),

可知以正四面體的表面為小三角錐的底時, 小三角錐的高即為內切球半徑,

正四面體體積 = $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, 每一個小三角錐的體積 = $\frac{1}{3} \cdot \overline{OH} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

由 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = 4 \times \frac{1}{3} \cdot \overline{OH} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

得內切圓半徑 $\overline{OH} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, 外接圓半徑 $\overline{OA} = \overline{AH} - \overline{OH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

整理得四面體的高 = $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 內切圓半徑 = $\frac{\sqrt{6}}{12}a$, 外接圓半徑 = $\frac{\sqrt{6}}{4}a$

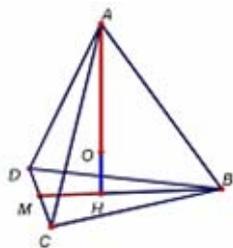


圖 4.4.1 正四面體底面中線

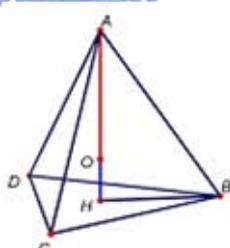


圖 4.4.2 正四面體的高

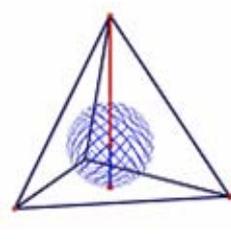


圖 4.4.3 正四面體內切球

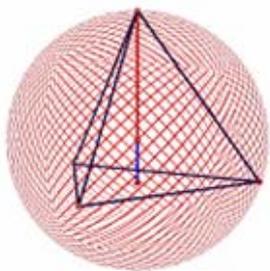


圖 4.4.4 正四面體外接球

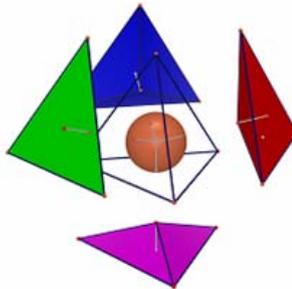


圖 4.4.5 正四面體分解圖

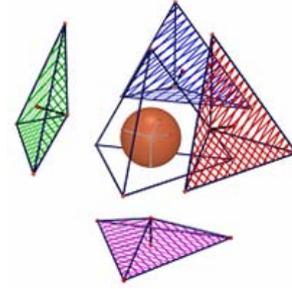


圖 4.4.6 正四面體分解圖

4.5 圓錐截痕

圓錐曲線這個名詞的由來，其實即指橢圓、雙曲線與拋物線這三種曲線都是圓錐截痕，亦即給定一個圓錐體，用一個平面去切割圓錐，可切出上述三種曲線痕跡。

在課程標準中，圓錐曲線的定義是用焦點或準線去定義的，所以要如何說明圓錐截痕的性質，除了直觀的感覺之外，最常見的方式就是使用模型教具來輔助，如圖 4.5.1~圖 4.5.3，但是在實際的教學現場，模型的教學效果非常有限，一方面是教師手上拿著模型時，多數學生很難近距離仔細觀察模型，無法跟上教師的解說；將模型教具讓同學傳閱時，又無法同時兼顧每個同學觀察時都有教師解說，除非每種模型都大量製作滿足學生人手一個，但基於成本考量，這又是不太可能的事。



圖 4.5.1 圓錐截痕
橢圓模型



圖 4.5.2 圓錐截痕
雙曲線模型



圖 4.5.3 圓錐截痕
拋物線模型

但 Cabri-3D 改變了這個現況，它具備幾個模型教具沒有的優點，如可以投影至大螢幕讓所有學生同時觀察，可以動態呈現從各個不同角度觀察，可以局部強調重點幾何元件如點、線或面等等。在 Cabri-3D 環境下，實作圓錐截痕素材如後：

因論文書面輸出，無法呈現動態效果，故僅擷取代表性靜態圖片展示。

4.5.1 圓錐截痕之橢圓

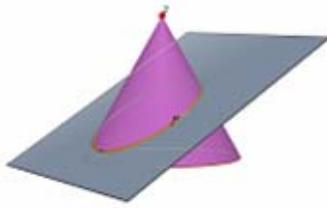


圖 4.5.4 平面截圓錐

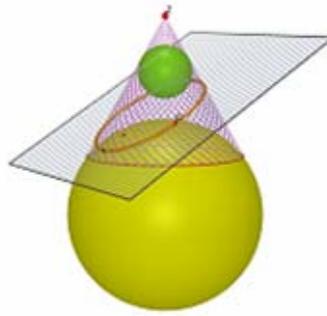


圖 4.5.5 作二切球

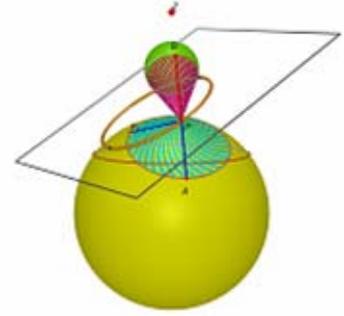


圖 4.5.6 切線段軌跡

如圖 4.5.4 給定一圓錐與一平面，二者相交部份即為截痕，截痕上取一動點 P。如圖 4.5.5 作二個球，同時相切於圓錐體與平面，假設此二球與平面的切點分別為 F_1 與 F_2 。如圖 4.5.6 過 P 點對上方小綠球作切線段，構成一個圓錐體，所有的切線段等長，所有的切點構成小綠球面上的一圓如圖 4.5.7，假設該圓與圓錐體的交點為 B 點，則 $\overline{PF_1} = \overline{PB}$ ，同理對下方大黃球得 $\overline{PF_2} = \overline{PA}$ 。如圖 4.5.8 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB}$ ，線段 \overline{AB} 的長度與 P 點的所在位置無關，為一定值。如圖 4.5.9 平面與圓錐的截痕軌跡滿足 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{定值}$ ，即滿足橢圓的定義，故此截痕軌跡為橢圓。

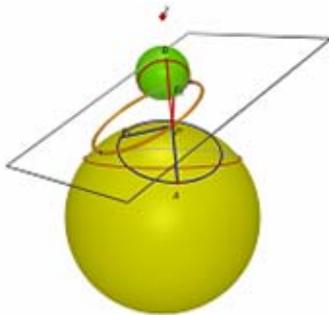


圖 4.5.7 切線段等距

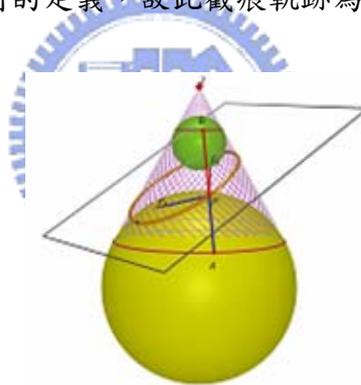


圖 4.5.8 距離和定值

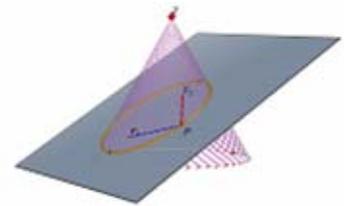


圖 4.5.9 橢圓定義

4.5.2 圓錐截痕之雙曲線

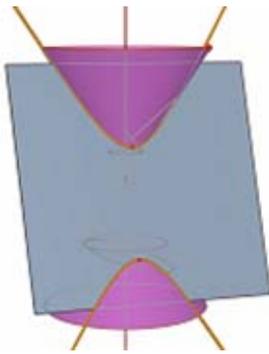


圖 4.5.10 平面截圓錐

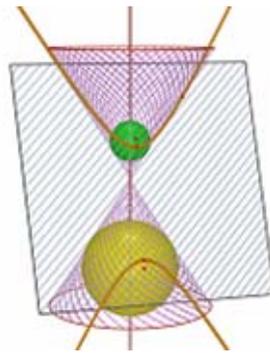


圖 4.5.11 作二切球

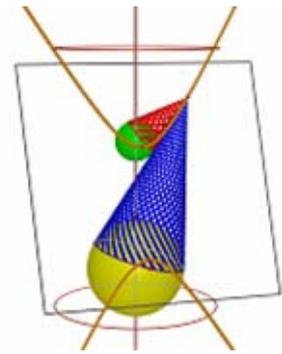


圖 4.5.12 切線段軌跡

如圖 4.5.10 給定一圓錐與一平面，二者相交部份即為截痕，截痕上取一動點 P。如圖 4.5.11 作二個球，同時相切於圓錐體與平面，假設此二球與平面的切點分別為 F_1 與 F_2 。如圖 4.5.12 過 P 點對上方小綠球作切線段，構成一個圓錐體，所有的切線段等長，所有的切點構成小綠球面上的一圓如圖 4.5.13，假設該圓與圓錐體的交點為 A 點，則 $\overline{PF_1} = \overline{PA}$ ，同理對下方大黃球得 $\overline{PF_2} = \overline{PB}$ 。如圖 4.5.14 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB}$ ，線段 \overline{AB} 的長度與 P 點的所在位置無關，為一定值。如圖 4.5.15 平面與圓錐的截痕軌跡滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \text{定值}$ ，即滿足雙曲線的定義，故此截痕軌跡為雙曲線。

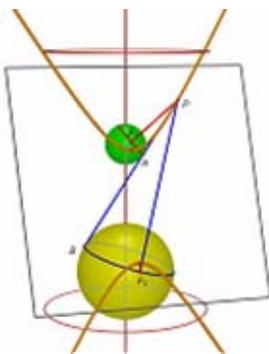


圖 4.5.13 切線段等距

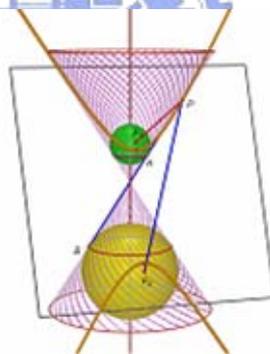


圖 4.5.14 距離差定值

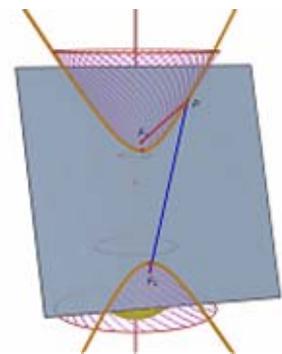


圖 4.5.15 雙曲線定義

4.5.3 圓錐截痕之拋物線

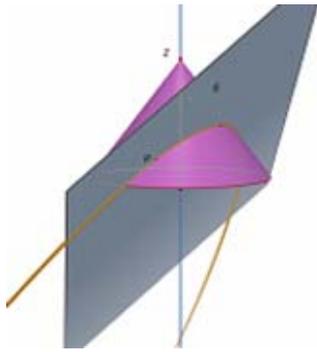


圖 4.5.16 平面截圓錐

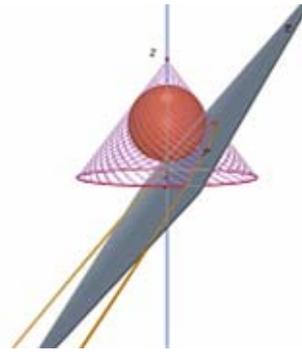


圖 4.5.17 作切球

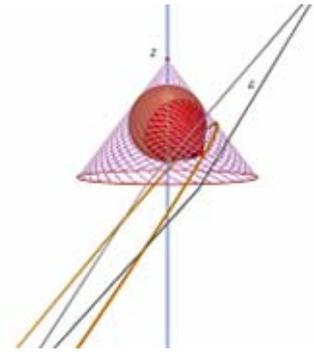


圖 4.5.18 切線段軌跡

如圖 4.5.16 給定一圓錐與一平行圓錐側高的平面 E ，二者相交部份即為截痕，截痕上取一動點 P 。如圖 4.5.17 作一個球，同時相切於圓錐體與平面，假設此球與平面的切點分別為 F 。如圖 4.5.18 過 P 點對球作切線段，構成一個圓錐體，所有的切線段等長，所有的切點構成球面上的一圓如圖 4.5.19，假設該圓與圓錐體的交點為 G 點，則 $\overline{PF} = \overline{PG}$ 。如圖 4.5.20 過點 G 作垂直於圓錐體對稱軸的平面 E' ，與原平面 E 交於一線 L ，如圖 4.5.21 過點 P 對直線 L 作垂足 T ，過點 P 對平面 E' 作垂足 R 。

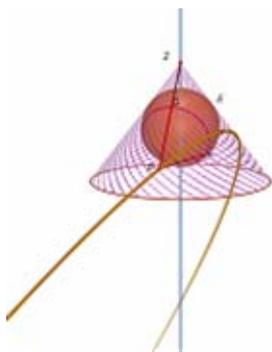


圖 4.5.19 切線段等長

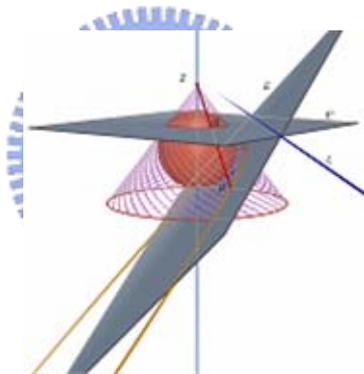


圖 4.5.20 作準線

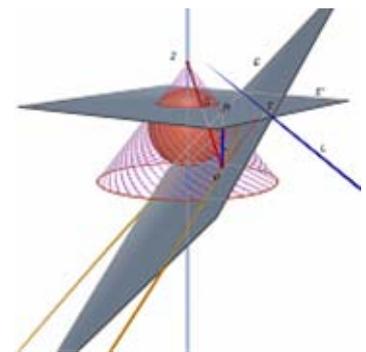


圖 4.5.21 過 P 作垂足

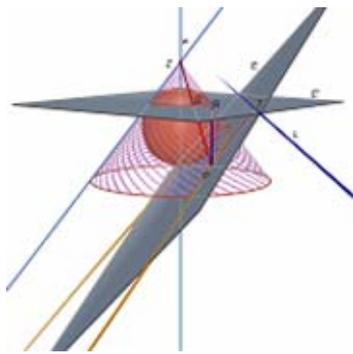


圖 4.5.22 同位角相等

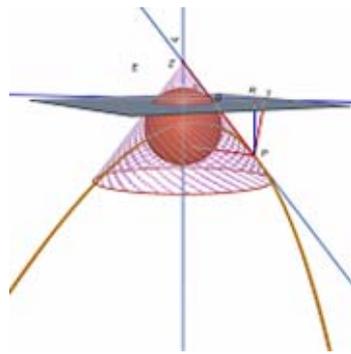


圖 4.5.23 同位角相等

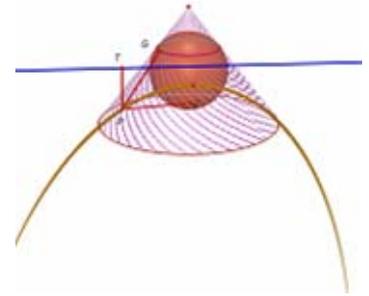


圖 4.5.24 $d(P,F) = d(P,L)$

如圖 4.5.22 $\angle RPT = w =$ 圓錐體的側高與對稱軸的夾角，如圖 4.5.23 $\angle RPG = w$ ，因此 $\angle RPT = \angle RPG$ ，故 $\triangle RPT \cong \triangle RPG (ASA)$ ，得 $\overline{PG} = \overline{PT} = d(P,L)$ ，配合前述 $\overline{PF} = \overline{PG}$ ，如圖 4.5.24 得平面與圓錐的截痕軌跡滿足 $\overline{PF} = d(P,L)$ ，即滿足拋物線的定義，如圖 4.5.25 故此截痕軌跡為拋物線。

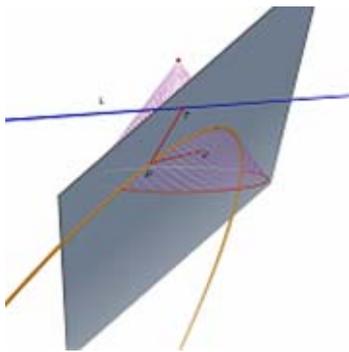


圖 4.5.25 拋物線定義



4.5.4 圓柱截痕

平面截圓柱也可以產生橢圓，但無法產生拋物線或雙曲線。

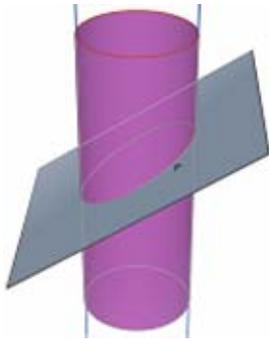


圖 4.5.26 平面截圓柱

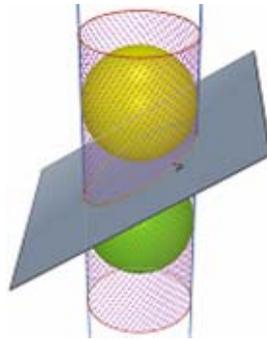


圖 4.5.27 作二切球

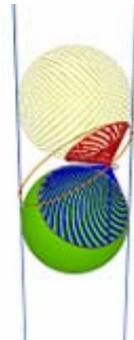


圖 4.5.28 切線段軌跡

如圖 4.5.26 給定一圓柱與一平面，二者相交部份即為截痕，截痕上取一動點 P。如圖 4.5.27 作二個球，同時相切於圓柱體與平面，假設此二球與平面的切點分別為 F_1 與 F_2 。如圖 4.5.28 過 P 點對上方小黃球作切線段，構成一個圓錐體，所有的切線段等長，所有的切點構成小黃球面上的一圓如圖 4.5.29，假設該圓與圓錐體的交點為 B 點，則 $\overline{PF_2} = \overline{PB}$ ，同理對下方大綠球得 $\overline{PF_1} = \overline{PA}$ 。如圖 4.5.30 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB}$ ，線段 \overline{AB} 的長度與 P 點的所在位置無關，為一定值。如圖 4.5.31 平面與圓錐的截痕軌跡滿足 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{定值}$ ，即滿足橢圓的定義，如圖 4.5.32 故此截痕軌跡為橢圓。

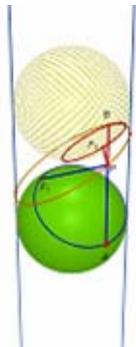


圖 4.5.29 切線段等距

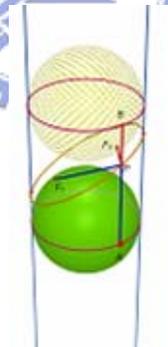


圖 4.5.30 距離和相等



圖 4.5.31 距離和定值

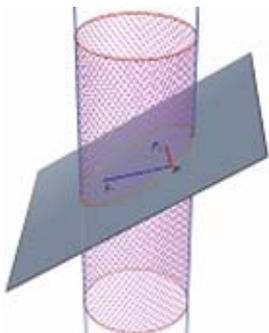


圖 4.5.32 橢圓定義

五、 資訊科技輔助專題導向式學習

本章將討論如何利用相關數學軟體來作數學專題研究，讓學生透過實作探索學習，這個專題的起因是學生在利用 GSP 學習圓錐曲線時，發現了一個現象，在 GSP 軟體環境中，如果畫出一個橢圓，再畫另一條直線時，GSP 無法產生此二個物件的交點，於是引導學生開始一連串的討論過程。

動手做使被動成為主動更有益於瞭解問題的真諦。古諺：「我聽...而後就忘，我看...而後我記得，我做...而後我理解」更明確指出學習科學動手做的重要性(顏貽隆，2003)。唯有實際動手作，才能得到踏實的知識，並讓學生得到探索與發現的樂趣。

專題導向式學習是一種「做中學」(learning by doing)的學習方式，整個歷程以專題為學習主軸，在相關情境的引導下，根據主題，經由學生的設計、產生問題，解決問題，給予學生機會，以學生為主體，並以小組方式在一段期間內從事相關的工作，並且完成研究報告(余尚芸，2004)。

圓錐曲線是高中數學課程中蠻重要的一個單元。對學生而言也是吃力的部份之一。也是動態幾何軟體可以發揮的部份。顏貽隆開發了許多的圓錐曲線的教學物件，但多屬教師示範給學生看的教學活動，本文選定了圓錐曲線作專題導向式學習研究，透過 GSP 軟體的協助，讓學生能自己動手摸索，對圓錐曲線的各種性質有更深入的了解與探討，對於課程內的內容能有更深的體會，並利用 GSP 熟悉尺規作圖的規則。然後將圓錐曲線的性質應用到面積的平分研究，在 Maple 軟體的輔助下，更將平面的性質推廣到立體的體積平分。其中體積平分部份不屬尺規作圖範圍。

與第三章、第四章的教學素材開發上比較不同的是教材開發屬於偏課程內容裡的教材，用資訊科技來輔助是為了教學效果更好，學生學習效率更好。而本章所提的專題導向式學習，屬於引導學生去摸索觀察未知的性質，透過觀察、蒐證、歸納、研判、推理、發現問題、解決問題的過程，讓學生在參與專題研究的過程中學習成長。

本章將由基本性質出發引導學生進入專題導向式研究，5.1 節先回顧圓錐曲線的基本性質，5.2 節將討論圓的配極推廣到圓錐曲線時的情形，5.3 節回顧起始問題，並利用配極的觀念解決問題，5.4 節則討論決定圓錐曲線的條件，5.5 節應用雙曲線的切線性質去探討面積平分的問題，5.6 節嘗試將面積平分的性質推廣到體積平分。

5.1 圓錐曲線的基本性質

配合數學軟體的動態模擬與測量觀察幾何性質，是黑板粉筆這些傳統教具所無法呈現的，圓錐曲線這個單元，很適合搭配幾何軟體來作相關教學。本節將從圓錐曲線的基本定義出發，讓學生藉實作去體驗拋物線、橢圓、雙曲線的定義與光學性質以及切線。讓學生實作去體驗出這樣的性質，會比直接告訴學生結果，來得更深刻踏實。

先讓學生實作各種圓錐曲線的基本性質操作，以利後續的專題研究發展。以下分成拋物線、橢圓、雙曲線三個部份介紹。



5.1.1 拋物線的定義： $d(P,F)=d(P,L)$

平面上到一定點 F 與一定直線 L 等距離的所有點所成的圖形，稱為拋物線。

拋物線的作圖：如圖 5.1.1，在準線上取一個動點 Q ，連接 \overline{FQ} ，作 \overline{FQ} 的中垂線，再作過 Q 且垂直於準線的直線，二線的交點 P 必滿足拋物線的定義

$d(P,F)=d(P,Q)=d(P,L)$ ，因此隨著動點 Q 的變化， P 的軌跡就會是拋物線。

拋物線的光學性質：如圖 5.1.2，以焦點 F 為光源發出的光線，經拋物面鏡反射後，行徑路線平行拋物線的對稱軸。

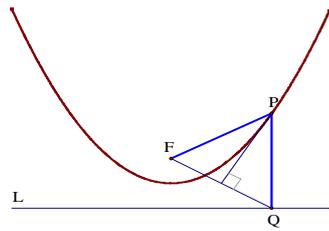


圖 5.1.1 拋物線定義

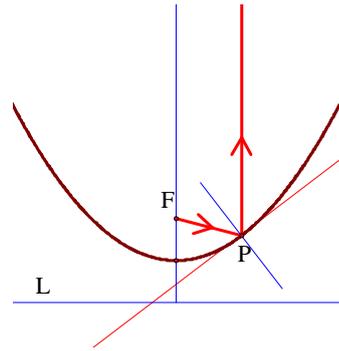


圖 5.1.2 拋物線光學性質

拋物線的切線性質

(1) 過拋物線上一點 P 的切線作法，如圖 5.1.3，連 \overline{PF} ，過 P 作射線平行對稱軸，則此射線與 \overline{PF} 的角平分線為法線，過 P 作法線之垂直線即得切線。

(2) 過拋物線外一點 P 的切線作法，如圖 5.1.4，以 P 為圓心， \overline{PF} 為半徑作圓交準線於 Q,R 二點，作 \overline{FQ} 與 \overline{FR} 的中垂線，即為切線。

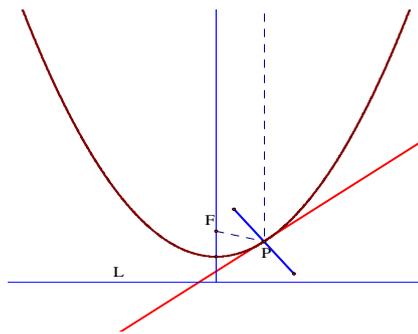


圖 5.1.3 拋物線切線

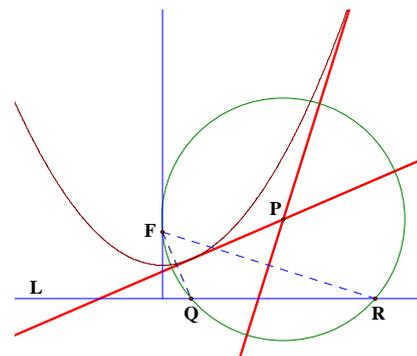


圖 5.1.4 拋物線切線作圖

5.1.2 橢圓的定義： $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

平面上到二定點 F_1 與 F_2 距離和為定值的所有點所成的圖形，稱為橢圓。

橢圓的作圖：如圖 5.1.5，以 F_1 為圓心， $2a$ 為半徑作圓，在圓上取動點 Q ，作 $\overline{F_2Q}$ 的中垂線交 $\overline{F_1Q}$ 於 P 點，根據中垂線到二端點等距的性質， $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, Q) = \text{半徑} = 2a$ ，滿足橢圓的定義，因此隨著動點 Q 的變化， P 的軌跡就會是橢圓。

橢圓的光學性質：如圖 5.1.6，以焦點 F_1 為光源發出的光線，經橢圓面鏡反射後，行徑路線會往 F_2 前進。

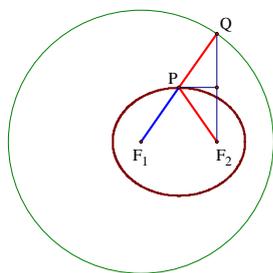


圖 5.1.5 橢圓定義

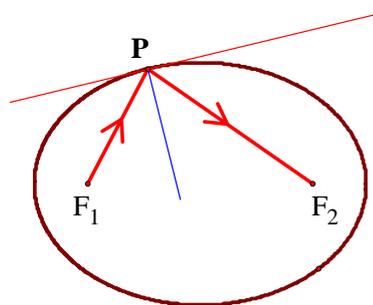


圖 5.1.6 橢圓光學性質

橢圓的切線性質

- (1) 過橢圓上一點 P 的切線作法，如圖 5.1.7，連 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PF_2}$ ，作 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PF_2}$ 的角平分線為法線，過 P 作法線之垂直線即得切線。
- (2) 過橢圓外一點 P 的切線作法，如圖 5.1.8，以 P 為圓心， $\overline{PF_2}$ 為半徑作圓交大圓(圓心 F_1 ，半徑 $2a$)於 Q, R 二點，作 $\overline{F_2Q}$ 與 $\overline{F_2R}$ 的中垂線，即為切線。

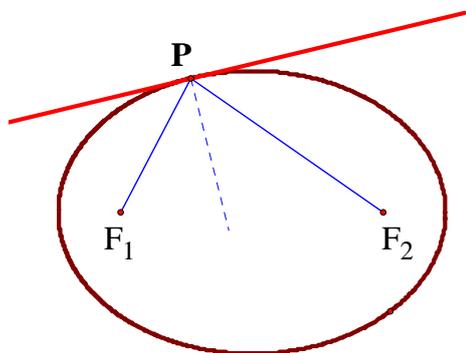


圖 5.1.7 橢圓切線

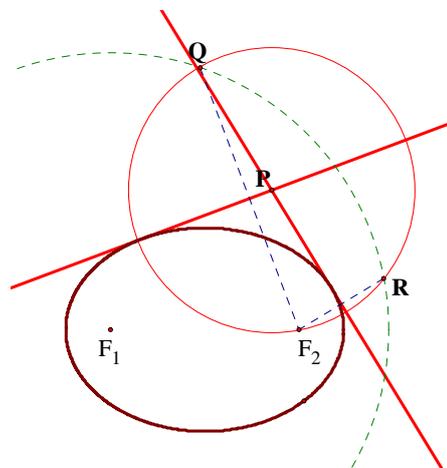


圖 5.1.8 橢圓切線作圖

5.1.3 雙曲線的定義： $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

平面上到二定點 F_1 與 F_2 距離差為定值的所有點所成的圖形，稱為雙曲線。

雙曲線的作圖：如圖 5.1.9，以 F_1 為圓心， $2a$ 為半徑作圓，在圓上取動點 Q ，作 $\overline{F_2Q}$ 的中垂線交 $\overline{F_1Q}$ 於 P 點，根據中垂線到二端點等距的性質， $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, Q)| = \text{半徑} = 2a$ ，滿足雙曲線的定義，因此隨著動點 Q 的變化， P 的軌跡就會是雙曲線。

雙曲線的光學性質：如圖 5.1.10，以焦點 F_1 為光源發出的光線，經雙曲線面鏡反射後，行徑路線會往 F_2 的反方向前進。

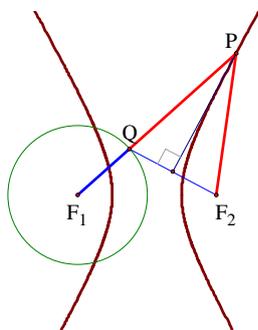


圖 5.1.9 雙曲線定義

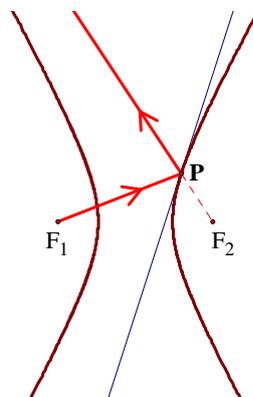


圖 5.1.10 雙曲線光學性質

雙曲線的切線性質：

- (1) 過雙曲線上一點 P 的切線作法，如圖 5.1.11，連 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PF_2}$ ，作 $\overline{PF_1}$ 與 $\overline{PF_2}$ 的角平分線即為切線。
- (2) 過雙曲線外一點 P 的切線作法，如圖 5.1.12，以 P 為圓心， $\overline{PF_2}$ 為半徑作圓交大圓(圓心 F_1 ，半徑 $2a$)於 Q, R 二點，作 $\overline{F_2Q}$ 與 $\overline{F_2R}$ 的中垂線，即為切線。

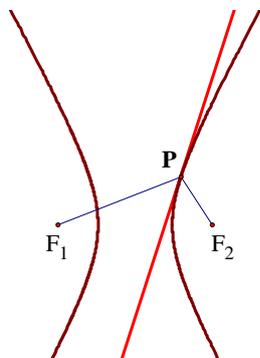


圖 5.1.11 雙曲線切線

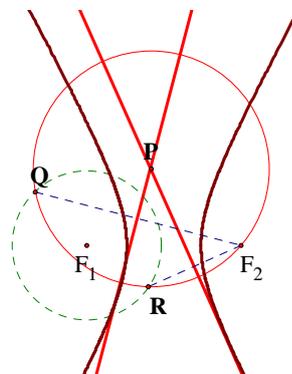


圖 5.1.12 雙曲線切線作圖

5.2 圓錐曲線的配極

圓是圓錐曲線的一個特例，類似橢圓的兩個焦點重合，先來討論圓的反演與配極(陳創義，2006)，並嘗試推廣到圓錐曲線的配極。

5.2.1 圓的反演與配極

圓的反演，點 $P \Rightarrow$ 點 P' ， $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ ，圓外任一點反演至圓內一點(一對一對應)，圓內任一點反演至圓外一點(一對一對應)

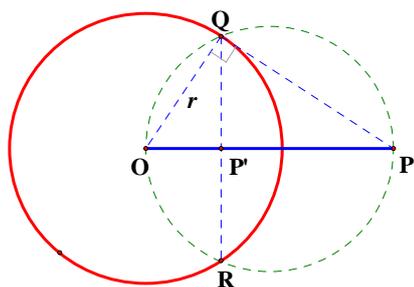


圖 5.2.1 圓外點反演

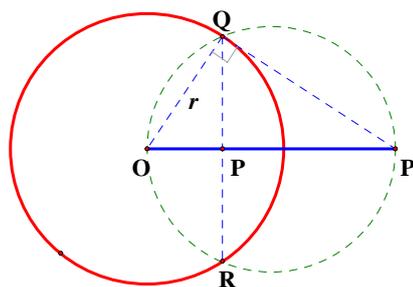


圖 5.2.2 圓內點反演

圓的配極，與反演類似，但將點配極成線，將線配極成點，稱為極軸與極點。

圓的極軸：點 P 配極後的極軸 L 為過反演點 P' 且垂直 \overline{OP} 的直線，當點 P 在圓外，極軸即切點連線。

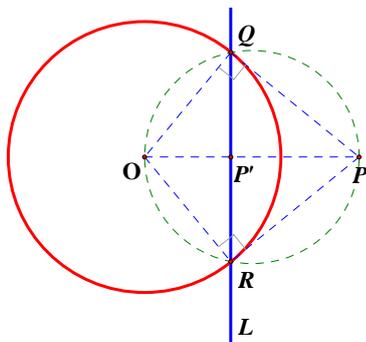


圖 5.2.3 圓外點配極軸

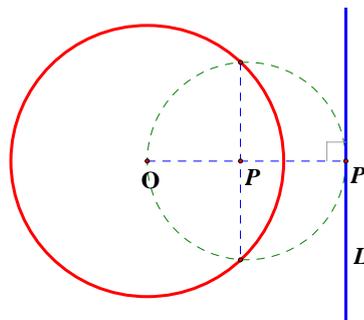


圖 5.2.4 圓內點配極軸

圓的極點：將圓心 O 對直線 L 的垂足點 P ，作反演點 P' 即為極點。

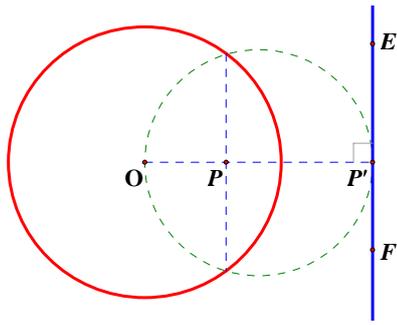


圖 5.2.5 線配極點(一)

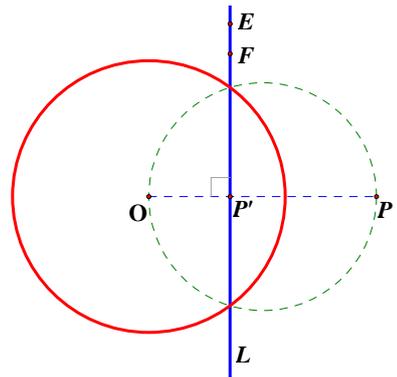


圖 5.2.6 線配極點(二)

接下來，將圓的配極的方法推廣至一般的圓錐曲線配極。



5.2.2 圓錐曲線的配極

在本節開始，先引入調和點列(解析幾何學辭典，1987)的概念，再據以定義圓錐曲線的極軸。

定義 5.2.1 調和點列

共線四點 $O-Z-X-Y$ ，若滿足 $\overline{OZ} : \overline{ZX} = \overline{OY} : \overline{XY}$ ，則稱此四點為調和點列。

性質：四點 $O-Z-X-Y$ 為調和點列，則 $\frac{2}{\overline{OX}} = \frac{1}{\overline{OY}} + \frac{1}{\overline{OZ}}$ (\overline{OX} 為 \overline{OY} 與 \overline{OZ} 之調和平均)

證明：四點 O, X, Y, Z 為調和點列，由定義得 $\overline{OZ} : \overline{ZX} = \overline{OY} : \overline{XY}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ZX}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{OY}} \Rightarrow \frac{\overline{OX} - \overline{OZ}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OY} - \overline{OX}}{\overline{OY}} \Rightarrow \frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}} - 1 = 1 - \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}} + \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = 2 \Rightarrow \frac{2}{\overline{OX}} = \frac{1}{\overline{OZ}} + \frac{1}{\overline{OY}}, \text{ 得證。}$$

定義 5.2.2 圓錐曲線的極軸

過點 O 作直線 L 交圓錐曲線 Γ 於 Y, Z 二點，若 X 為直線 L 上的點，且滿足四點 $O-Z-X-Y$ (如圖 5.2.7) 或 $X-Z-O-Y$ (如圖 5.2.8) 為調和點列，則 X 的軌跡是一條直線，稱此直線為點 O 對圓錐曲線 Γ 配極後的極軸。

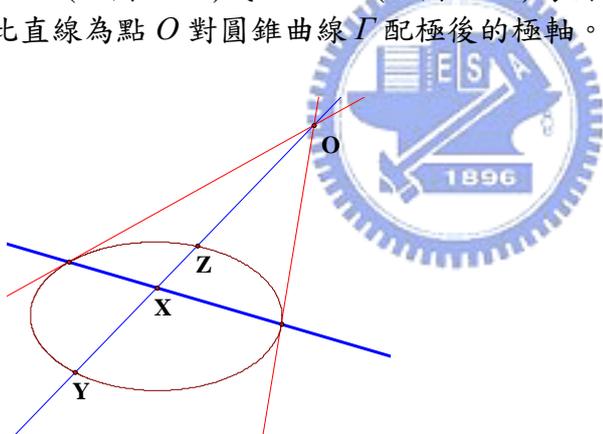


圖 5.2.7 圓錐曲線的極軸(內)

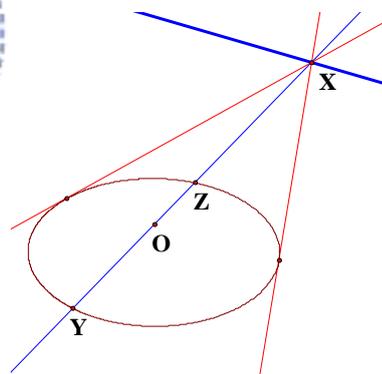


圖 5.2.8 圓錐曲線的極軸(外)

當 L 趨近於切線時， Y, Z 趨近於同一點(切點)，調和平均 X 也會趨近於同一點(切點)，故過 O 的二條切線的切點均在 X 的軌跡上，亦即此節定義之極軸包含前節定義之圓的極軸。此外，只要存在切線，極軸作圖也可用切點連線來作會更簡易。切線作法請參閱 5.1 節。

定義 5.2.3 圓錐曲線的極點

X, Y 為極軸 L 上任二點，以 X 點配極後的極軸令為 L_X ，以 Y 點配極後的極軸令為 L_Y ，則 L_X 與 L_Y 的交點 P 稱為線 L 對圓錐曲線 Γ 配極後的極點。

5.2.3 配極的代數運算

前節定義 5.2.2 中，調和中點 X 的軌跡是直線，本節中將從代數觀點，討論極軸的直線方程式。

定理 5.2.1 極軸方程式

圓錐曲線 $\Gamma: F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

以極點 $P(h, k)$ 對圓錐曲線 Γ 配極

極軸方程式為 $L: Ahx + B \cdot \frac{hy + xk}{2} + Cky + D \frac{x+h}{2} + E \frac{y+k}{2} + F = 0$

證明：請參閱附錄一

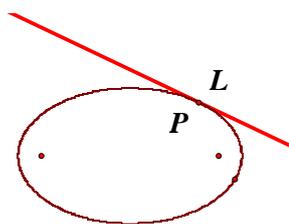


圖 5.2.9 極軸(曲線上點)

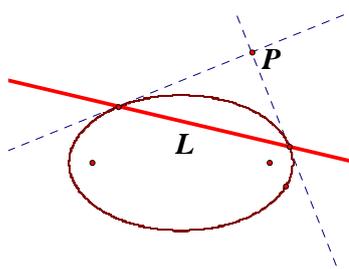


圖 5.2.10 極軸(曲線外點)

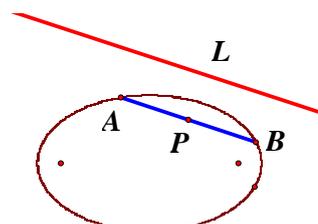


圖 5.2.11 極軸(曲線內點)

配極的應用：

切線性質在高中數學圓錐曲線有不少相關教材，而切線又與配極息息相關。以下列舉極軸在高中數學三個常見的應用。

(1) 如圖 5.2.9，當極點位在圓錐曲線上時，極軸是過極點的切線

(2) 如圖 5.2.10，當極點位在圓錐曲線外部時(與焦點不同區)，

極軸是過極點作二條圓錐曲線切線所對應的切點連線

(3) 如圖 5.2.11，當極點位在圓錐曲線內部時(與焦點同區)，

極軸與極點所在中點弦 \overline{AB} 有平行關係

很多學生都是直接硬背公式(換一半)，知其然，不知其所以然，對一般生而言，為了考試得分勉強應付，其實式子背後有許多迷人的性質，對資優生而言，更是專題研究的好題材。在數學軟體的輔助下，可以作更多的深度研究。

5.3 圓錐曲線與直線的交點

本節將探討應用配極法求圓錐曲線與直線的交點。有了圓錐曲線的配極作圖功能後，本章一開始提到的問題，幾何繪圖軟體 GSP 無法將圓錐曲線軌跡(Locus)與直線產生交點的問題，現在有了解決之道，透過配極的觀念，配合切線的作法，就可用尺規作圖法作出交點，不需要用到圓錐曲線的軌跡圖形。(註：此處的圓錐曲線只給定原始定義中的條件，例如焦點、準線、 $2a$ 等...)。另外，在輔導學生作這個專題時，學生黃冠崧提出橢圓與直線產生交點的方法，可利用高中數學課程中的伸縮技巧辦到，本節中也將提出以作比較。

伸縮法求橢圓與直線的交點：

如圖 5.3.1，給定橢圓 Γ 的雙焦點 F_1 與 F_2 與橢圓上點 A ， $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$ ，給定直線 \overline{BC} ，求橢圓 Γ 與直線 \overline{BC} 的交點尺規作圖法。

- (1) 作出比例 $\frac{OQ}{OP} = \frac{a}{b}$
- (2) 將 B, C 二點垂直長軸方向伸縮 $\frac{a}{b}$ 倍，至 B' 與 C'
- (3) 連直線 $\overline{B'C'}$ 交大圓(圓心 O , 半徑 $=2a$) 於 D'_1 與 D'_2
- (4) 將 D'_1 與 D'_2 二點垂直長軸方向伸縮 $\frac{b}{a}$ 倍，得 D_1 與 D_2 為所求。

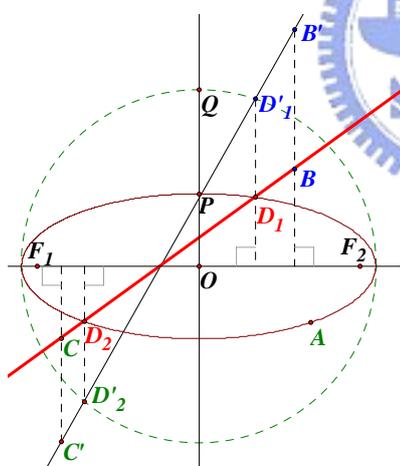


圖 5.3.1 伸縮求橢圓與直線交點

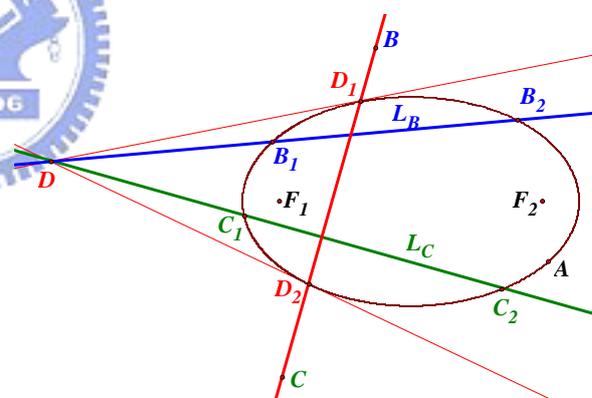


圖 5.3.2 配極求橢圓與直線交點

配極法求橢圓與直線的交點：

如圖 5.3.2，給定橢圓 Γ 的雙焦點 F_1 與 F_2 與橢圓上點 A ， $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$ ，給定直線 L ，求橢圓 Γ 與直線 L 的交點。

- (1) 取 L 上橢圓外點 B ，過 B 作二條切線得二切點 B_1 與 B_2 (點 B 配極得極軸 $\overline{B_1B_2}$)
- (2) 取 L 上橢圓外點 C ，過 C 作二條切線得二切點 C_1 與 C_2 (點 C 配極得極軸 $\overline{C_1C_2}$)
- (3) 設直線 $\overline{B_1B_2}$ 與直線 $\overline{C_1C_2}$ 交點為 D (\overline{BC} 配極得極點 D)
- (4) 過 D 作橢圓二切線得二切點 D_1 與 D_2 為所求。

和配極法比起來，以伸縮法作橢圓與直線的交點，相對起來觀念比較簡單，雖無法推廣至所有的圓錐曲線，如雙曲線或拋物線，但仍是一個優秀的方法。在輔導資優學生時，應特別注意學生的想法與創意，給予其發揮的空間。

配極法求雙曲線與直線的交點：

如圖 5.3.3，給定雙曲線 Γ 的雙焦點 F_1 與 F_2 與雙曲線上點 A ， $|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = 2a$ ，給定直線 L ，求雙曲線 Γ 與直線 L 的交點。

- (1) 取 L 上雙曲線外點 B ，過 B 作二條切線得二切點 B_1 與 B_2 (點 B 配極得極軸 $\overline{B_1B_2}$)
- (2) 取 L 上雙曲線外點 C ，過 C 作二條切線得二切點 C_1 與 C_2 (點 C 配極得極軸 $\overline{C_1C_2}$)
- (3) 設直線 $\overline{B_1B_2}$ 與直線 $\overline{C_1C_2}$ 交點為 D (\overline{BC} 配極得極點 D)
- (4) 過 D 作雙曲線二切線得二切點 D_1 與 D_2 為所求。

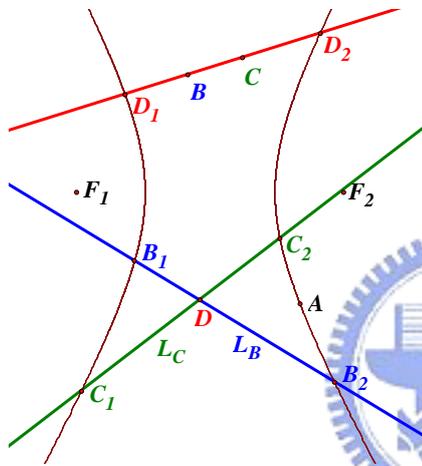


圖 5.3.3 配極求雙曲線與直線交點

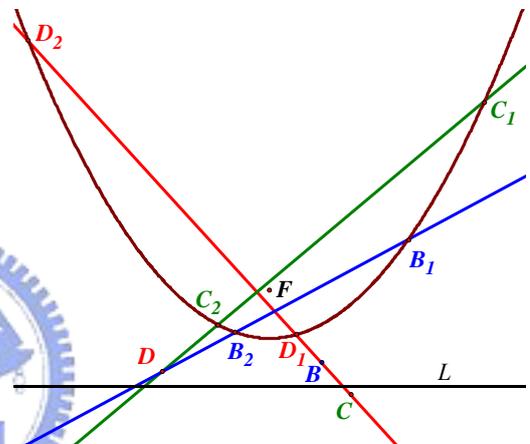


圖 5.3.4 配極求拋物線與直線交點

配極法求拋物線與直線的交點：

如圖 5.3.4，給定拋物線 Γ 的雙焦點 F_1 與 F_2 與拋物線上點 A ， $d(A, F) = d(A, L)$ ，給定直線 L ，求拋物線 Γ 與直線 L 的交點尺規作圖法。

- (1) 取 L 上拋物線外點 B ，過 B 作二條切線得二切點 B_1 與 B_2 (點 B 配極得極軸 $\overline{B_1B_2}$)
- (2) 取 L 上拋物線外點 C ，過 C 作二條切線得二切點 C_1 與 C_2 (點 C 配極得極軸 $\overline{C_1C_2}$)
- (3) 設直線 $\overline{B_1B_2}$ 與直線 $\overline{C_1C_2}$ 交點為 D (\overline{BC} 配極得極點 D)
- (4) 過 D 作拋物線二切線得二切點 D_1 與 D_2 為所求。

5.4 決定圓錐曲線的條件

交通大學理學院在職專班網路學習組素材課程中，曾邀請清華大學全任重教授演講，如何利用幾何動畫繪圖軟體來輔助高中數學圓錐曲線的教學，演講內容中提及五點可以決定一組圓錐曲線，在現今的高中課程標準裡，並未特別提及這個部份，本節將探討相關主題，希望能對教學有所助益。

為何五點可以決定一組圓錐曲線呢？從圓錐曲線方程式(二元二次方程式)的代數觀點分析，二元二次方程式共有六項， $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，若給定五個條件可得六個係數的比例，知係數比例即知方程式，故五點即可決定圓錐曲線。比較特別的情形是拋物線，拋物線只需給四點即可，因為拋物線本身具備一個係數條件 $B^2 - 4AC = 0$ 。從幾何的觀點來看，利用射影幾何的 Pascal 定理可以在軟體環境下作出圓錐曲線的軌跡，介紹實作如下。

Pascal 定理：「二次曲線上任取六點 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ，設直線 A_1B_2 與 A_2B_1 的交點為 P ，直線 A_1B_3 與 A_3B_1 的交點為 Q ，直線 A_2B_3 與 A_3B_2 的交點為 R ，則點 P, Q, R 共線」，如圖 5.4.1。

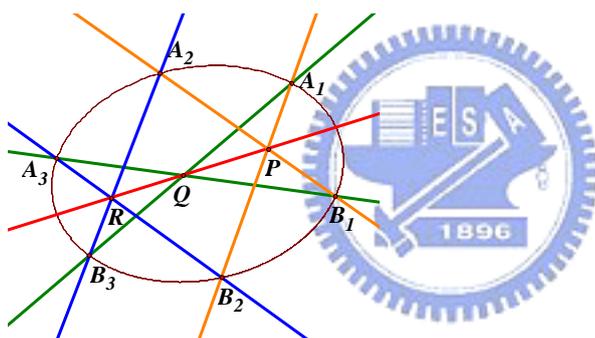


圖 5.4.1 PQR 共線

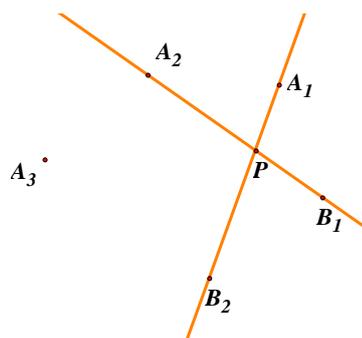


圖 5.4.2 作定點 P

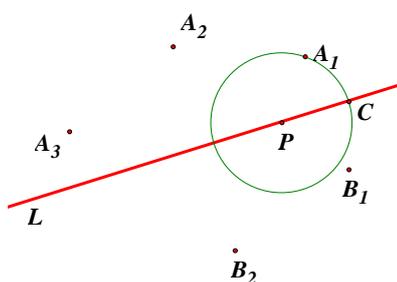


圖 5.4.3 作動線(PQR 所在直線)

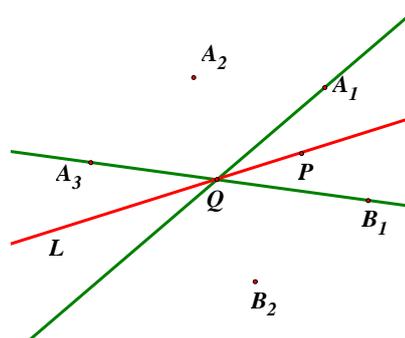


圖 5.4.4 作動點 Q

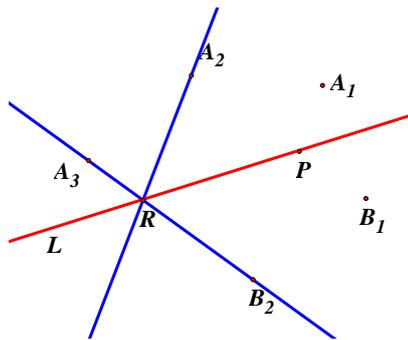


圖 5.4.5 作動點 R

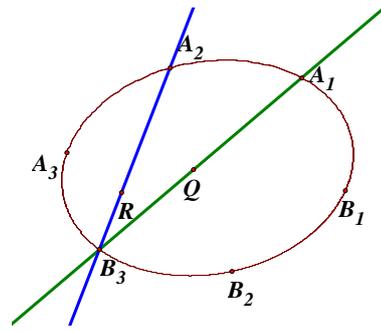


圖 5.4.6 作動點 B_3

五點決定圓錐曲線的作圖法：

- (1) 假設給定五點 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ，若直線 A_1B_2 與 A_2B_1 的交點為 P ，(如圖 5.4.2)
- (2) 以 P 為圓心，作一圓，取圓上動點 C ，連 \overline{PC} 直線 L ，(如圖 5.4.3)
- (3) 設直線 A_3B_1 與 L 的交點 Q ，連 $\overline{A_1Q}$ 直線 (如圖 5.4.4)
- (4) 設直線 A_3B_2 與 L 的交點 R ，連 $\overline{A_2R}$ 直線 (如圖 5.4.5)
- (5) 設直線 $\overline{A_1Q}$ 與直線 $\overline{A_2R}$ 的交點 B_3 ，則 B_3 軌跡即為圓錐曲線 (如圖 5.4.6)



94 學年度的指定科目考試數學甲就出現這麼一題與決定圓錐曲線的條件相關的考題，也引起相當廣泛的討論。

題目：有一條拋物線位於坐標平面之上半面(即其 y 坐標 ≥ 0)，並與 x 軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：(1)此拋物線的對稱軸必為 y 軸。(2)若此拋物線對稱軸為 y 軸，則其焦距為 1。(註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離)(3)此拋物線的頂點必在 x 軸上。(4)有不只一條拋物線滿足此條件。

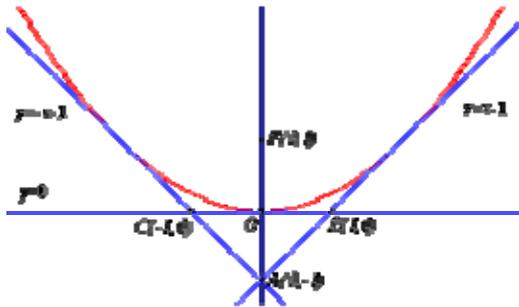


圖 5.4.7 拋物線的三切線

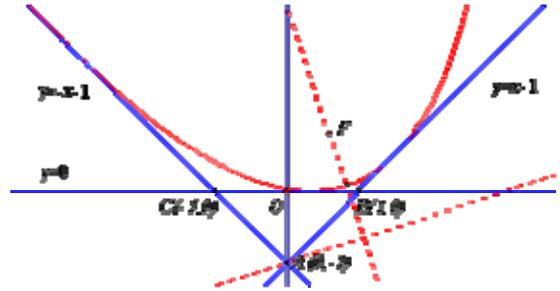


圖 5.4.8 斜拋物線的三切線

解答：當對稱軸為 y 軸時，拋物線開口向正上，可經由題意算出拋物線方程式為 $x^2 = 4y$ ，這個情形也是多數人會想到的情形，可是這條拋物線是唯一符合題意條件的拋物線嗎？事實上，答案是否定的，如圖 5.4.8 當拋物線的對稱軸略微傾斜時，仍然存在其他的拋物線符合題意條件。所以有不只一條拋物線滿足此條件。答案應選(2)(4)

當然，考試結束之後，大家可以討論所有符合題意的拋物線的共同特徵，如拋物線的焦點會在 $\triangle ABC$ 的外接圓上等性質，但是站在命題教授與當天應試學生而言，這題的施測重點應該是，題意給定的條件夠不夠唯一決定一條拋物線，如此而已。

根據本節前面的討論，給定五個條件可決定唯一的圓錐曲線，其中拋物線只需給四個條件即可。但在這題指考試題中，題目只給三個條件，拋物線與三條直線相切，因此條件不足以唯一決定一條拋物線。

5.5 多邊形面積平分

首先，探討一下面積平分面的存在性。

定理 5.5.1

平面上凸多邊形上及形外的一點，恰一條直線通過該點且平分該凸多邊形之面積。

證明：任意從這一點做一條不割過多邊形的直線，然後令此直線進行旋轉(不妨令以逆時針旋轉)。令這條直線所掃過多邊形的面積為 $A(\theta)$ ， θ 為從起始位置開始逆時針的角。若此直線僅在 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi$ 間和此多邊形有交點，則 $A(\theta)$ 在此區間為連續且嚴格遞增(因為若以該點為分界，僅有一側會和凸多邊形有相交)。而已知 $A(\theta)$ 的最小值為 0，最大值為凸多邊形全部的面積，由中間值定理，必定存在有一 θ ，使 $A(\theta)$ = 此多邊形面積的一半，且因為是嚴格遞增的，所以恰僅有一個 θ 。此直線即為唯一的一條通過該點且平分此凸多邊形面積的線，證畢。

從比較單純的三角形開始討論，如何平分面積。

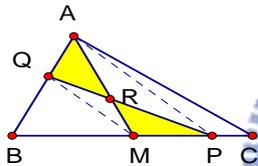


圖 5.5.1 平行作面積平分線

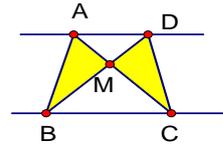


圖 5.5.2 面積平分線軌跡

首先三角形的中線是可以將其面積平分的，先畫下一個中線，然後進行討論。如圖 5.5.1，中線 \overline{AM} 為面積平分線，如果將 A 點沿 \overline{AB} 邊移動至 Q 點，那過 Q 的面積平分線該如何求出？善用 GSP 軟體提供的測量功能，經由實驗觀察發現， \overline{QM} 似乎會平行 \overline{AP} ，且 ΔAQR 面積 = ΔPMR 面積，不過只有軟體操作是不夠嚴謹的，因此仍需要數學推論來驗證，驗證過程如下：

性質 5.5.1

如圖 5.5.2，線段 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 M ，則 ΔABM 面積 = ΔDCM 面積

證明：因為平行線 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以兩線之間的公垂線段的長為一個定值。

而這個公垂線段即為 ΔABC 和 ΔDBC 的高，所以 ΔABC 面積 = ΔDBC 面積，
 ΔABM 面積 = ΔABC 面積 - ΔMBC 面積 = ΔDBC 面積 - ΔMBC 面積 = ΔDCM 面積。
 得證。

因此，可以得到過三角形邊上的點，作出三角形面積平分線的方法如下：

- (1). 如圖 5.5.1，假設給定 \overline{BC} 上一點 P ，連 \overline{AP} 。
- (2). 過 \overline{BC} 中點 M 作 $\overline{QM} \parallel \overline{AP}$ 使得 Q 在 \overline{AB} (或 \overline{AC}) 上。

(3). 連 \overline{PQ} 交 \overline{AM} 於 R .

因 $\overline{QM} \parallel \overline{AP}$ ，由性質 5.5.1 可得 ΔPMR 面積 = ΔAQR 面積，

因 \overline{AM} 為面積平分線，故 \overline{PQ} 為三角形 ABC 之面積平分線。

接下來，繼續探討這些面積平分線之間的性質

利用上述作面積平分線的方法，只要改變點 P 的位置，透過數學軟體提供的動態模擬功能，觀察 Q 點的動態變化，利用 GSP 的繪圖功能，可以得出許許多多的平分線 \overline{PQ} ，當經過很多次的操作後，將這些平分線同時呈現在三角形內部時，可以得到圖 5.5.3，在這張圖形中，可以很明顯的看出，在三角形的中間，似乎有某個未知的曲線。下面一個定理，就是對這個曲線的討論。

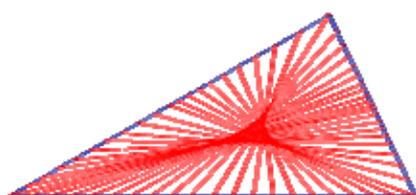


圖 5.5.3 面積平分線軌跡

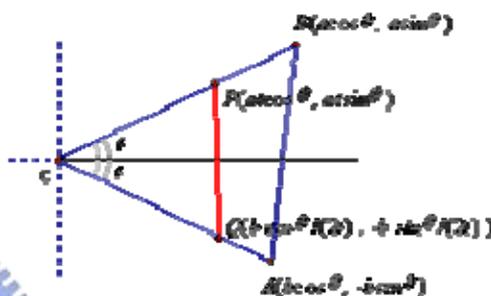


圖 5.5.4 解析幾何求面積平分線

定理 5.5.2

由上述方法所做出之動線段 \overline{PQ} ，所包絡出的曲線是一個雙曲線的局部。

證明：(1) 不失一般性，以角 C 的內角平分線為 x 軸，如圖 5.5.4，

令 $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，及 P 點的參數座標為 $(at \cos \theta, at \sin \theta)$ ， $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ，

則可以得到 Q 點的座標為 $\left(\frac{b}{2t} \cos \theta, \frac{-b}{2t} \sin \theta\right)$ ；由此求得 \overline{PQ} 的方程式：

$$\overline{PQ}: L_1: [(2at^2 + b) \tan \theta]x - (2at^2 - b)y = 2abt \sin \theta$$

(2) 考慮動點 P 做微小的變化，令 $t' = t + \Delta t$ ，

則 $P'(a(t + \Delta t) \cos \theta, a(t + \Delta t) \sin \theta)$ ， $\frac{1}{2} \leq t + \Delta t \leq 1$ ，

$$Q'\left(\frac{b}{2(t + \Delta t)} \cos \theta, -\frac{b}{2(t + \Delta t)} \sin \theta\right)$$

$$\overline{P'Q'}: L_2: [(2a(t + \Delta t)^2 + b) \tan \theta]x - (2a(t + \Delta t)^2 - b)y = 2ab(t + \Delta t) \sin \theta$$

$$\text{求 } L_1 \text{ 與 } L_2 \text{ 的交點的座標為 } \begin{cases} x = \frac{2at^2 + 2at(\Delta t) + b}{4t + 2(\Delta t)} \cos \theta \\ y = \frac{2at^2 + 2at(\Delta t) - b}{4t + 2(\Delta t)} \sin \theta \end{cases}$$

$$(3) \text{ 考慮 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 時, } L_1 \text{ 與 } L_2 \text{ 的交點座標為 } \begin{cases} x = \frac{2at^2 + b}{4t} \cos \theta \\ y = \frac{2at^2 - b}{4t} \sin \theta \end{cases},$$

此座標即為平分線的包絡線的參數方程式。

$$\text{把參數 } t \text{ 消去, } \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^2 = \left(\frac{2at^2 + b}{4t}\right)^2 - \left(\frac{2at^2 - b}{4t}\right)^2 = \frac{4(2at^2)(b)}{16t^2} = \frac{ab}{2},$$

$$\text{得 } \frac{x^2}{\frac{ab}{2} \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\frac{ab}{2} \sin^2 \theta} = 1, \text{ 此為雙曲線的標準式,}$$

又因點 P 參數 t 有範圍限制, 故僅為部分圖形。得證。

既然知道這些曲線是局部雙的曲線, 接著探討一下這些雙曲線的性質

性質 5.5.2

承定理 5.5.2, 此局部雙曲線是以 P, Q 所在的三角形的邊為其漸近線, 且 \overline{PQ} 的中點的軌跡跟此局部雙曲線重合。

證明：定理 5.5.2 的證明中, 如果將雙曲線寫成 $\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = \frac{ab}{2}$ 的形式,

可以看出這個雙曲線的兩漸近線為 $y = \pm(\tan \theta)x$,

亦即是直線 \overline{AC} 和直線 \overline{BC} 的方程式, 故此雙曲線是以直線 \overline{AC} 和直線 \overline{BC} 為漸近線。

$$\text{又 } \overline{PQ} \text{ 的中點座標為 } \begin{cases} x = \frac{2at^2 + b}{4t} \cos \theta \\ y = \frac{2at^2 - b}{4t} \sin \theta \end{cases}, \text{ 跟 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 時, } L_1 \text{ 與 } L_2 \text{ 的交點座標形式完}$$

全一樣, 即 \overline{PQ} 中點軌跡為此雙曲線。得證。

由性質 5.5.2 知道 \overline{PQ} 中點軌跡即是局部雙曲線，這是一個很好的結果，可以明確地畫出這條曲線。自此之後，要求的過任一點的平分面積線，就可以大幅簡化為過點對此局部曲線作切線。過點對雙曲線作切線方法請參見第 5.1 節。圖 5.5.5 展示了此曲線，其中虛線部分是雙曲線的延伸部分，用以凸顯其漸近於三角形的邊。

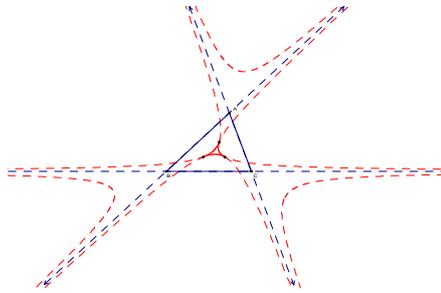


圖 5.5.5 面積平分包絡曲線

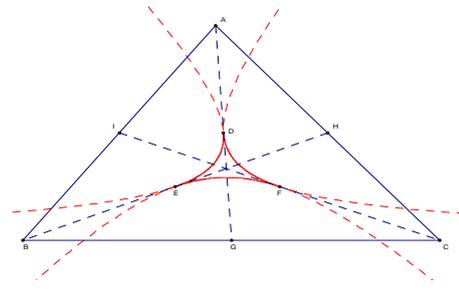


圖 5.5.6 三角形內部面積平分包絡曲線

圖 5.5.6 是將圖 5.5.5 內部放大後的圖，並描繪出三角形的中線。因為中線必平分三角形面積，故亦相切於平分包絡曲線，亦是二段平分包絡曲線的公切線。

定義 5.5.1 三角形面積平分包絡曲線

三角形存在有一內部的曲線，使得此曲線的切線均為此三角形的面積平分線，稱此曲線為三角形面積平分包絡曲線。

性質 5.5.3

三角形面積平分包絡曲線構成一封閉區域，且三個端點即為三中線的中點

證明：如圖 5.5.6，先考慮局部雙曲線 DF 段，包絡出此段雙曲線的面積平分線，其面積平分線段端點一端在 \overline{AI} 、另一端在 \overline{CG} ，故範圍限制的端點為過點 A 與點 C ，而過點 A 與點 C 的面積平分線即為中線，由性質 5.5.2 知面積平分包絡曲線是平分線段的中點軌跡，故雙曲線 DF 段的端點即中線 \overline{AG} 與 \overline{CI} 的中點，同理，雙曲線 DE 段的端點即中線 \overline{AG} 與 \overline{BH} 的中點，同理，雙曲線 EF 段的端點即中線 \overline{BH} 與 \overline{CI} 的中點，此三組端點兩兩重合，故恰圍成一封閉區域。得證。

(1) 三角形的三中線將面積平分包絡曲線構成的封閉區域分成六塊區域(請參見圖 5.5.6)其中對曲線 DE 段的切線數量如圖 5.5.7. 同理, 可得對曲線 EF 部分與對曲線 FD 部分。

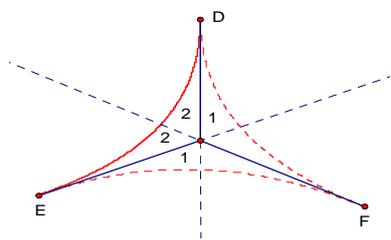


圖 5.5.7

曲線內側單邊面積平分線

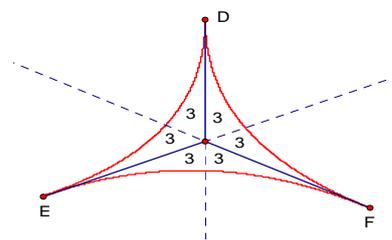


圖 5.5.8

曲線內側全部面積平分線

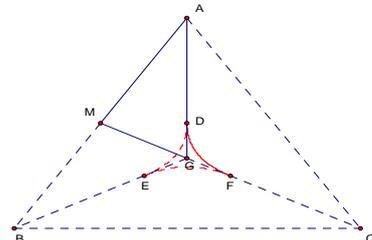


圖 5.5.9

曲線外側面積平分線

將三段綜合, 如圖 5.5.8. 也就是曲線內部的點, 可以做出三條面積平分線。

(2) 當點由曲線內部移往曲線上, 會有二條切線重合成為一條切線, 故切線數量會少一條。變成二條切線。

(3) 而點由曲線上移往曲線端點時, 又會發生一次切線重合的情形, 剩一條切線, 此時切線恰與三角形的中線重疊(中線顯然把面積平分)。

(4) 當點繼續外移, 移到曲線與三角形之間時, 如圖 5.5.9, 假設點在平分包絡曲線外部且在 $\triangle AGM$ 內部時, 僅能與曲線 DF 段相切, 僅剩一條切線, 其他五區同理。

(5) 當點移到三角形外部時, 同(4)恰一條面積平分線。

根據以上討論, 歸納出三角形面積平分直線的數量:

- (1) 過平分包絡曲線內的點: 平分包絡曲線的內部: 三條。
- (2) 過平分包絡曲線上的點: 平分包絡曲線上(不含端點): 二條。
- (3) 過平分包絡曲線外的點或曲線上的端點: 平分包絡曲線外部: 一條。

常見的面積平分線尺規作圖法, 大多以相似形作圖為主。本文改成利用雙曲線的切線性質, 完成了尺規作圖法, 以 GSP 實作完成, 可以同時適用於三角形內部一點, 邊上一點, 外部一點, 亦可同時呈現多條面積平分線。

結論: 給定平面上一個三角形與一個定點, 均可用有限次尺規作圖作出面積平分線。

將三角形的面積平分線性質推廣到任意凸多邊形，並以四邊形為例討論。

定義 5.5.2 凸多邊形面積平分包絡曲線

若凸多邊形存在有一內部的曲線，使得此曲線的切線均為此多邊形的面積平分線，則稱此曲線為凸多邊形的面積平分包絡曲線

性質 5.5.4：

凸多邊形的面積平分線必與該凸多邊形的邊恰交二點。

證明：(1)無交點

⇒多邊形被直線分割的二區，有一區面積零，不可能是面積平分線，不合。

(2)恰一交點

⇒多邊形被直線分割的二區，有一區面積零，不可能是面積平分線，不合。

(3)有三個以上(含三個)交點：

不妨設此三交點在直線上由左而右順序分別是 P_k ， $k=1,2,3$ ，

以 P_k^- 表示 P_k 左側之點，以 P_k^+ 表示 P_k 右側之點，可得以下關係：

P_1^- 在多邊形外部， P_1^+ 在多邊形內部，

P_2^- 在多邊形內部， P_2^+ 在多邊形外部，

P_3^- 在多邊形外部， P_3^+ 在多邊形內部，

故 P_1^+ 與 P_3^+ 均為多邊形內部點，而線段 $\overline{P_1^+ P_3^+}$ 上有點 P_2^+ 在多邊形外部

此與凸多邊形定義不合。

(4)由(1)(2)(3)三點，知凸多邊形的面積平分直線必與凸多邊形恰交二點。得證。

設面積平分線與多邊形的二交點分別是 M, N ，依 M 與 N 所在的二個邊可分平行與不平行二種情形探討如下：(性質 5.5.5 與性質 5.5.6)

性質 5.5.5

如圖 5.5.10，有兩段不平行線段 \overline{AB} 、 \overline{CD} ，直線 \overline{MN} 和 \overline{AB} 、 \overline{CD} 分別交於 M, N 兩點， \overline{AB} 上有一動點 P ，連 \overline{NP} ，並過 M 作 \overline{NP} 的平行線交 \overline{CD} 於 Q ，則 P 為動點時， \overline{PQ} 所包絡的軌跡為一局部的雙曲線，且此包絡線和 \overline{PQ} 的中點軌跡重合。

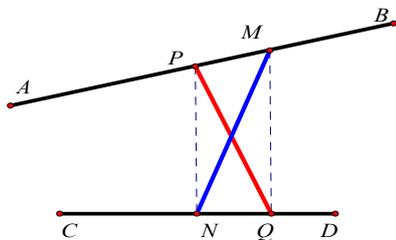


圖 5.5.10 不平行線段包絡軌跡

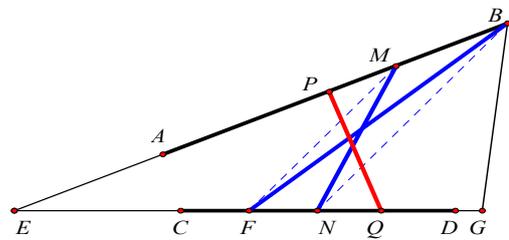


圖 5.5.11 作輔助線成三角形

證明：(1)如圖 5.5.11，設 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的延長線交於 E 點，

不妨令 A, B 之中離 E 比較近的是 A 點； C, D 之中離 E 比較近的是 C 。

連 \overline{BN} , 過 M 作 \overline{BN} 的平行線交 \overline{CD} 於 F . 作點 G 使點 F 為 \overline{EG} 中點。
 (2) 因為 \overline{BF} 是 $\triangle BEG$ 中線, 亦即 \overline{BF} 是 $\triangle BEG$ 面積平分線。
 由性質 5.5.1 可知 \overline{MN} 也是 $\triangle BEG$ 面積平分線,
 由圖 5.5.10 與性質 5.5.1 可得 \overline{PQ} 也是 $\triangle BEG$ 面積平分線。
 由定理 5.5.2 可得 \overline{PQ} 所包絡的軌跡為一局部的雙曲線,
 局部曲線是因 $P \in \overline{AB}, Q \in \overline{CD}$ 所限制條件,
 再由性質 5.5.2 得此包絡線和 \overline{PQ} 的中點軌跡重合。得證。

在性質 5.5.5 中, \overline{AB} 、 \overline{CD} 若改為平行線段, 修正如下。

性質 5.5.6

如圖 5.5.12, 假設多邊形中有二邊是二段平行線段 \overline{AB} 、 \overline{CD} , 面積平分線 \overline{MN} 和 \overline{AB} 、 \overline{CD} 分別交於 M, N 兩點, \overline{AB} 上有一動點 P , 連 \overline{NP} , 並過 M 作 \overline{NP} 的平行線交 \overline{CD} 於 Q , 則 \overline{PQ} 亦為面積平分線, 且 \overline{PQ} 恆過 \overline{MN} 之中點 R 。

證明：因為 $MQNP$ 為平行四邊形, 故 $\triangle MPR$ 面積 = $\triangle NQR$ 面積, 且對角線互相平分。
 若面積平分線 \overline{MN} 是面積平分線, 則 \overline{PQ} 亦為面積平分線, 且 \overline{PQ} 中點 R 。得證。

不妨視 R 點為極端受限的雙曲線, 左右邊界是同一點的局部雙曲線退化情形。此時, 稱這種點為面積平分包絡曲線上的「奇點」。

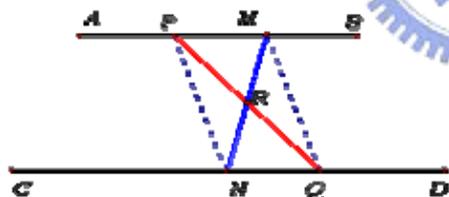


圖 5.5.12 平行線段包絡軌跡

給定凸多邊形邊上一點, 仿三角形的作法, 先作出一條凸多邊形的面積平分直線。再運用這條面積平分線作出面積平分包絡曲線。

定理 5.5.3

對於任意一個凸 n 邊形 ($n \geq 4$), 必存在至少一個凸 $n-1$ 邊形, 滿足:

- (1) 至少一個頂點共用。
- (2) 凸 n 邊形的邊, 至少有一條未過共用頂點之邊包含於凸 $n-1$ 邊形的邊。
- (3) 凸 $n-1$ 邊形面積等於凸 n 邊形面積。

證明：如圖 5.5.13, 考慮凸 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ ($n \geq 4$), 保留 $n-2$ 個頂點 A_1, A_2, \dots, A_{n-2} , 過 A_n 作 $\overline{A_1A_{n-1}}$ 的平行線與 $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$ 的延長線交於 B 點, 因為 $\overline{A_nB} \parallel \overline{A_1A_{n-1}}$, 故 $\triangle A_nA_1A_{n-1}$ 面積等於 $\triangle BA_1A_{n-1}$,

得 $A_1A_2 \cdots A_{n-2}B$ 面積等於 $A_1A_2 \cdots A_n$ 面積，
且頂點 A_1 共用， $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}$ 仍包含於凸 $n-1$ 邊形的邊。得證。

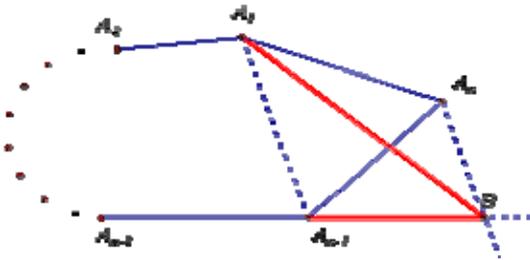


圖 5.5.13 降低邊數

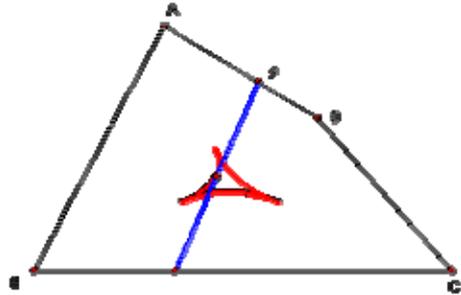


圖 5.5.14 凸四邊形面積平分線

面積平分直線的作法：

對任意一個凸多邊形上的一個頂點 M ，根據定理 5.5.1，必存在面積平分線。根據性質 5.5.4，面積平分線必交凸多邊形二點，假設另一交點是 N 。重複引用定理 5.5.3，保留點 N 所在的邊(若 N 為頂點，二側任擇一)，與保留 M 點，使邊數降至三，可產生一個三角形，面積等於原凸 n 邊形。過頂點 M 作此三角形的中線，即可平分此三角形面積，此直線亦為原凸多邊形的面積平分線。

給定凸多邊形，選定頂點 M 之後，尚未能直接判定 N 點所在的邊，需要多嘗試幾次(凸 n 邊形至多 $n-2$ 次)

面積平分包絡曲線的作法：

根據上述討論與性質 5.5.5 與性質 5.5.6，可得任一凸多邊形的一條面積平分線 \overline{MN} ，在 M 點附近取動點 P ，進而得面積平分線 \overline{PQ} ，取 \overline{PQ} 中點 R ，當動點 P 由 M 出發，依逆時針方向，沿凸多邊形繞一圈時， R 點軌跡構成面積平分包絡曲線，並由上述性質得知，必為多段局部雙曲線的聯集。

又當 P 點回到 M 點時， R 點會回到原出發點，故面積平分包絡曲線必為封閉曲線。圖 5.5.14 為凸四邊形的面積平分線與面積平分包絡曲線示例。

以上涵括的面積平分線是否是這個多邊形的所有面積平分線呢？答案是肯定的。假設平面上的任一條三角形面積平分線，根據性質 5.5.4，則此線必交多邊形的邊於二點，假設其中一個交點為 P 。可依本文的討論方法，作出過多邊形邊上一點 P 可作多邊形的面積平分線，根據定理 5.5.1，過 P 點的多邊形面積平分線恰僅一條，該面積平分線與本文所作出的面積平分線為同一條直線。故本文的討論方法涵括所有的多邊形面積平分線。

結論：給定平面上一個凸多邊形與一個定點，均可用有限次尺規作圖作出面積平分線。

5.6 四面體體積平分

本節的主要研究目的是將二維平面的面積平分線性質，推廣到三維空間的體積平分面。空間部份的參考資料相對於平面部份少了許多，比較特殊的是已知過四面體任一組歪斜稜中點連線的所有平面均是體積平分面(陳和平，2006)，不過該文獻並未討論其他一般情形。

首先證明凸多面體體積平分面的存在性。

定理 5.6.1

給定空間中一凸多面體及其外部一直線，則恰存在一平面通過該直線且平分該凸多面體之體積。

證明：任意從這一直線作一條不割過凸多面體的平面 E ，然後令此平面以該直線為轉軸進行旋轉，得平面 E' ，令 E' 所掃過多面體的體積為 $V(\theta)$ ， θ 為 E' 從起始位置開始旋轉的角度。若 E' 僅在 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi$ 間和此多面體有相交，則 $V(\theta)$ 在區間 $[\alpha, \beta]$ 為連續且嚴格遞增。而 $V(\theta)$ 的最小值為 0，最大值為凸多面體全部的體積，由中間值定理，必定存在有 θ ，使 $V(\theta)$ = 此多面體體積的一半。且因為是嚴格遞增的，所以恰僅有一個 θ 。此平面即為唯一的通過該線且平分此凸多面體體積的平面。證畢。

先考慮三維空間中最簡單的四面體。考慮三維空間中的線性變換

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \det(T) \neq 0, \text{ 將點 } P(x, y, z) \text{ 變換至點 } P'(x', y', z'), \text{ 即 } P' = T \cdot P. \text{ 因}$$

為線性變換前後，體積之變化只與矩陣 T 之行列式值有關，故可以僅考慮任一組四面體 $O-ABC$ ，針對這個四面體處理體積平分面，之後只要透過線性變換，就可以推廣至其他的四面體，而體積平分面仍將是體積平分面。為計算方便起見，僅考慮四面體 $O-ABC$ ： $O(0,0,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $B(0,1,0)$ ， $C(0,0,1)$ 。

面對比較抽象的立體空間，剛開始先用猜測的做法。

在二維平面中，面積平分線的包絡線是雙曲線。而雙曲線的漸近線形式為 $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ 。再加上二維中討論出的性質，這兩條漸近線為多邊形某兩邊的延長線。猜想如下：

猜測：如果在最簡單又具有對稱性的四面體 $O-ABC$ 中(其中 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 、 O 為原點)，這個被平分面所包絡出來的曲面，會不會是 $(x-0)(y-0)(z-0) = k$ 的形式呢？

首先因為三個軸是等價的，所以這個曲面一定和 $x = y = z$ 這條直線有交點。此外，

這個四面體有一個很具對稱性的平分面 $\frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{y}{\sqrt[3]{2}} + \frac{z}{\sqrt[3]{2}} = 1$ (由相似性質，邊比例

$\sqrt[3]{2}:1$ ，得體積比為 2:1)。因此將直線和該面聯立，解得一點 $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，所以得到 $k = \frac{1}{54}$ 。

為了初步檢驗猜測，先用數據法進行試驗：

首先任找出一個屬於 $xyz = \frac{1}{54}$ 的點， $(\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{4}, \frac{2\sqrt[3]{2}}{9})$ 。

然後對原式同除 xy ，得到 $z = f(x, y) = \frac{1}{54xy}$ ，

而在該點上， $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{54x^2y} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{54xy^2} = -\frac{8\sqrt[3]{2}}{9}$ 。

所以平面方程式 ($\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$)： $z - \frac{2\sqrt[3]{2}}{9} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}(x - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}) - \frac{8\sqrt[3]{2}}{9}(y - \frac{1}{4})$

化簡之後得到 $\sqrt[3]{2}x + \frac{4}{3}y + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}z = 1$ ，三段截距為 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{4}, \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ 其相乘為 $\frac{1}{2}$ ，即此平面亦為體積平分面。故猜想通過第一次的數值檢驗。

重複幾次檢驗後，每次的結果，都是肯定的。猜想通過數值檢驗是一個令人振奮的事實，但數值檢驗並不代表結果成立。回到一開始的四面體，重新來想想對四面體還有沒有其他類似二維平面上面積平分線性質的猜想，並把這些想法陳述在下方。

猜想：

- (V-1) 過頂點與底面面積平分線的平面，必平分四面體體積
- (V-2) 體積平分面包絡曲面是雙曲面，有四片
- (V-3) 這些曲面以四面體頂點為對稱中心點，以四面體的三面為漸近面
(猜自雙曲線有漸近線的性質)
- (V-4) 此四片體積平分面包絡曲面恰構成一封閉空間
(猜自面積平分線包絡曲線為封閉)
- (V-5) 平分面和三稜三交點的重心，即為包絡曲面上點
(猜自面積平分線段的中點軌跡為面積平分線包絡曲線)

其中(V-1)是顯然成立的，而剩下的，就是要努力的部分

如果體積平分面過四面體的一個頂點(不妨令為頂點 O)，則其必平分三角形 ABC ，亦即體積平分面與平面 ABC 相交的直線為三角形 ABC 的面積平分線，可以套用平面部份的性質。故以下僅討論體積平分面不通過四面體的任一頂點之情形。割過四面體且不過頂點的平面有兩種可能。把四面體的四個頂點分成(1)一邊一個，另一邊三個(以下稱之為 1-3 分)。(2)兩邊各兩個(以下稱之為 2-2 分)。接下來，分成這兩方面去討論。

第一種分割情形：1-3 分的討論

考慮四面體 $O-ABC$: $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

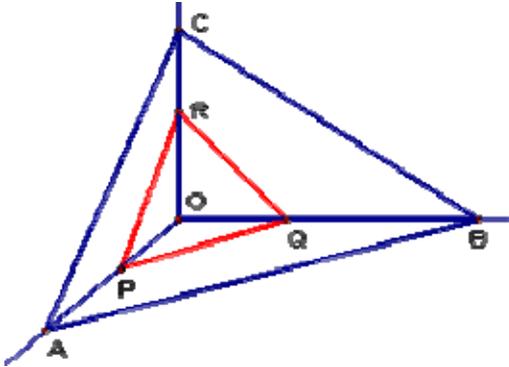


圖 5.6.1 四面體 1-3 分

如圖 5.6.1，設體積平分面截 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 三稜於 $P(p,0,0)$, $Q(0,q,0)$, $R(0,0,r)$ ，其中 $0 \leq p, q, r \leq 1$ ，由平面的截距式，得平面 PQR 方程式為 $E: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0$ ，

平面 E 平分四面體 $O-ABC$ 體積，亦即 $pqr = \frac{1}{2} \Rightarrow E: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + 2pqz - 1 = 0$

此時， $r = \frac{1}{2pq} \leq 1$ ，因此 $pq \geq \frac{1}{2}$ 。

$$\text{解包絡方程組} \begin{cases} E(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qx + py = pq - 2p^2q^2z \dots\dots(1.1) \\ y = q - 4pq^2z \dots\dots(1.2) \\ x = p - 4p^2qz \dots\dots(1.3) \end{cases}$$

(1.2) 得 $\frac{y}{x} = \frac{q}{p} \dots\dots(1.4)$

(1.3) 得 $\frac{y}{x} = \frac{q}{p} \dots\dots(1.4)$

將 $qx = py$ 代入(1.1)得 $py + py = pq - 2p^2q^2z \Rightarrow 2y = q - 2pq^2z \dots\dots(1.5)$

(1.5) $\times 2 - (1.2)$ 得 $q = 3y \dots\dots(1.6)$

(1.6) 代入(1.4)得 $p = 3x \dots\dots(1.7)$

(1.6), (1.7) 代入(1.1)得 $xyz = \frac{1}{54}$ ，故包絡曲面方程式為 $xyz = \frac{1}{54}$ 。

另外，在軸上的點， PQR 所形成的重心座標為 $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{r}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1}{6pq}\right)$ ；而由

(1.6)、(1.7)及 $pqr = \frac{1}{2}$ ，所得到的包絡點的參數表示式 $x = \frac{p}{3}$ 、 $y = \frac{q}{3}$ 、 $z = \frac{1}{6pq}$ ，正好

和上述的重心重合。也就是說，猜想(V-5)在 1-3 分的時候是成立的。

定義 5.6.1 體積平分面包絡曲面

若一凸多面體存在有一內部的曲面，使得此曲面的切面為此多面體的體積平分面，則稱此曲面為體積平分面包絡曲面

由於 GSP 為一平面繪圖軟體，較不擅於處理立體圖形，故在此使用 Maple 來呈現。

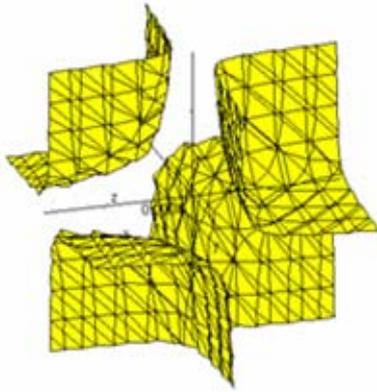


圖 5.6.2 曲面 $xyz = \frac{1}{54}$ 的圖形

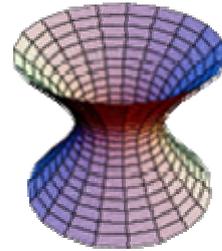


圖 5.6.3 雙曲面

圖 5.6.2 是 $xyz = \frac{1}{54}$ 的圖形。由圖可以明顯的看出，這些曲面會向 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ ，逐漸地靠近。因此大致上支持猜想(V-3)。但從 Mathworld 上找到的雙曲面的圖形(如圖 5.6.3)並非如此。而且雙曲面是三元二次的曲面，並非這裡的三元三次曲面。所以猜想(V-2)失敗了，但在 1-3 分的時候，將四面體四個頂點分成 1-3 分的方法有四種，各產生一個曲面，因此曲面確有四片。

圖 5.6.4 中的藍色部分為使用參數 p, q 限制所畫出來的圖形，而 p, q 的限制條件為 $\frac{1}{2} \leq pq$ 且 $0 \leq p, q \leq 1$ 。這些限制條件請參閱本節後續的討論。此圖是圖 5.6.2 的一部分，如果將它延伸，將會向 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 漸近。

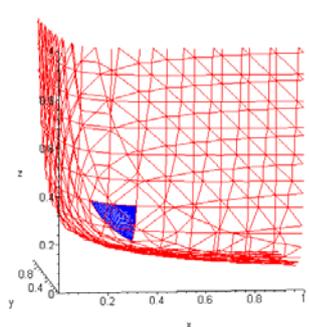


圖 5.6.4 單片包絡曲面

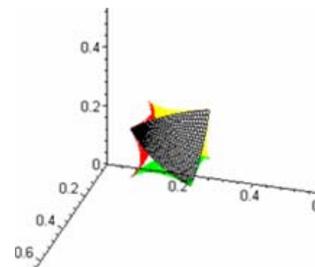


圖 5.6.5 四片包絡曲面

同理對另外每三稜分別作截面可得類似結果，不再贅述過程，僅將結果整理如下：

$$\text{截 } O-ABC : xyz = \frac{1}{54}$$

$$\text{截 } A-OBC : (x+y+z-1)yz = \frac{-1}{54}$$

$$\text{截 } B-OAC : x(x+y+z-1)z = \frac{-1}{54}$$

$$\text{截 } C-OAB : xy(x+y+z-1) = \frac{-1}{54}$$

將上述四曲面以參數加以限制範圍，用 Maple 去同時描繪其立體幾何圖形，如圖 5.6.5。從這張圖，很明顯可以看出，猜想(V-4)失敗了，這四個曲面沒有圍成一個封閉的曲面。但是尚有 2-2 分這一類型沒考慮進去。說不定在把 2-2 分的包絡面給考慮進來時，它將有機會形成封閉的曲面。



第二種分割情形：2-2 分的討論

因為 2-2 分會將四面體切割成二個斜三角柱，如圖 5.6.6，底面與頂面為三角形(此二面不平行)，側面為三個四邊形的立體圖形，故先考慮這種斜三角柱的體積。

定理 5.6.2

如圖 5.6.6， $ABC-DEF$ 的體積 = $\frac{1}{6} |(\overline{BF} \times \overline{AE}) \cdot \overline{CD}|$

證明：請參閱附錄二。

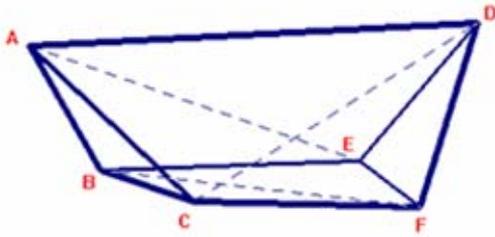


圖 5.6.6 斜三角柱

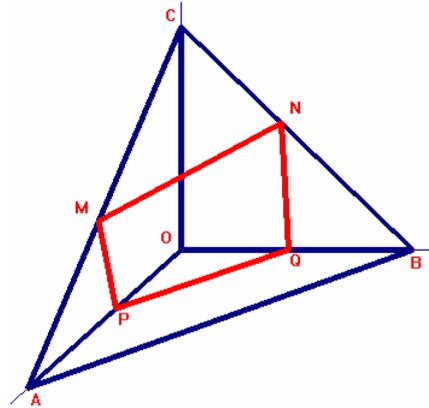


圖 5.6.7 四面體 2-2 分

考慮四面體 $O-ABC$ ： $O(0,0,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $B(0,1,0)$ ， $C(0,0,1)$ ，如圖 5.6.7，設體積平分面截二稜 \overline{OA} ， \overline{OB} 於 $P(p,0,0)$ ， $Q(0,q,0)$ ，截 \overline{CA} 於 $M(1-m,0,m)$ ， \overline{CB} 於 $N(0,1-n,n)$ ，因為 $PQNM$ 共平面，可消去一個變數，選擇消去 n 後， $n = \frac{pqm - pm}{pq + qm - q - pm}$ 。

平面 $PQNM$ 方程式由 p, q, m 表示式為： $qmx + pmy + (qm + pq - q)z - pqm = 0$

經由定理 5.6.2，得到 $CMN-OPQ$ 的體積為： $\frac{1}{6} |(\overline{MQ} \times \overline{CP}) \cdot \overline{NO}|$

$$= \frac{q(-p^2m^2 - 3pm + 2pm^2 + p - 1 + 2m - m^2 + p^2qm)}{6(-pm + pq - q + qm)} = \frac{1}{12} \text{ (為 } O-ABC \text{ 的一半)}。$$

再由此式，與平面 $PQNM$ 聯立消去 m 得到體積平分面 $f(x, y, z, p, q) = 0$

$$\text{而其包絡面(體積平分面包絡曲面)的方程組為} \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad \text{消去 } p, q \text{ 即為所求。}$$

上述方程組已找出參數式(將 x, y, z 用二個參數 p, q 表示之)，參數式的方程式繁雜，請參閱附錄三。後續將利用 Maple 的參數式繪圖功能繪出其圖形。

p, q 的限制範圍為何？

因為 p, q 屬於四面體的一個邊，所以 p, q 分別都要 ≤ 1 ，而且 pq 相乘要小於 0.5。
 因為如果 pq 大於 0.5 的話，那麼就存在一個點 R 屬於 \overline{OC} ，使平面 PQR 的三截距相乘等於 0.5，也就變回了 1-3 分的情況，因此有這樣的限制： $pq \leq \frac{1}{2}$ 且 $0 \leq p, q \leq 1$ 。

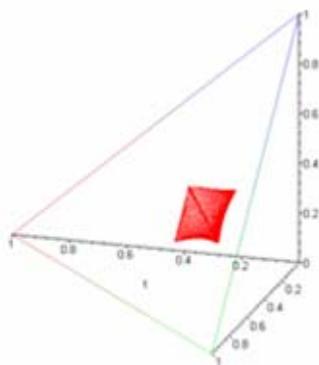


圖 5.6.8 第一片包絡曲面

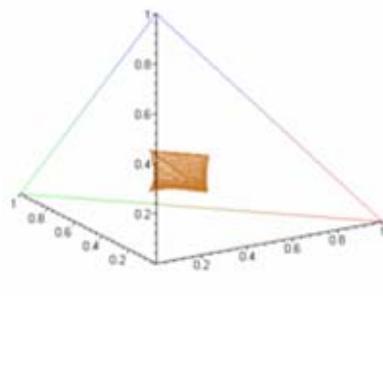


圖 5.6.9 第二片包絡曲面

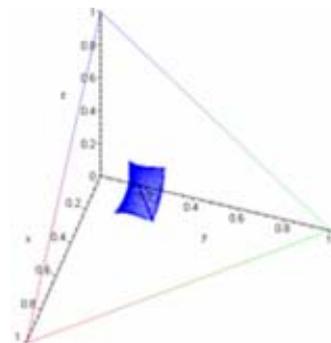


圖 5.6.10 第三片包絡曲面

因為 2-2 分時，會有一組對稜沒有被割到，而一個四面體共有三組對稜，所以會有上列的三個不同曲面圖形。這三個圖形的邊界，是由上述討論的不等式所決定的。圖形中間隱約有一條線，這是把 p 等於 0.5 的情況給標出來。後續會討論這個 $p=0.5$ 的特殊之處。

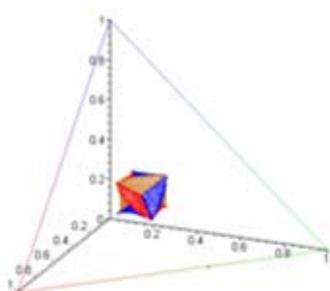


圖 5.6.11 三片包絡曲面

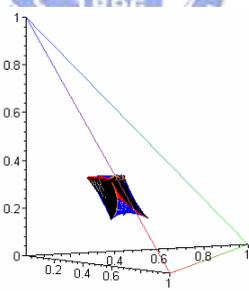


圖 5.6.12 七片包絡曲面

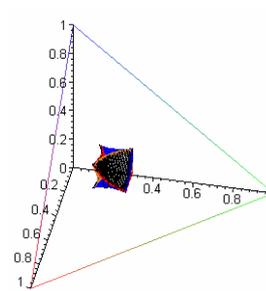


圖 5.6.13 七片包絡曲面

將 2-2 分的三個平分面包絡曲面畫在一起(圖 5.6.11)，再把 1-3 分的四個曲面一起畫進來(圖 5.6.12)(黑色為 1-3 分，彩色為 2-2 分)，換個角度觀察一下(圖 5.6.13)。

其中 2-2 分的部分(圖 5.6.11)看起來有三條直線。此三線就是陳和平先生找到的特殊平分解，就是歪斜對稜中點的連線。過這條線的所有平面，都可以把這個四面體平分，而用參數的方法，把 p 等於 0.5 的情況給特別標明，發現這三條線段正是這三個曲面中，兩兩相交的交集。從圖形中可以發現，猜想(V-4)需要一點點的修正，因為這個圖形不會只形成一個封閉空間，而是會由四片 1-3 分的曲面分別與三片 2-2 分的曲面圍成的四塊封閉空間。

在本節中提到，陳和平先生發現的特殊平分。那麼，有沒有可能在一組對稜上再找到其他一組點(兩中點以外的組合)，使得通過這一組點的所有平面都平分這一四面體體積？

將本節中要消去 m 的方程式寫出並交叉相乘整理成如下：
 $2p^2qm^2 - 4pqm^2 + 6pqm - 3qm + q - pq + 2qm^2 - 2p^2q^2m - pm = 0$ ，
 以 p 之降冪形式呈現。
 $(2qm^2 - 2q^2m)p^2 + (-4qm^2 + 6qm - q - m)p + (-3qm + q + 2qm^2) = 0$

這個方程式中，如果令 $m=q=0.5$ ，會發現 p 為任意實數皆可使方程式成立，所以證明本文參數討論中，包含陳和平先生的特殊平分。

此時，可改寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} 2qm^2 - 2q^2m = 0 \\ -4qm^2 + 6qm - q - m = 0 \\ -3qm + q + 2qm^2 = 0 \end{cases}$$

也就是令上面三個係數分別都等於 0.

但是解出這個聯立方程式，只有三組解， $\{q = m = 0\}$ 、 $\left\{q = m = \frac{1}{2}\right\}$ 、 $\{q = m = 1\}$

其中 $\{q = m = 0\}$ 、 $\{q = m = 1\}$ 不合，因為這個解會使得平面不是 2-2 分的情形(因為會通過四面體的一個稜)。

所以證明了僅有通過歪斜對稜中點連線，才会有無限多組解，其他對稜上點的連線，皆不可能有無限多組解。



1-3 分與 2-2 分的交會：

從圖 5.6.12，知 1-3 分和 2-2 分的平分面包絡曲面有相切的情形。

因為 1-3 分的初始條件是 $r \geq 1$ ，而 2-2 分的初始條件是 $r \leq 1$ ，

故 1-3 分與 2-2 分相交的情形為 $r=1$ 時，此時恰為過一頂點 C 的情形。

考慮一個體積平分面，其過頂點 C 且平分三角形 OAB 的面積，這個平分面屬 1-3 分的特例。這個平分面的 $\triangle PQR$ 重心即是 1-3 分與 2-2 分交線上的動點座標。

所以對於 $xyz = \frac{1}{54}$ 的情況，令 $z = \frac{1}{3}$ ，得到曲線方程式
$$\begin{cases} xy = \frac{1}{18} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}。$$

再經過參數 pq 的限制，這個曲線就是邊界(上述聯立方程為圖 5.6.14 中，黑色曲線頂部)。再經線性變換，同理得到其他 11 條邊界曲線。圖 5.6.14 是這 12 段局部的雙曲線的圖形。在這十二條局部雙曲線中，共可分為四組，每組三條在同一平面上(例如頂部之紅藍黑)，且此平面平行於四面體的某一面

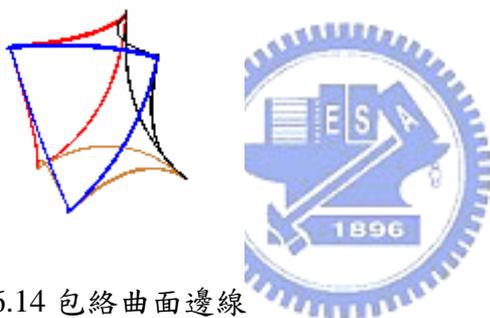


圖 5.6.14 包絡曲面邊線

1-3 分與 2-2 分曲面的公切面，為體積平分面，且必過四面體的一頂點。圖 5.6.14 中有六個頂點(其中之一為 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ，其餘類推)，分別是 4 段雙曲線的交點，此六點中(以四面體重心相對)的兩點組成三條共點直線。由此六點任一點作出的體積平分面必過四面體的二頂點，亦即過四面體的一稜邊。

以下是專題研究的初步成果

一、二維平面上，平分任意一凸多邊形，其面積平分線包絡曲線為多段局部(或退化成一點)的雙曲線聯集，使此曲線的切線為平分這多邊形面積的直線。

二、四面體體積平分面性質如下：

(一)過頂點與底面面積平分線的平面，必平分四面體體積

(二)體積平分面包絡曲面可分為兩類，共七片：

其一是 1-3 分的三元三次曲面，有四片；

其二是 2-2 分的三元曲面，有三片。

(三)1-3 分之曲面是以四面體的三個面為漸近面的曲面。

且這些曲面對稱性是以四面體中共頂點之三個稜邊為對稱軸，

例如 $xyz = \frac{1}{54}$ 的對稱軸是 x 軸、 y 軸、 z 軸。

座標原點是三對稱軸交點，但並無點對稱性質，亦即該曲面並無對稱中心。

(四)四片 1-3 分的曲面分別與三片 2-2 分的曲面圍成四個封閉空間。

(五)1-3 分的體積平分面和三稜的三交點的重心軌跡，即為包絡面方程式

(六)1-3 分的曲面與 2-2 分的曲面相交於十二條局部雙曲線，如圖 5.6.15

，其中共可分為四組每組三條在與四面體某面之平行面上。

(七)由十二條局部雙曲線相交得到之六個頂點，過其中任一點，作體積平分面，

則其必過四面體的二頂點，亦即過四面體的一稜邊。

(八)2-2 分的平分面包絡曲面包含特殊平分解：

過歪斜對稜中點連線的所有平面均為體積平分面。

(九)1-3 分與 2-2 分的曲面相交且公切於過頂點的體積平分面。

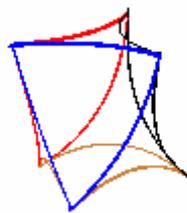


圖 5.6.15 包絡曲面邊線

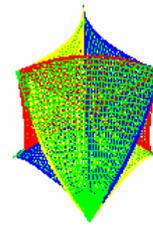


圖 5.6.16 正四面體的包絡曲面

三、因為正四面體之對稱性更明顯，為觀察方便起見，圖 5.6.16 是正四面體的體積平

分面包絡曲面，其以 $(0,0,0)$ 、 $(1,0,0)$ 、 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 及 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 為頂點。

在專題研究的輔導過程中，學生是主角，教師只是引導協助者，而數學軟體是重要的輔助工具，由一開始平面上的 GSP，到後來空間圖形用到的 Maple，都是利用電腦的運算速度，精準度，產生模擬實驗結果，據以判斷推測，再進一步加以驗證。尤其是使用 Maple 來繪出複雜的 3D 立體曲面，得以具體觀察其相關性質，據以推測再嘗試驗證。Maple 是功能強大的英文軟體，雖然上手門檻高，只要願意花時間去摸索學習，就能利用 Maple 來作許多進階的研究。

在資訊科技的協助下，我們得以更精準的去觀察許多數學上的性質，如同(李政豐，2003)使用 Excel, GSP, Maple 發現的兩函數 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形交點個數的探索，當 $a \in (0, e^{-e})$ 時，兩函數有三個交點， e^{-e} 約等於 0.065988，若無數學軟體的協助，僅憑人力去繪製函數圖形，實難發現如此神奇性質。



參考文獻

第一章：

- 李映良，「數學數位內容研發與網站經營之研究」，交通大學，碩士論文，2005
郭亮偉，「透過電腦輔助建構動態學習環境之研究」，交通大學，碩士論文，2005

第二章：

- 台北市政府，臺北市資優教育白皮書，台北，2004
台北市資賦優異教育資源中心，「學校資優教育的推展與實施」，資優教育簡訊，第27期，台北，2005
吳武雄，「認識資優教育充實與加速模式」，資優教育簡訊，第2期，台北，2000
白承軒，「整合 ICT 於專題式學習之學習成效研究」，淡江大學，碩士論文，2005
邱建偉，「在數學簡報系統上設計數學教材之研究」，交通大學，碩士論文，2005
Roblyer, M.D. & Edwards, J. Integrating educational technology into teaching, (2nd ed), Prentice Hall, New Jersey, 2000
Jonassen, D.H., Computers as mindtools for schools, Prentice Hall, New Jersey, 2000
張國恩，「從學習科技的發展看資訊融入教學的內涵」，北縣教育，41期，16-25頁，2002
蘇柏奇，「數學教材設計之研究-以知覺理論為基礎」，交通大學，碩士論文，2006
邱貴發，「電腦整合教學的概念與方法」，台灣教育，479期，1-8頁，1990
李進福，「數學教材設計之研究-以視覺理論為基礎」，交通大學，碩士論文，2006
陳明璋，「數學簡報系統——一個克服數位落差之教師專業發展環境」，第十屆全球華人電腦教育應用大會(GCCCE)，北京清華大學，2006

第三章：

- 李政豐，「資訊科技融入數學教學模組實務的研究」，交通大學，碩士論文，2003
蔡聰明，數學的發現趣談，三民，台北，2000
顏貽隆，「建構互動式學習環境實務之研究」，交通大學，碩士論文，2003
陳明璋等，萬腦奔騰數學網(一)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2002
陳明璋等，萬腦奔騰數學網(二)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2003
陳明璋等，萬腦奔騰數學網(三)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2005
黃國忠，「高中三角函數動態圖說證明元件開發研究」，交通大學，碩士論文，2006
張海潮，「畢氏定理和餘弦定理的證明」，數學傳播，第28卷第3期，2004
Roger B. Nelsen, Proofs without words Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America(MAA), 1993
Roger B. Nelsen, Proofs without words II More Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America(MAA), 2000

第四章：

- 蔡政樺，「在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究」，交通大學，碩士論文，2006
郭亮偉，「透過電腦輔助建構動態學習環境之研究」，交通大學，碩士論文，2005
張家郎，「利用 3D 動態幾何研究阿基米德與強森凸面體」，清華大學，碩士論文，2004
全任重，<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/>

第五章：

余尚芸，「國二學生實施專題導向式合作解題活動之歷程分析」，高雄師範大學，碩士論文，2004

顏貽隆，「建構互動式學習環境實務之研究」，交通大學，碩士論文，2003

陳創義，「二次曲線的相關巨集製作」，GSP幾何繪圖講義，

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/private/m12.htm>

笹部貞市郎，解析幾何學辭典，九章出版社，臺北，1987

全任重，<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/>

鄭再添，「三角形面積平分線探討」。數學傳播，第 11 卷第 4 期，中研院數學所，1987

張湘琦等，「凸 n 邊形等面積線段數量之分佈探索」，第 45 屆中小學科展數學科，2005

陳和平，「平分四面體體積的截面」。數學通訊，第 17 期，華中師範大學，2004

David I. S., Introduction to MAPLE 8, Prentice Hall, New Jersey, 2003

MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/Envelope.html>



附錄

附錄一、極軸方程式

圓錐曲線 $\Gamma: Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，點 $O(h, k)$

直線 $L: Ahx + B \cdot \frac{hy + xk}{2} + Cky + D \frac{x+h}{2} + E \frac{y+k}{2} + F = 0$

$X \in L$ ， \overline{OX} 交 Γ 於 Y, Z

試證： $\frac{2}{OX} = \frac{1}{OY} + \frac{1}{OZ}$ (註：有向距離)

證明：

(1) 設 $X(h+t_x \cos \theta, k+t_x \sin \theta)$ 、 $Y(h+t_y \cos \theta, k+t_y \sin \theta)$ 、 $Z(h+t_z \cos \theta, k+t_z \sin \theta)$

(2) $\because X \in L: (2Ah + Bk + D)x + (Bh + 2Ck + E)y + (Dh + Ek + 2F) = 0$

$$\therefore (2Ah + Bk + D)(h + t_x \cos \theta) + (Bh + 2Ck + E)(k + t_x \sin \theta) + (Dh + Ek + 2F) = 0$$

$$t_x = \frac{-2(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F)}{(2Ah + Bk + D)\cos \theta + (Bh + 2Ck + E)\sin \theta}$$

$$\frac{2}{t_x} = -\frac{(2Ah + Bk + D)\cos \theta + (Bh + 2Ck + E)\sin \theta}{(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F)}$$

(3) $\because Y, Z \in \Gamma: Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$A(h + t \cos \theta)^2 + B(h + t \cos \theta)(k + t \sin \theta) + C(k + t \sin \theta)^2 + D(h + t \cos \theta) + E(k + t \sin \theta) + F = 0$$

其中 t 的二根為 t_y, t_z

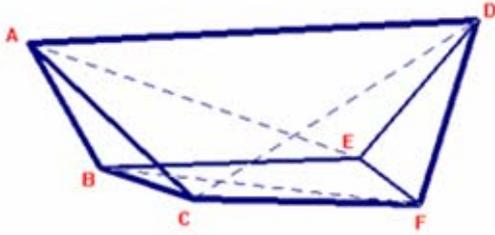
$$t^2(A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta) + t((2Ah + Bk + D)\cos \theta + (Bh + 2Ck + E)\sin \theta) + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0$$

由根與係數

$$\frac{1}{t_y} + \frac{1}{t_z} = \frac{t_y + t_z}{t_y \cdot t_z} = -\frac{\text{一次項係數}}{\text{常數項係數}} = -\frac{(2Ah + Bk + D)\cos \theta + (Bh + 2Ck + E)\sin \theta}{Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F}$$

(4) 由(2)(3)知 $\frac{2}{t_x} = \frac{1}{t_y} + \frac{1}{t_z}$ ，故知 $\frac{2}{OX} = \frac{1}{OY} + \frac{1}{OZ}$ ， $\therefore Q.E.D.$

附錄二、斜三角柱的體積



把這個物件分成三個四面體， $C-ABD$ ， $C-EBD$ ， $C-DEF$ 。

$$V_{C-ABD} = \frac{1}{6} |\overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD}$$

$$V_{C-EBD} = \frac{1}{6} |\overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD}$$

$$V_{C-DEF} = \frac{1}{6} |\overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD}$$

因此， $ABC-DEF$ 的體積會是三個四面體的體積和： $V_{C-ABD} + V_{C-EBD} + V_{C-DEF}$

$$= \frac{1}{6} (\overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD} + \overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} (\overline{CB} \times (\overline{CA} - \overline{CE}) \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} ((\overline{CF} + \overline{FB}) \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} (\overline{FB} \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times (\overline{CE} + \overline{EA}) \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} (\overline{FB} \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD})$$

因為 $ACFD$ 共平面 $\therefore \overline{CF} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD} = 0$

$$= \frac{1}{6} \overline{BF} \times \overline{AE} \cdot \overline{CD} \text{。證畢。}$$

附錄三、2-2 分的平分面包絡曲面參數式(Maple)

$$x := \frac{-(4q^3p^4 + 4q^2p^3 - 8q^2p^4 - 4q^2p^2 + 2qp^3 + 4qp^2 + q - 2pq - 2q\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 - p + \sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4})}{(p^2 - 2p + 1)(2pq - 1)q}$$

$$y := \frac{-(4q^4p^3 - 8p^2q^4 + 2q^3p + 4q^3p^2 - 4q^2p^2 + 4pq^2 - 2pq^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 2pq - q + p + \sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4})}{(2pq - 4p^2q^2 + 2q^3p - 1 + 2q - q^2)p}$$

$$z := \frac{(12qp^2 - 2pq\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 3pq^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 3q\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 + 8q^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 + q\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - p^2 - 6q^2p^2 - 6pq - q^2 + 12p^2q^2 - 24q^3p^2 - 24q^2p^3 + 36p^3q^3 - 28q^4p^4 + p\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} + q^3p + 12q^4p^3 + qp^3 + 12q^3p^4 + 4p^5q^5 - 2q^3\sqrt{q^2 + 6pq - 12p^2q^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^3)}{(12qp(2pq - 4p^2q^2 + 2q^3p - 1 + 2q - q^2)(p^2 - 2p + 1))}$$