

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

套裝軟體支援下之高中數學教學的動態呈現與探究

Mathematical Exploring and its Dynamic Presentation
Supported by Various Softwares

研究生：孟主安

指導教授：黃大原 教授

中華民國九十六年六月

套裝軟體支援下之高中數學教學的動態呈現與探究
Mathematical Exploring and its Dynamic Presentation
Supported by Various Softwares

研 究 生：孟主安

Student：Chu-An Meng

指 導 教 授：黃大原

Advisor：Tayuan Huang

國 立 交 通 大 學
理 學 院 網 路 學 習 學 程
碩 士 論 文



A Thesis
Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science

National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Degree Program of E-Learning

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

套裝軟體支援下之高中數學教學的動態呈現與探究

學生：孟主安

指導教授：黃大原 博士

國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班

摘 要

資訊科技的蓬勃發展，讓我們的教學模式更加地多元化。如何運用資訊科技融入數學教學之中，是教育工作者目前主要的課題之一，亞洲方面尤其以中國大陸和新加坡最為積極。本研究主要針對高中數學教學的動態呈現與探究學習兩方面，作資訊科技融入教學設計的探討。

我們在第三章裡，選擇適合網路學習的單元，並依據所使用軟體的特性，以資訊科技的優勢，設計以學生為核心的教學模組和方法，取代傳統的教學內容。我們使用 MathPS 設計了視覺化動態圖說證明 (*Dynamic Proofs Without Words*) 的例說，讓學生在正規嚴謹的數學證明之外，亦能從其他不同的觀點來體會數學之美。此外，我們並利用 Excel 軟體設計了「改變參數看圖形變化」單元，希望學生透過實驗及觀察，對於參數與圖形的關係能有進一步的理解。

圖形與代數兩者相輔相成的結合，對學生在思考數學時，會有最佳的學習效果。在第四章中，我們先針對若干問題培養學生多樣化的思維。接著將透過 Cabri-3D 軟體以動態立體幾何的方式，模擬呈現立體的實物圖形，幫助學生建立清楚的空間觀念。最後，我們在動態平面幾何軟體 GSP 的環境下，藉由觀察探索與解決問題的過程，提供學生進一步體會數學探究活動中的創造性研究。

【關鍵字】數學簡報系統、圖說證明、數學探究、正多面體的截痕

Mathematical Exploring and its Dynamic Presentation

Supported by Various Softwares

Student: Chu-An Meng

Advisor: Dr. Tayuan Huang

Degree Program of E-Learning
National Chiao Tung University

Abstract

The innovation of information technology nowadays accelerates the variety of our teaching styles. It has become current major concerns for how instructors integrating the information technology with subject contents for mathematical teaching and learning in class worldwide for the past decades, especially in China and Singapore. The focus of this thesis is to study how info-technology contributes to mathematical exploring and its dynamic presentations in mathematics teaching in high school.

In Chapter 3, some units that manifest internet-learning are chosen to develop student-centered teaching modules and methods. The advantages of old teaching style are replaced by the advantages of info-technology depending on the software used. Therefore, some examples of “Dynamic Proofs Without Words” show us dynamical ways of mathematical proofs within the environment of MathPS. In addition to strict mathematical proofs, it enables learners to appreciate the insights of mathematics from various view points. Moreover, the subjects “The change of graphs by changing the parameters” is developed by Excel. We hope that students will further understand the relationship between parameters and graphs by observing through various experiments.

It contributes to better learning kind on thinking mathematics question by the combination of the graph and algebra. Students’ versatile ways of thinking for various questions are given in Chapter 4. We also show how to build clear ideas about the presentations of three dimension through dynamic solid geometry using the dynamic geometry software Cabri-3D. Finally, we will show how to be benefited from the process of mathematical exploring together with problem solving under the dynamic geometry software GSP, so that students can successfully experience themselves the creative thinking of mathematical exploring.

Keywords: MathPS, dynamic proofs without words, mathematical exploring, truncated polyhedra solid

誌 謝

論文能夠順利的完成，要感謝的貴人及事物實在太多了。

首先要感謝專班在網路學習組所用心安排的課程，它掌握了資訊與網路科技在數學教育方面應用的國際脈動，並基於「製作－分享－批評－參與－提升」之良性循環模式的理念，使得我們匯萃在這個豐富多元且充實愉快的學習環境，能夠共同呼應資訊科技融入教學機制、學科教師將資訊科技融入課堂學習的願景，這些都要感謝專班所有師長們前瞻性的推動與付出。

除此之外，非常感謝我的指導教授黃大原老師，他嚴謹的淵博學問與優雅的教學風格，以及慎密的思維與認真的態度，還有對於學生的關懷心與同理心，不僅是值得我學習「經師」的目標，更是值得我效法「人師」的榜樣。特別是當論文出現空窗之際，或在生活陷入愁雲之季，老師總是會給予久旱逢甘霖般地提綱挈領，並且不時撥冗稍來關心的鼓勵和支持，在此致上最誠摯的謝忱，老師：謝謝您。

再者，要非常感謝陳明璋老師引領我們在資訊領域的指導與成長，他靈活熟悉又創新的軟體技術，特別是他所研發的「數學簡報系統」(MathPS)，不僅讓我學到許多資訊上的實用教學技術，更可以真正做到資訊融入教學的理念。還要感謝專班主任莊祚敏教授，以他豐富的學問與見聞，在論文研討課堂上循循善誘的指導，使得我在撰寫論文時更能得心應手。感謝袁媛教授帶領我進入數學教育的領域，指導我們站在學生學習的角度思考教學的方向與素材設計的內容。感謝清華大學全任重教授引領我開啟動態立體幾何軟體的門窗，而能接觸新的幾何教學世界。也要感謝專班所有教授認真且精彩的課程內容，讓我入寶山滿載而歸。

更要感謝國立大里高中黃義虎校長的支持，讓我得以在班級經營及教學工作的忙碌之餘，還能順利的完成論文。也要感謝同事們在進修期間給予我的鼓勵支持以及指導指教。也要特別感謝專班的同學－政樺、吉彬、心怡、佳煌，在研究討論切磋中讓我獲得許多寶貴意見和加油鼓勵，以及專班所有同學一起陪我走過這段忙碌卻充實的日子，這些點滴真令人難忘。

最後要由衷地感謝我的家人。尤其是我的愛妻－燕錚的體諒與包容，讓我能無後顧之憂而專心完成課業，還有我那疏於照顧的小寶貝－紘霆，因為你的乖巧懂事，讓爸爸能順利完成學業。還有我親愛的父母親、岳父母以及三位姐姐們，您們綿綿無盡的親情支柱，讓我有勇氣與恆心堅持下去，渡過許多學習的低潮而能順利的完成論文，您們都是支持我完成進修的幕後功臣。

雖然在這段期間連續遭逢生命中頓時降臨的晴天霹靂，但是雨過天晴的此時，願以此論文獻給所有關心、支持我的師長及親友，和你們一同分享這個喜悅。

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
第一章 緒論	1
1-1 研究背景	1
1-2 研究動機及目的	2
1-3 研究方法及限制.....	2
1-4 論文結構	3
第二章 文獻探討	5
2-1 資訊科技與數學課程的整合.....	5
2-2 亞洲四國資訊科技融入高中數學教學之變革.....	6
2-3 數學動態模擬的探究學習理論.....	8
2-4 套裝數學軟體的簡介.....	9
第三章 在電腦軟體環境下的高中數學之動態示例.....	11
3-1 幾則無窮概念的動態幾何意義之呈現---以 MathPS, GSP 為設計平台.....	13
3-1-1 前言.....	13
3-1-2 惠更斯級數.....	14
3-1-3 一則交錯級數.....	17
3-1-4 擺線軌跡下所圍的面積.....	19
3-2 幾則數學定理、公式的動態圖說證明之呈現---以 MathPS 為設計平台.....	23
3-2-1 前言.....	23
3-2-2 正弦三倍角公式.....	24
3-2-3 正餘弦疊合的範圍.....	27
3-2-4 維維安尼定理.....	29
3-2-5 算幾不等式.....	31
3-3 幾則平移及伸縮概念的動態呈現 ---以 Excel 為設計平台.....	37
3-3-1 前言.....	37

3-3-2 斜率、截距與直線方程式關係的互動變化.....	38
3-3-3 拋物線方程式 (二次函數圖形) 的互動變.....	40
3-3-4 橢圓方程式的互動化.....	40
3-3-5 雙曲線方程式的互動變化.....	42
第四章 在電腦軟體環境下的高中數學之探究與學習.....	45
4-1 代數式幾何意義之探究與學習.....	47
4-1-1 前言.....	47
4-1-2 一道國際數學奧林匹亞競賽試題的再出發.....	48
4-1-3 兩則三角恆等式的意義之推廣.....	50
4-1-4 反正切三角函數式與方格紙的關係之初探.....	53
4-2 鋪磁磚之「半正則嵌鑲」成「勻稱連續圖形」的公式.....	55
4-2-1 前言.....	55
4-2-2 勻稱連續圖形.....	55
4-2-3 利用平移、鏡射、旋轉嵌鑲連續圖形.....	60
4-2-4 電腦科技處理連續圖形.....	61
4-3 高中數學問題的立體動態之操作探究---以 Cabri-3D 為工具.....	63
4-3-1 前言.....	63
4-3-2 四面體與平面的截痕形狀.....	64
4-3-3 正多面體的稜邊與球面之交點個數.....	69
4-3-4 歐拉多面體定理的投影證法.....	75
4-4 三角形中的極值點問題之探究---以鋪路造橋問題為例, 以 GSP 為工具.....	77
4-4-1 前言.....	77
4-4-2 從簡單的定理推論出發.....	78
4-4-3 動態模擬、建立數學模型.....	80
4-4-4 結論與相關研究討論及應用.....	88
參考文獻	91

表 目 錄

表 2-2-1-1 亞洲四國在資訊科技融入高中數學課程之比較.....	6
表 4-1-4-1 π 的著名反正切式.....	53
表 4-2-2-1 以兩種正多邊形半正則嵌鑲連續圖形的關係表.....	57
表 4-2-2-2 以三種正多邊形半正則嵌鑲連續圖形的關係表.....	59
表 4-3-3-1 正多面體稜長為 4 的相關幾何量.....	70



圖目錄

圖 3-1-2-1 阿基米德級數幾何意義(1)	15
圖 3-1-2-2 阿基米德級數幾何意義(2)	15
圖 3-1-2-3 兩圓外切且與 x 軸切於同側.....	15
圖 3-1-2-4 兩圓與 x 軸間又內切另一個圓.....	15
圖 3-1-2-5 惠更斯級數的幾何意義.....	16
圖 3-1-2-6 惠更斯級數的另一種幾何意義.....	17
圖 3-1-3-1 一則無窮交錯級數之和的幾何意義.....	18
圖 3-1-3-2 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(1)	18
圖 3-1-3-3 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(2)	19
圖 3-1-3-4 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(3)	19
圖 3-1-3-5 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_猜想.....	19
圖 3-1-3-6 一則無窮交錯級數之和的幾何意義與三角形重心的連結.....	19
圖 3-1-4-1 腳踏車車輪軌跡中的擺線(1)	20
圖 3-1-4-2 腳踏車車輪軌跡中的擺線(2)	20
圖 3-1-4-3 擺線軌跡參數方程的假設圖示.....	20
圖 3-1-4-4 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(1)	21
圖 3-1-4-5 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(2)	21
圖 3-1-4-6 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(3)	21
圖 3-1-4-7 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(4)	22
圖 3-1-4-8 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(5)	22
圖 3-1-4-9 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(6)	22
圖 3-1-4-10 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(7)	22
圖 3-1-4-11 擺線軌跡下所圍的面積之動態圖示步驟(8)	22
圖 3-2-2-1 正弦三倍角公式動態圖解(1)	24
圖 3-2-2-2 正弦三倍角公式動態圖解(2)	24
圖 3-2-2-3 正弦三倍角公式動態圖解(3)	24
圖 3-2-2-4 正弦三倍角公式動態圖解(4)	24
圖 3-2-2-5 正弦三倍角公式動態圖解(5)	25
圖 3-2-2-6 正弦三倍角公式動態圖解(6)	25
圖 3-2-2-7 正弦三倍角公式動態圖解(7)	25
圖 3-2-2-8 正弦三倍角公式動態圖解(8)	25
圖 3-2-2-9 正弦三倍角公式動態圖解(9)	25
圖 3-2-2-10 正弦三倍角公式動態圖解(10)	25
圖 3-2-3-1 正餘弦疊合的範圍_(1)作一過原點的直線.....	27
圖 3-2-3-2 正餘弦疊合的範圍_(2)單位圓上一點到直線的距離.....	27
圖 3-2-3-3 正餘弦疊合的範圍_(3)距離小於或等於 1	27

圖 3-2-3-4	$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta \leq \sqrt{a^2+b^2}$	27
圖 3-2-3-5	正餘弦疊合的範圍_(5)距離=1 時, P 點位置.....	28
圖 3-2-3-6	正餘弦疊合的範圍_(6)移動 P 點.....	28
圖 3-2-3-7	正餘弦疊合的範圍_(7)移動 P 點至紅色距離=藍色 1	28
圖 3-2-3-8	正餘弦疊合的範圍_(8)移動 P 的連續動作.....	28
圖 3-2-3-9	正餘弦疊合的範圍_(9)找到距離=1 時 P 點位置.....	28
圖 3-2-3-10	正餘弦疊合的範圍_(10)此時過 P 點和原點的直線恰垂直於原直線.....	28
圖 3-2-4-1	維維安尼定理動態圖解(1)	29
圖 3-2-4-2	維維安尼定理動態圖解(2)	29
圖 3-2-4-3	維維安尼定理動態圖解(3)	29
圖 3-2-4-4	維維安尼定理動態圖解(4)	29
圖 3-2-4-5	維維安尼定理動態圖解(5)	30
圖 3-2-4-6	維維安尼定理動態圖解(6)	30
圖 3-2-4-7	維維安尼定理動態圖解(7)	30
圖 3-2-4-8	維維安尼定理動態圖解(8)	30
圖 3-2-4-9	維維安尼定理動態圖解(9)	30
圖 3-2-4-10	維維安尼定理動態圖解(10)	30
圖 3-2-5-1	算幾不等式之推廣_(1)以長度觀點的靜態圖解.....	31
圖 3-2-5-2	算幾不等式之推廣_(2)以長度觀點的動態圖解.....	31
圖 3-2-5-3	算幾不等式_以 $a+b$ 為直徑作半圓.....	33
圖 3-2-5-4	算幾不等式之推廣_(3) <i>Pappus</i> 於西元 300 年的原圖.....	33
圖 3-2-5-5	算幾不等式_以 <i>Pappus</i> 圖推廣的靜態圖.....	33
圖 3-2-5-6	算幾不等式_以 <i>Pappus</i> 圖推廣的動態圖.....	33
圖 3-2-5-7	平均不等式之推廣_(1)以線段作藍色.....	34
圖 3-2-5-8	平均不等式之推廣_(2)以線段作綠色.....	34
圖 3-2-5-9	平均不等式之推廣_(3)以線段作紫色.....	35
圖 3-2-5-10	平均不等式之推廣_(4)將 \overline{OP} 長度平移至 \overline{MN}	35
圖 3-2-5-11	平均不等式之動態圖.....	35
圖 3-2-5-12	以面積的觀點的算幾不等式(1)	36
圖 3-2-5-13	以面積的觀點的算幾不等式(2).....	36
圖 3-2-5-14	以面積的觀點的算幾不等式(3).....	36
圖 3-2-5-15	以面積的觀點的算幾不等式(4).....	36
圖 3-2-5-16	以面積的觀點的算幾不等式(5).....	36
圖 3-2-5-17	以面積的觀點的算幾不等式(6).....	36
圖 3-3-1-1	以 GSP 動態呈現可操作的拋物線方程式及其圖形.....	37
圖 3-3-2-1	動態改變截距以觀察直線的斜率及其圖形之變化.....	38

圖 3-3-2-2 菱形方程式的圖形_改變 a 值.....	39
圖 3-3-2-3 菱形方程式的圖形_改變 b 值.....	39
圖 3-3-2-4 菱形方程式的圖形_改變 h 值.....	39
圖 3-3-2-5 菱形方程式的圖形_改變 k 值.....	39
圖 3-3-2-6 矩形方程式的圖形_改變 a 值.....	39
圖 3-3-2-7 矩形方程式的圖形_改變 b 值.....	39
圖 3-3-2-8 矩形方程式的圖形_改變 h 值.....	39
圖 3-3-2-9 矩形方程式的圖形_改變 k 值.....	39
圖 3-3-3-1 拋物線方程式的圖形_標準上下型.....	40
圖 3-3-3-2 拋物線方程式的圖形_改變 c 值.....	40
圖 3-3-3-3 拋物線方程式的圖形_改變 h 值.....	40
圖 3-3-3-4 拋物線方程式的圖形_改變 k 值.....	40
圖 3-3-4-1 橢圓方程式的圖形_改變 a 值.....	41
圖 3-3-4-2 橢圓方程式的圖形_改變 b 值.....	41
圖 3-3-4-3 橢圓方程式的圖形_改變 h 值.....	41
圖 3-3-4-4 橢圓方程式的圖形_改變 k 值.....	41
圖 3-3-4-5 圓方程式的圖形.....	41
圖 3-3-4-6 圓方程式的圖形_改變 a (半徑).....	41
圖 3-3-4-7 圓方程式的圖形_改變 h 值.....	41
圖 3-3-4-8 圓方程式的圖形_改變 k 值.....	41
圖 3-3-5-1 雙曲線方程式的圖形_改變 a 值.....	42
圖 3-3-5-2 雙曲線方程式的圖形_改變 b 值.....	42
圖 3-3-5-3 雙曲線方程式的圖形_改變 h 值.....	42
圖 3-3-5-4 雙曲線方程式的圖形_改變 k 值.....	42
圖 3-3-5-5 雙折線方程式的圖形_改變 a 值.....	43
圖 3-3-5-6 雙折線方程式的圖形_改變 b 值.....	43
圖 3-3-5-7 雙折線方程式的圖形_改變 h 值.....	43
圖 3-3-5-8 雙折線方程式的圖形_改變 k 值.....	43
圖 4-1-2-1 一道國際數學奧林匹亞競賽試題的幾何意義.....	49
圖 4-1-3-1 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$	51
圖 4-1-3-2 $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$	51
圖 4-1-3-3 $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$	52
圖 4-1-4-1 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$	53
圖 4-1-4-2 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{5}$	53

圖 4-1-4-3	$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}$	53
圖 4-1-4-4	$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y-x}{y+x}$	54
圖 4-1-4-5	$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{x+y} + \tan^{-1} \frac{y}{2x+y}$	54
圖 4-2-2-1	三種 <i>regular tessellation</i> 圖形	56
圖 4-2-2-2	以兩或三種正多邊形半正則嵌鑲的九種勻稱連續圖形	57
圖 4-2-3-1	正六邊形的平移嵌鑲	60
圖 4-2-3-2	正方形的平移嵌鑲	61
圖 4-2-3-3	利用鏡射嵌鑲	61
圖 4-2-3-4	利用旋轉嵌鑲	61
圖 4-2-3-5	利用 MathPS 處理連續圖形的網站作品	62
圖 4-3-2-1	正立方體被以主對角線為法線的平面所截之截痕面	65
圖 4-3-2-2	平面截正立方體的截痕為任意三角形	65
圖 4-3-2-3	平面截正立方體的截痕為平行四邊形(1)	65
圖 4-3-2-4	平面截正立方體的截痕為平行四邊形(2)	66
圖 4-3-2-5	平面截正立方體的截痕為任意四邊形	66
圖 4-3-2-6	平面截正立方體的截痕為任意五邊形	66
圖 4-3-2-7	平面截正立方體的截痕為任意六邊形	66
圖 4-3-2-8	平面截四面體的截痕為三角形	67
圖 4-3-2-9	平面截四面體的截痕不存在(不共面)	67
圖 4-3-2-10	平面截四面體的截痕為四邊形	67
圖 4-3-2-11	平面截四面體的截痕為梯形	67
圖 4-3-2-12	平面截四面體的截痕為平行四邊形	68
圖 4-3-2-13	平面恰過四面體一頂點截痕為三角形	68
圖 4-3-2-14	平面恰過四面體兩頂點截痕為三角形	68
圖 4-3-3-1	正六面體與球面交 0 個交點	69
圖 4-3-3-2	正六面體與球面交 12 個交點	69
圖 4-3-3-3	正六面體與球面交 24 個交點	69
圖 4-3-3-4	正六面體與球面交 8 個交點	69
圖 4-3-3-5	正六面體與球面交 0 個交點	69
圖 4-3-3-6	正四面體與球面相交的製作步驟	72
圖 4-3-3-7	正四面體與球面交 0 個交點	72
圖 4-3-3-8	正四面體與球面交 6 個交點	72
圖 4-3-3-9	正四面體與球面交 12 個交點	72
圖 4-3-3-10	正四面體與球面交 4 個交點	72
圖 4-3-3-11	正八面體與球面相交的製作步驟	73

圖 4-3-3-12 正八面體與球面交 0 個交點.....	73
圖 4-3-3-13 正八面體與球面交 12 個交點.....	73
圖 4-3-3-14 正八面體與球面交 24 個交點.....	73
圖 4-3-3-15 正八面體與球面交 6 個交點.....	73
圖 4-3-3-16 正十二面體與球面交 0 個交點.....	74
圖 4-3-3-17 正十二面體與球面交 30 個交點.....	74
圖 4-3-3-18 正十二面體與球面交 60 個交點.....	74
圖 4-3-3-19 正十二面體與球面交 20 個交點.....	74
圖 4-3-3-20 正二十面體與球面交 0 個交點.....	74
圖 4-3-3-21 正二十面體與球面交 30 個交點.....	74
圖 4-3-3-22 正二十面體與球面交 60 個交點.....	74
圖 4-3-3-23 正二十面體與球面交 12 個交點.....	74
圖 4-3-4-1 尤拉多面體定理在 Cabri-3D 的投影.....	76
圖 4-4-2-1 鋪路造橋問題的地圖.....	78
圖 4-4-2-2 平形四邊形的方法.....	78
圖 4-4-2-3 $\triangle ACP$ 繞 A 點轉 60°	80
圖 4-4-2-4 $\triangle ABC$ 的費瑪點.....	80
圖 4-4-3-1 作法 2.1 的動態模擬.....	81
圖 4-4-3-2 作法 2.2 的動態模擬.....	81
圖 4-4-3-3 作法 2.3 的動態模擬.....	82
圖 4-4-3-4 作法 2.4 的動態模擬.....	82
圖 4-4-3-5 作法 3.1 的動態模擬.....	83
圖 4-4-3-6 作法 3.2 的動態模擬.....	83
圖 4-4-3-7 作法 3.3 的動態模擬.....	84
圖 4-4-3-8 作法 3.4 的動態模擬.....	84
圖 4-4-3-9 作法 3.5 的動態模擬.....	85
圖 4-4-3-10 作法 3.6 的動態模擬.....	85
圖 4-4-3-11 作法 3.7 的動態模擬.....	86
圖 4-4-3-12 三地標位置.....	88
圖 4-4-3-13 問題 5 的動態模擬.....	88
圖 4-4-4-1 取一個節點 O.....	89
圖 4-4-4-2 取兩個節點 M, N	89
圖 4-4-4-3 當 $AM=BM, CN=DN$	90
圖 4-4-4-4 互為 120 度時.....	90

第一章 緒論

近年來教育部積極推動資訊科技融入各學科的教學，鼓勵第一線教師實施多元化的教材與教法，期望為學生建立一個有啟發性及互動性的學習環境(教育部，2001)。我們利用 PowerPoint (MathPS), Excel, GSP, Cabri 3D 等電腦套裝軟體的特性，選擇適當的高中數學之教學素材和探究問題，以動態模擬的方式呈現教材的內容，讓豐富的資訊科技資源融入教與學的過程，使得學生達到更有效的學習效果。

本章分別在第 1-1 節探討研究的背景，第 1-2 節說明本研究之動機與目的，第 1-3 節說明研究上的方法及其限制，第 1-4 節則概略說明整個論文的結構。

1-1 研究背景

「資訊科技融入教學」是國內教學的新型態，也是世界各先進國家教學的趨勢。1960 年代美國伊利諾大學發展了 *Programmed Logic for Automatic Teaching Operation* 系統，首度將電腦應用帶入教育，開啟了電腦輔助教學 (*Computer Assisted Instruction* , *CAI*) 的時代 (蔡政樞，2006)，直到網際網路的盛行及科技應用軟體的發達，才為電腦輔助教學、資訊融入教學開啟嶄新的一頁 (林信男，民 89 年)。1983 年美國數學教師協會 (*National Council of Teachers of Mathematics* , *NCTM*) 建議各學年階段的教師使用科技的工具教導數學技能與概念，國內學者 (吳鐵雄，1993) 也認為電腦輔助教學是突破我國傳統教學，適應學生個別差異，提高教學品質的有效途徑之一。

現代資訊技術的廣泛應用正對於數學教育產生深刻的影響，教師要如何將科技融入數學課程內容、教材教學、以及數學探究學習等各方面之中，才能使電腦成為教學環境中不可缺少的工具。因此，在教育部大力推動之下，九十四學年起將全面落實資訊融入教學計畫，依教育部中小學資訊教育總藍圖的規劃，所有教學將需要有百分之二十的資訊融入教學時數。所以，學校的資訊融入教學要如何規劃與實施是值得教育工作者深思熟慮的課題，我們應該用積極的態度提升自己的資訊素養，進而養成將資訊融入教學的實際教學能力，利用電腦軟體技術來呈現以往數學教學中難以呈現的課程內容，加強數學教學與科技技術的結合，並鼓勵學生運用電腦應用軟體所呈現的環境進行探索和學習。

1-2 研究動機與目的

許多的研究者指出，利用電腦視覺化的增強有利學生在幾何上的學習，如 *Bishop* (1989) 覺得電腦產生的圖像能對學生的視覺化產生一個激勵的影響。*Clements* 和 *Battisa* (1992) 也建議在幾何學習上可採用適當的電腦軟體來輔助學習。*Hansen* (1998) 提到 21 世紀「電腦」將是日常生活的一部份，各階段的教學將廣泛地在電腦軟體環境為基礎下進行數學問題的探究，並且認為「因為電腦程式很著重在視覺化的使用，因此視覺的思考必須學習」，所以電腦對學習者在形象思維的發展中扮演一個很重要的角色 (左台益、梁勇能，民 90)。

數學本身研究最基本的對象是「數」與「形」，「幾何圖形」所引出的幾何直覺和由「數」而引出的具體和概念關係，往往是數學中極為豐富的源泉。研究者指出高中學生數學學習的困難，有部分的原因是數學公式比較抽象，而難以直觀的理解 (李政豐，2000)。若是能讓數學素材視覺化，數學單元的內容模擬動態化，利用具體的圖形呈現來幫助學生對數學公式產生直覺而深刻的印象，進而學得定理、公式，縱然少了嚴密的推論，也是教師可以努力的方向之一。

另一方面，科學上的許多新發現都是先經由「觀察」而來的，動態視覺思考的邏輯推理與在語言上的邏輯推理是非常相似的，而藉由實際的操作模擬過程進一步，思考者可以將抽象的概念轉為具體的想法，進一步再設計一些數學問題的探究活動，為學生形成積極主動且具有多元化創造學習的條件，以激發學生的數學學習興趣，讓學生體驗數學發現和創造的歷程，發展他們的創新能力與意識。

本研究希望透過數種電腦軟體的功能與特色，運用視覺思考於數學的學習，提供若干具有互動性、可操作性及可動態呈現的模擬實驗素材，透過具體的影像直覺留下印象，加深學生數學概念的認識，希望透過電腦應用軟體的強大功能與優勢，在資訊科技融入教學的環境中，鼓勵學生使用現代化科技手段來處理繁雜的計算、解決實際問題，以取得更多的時間和精力去探索和發現數學的規律，並培養學生創新精神和實踐能力。

1-3 研究方法及限制

根據 *Van Hiele* 之幾何教學理論以及課程教學實務，可以了解到幾何課程的學習應該藉由實驗、觀察、探索、研究等活動不斷地安排在不同學習層次中，讓學生透過有趣的、具體的、可操作的幾何形象更了解幾何世界，促進他們幾何思維的能力 (蔡

政權，2006)。因此，本研究採用的方法是將學生在學習高中數學上的難懂之處，以學生為主角，問題為核心，在教師的指導下，利用 PowerPoint (MathPS), Excel, GSP, Cabri-3D 等電腦套裝軟體的特性，結合學習理論在電腦教學上的應用，選擇需要利用電腦軟體來呈現實物模型的單元或問題素材，透過電腦軟體所營造的環境，讓學生運用所學的數學知識及基本資訊能力達到更有效的學習效果。

本研究雖以動態模擬的方式呈現教材的內容，但是仍有下列的限制應該特別的注意，以避免陷入事倍功半的窘境。

1. 代數性質與幾何性質的轉換應該是等價的，否則解題時會出現漏洞。有時候由於圖形的侷限性（例如在圖說證明中基本上其角度限制在 0 度到 90 度之間），不能完整地表現數的一般性，這時的圖形性質只是一種直觀的、顯淺的說明，必須向學生闡釋清楚。但是這個作用確也是抽象而嚴格證明的「導盲犬」之一。
2. 要切實的灌輸學生，我們在進行幾何直觀的分析與代數抽象的探索時，兩方面應該相輔相成，勿以為數形結合只是對代數問題進行幾何分析，這是一種錯誤的單方面的誤解。數學式與幾何圖形相互結合是發揮雙重效果，而不是簡單地用幾何取代代數。
3. 找到解題思路之後，我們要判斷這個概念到底是否適合以幾何意義來呈現，需取決於哪種方法更加簡單、更加優美並能夠到教學的目的，而不是機械式的將所有的代數問題全部皆用幾何方式來解說觀念。

另一方面，礙於時間因素，關於學生的實質學習成效，並未詳加探討，仍有更多的研究空間；教師的教學是否能更便利有效是需要未來的研究者加以探討。

1-4 論文結構

本研究的主要架構如下：

在第二章中，主要在討論資訊科技與數學課程整合的過程，所產生的學習理論與教學方式的變革，以及面臨的難題。由亞洲地區主要的國家在資訊科技融入高中數學課程教學的比較，大陸和新加坡近年來所重視與投入的比例，確實值得我們積極學習。在套裝電腦軟體的數學探究之情境設計所依據的理論之下，學生可以透過電腦動態模擬，有更多的觀察、探索、試驗的新學習方式。

在第三章中，以電腦軟體 MathPS, GSP 探討並製作若干動態化的數學模式，呈現

無窮級數、擺線軌跡下所圍面積的極限，將靜態的圖形化為動態的方式，並提供數則動態圖說證明 (*Dynamic proofs without words*)，由一個步驟接一個步驟的呈現在學習者的眼前，以視覺的方式了解數學，透過具體的影像直覺留下印象，加深數學概念的認識。另外，以 *Excel* 的計算和繪圖功能製作若干模擬動態，讓學生或教師透過滑鼠的操作，觀察直線斜率和截距、及圓錐曲線方程式在係數上的變化，了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。

在第四章是探究若干代數式的幾何意義之學習，以及討論從勻稱連續圖案 *regular tessellation* 出發到 *semiregular tessellation*。另一方面以立體動態幾何軟體 *Cabri-3D* 來作實例分析與設計操作的教學素材之開發，對「四面體與平面的截痕形狀」的討論探究，延伸動態探究「正多面體的稜邊與球面之交點個數」，並將尤拉多面體定理的靜態文字與圖片的證明，以動態立體幾何的方式模擬呈現書中所載之敘述，期望能夠幫助學生在學習立體觀念時不再瞎子摸象，培養清楚的空間概念。最後我們針對思源科技教育基金會所主辦的「2007 思源科學創意大賽--數學專題競賽」之題目 --- 「鋪路造橋問題」，藉由腦力激盪的探究過程，從其中激發學生提出解決問題的觀察、猜想、邏輯推理與檢驗論證，並且學習瞭解到具體操作數學軟體的方法，進而創新和突破找出解決問題的方法與步驟。



第二章 文獻探討

本章主要在討論資訊科技與數學課程整合的過程，所產生的學習理論與教學方式的變革，以及面臨的難題。由亞洲地區主要的國家在資訊科技融入高中數學課程教學的比較，大陸和新加坡近年來所重視與投入的比例，確實值得我們積極學習。在套裝電腦軟體的數學探究之情境設計所依據的理論之下，學生可以透過電腦動態模擬，有更多的觀察、探索、試驗的新學習方式。

2-1 資訊科技與數學課程的整合

隨著電腦科技的快速發展，衝擊了原有的數學課程與教學模式，數學課程與電腦資訊的相互支援，已成為許多國家數學課程改革的重要原則。其中最顯著的例子即是美國於 2000 年制訂的《國家數學標準》強調科學技術與數學課程中的重要結合性，並提供大量動態化的數學電子檔實例，讓教師懂得怎樣在教學實踐中去運用資訊科技。

由於視覺設計成為各種電腦輔助學習軟體中非常重要的介面因素，各種靜態或動態視覺圖像的運用，更成為電腦互動介面中最受矚目的一環（林麗娟，2000）。而人類的知覺歷程會影響學習、概念的形成、問題索解能力以及批判思考之發展，因此視覺圖像設計者應掌握人類認知原則，促使能夠製出更具效能的教學媒體、教材（Fleming & Levie, 1993）。幾何圖形經由電腦科技的輔助能以動態圖像的方式呈現，提供學習者強有力的學習與知覺經驗，可以讓學習者形成動態的內在表徵，使學習者對抽象的概念更具知覺的能力（鄭晉昌，1997）。

相對的也產生若干值得教育研究界深入探討的要題，尤其是動態式呈現科技的運用，固然滿足了學習的視覺感官需求，但是也增添學習上的變數（李進福，2006）。目前科技融入教學最大的困難之一，就是缺乏教學實例與可共享的資源不多（吳正己，2001；何榮桂，2002）。所以教師利用新科技製作教材時，不應只是專注於新技術的學習與特效的展現，應該發揮教師的本位專長，設計良好的教材內容。並且在教材內容利用電腦的功能呈現時，應注意訊息的呈現方式及利用視覺元素作正確的視覺引導，將訊息正確地傳達給學生。

另一方面，資訊科技與數學課程的整合最直接的就是教學方式的變革與學習方式的改變，因為它能提供理解和探索數學的平台，使得數學實驗的重要性及其表現形式變得更加具體和生動。美國教育家布魯巴克認為：“最精湛的教育藝術，遵循的最高準

則就是學生自己提出問題”，美國著名數學家哈爾莫斯說“問題是數學的心臟”，學生可以透過電腦提供的資料、圖像或動態模擬，有更多的觀察、探索、試驗的機會，既可以作出猜測，又能夠透過檢驗假設來證明自己的猜想。這種從實例出發—在電腦上做實驗—發現規律—提出猜想—進行證明和論證，正是一個以問題為主體，以電腦為手段，以學生為核心的全新教學模式，也是創造學生主動探究學習情境的工具。

2-2 亞洲四國資訊科技融入高中數學教學之變革

學者曾對亞洲地區的中國大陸、新加坡、日本、韓國等與我們台灣做過十二年數學課程比較的研究 (單維彰等, 2005), 其中對於資訊科技融入高中數學教學與探究應用的部分, 我們可以整理歸納如表 2-2-1-1 所示。

表 2-2-1-1 亞洲四國在資訊科技融入高中數學課程之比較

	各國資訊科技融入高中數學課程的描述比較	研究者
中國大陸	<ol style="list-style-type: none"> 1. 綱要特別強調「只要條件許可, 都應該用電腦或計算機」。 2. 將演算法的基本概念當作數學的基礎知識, 有時為了能在電腦上實現, 還需要將自然語言或程式框圖翻譯成電腦語言。 3. 建立數學模型的能力。 	姜志遠
新加坡	<ol style="list-style-type: none"> 1. 要求平面和立體圖形變換的學習配合計算機, 落實將 IT 帶到教學過程中。 2. 把動態與操作的幾何放在數學課程裏, 其意義與價值是讓學生為將來3D立體的電腦繪圖或設計軟體做好幾何概念的準備。 3. 台灣在3D幾何操作或設計製作特殊動畫的訓練安排較少。 	翁婉珣
日本	<ol style="list-style-type: none"> 1. 日本顯著比台灣更注重電子計算機在數學上的應用。 2. 綱要強調教師在指導各學科時要在適當的時機能夠活用電腦及視訊網路以提升學生的學習效果, 但並沒有明確指出何時該用。 	洪雅齡
韓國	<ol style="list-style-type: none"> 1. 綱要中只有在選修應用數學跟離散數學上, 較認真在說「計算器與電腦」, 而其他主題也只是在教學 	黃子倩

	<p>方法中，用一句話「利用計算器取得平方根的近似值」帶過。很不踏實。</p> <p>2. 台灣與韓國在這方面都比較保守，我們或許都應該參考新加坡的作法。</p>	
--	---	--

由表 2-2-1-1 得知，大陸與新加坡地區近年來相當的重視數學與電腦技術的結合，並積極全力推動運用現代化科技於數學學習探索和解決問題方向的數學建模活動，加強資訊技術與課程的整合。我們進一步研讀「普通高中數學課程標準（實驗）解讀」（江蘇教育出版社，2004）裡，有關於資訊科技融入數學教學之整合，發現若干值得我們重視與學習之處，概述如下：

1. 增強數學的視覺化：

強調幾何與其他數學內容的融合以及幾何直觀的作用，運用資訊技術呈現以往教學中難以呈現的課程內容。特別是幾何圖形的性質，複雜的計算過程，函數的動態變化過程，幾何證明的直觀背景等，若能運用資訊技術來直觀呈現，使其視覺化，將會有助於學生的理解，提高數學教學效率。

2. 運用資訊科技改變學生的學習方式：

使用各種科學型計算器及科技軟體進行數學探索，使得以紙筆為工具的數學學習方式發生了改變，學生可以用計算器進行計算，通過軟體操作觀察規律，預測數學結論，進行合情推理，讓資訊技術為所有學生提供多元化的數學學習。

3. 數學建模方式的學習：

電腦與數學的結合，使實際問題轉化成數學問題後，有時可以直接經過電腦輔助，從中探索規律做出決策。從數學本身看，我們的數學教育必須適應這些特點，注重將實際現象轉化為數學問題的教學（實質就是建模），這樣既可以使學生理解數學與社會的緊密聯繫，數學就在他們的身邊，提高學習數學的興趣。

4. 注意視覺化的侷限性：

注意幾何直觀的侷限性，以及用幾何直觀代替邏輯證明的錯誤做法。不要過分迷信技術，因為有的時候視覺化的形象則未必可以幫助學生的理解。

另一方面，我們也發現了他們在資訊科技融入數學教學所加強的內容與方面如下：

1. 加強數形結合、幾何直觀等數學思想方法學習的要求：

用代數方法研究圖形的幾何性質，並強調借助幾何直觀理解代數關係的意義，即對代數關係的幾何意義的解釋。

2. 加強藉由資訊科技畫出具體數學圖像的要求：

鼓勵學生使用計算器和電腦探索和解決問題，透過使用電腦技術展示各種函數的圖像，並學習通過圖形解讀數學資訊，例如體會函數是描述因變數隨自變數而變化的重要數學模型；畫三角函數 $y = A\sin(\omega x + \theta)$ 的圖像，分析參數變化對函數的影響。

3. 加強動態學習方式的要求：

圓錐曲線是較好體現數形結合思想的一個素材。通過圓錐曲線的背景讓學生瞭解曲線與方程之間的對應關係，進一步體會數形結合的思想。設計一個平面截圓錐得到橢圓的過程，利用電腦演示平面截圓錐所得的圓錐曲線。並加強從對空間幾何體的整體觀察入手來學習立體幾何。

專班這些年來努力的目標與「普通高級中學數學科課程綱要修訂草案 96.7.13 版」(<http://203.64.26.48:8080/98math/modules/smartfaq/>) 所揭示的目標相符。藉著「製作、分享、批評、參與、提升」的良性循環模式，使網路學習的內容更為豐富多元，共同呼應資訊科技融入教學機制、學科教師將資訊科技帶入課堂、融入學習的理念和願景。

2-3 數學動態模擬的探究學習理論

在數學電腦軟體環境下的數學探究之情境設計所依據的理論，其一是由 *Bruner, Ross & Wood* (1976) 先提出的“鷹架理論”，就是教師在協助學生解決超越其個人能力的問題時所扮演的角色，強調在教學的情境中，教師的理想角色是提供學生協助，就如同建築物的「鷹架」一樣，當學生的能力增加之後，「鷹架」就逐漸的移開，即將學習的責任慢慢轉移到學習者的身上。

其二是根據蘇俄教育學家維谷斯基 (1896-1934) 的“最近發展區”理論 (*the Zone of Proximal Development*, 簡稱 *ZPD*)，此理論認為學生現在能夠獨立完成學習任務的層次即“實際發展層次”；而在教師的指導下或啟發性問題引導下完成學習任務的層次“潛在發展層次”。兩者之間的差距叫“最近發展區”，如果最近發展區越大，則學生

的發展能力也越大。在軟體環境中的探索性學習能夠創造學生的“最近發展區”，從而提升學生的發展水準。

因此，在數學電腦軟體的探究環境中透過事先架構設計好的內容和具有內建的認知學習輔助，例如回饋，依序進行，資料的多元化呈現方式，以及一項活動可以預期的發展歷程，能夠提供學習者的一個學習鷹架，來幫助學生在電腦軟體的環境裡完成不可能在一般教室學習環境中達成的數學問題的探索與研究（裴小倩、朱家雄，2004）。

2-4 套裝數學軟體的簡介

計算機科技的迅速發展以及電腦軟體的形象逼真地模擬各種情境，為數學的學習提供了新環境和支持條件，並為學生的理解、探究、討論、發表意見及解決問題等活動提供了可操作與實驗模擬的工具。由於各教學設計模組的不同與延伸問題的探究情境的差異，所需要呈現的效果不一，所以，我們確實有必要先了解目前幾個常用來作為資訊融入教學的應用軟體的一些特性與功能（李政豐，2003）。

1. MathPS 簡報系統：

The logo for MathPS is a circular emblem with a gear-like border. Inside the circle, there is a stylized blue figure that resembles a person or a mathematical symbol, possibly a 'P' or a similar character. The letters 'M', 'E', 'S', and 'A' are arranged around the central figure. The background of the logo is white with blue elements.

由國立交通大學陳明璋教授所帶領的研發團隊，利用 Microsoft PowerPoint 系統平台，設計的一個數學簡報的概念架構系統，在該平台上建構數學教材的編輯及課堂授課的環境。因 Microsoft PowerPoint 系統的繪圖功能，缺乏數學的構圖能力，且無法處理複雜的構圖，其動畫功能雖豐富，但稍嫌複雜不易操作，缺乏課堂互動所需要功能，故 MathPS 乃結合數學教材多元呈現之特性、編輯大量資訊的方法論、及簡報系統本身的功能所完成，使得圖形的呈現有了多元性、動態式的效果。其中利用定位複製法構作的圖形，即定位法則（*Positioning*）、複製法則（*Duplication*）及雕琢式建構法（*Deconstruction*）是此系統三個重要的法則。定位法則讓使用者達到「模糊操作，精準定位」的需求；複製法則可以讓使用者建構複雜的構圖，如碎形，視覺設計等；雕琢式構圖法以解建構取代逐一建構。視覺構圖法就是該系統所研發處理大量資訊的定位方法及複製法則所呈現的效果（陳明璋，2006）。這是其他繪圖軟體所無法達到的程度，也使得它在教學活動的素材設計與視覺化圖像的呈現效果愈來愈精采與多元，是一個普及化且平易近人，並能達到呈現素材內容之最佳效果的好用軟體。

2. Excel：

是一個試算表格，具有很強計算及函數繪圖的功能，尤其適合處理一些演算法則

與計算，如遞迴關係的表示、變數參數的調整、多種數學函數與公式可套用，是一種可以函數、圖表方式的呈現與容易表達數學式及方法的優良工具。

3. GSP：

是一種呈現幾何作圖及可操作實驗的幾何軟體，具有強大的尺規作圖功能，適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察猜測，可利用參數概念來進行動點的軌跡探究，也可利用動態按鈕來設計一些數學上的動畫。

4. Cabri-3D：

世界第一套動態式與交談式的立體幾何軟體，於 2004 年在羅馬的 *Cabri World* 正式發表，它延續尺規作圖的方式，讓使用者透過視覺及滑鼠完成立體幾何圖形。點選工具列可以構作並操作一些，如：點、線、線段、射線、向量、圓和錐體曲線、平面、三角形、多角形、半平面、球面、圓錐、正多面體與幾何變換等立體幾何物件；而從功能表中可以對所構作的立體幾何圖形作屬性及視角的改變，並且可以同時開啟多個觀看視窗以及各種角度的透視圖像，還可以拖曳滑鼠右鍵，來作立體視角的改變。透過這個 **Cabri-3D** 立體幾何軟體的輔助與視覺呈現的優勢，相信在立體幾何課程的資訊融入教學設計與在立體幾何問題的探數學究與研究等方面會有令人預想不到的神奇效果 (蔡政樺，2006)。



第三章 在電腦軟體環境下的高中數學之動態示例

本章中主要以電腦軟體 MathPS, GSP 探討並製作若干動態化的數學模式，呈現無窮級數、擺線軌跡下所圍面積的極限，將靜態的圖形化為動態的方式，並提供數則動態圖說證明 (*Dynamic proofs without words*)，由一個步驟接一個步驟的呈現在學習者的眼前，以視覺的方式了解數學，透過具體的影像直覺留下印象，加深數學概念的認識。另外，以 Excel 的計算和繪圖功能製作若干模擬動態，讓學生或教師透過滑鼠的操作，觀察直線斜率和截距、及圓錐曲線方程式在係數上的變化，了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。

本章透過 MathPS, GSP 軟體動態呈現若干問題，共分為三節，分別說明如下：

3-1 幾則無窮概念的動態幾何意義之呈現---以 MathPS, GSP 為設計平台

“數學式”與“幾何圖形”是數學研究中兩類不同的基本對象，代數是圖形的抽象表現，而圖形又是代數的直觀呈現。若是在數學問題的教學研究中，將數形的關係結合起來，使代數問題的抽象觀點，透過幾何化、直觀化以及具體化來呈現動態化的數學模式，從而使學生瞭解一些代數問題時避免複雜的抽象與推理，讓數學程度不佳的學生，能夠直觀的觀察體認及引導思路，讓這種作用當作是抽象而嚴格證明的「導盲犬」。

3-2 幾則數學定理、公式的動態圖說證明之呈現---以 MathPS 為設計平台

以美國數學協會 MAA 期刊「*Mathematics Magazine*」當中「*Proof without words*」專欄內的文章為腳本，並參考網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網」第一～三輯中關於視覺化動態呈現之研究探討，再結合本身第一線教學的實務經驗，利用普及的電腦軟體 PowerPoint 再配合上 MathPS 的增益功能，製作出動態的圖說證明 (*Dynamic proofs without words*)，給予擬人化般的生命力，以自然、直觀、易懂、易學的方式，把教學效果不彰的部分，藉由視覺化圖形的呈現來輔助證明的直觀性。

3-3 幾則平移及伸縮概念的動態呈現 ---以 Excel 為設計平台

運用普及的電腦軟體 Excel，並參考我們網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網第一輯」第二、六章中關於介紹 Excel 強大的計算和繪圖功能之研究探討，再結合本身第一線教學的實務經驗，來製作標準的圓錐曲線圖形，讓學生或教師透過滑鼠的操作，觀察方程式在係數上的變化，或改變係數觀察圖形的變化，體會這些互相對照呼應表徵內部的變換或不同表徵之間的轉譯，進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。



3-1 幾則無窮概念的動態幾何意義之呈現

---以 MathPS, GSP 為設計平台

“數學式”與“幾何圖形”是數學研究中兩類不同的基本對象，代數是圖形的抽象表現，而圖形又是代數的直觀呈現。若是在數學問題的教學研究中，將“數”和“形”的關係結合起來，使代數問題的抽象觀點，透過幾何化、直觀化以及具體化來呈現動態化的數學模式，從而使學生瞭解一些代數問題時避免複雜的抽象與推理，讓數學程度不佳的學生，能夠直觀的觀察體認及引導思路，讓這種作用當作是抽象而嚴格證明的「導盲犬」。

3-1-1 前言

“圖形”是直觀且顯而易見的，透過圖形的外表，揭示其內在的代數特徵，這對發展學生思維的引導有著深刻重要的意義，在解決數學問題時，若能把兩者結合起來，則對問題的解決可以達到事半功倍的作用。

例如在推導無窮等比數列當 $|r| < 1$ 時各項和的公式，學生不希望從教師那裡獲得莫名其妙的現成結論：當 $|r| < 1$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ，身為教育者的我們更不可以一句話“證明較煩，上課省略”就此帶過。那教學中如何處理呢？我們認為可以採用觀察數列變化趨勢，猜測極限的做法，並將“數”和“形”的關係結合起來，使抽象觀點透過幾何化、直觀化以及具體化的方式呈現，藉此加深學生的學習印象，達到事半功倍的效果。

不過，我們在應用數形結合方法時，應該注意三項原則：等價性原則、雙向性原則、簡單化原則，以避免陷入事倍功半的窘境。

1. 等價性原則：

是指代數性質與幾何性質的轉換應該是等價的，否則解題時會出現漏洞。有時候由於圖形的侷限性，不能完整地表現數的一般性，這時候的圖形性質只是一種直觀的、顯淺的說明。但這個作用確也是抽象而嚴格證明的「導盲犬」之一。

2. 雙向性原則：

要切實的灌輸學生，我們在進行幾何直觀的分析與代數抽象的探索時，兩方面應該相輔相成，勿以為數形結合只是對代數問題進行幾何分析，這是一種錯誤的單

方面的誤解。數學式與幾何圖形相互結合是發揮雙重效果，而不是簡單地用幾何取代代數。

3. 簡單性原則：

找到解題思路之後，我們要判斷這個概念到底是否適合以幾何意義來呈現，需取決於哪種方法更加簡單、更加優美並能夠到教學的目的，而不是機械式的將所有的代數問題全部皆用幾何方式來解說觀念。

在此意義上，本文提供數則幾何意義明確的無窮級數，以資訊科技融入數學教學的方式，探討並製作成動態化的模式呈現 (第 3-1-2 節與第 3-1-3 節)。另一方面，根據擺線的重要幾何性質，將 *Cycloid* 軌跡下所圍的面積極限，化靜態的圖形為動態的方式 (第 3-1-4 節)，藉由一個步驟接一個步驟的呈現在學習者的眼前，可以達到在數學方面更好的動態演示，讓學生藉著視覺化、動態化的模式呈現，以視覺的方式了解數學，透過具體的影像直覺留下印象，加深數學概念的認識，協助學生們對數學公式的掌握。然而實質的教學成效，仍有更多的研究空間。

3-1-2 惠更斯級數



高中數學課程在第一冊及第六冊提到無窮級數的和，對於 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$ ，除了使用數列的極限應用來處理“無窮多項相加”的問題外，部分教科書還介紹了一個用數形結合來詮釋“無窮項和”的圖解法。當我們在高三的班級講授完這個章節，有位學生於課餘時跑來詢問：「是否還有其他“無窮級數的和”的幾何意義？」。因此我們整理這個相關主題，並試著以數學軟體來模擬呈現其『數形合一』的意義。

我們在一般現行的教課書上，常見到的無窮級數，如 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{2}$ ，它們的幾何意義是非常地一目瞭然，淺顯易懂的。而“阿

基米德級數： $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{1}{3}$ ”，其幾何意義就更是花樣百出，令人讚賞

了。其實，若將阿基米德級數寫成 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} + \dots = 1$ ，則可以由下

列兩個“圖說證明”看出其另一種呈現的幾何意義，如圖 3-1-2-1 與圖 3-1-2-1 所示。我們網路學習專班在這方面亦有許多精彩紛呈的作品成果。

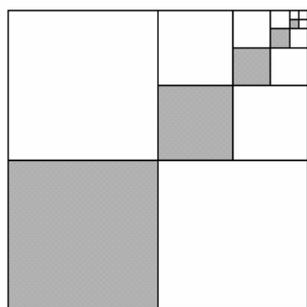


圖 3-1-2-1 阿基米德級數幾何意義(1)

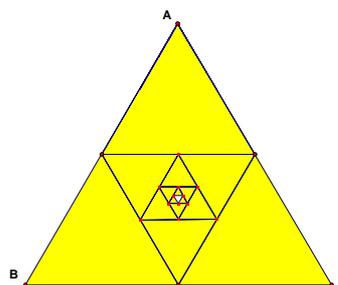


圖 3-1-2-2 阿基米德級數幾何意義(2)

上面提到的，是阿基米德 (Archimedes, 西元前 287~西元前 212) 在求拋物線弓形面積時，所產生歷史上的第一個無窮級數，因此又稱為阿基米德級數。他當時所得到的結論是：設 P, Q 是拋物線 $y^2 = x$ 上的任意兩點，若 M 是 PQ 的中點，MR 平行於拋物線的對稱軸，則斜線部份面積等於 $\frac{4}{3} \Delta PQR$ 的面積。其動態模擬可參考網

址：<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ArchimedesTriangle.shtml>

其次，我們思考“惠更斯級數： $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots$ ”所代表的幾何圖形之意義是什麼？首先，在《數學傳播季刊》第 22 卷第 1 期，由蔡聰明教授所寫的「談惠更斯級數」，有如下精闢的解釋：

(1). 兩圓 O_0, O_1 相切，半徑分別為 r_0, r_1 ，並與 x 軸切於同側，切點為 A_0, A_1 ，則

$$\overline{A_0A_1}^2 = 4r_0r_1, \text{ 如圖 3-1-2-3 所示。}$$

pf): 直角三角形 OAB, $(r_0+r_1)^2 = \overline{A_0A_1}^2 + (r_0-r_1)^2$, 展開整理得 $\overline{A_0A_1}^2 = 4r_0r_1$ ■

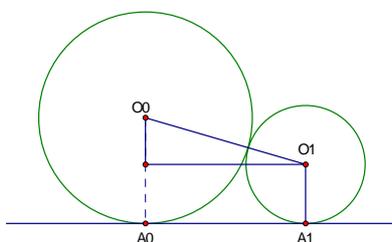


圖 3-1-2-3 兩圓外切且與 x 軸切於同側

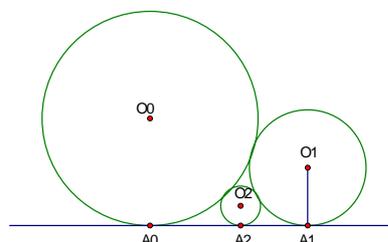


圖 3-1-2-4 兩圓與 x 軸間又內切另一個圓

(2). 承 (1), 兩圓與 x 軸之間又內切一個圓 O_2 , 其半徑為 r_2 , 則 $\frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_0}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$.

pf): 由 (1) 知 $\overline{A_0A_1}^2 = 4r_0r_1$, $\overline{A_0A_2}^2 = 4r_0r_2$, $\overline{A_1A_2}^2 = 4r_1r_2$, 如圖 3-1-2-4 所示,

$$\text{且 } \overline{A_0A_1}^2 = (\overline{A_0A_2} + \overline{A_2A_1})^2 = \overline{A_0A_2}^2 + \overline{A_2A_1}^2 + 2\overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_2A_1}$$

$$4r_0r_1 = 4r_0r_2 + 4r_1r_2 + 2 \cdot 2\sqrt{r_0r_2} \cdot 2\sqrt{r_1r_2}$$

$$(2\sqrt{r_0r_1})^2 = (2\sqrt{r_0r_2} + 2\sqrt{r_1r_2})^2$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}} \quad \blacksquare$$

(3). 承 (2) 同樣的方法不斷的作內切圓 O_3, O_4, \dots 一直下去, 其半徑分別為 r_3, r_4, \dots , 則

$$r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{n-1}{\sqrt{r_0}} \right)^{-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \text{ 如圖 3-1-2-5 所示。}$$

pf): 由 (2) 知 $\frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{2}{\sqrt{r_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_4}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{3}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

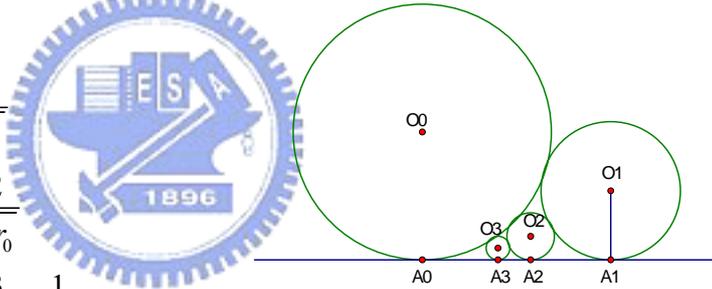


圖 3-1-2-5 惠更斯級數的幾何意義

.....

可知 $\frac{1}{\sqrt{r_2}}, \frac{1}{\sqrt{r_3}}, \frac{1}{\sqrt{r_4}}, \dots$, 是一個公差為 $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$ 的等差數列,

$$\text{所以 } \frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{n-1}{\sqrt{r_0}}, \text{ 即 } r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{n-1}{\sqrt{r_0}} \right)^{-2}. \quad \blacksquare$$

(4). 承 (3) 若令 $r_0=r_1=1$, 則 $r_n = \frac{1}{n^2}$ 且 $\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{2}{n(n+1)}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2, \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots = 2 \quad \blacksquare$$

我們再進一步以 *Proofs Without Words Exercises in Visual Thinking* (Roger B. Nelsen, 1993) 第 127 頁為腳本，並自行研究開發其動態圖說證明，在動態中呈現“惠更斯級數”的另一種幾何意義之視覺化過程，如圖 3-1-2-6 所示。

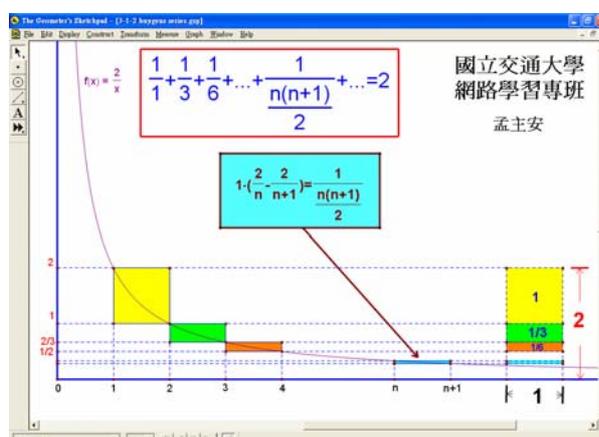


圖 3-1-2-6 惠更斯級數的另一種幾何意義

3-1-3 一則交錯級數

到目前為止，我們所處理無窮級數都是正項之和，然而，學生對於遇到同時含有正項與負項的無窮級數，就顯得更加膽戰心驚了。這種級數中最簡單的是一種正負號交錯的“交錯級數”(Alternating Series)，例如，像這種幾何級數

$$“1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots”$$

就是一個交錯幾何級數，其公比為 $-\frac{1}{2}$ 。交錯級數有兩種形式：不是奇數項都是負數，那麼就是偶數項都是負數。對於這樣的幾何級數，除了直接代無窮等比公式求值外，是否還存在著什麼樣的幾何意義呢？

首先，我們試著來直接求其前幾項和之值，觀察看看該值會有什麼“趨勢”？

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} = 0.6875, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{21}{32} = 0.65625,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{43}{64} = 0.671875, \dots,$$

我們發現其和似乎愈來愈向“某一個值”逐漸地靠近，而這個值似乎是介於 0.65 至

0.68 之間，而在 0.65 至 0.68 之間恰好有一個特殊且除不盡，又經常使用到的循環小數“ $\frac{2}{3} \div 0.666667$ ”，那 $\frac{2}{3}$ 在圖形上所代表的有那些意義呢？

依照曹亮吉教授在「阿草的葫蘆---文化活動中的數學」（遠哲科學教育基金會，1996）第十二章所闡述的數學思考模式，告訴我們先想到透過特殊的情形來推敲猜測，再遊走回到一般的情形。因此我們想到圖形中當然是以正三角形為最佳特例，而正三角形的“心”首推“重心”。對了，三角形的重心有一個重要性質：「三角形重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的二倍」，所以， $\frac{2}{3}$ 這個數字與圖形產生相結合就有了眉目。

更進一步，我們以動態幾何軟體 GSP，設計了一個方式如下：（如圖 3-1-3-1 至圖 3-1-3-6 所示）。

$\triangle ABC$ 中令 AM_1 為 BC 上的中線，其長為 1，取 AB 、 AC 兩邊的中點 D_1 及 E_1 ，與 M_1 連成 $\triangle D_1M_1E_1$ ，令 D_1E_1 交 AM_1 於 M_2 ，... (類推) ...

$AM_1 = 1$ ，

$AM_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$

$AM_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

$AM_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625, \dots$



則 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = AM_n$ ，因 n 愈大， M_n 會愈接近於 G ，

而 G 是 $\triangle ABC$ ， $\triangle D_1M_1E_1$ ， $\triangle D_2M_2E_2$ ， $\triangle D_3M_3E_3 \dots$ 的重心，所以

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = AG = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

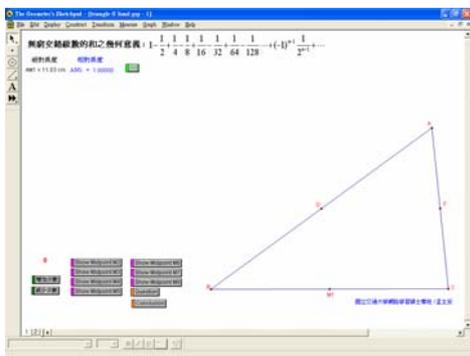


圖 3-1-3-1 一則無窮交錯級數之和的幾何意義

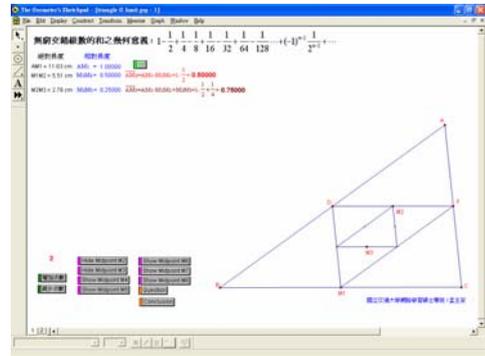


圖 3-1-3-2 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(1)

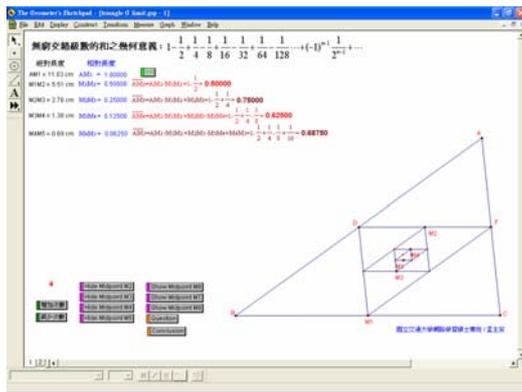


圖 3-1-3-3 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(2)

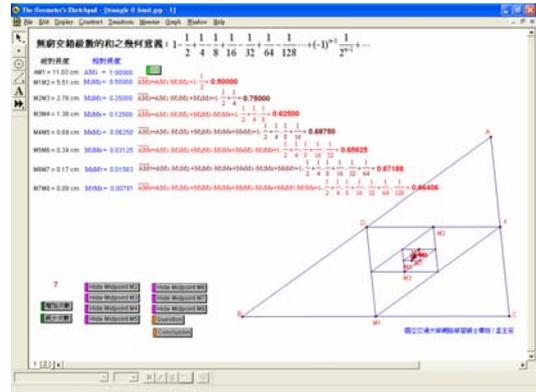


圖 3-1-3-4 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_觀察(3)

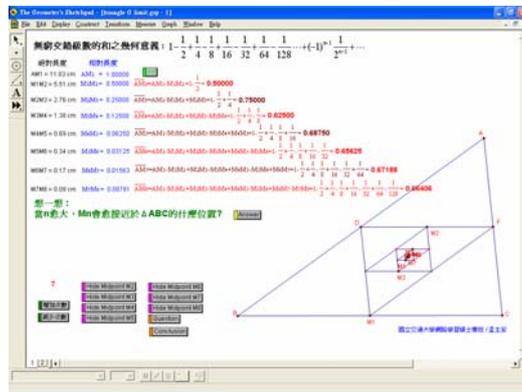


圖 3-1-3-4 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_猜想

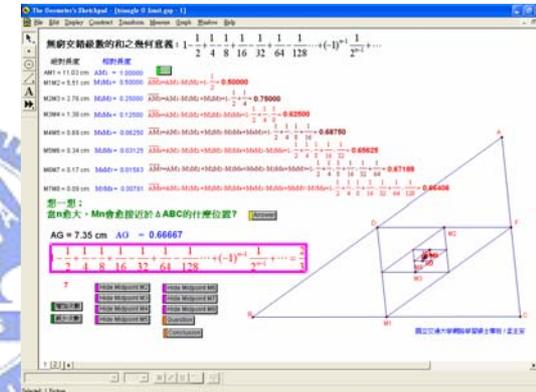


圖 3-1-3-5 一則無窮交錯級數之和的幾何意義_與三角形重心的連結

3-1-4 擺線軌跡下所圍的面積

『畫家畫奔馳中的馬車，總是把車輪輪軸上方的輪輻畫成模糊一片，而分開可見的輪輻要在輪軸下方才可能出現。這是什麼道理呢？輪輻是等間隔的，這種視覺上的印象表示：車輪轉動時上方輪緣的水平方向前進速度要比下方的來得快。』(擺線--幾何中的海倫，曹亮吉，http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_15_09_1/index.html)，這樣富洞察力的描述，讓我們驚喜於一幅令人賞心悅目的畫作，竟然也暗藏著數學知識，真是容易教人勾起學習的動機與思考的想像呀！

為了使得學生更能激盪出強烈的數學學習動機，並且可以更具體地呈現出引人入勝的模擬動態來加以解釋其中的關係，我們試圖先以動態幾何軟體 GSP 設計模擬出比較真實感的動態畫面，如圖 3-1-4-1 與圖 3-1-4-2 所示，讓學生有機會一窺其奧妙的面紗。

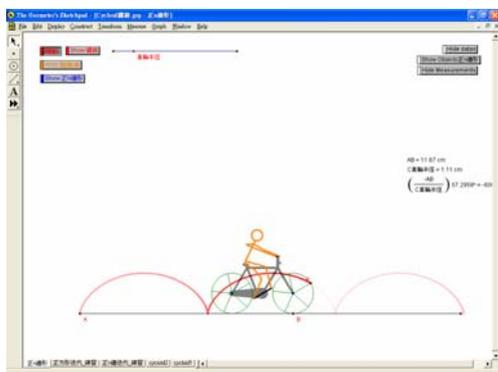


圖 3-1-4-1 腳踏車車輪軌跡中的擺線(1)

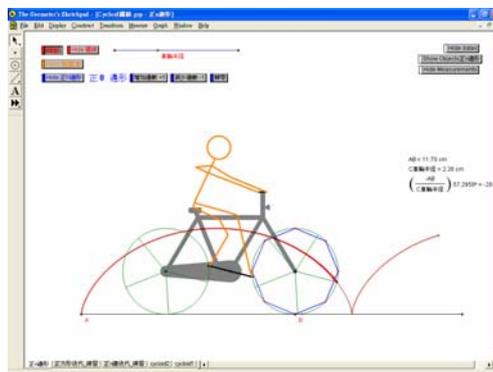


圖 3-1-4-2 腳踏車車輪軌跡中的擺線(2)

在數學上，我們稱：「讓一個圓沿直線從 A 點滾一圈後到 B 點，則原先圓上緊貼 A 處的那點的軌跡就會畫出一道曲線，是為擺線的曲線」。這是十七世紀開始令數學家們最感興趣、談論最多的曲線之一。1599 年，Galileo (1564~1642 年) 曾經試圖用天秤來量擺線與直線 AB 之間所圍成弓形的面積。他發現一個擺線弓形和三個圓盤在天秤上大約能夠平衡，並認為兩者之比應該是無理數，所以猜測弓形面積大約等於圓盤的 π 倍大。直到 1634 年才由法國數學家 Roberval (1602~1675 年) 用理論性的「卡氏原理」真正算出了擺線弓形的正確面積。

到了 1638 年當時微積分尚未成形，Descartes (596~1650 年) 用傳統的平面幾何方法把圓想成是邊數無窮的多邊形，得出了擺線的切線作法。另一位法國數學家 Pascal (1623~1662 年) 在 1658 年全心投入研究擺線的性質。在此同時，有一位以設計倫敦聖保羅教堂出名的英國建築師 C. Wren (1632~1723 年) 也完成了計算擺線長的工作，發現從 A 到 B 的擺線弧長等於圓直徑的 4 倍長。

隨著微積分的發展至今，這些性質的證明也就變得輕而易舉了。在現今的微積分課程裡，它成了標準的例題、習題或考題，而有著「學生曲線」之雅稱。雖然用擺線的參數方程式以微積分的方法，很快可以求得擺線弓形面積及擺線長，例如：

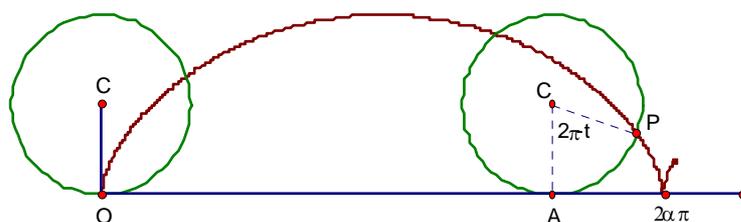


圖 3-1-4-3 擺線軌跡參數方程式的假設圖示

建立一直角坐標系，並設半徑為 α ，取 $O(0,0)$ ， $B(2\alpha\pi,0)$ ， $A(\alpha t,0)$ ，

$\therefore P$ 點坐標為 $(\alpha t + \alpha \sin(2\pi - t), \alpha - \alpha \cos(2\pi - t))$ ，

即 $P(\alpha t - \alpha \sin t, \alpha - \alpha \cos t)$

則擺線與底線所圍成的面積

$$= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (\alpha - \alpha \cos t) d(\alpha t - \alpha \sin t)$$

$$= \alpha \int_0^{2\pi} (\alpha - \alpha \cos t)(\alpha - \alpha \cos t) dt = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= \alpha^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt$$

$$= \alpha^2 \times 3\pi = 3\pi\alpha^2 = 3 \times \text{圓面積}$$

■

不過，對大多數教師而言，微積分的教學，一直有著作圖複雜，解釋不易的問題；對大部分學生而言，也存在著對微積分『抽象』的感受，因此增加了教與學兩方面不少的困難度。為了改善這樣的困擾，使得學生能夠藉著視覺化、動態化的模式呈現，以視覺的方式了解數學，透過具體的影像直覺留下印象，加深數學概念的認識，本文最後參照 *Mathematics Magazine* 期刊 (Philip R Mallinson, *The Area under a polygonal arch*, Vol.71, Iss. 2; pg. 141, 1 pgs, Apr 1998.) 為背景腳本，以 MathPS 來設計擺線軌跡下所圍面積極限的動態視覺，如圖 3-1-4-4 ~ 圖 3-1-4-11 所示，展現 *Cycloid* 的另一番面貌，提供教師教學及學生學習的用途。

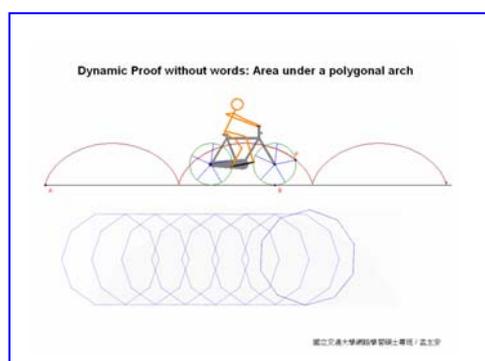


圖 3-1-4-4 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(1)

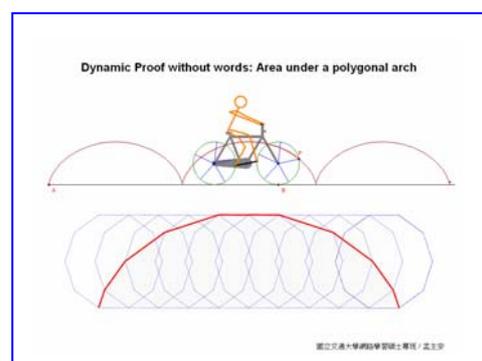


圖 3-1-4-5 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(2)

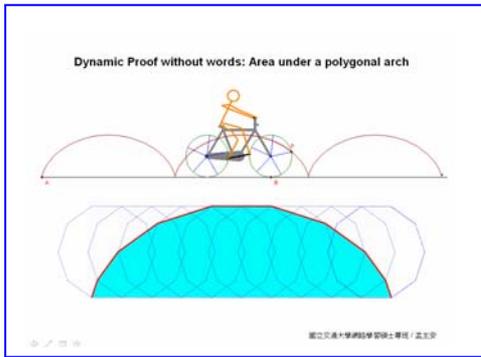


圖 3-1-4-6 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(3)

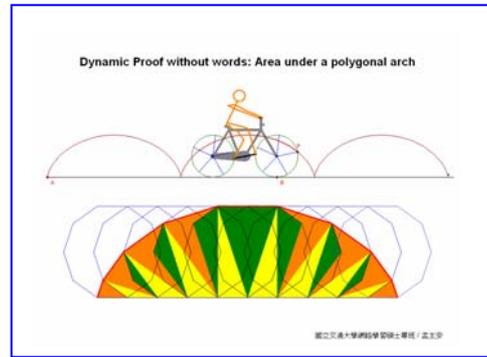


圖 3-1-4-7 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(4)

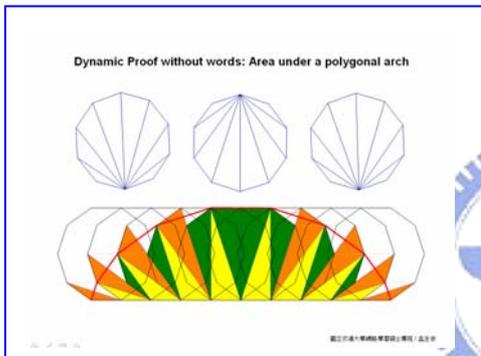


圖 3-1-4-8 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(5)

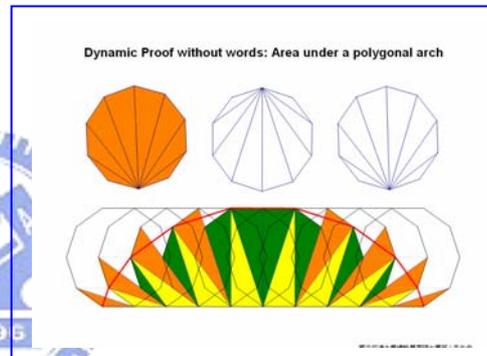


圖 3-1-4-9 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(6)

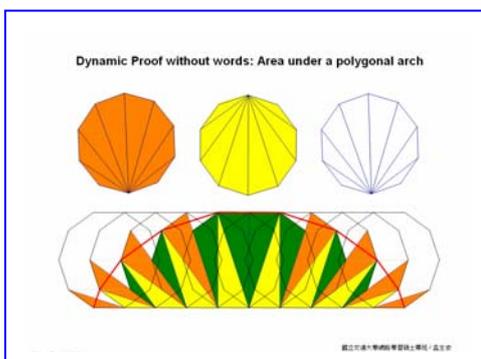


圖 3-1-4-10 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(7)

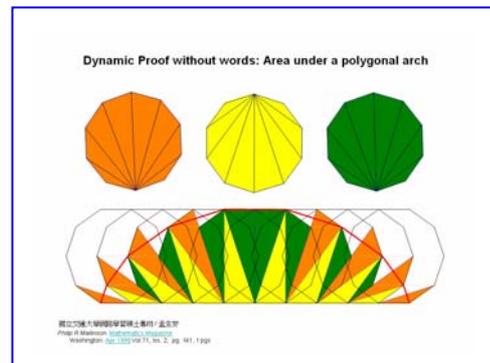


圖 3-1-4-11 擺線軌跡下所圍的面積
之動態圖示步驟(8)

3-2 幾則數學定理、公式的動態圖說證明之呈現

---以 MathPS 為設計平台

本文中首先以美國數學協會 MAA 期刊「*Mathematics Magazine*」當中「*Proof without words*」專欄內的文章為腳本，並參考網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網」第一～三輯中關於視覺化動態呈現之研究探討，再結合本身第一線教學的實務經驗，利用普及的電腦軟體 PowerPoint 再配合上 MathPS 的增益功能，製作出動態的圖說證明 (*Dynamic proofs without words*)，給予擬人化般的生命力，以自然、直觀、易懂、易學的方式，把教學效果不彰的部分，藉由視覺化圖形的呈現來輔助證明的直觀性。

3-2-1 前言

高中學生學習數學的困難來源之一，就是難以從直觀的角度來理解抽象的數學公式 (陳明璋，2002)。固然用圖說方式來證明數學公式常因無法一次考慮所有的條件而失之於不夠嚴謹，但是這已足以讓學生瞭解到數學的另一種相通之美，「數學公式會告訴你發生了什麼而沒說為什麼」(洪萬生，1999)，這樣的直覺以及想像給了學習者高度的美學滿足。「數學美感的獲得，常常是數學家以經年累月的苦思、單調乏味的運算為代價的」(丘成桐，2005)。「如果美的組成和藝術作品的特徵包括洞察力和想像力、對稱性和比例、簡潔，以及精確地適應達到目的的手段，那麼數學就是一門具有特殊完美性的藝術」(張祖貴，1995)。

幾何圖形具有直觀易明的優點，「一個圖勝過千言萬語」這就是圖說證明之最佳寫照 (顏貽隆，2003)。或許有人會認為這些方式有點畫蛇添足，但是我們認為，對於同一種“美麗數學式”能從其他不同的角度來詮釋，使得某些學生能有效的以具體形象提示數學公式，讓學生藉著視覺化、動態化的模式呈現，以視覺的方式了解數學，透過具體的影像直覺留下印象，加深數學概念的認識，協助學生們對數學公式的掌握，是一個值得努力的方向 (陳明璋，2005)。然而實質的教學成效，仍有更多的研究空間。

在這樣的觀點下，本文提供幾則以 MathPS 為設計平台之數學定理、公式的動態圖說證明 (*Dynamic proofs without words*)。分別在第 3-2-2 節動態化呈現「正弦三倍角公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 」；在第 3-2-3 節動態化呈現「正餘弦疊合的範圍」；在第 3-2-4 節動態化呈現「*Viviani's Theorem*」；在第 3-2-5 節動態化呈現「*Arithmetic geometric inequality*」。

3-2-2 正弦三倍角公式

「數學傳播」第 25 卷 第 3 期的「用圖解證明公式」(李政豐、顏貽隆、陳蘭香、王淑霞、陳明峰，2001)，正式在國內的中等數學教育裡，揭開了三角公式圖說證明的面紗，緊接著如拋玉引鑽般地掀起陣陣的漣漪，第 27 卷第 2 期「數學傳播」的「不同反“想”」(顏德琮，2003)，作者結合代數與幾何等不同的觀點，利用單位圓來推導和角公式及兩倍角公式的視覺化證明，呈現出多種的風貌。

我們網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網」第一、二、三輯中，陸續的有許多關於三角公式證明的視覺化呈現之研究探討，其中內容涵蓋「正弦定理」、「餘弦定理」、「和角公式」、「倍角公式」、「半角公式」、以及「和差化積」與「積化和差」，並且每一個公式幾乎都有二種以上的呈現方式，將高中數學中的三角函數部分，賦予圖說證明的步驟化動態 (Dynamic) 呈現效果，建立一些實用的教學輔助工具。

本例是我們以 *Mathematics Magazine* 期刊 (Sidney H. Kung, Apr 2001; 74, 2; pg. 135) 為腳本的正弦三倍角公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ，並自行研究開發其動態圖說證明，在 PowerPoint 中呈現視覺化動態的圖說證明，如圖 3-2-2-1 ~ 10 所示。

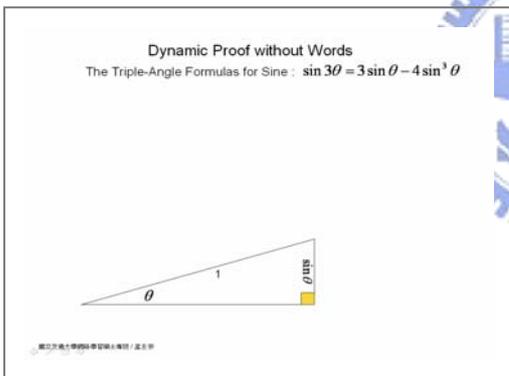


圖 3-2-2-1 正弦三倍角公式動態圖解(1)

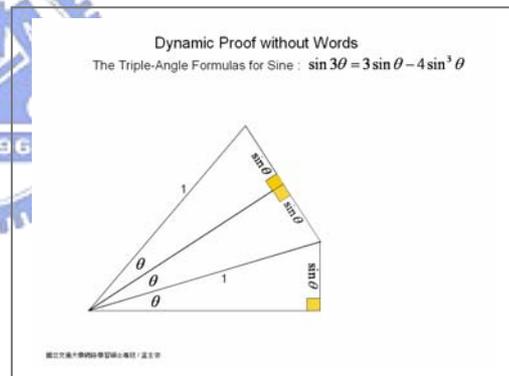


圖 3-2-2-2 正弦三倍角公式動態圖解(2)

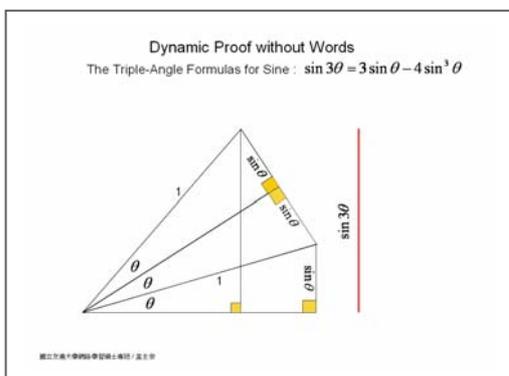


圖 3-2-2-3 正弦三倍角公式動態圖解(3)

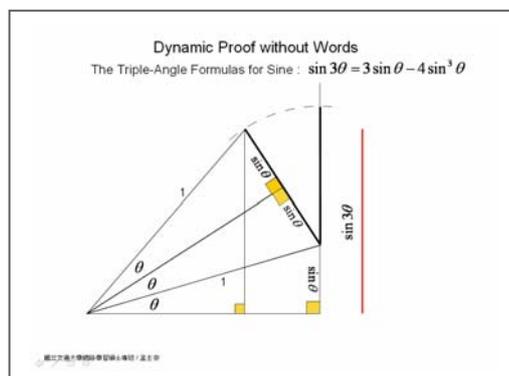


圖 3-2-2-4 正弦三倍角公式動態圖解(4)

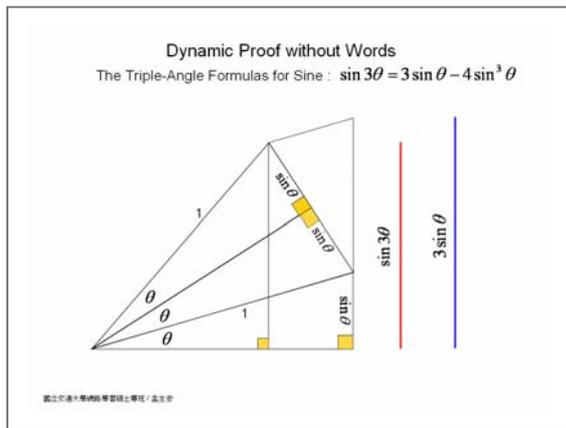


圖 3-2-2-5 正弦三倍角公式動態圖解(5)

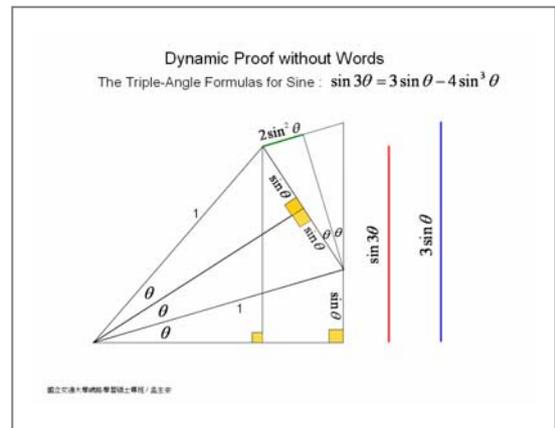


圖 3-2-2-6 正弦三倍角公式動態圖解(6)

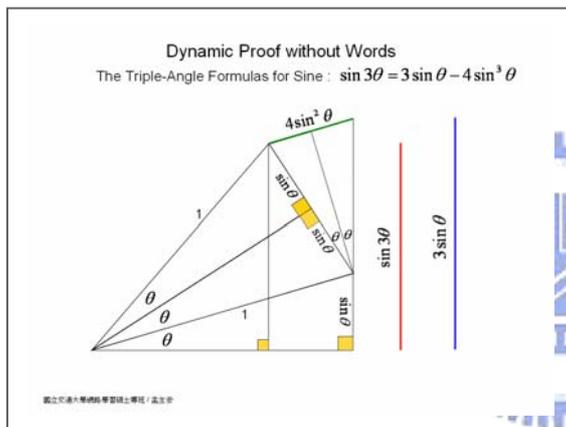


圖 3-2-2-7 正弦三倍角公式動態圖解(7)

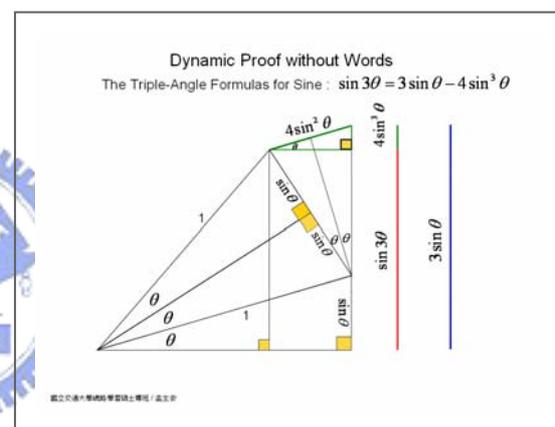


圖 3-2-2-8 正弦三倍角公式動態圖解(8)

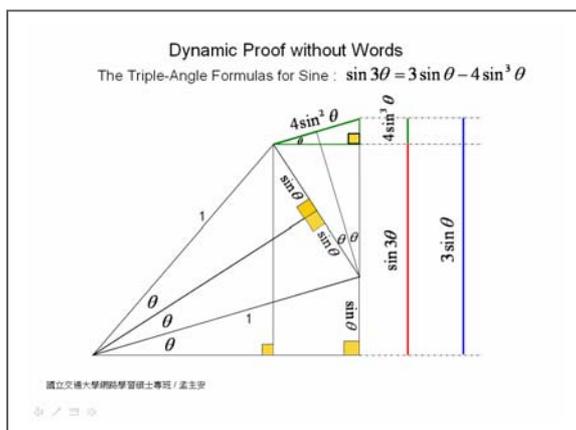


圖 3-2-2-9 正弦三倍角公式動態圖解(9)

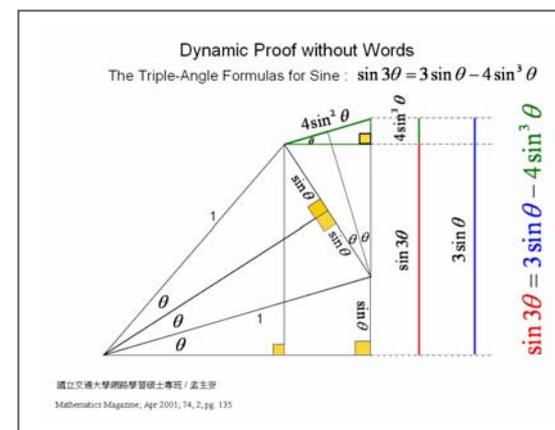


圖 3-2-2-10 正弦三倍角公式動態圖解(10)



3-2-3 正餘弦疊合的範圍

大部分高中學生在高一下學期，接近學期尾聲時正好學到的單元就是三角函數的正餘弦疊合的方法及其範圍 “ $-1 \leq a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \leq 1$, if $\theta \in \mathbb{R}$ ”，往往含糊就帶過，因而造成在高二學到向量、圓錐曲線的時候，便黔驢技窮或早已物歸原主---還給老師了。

正餘弦疊合除了以三角函數圖形的伸縮平移概念之外，也可以利用一個矩形中的直角三角形的關係，來說明正餘弦疊合的關係 (游心怡, 2007)。本例是我們另以單位圓及直線的概念，並參考 *Mathematics Magazine* 期刊 (M Hassani; M Bayat; H Teimoori, Oct 2004; 77, 4; pg. 259) 為腳本的正餘弦疊合範圍的示例，再自行研究開發其動態圖說證明，在 PowerPoint 中呈現視覺化動態的圖說證明，如圖 3-2-3-1 ~ 圖 3-2-3-10 所示。

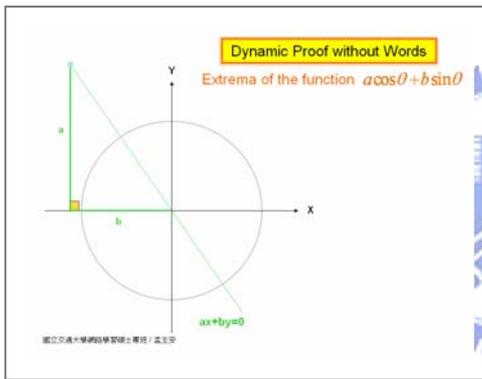


圖 3-2-3-1 正餘弦疊合的範圍_ (1)
作一過原點的直線

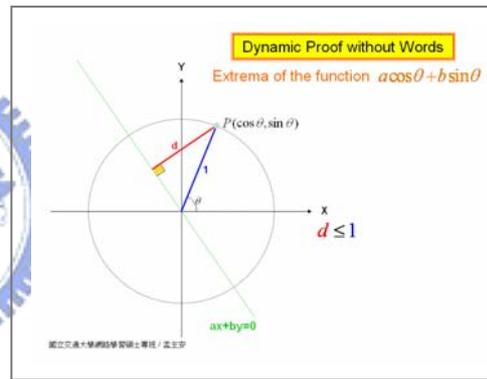


圖 3-2-3-2 正餘弦疊合的範圍_ (2)
單位圓上一點到直線的距離

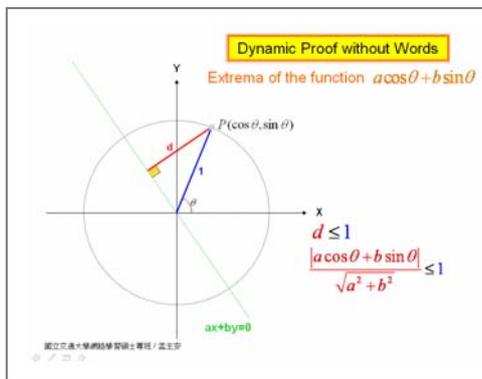


圖 3-2-3-3 正餘弦疊合的範圍_ (3)
距離小於或等於 1

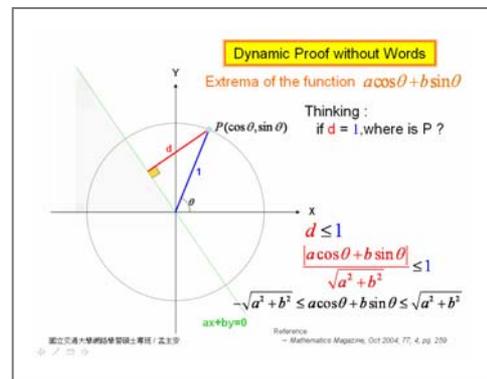


圖 3-2-3-4 正餘弦疊合的範圍_ (4)

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

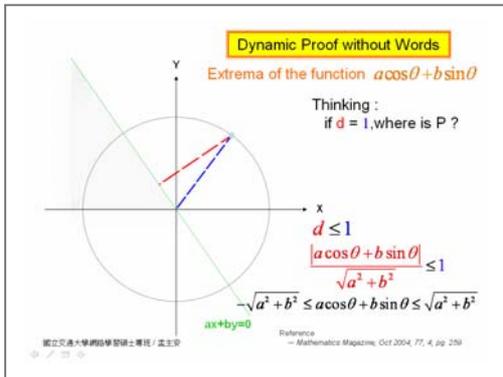


圖 3-2-3-5 正餘弦疊合的範圍_(5)
距離=1 時，P 點位置？

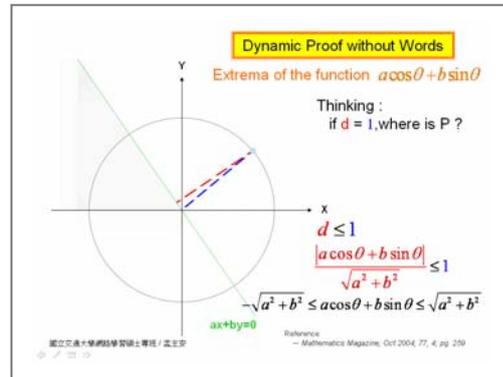


圖 3-2-3-6 正餘弦疊合的範圍_(6)
移動 P 點

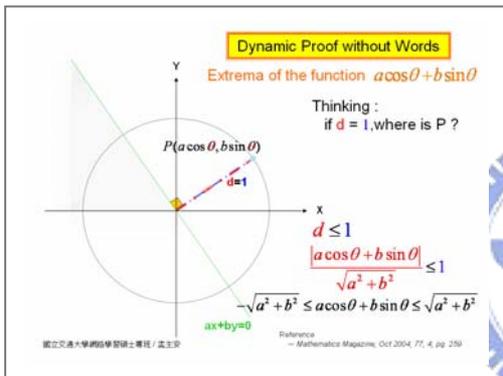


圖 3-2-3-7 正餘弦疊合的範圍_(7)
移動 P 點至紅色距離=藍色 1

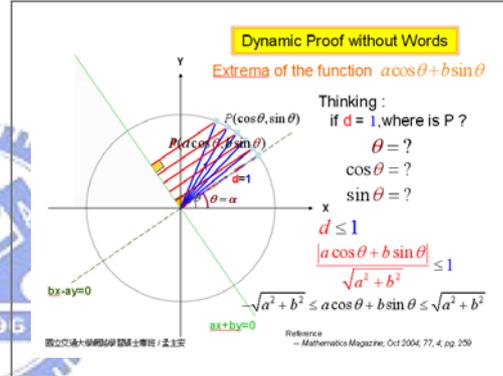


圖 3-2-3-8 正餘弦疊合的範圍_(8)
移動 P 的連續動作

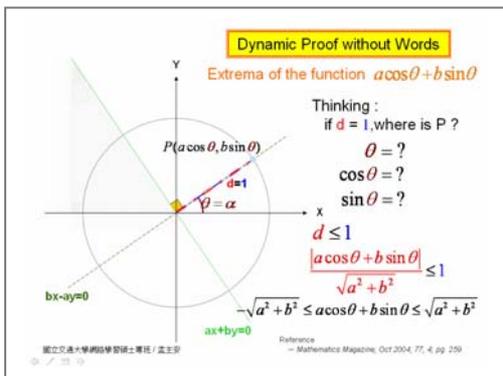


圖 3-2-3-9 正餘弦疊合的範圍_(9)
找到距離=1 時 P 點位置

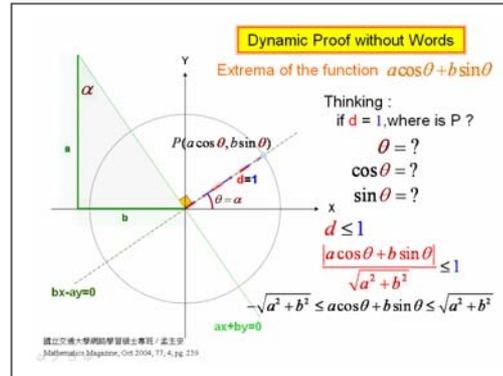


圖 3-2-3-10 正餘弦疊合的範圍_(10)
此時過 P 點和原點的直線恰垂直於原直線

3-2-4 維維安尼定理

17 世紀，義大利數學家維維安尼 (V.Viviani, 1622-1703) 發現，正三角形上的點具有一種非常美妙的性質，即維維安尼定理：「正三角形內 (或邊上) 任意一點到各邊的距離之和為定值，該定值等於該三角形的高」。

這個定理與現行中學教材中大家熟知的一個命題有著密切的關係，這個命題為：「等腰三角形底邊上一點到兩腰的距離之和等於一腰上的高」，進一步可以將這個定理推廣為：「任意三角形內 (或邊上) 任意一點到各邊的距離與該邊對角正弦乘積之和為定值，這定值等於該三角形的面積與其外接圓半徑的比」，即：

$$d_a \sin A + d_b \sin B + d_c \sin C = \frac{S_{\triangle ABC}}{R} \quad (\text{定值})$$

在這個定理中，令三角形的三內角(或三邊)相等，就得到維維安尼定理。

因此 *Viviani's Theorem* 是具有起承的重要性，此定理的證明方法很多。本例中我們以純幾何的方法，參考 *Mathematics Magazine* 期刊 (Ken-ichiroh Kawasaki, Jun 2005; 78, 3; pg. 213) 為腳本，並自行研究開發其動態圖說證明，在 *PowerPoint* 中呈現視覺化「一個圖勝過千言萬語」的最佳動態圖說之寫照，如圖 3-2-4-2 ~ 10 所示。

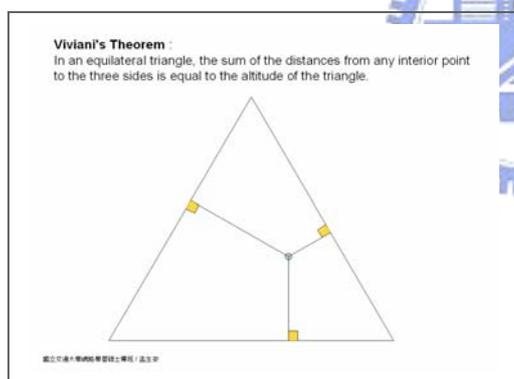


圖 3-2-4-1 維維安尼定理動態圖解(1)

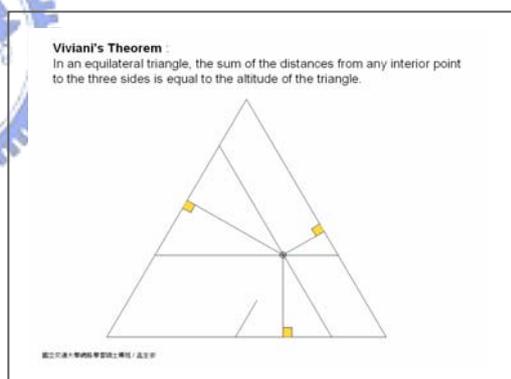


圖 3-2-4-2 維維安尼定理動態圖解(2)

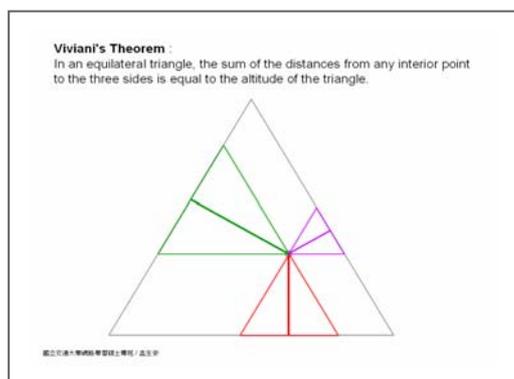


圖 3-2-4-3 維維安尼定理動態圖解(3)

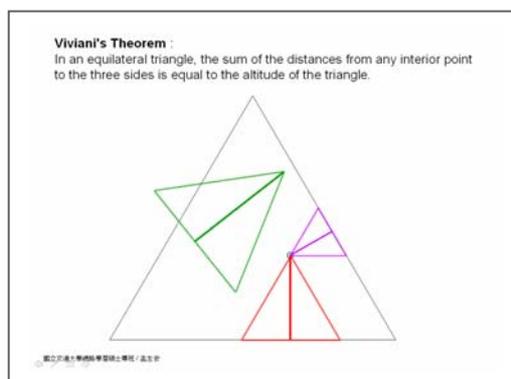


圖 3-2-4-4 維維安尼定理動態圖解(4)

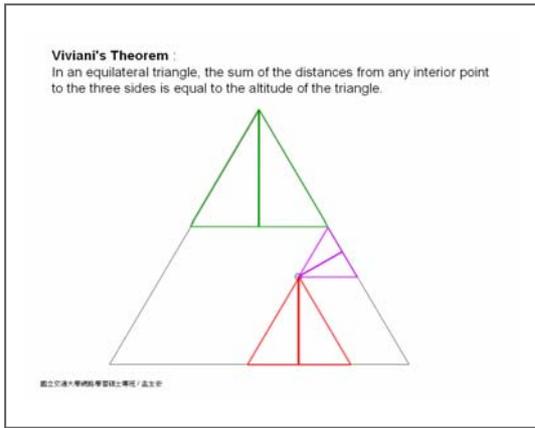


圖 3-2-4-5 維維安尼定理動態圖解(5)

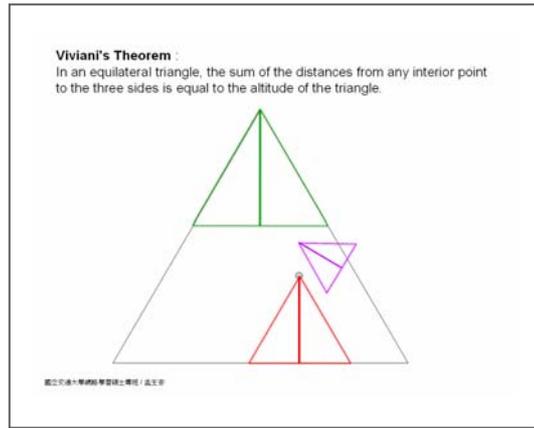


圖 3-2-4-6 維維安尼定理動態圖解(6)

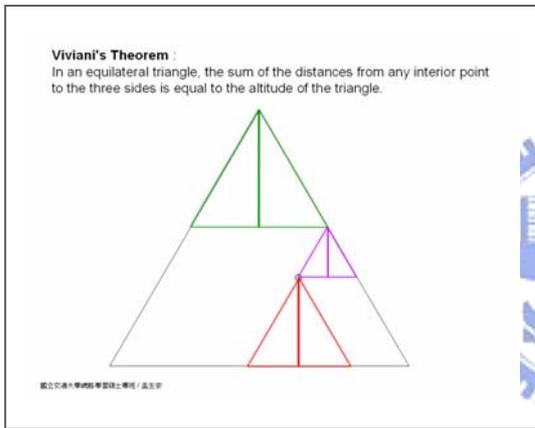


圖 3-2-4-7 維維安尼定理動態圖解(7)

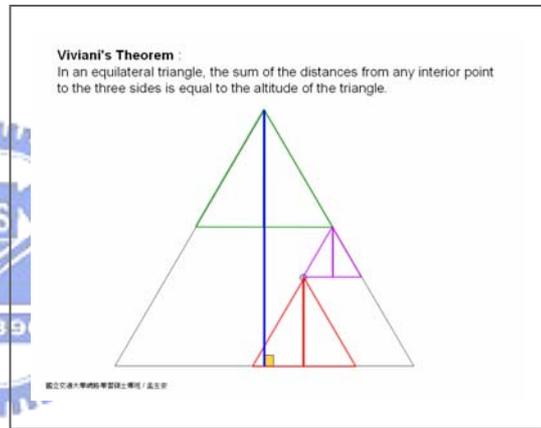


圖 3-2-4-8 維維安尼定理動態圖解(8)

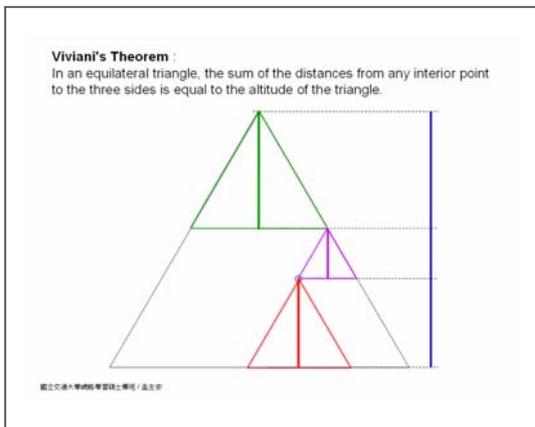


圖 3-2-4-9 維維安尼定理動態圖解(9)

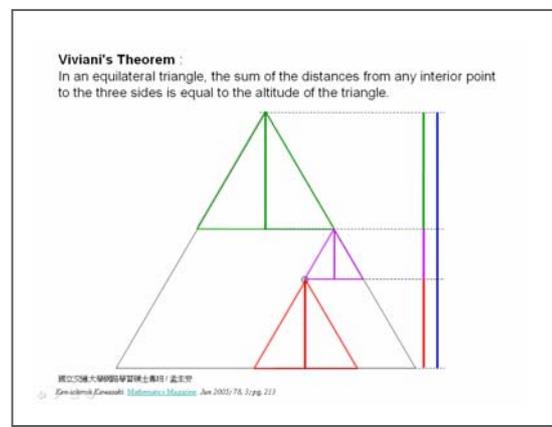


圖 3-2-4-10 維維安尼定理動態圖解(10)

3-2-5 算幾不等式

現行高中數學課程，多次用到算幾平均不等式的概念去求解最大(小)值的問題，但是除了有些版本在第一冊以圖形的幾何證明，來輔助解說算幾平均不等式的實質意義外，就只剩下在三年級的數學甲(上冊)中提到該不等式的純代數的解說和證明，以及例題的解答過程。我們卻對其代數式及幾何意義間的連結關係產生興趣。蔡聰明教授在「數學拾貝」第四章內容裡提到：

「對於任意非負實數 a 與 b ，下式恆成立：

$$\max\{a, b\} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \min\{a, b\} \quad (1)$$

並且等號成立的充要條件為 $a=b$ 。」

以長度的觀點(如圖 3-2-5-1 所示)，做為(1)式「無言的證明」(*Proofs Without Words*):

令 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = \overline{DG} = b$ ，則 $\overline{BD} = \sqrt{ab}, \overline{BD} = \sqrt{ab}, \overline{OD} = \overline{OF} = \frac{a+b}{2}, \overline{DE} = \frac{2ab}{a+b}$ ，

$\overline{BF} = \overline{BF} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ 。因此 $\overline{AB} \geq \overline{BF} \geq \overline{OF} \geq \overline{OD} \geq \overline{BD} \geq \overline{DE} \geq \overline{DG} \geq \overline{BC}$ 。 ■

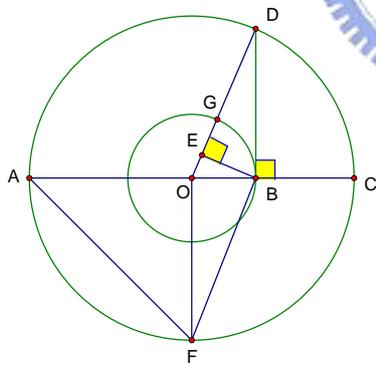


圖 3-2-5-1 算幾不等式之推廣(1)
以長度觀點的靜態圖解

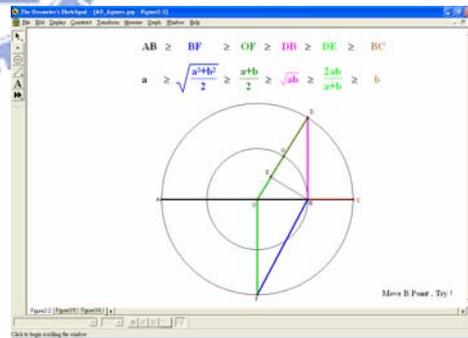


圖 3-2-5-2 算幾不等式之推廣(2)
以長度觀點的動態圖解

我們可以很清楚地從圖形，瞭解前述論斷的意思，其實只運用了相似三角形性質及畢氏定理，試分析如下：

Step1. $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$ ，以 \overline{AC} 為直徑作一圓，則 $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{a+b}{2}$ ；

Step2. 以 $\overline{OB} = \frac{a-b}{2}$ 為半徑， O 為圓心作一圓，且 $\overline{OF} \perp \overline{AC}$ ，直角 $\triangle BOF$ 中

$$\overline{BF}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OF}^2, \text{ 得 } \overline{BF} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \text{ 則 } \overline{AB} \geq \overline{BF} \geq \overline{OF};$$

Step3. 作 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ，直角 $\triangle ADC$ 中 $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$ ，得 $\overline{BD} = \sqrt{ab}$ 。則 $\overline{OD} \geq \overline{BD}$ ；

Step4. 作 $\overline{BE} \perp \overline{OD}$ ，直角 $\triangle OBD$ 中 $\overline{BD}^2 = \overline{DE} \times \overline{DO}$ ，得 $\overline{DE} = \frac{2ab}{a+b}$ 。則 $\overline{BD} \geq \overline{DE}$ ；

Step5. 因 $\overline{DG} = \overline{BC} = b$ ，則 $\overline{DE} \geq \overline{DG}$ 。

故可知 $\overline{AB} \geq \overline{BF} \geq \overline{OF} \geq \overline{BD} \geq \overline{DE} \geq \overline{DG}$ ，

$$\max\{a, b\} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \min\{a, b\}. \quad \blacksquare$$

我們以 GSP 繪圖軟體為其作了一動態圖說證明 (Dynamic Proofs Without Words)，如圖 3-2-5-2 所示。

其實早在西元四世紀時，就有希臘數學家將算數平均、幾何平均、及調和平均的關係畫在一個半圓內 (王中烈，1980)。而高中生較為熟悉的幾種平均數為算數平均 A ，幾何平均 G ，及調和平均 H ，而對於平方根平均 R (即二次平均)、調和平方根平均 HR (即調和二次平均)，及差平均 S 較為陌生。這些平均數的基本定義為：

$$\text{設 } a \text{ 與 } b \text{ 為二正數，且 } a \geq b, \text{ 令 } A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}, H = \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2ab}{a+b},$$

$$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, HR = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}, S = \frac{1}{2}(a-b).$$

由上述的定義，利用簡單的大小次序判斷方法，我們很容易就能得到它們的代數不等式之關係 $a \geq R \geq A \geq G \geq H \geq HR \geq b$ ，即

$$a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \geq b.$$

當然，它們等號成立的充要條件為 $a = b$ 。 ■

在相關文獻或網際網路裡可以找到許多關於算幾平均不等式的幾何圖解，經常可見的包括了下列幾種方法：

1. 如圖 3-2-5-3 所示，以 $a+b$ 為直徑作半圓，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

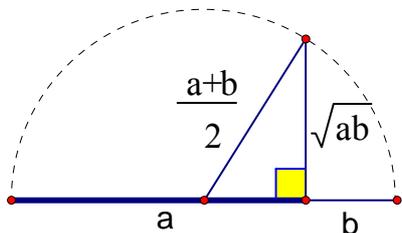


圖 3-2-5-3 算幾不等式
以 $a+b$ 為直徑作半圓

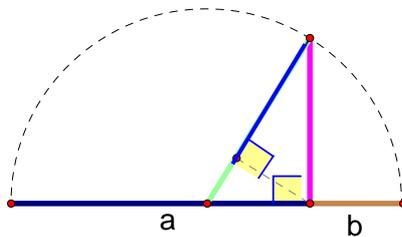


圖 3-2-5-4 算幾不等式之推廣(3)
Pappus 於西元 300 年的原圖

2. 如圖 3-2-5-4 所示，*Pappus* 於西元 300 年作出了一眼就看出算數平均、幾何平均、及調和平均的關係。

4. 如圖 3-2-5-5 所示，第 4 卷第 2 期「數學傳播」裡「數形一家」(王中烈，1980)，也將數與形合而為一。我們以 GSP 繪圖軟體為其添妝作一動態圖說證明，如圖 3-2-5-6 所示。

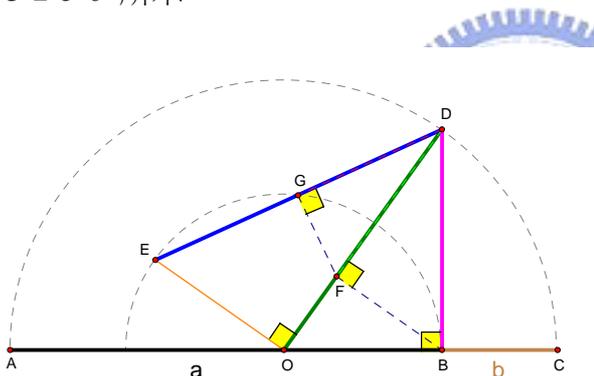


圖 3-2-5-5 算幾不等式
以 *Pappus* 圖推廣的靜態圖

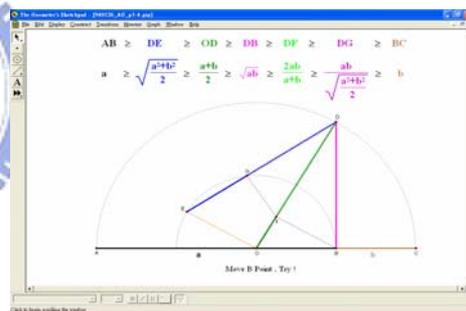


圖 3-2-5-6 算幾不等式
以 *Pappus* 圖推廣的動態圖

我們從圖 3-2-5-6 中可以瞭解其想法，分析如下：

Step 1. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, 以 \overline{AC} 為直徑作半圓，則 $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{a+b}{2}$;

Step 2. 以 $\overline{OB} = \overline{OE} = \frac{a-b}{2}$ 為半徑， O 為圓心作一半圓，且 $\overline{EO} \perp \overline{OD}$ ，直角 $\triangle DOE$ 中

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2, \text{ 得 } \overline{DE} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \text{ 則 } \overline{AB} \geq \overline{DE} \geq \overline{OD};$$

Step 3. 作 $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ ，直角 $\triangle DBO$ 中 $\overline{DB}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OB}^2$ ，得 $\overline{DB} = \sqrt{ab}$. 則 $\overline{OD} \geq \overline{DB}$;

Step 4. 作 $\overline{BF} \perp \overline{OD}$ ，直角 $\triangle DBO$ 中 $\overline{DB}^2 = \overline{DF} \times \overline{DO}$ ，得 $\overline{DF} = \frac{2ab}{a+b}$. 則 $\overline{DB} \geq \overline{DF}$;

Step 5. 作 $\overline{FG} \perp \overline{DE}$ 於 G 點，利用 GSP 的繪圖軟體工具，很容易並清楚地知道 G 點亦同時在以 OB 為半徑的小圓上，(原文章是另外證明 O, E, F, G 四點共圓)，而外幕性質 $\overline{DB}^2 = \overline{DG} \times \overline{DE}$ ，得 $\overline{DG} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$ ，則 $\overline{DF} \geq \overline{DG}$ ；

Step 6. $\overline{DG} \geq \overline{BC} = b$.

故可知 $\overline{AB} \geq \overline{DE} \geq \overline{OD} \geq \overline{DB} \geq \overline{DF} \geq \overline{DG} \geq \overline{BC}$ ，

$$a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \geq b. \quad \blacksquare$$

我們也將上述分析步驟稍加變化，以「線段長度」的概念來呈現平均不等式的圖說證明如下：

Step1~ Step3，如圖 3-2-5-7 所示，

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b, \quad \overline{OB} = \frac{a-b}{2}, \quad \overline{OE} = \frac{a+b}{2}, \quad \overline{DB} = \sqrt{ab}, \quad \overline{BE} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

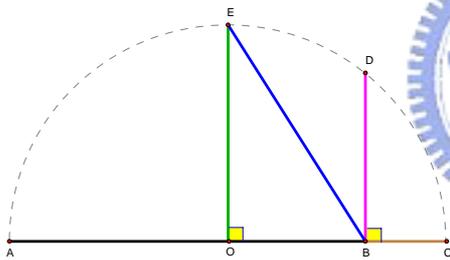


圖 3-2-5-7 平均不等式之推廣_(1)

以線段作藍色 $\overline{BE} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

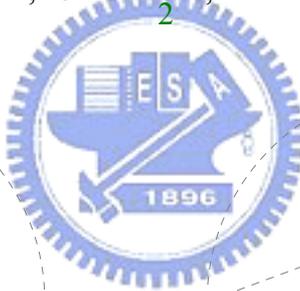


圖 3-2-5-8 平均不等式之推廣_(2)

以線段作綠色 $\overline{BQ} = \frac{2ab}{a+b}$

Step4, 如圖 3-2-5-8 所示，

在 \overline{OE} 上取 $\overline{OP} = \overline{BC} = b$ ，連接 \overline{AP} 並延長交 \overline{BD} 於點 Q，利用 Δ 相似性質，

因 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{BQ}$ ，得 $\overline{BQ} = \frac{2ab}{a+b}$ 。

Step5, 如圖 3-2-5-9 所示，

作 $\overline{QR} \perp \overline{BE}$ ，利用相似性質， $\overline{EO} : \overline{EB} = \overline{BR} : \overline{BQ}$ ，得 $\overline{BR} = \overline{BR} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$ 。

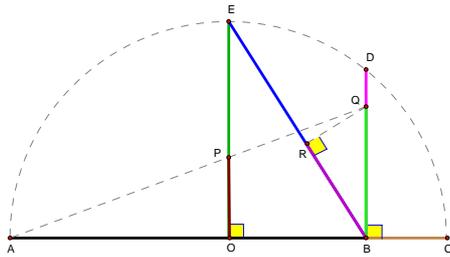


圖 3-2-5-9 平均不等式之推廣_(3)

以線段作紫色 $\overline{BR} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$

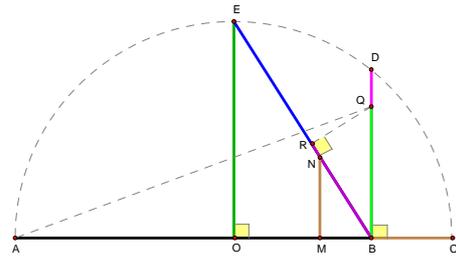


圖 3-2-5-10 平均不等式之推廣_(4)

將 \overline{OP} 長度平移至 \overline{MN}

Step 6, 如圖 3-2-5-10 所示,

為了方便比較, 將 \overline{OP} 長度 (即 $\overline{BC} = b$) 平移至 \overline{MN} . 故由圖形可知

$$\overline{AB} \geq \overline{BE} \geq \overline{OE} \geq \overline{DB} \geq \overline{BQ} \geq \overline{BR} \geq \overline{MN} \text{ 即}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \geq b.$$

我們以 GSP 繪圖軟體為其作了一動態圖說證明 (Dynamic Proofs Without Words), 如圖 3-2-5-11 所示。

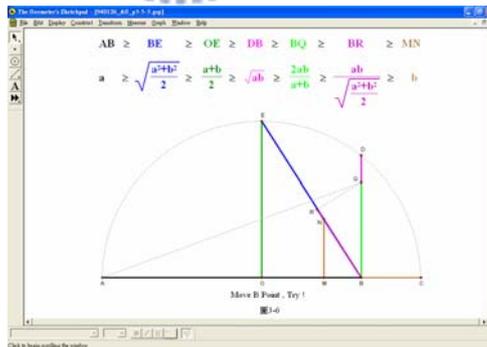


圖 3-2-5-11 平均不等式之動態圖 $a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \geq b$

最後, 我們以「面積的觀點」詮釋下列的不等式。

對於任意兩正數 a 與 b , $a \geq b$, 下式恆成立:

$$\max\{a,b\} = a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \min\{a,b\} = b$$

並且等號成立的充要條件為 $a = b$.

從圖 3-2-5-12 ~ 圖 3-2-5-17 所示，可以很容易並清楚的以面積觀點呈現其幾何意義。

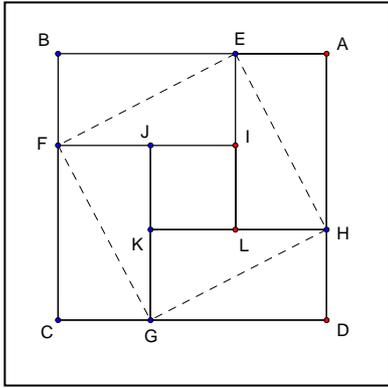


圖 3-2-5-12 以面積的觀點的算幾不等式(1)

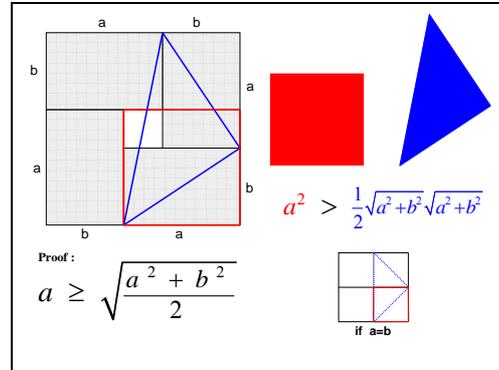


圖 3-2-5-13 以面積的觀點的算幾不等式(2)

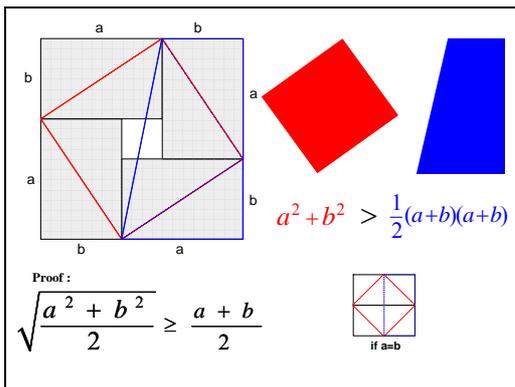


圖 3-2-5-14 以面積的觀點的算幾不等式(3)

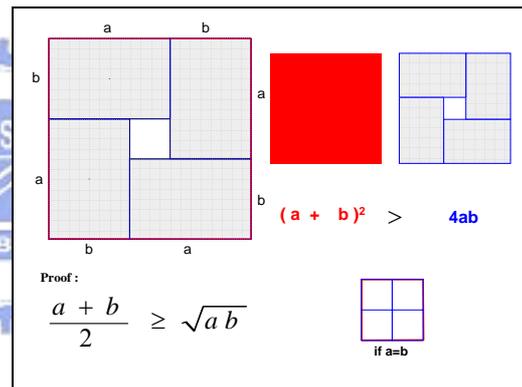


圖 3-2-5-15 以面積的觀點的算幾不等式(4)

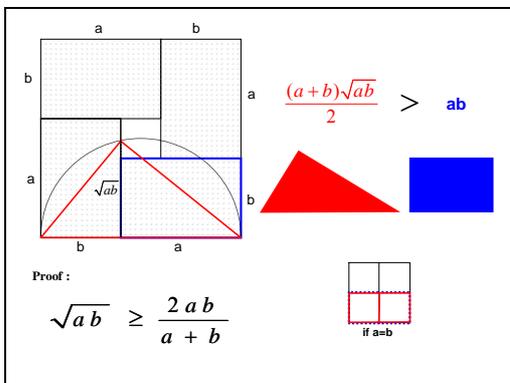


圖 3-2-5-16 以面積的觀點的算幾不等式(5)

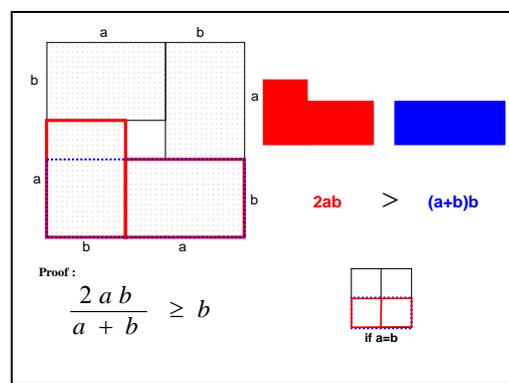


圖 3-2-5-17 以面積的觀點的算幾不等式(6)

3-3 幾則平移及伸縮概念的動態呈現---以 Excel 為設計平台

本文運用普及的電腦軟體 Excel, 並參考我們網路學習專班的作品集「萬腦奔騰數學網第一輯」第二、六章中關於介紹 Excel 強大的計算和繪圖功能之研究探討, 再結合本身第一線教學的實務經驗, 來製作標準的圓錐曲線圖形, 讓學生或教師透過滑鼠的操作, 觀察方程式在係數上的變化, 或改變係數觀察圖形的變化, 體會這些互相對照呼應表徵內部的變換或不同表徵之間的轉譯, 進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。

3-3-1 前言

讓學生能動態觀察圖形變化與相關數據間的關係, 同時能顯示相關數據, 並且可以在重複觀察各種狀態下, 體會發覺出圖形變化與相關數據間的關係, 進而猜測其結果, 再來驗證結論的正確性, 這是套裝軟體 GSP (*The Geometers's Sketchpad*) 的主要特色之一 (顏貽隆, 2003)。它是一個尺規作圖功能強大的幾何繪圖軟體, 適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察猜測, 也可利用動態按鈕來設計呈現幾何作圖及可操作實驗的數學動畫 (蔡政樺, 2006), 如圖 3-3-1-1 所示。

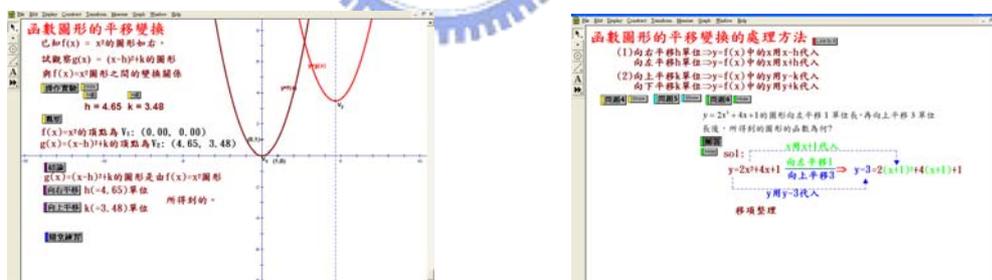


圖 3-3-1-1 以 GSP 動態呈現可操作的拋物線方程式及其圖形

我們也想利用大眾普及的軟體 Excel, 運用其強大的計算和函數繪圖功能, 處理一些變數參數的調整、多種數學函數與公式的套用, 讓學生進一步體會 Excel 是一種可以函數、圖表方式的呈現與容易表達數學式及方法的優良工具, 以便在高二下學期學習到基礎統計概念與方法之時, 對於 Excel 能夠更有崇敬心及親切感。

我們想將數個離散的點連起來“變”成各式圓錐曲線的圖形, 雖然 Excel 軟體並沒有像 GSP 軟體在互動性、探索性和繪圖方面具有高度的優勢, 但是能讓學生瞭解 Excel 軟體不僅僅只能計算和排序每次的月考成績而已, 它所具備的數值計算與圖表

功能，也可以將數學的觀念清晰的呈現在電腦螢幕上，另一方面其潛藏的表單功能，製作成有效的操作控制，亦能讓學生或教師透過滑鼠的操作，學習觀察與操作實驗（高慧娟，黃國忠，2002）。

針對現行高中課程某些單元，討論改變參數或係數時，觀察呈現圖形的變化情形，以體會這些互相對照呼應表徵內部的變換或不同表徵間的轉譯（林保平，2001）。我們將分別在 3-3-2 動態呈現第一冊第一章第三節「斜率、截距與直線方程式的關係」的互動變化；在 3-3-3 動態呈現第一冊第三章第五節「二次函數圖形」及第四冊第一章第一節「拋物線方程式」的互動變化；在 3-3-4 動態呈現第四冊第一章第二節「橢圓方程式」的互動變化；在 3-3-5 動態呈現第四冊第一章第三節「雙曲線方程式」的互動變化，以及其它相關圖形的互動變化。

3-3-2 斜率、截距與直線方程式關係的互動變化

我們希望透過改變直線的截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 中的 a, b 之值，來觀察直線的變化，讓學生能夠深刻體會並確切瞭解直線的斜率與截距之間，在圖形中所扮演的角色以及相互間的關係，如圖 3-3-2-1 所示。



圖 3-3-2-1 動態改變截距以觀察直線的斜率及其圖形之變化

進一步，我們還可以推廣到菱形方程式 $\frac{|x-h|}{a} + \frac{|y-k|}{b} = 1$ ，(如圖 3-3-2-2 ~ 圖 3-3-2-5 所示)，與矩形方程式 $\frac{|x-h|}{a} = 1 \wedge \frac{|y-k|}{b} = 1$ ，(如圖 3-3-2-6 ~ 圖 3-3-2-9 所示)，改變 h, k, a, b 之值，讓學生或教師透過滑鼠的操作，來觀察方程式在改變係數後其圖形的變化，體會這些互相對照呼應表徵內部的變換或不同表徵之間的轉譯，進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。

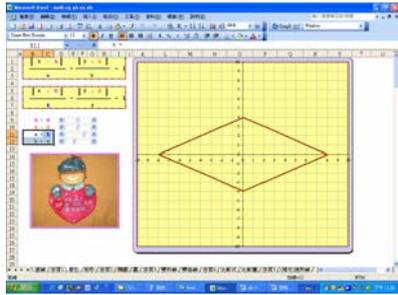


圖 3-3-2-2 菱形方程式的圖形_改變 a 值

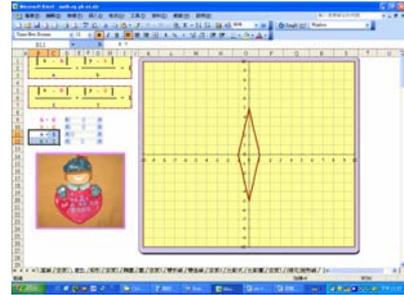


圖 3-3-2-3 菱形方程式的圖形_改變 b 值

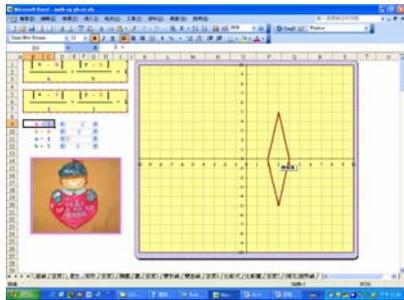


圖 3-3-2-4 菱形方程式的圖形_改變 h 值

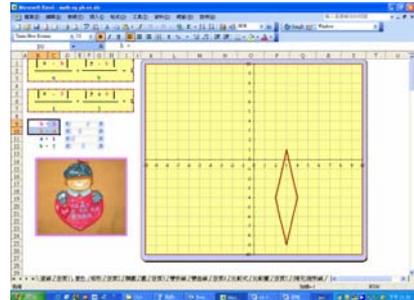


圖 3-3-2-5 菱形方程式的圖形_改變 k 值

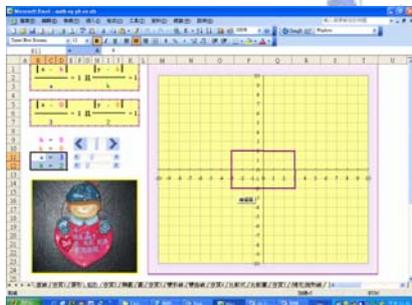


圖 3-3-2-6 矩形方程式的圖形_改變 a 值

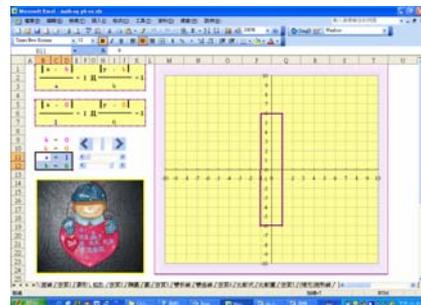


圖 3-3-2-7 矩形方程式的圖形_改變 b 值

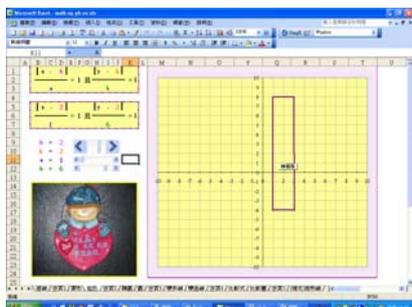


圖 3-3-2-8 矩形方程式的圖形_改變 h 值

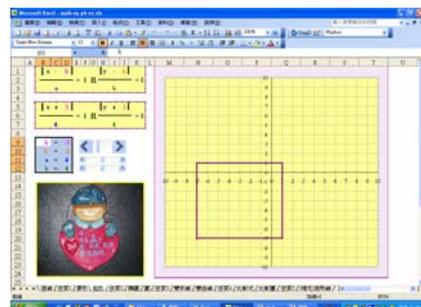


圖 3-3-2-9 矩形方程式的圖形_改變 k 值

3-3-3 拋物線方程式 (二次函數圖形) 的互動變化

透過滑鼠的操作改變拋物線方程式 (以標準上下型為例): $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ 中的 h, k, c 之值, 即 $y = px^2 + qx + r$, 來觀察 p, q, r 之值的變化, 並且觀察方程式在改變係數後其圖形的變化, 進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形, 如圖 3-3-3-1 ~ 圖 3-3-3-4 所示。

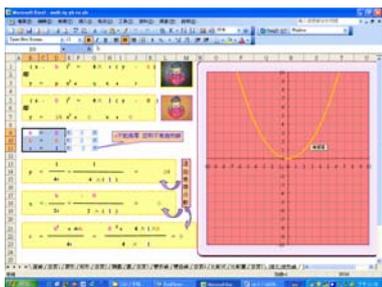


圖 3-3-3-1 拋物線方程式的圖形_標準上下型

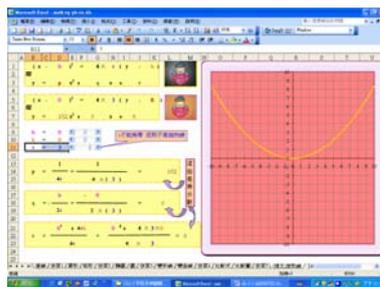


圖 3-3-3-2 拋物線方程式的圖形_改變 c 值

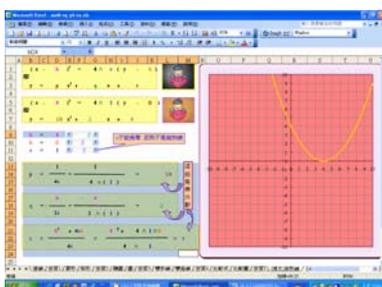


圖 3-3-3-3 拋物線方程式的圖形_改變 h 值

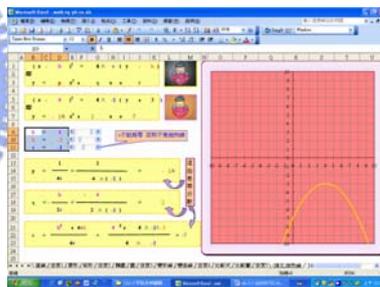


圖 3-3-3-4 拋物線方程式的圖形_改變 k 值

3-3-4 橢圓方程式的互動變化

橢圓方程式 (以標準型為例): $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, (如圖 3-3-4-1 ~ 圖 3-3-4-4 所示), 及圓方程式 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, (如圖 3-3-4-5 ~ 圖 3-3-4-8 所示), 透過滑鼠的操作改變其中的 h, k, a, b 之值, 來觀察方程式在改變係數後其圖形的變化, 進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形。

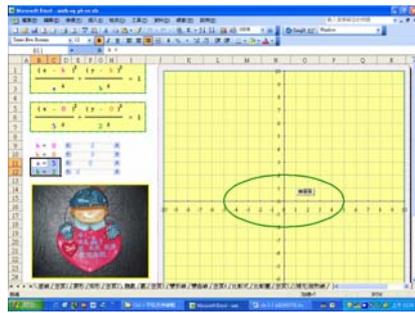


圖 3-3-4-1 橢圓方程式的圖形_改變 a 值

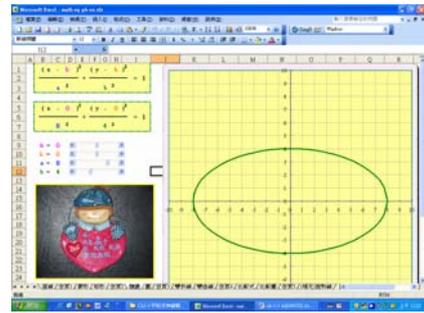


圖 3-3-4-2 橢圓方程式的圖形_改變 b 值

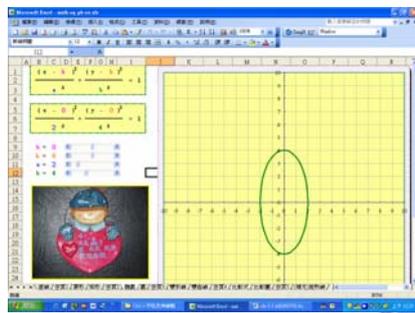


圖 3-3-4-3 橢圓方程式的圖形_改變 h 值

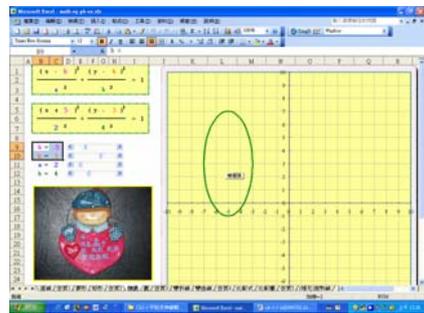


圖 3-3-4-4 橢圓方程式的圖形_改變 k 值

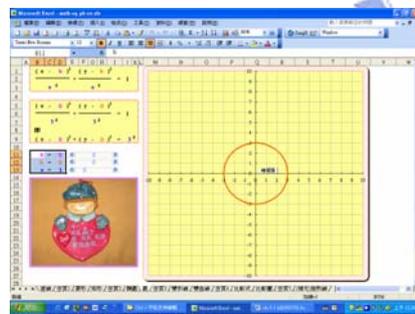


圖 3-3-4-5 圓方程式的圖形

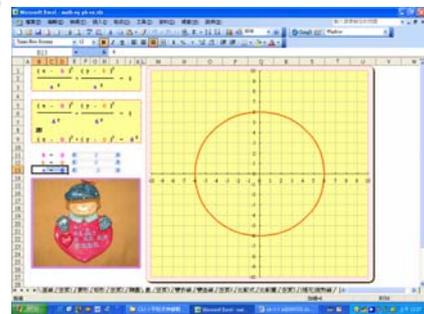


圖 3-3-4-6 圓方程式的圖形_改變 a (半徑)

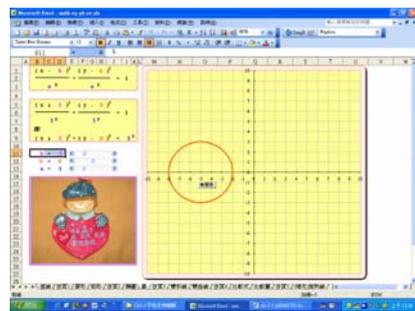


圖 3-3-4-7 圓方程式的圖形_改變 h 值

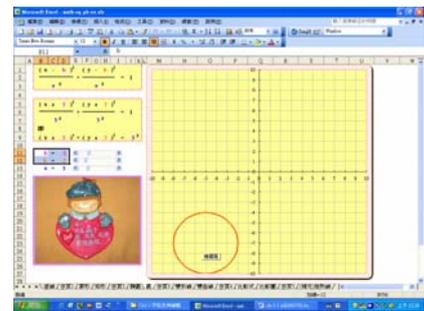


圖 3-3-4-8 圓方程式的圖形_改變 k 值

3-3-5 雙曲線方程式的互動變化

透過滑鼠的操作改變雙曲線方程式(以標準左右型為例): $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 中的 h, k, a, b 之值, 來觀察方程式在改變係數後其圖形的變化, 進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形, 如圖 3-3-5-1 ~ 圖 3-3-5-4 所示。

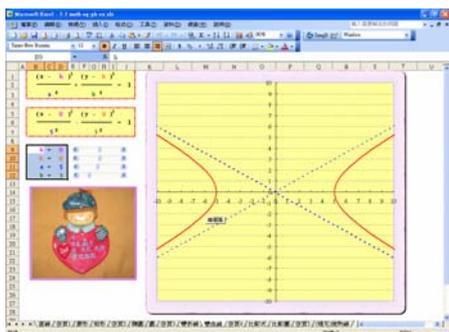


圖 3-3-5-1 雙曲線方程式的圖形_改變 a 值

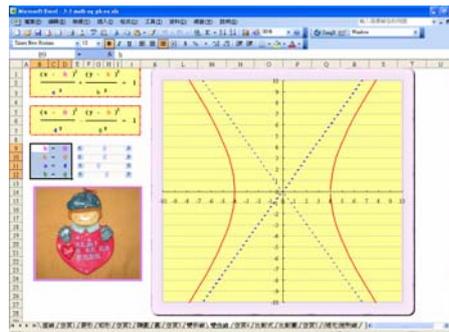


圖 3-3-5-2 雙曲線方程式的圖形_改變 b 值

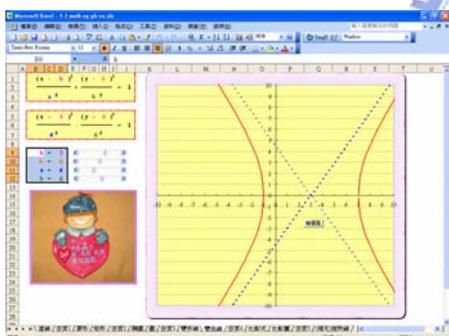


圖 3-3-5-3 雙曲線方程式的圖形_改變 h 值

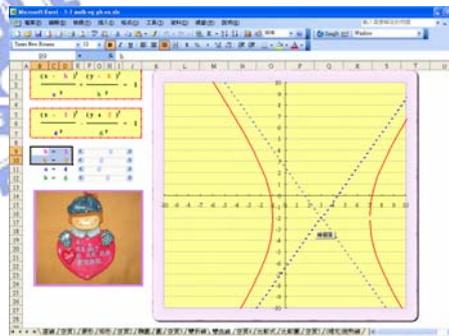


圖 3-3-5-4 雙曲線方程式的圖形_改變 k 值

進一步, 我們還可以推廣到雙折線方程式: $\frac{|x-h|}{a} - \frac{|y-k|}{b} = 1$, 讓學生或教師透過滑鼠的操作改變其中的 h, k, a, b 之值, 來觀察體會這些互相對照呼應表徵內部的變換或不同表徵之間的轉譯, 以期能進一步能了解在直角坐標系中圖形平移、伸縮變換下的變化情形, 如圖 3-3-5-5 ~ 圖 3-3-5-8 所示。

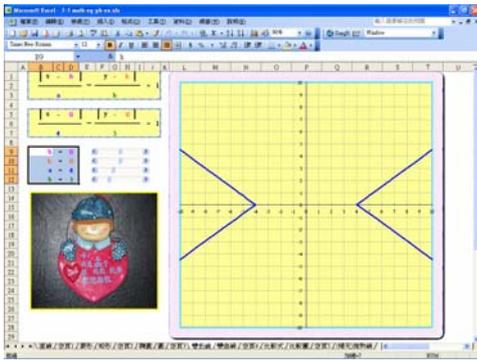


圖 3-3-5-5 雙折線方程式的圖形_改變 a 值

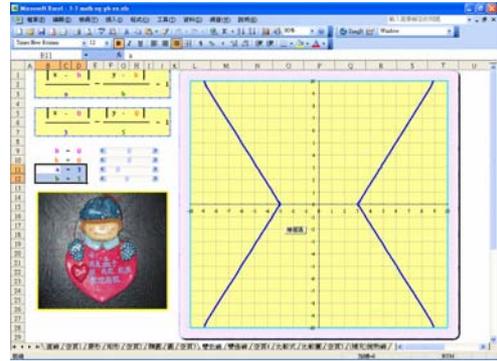


圖 3-3-5-6 雙折線方程式的圖形_改變 b 值

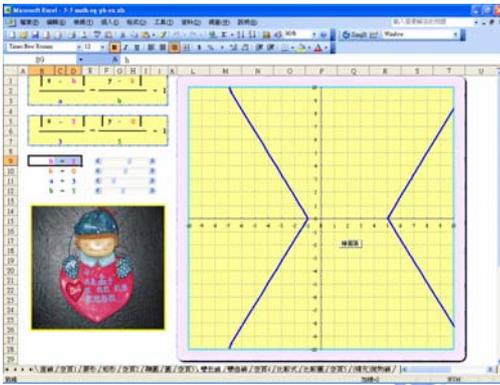


圖 3-3-5-7 雙折線方程式的圖形_改變 h 值

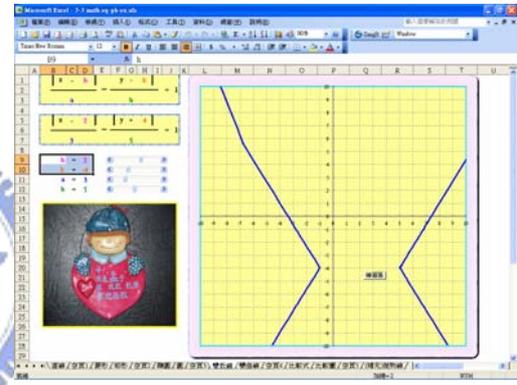


圖 3-3-5-8 雙折線方程式的圖形_改變 k 值



第四章 在電腦軟體環境下的高中數學之探究與學習

本章主要是探究若干代數式的幾何意義之學習，以及討論從鋪磁磚之 *regular tessellation* 出發到 *semiregular tessellation* 成「勻稱連續圖形」的公式。另一方面以立體動態幾何軟體 Cabri-3D 來作實例分析與設計操作的教學素材之開發，對「四面體與平面的截痕形狀」的討論探究，延伸動態探究「正多面體的稜邊與球面之交點個數」，並將尤拉多面體定理的靜態文字與圖片的證明，以動態立體幾何的方式模擬呈現書中所載之敘述，期望能夠幫助學生在學習立體觀念時不再瞎子摸象，培養清楚的空間概念。最後我們針對思源科技教育基金會所主辦的「2007 思源科學創意大賽--數學專題競賽」之題目 ---「鋪路造橋問題」，藉由腦力激盪的探究過程，從其中激發學生提出解決問題的觀察、猜想、邏輯推理與檢驗論證，並且學習瞭解到具體操作數學軟體的方法，進而創新和突破找出解決問題的方法與步驟。

本章共分為四節，分別說明如下：

4-1 代數式的幾何意義之思維

在數學解題中，對數量關係做出“幾何”的思索，另闢新路，尋找另類思維，往往可以化難為易。我們希望學生在面對一個數學問題的時候，要勇於把解決問題的能力和創新的思維的想法說出來，培養具備靈活的思維，而將代數與幾何圖形相結合是一種重要的數學思路，尤其在解三角問題時，更可以讓複雜的問題簡單化，有時後甚至還會得到“柳暗花明又一村”的效果。

4-2 鋪磁磚之「半正則嵌鑲」成「勻稱連續圖形」的公式

首先討論一些平面圖形的基本結構，介紹「正則嵌鑲」(*regular tessellation*) 的「勻稱連續圖形」，了解這些圖形的構成原理，再證明「半正則嵌鑲」成「勻稱連續圖形」的公式。並介紹交通大學陳明璋教授利用 Microsoft PowerPoint 系統平台，所設計的數學簡報系統 (MathPS) 以其簡易的電腦操作方式來處理連續圖形。盼能在教學過程中，能夠先以審美的態度去“感染”學生的美感，引領學生的好奇心，來探討這些美的信息背後所隱含的數學原因。

4-3 高中數學問題的立體動態之操作探究 --- 以 Cabri-3D 為工具

牽涉到三維空間的立體概念及思維，對高中學生而言往往像是瞎子摸象，只能知其一而無法窺得全貌，這當中最重要的原因之一就是因為缺少了直觀感知與操作認知。因此，我們運用 Cabri-3D 立體幾何軟體所提供的操作構建功能，製作了幾個基本的操作模擬，讓整個立體空間探究學習的過程有了很大的視覺呈現效果，以幫助學習認知較慢的學生透過對實際模型的操作和觀察，來初步認識空間

幾何體的結構特徵，並能領略到數學的幾何之美以及在數學探究中的思維活動。

4-4 三角形中的極值點問題之探究 --- 以鋪路造橋問題為例，以 GSP 為工具

當今的中學數學教育中，問題解決 (*Problem Solving*) 已成為一個學習的焦點。本文是針對思源科技教育基金會所主辦的「2007 思源科學創意大賽--數學專題競賽」之題目---「鋪路造橋問題」，(<http://www.seed.org.tw/mainpage.aspx#>)，由高一數理實驗班的五位學生，參與腦力激盪的探究過程，從其中激發學生提出解決問題的觀察、猜想、邏輯推理與檢驗論證，並且學習瞭解到具體操作數學軟體的方法，進而找出解決問題的方法與步驟，又能有所創新和突破，提昇科技競爭能力。由於競賽問題貼近生活情境，沒有標準答案，讓同學可以於訓練解決的過程中建立獨立的思維模式，同時領略數學平易近人的一面，開拓心靈的深度及廣度，並從中體會團隊合作精神。



4-1 代數式的幾何意義之思維

在數學解題中，對數量關係做出“幾何”的思索，另闢新路，尋找另類思維，往往可以化難為易。我們希望學生在面對一個數學問題的時候，要勇於把解決問題的能力和創新的思維的想法說出來，培養具備靈活的思維，而將代數與幾何圖形相結合是一種重要的數學思路，尤其在解三角問題時，更可以讓複雜的問題簡單化，有時後甚至還會得到“柳暗花明又一村”的效果。

4-1-1 前言

美籍匈牙利數學家和數學教育家喬治·波利亞 (*Geoge Polya*,1887-1985) 從思維科學、數學方法論和數學哲學的角度，對數學自身的特點和數學教育的規律與原則進行了深入的研究，形成了自己獨特的數學教育思想，對現代數學教育產生了極其深遠而持久的影響。尤其是他對數學解題的研究，堪稱解題教學的行動綱領，波利亞認為，解題過程就是一個運用探索法誘發學生靈感的過程。

我們希望學生在面對一個數學問題的時候，要勇於把解決問題的能力和創新的思維的想法說出來，若培養具備靈活的思維，那麼在解決問題時就能從不同角度與方向，用多種方法來思考問題。在數學解題中，對數量關係做出“幾何”的思路，往往可以化難為易，數學解題能力的一個重要訓練就是學生能進行一題多解或多題一解。

數學教學應當向學生闡明一件事情，就是數學與所有其他學科一樣，是建立在直觀的瞭解及公認為便利的習慣上，而這種瞭解或習慣並不是永恆不移的真理。數學是人類活動的事蹟，數學史中記載著各種的發明、發現、猜測，有好的也有壞的，數學發展的前線上也滿佈著有趣、未解決的問題。

問「為什麼？」這樣的問題很重要，而在數學中只給出一個明細的證明步驟，不一定就算是解答了問題。假設我們剛證完一個有趣而且驚人的結果，再問說：「為什麼？真是這樣的嗎？」，我們認為對於很多情況而言，這樣問是有意義的，而一個正確的答案並不是重複一次演繹的步驟就夠了。我們期望的是：足以啟示整個事態的洞察力，即能夠深入問題的核心，且讓學生看出為什麼整個結果會是那樣的洞察方法；又因為可以從很多不同的觀點看同一問題，這樣的洞察法很少是獨一的。

在這樣的觀點下，本文提供了幾則代數式的幾何意義之探究學習。分別在第 4-1-2

節從「 $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ 」的問題再出發；在第 4-1-3 節再探「兩則三角恆等式的意義」；以及在第 4-1-4 節初探「反正切三角函數式與方格紙的關係」。

4-1-2 一道國際數學奧林匹亞競賽試題的再出發

$$\text{試證：『 } \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \text{ 』。}$$

將這個問題給高二的學生作答，你認為他們是怎麼回答的呢？如果將這個問題給高一的學生作答，你認為他們能夠回答嗎？會怎麼回答呢？換個角度，如果您是數學老師，又會如何解說這一道試題。

國立中山大學應用數學系每個學期都會舉辦「數學雙週一題」的解題活動，對象分為高中生和大專生（題目不同），恰好給了這個題目讓高一至高三的學生回答（<http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2006f/2.JPG>）。我們的學校一直鼓勵學生踴躍參加，訓練思維能力，結果發現繳回的答案紙幾乎千篇一律都是使用積化和差的公式，就連主辦單位在網路上公告的解答亦是如此（註：由參加回答的學生們較多且較佳的解答來公告上網的）。使用積化和差的方法如下：

$$\begin{aligned} \therefore \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \\ \text{令 } y &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ \therefore (2\sin \frac{\pi}{7})y &= (2\cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}) + (2\cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}) + (2\cos \frac{5\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}) \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \sin 0 + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}, \quad \text{故 } \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

我們進一步發現，其實這道試題最早是出自於第五屆國際數學奧林匹亞競賽的第 5 號試題，在已發行的多本數學奧林匹亞解答參考書籍中，也皆是如上的方法，還有一種使用複數極式解 1 的七次方根之方法。那麼不禁想到，如果沒有學過積化和差與複數極式的話，是否將束手無策呢？

我們希望學生們在面對一個數學問題的時候，不要存著：「這題我做過，就是那

個方法、這個公式，代入就好了」，要敢於把自己的想法說出來，以培養學生解決問題的能力和創新的思維，而數學解題能力的一個重要方面是學生能進行一題多解或多題一解。事實上，若具備靈活的思維，那麼在解決問題時就能從不同角度與方向，用多種方法來思考問題。在數學解題中，對數量關係做出“幾何”的思路，往往可以化難為易。因此，我們有了下列的思維想法：(如圖 4-1-2-1 所示)

(1). 令 $\theta = \frac{\pi}{7} \doteq 25.71^\circ$ ，設 $\angle POA = \theta$ ， $\overline{OA} = 1$ 。作 $\overline{AB} = \overline{OA}$ ，則 $\angle BAQ = 2\theta$ 。

(2). 作 $\overline{BC} = \overline{AB}$ ，則 $\angle PBC = 3\theta$ ，再作 $\overline{CD} = \overline{BC}$ ，則 $\angle CDB = 3\theta$ 。

(3). $\therefore \angle OCD = \pi - \theta - 3\theta = \pi - \frac{4\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} = 3\theta \quad \therefore \overline{OC} = \overline{OD}$

$$\therefore (\overline{OB} + \overline{BD}) = (\overline{OA} + \overline{AC})$$

$$\text{即 } 2 \cos \theta + 2 \cos 3\theta = 1 + 2 \cos 2\theta$$

$$\text{得 } \cos \theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta = 1$$

$$\text{故 } \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

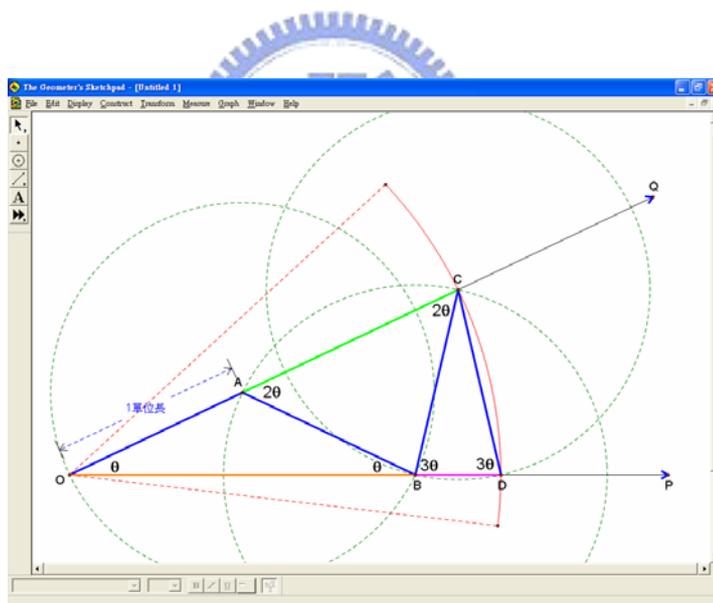


圖 4-1-2-1 一道國際數學奧林匹亞競賽試題的幾何意義

聯想是以觀察為基礎，對研究的物件或問題的特點，聯繫已有的知識和經驗進行想像。學生在回答問題時，最怕的是回答得“蠢”，引起同學嘲笑，這也是我們的學生不願意積極思索來回答問題的重要因素之一。因此，站在教學現場第一線的我們，更應當注意回答學生的感受，不要吝於對學生多予正面的讚揚與獎勵，有利於鼓勵學生培養發散性的思維能力，啟發學生從不同角度和方法來解決問題。

4-1-3 兩則三角恆等式的意義之推廣

三角函數中有許多的恆等式，例如：在 $\triangle ABC$ 中

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

一般的證明方法不外乎是利用三角函數的和差化積及和角公式，舉例證法如下：

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2[\pi - (A+B)] \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - \sin[2(A+B)] \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - 2 \sin(A+B) \cos(A+B) \\ &= 2 \sin(A+B) [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 4 \sin(A+B) \sin A \sin B = 4 \sin(\pi - C) \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

$$\because \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \quad \therefore \cot\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} - 1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} = \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{\cot \frac{C}{2}}$$

$$\text{去分母移項即得 } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

但是『高中數學 98 年新課程綱要』中，已將和差化積部分刪除，因此如何另闢新路，尋找另類思維，是我們亟需想做的事情。而將代數與幾何圖形相結合是一種重要的數學思路，尤其在解三角問題時，更可以讓複雜的問題簡單化，有時後甚至還會得到“柳暗花明又一村”的效果。

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，求證： $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

證：我們用幾何方法來證明，圖 4-1-3-1 所示。

設圓 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓，其半徑為 R， $\triangle ABC$ 的面積記作 $S_{\triangle ABC}$ ，

則 $\angle BOC = 2A, \angle COA = 2B, \angle AOB = 2C$,

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB}$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}R^2 \sin \angle BOC + \frac{1}{2}R^2 \sin \angle AOC + \frac{1}{2}R^2 \sin \angle AOB$$

$$\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\therefore ab \sin C = R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

由正弦定理可知： $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$

$$\therefore \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

也就是說 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ 的幾何意義可以解釋為： $\triangle ABC$ 的面積等於其外心分成的三個小三角形面積之和。 ■

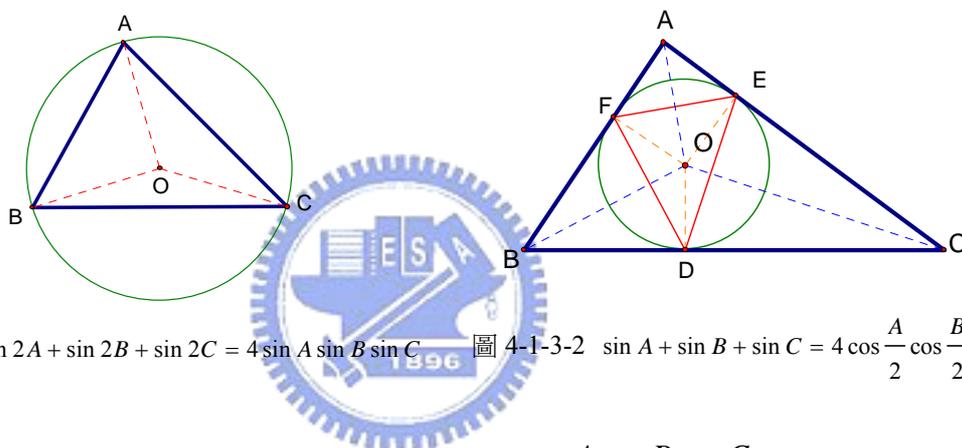


圖 4-1-3-1 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ 圖 4-1-3-2 $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

例 2. 在 $\triangle ABC$ 中，求證： $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

證：如圖 4-1-3-2 所示，設 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 1，圓心為 O，切點為 D, E, F,

則 $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = 1$ ，連結 $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$,

$$\because \angle FOE = 180^\circ - A, \angle FOD = 180^\circ - B, \angle DOE = 180^\circ - C$$

$$\therefore \angle FDE = 90^\circ - \frac{A}{2}, \angle DEF = 90^\circ - \frac{B}{2}, \angle EFD = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$S_{\triangle FOE} = \frac{1}{2} \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2} \sin A$$

$$S_{\triangle FOD} = \frac{1}{2} \sin B$$

$$S_{\triangle DOE} = \frac{1}{2} \sin C$$

在 $\triangle DEF$ 中，由正弦定理，得

$$EF = 2 \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 2 \cos \frac{A}{2}, FD = 2 \cos \frac{B}{2},$$

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot FD \sin \angle EFD = \frac{1}{2} \times 2 \cos \frac{A}{2} \times 2 \cos \frac{B}{2} \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\because S_{\triangle DEF} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DEF}$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

也就是說 $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 的幾何意義可以解釋為： $\triangle ABC$ 內切圓之三切點所圍 $\triangle DEF$ 的面積等於 $\triangle DEF$ 外心分成的三個小三角形面積之和。 ■

例 3. 在 $\triangle ABC$ 中，求證： $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ 。

證：如圖 4-1-3-3 所示，設 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 1，圓心為 O ，切點為 D, E, F ，

$$\text{則 } \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = 1, \overline{AE} = \overline{AF} = \text{ctg} \frac{A}{2}, \overline{BF} = \overline{BD} = \text{ctg} \frac{B}{2}, \overline{CD} = \overline{CE} = \text{ctg} \frac{C}{2}$$

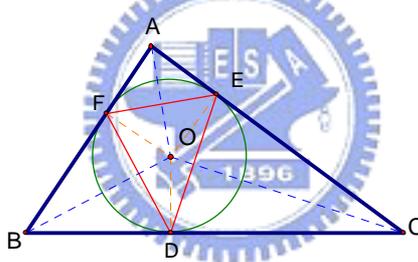


圖 4-1-3-3 $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \left(\text{ctg} \frac{A}{2} + \text{ctg} \frac{B}{2} \right), S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \left(\text{ctg} \frac{B}{2} + \text{ctg} \frac{C}{2} \right), S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} \left(\text{ctg} \frac{C}{2} + \text{ctg} \frac{A}{2} \right)$$

由海龍公式，得

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(\text{ctg} \frac{A}{2} + \text{ctg} \frac{B}{2} + \text{ctg} \frac{C}{2} \right) \text{ctg} \frac{A}{2} \text{ctg} \frac{B}{2} \text{ctg} \frac{C}{2}}$$

$$\because S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCA} = S_{\triangle ABC}, \therefore \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

也就是說 $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ 的幾何意義可以解釋為：三角形面的面積等於其內心分成的三個小三角形面積之和。 ■

4-1-4 反正切三角函數式與方格紙的關係之初探

無窮級數千奇百怪、變幻莫測，其中最著名的是萊布尼茲無窮級數

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ ，它被數學家們譽為 17 世紀最精彩美妙的數學發現之一。萊布尼茲雖然比詹姆斯·格雷戈里晚兩年於 1673 年，才發現 $\arctan x$ 的展開式，但他並沒有坐失良機，而是用它的原理並別具慧眼地令 $x = \frac{\pi}{4}$ ，遂將反正切式展開成為無窮級數。

說到反正切式，它與 $\frac{\pi}{4}$ 有著令人著迷的關係，結合幾何、代數、三角與遞迴數列等多重角色。我們在 *Mathematics Magazine* 裡發現由作者 *Ko Hayashi* 所寫的一篇文章 “*Fibonacci numbers and the arctangent function*”，其中對反正切式有極佳的圖形詮釋，如圖 4-1-4-1 ~ 圖 4-1-4-3 所示。

表 4-1-4 π 的著名反正切式

反正切式	發現人	發現年代
$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$	萊布尼茲	1673
$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$	歐拉	1737
$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{5}$	歐拉	
$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}$	歐拉	

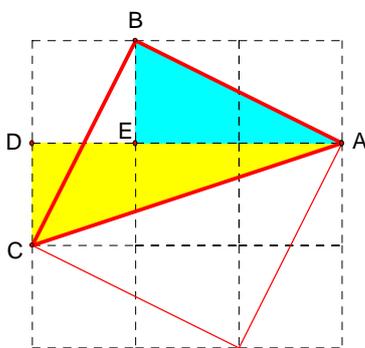


圖 4-1-4-1

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

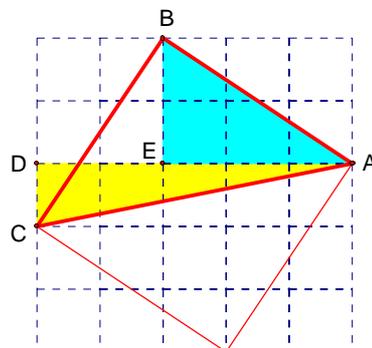


圖 4-1-4-2

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{5}$$

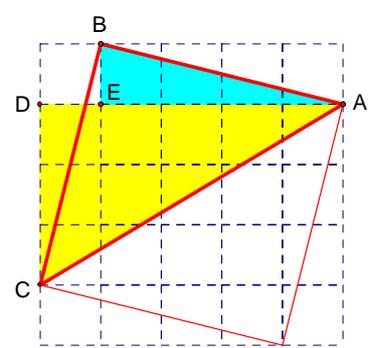


圖 4-1-4-3

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}$$

根據上圖的觀察，我們進一步可以推廣得到如下的一般結果，如圖 4-1-4-4 所示。

$$\text{令 } \tan \alpha = \frac{x}{y}, \text{ 則 } \alpha = \tan^{-1} \frac{x}{y}$$

$$\text{令 } \tan \beta = \frac{y-x}{y+x}, \text{ 則 } \beta = \tan^{-1} \frac{y-x}{y+x}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = 1, \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y-x}{y+x} \quad \blacksquare$$

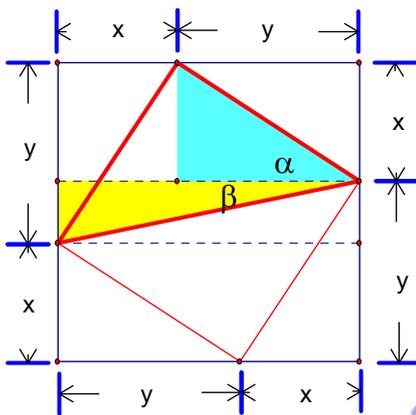


圖 4-1-4-4 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y-x}{y+x}$

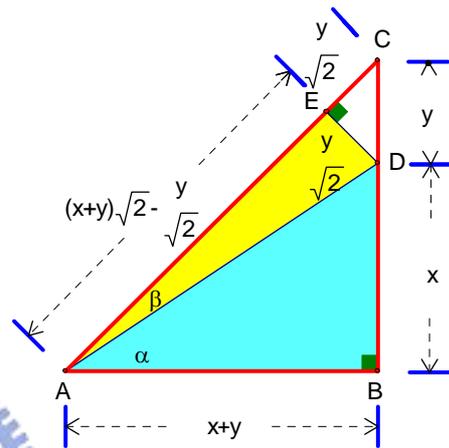


圖 4-1-4-5 $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{x+y} + \tan^{-1} \frac{y}{2x+y}$

更進一步，我們也可以透過巧妙的變化，得到另一種結果，如圖 4-1-4-5 所示。

$$\text{令 } \tan \alpha = \frac{x}{x+y}, \text{ 則 } \alpha = \tan^{-1} \frac{x}{x+y}$$

$$\text{令 } \tan \beta = \frac{\frac{y}{\sqrt{2}}}{(x+y)\sqrt{2} - \frac{y}{\sqrt{2}}} = \frac{y}{2x+y}, \text{ 則 } \beta = \tan^{-1} \frac{y}{2x+y}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = 1, \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{x}{x+y} + \tan^{-1} \frac{y}{2x+y} \quad \blacksquare$$

4-2 鋪磁磚之「半正則嵌鑲」成「勻稱連續圖形」的公式

我們首先討論一些平面圖形的基本結構，介紹「正則嵌鑲」(*regular tessellation*) 的「勻稱連續圖形」，了解這些圖形的構成原理，再證明「半正則嵌鑲」成「勻稱連續圖形」的公式。並介紹交通大學陳明璋教授利用 Microsoft PowerPoint 系統平台，所設計的數學簡報系統 (MathPS) 以其簡易的電腦操作方式來處理連續圖形。盼能在教學過程中，能夠先以審美的態度去“感染”學生的美感，引領學生的好奇心，來探討這些美的信息背後所隱含的數學原因。

4-2-1 前言

在日常生活中，我們可以看到各式各樣的物體以及平面圖形，有些物體的形狀很有規則，有些物體的形狀較沒有規則，但是看起來仍然賞心悅目，美得令人心曠神怡。法國哲學家、數學家笛卡耳說：「美是一種恰到好處的協調與適中」，這些美麗的形體，有些是天然形成的，而更多的是人類心靈創作的結晶。

我們經常用到平面幾何圖案的基本圖形：方形、圓形、三角形、菱形、星形、正三角形、正方形、正五邊形、...、正 n 邊形、平行四邊形、梯形、橢圓形、...，我們暫且稱為「單位圖形」。「單位圖形」是在相同或相似的形圖組合中最基本的條件。根據文獻的分析，人類對圖形美感的共通性通常是以具有連續性、具有對稱或旋轉性、及成比例性等三個基本原則為主要的因素，我們將從視覺直觀上、數學理論上（對高中生）、及電腦應用上來淺析連續圖形的幾何美感、數學關係、和應用技術。

在這樣的觀點下，我們分別在第 4-2-2 節從勻稱連續圖案的 *regular tessellation* 出發到 *semiregular tessellation*，在第 4-2-3 節說明利用平移、鏡射、旋轉原理來嵌鑲成連續圖形；以及在第 4-2-4 節介紹數學簡報的概念架構系統 MathPS。

4-2-2 勻稱連續圖形

我們常常可以在地磚、包裝紙、壁紙、領帶、窗簾布、衣服、...、數學函數圖形（如正餘弦函數）、及大自然的現象中，看到各式各樣的某些圖案。這些圖案都是把一個或多個基本圖形，規則地向上下或左右配列擴張，既不留空隙、也沒有重疊地拼砌鋪滿整個平面的圖面，就好像是在鋪磁磚 (*tiling*)，也叫做嵌鑲 (*tessellation*)，這種圖形就是一般所稱的連續圖形。

連續圖形是怎麼設計的呢？要設計連續圖形，必須先設計基本的圖案，正如前面我們介紹到，它在鋪滿整個平面的過程中，因既不留空隙、也沒有重疊，這顯然不是任何圖案都可辦到的。是不是任意的多邊形都可以用來鋪滿整個平面呢？我們先來看看以正多邊形為基本圖形的「勻稱連續圖案」之情形。所謂「勻稱連續圖案」，是指每個頂點都是由同樣的幾個正多邊形的頂點聚合而成，且通過各頂點的各種正多邊形的個數都是一樣多。

單獨用一種大小相同圖案來鋪砌連續圖形，在圖形學上我們稱為「正則嵌鑲」(*regular tessellation*)。而單獨用一種正多邊形來鋪砌連續圖案，你可能會以為一定有很多正多邊形辦得到。事實不然，只有三種正多邊形可單獨鋪砌出連續圖案，為什麼呢？首先，你可以先試著動手剪裁出數個相同大小的正三邊形、正四邊形、正五邊形、正六邊形、...，或者藉由電腦軟體 (Microsoft PowerPoint, GSP)，實際操作看看是否可以得到「勻稱連續圖案」。

初步可以發現，使用正三邊形、正四邊形、或正六邊形，皆可以正則嵌鑲方式得到「勻稱連續圖形」，進一步再發現，因為如果要利用相同的多邊形以既不重疊又無空隙的方式鋪滿整個平面，則圍繞在每一個頂點的各個角的總和必為 360° ，而正三角形的每一個內角是 60° ，正方形每一個角是 90° ，正六邊形每一個角是 120° ，它們的度數都是 360 的因數。所以這些正多邊形都可以構成連續圖形的基本圖案。為了方便，我們以 (n_1, n_2, \dots, n_m) 來表示圖形裡每一個頂點會連接多少種 (個) 正多邊形；例如圖中 $(3,3,3,3,3,3)$ 表示過一頂點有 6 個正三邊形； $(4,4,4,4)$ 表示過一頂點有 4 個正四邊形； $(6,6,6)$ 表示過一頂點有 3 個正六邊形。(如圖 4-2-2-1 所示)。

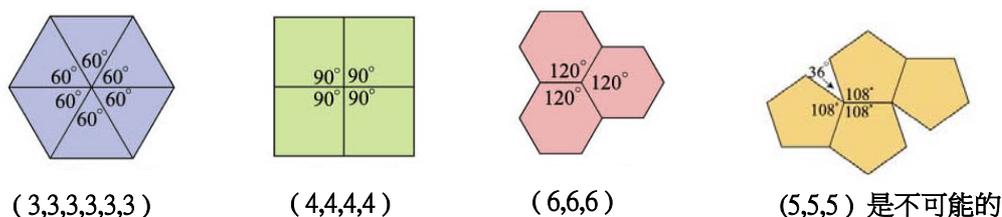


圖 4-2-2-1 三種 *regular tessellation* 圖形

但是僅用正五邊形、正七邊形、或正八邊形，都是無法得到的。那麼正五邊形為什麼無法鋪滿平面而不重疊呢？因為正五邊形的每一個內角為 108° ，而 108 不是 360 的因數，所以只利用正五邊形是沒有辦法 *regular tessellation*。

那麼其他的正多邊形是否能以正則嵌鑲方式得到「勻稱連續圖形」呢？從數學的角度，我們可以用代數方法來討論。由於共用於一點的內角總和必須是 360 度，而正 n 邊形的每一個內角為 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ ，所以能夠僅用一種正 n 邊形嵌鑲出連續圖案的

必要條件為 360 可以被 $\frac{(n-2)\times 180}{n}$ 整除，即 $360 = \frac{(n-2)\times 180}{n} \times K$, K 為正整數，得 $K = \frac{2n}{n-2}$ 為正整數。又 $\frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$ ，故 $\frac{4}{n-2}$ 必為正整數。又因 $n \geq 3$ ，所以 $n-2=1$ 或 2 或 4，因此得 $n=3$ 或 4 或 6。也就是說，除了正三邊形、正四邊形、或正六邊形這三類能以正則嵌鑲得到「勻稱連續圖案」外，其他正多邊不可能以正則嵌鑲得到「勻稱連續圖案」。

用兩種 (以上) 大小相同圖案來鋪砌連續圖形，在圖形學上我們稱為「半正則嵌鑲」(semiregular tessellation)。我們先來討論究竟可以用那兩種正多邊形以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」？假設使用兩種正多邊形，其中一種為正 n 邊形，另一種為正 m 邊形，且令 $n < m$ ，過一頂點有 x 個正 n 邊形， y 個正 m 邊形。因欲以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」，即過一頂點的這兩種正多邊形的各內角總和必須是 360° ，用代數方法來表示，可得 $\frac{x(n-2)\times 180^\circ}{n} + \frac{y(m-2)\times 180^\circ}{m} = 360^\circ$

化簡得

$$\frac{x(n-2)}{n} + \frac{y(m-2)}{m} = 2 \quad (2)$$

這是求整數解的不定方程，又因為

$$\frac{x(n-2)}{n} \in \mathbb{Z}^+, \frac{y(m-2)}{m} \in \mathbb{Z}^+, \frac{x(n-2)}{n} < 2 \text{ 且 } \frac{y(m-2)}{m} < 2$$

即 $xn - 2x < 2n$ 且 $ym - 2y < 2m$ ，得 $(x-2)(n-2) < 4$ 且 $(y-2)(m-2) < 4$ 。

又 $3 \leq n < m$ 且 $x \in \mathbb{Z}^+$ ， $y \in \mathbb{Z}^+$ ，得 n 的最小值為 3， x 為不大於 5 的正整數； m 的最小值為 4， y 為不大於 3 的正整數，故 $1 \leq x \leq 5$ ， $1 \leq y \leq 3$ 。如此，我們可以分析出六組解如表 4-2-2-1 所示。

表 4-2-2-1 以兩種正多邊形半正則嵌鑲連續圖形的關係表

	x(個)	正 n 邊形	y(個)	正 m 邊形	符號註記	代入(2)式
第 a 組解	1	3	2	12	(3,12,12)	滿足
第 b 組解	1	4	2	8	(4,8,8)	滿足
第 c 組解	2	5	1	10	(5,5,10)	不滿足
第 d 組解	2	3	2	6	(3,3,6,6)	滿足
第 e 組解	3	3	2	4	(3,3,3,4,4)	滿足
第 f 組解	4	3	1	6	(3,3,3,3,6)	滿足

經逐一檢驗，只有第 c 組不滿足(2)式，也就是說，我們用兩種正多邊形以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」，有五類，共 7 個圖形，如圖 4-2-2-2 之 a, b, d, e, f 所示。其中第 e 組解 (3,3,3,4,4) 應有兩種圖形；而第 f 組解 (3,3,3,3,6) 雖可拼出兩種圖形但應屬同一種，這在許多書本裡似乎沒有特別強調。 ■

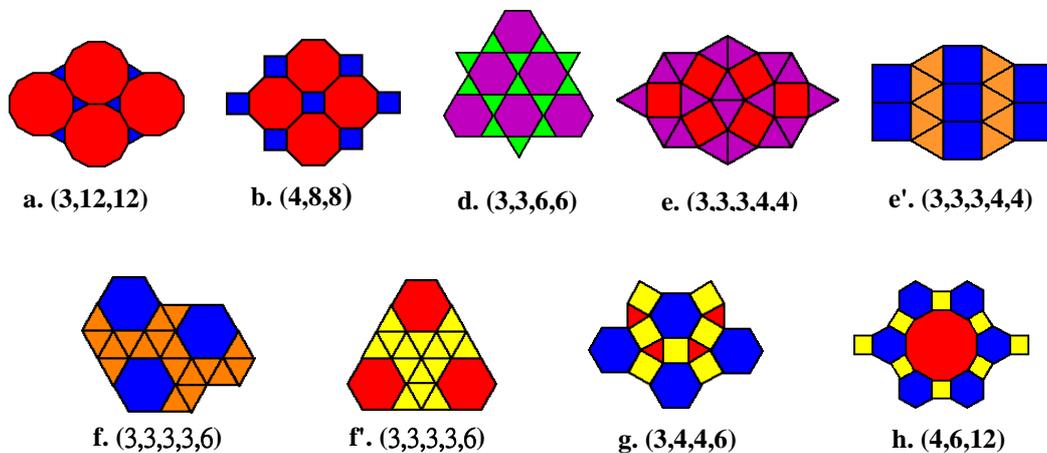


圖 4-2-2-2 以兩或三種正多邊形半正則嵌鑲的九種勻稱連續圖形

我們再來看看用哪三種正多邊形能以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」？假設每一個點的周圍有 x 個正 n 邊形， y 個正 m 邊形以及 z 個正 k 邊形所組成，且令 $n < m < k$ ，則

$$\frac{x(n-2) \times 180^\circ}{n} + \frac{y(m-2) \times 180^\circ}{m} + \frac{z(k-2) \times 180^\circ}{k} = 360^\circ$$

化簡得

$$\frac{x(n-2)}{n} + \frac{y(m-2)}{m} + \frac{z(k-2)}{k} = 2 \quad (3)$$

又因為 $\frac{x(n-2)}{n}$, $\frac{y(m-2)}{m}$, $\frac{z(k-2)}{k}$ 均為小於 2 的正整數，即 $xn - 2x < 2n$,

$ym - 2y < 2m$ 且 $zk - 2z < 2k$ ，得 $(x-2)(n-2) < 4$ 且 $(y-2)(m-2) < 4$ 且

$(z-2)(k-2) < 4$ 。又 $3 \leq n < m < k$ ，且 $x \in \mathbb{Z}^+$, $y \in \mathbb{Z}^+$, $z \in \mathbb{Z}^+$ ，得 n 的最小值為 3，

x 為不大於 5 的正整數； m 的最小值為 4， y 為不大於 3 的正整數； k 的最小值為 5，

z 為不大於 3 的正整數，故

$$1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 3 \quad (4)$$

我們可以由 (4) 式討論分析出八組解，如表 4-2-2-2 所示。 ■

表 4-2-2-2 以三種正多邊形半正則嵌鑲連續圖形的關係表

	x(個)	正 n 邊形	y(個)	正 m 邊形	z(個)	正 k 邊形
第一組解	1	3	1	7	1	42
第二組解	1	3	1	8	1	24
第三組解	1	3	1	9	1	18
第四組解	1	3	1	10	1	15
第五組解	1	3	1	5	1	20
第六組解	1	4	1	6	1	12
第七組解	1	3	2	4	1	6
第八組解	2	3	1	4	1	12

經逐一檢驗，只有第六組及第七組解滿足 (3) 式，也就是說，我們用三種正多邊形以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖案」，只有二類，共 2 個圖形，如圖 4-2-2-2 之 g, h 所示。

我們最後探討用四種 (以上) 正多邊形是否能以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」？因為由四種圖形過同一頂點的內角總和至少為 $60^\circ+90^\circ+108^\circ+120^\circ=378^\circ$ ，已超過一個周角 360° ，即四種 (以上) 正多邊形是無法以半正則嵌鑲方式得到「勻稱連續圖案」。

我們觀察前述的 (3) 式和 (4) 式，它們可以寫成 $x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) = 1$ 及

$x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) + z \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) = 1$ 的形式，也就是說，因為正 n 邊形的每一個內角為 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \cdot 360^\circ$ ，所以欲嵌鑲得到「勻稱連續圖形」，就須要滿足等式

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right)}_{x_1 \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right)}_{x_2 \text{ 個}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_p}\right)}_{x_p \text{ 個}} = 1$$

這樣就是 $x_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + \dots + x_p \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_p}\right) = 1$ 的形式了。如此一來，我們

就能夠歸納成如下的定理。

定理：若過一個頂點使用 p 種正多邊形 (共有 x_1 個正 n_1 邊形、 x_2 個正 n_2 邊形、...、 x_p

個正 n_p 邊形，且 $n_1 < n_2 < \dots < n_p$) 而能以半正則嵌鑲得到「勻稱連續圖形」，則

正整數 $p, n_1, n_2, \dots, n_p, x_1, x_2, \dots, x_p$ 滿足下列等式

$$x_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} \right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2} \right) + \dots + x_p \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_p} \right) = 1 \quad \blacksquare$$

當然，以上所討論的都是用正多邊形為基本圖形的「勻稱連續圖形」，事實上，縱然使用非正多邊形為基本圖形，也可以嵌鑲構成連續圖形。

後記：

今年（九十六學年度）大學入學考試指定科目考試試題（數學乙）就對鋪設地磚命了一道試題，佔了 8 分，題意清楚，沒有計算，是經典的重要觀念理解試題，如果平時在校有機會能透過電腦資訊科技提供視覺上的呈現，加深圖形印象的關係，相信這一道試題應該是十拿九穩的。該試題如下：

假設地面是一個可以無限延伸的平面，如果採用形狀大小一致的大理石地磚鋪在地面上，並且要求鋪設時地磚之間緊密連接不留空隙，試問可以採用哪一種形狀的地磚？請選出正確的選項(多選)： Ans: (1), (2), (5)

- (1) 正三角形 (2) 正方形 (3) 圓形 (4) 正五邊形 (5) 正六邊形 ■



4-2-3 利用平移、鏡射、旋轉來嵌鑲連續圖形

一些看似不規則的連續圖形，其實是由簡單的圖案利用平移、鏡射或旋轉逐步演化而成的。

從正六邊形開始，在正六邊形的一邊畫一簡單圖形，再將切割下的一小塊向右平移，製造出一個基本圖形，將基本圖形上下左右平移，並塗上顏色，增加變化性，如圖 4-2-3-1 所示。

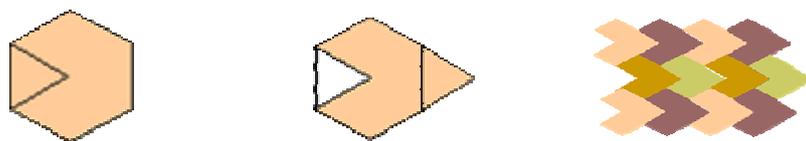


圖 4-2-3-1 正六邊形的平移嵌鑲

從正方形開始，在正方形的一邊畫一簡單圖形，再將切割下的一小塊向右平移，製造出一個基本圖形，將基本圖形上下左右平移，並塗上顏色，如圖 4-2-3-2 所示。

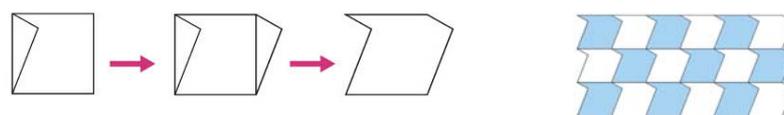


圖 4-2-3-2 正方形的平移嵌鑲

我們除了利用平移之外，也可以利用基本圖案的鏡射來做連續圖形，下面是利用鏡射做出較複雜一點的連續圖形。先設計一個基本圖案，做一次鏡射，再加一個矩形，並且再做一次鏡射，如此繼續向左右作鏡射，即可構成另一個基本圖案，再上、下鏡射或再向左、右平移，即可得到各種平面的連續圖形，如圖 4-2-3-3 所示。

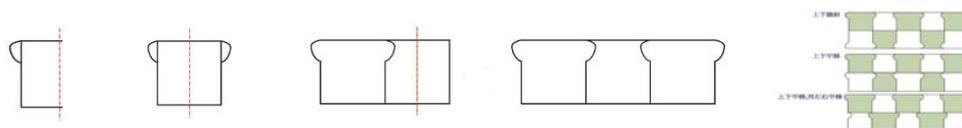


圖 4-2-3-3 利用鏡射嵌鑲

亦可以利用旋轉來嵌鑲成連續圖形，如圖 4-2-3-4 所示。

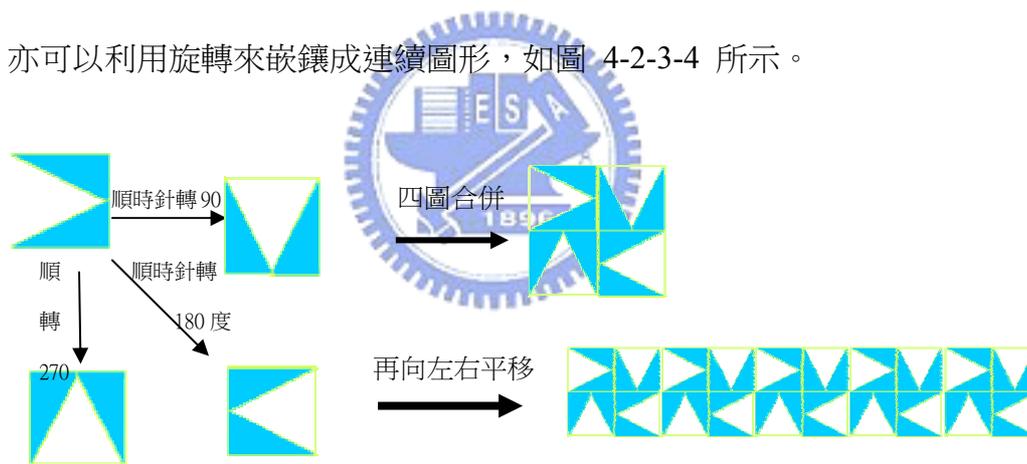


圖 4-2-3-4 利用旋轉嵌鑲

4-2-4 電腦科技處理連續圖形

國立交通大學陳明璋教授所帶領的研發團隊，利用 Microsoft PowerPoint 系統平台，設計了一個數學簡報的概念架構系統“MathPS”(MathPS 系統網站：<http://140.113.116.71/index.php>)，在該平台上建構數學教材的編輯及課堂授課的環境。因 Microsoft PowerPoint 系統的繪圖功能，缺乏數學的構圖能力，且無法處理複雜的構圖，其動畫功能雖豐富，但稍嫌複雜不易操作，缺乏課堂互動所需要功能，故 MathPS

乃結合數學教材多元呈現之特性、編輯大量資訊的方法論、及簡報系統本身的功能所完成。

MathPS 系統利用三個重要的概念法則：「定位法則」(*Positioning*)、「複製法則」(*Duplication*)及「雕琢式建構法則」(*Deconstruction*)。「定位法則」是讓使用者達到「模糊操作，精準定位」的需求；「複製法則」可以讓使用者建構複雜的構圖，如碎形，視覺設計等；「雕琢式建構法則」是以解建構取代逐一建構。視覺構圖法(如圖 5-1)，就是這系統所研發處理大量資訊的定位方法及複製法則所呈現的效果。其中「複製法則」運用自我相似圖(*Self-similarity*)之研究概念，陳教授以 MathPS 系統自創「定線複製法則」(*Line-based Duplication Method*)的繪圖方法，其主要結構是 *base-line, pattern* 及 *initiator, pattern* 包含 *pattern elements, base-line* 及各 *pattern element* 的關係，就是 *similar transformations*。此一方法提供的轉換(*Transformations*)包含平移(*Translation*)，旋轉(*Rotation*)，等比縮放(*Isotropic scaling*)及映射(*Reflection*)。如此，我們可以運用簡單的構圖表示 *similarity transforms*，而不必描述轉換所需要的平移座標、旋轉角度及縮放比例，此一方法目前收錄於 *Structural Self-clone Method* 系列之中，它突破以滑鼠作為定位工具的限制。此一功能加入疊代概念之後，成為一個新的二維自我相似圖(*Self-similarity*)的構圖方法，包含碎型幾何、*Julia set, artificial nature, Attractor*。陳教授對處理連續圖形的部分內容呈現在：<http://www.cc.nctu.edu.tw/~mjchen/MathPS/index.htm>，如圖 4-2-3-5 所示。

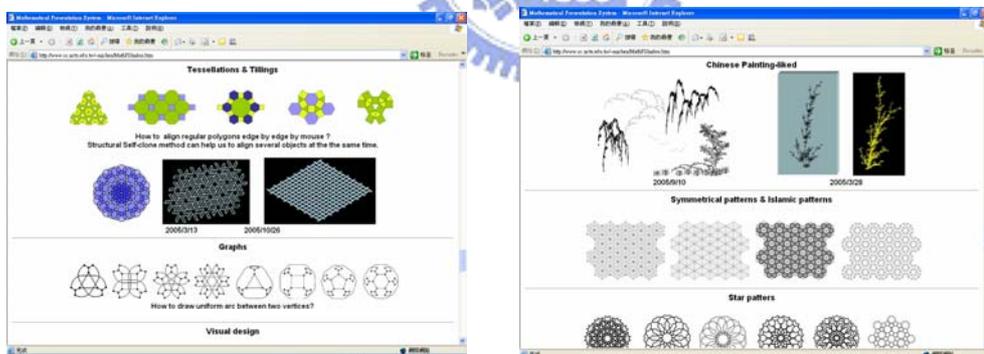


圖 4-2-3-5 利用 MathPS 處理連續圖形的網站作品

4-3 高中數學問題的立體動態之操作探究

---以 Cabri-3D 為工具

牽涉到三維空間的立體概念及思維，對高中學生而言往往像是瞎子摸象，只能知其一而無法窺得全貌，這當中最重要的原因之一就是因為缺少了直觀感知與操作認知。因此，我們運用 Cabri-3D 立體幾何軟體所提供的操作構建功能，製作了幾個基本的操作模擬，讓整個立體空間探究學習的過程有了很大的視覺呈現效果，以幫助學習認知較慢的學生透過對實際模型的操作和觀察，來初步認識空間幾何體的結構特徵，並能領略到數學的幾何之美以及在數學探究中的思維活動。

4-3-1 前言

多年來站在第一線的教學經驗裡，我們體認到大部分的高中學生，對立體空間的幾何體單元，常常是無法想像授課老師在講臺上口沫橫飛的內容，因為牽涉到三維空間的立體概念及思維，對他們而言往往像是瞎子摸象，只能知其一而無法窺得全貌。這當中最重要的原因之一就是因為沒有立體圖形，很難憑空想像，缺少了直觀感知與操作認知，因此，身為教師的我們應該提供實用的實物模型或利用電腦軟體的呈現，幫助學生透過對實際模型的操作和觀察，來初步認識空間幾何體的結構特徵，圖像的觀察與探知。我們運用 Cabri-3D 立體幾何軟體所提供的操作構建功能，讓整個立體空間探究學習的過程有了很大的視覺呈現效果。

我們以一般學生的難懂之處，以 Cabri-3D 在立體環境下的開發教學活動素材，用動態立體幾何的方式，模擬呈現立體圖形，協助學生培養清楚的空間概念，化解學生的疑惑，也讓學習認知較慢的學生也能有機會嘗試數學研究的過程並縮短學習上的差距。另一方面，立體空間相關的觀念也經常在大學入學考試時出現考題，因此如何使用現代資訊技術展示空間圖形，先行加強理解和掌握圖形幾何性質，提高學生的幾何直觀能力，進一步能透過觀察現象而提出數學問題的猜測或延伸推廣，再進行驗證。讓學生在起跑點上已比他人先捷足先登一步，這就是本章節立論之所在。本文僅著重在高中數學相關部分稍加探討，如有興趣鑽研更深者可在清大全任重教授的網站上找到許多寶貴的參考資料。

本章主要利用立體動態幾何軟體 Cabri-3D 來輔助高中數學立體幾何的教學課程，挑選課程中幾個重要觀念，作實例分析與設計操作的教學素材之開發。分別在

4-3-2 節以學生閱讀相關文章所面臨難解之處，對「四面體與平面的截痕形狀」的討論探究，並予以增加若干動態圖說；在 4-3-3 節以大考試題的範例圖形解析再出發，延伸動態探究「正多面體的稜邊與球面之交點個數」；在 4-3-4 節針對課本內尤拉多面體定理的靜態文字與圖片的證明，以動態立體幾何的方式模擬呈現書中所載之敘述，期望能夠幫助學生在學習立體觀念時不再瞎子摸象，並可以協助學生培養清楚的空間概念。

4-3-2 四面體與平面的截痕形狀

「在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究」(蔡政樺，2006) 與「資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究」(李吉彬，2006)，這兩本論文對現代資訊科技融入高中數學教學和探索的學習，對教師與學生都有著「醍醐灌頂」之效，因此我在學校對某一些特別喜愛數學活動的高一學生，都會介紹(要求)他們閱讀討論來增益實用的現代數學科技，以提昇數學知識的能見度。

其中前者在 4-2 節是討論一正立方體被以主對角線為法線的平面所截，以及以主對角線為法線的平面截長方體的數學探究，主要是針對截痕區域面積有了進一步的數學函數式的結論；而後者在 5-6 節是討論四面體體積的平分，其中一開始就提到：「割過四面體且不過頂點的平面有兩種可能，把四面體的四個頂點分成(1)一邊一個，另一邊三個(以下稱之為1-3分)；(2)兩邊各兩個(以下稱之為2-2分)」。因為文章內有些圖像並未列印出來(這與兩位作者所任教學校的學生皆屬高程度有關)，當同學在討論過程中，無法立即瞭解文章的前因後果，(例如同學問：如果正立方體並非是被以主對角線為法線的平面所截是什麼情形？又四面體被一平面所截的截痕又是什麼情形？)，甚至對立體空間的相關題材內容倍覺難懂，心存畏怯。

所以我們以一般學生的難懂之處，予以增加若干圖說，並也運用 Cabri-3D 立體幾何軟體，製作幾個基本的操作模擬呈現立體效果，來化解學生的疑惑，也讓學習認知較慢的學生也能有機會嘗試數學研究的過程並縮短學習上的差距。另一方面，大學入學考試與立體空間相關的觀念亦經常相伴出現，使用現代資訊技術展示空間圖形，先加強理解和掌握圖形幾何性質，提高學生的幾何直觀能力，進一步能透過觀察現象而提出數學問題的猜測或延伸推廣，再進行驗證，讓學生領略到數學的幾何之美以及辨證法在數學探究中的體現。

我們先看看幾題大學入學考試與立體空間相關的題目，八十八年學測單選第 3 題：「一正立方體，A, B, C 分別為所在的邊之中點，通過 A, B, C 三點的平面與此立方體表面相截，問何者為其截痕的形狀？」；九十三指定考科數學乙的多選第 5 題：「在

空間中，一平面與一正方體相截，若在平面的兩側各有正立方體的 4 個頂點，則其截面的形狀可能是哪種圖形？」。因此我們如“題”炮製，也設計了兩個問題供學生思考：

其一、

1. 「一正立方體被以主對角線為法線的平面所截之截痕面是什麼情形？」
2. 「一正立方體被任意一平面所截的截痕面是什麼情形？」

第 1 題：

我們製作的電腦操作模擬呈現的立體動態，其截痕面可以是三角形或六邊形，如圖 4-3-2-1 所示。

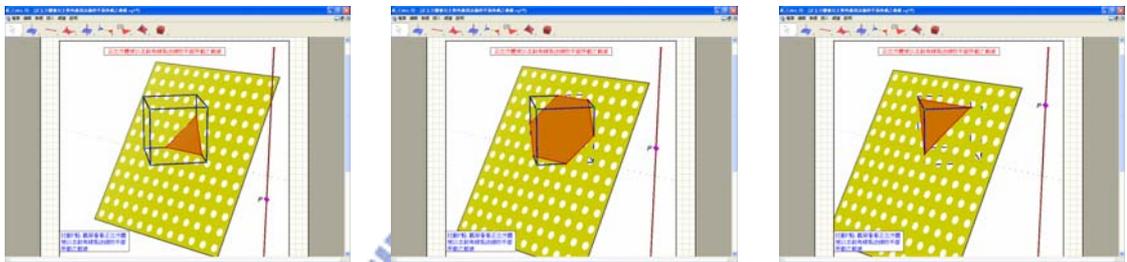


圖 4-3-2-1 正立方體被以主對角線為法線的平面所截之截痕面

第 2 題：

我們製作的電腦操作模擬呈現的立體動態，其截痕面可以是第 1 題中的正三角形、仿正六邊形 (被以主對角線為法線的平面所截)；或為任意三角形、平行四邊形、任意四邊形、任意五邊形以及任意六邊形 (被非以主對角線為法線的平面所截)，如圖 4-3-2-2 ~ 圖 4-3-2-7 所示。

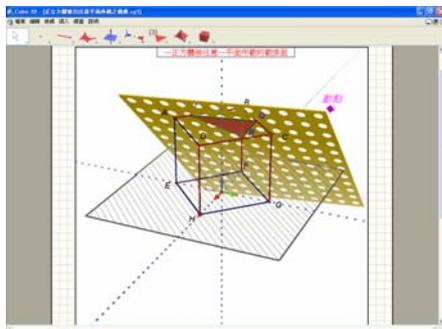


圖 4-3-2-2 平面截正立方體的截痕為任意三角形

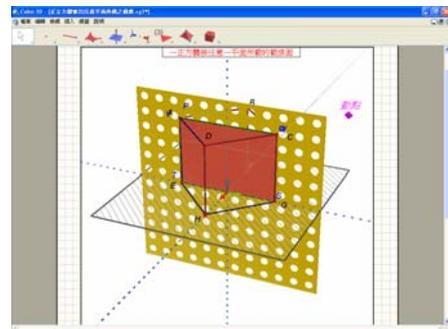


圖 4-3-2-3 平面截正立方體的截痕為平行四邊形(1)

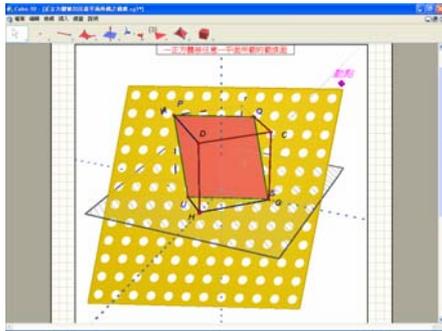


圖 4-3-2-4 平面截正立方體的
截痕為平行四邊形(2)

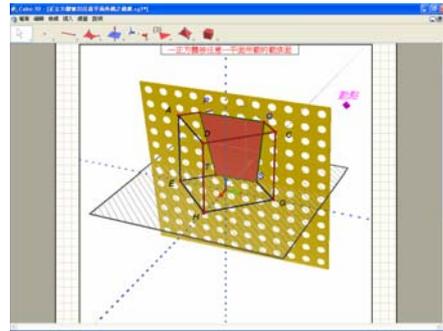


圖 4-3-2-5 平面截正立方體的
截痕為任意四邊形

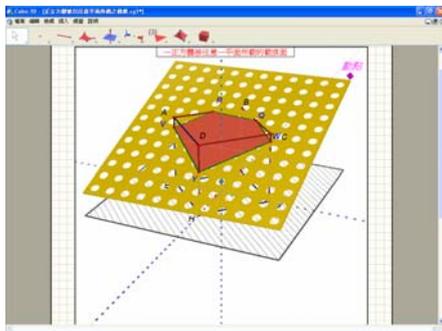


圖 4-3-2-6 平面截正立方體的
截痕為任意五邊形

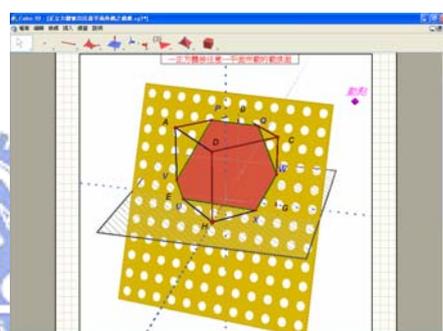


圖 4-3-2-7 平面截正立方體的
截痕為任意六邊形

其二、

問題：請作出任意四面體被一平面所截的截面，並且對於在不同的條件下所作出的截面形狀進行討論。

探究：我們利用電腦操作模擬所呈現的立體動態及數學上的討論過程如下：

1. 由於四面體只有 4 個面，因此它的截面最多能有 4 條邊，所以四面體的截面只能為三角形或四邊形。
2. 作一個三角形形狀的截面是容易的，如過四面體 $ABCD$ 的稜 AB, AC, AD 上的點 M, N, P 的截面便是 $\triangle MNP$ ，如圖 4-3-2-8 所示。
3. 若在四面體的稜 AB, AC 上分別取點 M, N ，另一點 P 取在稜 CD 上，那麼截面 MNP 應是四邊形，設為 $MNPQ$ ， Q 是稜 BD 上的點， Q 點位

置如何取定呢？如果在 BD 上任取，那麼所作截面圖可能是不正確的，因為 M, N, P, Q 這四點未必會共面 (如圖 4-3-2-9 所示)，「這是學生最容易疏忽、錯誤的地方」。正確的作法是，延長 MN 與 BC 的延長線交於 T ，連結 TP 並延長，使得交 BD 於 Q ，則四邊形 $MNPQ$ 即為所求 (如圖 4-3-2-10 所示)。

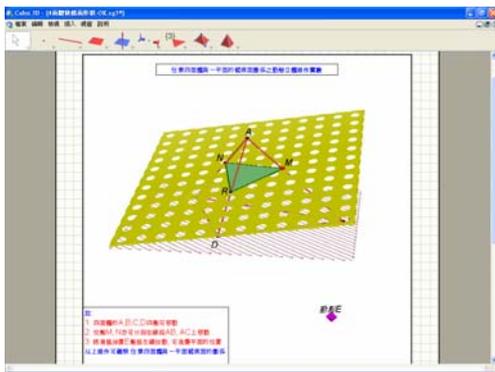


圖 4-3-2-8 平面截四面體的
截痕為三角形

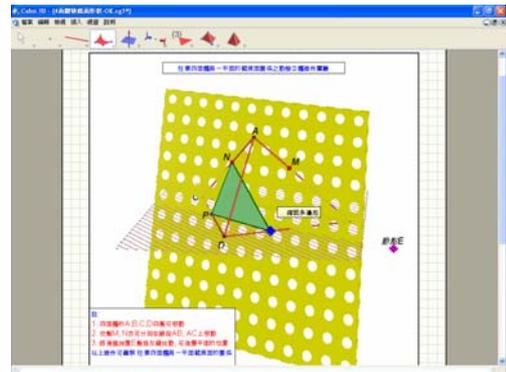


圖 4-3-2-9 平面截四面體的
截痕不存在(不共面)

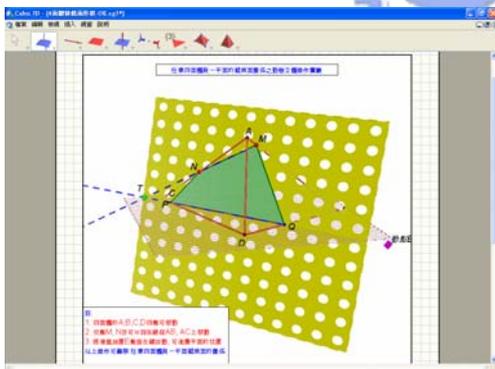


圖 4-3-2-10 平面截四面體的
截痕為四邊形

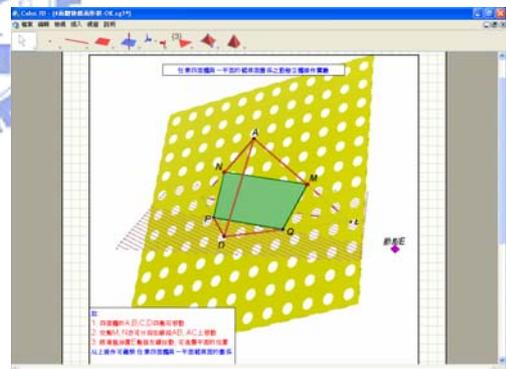


圖 4-3-2-11 平面截四面體的
截痕為梯形

4. 另外在特殊情況下，若 $MN \parallel BC$ ，設截面與平面 BCD 的交線為 PQ ，則 $PQ \parallel BC$ ， PQ 交 BD 於 Q ，這四邊形 $MNPQ$ 即為所求。
5. 當 NP 不平行於 AD 時， $MNPQ$ 是梯形 (如圖 4-3-2-11 所示)；當 $NP \parallel AD$ 時， $MNPQ$ 是平行四邊形 (如圖 4-3-2-12 所示)。

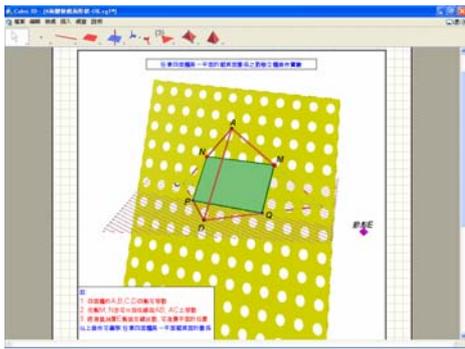


圖 4-3-2-12 平面截四面體的
截痕為平行四邊形

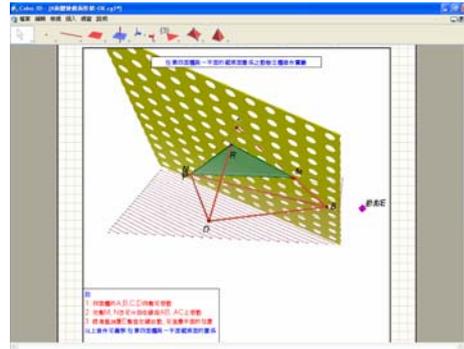


圖 4-3-2-13 平面恰過四面體一頂點
截痕為三角形

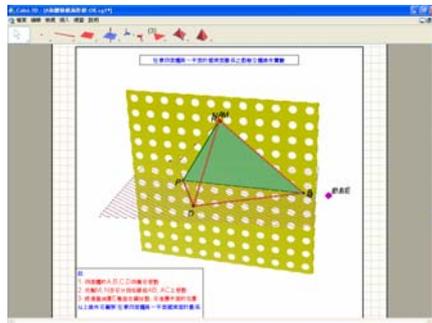


圖 4-3-2-14 平面恰過四面體兩頂點
截痕為三角形

最後，我們整理歸納如下的結論：

1. 截面不通過四面體的任何頂點時：
 - (1) 當截面與四面體的 3 條稜 (有同一頂點) 有公共點，則截面為三角形，如圖 4-3-2-8 所示。
 - (2) 當截面與四面體的 4 條稜有公共點，則截面為四邊形，如圖 4-3-2-10 ~ 12 所示。
2. 截面通過且僅過四面體的一個頂點，則截面為三角形，如圖 4-3-2-13 所示。
3. 截面通過且僅過四面體的兩個頂點，則截面為三角形，如圖 4-3-2-14 所示。

4-3-3 正多面體的稜邊與球面之交點個數

這是我們另一個感興趣的問題。因為在九十年大學入學考試指定考科數甲的單選第 3 題：「設一球之球心與一正立方體之中心重合，考慮球面與正立方體所有邊之交點，則交點的個數不可能是 (A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24 ?」。

這一個基本的立體幾何考題，完成沒有計算的問題，如果沒有拿到分數豈不是會相當懊悔嗎？但是根據多年的教學經驗得知，若非老師在課堂上先提示想法或直接解說，大多數自然組的學生可不見得那麼有把握能答對的，更何況是讀社會組的學生要來作答就顯的有點吃力了。

其實，若是教師在平時能夠提供實物模型或電腦軟體的環境，使得學生有機會透過數學動態幾何軟體來動手操作呈現空間幾何體的模擬，進一步掌握空間圖形的方法、技能及思維，就可以幫助學生逐步形成空間的想像能力。而上題在 Cabri-3D 環境下，我們假設正立方體的稜長為 4，將球的半徑 R 逐步放大 (如圖4-3-3-1 ~ 圖4-3-3-5 所示)，就可知交點數可能為 0, 12, 24, 8 個，故答案選 (D)。

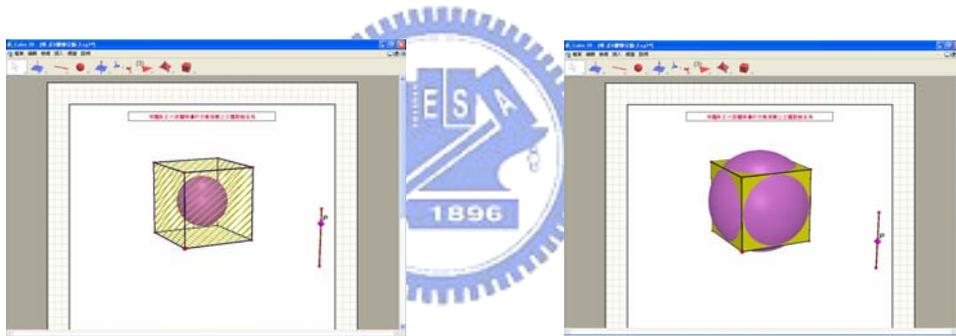


圖 4-3-3-1 正六面體與球面交 0 個交點

圖 4-3-3-2 正六面體與球面交 12 個交點

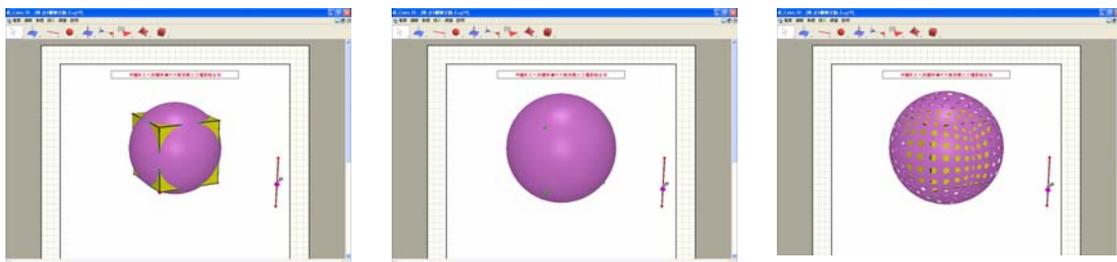


圖 4-3-3-3 正六面體與球面
交 24 個交點

圖 4-3-3-4 正六面體與球面
交 8 個交點

圖 4-3-3-5 正六面體與球面
交 0 個交點

既然大學聯考如此命題，我們也來如“題”炮製一下。原命題為球面與一正立方體所有邊之交點個數？那我們就推廣延伸問問學生：「球面與一正多面體之所有稜邊

交點個數，分別有那些情形？」。

我們知道正多面體恰只有五種，設正多面體的稜長皆為 4 單位長，球的半徑為 R ，透過數學方法的計算可以得出，球的半徑為多少之時其與各正多面體的交點個數，其結果如表 4-3-3-1 所示。

表 4-3-3-1 正多面體稜長為 4 的相關幾何量

	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
球在內部	$0 < R < \sqrt{2}$	$0 < R < 2\sqrt{2}$	$0 < R < 2$	$0 < R < \frac{5-\sqrt{5}}{5}$	$0 < R < \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3}$
	0 個交點	0 個交點	0 個交點	0 個交點	0 個交點
球與稜邊相切	$R = \sqrt{2}$	$R = 2\sqrt{2}$	$R = 2$	$R = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$	$R = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3}$
	6 個交點	12 個交點	12 個交點	30 個交點	30 個交點
球與稜邊各交 2 點	$\sqrt{2} < R < \sqrt{6}$	$2\sqrt{2} < R < 2\sqrt{3}$	$2 < R < 2\sqrt{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{5} < R < \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3} < R < \sqrt{10+2\sqrt{5}}$
	12 個交點	24 個交點	24 個交點	60 個交點	60 個交點
球與頂點相接	$R = \sqrt{6}$	$R = 2\sqrt{3}$	$R = 2\sqrt{2}$	$R = \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$	$R = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$
	4 個交點	8 個交點	6 個交點	20 個交點	12 個交點
正多面體在球內部	$R > \sqrt{6}$	$R > 2\sqrt{3}$	$R > 2\sqrt{2}$	$R > \sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$	$R > \sqrt{10+2\sqrt{5}}$
	0 個交點	0 個交點	0 個交點	0 個交點	0 個交點
內切球半徑	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{3}$
外接球半徑	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
二面角	$2\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\tan^{-1}\sqrt{2}$	$2\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$2\tan^{-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

同樣地以 Cabri-3D 為工具，電腦操作模擬將球的半徑逐步放大，就可以知道其交點個數分別為何了。我們參考「在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究」(蔡政權, 2006) 在 4-1-2 節所討論 Cabri-3D 的基本指令，發現上述文章是以 Cabri-3D 第一版為介紹說明，而現在有了中文升級版，所以一些功能會更加方便 (例如說，原本欲製作在底面圓內接正三、四、五、六、八、十、十二邊形，尚且須要幾個步驟方可完成，然而後者已有指令選項功能可以直接使用的)，但是這種進步卻也極容易造成使用者對基本尺規作圖的原理更加地生疏了。

現在分別展示我們製作的電腦操作模擬動態圖 (正六面體已展示如上，不再贅述)，其中正四面體和正八面體均是以 Cabri-3D 第一版，按部就班製作 (如圖 4-3-3-6 與 圖 4-3-3-11 所示)，而正十二面體和正二十面體皆以 Cabri-3D 中文升級版直接使用現成的指令完成。兩相比較就立刻知道速度上著實快得很多。

茲說明如下：

在 Cabri-3D 環境下，移動 P 點將球的半徑逐步放大，就可觀察知道其交點個數，並能推得結論。



1. 球面與正四面體的稜邊之交點個數可能為 0, 6, 12, 4 個，如圖 4-3-3-7 ~ 10 所示。

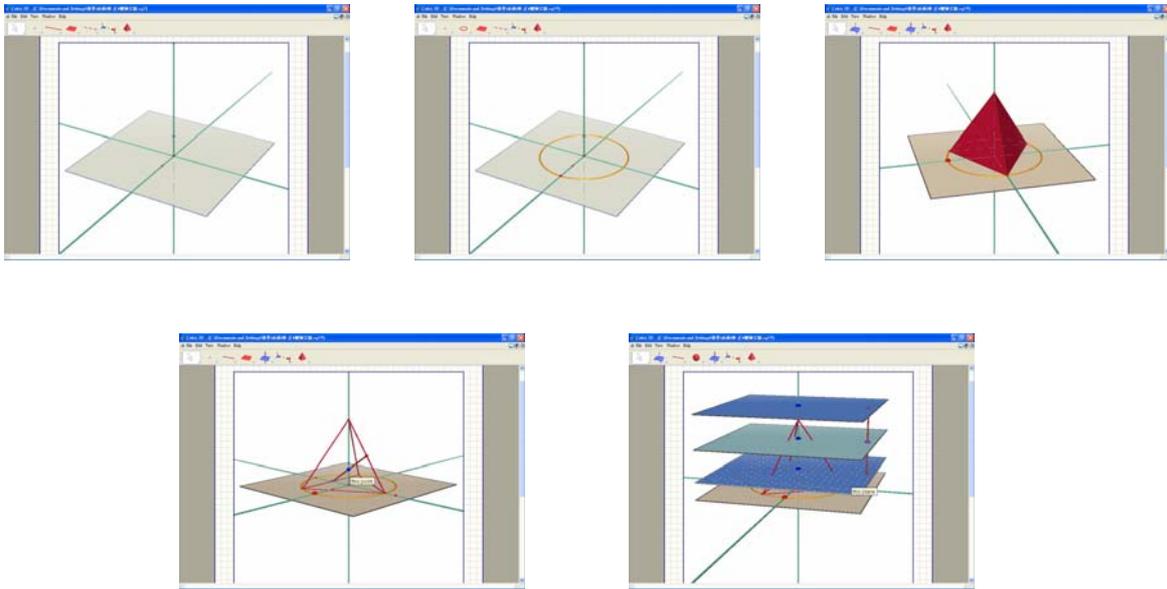


圖 4-3-3-6 正四面體與球面相交的製作步驟

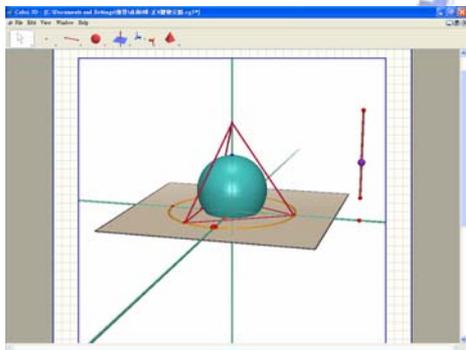


圖 4-3-3-7 正四面體與球面交 0 個交點

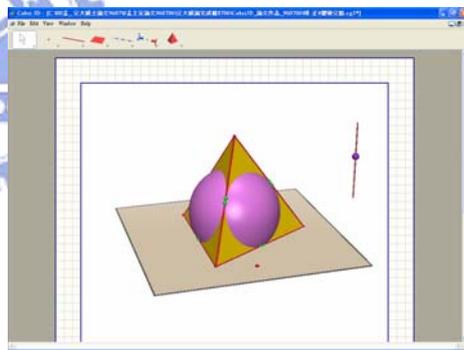


圖 4-3-3-8 正四面體與球面交 6 個交點

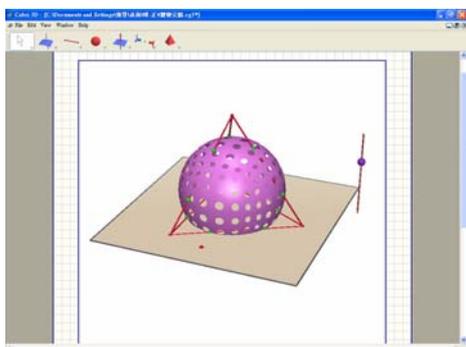


圖 4-3-3-9 正四面體與球面交 12 個交點

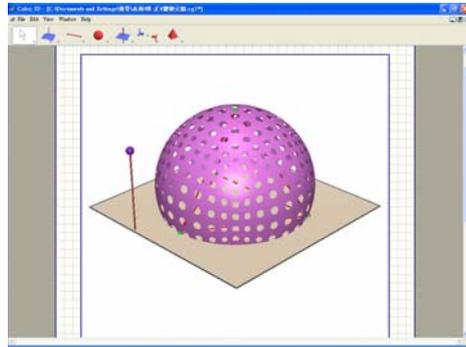


圖 4-3-3-10 正四面體與球面交 4 個交點

2. 球面與正八面體的稜邊之交點個數可能為 0, 12, 24, 6 個，如圖4-3-3-12 ~ 15所示。

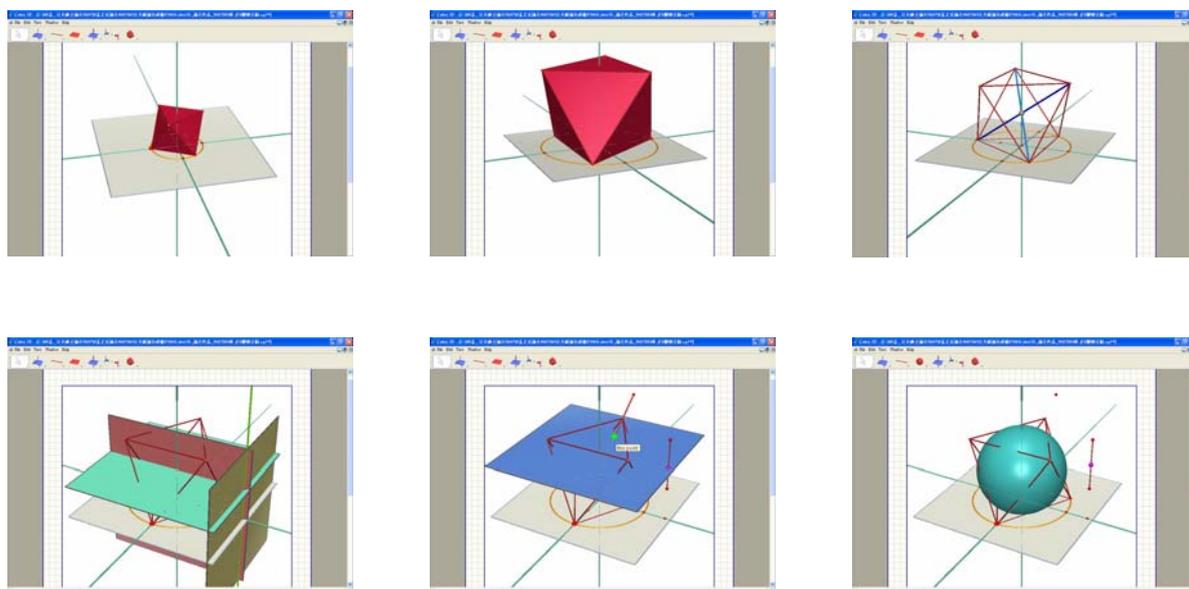


圖 4-3-3-11 正八面體與球面相交的製作步驟

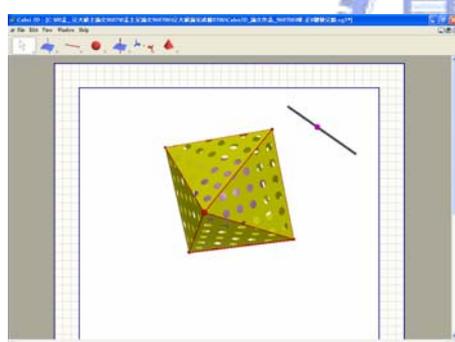


圖 4-3-3-12 正八面體與球面交 0 個交點

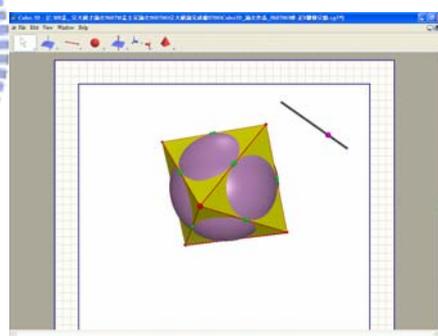


圖 4-3-3-13 正八面體與球面交 12 個交點

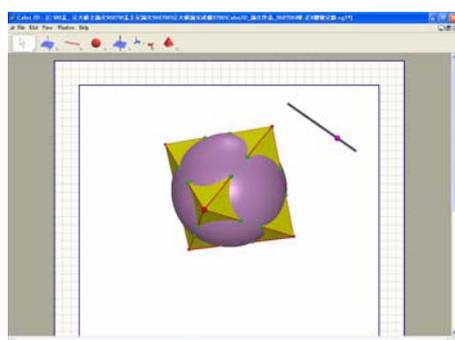


圖 4-3-3-14 正八面體與球面交 24 個交點

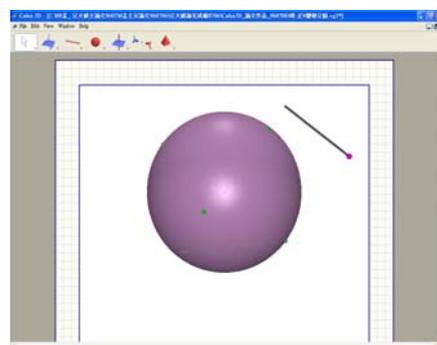


圖 4-3-3-15 正八面體與球面交 6 個交點

3. 球面與正十二面體的稜邊之交點個數可為 0, 30, 60, 20 個，如圖4-3-3-16~19所示。

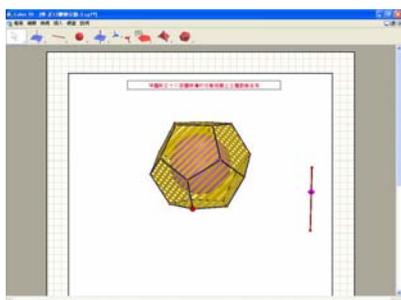


圖 4-3-3-16 正十二面體與球面交 0 個交點

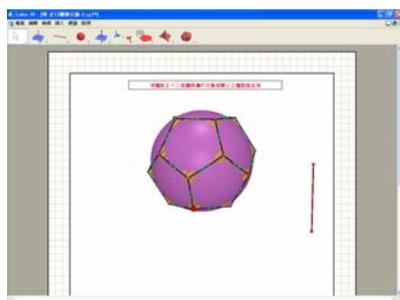


圖 4-3-3-17 正八面體與球面交 30 個交點

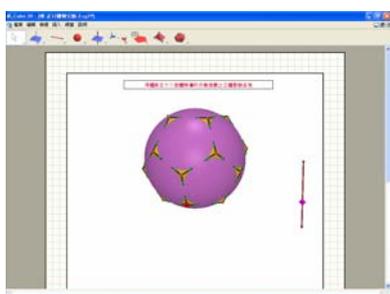


圖 4-3-3-19 正十二面體與球面交 60 個交點

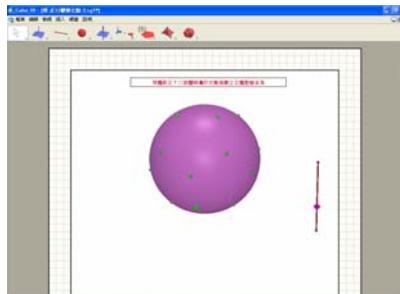


圖 4-3-3-19 正十二面體與球面交 20 個交點

4. 球面與正二十面體的稜邊之交點個數可為0, 30, 60, 12 個，如圖4-3-3-20~23 所示。

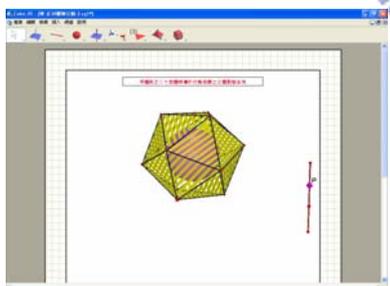


圖 4-3-3-20 正二十面體與球面交 0 個交點

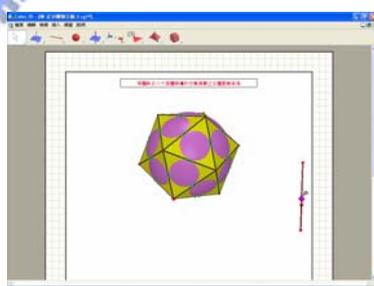


圖 4-3-3-21 正二十面體與球面交 30 個交點

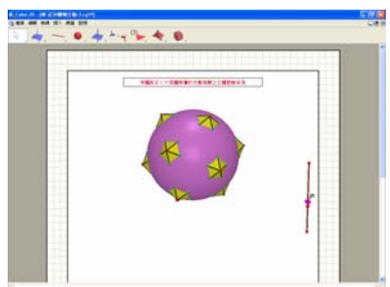


圖 4-3-3-22 正二十面體與球面交 60 個交點

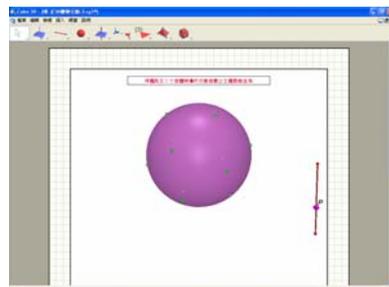


圖 4-3-3-23 正二十面體與球面交 12 個交點

4-3-4 歐拉多面體定理的投影證法

著名數學家歐拉在空間幾何體中，對凸多面體進行了研究，發現了多面體的頂點數 V ，面數 F ，稜數 E 之間存在著一種特有且美妙的規律：「頂點數+面數-稜數=2」，即滿足 $V+F-E=2$ 。今天當我們在教授這個單元時，總是想讓學生也沿著當年歐拉的思潮前進，來一趟「多面體歐拉定理的發現」之旅的數學探究活動，引導學生通過觀察，進行猜想與驗證猜想，透過一系列的思維活動，讓學生能夠主動地獲取知識，理解數學的思想方法和思維方式，並引導學生體會發現規律的過程，瞭解教學的實驗性和探索性，以增加培養學生的創新精神和創造能力。

歐拉多面體定理的發現之證明過程中，在教課書上寫著這麼一段話：「歐拉研究多面體有一種特別有創意的辦法，那就是假設它的表面是用橡膠薄膜做成的，然後充氣，在連續變形且不破裂的前提下，把平面變成了曲面」，像這樣用一種不得撕破或粘連的材料（如橡膠薄膜）所做成的可隨意變形之圖形，並研究這種變形過程中的不變性質，就是多面體拓撲變形的基本概念。然而每次講授至此，發現大部分高中學生心中總是掀起一波波的疑惑漣漪，對於老師進一步解釋「觀念上，假設它的表面是橡皮薄膜製成的，可隨意拉伸；方法上將底面剪掉，然後其餘各面拉開鋪平，化為平面圖形，非展開平面圖...」，學生亦早已昏昏欲睡了。

這是因為學生缺乏空間幾何的實際直觀感知與操作認知，以及缺少動態視覺呈現的經驗，針對於此，我們運用 Cabri-3D 立體幾何軟體所提供的視圖構建功能，製作一個簡單又基本的模擬呈現，讓學生能夠體會歐拉公式的證明得益於「多面體的表面都是橡皮薄膜製作的」這一個創新的觀念。

國立交通大學陳明璋教授在一次教師研習會上，曾利用 Power Point 製作了一個立體感觀的動態圖說：「平面三角形的內角和為 π 」。這個呈現效果給我們留下了強烈且深刻的印象，因為它呈現出“三角形的內角和”是不依賴其本身的形狀與大小，並且採取以聖誕老公公駕著雪橇飛上天際向下的鳥瞰視圖，來強調平面幾何圖形具有某些特殊又美妙的性質。我們想：既然二維有此「能耐」，那三維空間的幾何體是否應該也具有某些特殊美妙的性質呢？而且如果我們也可以駕著雪橇飛上天際，來鳥瞰幾何體的視圖，是否也會發現或驗證某些的性質？

想像將多面體投影（壓縮）到它本身的一個底面上，這種投影可以改變多面體的形狀和稜邊長度，但是並不會改變多面體的每一面的邊數，如圖 4-3-4-1 所示（以圖中的任意可拉動的六面體為例），這就像是剪掉一個底面，再將其餘的面拉平使之變為平面圖形的效果。

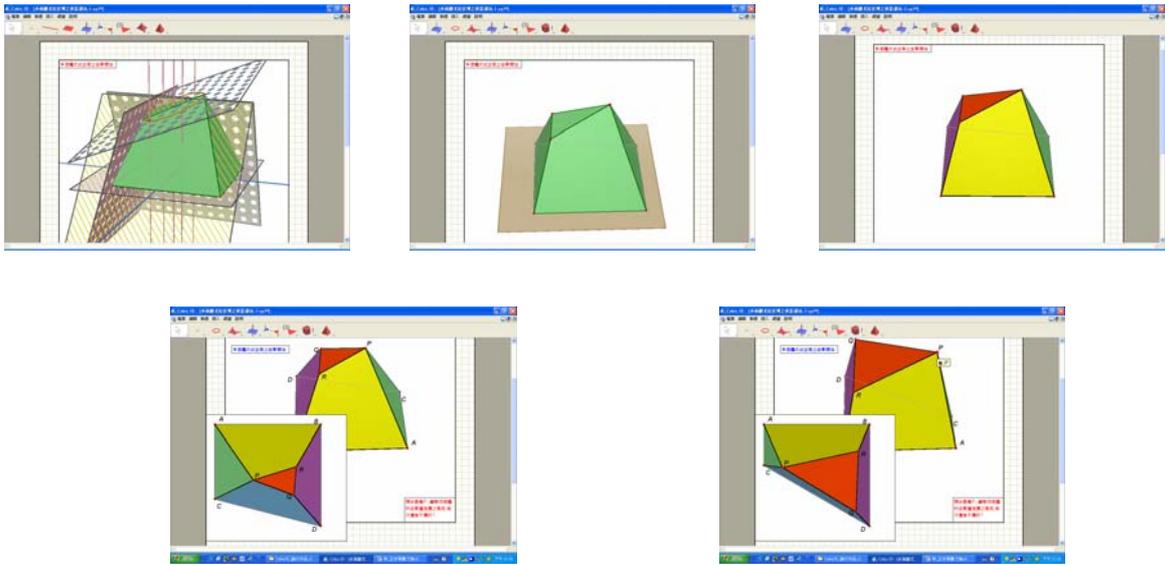


圖 4-3-4-1 尤拉多面體定理在 Cabri-3D 的投影

設一個多面體頂點數 V ，面數 F ，稜數 E 。我們如何求所有面的內角總和？

一方面，在原圖中利用各面求內角總和：設已知多面體的 F 個面分別是邊數為 S_1, S_2, \dots, S_F 的多邊形，那麼多面體各面的內角總和為

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha &= [(S_1-2)\pi + (S_2-2)\pi + \dots + (S_F-2)\pi] \\ &= (S_1 + S_2 + \dots + S_F - 2F)\pi \\ &= (2E - 2F)\pi = (E - F)2\pi \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面，在投影在底面的圖形中（即是拉開的平面圖），利用頂點求內角總和。設投影的底面為一個 n 邊形，其內角和為 $(n-2)\cdot\pi$ ，則所有 V 個頂點中，有 n 個頂點在邊上， $V-n$ 個頂點在底面內部。內部 $V-n$ 個頂點處的內角和為 $(V-n)\cdot 2\pi$ ，邊上的 n 個頂點處的內角和 $(n-2)\cdot\pi$ 。所以，投影多面體各面的內角總和為

$$\Sigma\alpha = (V-n)2\pi + (n-2)\pi + (n-2)\pi = (V-2)2\pi \quad (7)$$

由於投影過程保持原多面體每一個面的內角和不變，所以內角總和亦不變，即由 (6), (7) 得知 $(E-F)2\pi = (V-2)2\pi$

$$\text{故得 } V+F-E=2. \quad \blacksquare$$

以上驗證多面體歐拉公式的另一種證明，配合教課書中所載的探索活動教學，再輔以動態的視覺呈現，讓學生能充分經由實物的體驗，徹底針對歐拉多面體定理的靜態文字與靜態圖片的證明有通盤的瞭解，期望能夠幫助學生在學習立體觀念時不再瞎子摸象，並可以讓學生體驗數學的簡潔之美。

4-4 三角形中的極值點問題之探究

---以鋪路造橋問題為例，以 GSP 為工具

當今的中學數學教育中，問題解決 (*Problem Solving*) 已成為一個學習的焦點。本文是針對思源科技教育基金會所主辦的「2007思源科學創意大賽--數學專題競賽」之題目---「鋪路造橋問題」，(<http://www.seed.org.tw/mainpage.aspx#>)，由高一數理實驗班的五位學生，參與腦力激盪的探究過程，從其中激發學生提出解決問題的觀察、猜想、邏輯推理與檢驗論證，並且學習瞭解到具體操作數學軟體的方法，進而找出解決問題的方法與步驟，又能有所創新和突破，提昇科技競爭能力。由於競賽問題貼近生活情境，沒有標準答案，讓同學可以於訓練解決的過程中建立獨立的思維模式，同時領略數學平易近人的一面，開拓心靈的深度及廣度，並從中體會團隊合作精神。

4-4-1 前言



在國際間，日本已把問題解決納入教學大綱 (學習指導要領)；在美國的中學課程標準中，問題解決已作為“一切數學活動的組成部分，應當成為數學課程的核心”；中國大陸也已把問題解決當做一種教學模式和學習方式。我們希望培養學生們從平常熟悉的事物中做進一步的探討與分析，在了解的過程中建立獨立的思考模型，並能體會團隊合作的重要性，進一步找出解決問題的方法與步驟，提昇科技競爭的能力。

數學探究即數學探究性課程的學習，是指學生圍繞某個數學問題，自主探究、學習的過程。這個過程通常包括：觀察分析數學事實，提出有意義的數學問題，猜測、探求適當的數學結論或規律，給出解釋或證明。中學生往往對自然現象、生活經驗、實驗結果產生好奇心，數學探究與數學建模即是大陸高中數學課程所引入的一種新的學習方式，它有助於學生初步瞭解數學概念和結論產生的過程、理解直觀和嚴謹的關係、與體驗數學研究的開放性思維。

這樣的學習過程有助於培養學生勇於質疑和善於反思的習慣，以及不怕困難的科學精神，並能結合現代化資訊科技融入數學探索的活動，培養學生發現、提出、解決數學問題的能力，益於發展學生的創新意識和實踐能力。

4-4-2 從簡單的定理推論出發

我們要探究的題目是「鋪路造橋問題」，概敘如下：

如果要為甲、乙、丙三城市建造一個公路網，讓甲、乙、丙三城市的人都能互相來往，最經濟的方法是找到『費瑪點』(可利用網路關鍵字搜尋以得更多訊息)，由此點建造三條直線公路分別連接甲、乙、丙三城市。今假設甲、乙、丙三城市分別位於座標 $(0, 17)$, $(26, 14)$, $(18, 0)$ ，但有一條河流將它們隔開。假設公路每公里造價 1000 萬，橋樑每公里造價 5000 萬。試回答下列問題：(如圖 4-4-2-1 所示)

1. 如果河流的兩岸分別是直線 $y=4$ 及 $y=3$ ，試精確計算下圖所示公路網的造價。
2. 在 1 的假設下你能自己設計一個造價更低的公路網嗎？你的造價是多少？
3. 如果河流的兩岸分別是直線 $y=4$ 及 $26y-x-52=0$ (如 $x>52$ 假設河流消失)，你的公路網最低造價是多少？
4. 在 3 的假設下，如果甲、乙、丙三城市在其它座標，你用什麼策略去建造最經濟的公路網。
5. 請以創意及數學深度兩項標準，自行設定三個城市的位置、河流的位置及寬度變化、公路及橋的單位造價，然後建造一個最經濟的公路網

以數學語言描述上述問題為：

假設甲為點 $A(0,17)$ ，乙為點 $B(26,14)$ ，丙為點 $C(18,0)$ ，河岸 $L_1 : y=4$ ，河岸 $L_2 : y=3$ ，河岸 $L_3 : 26y-x-52=0$ ，令 P, Q, R 分別為河岸 L_1, L_2, L_3 與橋樑之交點。

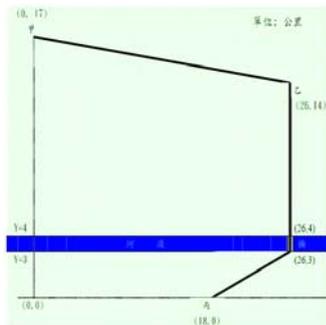


圖 4-4-2-1 鋪路造橋問題的地圖

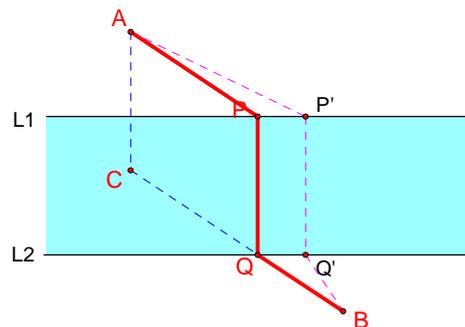


圖 4-4-2-2 平行四邊形的方法

我們認為應先建構其基本的數學定理如下：

1. 平面上相異兩點，以直線的距離最短。
2. 平面上一直線 L 及其線外一點 A ，以點 A 到直線 L 的垂直距離為最短。
(我們稱之為「垂直法」)
3. 平面上，已知一直線 L 上一動點 P ，及其線外相異二點 A 與 B ，欲使 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 為最短，則：(我們稱之為「對稱法」)
 - (1) 當 A, B 兩點在 L 之異側時， $\overline{AP} + \overline{PB}$ 最小為 \overline{AB} 。
 - (2) 當 A, B 兩點在 L 之同側時， $\overline{AP} + \overline{PB}$ 最小為 $\overline{AB'}$ ，其中 B' 點是 B 點關於直線 L 的對稱點。
4. 平面上，已知 A, B 兩點之間有一條平行的河欲在河上建立一座與河岸邊垂直的橋 PQ ，使得 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 為最短，則此時 $\overline{AP} \parallel \overline{QB}$ (如圖 4-4-2-2 所示)。
(我們將這個方法稱為「平行四邊形法」)

(1) 分析：

欲使 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 最小，考慮由 A 到 B 以直線最短，但是因為 \overline{PQ} 垂直兩河岸，可以將兩河岸 (L_1 和 L_2) 重合，即是將 A 點沿著垂直河岸方向平移河寬的距離，使 $\overline{AC} = \overline{PQ}$ ，則四邊形 $APQC$ 為平行四邊形，所以 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{AC} + \overline{CQ} + \overline{QB}$ ，因 \overline{AC} 是定值，故當 $\overline{CQ} + \overline{QB}$ 為一直線時會產生最小值。

(2) 作法：

- a. 過 A 點作 $\overline{AC} \perp L_1$ ，且 $\overline{AC} = d(L_1, L_2)$ 。
- b. 連接 \overline{BC} 交 L_2 於 Q 點及橋的一端點。
- c. 過 Q 作 $\overline{PQ} \perp L_1$ ， P 為垂足則 \overline{PQ} 即為橋應所建立的位置。

(3) 證明：

在 L_1 上任取異於 P 點的 P' 點連接 \overline{AD} ，過 D 點作 $\overline{DE} \perp L_2$ 並交 L_2 於 E 點，連接 \overline{BE} ，所以 $ADEC$ 為平行四邊形。因為 $\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EB} = \overline{CE} + \overline{AC} + \overline{EB} > \overline{BC} + \overline{AC}$ (因為在 $\triangle BCE$ 中 $\overline{CE} + \overline{EB} > \overline{BC}$)

$$= \overline{BQ} + \overline{QC} + \overline{CA} = \overline{BQ} + \overline{AQ} + \overline{PQ}, \text{ 故 } \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} \text{ 為最短} \quad \blacksquare$$

5. 平面上已知不共線相異三點 A, B, C, 欲找一點 P 使 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 為最小, 則此時 P 點即 $\triangle ABC$ 的費瑪點 (fermat point). (我們稱之為「費瑪點法」)

證明：

- (1) 首先考慮 $\triangle ABC$ 的每一個內角均小於 120° 時：(設 P 為 $\triangle ABC$ 內任一點)
- 先將 $\triangle ACP$ 繞 A 點轉 60° 到 $\triangle AC'P'$ 的位置, 此時 $C'P' = CP$, $AP' = AP$, 又 $\angle P'AP = 60^\circ$, 所以 $\triangle P'AP$ 是正三角形, 於是 $PP' = AP$, 因此, $PA + PB + PC = C'P'PB$ 之長。(如圖 4-4-2-3 所示)
 - 因 C' 點和 B 點都是定點, 由 C' 點到 B 點的所有路徑中, 以線段 BC' 最短, 即極值點 P 應在線段 BC' 上, 其位置可以由 $\angle APC' = 60^\circ$ 來確定。
 - 因 $\angle APC' = \angle AP'B = 60^\circ$, $\angle APC = \angle AP'C'$, 於是有 $\angle APC = \angle APB = \angle BPC = 120^\circ$. 也就是說, 當 $\triangle ABC$ 內角皆小於 120° 時, 具有該性質的極值點 P 就稱為是 $\triangle ABC$ 的「費瑪點」, 如圖 4-4-2-4 所示。

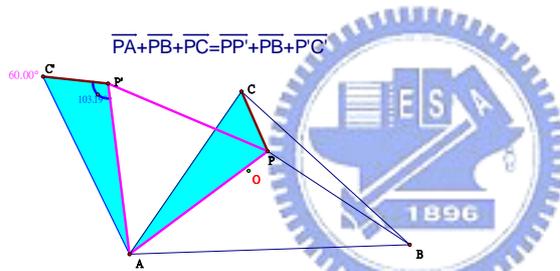


圖 4-4-2-3 $\triangle ACP$ 繞 A 點轉 60°

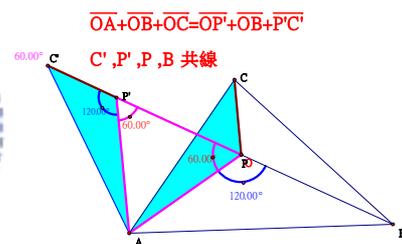


圖 4-4-2-4 $\triangle ABC$ 的費瑪點

- (2) 再考慮 $\triangle ABC$ 中有一個內角 $A \geq 120^\circ$ 時：

設 P 為 $\triangle ABC$ 內任一點, 將 $\triangle APC$ 繞 A 點旋轉, 使 C 轉到 BA 延長線上的 C' 點, P 轉到 P' , 這時的旋轉角度為 $180^\circ - A \leq 60^\circ$, 所以 $PP' \leq AP$, 於是 $PA + PB + PC \geq BP + PP' + P'C' \geq BC' = AB + AC$. “等號成立”的充要條件為 “P 點與 A 點重合”, 即當 $A \geq 120^\circ$ 時, 極值點 P 就是頂點 A.

由此可得結論：當 $\triangle ABC$ 的每一內角均小於 120° 時, 使 $PA + PB + PC$ 最小的極值點是三角形的費瑪點; 當有一個內角 $\geq 120^\circ$ 時, 極值點是最大角的頂點。

4-4-3 動態模擬、建立數學模型

我們利用 GSP 軟體來做動態模擬並從中建立起數學模型。

問題 1

想法：因位置皆為固定，故方法是唯一。

作法： $\overline{AB}=\sqrt{685}$, $\overline{BP}=10$, $\overline{QC}=\sqrt{73} \therefore$ 公路網的造價

$$=1 \times \overline{AB} + 1 \times \overline{BP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 1000\sqrt{685} + 1000\sqrt{73} + 15000 = 49716.51 \text{ (萬)} \blacksquare$$

問題 2

想法 2.1：

因為若橋樑如果是垂直的比較短費用較便宜，再找費瑪點求公路網造價。

作法 2.1：(如圖 4-4-3-1 所示)

(1) 過 C 作一直線垂直 L_1 ，交 L_1 於 P 點且交 L_2 於 Q 點。

(2) 作 $\triangle ABP$ 的費馬點 F，連 \overline{FA} 、 \overline{FB} 、 \overline{FP} 、 \overline{PQ} 、 \overline{QC} 。

\therefore 公路網的造價 $=1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{FP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 42101.36 \text{ (萬元)}$ \blacksquare

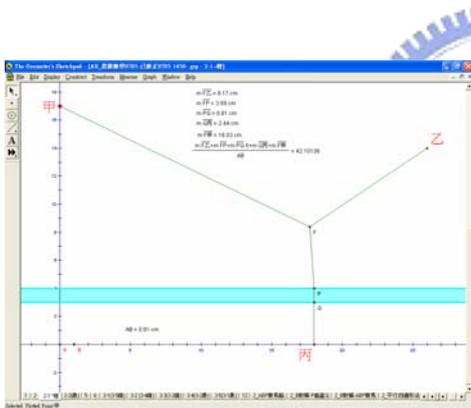


圖 4-4-3-1 作法 2.1 的動態模擬

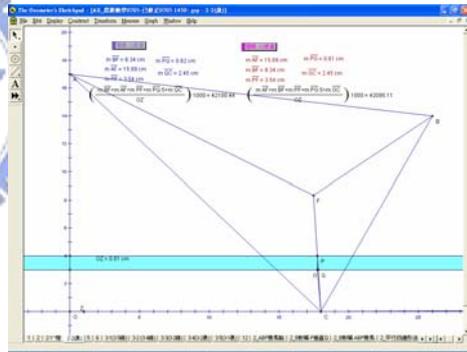


圖 4-4-3-2 作法 2.2 的動態模擬

想法 2.2：

若先不考慮過河造橋之價格，則甲、乙、丙之最短公路網應為 $\triangle ABC$ 之費瑪點算出，但若考慮過河造橋之造價，則作兩河岸的垂直線段，即在過河造橋中作最短距離，則此造價應會較便宜。

作法 2.2：(如圖 4-4-3-2 所示)

(1) 連點 A, B, C 作三角形。作 $\triangle ABC$ 之費瑪點於 F。

(2) 連 \overline{AF} 、 \overline{BF} 、 \overline{CF} ， \overline{CF} 交直線 L_1, L_2 於 P, Q。

(3) 作點 P 與直線 L_2 垂直線，交直線 L_2 於點 G。因為過河造橋之距離不是最短距離，所以作點 E 與直線 L_2 之垂直線交於點 G

(4) 連 \overline{GC} ，度量 \overline{AF} ， \overline{FB} ， \overline{FP} ， \overline{PQ} ， \overline{QC} ， \overline{PG} ， \overline{GC} 之長度。

(5) 但是因為過河造橋的價格為原本路上的 5 倍，所以必須比較 2 種情況：

(i) 若直接以 \overline{CE} 計算

$$(\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{FP} + \overline{PQ} * 5 + \overline{QC}) * 1000 = 42100.44(\text{萬元})。$$

(ii) 在河上造一垂直線段

$$(\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{FP} + \overline{PG} * 5 + \overline{GC}) * 1000 = 42095.11(\text{萬元})。$$

想法 2.3：先求 ABC 的費馬點 F，再以 FC 以河作平行四邊形法。

作法 2.3：(如圖 4-4-3-3 所示)

(1) 做 $\triangle ABC$ 的費馬點 F。

(2) 過 F 作一直線垂直 L_1 ，在此垂線上取一點 S 使 \overline{FS} 等於河寬。

(3) 連 \overline{CS} ，交 L_2 於 Q 點。過 E 作一直線交 L_1 於 P 點。

(4) 連 \overline{FA} ， \overline{FB} ， \overline{FP} ， \overline{PQ} ， \overline{QC} 即為所求。 \therefore 公路網的造價

$$= 1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{FP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 42094.62 (\text{萬元})$$

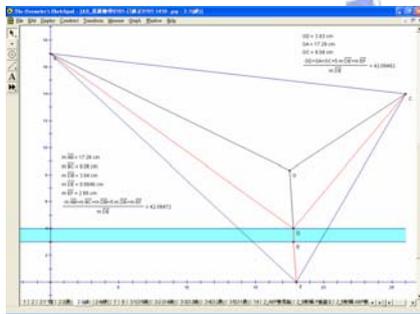


圖 4-4-3-3 作法 2.3 的動態模擬

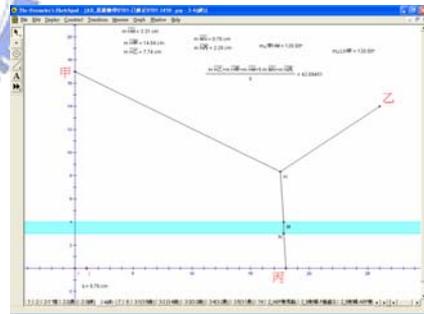


圖 4-4-3-4 作法 2.4 的動態模擬

想法 2.4：費馬點法與平行四邊形法併用。

作法 2.4：(如圖 4-4-3-4 所示)

(1) 取一點 M(18, 1)，做 $\triangle ABM$ 費馬點 F，過 F 作一直線垂直 L_2 ，在此垂線上取一點 S 使 \overline{FS} 等於河寬。

(2) 連 \overline{SC} 交 L_2 於 Q 點，過 Q 作一直線垂直 L_1 且交 L_1 於 P 點。 \therefore 公路網的

$$\text{造價} = 1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{FP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 42094.51(\text{萬元})$$

問題 3

因為垂直距離應是最短距離，但此題有過河造橋較貴的問題，所以我們想了許多方法去嘗試，概述作法及模擬操作如下：

想法 3.1：直接對斜線做垂直上去。

作法 3.1：(如圖 4-4-3-5 所示)

(1) C 點對 L_3 做垂線交 L_3 於 Q 點, 交 L_1 於 P 點, 再作 $\triangle ABP$ 的費瑪點 F.

(2) 連 \overline{AF} , \overline{BF} , \overline{PF} , \overline{PQ} , \overline{QC}

$$\therefore \text{公路網的造價} = 1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{FP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 43344.38 \text{ (萬元)} \quad \blacksquare$$

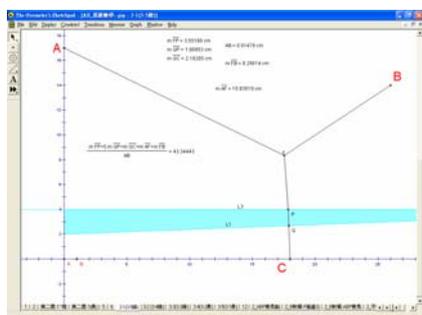


圖 4-4-3-5 作法 3.1 的動態模擬

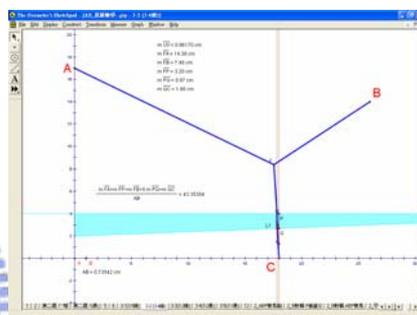


圖 4-4-3-6 作法 3.2 的動態模擬

想法 3.2：利用第二題的平行四邊形之方法試試看。

作法 3.2：(如圖 4-4-3-6 所示)

(1) C 點對 L_3 做垂線交 L_1 於 P 點, 交 L_3 於 Q 點, 將 C 點向上平移 \overline{PR} 距離得 K 點。

(2) 作 $\triangle ABK$ 費馬點 F, 連 \overline{FK} 交 L_3 於 D 點, D 點對 L_3 做垂線交 L_1 於 E.

(3) 連 \overline{AF} , \overline{BF} , \overline{DF} , \overline{DE} , \overline{EC} . \therefore 公路網的造價

$$= 1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{DF} + 5 \times \overline{DE} + 1 \times \overline{EC} = 43353.04 \text{ (萬元)} \quad \blacksquare$$

想法 3.3：做出兩段垂直線，考慮這個特例，看會不會最小。

作法 3.3：(如圖 4-4-3-7 所示)

(1) C 點對 L_3 做垂線交 L_3 於 Q, Q 點對 L_1 做垂線交 L_1 於 P 點。

(2) 作 $\triangle ABP$ 費馬點 F, \therefore 公路網的造價

$$= 1 \times \overline{FA} + 1 \times \overline{FB} + 1 \times \overline{FP} + 5 \times \overline{PQ} + 1 \times \overline{QC} = 43342.89 \text{ (萬元)} \quad \blacksquare$$

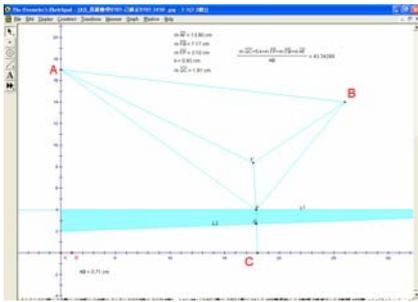


圖 4-4-3-7 作法 3.3 的動態模擬

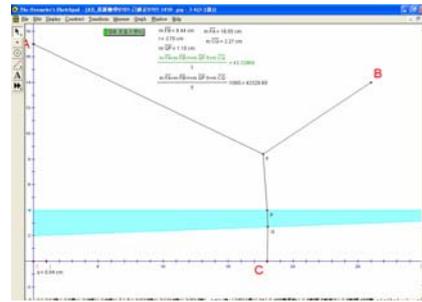


圖 4-4-3-8 作法 3.4 的動態模擬

想法 3.4：

垂直距離應是最短距離，但是這裡有兩條直線，因為作垂直直線 L_3 之過河造橋距離較長且貴，所以作 L_1 之垂直過河較少，但又要考慮 L_1, L_3 之垂直距離較短與直接連接的價格，所以要作比較（但因為後面會比較，得知過河造橋部分作垂直線一定較短，所以以下不作此比較）。

作法 3.4：（如圖 4-4-3-8 所示）

- (1) 作點 C 與直線 L_1 之垂直線，交於點 P，作 $\triangle APB$ 之費瑪點 F。
- (2) 作點 P 與直線 L_3 之垂直線，交於點 Q。（因為若直接連 \overline{CF} 所過河造橋長度太多，所以改作直線 L_3 與點 P 之垂直線，交 L_3 於點 Q）
- (3) 連 \overline{AF} ， \overline{BF} ， \overline{FP} ， \overline{PQ} ， \overline{QC} ， \therefore 公路網的造價

$$= (\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{FP} + 5 \cdot \overline{PQ} + \overline{QC}) * 1000 (\text{萬元}) = 43329.69 (\text{萬元}) \quad \blacksquare$$

想法 3.5：

先找再河之前最便宜的點，並作垂直再選擇經過河之最短距離找到較便宜的點，找到此點後作三角形之費瑪點，應得最便宜的價格。

作法 3.5：（如圖 4-4-3-9 所示）

- (1) 作直線 L_3 與點 C 之垂直線得直線 L_4 ，直線 L_4 與直線 L_1 交於點 D。
- (2) 作點 C 與直線 L_1 垂直線為鏡射軸。而因為在 \overline{CD} 中過河所造橋部分太多，所以選擇跟 \overline{CD} 一樣長且過河造橋線段較少線段。
- (3) 將直線 L_4 鏡射為直線 L_5 ，交 L_1 與 L_3 於點 P, H. 再作 $\triangle AEB$ 的費瑪點 F。
- (4) 作點 P 垂直直線 L_3 之垂直線，交 L_3 於點 Q。
- (5) 但因為河上造橋較貴，所以考慮兩種情況：

(i) 直接以 \overline{CP} 作計算:

作 \overline{CP} 交直線 L_3 於 H, 計算其造價約為 43344.23 萬元。

(ii) 在河上造一垂直線段:

作點 E 與直線 L_3 之垂直線交直線 L_3 於點 Q, 連 \overline{PQ} , \overline{QC} ,

則計算其造價約為 43326.80 萬元

得知 (ii) 在河上造一垂直線段 43326.80 萬元價格較為便宜。 ■

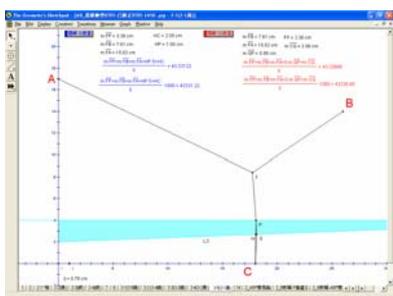


圖 4-4-3-9 作法 3.5 的動態模擬

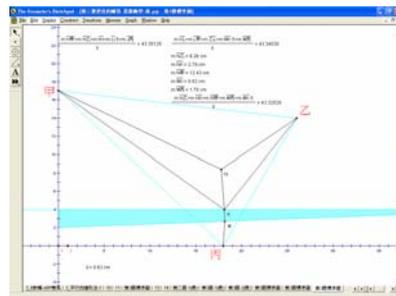


圖 4-4-3-10 作法 3.6 的動態模擬

想法 3.6 :

先以垂直距離作圖, 但若遇到過河造橋處太長時則以其對稱與河岸交點所連的線段, 得到與原連線相同長度的線段, 則可以先得出道河岸前之最短距離, 確定到其最短距離固定後的點在與甲、乙兩點找費瑪點。

作法 3.6 : (如圖 4-4-3-10 所示)

- (1) 作 C 點與 L_3 之垂直線得 L_4 , 作以直線 C 點與 L_1 之垂直線 L_5 為對稱軸, 對稱得直線 L_6 , 直線 L_6 交 L_1 於 P 點, 在作 P 點與 L_3 之垂直線, 交直線 L_3 於 Q 點。
- (2) 在 L_4 上作一點 E 使 $\overline{EP} \parallel \overline{CQ}$, 即平行四邊形 ECQP, 作 $\triangle AEB$ 費瑪點 F_1 。
- (3) 連 $\overline{F_1C}$, 作以直線 L_5 為對稱軸得到直線 L_7 , 交 L_1 於點 G。
- (4) 作 G 點與直線 L_3 之垂直線, 交直線 L_3 於 H 點, 再作 $\triangle AGB$ 之費瑪點 F_2 。
- (5) 連 $\overline{F_2A}$, $\overline{F_2B}$, $\overline{F_2G}$, \overline{GH} , \overline{HC} , \therefore 公路網的造價

$$= (\overline{F_2A} + \overline{F_2B} + \overline{F_2G} + \overline{GH} * 5 + \overline{HC}) * 1000 = 43325.29(\text{萬元}) \quad \blacksquare$$

想法 3.7：(目前為止最便宜)

先以原三角形費瑪點作圖，但若遇到過河造橋處太長時則以其對稱與河岸交點所連的線段，得到與原連線相同長度的線段，則可以先得出道河岸前之最短距離，確定到其最短距離固定後的點在跟甲乙作費瑪點。

作法 3.7：(如圖 4-4-3-11 所示)

- (1) 作 $\triangle ABC$ 費瑪點 F_1 ，連 $\overline{F_1C}$ ，再以 $x=18$ 為對稱軸作對稱得直線 L_4 ，交 L_1 於點 P ，作點 P 與直線 L_3 垂直線交於 Q 點。
- (2) 作 C 點與直線 L_3 之垂線得 L_5 ，連 \overline{QC} ，作一點 D 使 $\overline{QC} \parallel \overline{PD}$ ，作 $\triangle ABD$ 費瑪點 F_2 。
- (3) 連 $\overline{F_2C}$ ，再作以 $x=18$ 為對稱軸對稱得直線 L_6 ，交直線 L_1 於 S ，作點 S 與直線 L_3 之垂直線，交直線 L_3 於 T ，連 \overline{TC} ， \overline{ST} 。
- (4) 作 $\triangle ASB$ 之費瑪點 F_3 ，再連 $\overline{F_3A}$ ， $\overline{F_3B}$ ， $\overline{F_3S}$

$$\therefore \text{公路網造價} = (\overline{F_3A} + \overline{F_3B} + \overline{F_3S} + \overline{ST} * 5 + \overline{TC}) * 1000 = 43325.11(\text{萬元}) \quad \blacksquare$$

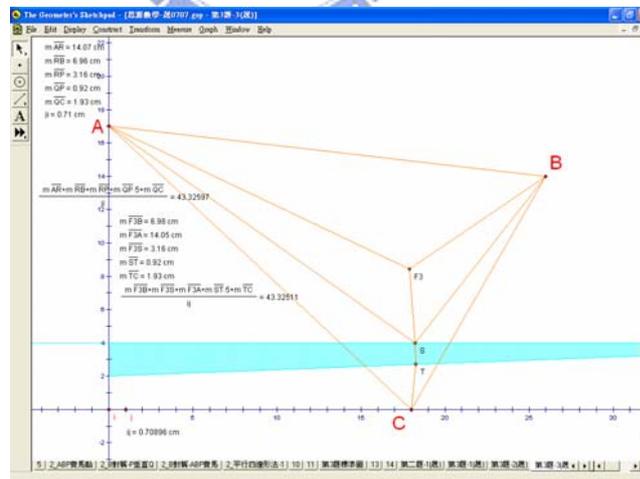


圖 4-4-3-11 作法 3.7 的動態模擬

問題 4 分四種情形討論如下：

第 1 種.

三點 A, B, C 皆在河的上方：作 $\triangle ABC$ 之費瑪點 F, 連 \overline{FA} , \overline{FB} , \overline{FC} .

第 2 種.

兩點 A, B 在河的上方，一點 C 在河的下方：

(以下作法與想法，可以 GSP 作動態模擬後，取其一為最經濟的公路網)。

作法 1：

- (1) 作 $\triangle ABC$ 之費瑪點 F, 連 \overline{FC} , 分別交 L_1 與 L_3 於點 P, Q.
- (2) 可選擇作點 P 與 L_3 之垂直線或點 Q 與 L_1 之垂直線，交於點 D 或 E.
- (3) 連 \overline{FA} , \overline{FB} , \overline{FP} 或 \overline{FE} , \overline{PD} 或 \overline{EQ} , \overline{DC} 或 \overline{QC} .

作法 2：

- (1) 作 $\triangle ABC$ 費瑪點 F, 以 C 點垂直 L_1 為對稱軸對稱得 L_4 , L_4 分別交 L_1 , L_3 於點 P, Q.
- (2) 可選擇作點 P 與 L_3 之垂直線或點 Q 與 L_1 之垂直線，交於點 D 或 E.
- (3) 連 \overline{FA} , \overline{FB} , \overline{FP} 或 \overline{FE} , \overline{PD} 或 \overline{EQ} , \overline{DC} 或 \overline{QC} .

作法 3：

- (1) 一點 A 在河的上方，兩點作 $\triangle ABC$ 之費瑪點 F, 連 \overline{FC} 交 L_1 , L_3 於 P_1 , Q_1 , 或以 C 點垂直 L_1 為對稱軸對稱得 L_4 , L_4 交 L_1 , L_3 於 P_2 , Q_2 .
- (2) 選擇作點 P_1 , P_2 與 L_3 之垂直線或點 Q_1 , Q_2 與 L_1 之垂直線，交於點 D, E 或 F, G, 再利用 $\overline{P_1D}$, $\overline{P_2E}$, $\overline{Q_1F}$, $\overline{Q_2G}$ 作其平行線上作向上平移。
- (3) 平移上的點在與 A、B 作費瑪點 F_1 , 連 $\overline{F_1C}$, 交 L_1 於 P_3 , 作點 P_3 與直線 L_3 於點 Q_3 , 連 $\overline{F_1A}$, $\overline{F_1B}$, $\overline{F_1P_3}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{Q_3C}$.

第 3 種.

一點 A 在河的上方，兩點 B、C 在河的下方：與第 2 種相差不大，作法與上述“作法 1”~“作法 3”相同。

第 4 種.

三點 A, B, C 皆在河的下方：作 $\triangle ABC$ 之費瑪點 F ，連 \overline{FA} ， \overline{FB} ， \overline{FC} 。

問題 5

設三地標輔大 $A(0, 5)$ ，總統府 $B(20, 8)$ ，追風廣場 $C(10, 0)$ 被兩條河（沒有去查河名）隔開（如圖 4-4-3-12 所示，由 Google 搜尋）。假設橋 1 公里造價 5 億，公路 1 公里 1 億，則欲建造一個連通 A, B, C 的公路網最省造價為何？

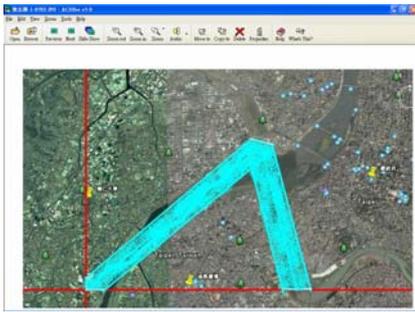


圖 4-4-3-12 三地標位置

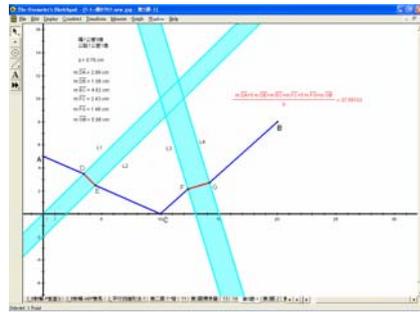


圖 4-4-3-13 問題 5 的動態模擬

我們解決的方法如下：

- (1) 如圖 4-4-3-13 所示，過 A 作一直線垂直 L_2 ，在此垂線上取一點 S 使 \overline{AS} 等於河寬。
- (2) 連 \overline{SC} 交 L_2 於 E 點，過 E 作一直線垂直 L_1 且交 L_1 於 D 點。
- (3) 連 \overline{AD} ， \overline{DE} ， \overline{EC} 即為 A, C 之間最經濟之公路網。
- (4) 同理，作 B, C 之間最經濟之公路網，交 L_3, L_4 於 F, G 兩點。

此公路網即為所求公路造價

$$= 1 \times \overline{AD} + 5 \times \overline{DE} + 1 \times \overline{EC} + 1 \times \overline{CF} + 5 \times \overline{FG} + 1 \times \overline{BG} = 37.55102 \text{ 億元。} \quad \blacksquare$$

4-4-4 結論與相關研究討論及應用

我們從上述若干的想法中，歸納得到欲使公路網最經濟造價的思維方式有四個方向：

1. 費馬點法。
2. 渡河之平行四邊形法。
3. 因為河上建橋費用高，應該設法找垂直兩河岸的架橋地點。
4. 若兩河岸不平行時，可利用對稱觀念盡量往兩河岸較窄的地方找架橋地點。

另一方面，我們將原題目進一步推廣，並自行假設新的問題，如下簡述：

設有四個城市 A, B, C, D 位在一正方形之四頂點，沒有河流，欲建造一個連通 A, B, C, D 的公路網最省造價為何？(設每單位造價均相等)

分析與作法：

我們的分析為若符合要求的聯絡網一定是由直線段組成，我們按照節點數對連絡交通網進行分類。令正方形邊長為 a, 分三種情形討論之：

1. 第一種情形：無節點時，交通網距離的總和=3a. ■
2. 第二種情形：若取一個節點 (如圖 4-4-4-1 所示)，根據三角形兩邊大於第三邊定理得知 $\overline{AP} + \overline{CP} > \overline{AC}$, $\overline{BP} + \overline{DP} > \overline{BD}$, 故正方形兩對角線交點 O 點最短節點，此時交通網距離的總長= $2\sqrt{2} a$. ■

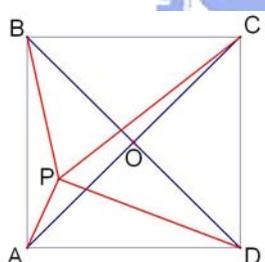


圖 4-4-4-1 取一個節點 O

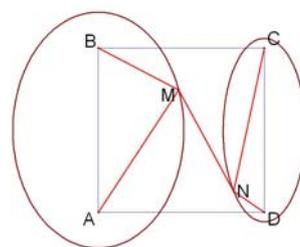


圖 4-4-4-2 取兩個節點 M, N

3. 第三種情形：
 - (1) 若取兩個節點 (如圖 4-4-4-2 所示)，當 $\overline{AM} + \overline{BM}$, $\overline{CN} + \overline{DN}$ 皆保持固定長，則此兩節點 M, N 將分別在以 A, B 及 C, D 為焦點的兩橢圓上移動，此時交通網距離的總和= $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{MN} + \overline{CN} + \overline{DN}$.
 - (2) 因為 $\overline{AM} + \overline{BM}$, $\overline{CN} + \overline{DN}$ 均為定值，所以當 $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{CN} = \overline{DN}$ 時，M, N 兩點距離最短，(如圖 4-4-4-3 所示) 此時交通網距離的總和會比上述的情形還要比較小。

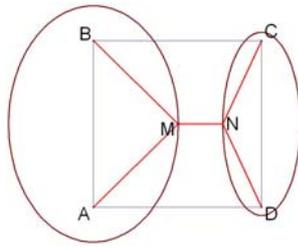


圖 4-4-4-3 當 AM=BM, CN=DN

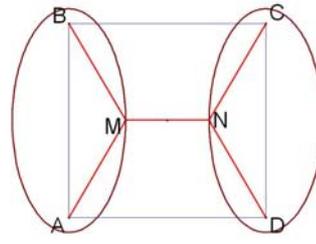


圖 4-4-4-4 互為 120 度時

(3) 接著我們用 GSP 操作模擬實驗得知，當 $\angle BMA = \angle BMN = \angle AMN = \angle CND = \angle CNM = \angle DNM = 120^\circ$ 時，根據費馬點理論，如圖 4-4-4-4 所示，則 $(\overline{AM} + \overline{BM}) + \overline{MN} + (\overline{CN} + \overline{DN}) = 2a + (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})a + 2a = (1 + \sqrt{3})a$ ，此時公路網最省造價有最小值。 ■

【註】、第二題中，我們嘗試以代數方式計算如下：

$$f(x, y, a, b) = \sqrt{x^2 + (y-17)^2} + \sqrt{(x-26)^2 + (y-14)^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-4)^2} + 5\left(\sqrt{(a-b)^2 + 1}\right) + \sqrt{(a-18)^2 + 9}$$

$$\text{Sol: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-17)^2}} + \frac{x-26}{\sqrt{(x-26)^2 + (y-14)^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-4)^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-17}{\sqrt{x^2 + (y-17)^2}} + \frac{y-14}{\sqrt{(x-26)^2 + (y-14)^2}} + \frac{y-4}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-4)^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{5(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 1}} + \frac{(a-18)}{\sqrt{(a-18)^2 + 9}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{(b-x)}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-4)^2}} + \frac{5(b-a)}{\sqrt{(a-b)^2 + 1}} = 0.$$

符合此 4 個聯立方程式之 (x, y, a, b) 能使 $f(x, y, a, b)$ 有 min.

並使用 matlab 求多變數函數的極小值？(ans 後是 x,y,a,b 的解):

>Current function value: **42.094511**> ans =17.5216 8.3505 17.8019 17.8016 ■

參考文獻

English References:

1. Roger B. Nelsen, Proofs without words Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America(MAA), 1993.
2. Roger B. Nelsen, Proofs without words II More Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America(MAA), 2000.
3. Ayoub B. Proof without words: Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality, Mathematics and Computer Education, 31, 191, 1997.
4. Ko Hayashi. Fibonacci numbers and the arctangent function, Mathematics Magazine, Vol. 76, Iss 3, pg.214 , 2003.
5. Ayoub B. Proof without words:arctangent function, Mathematics and Computer Education, Vol. 39, Iss 2, pg.151, 2005.
6. Philip R Mallinson. Proof without words:The Area under a polygonal arch, Mathematics Magazine, Vol.71, Iss. 2, pg.141, 1998.
7. Rex H Wu. Proof Without Words: Euler's Arctangent Identity, Mathematics Magazine, 77, 3. pg. 189, 2004.
8. Laborde C. (2005) Dynamic Geometry in the teaching of mathematics: what does that change for students and for teachers ?19ème conférence latino-américaine RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) Montevideo Uruguay, juillet 2005.
9. Laborde C. (2005) Robust and soft constructions : two sides of the use of the use of dynamic geometry, environments, 10th Asian Technology Conference in Mathematics, Korea National University of Education, Cheong-Ju, South Korea; 12--16 December 2005.
10. P. Yiu, The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 31 (2000) 569 – 578.
11. P. Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Florida Atlantic University lecture notes, 2001.
12. P. Yiu, A Tour of Triangle Geometry via the Geometer's Sketchpad, Florida Atlantic University lecture notes, 2001.

中文期刊、論文：

1. 林琦焜，「從三角求和公式到 Fourier 級數」，數學傳播，第 26 卷第 3 期，2002 年。
2. 李政豐等，「用圖解證明公式」，數學傳播，第 25 卷第 3 期，2001 年。
3. 蔡聰明，「談惠更斯級數」，數學傳播，第 22 卷第 1 期，1998 年。
4. 洪誌雄，「中學數學漫談--由龜兔賽跑談無窮級數求和」，數學傳播，第 17 卷第 2 期，1993 年。
5. 黃毅英，「從算術幾何平均不等式看數學解題中的一題多解」，數學傳播，第 18 卷第 4 期，1994 年。
6. 王中烈，「數形一家」，數學傳播，第 4 卷第 2 期，1980 年。
7. 擺線---幾何中的海倫，曹亮吉，原載於科學月刊第十五卷第四期
(http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_15_09_1/index.html)
8. 林保平（民 90）融入教學的數學科電腦輔助教學—以分數的教學為例。科學教育研究與發展，第二十二期，pp31-57。
9. 林保平（民 89） 教具學具觀點的數學科電腦輔助教學設計實例。科學教育研究與發展，第二十期，pp29-46。
10. 郭子豪、李育霖，「反正切函數，二階線性遞迴數列與疊在一起的方格紙」，第 55 屆國際科展，臺灣，2004 年。
11. 張國恩，從學習科技的發展看資訊融入教學的內涵，北縣教育，41 期，2002 年。
12. 左台益、梁勇能，國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究，師大學報：科學教育類 46(1,2)1-20，2001 年。
13. 何榮桂，台灣資訊教育的現況與發展兼論資訊科技融入教學，資訊與教育雜誌，22-48，2000 年。
14. 林麗娟（民 83）。互動式教學環境與科學性知識的學習。教學科技與媒體，16，3-13。
15. 袁媛、劉怡吟、顏貽隆、陳明璋（民 90）。網路虛擬教室的實施與相關問題探討。2001 資訊與教育雜誌特刊，192-200。
16. 陳明璋、施蔚芝，網路校園平台之介紹--網路學習理論與實務研討會論文集，2000 年。
17. 裴小倩、朱家雄，發生在最近發展區內的“責任遷移”—維果斯基理論在早期教育

應用中的“鷹架教學”，朱家雄學前教育網，2004年10月。

18. 吳鐵雄，中華民國電腦應用教學與電腦輔助教學，資訊與教育，24，1993年。
19. 謝佳韻，最美的數學式，HPM 通訊，第3卷第4期，2000年。
20. 李政豐，「資訊科技融入數學教學模組實務的研究」，新竹市交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2003年。
21. 顏貽隆，「建構互動式學習環境實務之研究」，新竹市交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2003年。
22. 李進福，「數學教材設計之研究-以視覺理論為基礎」，交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2006年。
23. 黃國忠，「高中三角函數動態圖說證明元件開發研究」，交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2006年。
24. 蔡政樺，「在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究」，交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2006年。
25. 李吉彬，「資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究」，交通大學理學院網路學習專班碩士論文，新竹，2006年。
26. 姜志遠，「台灣與中國大陸之十二年數學課程比較」，中央大學數學研究所碩士論文，2005年。
27. 翁婉珣，「台灣與新加坡之十二年數學課程比較」，中央大學數學研究所碩士論文，2005年。
28. 洪雅齡，「台灣與日本之十二年數學課程比較」，中央大學數學研究所碩士論文，2005年。
29. 黃子倩，「台灣與韓國之十二年數學課程比較」，中央大學數學研究所碩士論文，2005年。
30. 陳明璋，「數學簡報系統——一個克服數位落差之教師專業發展環境」，第十屆全球華人電腦教育應用大會(GCCCE)，北京清華大學，2006年。

中文書籍：

1. 陳明璋編輯，萬腦奔騰數學網(一)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2002年。

2. 陳明璋編輯，萬腦奔騰數學網(二)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2003年。
3. 陳明璋編輯，萬腦奔騰數學網(三)- 數學科學與資訊科技共舞，交通大學，新竹，2005年。
4. George Polya，怎樣解題，九章出版社，台北，1997年。
5. H.S. M.Coxeter, S.L. Greitzer 著，陳維桓譯，幾何學的新探索，凡異社出版，台北，1995年。
6. L. Zippin 著，應隆安譯，無限的用處，凡異社出版，台北，1999年。
7. Miranda Lundy, Daud Sutton 著，葉偉文譯，典雅的幾何，天下文化出版社，台北，2002年。
8. B. Polster 著，胡守仁譯，妙不可言的數學證明，天下文化出版社，台北，2006年。
9. Eli Maor 著，胡守仁譯，毛起來說三角，天下文化出版社，台北，2000年。
10. 蔡聰明，數學拾貝，三民書局，台北，2003年。
11. 張景中，平面三角解題新思路，九章出版社，台北，2001年。
12. 蔡聰明，數學的發現趣談，三民書局，台北，2000年。
13. 張景中，平面幾何新路—解題研究，九章出版社，台北，1997年。
14. 曹亮吉，阿草的葫蘆---文化活動中的數學，遠哲科學教育基金會，台北，1996年。
15. 胡炳生，數學解題思維方法，九章出版社，台北，1997年。
16. 黃家禮，數學明珠，九章出版社，台北，2000年。
17. 張廣祥，數學中的問題探究，華東師範大學出版社，上海，2003年。
18. 陳仁政，說不盡的 π ，科學出版社，北京，2005年。
19. 數學課程標準研制組編寫，普通高中數學課程標準（實驗）解讀，江蘇教育出版社，南京，2004年。
20. 孫維剛，孫維剛高中數學，北京大學出版社，北京，2005年。
21. 任長松，探究式學習，教育科學出版社，北京，2005年。
22. 伊萬.莫斯科維奇 著，李琳譯，生命的游戲--出人意料的幾何趣題，新星出版社，北京，2006年。

網址：

1. The Mathematical Association of America (MAA)
<http://www.maa.org>
2. じゃばで数学 Math by Java
<http://www.shirakami.or.jp/~eichan/java/javafr.html>
3. Paul Yiu
<http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html>
4. C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers, available at
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
5. 全任重教授
<http://sylvester.math.nthu.edu.tw/>
6. 陳創義教授
http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/m1.htm
7. 陳明璋教授 Mathematical Presentation System (MathPS):
<http://www.cc.nctu.edu.tw/~mjchen/MathPS/index.htm>
8. 羅東高中 (官長壽老師)
<http://140.111.115.8/longlife/>
9. 老顏之家 (顏貽隆老師)
<http://www.nehs.hc.edu.tw/~ylyen/>
10. YLL (李映良老師) - GSP 教學集
<http://yll.loxa.edu.tw/>
11. GSP 教學影音課程
<http://tpc.k12.edu.tw/1001214071/index.html>
12. Cabri 3D 在中學數學的應用
<http://www.hcsh.tp.edu.tw/~math01/Cabri3D/index.html>
13. 數學科新課綱網站
<http://203.64.26.48:8080/98math/>
14. 人民教育出版社_高中數學
<http://www.pep.com.cn/gzsx/index.htm>