

關於建構三角函數動態學習環境之研究

學生：游心怡

指導教授：黃大原教授

國立交通大學理學院碩士在職專班網路學習組

摘 要

三角函數是用來描述現實世界中具有週期現象的重要數學模型，例如潮汐循環、溫度起伏等問題。然而由於三角函數的抽象性，往往也是大多數高中學生感到頭疼與棘手的數學題材。在資訊科技高度發展的現在，許多繁雜的運算可以透過計算機輕鬆完成，如此一來，「公式背誦」以及「正確計算」的能力便不再如以往一般的重要性。因此，是否可以利用資訊科技帶給學生更有效的學習？是否可以讓他們克服對三角函數抽象性的排斥？

有鑑於此，本論文將透過 **GSP** 及 **MathPS** 的動態展示功能，來建構動態三角函數的教學與學習環境。一方面，動態的展示可以提供給學生對於三角函數更為直觀的了解；其次，藉由電腦的生動表現，可以彌補書本上只有靜態示意圖的缺憾。我們期望能夠藉由這種方式，將三角函數學習的重點從「公式、定理的推導」轉移到「觀察函數的概念、性質與圖形」。使學生能夠對三角函數有具體而圖形化的了解，進而打破他們對於三角函數的恐懼心理。

本論文也將藉由「數學建模」構想的引入，搭配電腦軟體操作，來解決現實生活中所會面臨到的問題，讓學習者瞭解如何將生活問題轉化成數學問題，進而對該問題進行探究，找出合適的數學模型，最後加以驗證。

【關鍵字】 三角函數、數學建模、週期現象、動態展示、*GSP*、*MathPS*

A Study of Dynamic Learning Environments for Trigonometry Functions

Student : Hsin-I Yu

Advisor : Tayuan Huang

Degree Program of E-Learning
National Chiao-Tung University

Abstract

Trigonometric functions are basic functions used for describing the periodic patterns in the real world, though the topic of trigonometric functions is one of the difficult subjects for most high school students because of its high degree of abstraction involved, followed by many lengthy formulas and complicate computations. However, complicated computing nowadays can be done easily by computers under well prepared instructions. We are considering if the current information technology can be used to provide students friendly and effective learning environments for studying trigonometric functions.

The purpose of this thesis is to manage friendly and user oriented environments for helping students to catch the insights and the usages of trigonometric functions efficiently and to realize how the mathematical knowledge can be used in treating the problems from the real world as well. In particular, the software packages *GSP* and *MathPS* will be used in this thesis for developing environments for dynamic presentations of trigonometric functions. By taking fully advantage of the dynamic presentations, we will have chances to transform the focuses from formulas and proofs to the insights and features of trigonometric functions in the environments supported by *GSP* and *MathPS*. Some examples relating to tides and temperatures will also be introduced to show how the real world problems can be transformed to mathematics problems within the frameworks of mathematical modeling.

Key words: trigonometric functions, mathematical modeling, periodic patterns, dynamic presentations, *GSP*, *MathPS*

誌謝

記得在九十二年的八月參加了網路學習專班所舉辦的暑期中學數學教師研習會，會中陳明璋老師及學長們所呈現的 **MathPS** 概念真的很吸引人，也令人感動。因此便以專班為在職進修的第一選擇，在這兩年多的日子裡，從專班所安排的課程中看到了師長們致力於資訊與科學教育的研究與應用，讓我們受益良多，也得到不少的啟發。

此外，非常感謝我的指導教授黃大原老師，他淵博的學問、務實的態度，在一次又一次的報告中，不斷地指引著我方向、修正我的腳步，並一再給予我鼓勵。加上陳明璋老師資訊技術的指導，不時的關心，讓我真的能做到資訊融入教學的理想，也體驗到讓書本上的內容動起來的驚喜。

也要特別感謝專班的同學—政樺、吉彬、主安—有著豐富教學經驗的夥伴們，無論是資訊技術的協助、教學經驗的分享及同伴間的加油打氣，讓我在這兩年多的日子裡可以持續的成長。更要感謝國立三重高中胡劍峰校長及同事們的支持，讓我能在課餘、公餘之際能進修、充實教學知能。

最後我要衷心的感謝我的家人對我貼心的照顧與包容，讓我無後顧之憂完成我的學業，是你們讓我有勇氣堅持下去、渡過許多學習的低潮，而順利的完成這論文。願以此論文獻給所有關心、支持我的親友及師長，和你們一同分享這喜悅。



目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1-1 研究背景.....	1
1-2 研究動機及目的.....	2
1-3 論文結構.....	4
第二章 文獻探討.....	5
2-1 我國高中數學課程標準與大陸數學課程標準.....	5
2-2 資訊融入教學.....	6
2-3 數學建模.....	8
第三章 三角函數的應用.....	9
3-1 潮汐問題.....	9
3-2 氣溫與時間的關係.....	14
3-3 尋找聲音的起源～從三角函數的疊合到傅立葉級數.....	18
3-3-1 從留聲機說起.....	18
3-3-2 聲音的組成.....	18
3-3-3 分析人的聲音.....	20
3-3-4 傅立葉級數.....	23
第四章 三角函數的動態學習環境之建構.....	25
4-1 觀察三角函數（以 GSP 呈現）.....	25
4-1-1 角的度量.....	25
4-1-2 畢氏定理與餘弦定理.....	28
4-1-3 $y = a \sin(bx + c)$ 與正餘弦疊合.....	30
4-1-4 $\frac{\sin x}{x}$ 與 $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$	35

4-2 和角公式 (以 MathPS 呈現)	39
4-2-1 用面積証和角公式.....	40
4-2-2 正餘弦疊合與和角公式.....	42
4-2-3 畢氏定理與和角公式.....	44
第五章 結論.....	45
第六章 參考文獻.....	46



表目錄

表 3-1 時間與水深關係表	9
表 3-2 氣溫與月份關係表	14
表 3-3 台灣台北的月均溫表	16



圖目錄

圖 3-1-1 水深與時間關係描點	10
圖 3-1-2 利用正弦函數近似	10
圖 3-1-3 問題一，船可停留區間	11
圖 3-1-4 船卸貨時的時間與水深關係	11
圖 3-2-1 水溫與月份關係描點	15
圖 3-2-2 利用 Excel 計算	15
圖 3-2-3 利用正弦函數模擬	15
圖 3-2-4 利用 Excel 計算	16
圖 3-2-5 台灣的每月平均溫度曲線	16
圖 3-3-1 不同頻率的波形	19
圖 3-3-2 不同振幅的波形	19
圖 3-3-3 不同樂器的波形	19
圖 3-3-4 模擬音叉聲音波形	20
圖 3-3-5 模擬雙簧管聲音波形	20
圖 3-3-6 英文單字”six”的聲波	20
圖 3-3-7 字母 ”I” 的波形	21
圖 3-3-8 由六個正弦函數組成	21
圖 3-3-9 由七個正弦函數組成	21
圖 3-3-10 由八個正弦函數組成	21
圖 3-3-11 $f(x)=\sin x$	23
圖 3-3-12 $f(x)=\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$	23
圖 3-3-13 $f(x)=\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$	23
圖 3-3-14 $f(x)=\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x$	24
圖 3-3-15 $f(x)=\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x$	24
圖 3-3-16 $f(x)=\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \frac{1}{11}\sin 11x$	24
圖 4-1-1 使弧長與半徑長相等	26
圖 4-1-2 將兩圓重疊比較圓心角	26
圖 4-1-3 使弧長為半徑長的兩倍	26
圖 4-1-4 定義弧度	26
圖 4-1-5 $r=1$	27



圖 4-1-6	$r=2$	27
圖 4-1-7	$\sin q, q, \tan q$ 關係	28
圖 4-1-8	畢氏定理和餘弦定律的證明(作者原圖)	28
圖 4-1-9	餘弦定理證明	29
圖 4-1-10a	起始狀態	29
圖 4-1-10b	紅色三角形推移	29
圖 4-1-10c	紅色三角形旋轉	29
圖 4-1-10d	紅色三角形再推移	29
圖 4-1-11	觀察區塊顏色	29
圖 4-1-12	移動成直角三角形	30
圖 4-1-13a	$a=2$	31
圖 4-1-13b	$a=3$	31
圖 4-1-14a	$b=2$	31
圖 4-1-14b	$b=\frac{1}{2}$	31
圖 4-1-15a	$c=\frac{1}{2}p$	32
圖 4-1-15b	$c=p$	32
圖 4-1-16a	$a=2$	32
圖 4-1-16b	$a=\frac{1}{2}$	32
圖 4-1-17a	$b=2$	32
圖 4-1-17b	$b=\frac{1}{2}$	32
圖 4-1-18a	$c=\frac{1}{2}p$	33
圖 4-1-18b	$c=p$	33
圖 4-1-19a	$a=2$	33
圖 4-1-19b	$a=\frac{1}{2}$	33
圖 4-1-20a	$b=2$	33
圖 4-1-20b	$b=\frac{1}{2}$	33
圖 4-1-21a	$c=\frac{1}{2}p$	34
圖 4-1-21b	$c=p$	34
圖 4-1-22	正餘弦疊合	34
圖 4-1-23a	正餘弦疊合	35



圖 4-1-23b	$a=1$ $b=1$	35
圖 4-1-23c	當 $a=4$ $b=3$	35
圖 4-1-24	最大值 $\sqrt{a^2 + b}$	35
圖 4-1-25	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	36
圖 4-1-26	圓半徑為 1 時	36
圖 4-1-27a	取 A、B 兩點	37
圖 4-1-27b	B 點往 A 點移動	37
圖 4-1-28	利用切線斜率求導數	38
圖 4-2-1	單位圓	39
圖 4-2-2	矩形內接四直角三角形	40
圖 4-2-2a	移動三角形	40
圖 4-2-2b	觀察兩邊白色部分面積	41
圖 4-2-3	矩形內接四直角三角形	41
圖 4-2-3a	移動三角形	41
圖 4-2-3b	觀察兩邊白色部分面積	42
圖 4-2-4	觀察邊角關係	42
圖 4-2-4a	求紅色、藍色線段長	42
圖 4-2-4b	正弦的和角公式	43
圖 4-2-5	觀察邊角關係	43
圖 4-2-5a	求紅色、藍色線段長	43
圖 4-2-5b	正餘弦疊合	43
圖 4-2-6	證明畢氏定理	44
圖 4-2-7	設直角三角形的兩角為 a 、 b	44
圖 4-2-8	由面積關係得出正弦的和角公式	44

