第一章 緒論

本章節描述本論文研究的背景、動機及目的及論文結構。

1-1 研究背景

資訊的蓬勃發展改變了我們教數學的方式，對學生而言不僅改變學習數學的目的，也提供更快的達到目的地的工具，如繁複的計算已不再需要，繪製統計圖表的能力也可以交給電腦。當然老師們也同樣是獲益者，可以藉由電腦來呈現一些較難說明的概念，增強一些視覺化的呈現，減少抽象的憑空思考，提升學生的學習興趣，NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)亦建議各層級的老師都應使用資訊科技來輔助教學，但應適當的運用才能真正的發揮其最大的功效。

NCTM 於課程改革中提出數學問題解決是學習的主要活動。教學的目的在於提供學生數學討論、觀察的學習環境，並設計一系列的有意義的題目讓學生可以做充分的討論及成果展現，學習如何提出問題，並能積極的投入困難問題的解決(Manuel Santos-Trigo, 2004)。

12 年一貫數學課程研究報告中提出函數是用來表徵量與量的關係，和現實世界適當結合，以三角函數而言，它的重點應是週期函數的意涵，學生要知道振幅、週期、幅角的概念，這部分我們較未強調。相對地來說，我們傳統上比較強調在三角恆等式，如和差化積、積化和差的公式，這和其他國家正好相反。如由函數表徵現實世界的一貫性精神來看，高中綱要可以增加這方面的說明。另三角函數與其他學科之連結並無著墨，是否可以考慮納入聲波、光波…等疊合的現象作爲外部連結(陳宜良等,2005)。

於大陸普通高中數學課程標準中指出三角函數是刻劃現實世界的重要數學模型，學生在實際生活中遇到大量的週期變化現象，如音樂的旋律、波浪、晝夜的交替、潮汐、鐘擺的運動、交流電等，這些都是三角函數的實際背景。三角函數的實際背景與應用，有助於學生認識到三角函數與實際生活的緊密聯繫，及解決實際問題中的廣泛應用，從中感受數學的價值，學會用數學的思維方式去觀察、分析現實世界，去解決日常生活和其他學科學習中的問題，發展數學應用意識。

1-2 研究動機及目的

絕大部份的教師認為所參加的資訊融入教學培訓課程並無法幫助自己有效提升資訊素養，資訊科技與領域教學整合之概念，更無法從參加培訓課程中獲得(何榮桂、藍玉如，2000)。因培訓課程多由電腦專長人員來訓練且內容偏重電腦或軟體的操作使用，缺乏如何針對教學工作有效使用資訊科技。但教師若能根據自己的教學需求來自行設計教材可以與教學目標更密切的融合(林威昇，1999)。

為了能落實資訊融入教學，利用電腦科技來改善數學教學，以期帶給學生更多視覺化的學習，本論文採用數學簡報系統 MathPS 做為誘發學生從事有意義數學學習以達到或延伸數學課程目標的電腦工具。這套系統以 Microsoft PowerPoint 為平台，加入繪圖輔助及互動設計等數學教學所需的增益集，讓我們對 PowerPoint 中的物件掌握更有效率。只要具有基本的資訊素養即可使用，這是對一般人而言是較為熟悉的環境、也容易上手。在適當的時機加以應用，可提升數學教學中視覺化及動態效果的呈現，增進課堂中師生互動的效果。另外搭配動態幾何軟體 GSP 的操作，這是一套具有計算與繪圖功能的軟體，並可製作相關的動態按鈕；繪圖時以基本的點、線、圓的功能出發，利用基本的幾何定義方式來構圖。

三角形是所有多邊形的基本組成單元，邊長與角度的關係(邊角關係)則是三角函數的主要內涵。但對大部分的高中生而言，三角函數往往是他們感到最為頭疼的數學領域。因為三角函數使用了簡單的函數符號來做各種推論，雖然帶來了思考與運算上的便捷，可是也將問題變的抽象而不直覺，使得學生往往看的一頭霧水，遲遲無法進入狀況。

有鑑於此，本論文將透過 GSP 及 MathPS 的動態展示功能，來建構動態三角函數的教學與學習環境。一方面，動態的展示可以提供給學生對於三角函數更為直觀的了解；其次，藉由電腦的生動表現，可以彌補書本上只有靜態示意圖的缺憾。我們期望能夠藉由這種方式，將三角函數學習的重點從「公式、定理的推導」轉移到「觀察函數的概念、性質與圖形」。使學生能夠對三角函數有具體而圖形化的了解，進而打破他們對於三角函數的恐懼心理。

數學學習不僅要在數學基礎知識、基本技能、思維能力、運算能力、空間想像能力等方面得到訓練和提高，而且在應用數學分析和解決實際問題的能力方面同樣需要得到訓練和提高。而培養學生的分析和解決實際問題的能力必須要使學生學會提出問題並明確探究方向，能夠運用已有的知識進行交流，並將實際問題抽象為數學問題、建立數學模型，從而形成比較完整的數學知識結構。數學模型是數學知識與數學應用的橋樑，他

能幫助學生探索數學的應用，產生對數學學習的興趣，培養學生的創新意識和實踐能力，因此加強數學建模教學與學習對學生的智力開發具有深遠的意義(李莉，2006)。

諾貝爾物理獎得主熱納(Pierre-Gilles de Gennes)提到所謂的「數學帝國主義」，所有科學領域的入學考試，最後一定淪為數學測驗。不僅如此，數學近年來幾乎滲透到所有學科，透過數學的操弄似乎加快了發展速度。因此增加數學與日常生活或其他學科的聯繫，已是世界數學教育的趨勢。因此將數學建模的概念融入教學過程中，教師的角色已不再是單純的教書，而是一位引導者，提供學生學數學、用數學的環境；學生也不再只是坐在講台下聽課了，學習的過程中學生透過網路收集相關資料，發揮自己的創意想辦法分析、解決問題，並藉由小組合作的過程學習溝通、討論的能力，是真正的去做到以學生為中心的教學。

現實問題中不同的變化規律需要不同的函數來刻畫，我們可以透過傅利葉級數(Fourier series)轉換，所有自然界所見的週期現象，乃至於影像和聲音，基本上都可以用正弦和餘弦函數表達出來，故三角函數就是刻畫週期變化規律的數學模型。因此在三角函數的教學上再融入數學建模的概念，利用潮汐問題與溫度變化現象，企圖引起學生的學習興趣，讓學生能體驗三角函數的實用性。

1-3 論文結構

本研究內容主要是利用動態幾何軟體 GSP 及數學簡報系統 MathPS (Mathematic Presentation System) 爲設計平台，佐以數學建模的概念，進行高中數學中三角函數的學習。主要架構如下：

在第二章中，先做數學建模及視覺化學習的相關文獻探討，目的是了解其對數學學習的意義與助益。

在第三章以三角函數應用的例子（潮汐問題、溫度問題）引出在日常生活中隱藏的三角函數，並融入數學建模的概念。

在第四章中，則呈現一系列三角函數動態學習的環境，首先以 GSP 爲主要工具從三角函數最基本的弧度、角度說起，進而介紹畢氏定理與餘弦定理的相關性，並觀察 $y = a\sin(bx + c)$ 的振幅、週期的改變；再描繪 $\frac{\sin x}{x}$ 圖形，利用夾擠定理與 sin$x$ 的切線斜率證明 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ，進而說明 $f(x)=\sin x$ 的微分爲 $f'(x)=\cos x$。

其次改使用數學簡報系統 MathPS，以面積、正餘弦疊合、畢氏定理等不同的觀點用圖說證明（Proof without words）的方式來看和角公式。以重複利用同一個圖推論出不同的三角關係的概念，企圖把一些相近的公式、定理或概念作比較，讓學習者加深學習印象，並可直覺的感受到這彼此之間的關連性，以便深入理解他們之間的關連。

第二章 文獻探討

本章主要在探討我國高中數學課程標準與大陸普通高中數學課程標準中資訊融入教學、數學建模等相關文獻探討。

2-1 我國高中數學課程標準與大陸數學課程標準

以下就我國高中數學課程標準與大陸普通高中數學課程標準在資訊融入教學及三角函數學習相異部分做說明。

陳宜良等(2005)於「中小學數學科課程綱要評估與發展研究」中指出，關於計算工具的使用，大陸在第一學段完全沒有提到計算器；第二學段開始提到計算器，從第三學段開始就很清楚看得出計算機的用處了。計算機的用處有兩個面向：一個是幫助計算，一個是當作舉例的對象。在計算方面，具體來說，學生要能夠拿科學型計算器來做平方根、立方根、大數計算、三角函數、三角比的值、無理數的近似值。我們通常只拿計算機來幫助學生計算，或做大量複雜的資料處理；而大陸課程標準會拿計算機來舉例子，把它當工具來用，或當成討論的對象。

於大陸普通高中數學課程標準中，要求鼓勵學生使用計算器和計算機探索和解決問題。例如，藉助計算器、計算機求三角函數值，求解測量問題，畫三角函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的圖像，分析參數變化對函數的影響等。資訊技術的運用，一方面，可以把學生從繁瑣複雜的技巧性運算中解脫出來，為學生借助資訊技術去探索數學規律，從事一些富有探索性和創造性的數學活動提供時間和空間；另一方面，可以解決一些實際問題(嚴士健等，2004)。

在三角函數的教學中，大陸普通高中數學課程標準中指出教師應關注以下兩點：第一，根據學生的生活經驗，創設豐富的情境。例如，通過單擺、彈簧震盪、圓上一點的運動，以及音樂、波浪、潮汐、四季變化等實例，使學生感受週期現象的廣泛存在，認識週期現象的變化規律，體會三角函數是刻劃週期現象的重要模型以及三角函數模型的意義。第二，注重三角函數模型的運用。即運用三角函數模型刻畫和描述週期變化的現象（週期震盪現象），解決一些實際問題。這也是《標準》在三角函數內容處理上的一個突出特點(嚴士健等，2004)，是台灣較為缺乏的部份。

2-2 資訊科技融入教學

就文獻分析來看，美國加州、新加坡、中國、南韓、日本與英國等六個國家或地區的數學綱要中，都一致地提到要使用科技工具或是資訊工具（IT：Information Technology，包括：數字計算器、科學與繪圖計算器、科技軟體）。值得注意的是，資訊科技融入教育是一個整體性質的概念與行動。最晚也是在初中階段 (七年級) 開始明顯地引入科學計算器，通常都被用在計算三角函數值、指數、對數和統計資料處理等方面。新加坡不但使用計算器，還指明必須是科學型計算器，而且必須要有 x^y、$\log x$、$\sin x$、$\cos x$、$\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$ 這些功能按鍵。新加坡和英國的國家證照考試標準中，都明訂計算器之需求標準。繪圖計算器較昂貴，在函數學習中是否需要繪圖計算器的協助，還值得研究(陳宜良等，2005)。

檢視幾個國家或地區的數學課程綱要，我們發現某些國家的課程設計不只是將計算機當作運算的工具，代以處理複雜的數字運算而已，而是將其作爲一個教學的對象，或是舉例的對象。當他們想要在數學課程中舉一個「生活」上的例子，就不只是舉出消費、運動、旅行這一類的例子，而是舉出電腦硬體或軟體的例子。我們認爲這樣做非常合理，因爲對於許多學生或家長而言，的確電腦已經像電視機和電冰箱一樣，是「生活」的一部份了。特別是對學生而言，電腦網路可能並不被認爲是一個「虛擬」世界，而是一個「真實」的世界了。再者，我們也看到他國的數學課程中，包含了將來更深入學習計算機之操作或理解所需要的基礎知識，例如二進制數字、數位邏輯、操作三維立體設計軟體所需的數位幾何相關知識等等。而在幾何與設計這一方面的著墨，尤以中國大陸和英國最多(陳宜良等，2005)。

資訊融入數學教學中，具有傳統教學無法比擬的優勢(吴根師，2004)：

(1) 利用這些資訊工具的互動功能營造優質的學習環境，激發學生學習興趣，提高學習效率，讓學生輕鬆地理解知識的本質。
(2) 並可將數學知識中的抽象內容具體化，突顯出學習的重點，提高課堂教學效率。
(3) 將靜態的表現方式轉爲動態，加深理解、引發思考。
(4) 減少課堂中大量板書的時間，可增加教學內容並能更有效的利用課堂時間。
(5) 有利於學生獲得大量的訊息，擴大知識領域，激發學生創造思維。

但必考慮資訊的融入是否能更有效的達成數學教學目標，是否能利用電腦輔助釐清數學的特點與需求是最重要的。我們應思考如何讓這些工具成爲老師的得力助手，使學生興趣盎然的參與教學活動，發揮學習的主動性並提高教學品質。爲了讓科技成爲教學

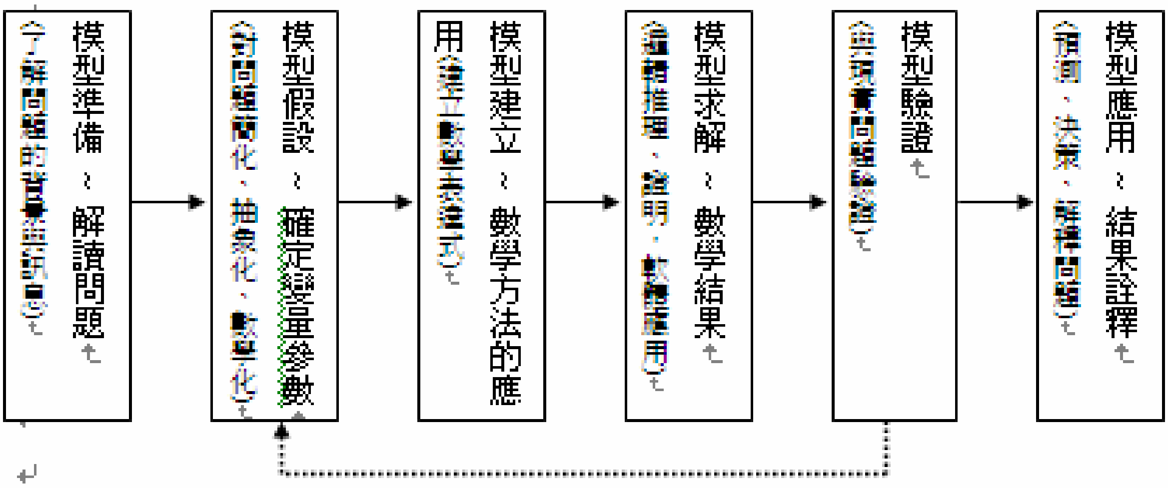
的助力，需把握：目標明確、對問題本質的了解、對技術掌握的信心、在實驗中逐步完成劇本等原則。勿因過度的視聽效果而分散了學生的注意力，也要注意學生才是學習的主體，資訊科技只是一種輔助教學的手段，更不能取代了教師的講解。再實際教學中教師也要有一定的應變能力，注意觀察學生在學習過程中的反應，適當的調整內容及呈現方式。

在考量降低數位落差以及提升普及性的前提下，交通大學陳明璋教授自 2004 年開始積極開發「數學簡報系統(Mathematical Presentation System,MathPS)」。該系統以高普及率的軟體 Microsoft PowerPoint 為平台，是一兼具繪圖及互動的教學環境，結合數學教材多元呈現的特性，建構了一個數學教材的編輯及課堂授課的環境，提供數學教師整體性的協助(陳明璋，2006)。不但容易上手，更可達到動態性的講解，在課堂上以老師為引導者帶領學生思考，達成互動的教學模式。

GSP(The Geometer's Sketchpad)是一個尺規作圖功能強大的平面幾何構圖電腦輔助教學軟體，可以精確的構造動態幾何。學生可經由動態幾何圖形的轉換及度量來描述他們所發現的一些幾何關係，增加開放性的猜想與研究，適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察，有助於學生做更深一層的思考探究(李吉彬，2006)。

2-3 數學建模（Mathematical Modeling）

數學建模是把現實世界中的實際問題加以整理，寫成數學模型，求出模型的解，再驗證模型是否合理，並用該數學模型所提供的解答來解釋現實問題，或做為解決現實問題的參考，我們把數學知識的這個應用過程稱為數學建模 (蕭志如，2003) 。 一般而言，數學建模要經過模型準備、模型假設、模型建立、模型求解、模型驗證及模型應用這六個步驟，如圖所示：



數學教育最終的目的是希望培養學生解決問題的能力，強調以真實情境的生活問題作為學生探索知識的出發點。並在這問題解決的教學過程中提供學生數學討論、觀察的學習環境，讓學生在一個數學世界的教室，有著一系列的有意義的題目讓學生可以做充分的討論及成果展現，並讓學生學習如何提出問題。過程中可以透過電腦軟體的視覺化呈現與操作，使學生有更多的嘗試與觀察，並可使學生找尋一些數學原理來驗証自己的想法(Manuel Santos-Trigo , 2004)。

以往的數學教育旨在培養與發掘數學菁英，對於那些抽象能力、符號操弄、邏輯推理思維相對較佳的學習者而言當然遊刃有餘，但何時正確使用和如何適當使用知識的策略在真實情境的應用分析上，所謂的「數學精英」就不見得具有相同的優勢了。擁有高數學知識的學生不代表他對數學知識就具有高運用能力，而高中數學建模正是具體體驗此數學教育思想且富有實質教育意義的教學活動(林國源，2005)。

第三章 三角函數的應用

三角函數是基本初等函數，它是描述現實世界中週期現象的重要數學模型，在數學和其他領域中具有重要的作用(嚴士健等，2004)。除了教科書中許多有關三角測量的應用外，許多自然現象圖形都呈現出類似正弦函數的形狀，我們稱這類如正弦函數上下振動的圖形為"正弦函數圖"(sinusoidal graph)。我們可以透過三角函數模型來探究規律的週期變化、預測未來、解決現實問題。在這章節中將利用幾個例子介紹在日常生活中有許多跟三角函數的週期或圖形有關的問題，並融合數學建模的概念，包括：潮汐問題、氣溫與時間的關係等。探索從函數圖形中我們看到了什麼？發現了什麼？有什麼聯想？等等。

3-1 潮汐問題

這個例子改編自普通高中數學課程標準（實驗）解讀 p125

海水受日月的引力，在一定的時候發生漲落的現象叫潮，一般早潮叫潮，晚潮叫汐。在通常的情況下，船在漲潮時駛進航道，靠近船塢，卸貨後落潮時返回海洋。下面是每天時間與水深的關係表：

表 3-1 時間與水深關係表

時間	水深	時間	水深	時間	水深
0:00	10.0	9:00	7.1	18:00	10.1
3:00	13.0	12:00	10.1	21:00	7.0
6:00	9.9	15:00	13.0	24:00	9.9

(1) 選用一個三角函數來近似描述這個港口的水深與時間的函數關係

(2) 一條貨船的吃水深度為 7.1 米，安全條例規定至少要有 5 米的安全間隙，該船何時能進入港口？在港口能待多久？

(3) 若某船的吃水深度為 6 米，安全間隙為 5 米，該船在 2:00 時開始卸貨，吃水深度以每小時 0.3 米的速度減少，該船在什麼時間必須停止卸貨，將船駛向較深的水域？

這是一個涉及港口水深週期性變化的問題，由觀察表格的數據我們可以得到週期、振幅等訊息，以適當的函數表示後，利用不等式關係即可求得允許航行的時間與持續關係。

問題一：首先我們將時間與水深的關係描點畫在座標平面上（利用 GSP 完成），並觀察圖形，如圖 3-1-1。可以發現時間與水深的關係有週期性的現象大致符合正弦曲線圖，因此我們試圖利用正弦函數來描述這圖形。利用這些已知表格中的數據可以推論週期為 12 小時，水深的最大值為 13 公尺、最小值為 7 公尺，因此可得振幅為 3 公尺、垂直位移為 10 公尺。因此，函數為 $f(x)=3\sin(\frac{2\pi}{12}\cdot x)+10$ ，描繪後如圖 3-1-2，可以觀察到函數與已知數據大致符合。

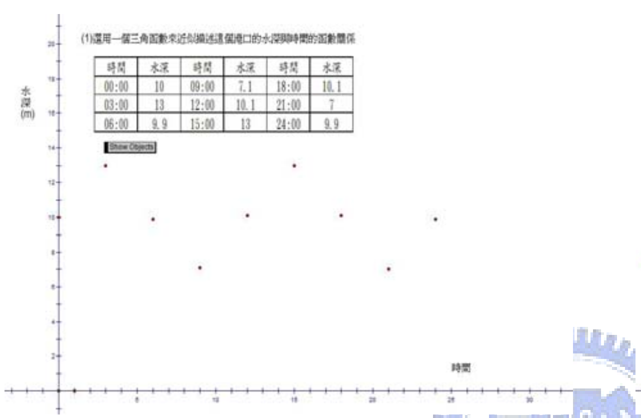


圖 3-1-1 水深與時間關係描點

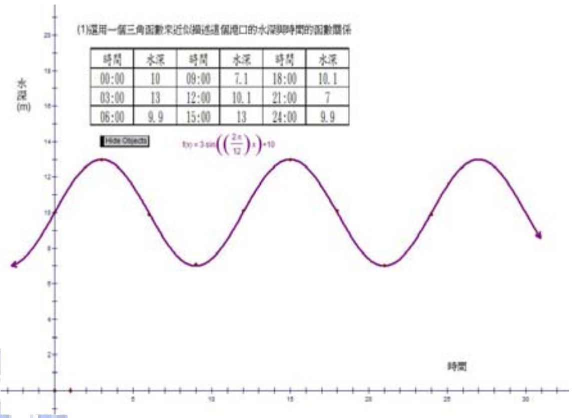


圖 3-1-2 利用正弦函數近似

問題二：找到水深與時間的函數關係後我們就可以利用來解決實際問題，一條貨船的吃水深度（船底與水面的距離）為 7.1 米，安全條例規定至少要有 5 米的安全間隙（船底與海底的距離），該船何時能進入港口？在港口能待多久？

由已知的規定我們可以知道海底至水面的距離（即水深）至少需要 12.1 公尺，因此從函數圖形(圖 3-1-3)，我們可以發現在水深高於 12.1 公尺的時間內船可以進入港口，即圖形中曲線高於 y=12.1 的時間時，船可以進入港口。我們可以透過簡單的函數計算及圖形觀察得知，船可以在上午 01：30 至 4：30 及下午 13：30 至 16：30 進入港口，各可以在港口內停留三小時。(不考慮船進出港口的時間)

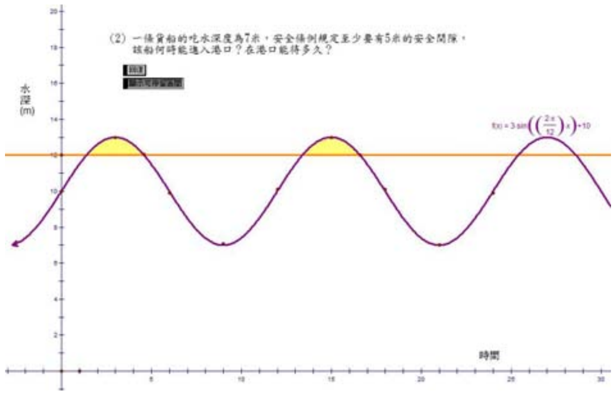


圖 3-1-3 問題一，船可停留區間

$$f(x)=3\cdot\sin(\frac{\pi}{6}\cdot x)+10\geq 12.1$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}\cdot x)\geq 0.7\approx\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{6}\cdot x\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$12k+\frac{3}{2}\leq x\leq 12k+\frac{9}{2}$$

■

問題三：若某船的吃水深度爲 6 米，安全間隙爲 5 米，該船在 2:00 時開始卸貨，吃水深度以每小時 0.3 米的速度減少，該船在什麼時間必須停止卸貨，將船駛向較深的水域？根據題意因爲開始卸貨吃水深度會逐漸減少，但隨著時間改變海水也開始漸漸退潮，因此可得另一函數圖形 $h(x)=f(x)+0.3(x-2)$ ，呈現如圖 3-1-4。我們亦可透過圖形的觀察及計算得知船從 2：00 開始卸貨，在 6：00 時必須開離港口。

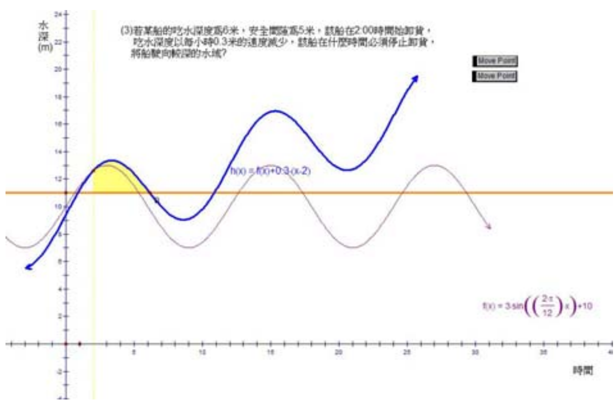


圖 3-1-4 船卸貨時的時間與水深關係

$$h(x) = f(x) + 0.3(x-2)$$
$$= 3\sin(\frac{\pi}{6}x) + 10 + 0.3(x-2) \ge 11$$
$$3\sin(\frac{\pi}{6}x) + 0.3x \ge 1.6$$

可得$2 \le x \le 6$（因2點開始卸貨）

■

問題四(延伸)：在教學上，我們可以繼續延伸這的問題，若某船載著貨物 A 要到港口卸貨，同時裝上貨物 B 運出港口。若滿載貨物 A 時，船的吃水深度爲 7.11 米，滿載貨物 B 時，船的吃水深度爲 6.5 米。若卸、裝貨物 A、B 各需兩小時，則船可否在一天內完成卸貨、裝貨後駛出海港？若能，在港內最少停留多長時間？

由題意可知，若船載滿貨物 A 進港的時間 t_1，須滿足下列不等式關係：

$$f(t_1) = 3\sin(\frac{2\pi}{12} \cdot t_1) + 10 \ge 5 + 7.11$$

即$\sin(\frac{\pi}{6} \cdot t_1) \ge 0.7 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{6}t_1 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$，式中 $k \in Z$；可得 $12k + \frac{3}{2} \le t_1 \le 12k + \frac{9}{2}$.

同理，船載滿貨物 B 出港的時間 t_2，須滿足下列不等式關係：

$$f(t_2) = 3\sin(\frac{2\pi}{12} \cdot t_2) + 10 \ge 5 + 6.5$$

可得$12k + 1 \le t_2 \le 12k + 5$，式中 $k \in Z$. 因在同一天內，故 k=0 或 k=1，因此在 $1.5 \le t_1 \le 4.5$ 或 $13.5 \le t_1 \le 16.5$ 時，船可進入港口；在 $1 \le t_2 \le 5$ 或 $13 \le t_2 \le 17$ 時，船可離開港口，由於裝卸貨物共需 4 小時，若該船若希望在港口內停留的時間最短，則須在上午四點半進入港口，下午一點時離開，共在港口停留九小時。■

如果再進一步思考，若河道挖深 1 公尺，則可延長停船時間爲多少?並找出它的函數關係圖，這個函數關係可作爲港區管理的一個處理策略的參考。且由於受潮汐影響，一天中不同時刻的水位高低相差很大，貨輪由於噸位大小不同，吃水深度（船底離開水面的距離）各不一樣，因此船舶進港裝卸貨物要根據水位高低合理安排，才能進一步提高年吞吐能力，促進港區的經濟建設。

總結這類的問題，重點在於如何將船舶進港時間的安排與調度這一實際問題轉化成數學問題，並引導學習者對該問題進行探究。利用表格、圖形的形式給定一些數據，在從這些數據中找出適合的函數及其係數間的關係，並透過解方程組、不等式的概念應用模型解決實際問題。在教學過程中融入數學建模概念，引導學習者進行以下各階段性思考與學習：

(1) 先由學習者分組針對港口潮汐的資料作蒐集準備。
(2) 於課堂中討論潮汐對船的進出港即停泊時間的影響，帶領學習者解讀問題並了解問題的背景與訊息（模型準備）。
(3) 對問題簡化、數學化，並利用已知數據確定變量（參數模型假設）。
(4) 引導學習者建立數學表達式（模型建立）。
(5) 進而利用邏輯推理、證明及軟體應用找出合適的模型（模型求解）。
(6) 比較模型與實際資料的誤差程度（模型驗證）。
(7) 再應用於現實問題，如問題三、四（模型應用）。

3-2 氣溫與時間的關係

你有注意到嗎？在日常生活中，我們常說：一年四季的變化氣溫時高時低，「週」而復始，你是不是有想到這溫度的變化是有週期性。說到週期性的變化，在數學的各種函數圖形中，我們不難發現三角函數的圖形是滿足週期性的，下列這個例子是出自於 CCP (The Connected Curriculum Project) 網頁中的例子[(1)]，國立交通大學白啓光教授也引用這個例子來實施「利用 MAPLE 做數學實驗」的課程[(2)]：

請找出吻合下列數據資料的正弦曲線

下表顯示阿爾及利亞 Tamanrasset (撒哈拉沙漠附近) 的月均溫。各地氣溫與降雨量的數據資料可在世界氣候網站查到。

表 3-2 氣溫與月份關係表

月份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
F	55.0	59.7	65.1	72.0	79.0	83.8	83.3	82.8	79.9	72.7	64.0	56.7

資料來源：世界氣候網站

(1) 繪出資料圖並注意到此圖大致上接近正弦曲線圖。爲什麼 "月均溫可用一個週期函數作爲其模型" 是合理的？

(2) 我們將用一個正弦函數來描述這個資料圖形。觀察你的資料圖，估計其週期、振幅、垂直位移、水平位移。利用這些數值構成一正弦曲線方程式模型，並同時繪出這個圖及模型的資料圖來檢驗其正確性。(這兩個圖不會完全一樣，但至少在某些點會重合，且在其他點也都相當接近。)

(3) 到世界氣候網站上取得另一個城市的溫度資料。繪製其資料圖，並試著用一個正弦曲線來作爲它的模型。

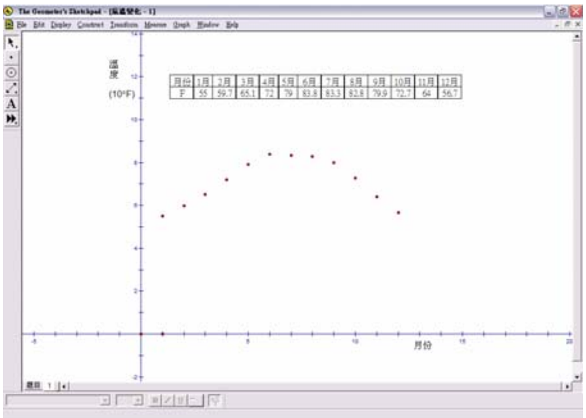
問題一：首先我們利用 GSP 或方格紙，將月份 (x 軸) 及溫度 (y 軸) 的關係繪製出來，如圖 3-2-1 ，因此可以很明顯的看出此圖大致上接近**正弦曲線圖**。根據此圖形及氣溫週而復始的特性，我們考慮利用正弦函數來描述他。 ■

---

(1) http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/precalc/singraph/index.html

(2) http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/lns/ws.htm

問題二：觀察圖形中各點之間的關係，推估其因一年 12 個月所以訂定週期爲 12；振幅取氣溫最高值與最低值相差的一半($\frac{83.8-55}{2}$=14.4)；垂直位移則取最低值加上振幅(55+14.4=69.4)；水平位移依圖形推測約爲 4 左右，藉用 Excel 軟體計算最小平



月份	F			
一月	55.0		Max	83.8
二月	59.7		min	55.0
三月	65.1		振幅	14.4
四月	72.0		垂直位移	69.4
五月	79.0			
六月	83.8		水平位移	估計值與實際值差
七月	83.3			
八月	82.8		4.00	110.831
九月	79.9		4.10	72.111
十月	72.7		4.20	58.196
十一月	64.0		4.21	58.177
十二月	56.7		4.22	58.407

圖 3-2-1 水溫與月份關係描點　　　　圖 3-2-2 利用 Excel 計算

方差(如圖 3-2-2)，可得當水平位移量爲 4.21 時誤差值最小等。因此可得函數

$$f(x)=1.44\cdot\sin(\frac{2\pi}{12}\cdot x+4.21)+6.94$$

並可看出此函數圖形與已知數據相當接近，如圖 3-2-2。

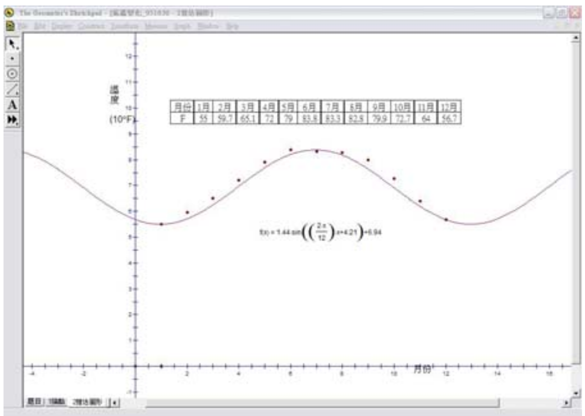


圖 3-2-3 利用正弦函數模擬

■

問題三：以台北的天氣爲例，下表爲中央氣象局(http://www.cwb.gov.tw/)統計的台灣台北的月均溫（統計期間爲 1971-2000 年）

表 3-3 台灣台北的月均溫表

月份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
10°C	1.58	1.59	1.80	2.17	2.47	2.74	2.92	2.88	2.71	2.43	2.09	1.76

資料來源：中央氣象局

同樣的將資料畫在 GSP 中，並利用 Excel 計算其振幅 $\frac{2.92-1.58}{2}=0.67$、垂直位移(最小值加上振幅=1.58+067=2.25)等，並利用最小平方法，估算水平位移爲 3.97 時(如圖 3-2-4)誤差値最小，因此可得一正弦函數

$$f(x)=0.67\cdot\sin(\frac{2\pi}{12}\cdot x+3.97)+2.25$$

再將函數圖形畫於 GSP 中，如圖 3-2-5，從圖形中我們可以看到推估的正弦函數圖形，與實際資料相當吻合。

月份	C			
1	15.8		Max	29.2
2	15.9		min	15.8
3	18.0		振幅	6.7
4	21.7		垂直位移	22.5
5	24.7			
6	27.4		水平位移	估計值與實際值差的平方和
7	29.2			
8	28.8		3.95	0.984
9	27.1		3.96	0.897
10	24.3		3.97	0.864
11	20.9		3.98	0.885
12	17.6		3.99	0.960

圖 3-2-4 利用 Excel 計算

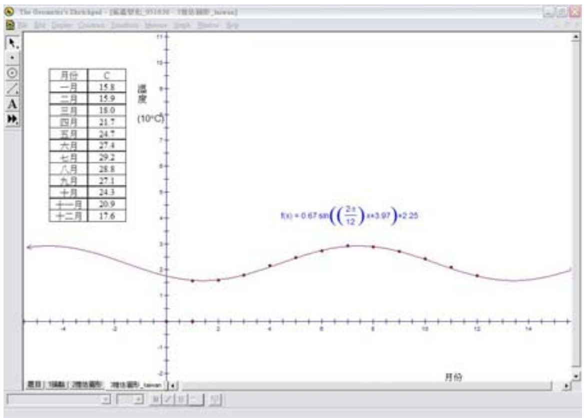


圖 3-2-5 台灣的每月平均溫度曲線

■

從這個探究過程，可以看出溫度是具有週期性變化的自然現象，我們利用三角函數模型來解決這些實際問題其步驟爲：

(1) 蒐集數據。

(2) 利用電腦描繪出對應的分布圖。

(3) 模擬最適合函數模型，並計算其誤差。

(4) 利用推測出的函數模型解決實際問題。

在連續兩個生活中的三角函數應用的例子中，都是跟三角函數的週期性質有關。利用這些實際應用的例子，在教學過程中融入數學建模的操作方式，可讓學習者了解如何從一個實際生活中的問題或觀察到的現象，利用已有的數學概念加以整理，找出合適的數學模型，並利用於解決問題，讓學習更有意義；更可以讓學習者明白三角函數並不是一個學而無用的領域，學習的重點也非僅有公式的操弄。

透過這種方式的學習，在過程中可以讓學習者充分的思考與討論，達成合作學習及問題解決的目的，這對學習者而言才是最重要的。

3-3 尋找聲音的起源～利用三角函數的疊合

在這小節中，將由留聲機的原理談起，引出聲音的波動性，並利用數學軟體的輔助來模擬聲波的波形。透過這個過程的學習，可以讓學習者了解到聲波與三角函數的正餘弦疊合及傅立葉級數(Fourier Series)的關係，甚至可以進一步與物理結合讓模擬的聲波發出聲音。

3-3-1 從留聲機說起

早在一八五七年，有個叫里昂的法國人，透過研究耳膜隨聲波震動的現象，製作了一個能夠記錄聲紋的裝置，但是這個裝置並沒有辦法將記錄的聲音再生。直到一八七七年，一家叫「西方電氣」的公司，委請愛迪生（Thomas Alva. Edison U.S.A 1847~1931）研製一種簡單的電報中繼裝置，才意外發明出「留聲機」。

愛迪生當時的設計類似電話的構想，不同的是接收音波震動的部份接上一支鋼針，當他對著話筒說話時，鋼針會把振動的幅度「記錄」在一個包有錫箔外殼的捲筒上，鋼針記錄的同時捲筒也會不停的轉動。事後只要鋼針循著記錄在錫箔上的音波圖形重覆振動，連帶著話筒也跟著振動，因此捲筒上的音記帶就會換成聲音。

因為留聲機的原理都是將聲紋刻印在捲筒上，然後轉動捲筒用一根金屬探針循著筒身的刻痕拾音，由於聲音是錄製在圓筒上（蠟膜錄音），因此音帶又叫「圓筒唱片」。

http://home.pchome.com.tw/mysite/philharmonic_je/music/music1_7.htm

3-3-2 聲音的組成

留聲機的原理在就是利用了聲音的波動性，再透過適當的紀錄，將聲音的波紋保留下來，然後再透過探針在轉動的圓筒上振動而產生聲音。接下來我們就試著來了解，聲波是如何影響聲音：

聲音除了有高低之外，還有強弱與音色的差別。一般我們把聲音的音調（高低）、響度（強弱）、音色，稱為聲音三要素。聲音的音調(高低)由振動的頻率決定，頻率越高，聲音就越尖銳。女生的發聲頻率通常就比男生來得高。

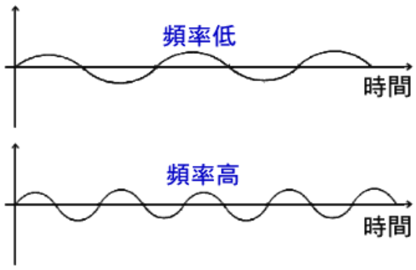


圖 3-3-1 不同頻率的波形

資料來源：http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/LIGHT/sound03.htm

而聲音的響度(強弱)，由聲波的振幅來決定，振幅越大，表示聲波的能量越高，因此聲音也就越大聲。一般我們用分貝（dB）來表示聲音的響度。

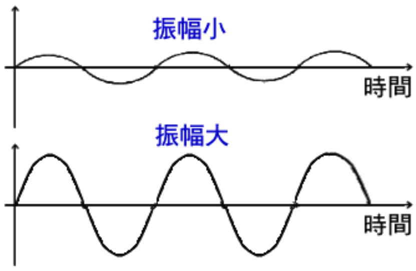


圖 3-3-2 不同振幅的波形

資料來源：http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/LIGHT/sound03.htm

最後是音色的差別。同樣是 A（La）這個音，以小提琴拉奏和以鋼琴彈奏，聽起來是不是感覺不一樣呢？這兩種樂器所演奏出來的聲音的差異，就在於音色上的不同，而音色決定於聲波的波形，大部分的樂器所發出之聲波都不是單純的正弦波，而是由基音和多組不同頻率的泛音複合而成的複合波。以下圖的波形來看，就可以發現兩者有明顯的差別。

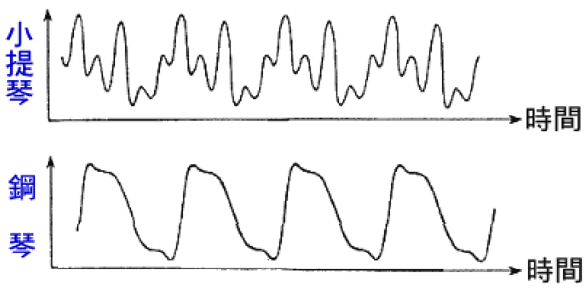


圖 3-3-3 不同樂器的波形

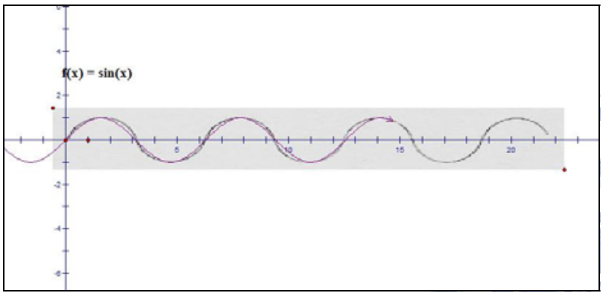
資料來源：http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/LIGHT/sound03.htm

對於同一樂器所發出的聲音，其響度、音調都可以調整，但是基音和各組泛音

的強度比卻是一定的，其音色也是一定的。就圖形而言我們可以看到同一種樂器所呈現的波形都是相同的，但其頻率、振幅會略有不同。在數學中三角函數的正餘弦圖形就具有類似波狀的圖形，因此我們想試著找出聲音的最基本波形是否能透過三角函數的圖形疊合而成。

3-3-3 分析人的聲音

我們試著用數學軟體 GSP 來模擬人所發出的聲波，試圖分析出我們所發出的聲音中的簡單波形。先從基本的音叉聲音波形做起(圖 3-3-4)，再模擬雙簧管(圖 3-3-5)所發出的聲音，讓學生體驗聲音是可以用三角函數圖形疊合而成，再進一步以英文單字”six”為例(圖 3-3-6)：



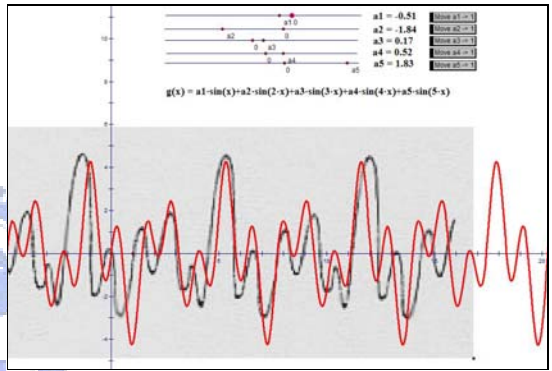


圖 3-3-4 模擬音叉聲音波形

圖 3-3-5 模擬雙簧管聲音波形

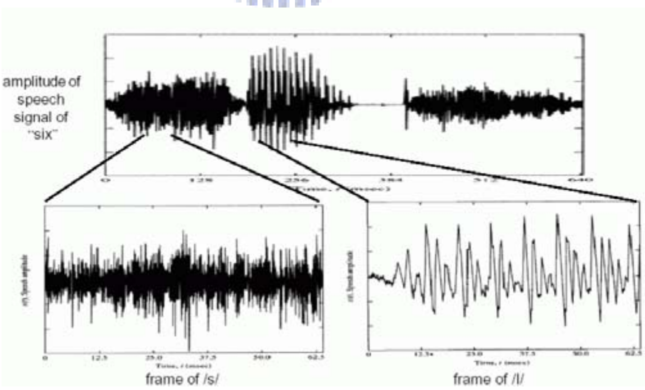


圖 3-3-6 英文單字”six”的聲波

資料來源：

http://neural.cs.nthu.edu.tw/jang/books/audioSignalProcessing/humanSpeechProduction.asp?title=3-1+%A4H%C1n%AA%BA%B2%A3%A5%CD

再放大觀察字母 i 的組成，可以發現有規律性：

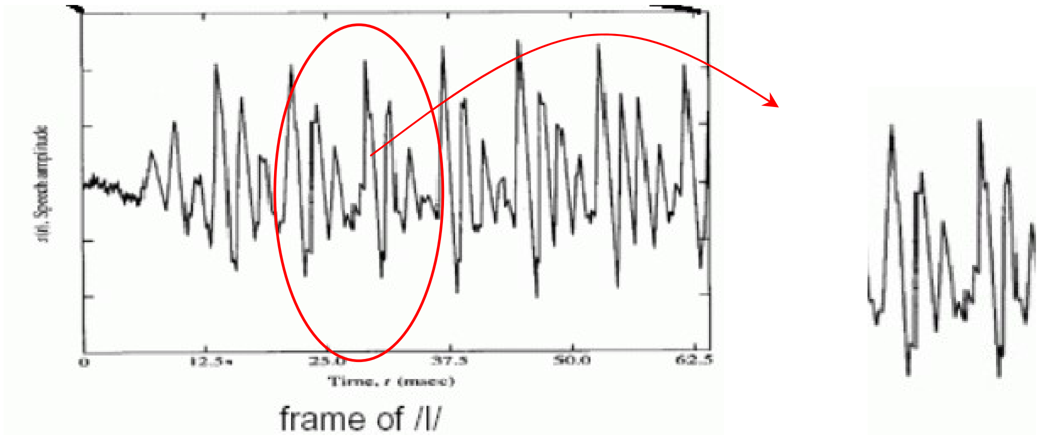


圖 3-3-7　字母 ”I” 的波形

因此，以 GSP 尋找其基本元素：猜想 I 的波形是由多個正弦波所組成，先以六個正弦函數來疊合模擬，進而用七個、八個正弦函數來疊合模擬(如圖 3-3-8～圖 3-3-10)：

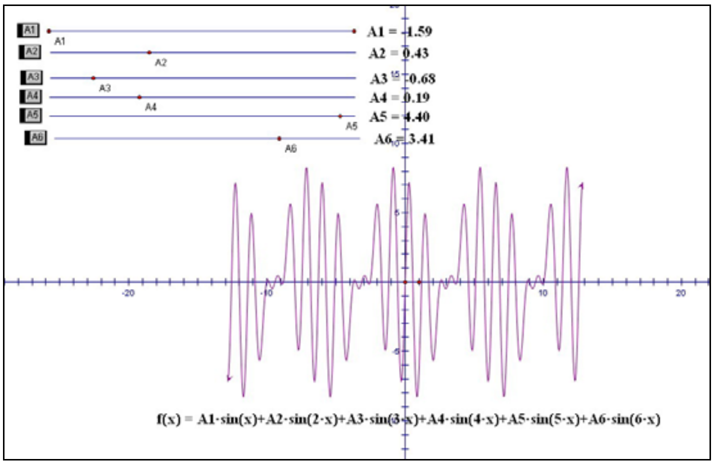


圖 3-3-8 由六個正弦函數組成

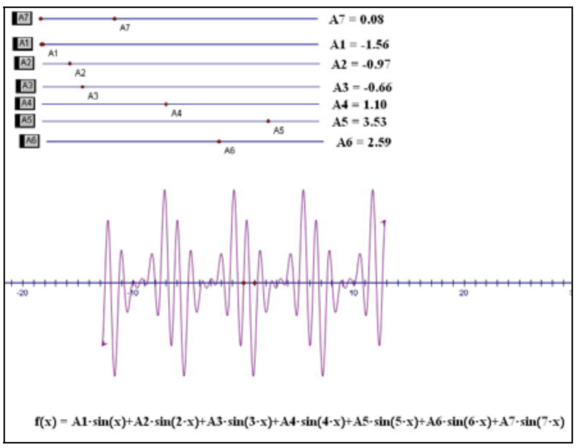


圖 3-3-9　由七個正弦函數組成

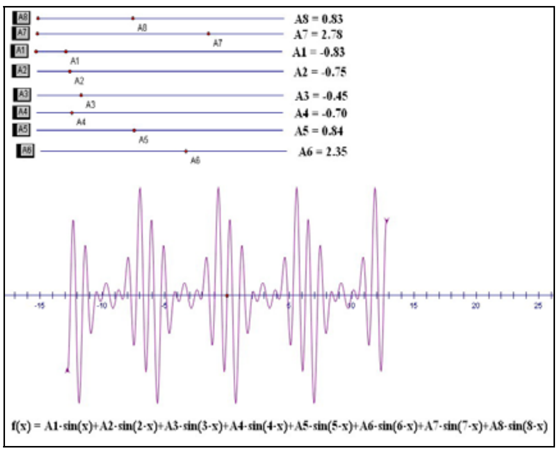


圖 3-3-10 由八個正弦函數組成

由以上圖形觀察，人的聲音波形相當複雜，但隨著加入越多個函數的基本型，其畫出來的圖形就越相似，像這樣由三角函數中多個正弦、餘弦疊合而成的函數即是傅立葉級數。利用這個概念，我們可以分析出每個人的各種聲波，就像指紋一樣，藉由觀察這些波形可以得知是不是同一個人的聲音。相反的，我們也可以藉由適當的調整傅立葉級數，得到不同的波形而製造出不同的聲音，可用於聲音模擬。

3-3-4 傅立葉級數

傅立葉級數(Fourier series)主要是由正弦函數及餘弦函數相加而成，如

$$f(x)=a_0+a_1\sin x+b_1\cos x+a_2\sin 2x+b_2\cos 2x+a_3\sin 3x+b_3\cos 3x+\cdots$$

是由傅立葉(Fourier, Jean Baptiste Joesph)所提出，他甚至提出「任一函數都可以展成三角函數的無窮級數」，這理論由他的學生狄里克雷(Dirichlet,1805~1859)找出能展成無窮級數所需的條件，簡單的說只要在一週期內沒有無限多的局部極大與極小，便可展成傅氏級數(林孝信,1970)，因爲在理工科中所用到的函數大部份都能滿足這個條件，因此傅氏級數廣泛的應用在這些領域中。

對函數的性質與圖形的掌握如果能更紮實，將有助於學習者在高等數學與高中數學間的銜接，如圖 3-3-11～圖 3-3-16 利用 GSP 繪圖，我們可以看到簡單的傅立葉級數的函數圖形隨著項數的累加，其圖形越來越接近數位信號，這在電腦、聲音傳遞中被廣泛的應用。

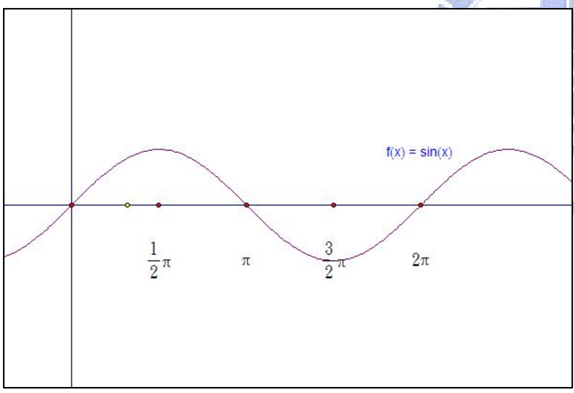


圖 3-3-11　f(x)= $\sin x$

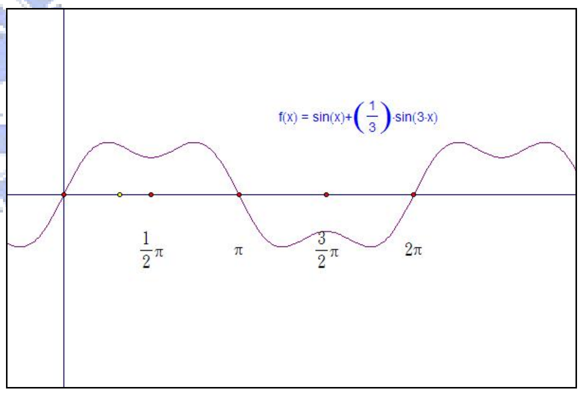


圖 3-3-12　f(x)= $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$

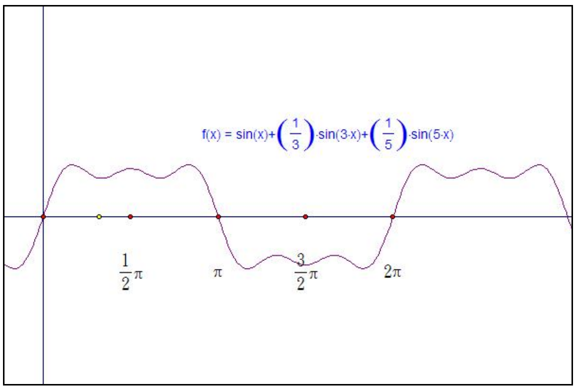


圖 3-3-13　f(x)= $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$

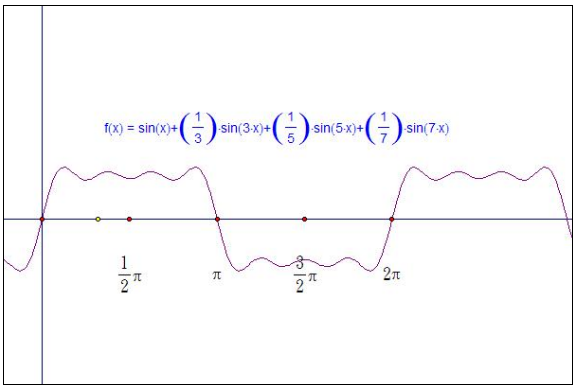


圖 3-3-14　f(x)= $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x$

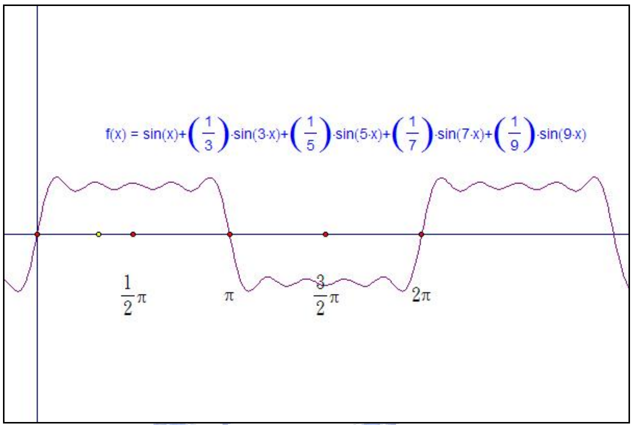


圖 3-3-15　f(x)= $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x$

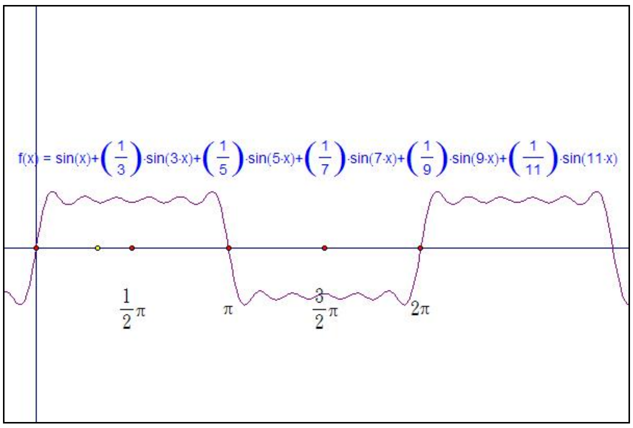


圖 3-3-16　f(x)= $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x+\frac{1}{11}\sin 11x$

第四章 三角函數動態學習環境建構

在本章節中，首先以 GSP 為主要工具從三角函數最基本的弧度、角度說起，進而介紹畢氏定理與餘弦定理的相關性，並觀察 $y = a\sin(bx + c)$ 的振幅、週期的改變；再描繪 $\frac{\sin x}{x}$ 圖形，利用夾擠定理與 sin$x$ 的切線斜率證明 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，進而說明 f(x)=sinx 的微分為 f`(x)=cosx。

其次改使用 MathPS，以面積、正餘弦疊合、畢氏定理等不同的觀點來看和角公式。

4-1 觀察三角函數

對大部分的高中生而言，三角函數往往是他們感到最為頭疼的數學領域。因為三角函數使用了簡單的函數符號來做各種推論，雖然帶來了思考與運算上的便捷，可是也將問題變的抽象而不直覺，使得學生往往看的一頭霧水，遲遲無法進入狀況。

有鑑於此，因此我希望能夠透過 GPS 的動態展示來輔助三角函數的教學。一方面可以提供給學生一種較為直觀的了解；另一方面也可以藉由電腦的動態展示，來彌補書本上只有靜態示意圖的缺憾。並期望能夠透過這種方式，讓學生能夠對三角函數有更圖形化的了解，以打破他們對於三角函數的恐懼心理。

4-1-1 角的度量(弧度的定義)

我們最早學習用來度量角度的單位是「度」(degree)，據傳始於巴比倫人，將圓周角的 $\frac{1}{360}$ 當成 1°，這樣用 1 度為單位來量角的大小的方法就叫”角度制”。1 度的大小不因為圓的大小而改變，所以角度大小是一個與圓的半徑無關的量。

在高中教材中我們引進另一個度量角度的單位是「弧度」(radian) ～用弧的長度來度量角的大小。以一段弧長等於圓半徑的弧所對應的圓心角角度為 1 弧度，因此隨著圓弧的長短，其與圓半徑的比即成為該圓弧所對圓心角的弧度數，其值也不因為圓的大小而改變，故弧度也是一個與圓的半徑無關的量。

我們試圖利用 GSP 來呈現（如圖 4-1-1～圖 4-1-4），用兩個半徑大小不同的圓，而各取等於半徑之長的弧，並觀察它們所對的圓心角的大小。其結果是所對的圓心角的大小相等，這就是 1 弧度的角。再用等於各自圓的半徑的 2 倍長的弧，來觀察它們所對圓心角的大小，其結果發現所對應的圓心角大小依舊相等，定義爲 2 弧度。

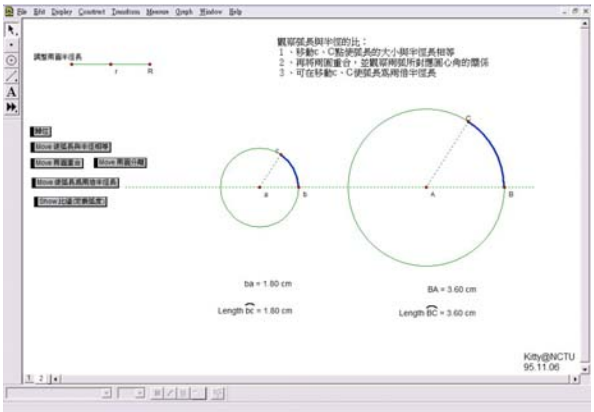


圖 4-1-1 使弧長與半徑長相等

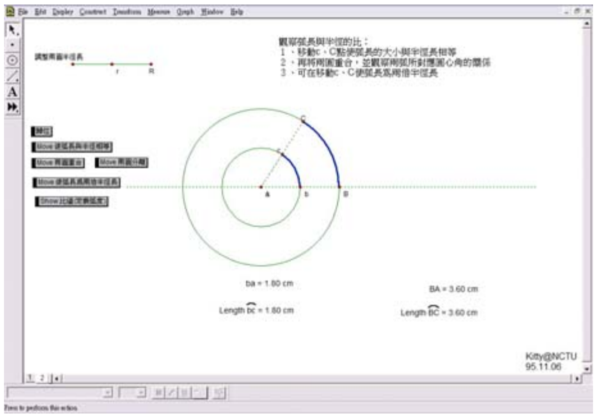


圖 4-1-2 將兩圓重疊比較圓心角

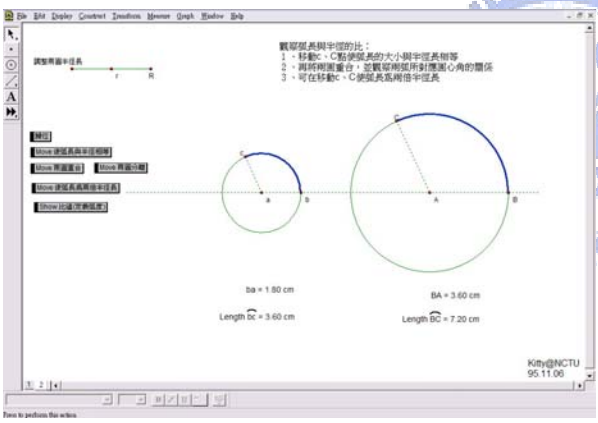


圖 4-1-3 使弧長爲半徑長的兩倍

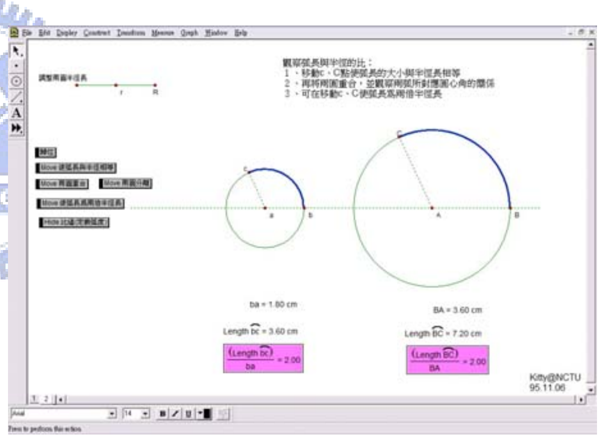


圖 4-1-4 定義弧度

再利用另一個 GSP 畫面（如圖 4-1-5）來呈現，當半徑爲 1 的圓，沿著直線滾完一圈，對應直線上的長度恰爲 2；當半徑爲 2 的圓（如圖 4-1-6），沿著直線滾完半圈，對應直線上的長度恰爲 2π。因此可得，長爲 2πr（圓周長）的弧所對的圓心角爲 2π 弧度（圓周角）。

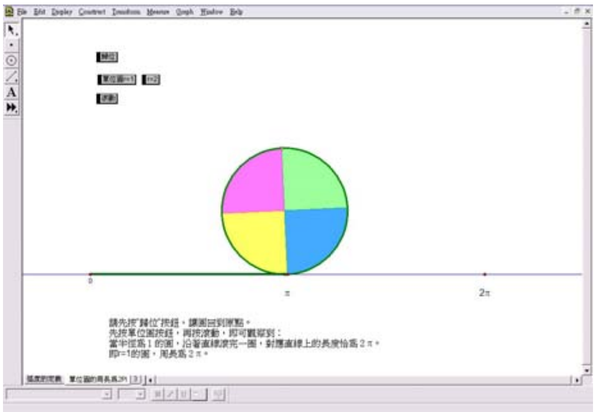


圖 4-1-5　r=1

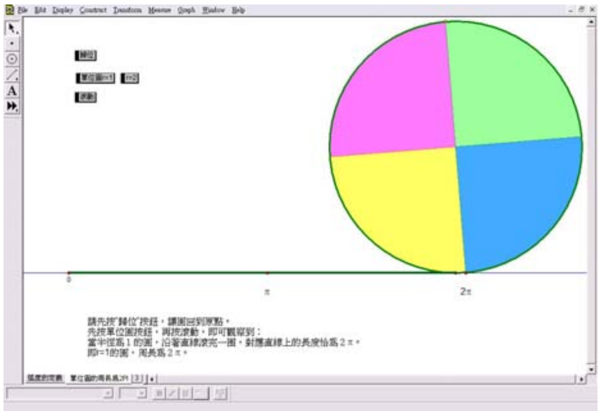


圖 4-1-6　r=2

用弧度爲單位一來可以使許多公式變的簡單許多：以度爲單位則弧長爲 S= $2\pi r\dfrac{\theta}{360^\circ}$ 、以弧度爲單位則弧長爲 S=r θ；以度爲單位則面積表示爲 $\pi r^2\dfrac{\theta}{360^\circ}$ 、以弧度爲單位面積則表示爲 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$。我們亦可藉由觀察等腰三角形與扇形，除了樣子很像，面積計算方式也很像，三角形的面積爲 $\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高 ，如果將扇形想像成一特殊的等腰三角形，其底邊長等於弧長 r θ、高爲半徑 r，借用三角形面積公式來計算，可得扇形面積爲 $A=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高$=\dfrac{1}{2}(\mathrm{r}\theta)\cdot \mathrm{r}=\dfrac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta$，這樣就將弧長與扇形面積的概念結合在一起了。(木棉，2006)

也可以和三角函數一樣，以 r 爲分母的形式來表示，

$$\sin\theta=\frac{y_1}{r}\qquad \theta=\frac{l}{r}\qquad \tan\theta=\frac{y_2}{r}\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}$$

當角度很小時我們可以很直覺的看出（如圖 4-1-7）$y_1\approx l\approx y_2$，

$$\therefore \sin\theta\approx\theta\approx\tan\theta$$

因此用弧度來度量角度時，才能將一個角的角度與其三角函數值放在一起做比較，即 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ ，這在微積分中相當重要。

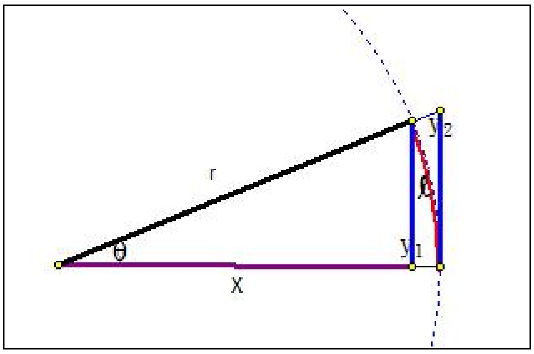


圖 4-1-7　$\sin\theta, \theta, \tan\theta$ 關係

4-1-2　畢氏定理與餘弦定理

談幾何非談餘弦定理不可，餘弦定理既承畢式定理於先，又啓內積的概念於後，在幾何學中具樞紐的地位，它的證明值得一提（張海潮，2004）。當然提到三角函數，更不能少了餘弦定理，張海潮教授試圖以歐幾里得原本中的畢氏定理証明法（如圖 4-1-8）出發，一次解決「畢式」與「餘弦」，本文則將此概念改以 GSP 動態的方式來呈現。

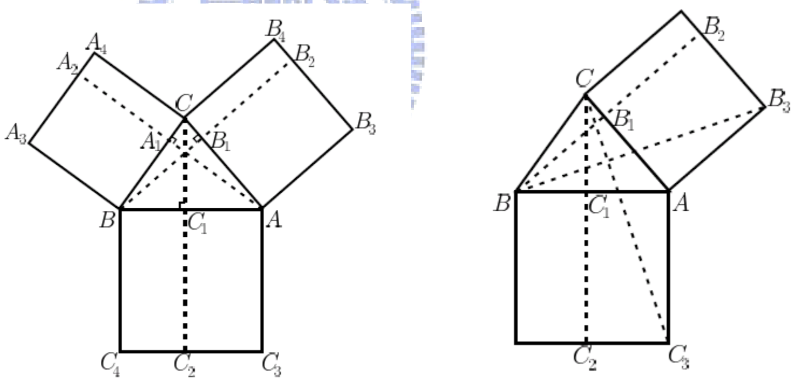


圖4-1-8 畢氏定理和餘弦定律的証明(作者原圖)

如圖4-1-9，給定一銳角三角形，其三邊長分別爲a、b、c，觀察圖中三外接正方形的面積關係。利用證明畢氏定理的方法（歐幾里得原本中的証明法），以紅色三角形爲例，在GSP環境中利用推移、旋轉的方式，其過程如圖4-1-10a~圖4-1-10d，其餘色塊類似。我們可以很清楚的觀察到圖4-1-11中，相同顏色之三角形，面積會相等。

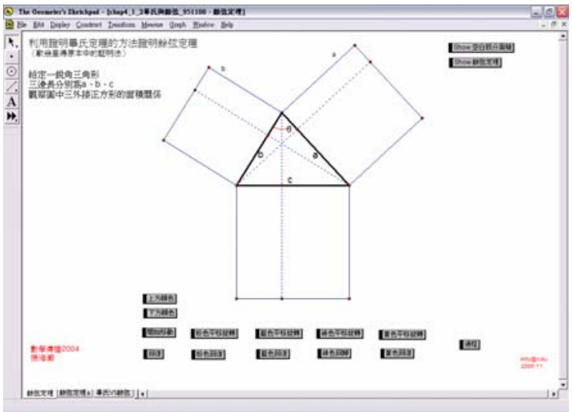


圖 4-1-9 餘弦定理証明

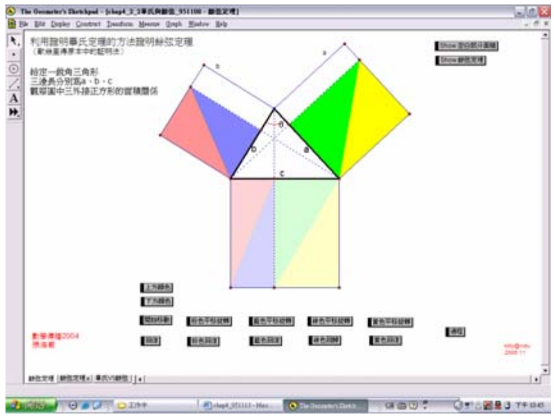


圖 4-1-10a 起始狀態

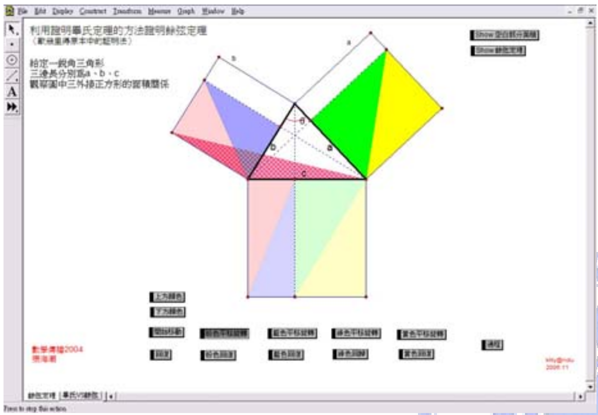


圖 4-1-10b 紅色三角形推移

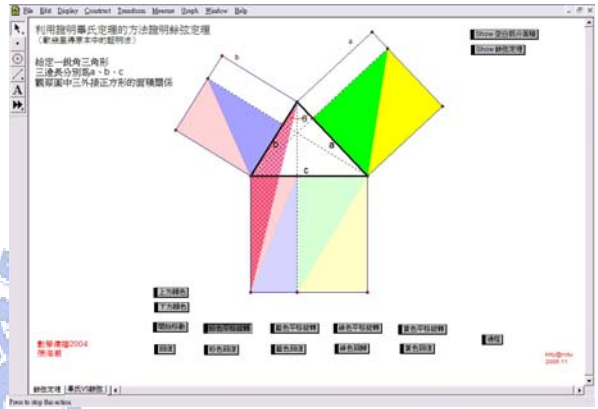


圖 4-1-10c 紅色三角形旋轉

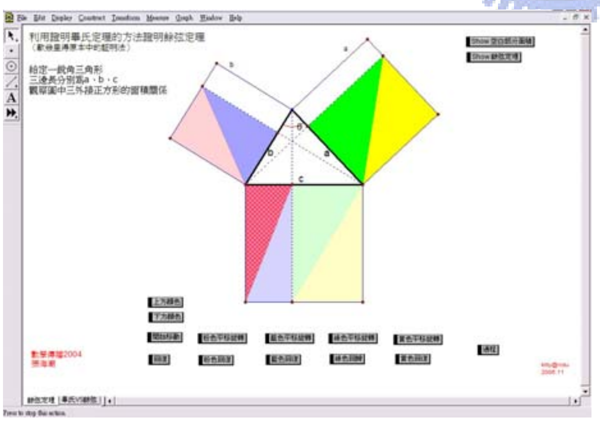


圖 4-1-10d 紅色三角形再推移

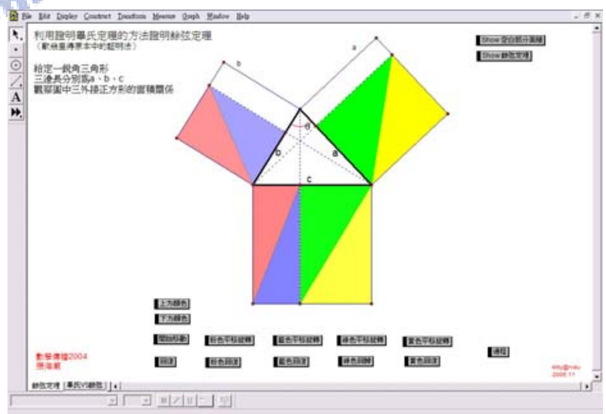


圖 4-1-11 觀察區塊顏色

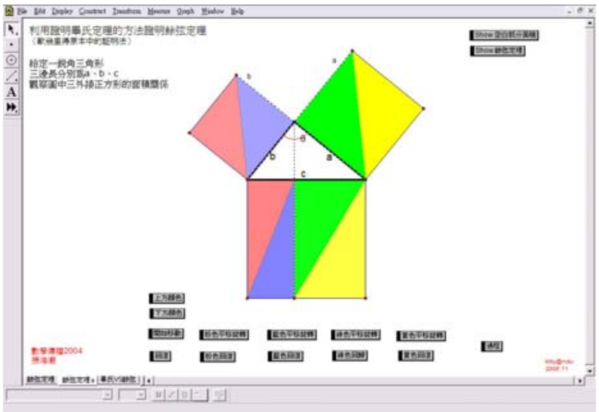


圖 4-1-12 移動成直角三角形

故可得三正方形面積有$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta$的關係。在此環境中，我們可以適當的調整三角形，使之成爲直角三角形，即可看到畢氏定理的歐幾里得原本証明方法(如圖4-1-12)。雖然這不是一個很嚴謹的証法，且鈍角三角形的情況無法很直觀的看出，但藉由GSP來動態呈現這個證明，對學生而言是很容易留下印象的，而且可以跟畢氏定理做連結，也可以任意調整三角形；相較於靜態的呈現可以免去一些符號的說明，對學生的學習更會更有助力。

這一部份利用GSP的呈現，讓學生可以很直覺的觀察到圖形間的變化關係，但在做出一連串的動態效果時，是需要花費相當多的時間。在製作前要先想好要呈現的重點、方式，再利用GSP的功能，例如：適當的利用 hide and show 的功能按鈕，當原本的圖形無法做旋轉的效果時，可以產生另一合適的三角形在同一位置出現加以取代，分許多步驟去完成他。每一顏色分開製作，在製作過程中所產生的點或線，如沒有必要須加以隱藏，因爲新產生的物件會置於最上層，將可能會影響到下一個顏色的製作，當完成一個顏色的步驟時，可製作一 hide and show 的按鈕，將過程隱藏以免畫面凌亂，如有修改需要時可針對各個顏色分別顯現再修改之。

4-1-3 $y = a\sin(bx + c)$ 與正餘弦疊合

在網路四通八達的環境下，學生可以藉由電腦上網找資料、找公式，許多計算也可以藉由電腦來協助。因此學習三角函數不應著重於三角關係式的運算，而是要能掌握整體的概念，能了解三角函數是一種具有週期性且用於解三角形的函數。

三角函數的圖形是學習的重點之一，且在中國的普通高中數學課程標準中提到，在三角函數的學習中，希望學生能藉助電腦畫出 $y = a\sin(bx + c)$ 的圖形，觀察參數 a,b,c 對函數圖形變化的影響。因此利用 GSP 先描繪出 y=sin$x$ 的圖形(下

圖紅色細線部分)，再藉由操作 a,b,c 值的變化（如圖4-1-13～圖4-1-15），希望學生能藉此觀察出 a 值會控制振幅，b 值會控制週期，c 值的改變會造成圖形的位移。

這個GSP的呈現時，先分別預設好數個 a,b,c 值的選項，可直接點選這些按鈕觀察其對圖形的影響，其中 c 值的選項按鈕預設為 $\frac{\pi}{2}$, π , 2π 等選項，在教學使用上更為方便且直觀。還可以利用拉動線段的方式來手動控制 a,b,c 值的大小，讓學生可以有更多的嘗試及選擇，確實的觀察、了解這三個數對圖形的影響分別為何。

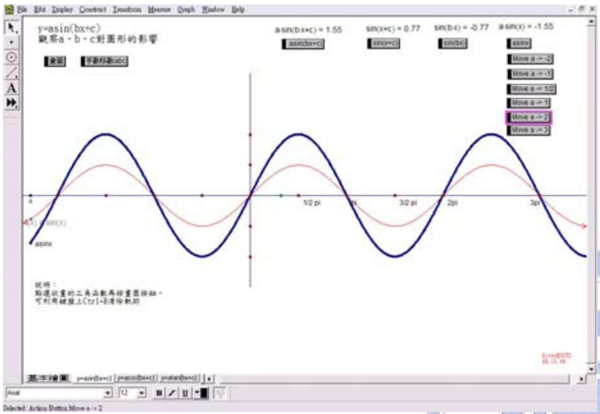


圖 4-1-13a　a=2

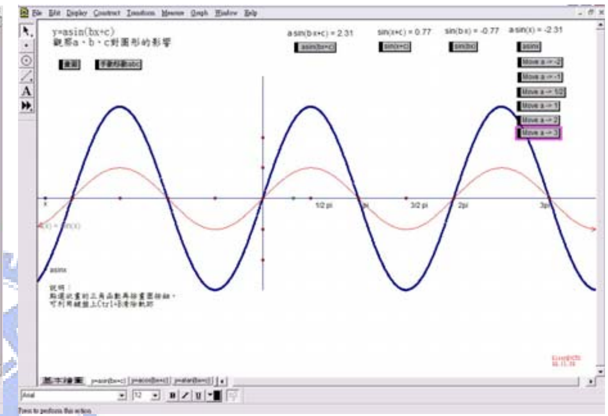


圖 4-1-13b　a=3

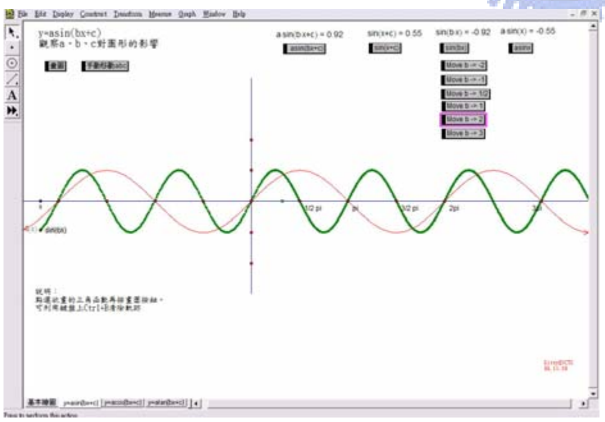


圖 4-1-14a　b=2

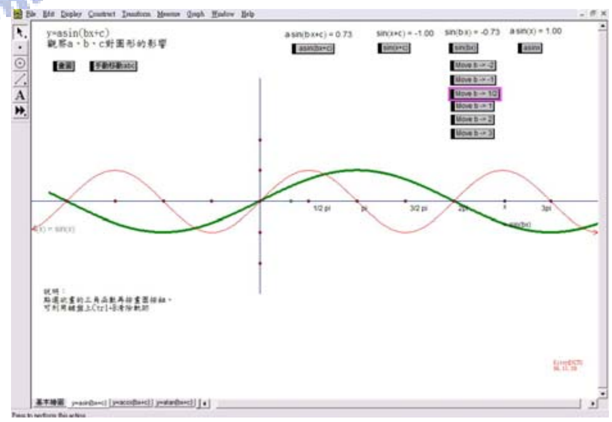


圖 4-1-14b　b=$\frac{1}{2}$

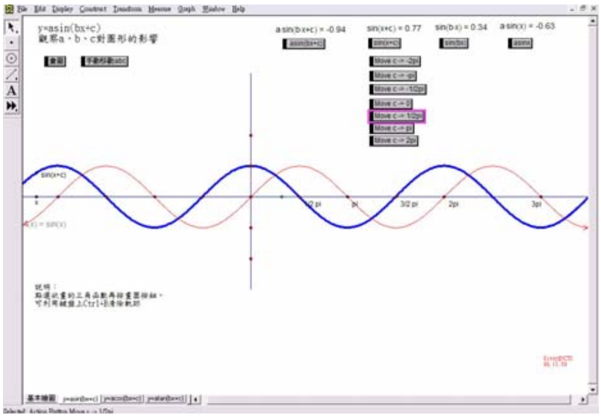


圖 4-1-15a　c=$\frac{1}{2}\pi$

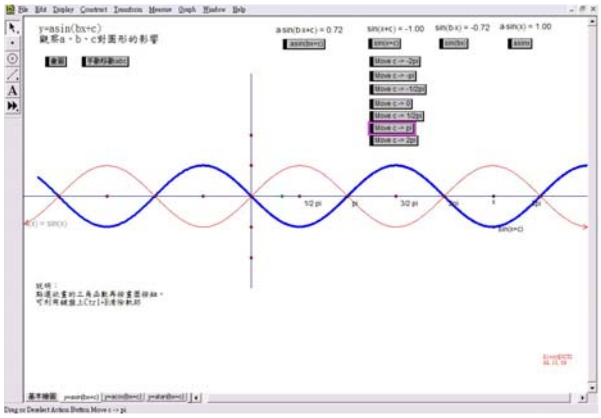


圖 4-1-15b　c=π

同理，亦可觀察 $y = a\cos(bx + c)$（如圖4-1-16～圖4-1-18）、$y = a\tan(bx + c)$（如圖4-1-19～圖4-1-21）圖形中 a、b、c 值的變化，對圖形的影響。

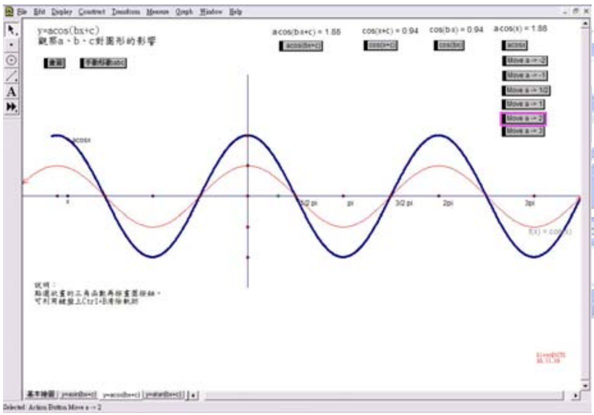


圖 4-1-16a　a=2

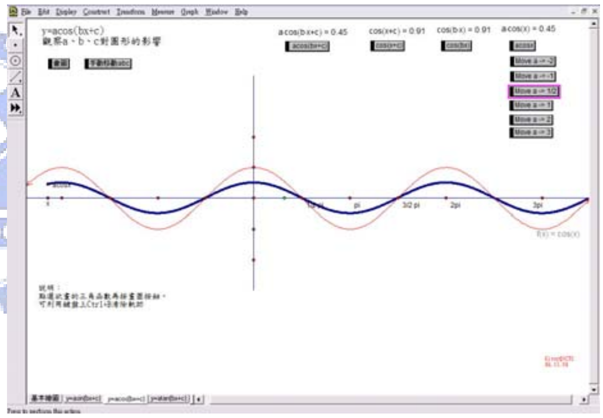


圖 4-1-16b　a=$\frac{1}{2}$

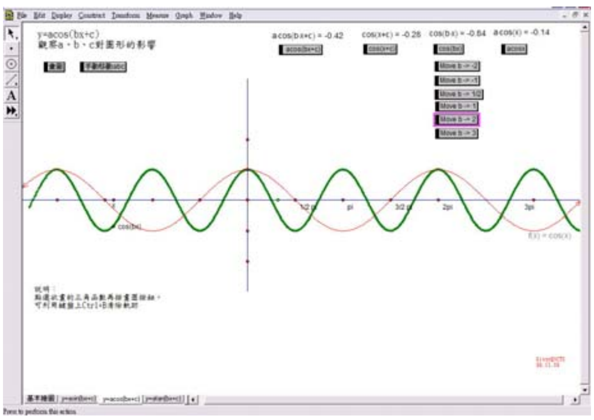


圖 4-1-17a　b=2

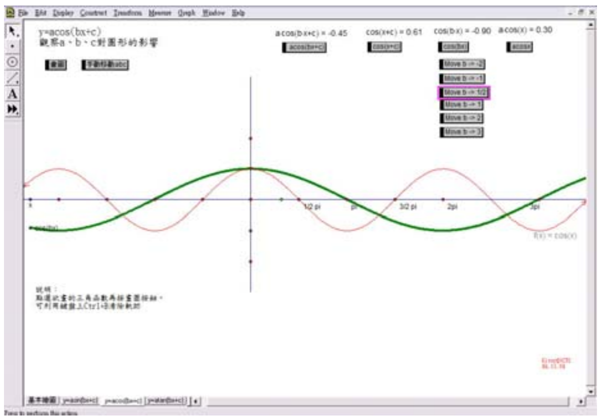
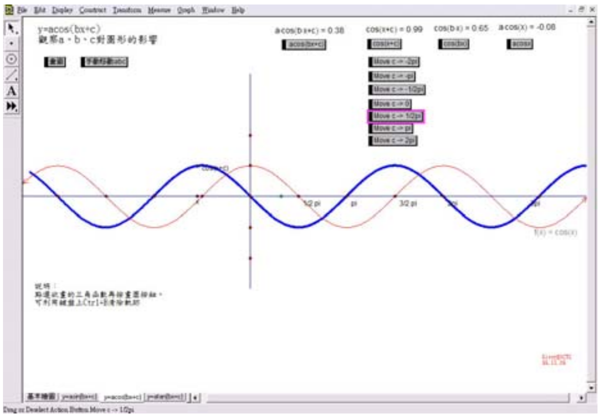


圖 4-1-17b　b=$\frac{1}{2}$



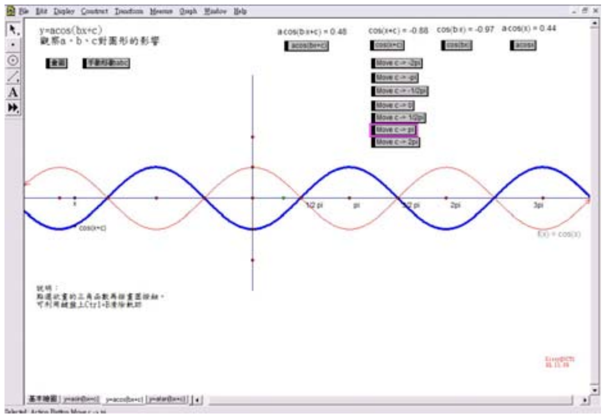
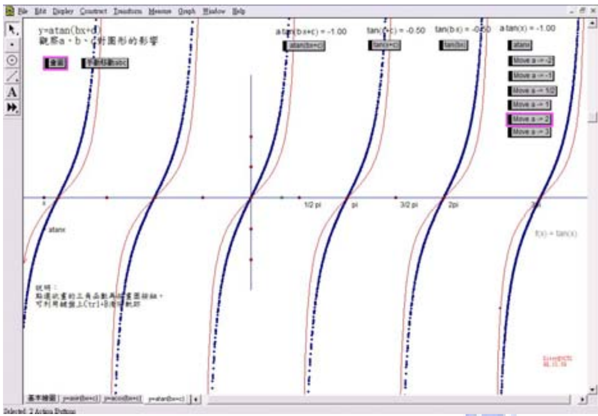


圖 4-1-18a　c=$\frac{1}{2}\pi$　　圖 4-1-18b　c=π



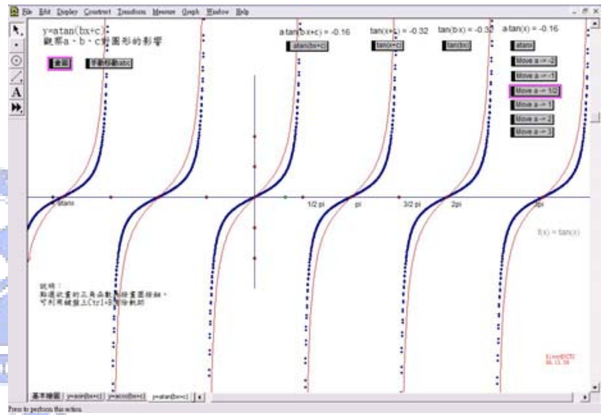
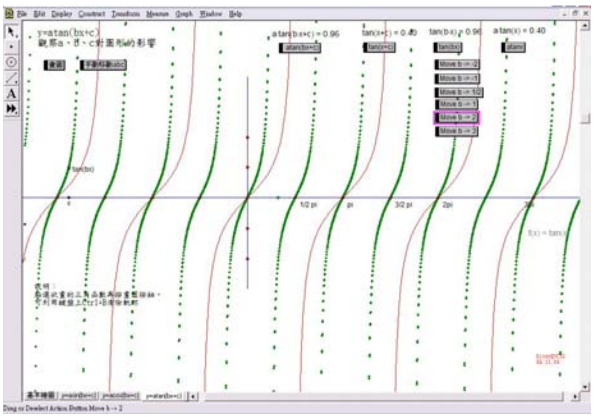


圖 4-1-19a　a= 2　　圖 4-1-19b　a=$\frac{1}{2}$



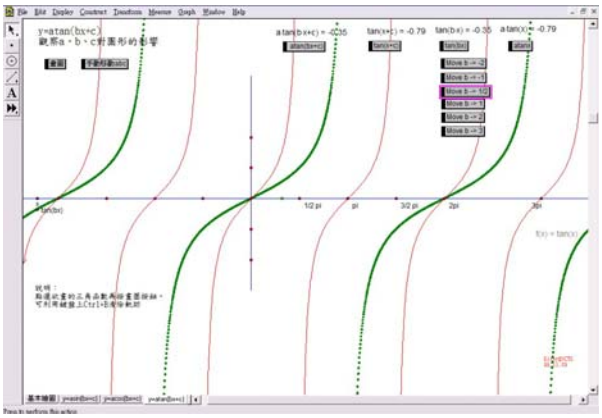
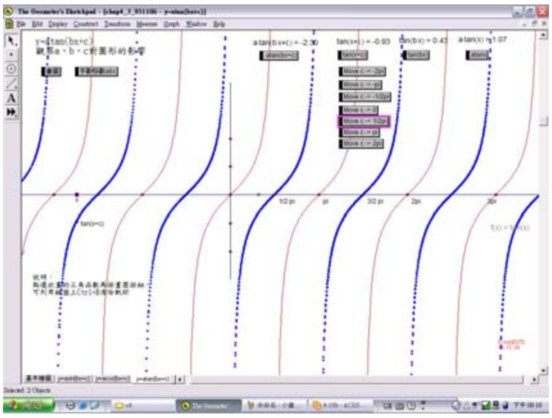


圖 4-1-20a　b=2　　圖 4-1-20b　b=$\frac{1}{2}$



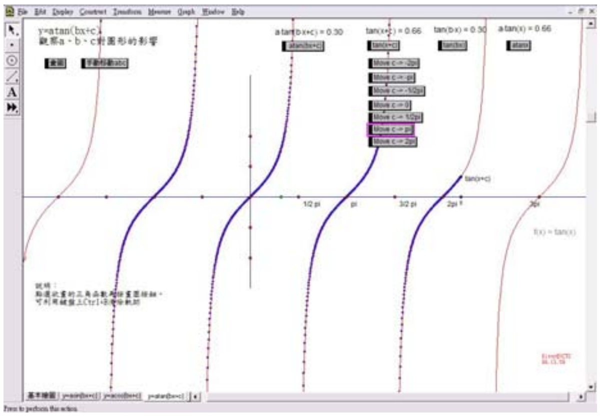


圖 4-1-21a　c=$\frac{1}{2}\pi$　　　　　　圖 4-1-21b　c=π

這一部分的作圖利用GSP的操作，對教師而言可省去許多繪圖的時間，而學生卻可以很清楚的看見各圖形間的關係。課後學生還可回家自行操作，再搭配問題的探索，可以讓學生對於三角函數圖形的變換(振幅、週期、平移)規律更加清楚。而且在製作的過程中只要先完成 $y = a\sin(bx + c)$ 的製作，再推演至 $y = a\cos(bx + c)$ 、$y = a\tan(bx + c)$ 就非常輕鬆了。

在完成了正弦、餘弦與正切函數的圖形後，我們試著將正餘弦函數疊合。分別以紅色代表正弦函數、藍色代表餘弦函數，再將兩函數乘上倍數後相加，可得其疊合的圖形仍為一正弦波圖形。利用GSP中的計算及繪圖功能，直接得如圖4-1-22 之圖形。

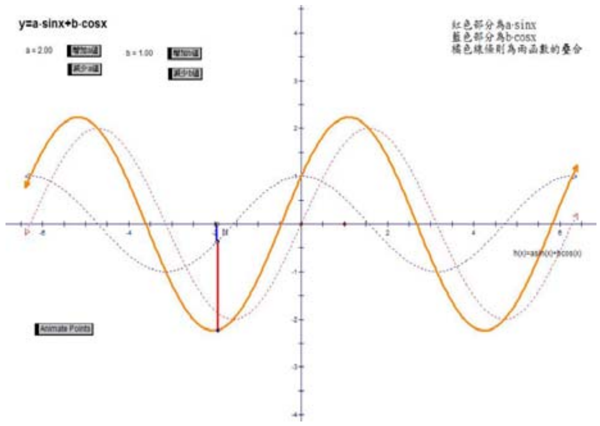


圖4-1-22　正餘弦疊合

其次，參考日本一教學網站(註1)，呈現疊合的方式與Proofs without words (Mathematics Magazine 1998)概念相似（將於下一小節中以MathPS呈現），故將其概念用GSP呈現，可得圖4-1-23a～圖4-1-23c。

(註1)http://www.ies.co.jp/math/java/trig/gondla/gondla.html

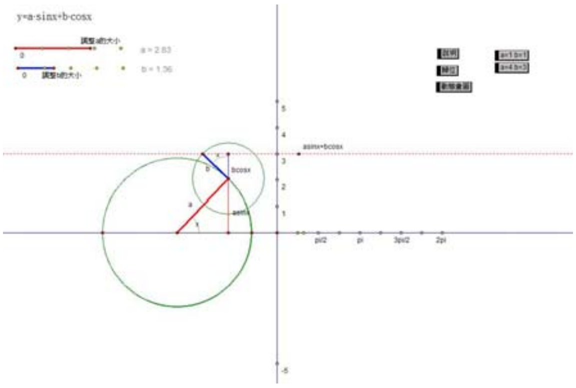


圖 4-1-23a 正餘弦疊合

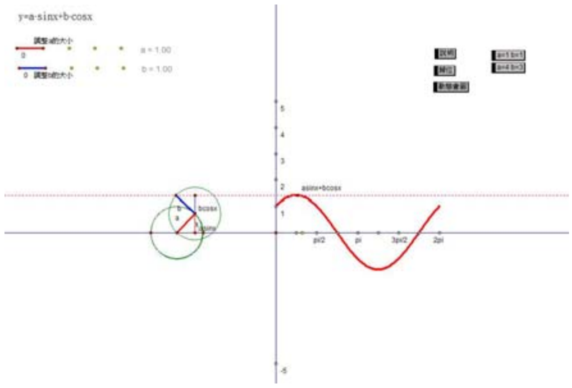


圖 4-1-23b　a=1 b=1

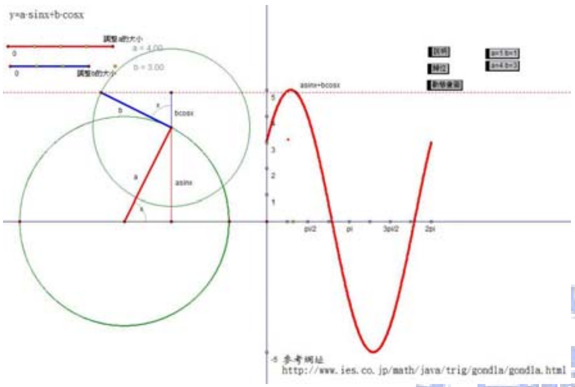


圖 4-1-23c　當 a=4 b=3

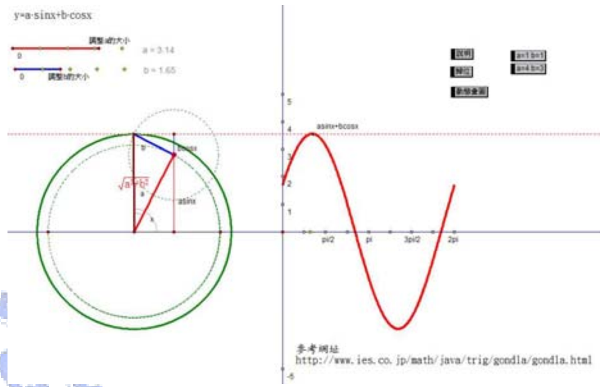


圖 4-1-24 最大值$\sqrt{a^2+b}$

利用這個呈現方法也可以很直觀的看出(1)式中，疊合後係數 $\sqrt{a^2+b^2}$ 從何而來，如圖4-1-24 .

$$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi) \qquad (1)$$

4-1-4 $\frac{\sin x}{x}$ 與 $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$

用弧度來度量角度時，一個很小的角度會和其正弦值近似，角度越小越接近，即 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，這在微積分中相當重要。以下利用GSP以三種不同的方法來呈現這個極限。

4-1-4-1 直接做圖法

藉由GSP直接畫出 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的圖形（如圖4-1-25），我們可以直接觀察

出除了 x=0 外都有定義，且當 x 很靠近 0 時，所對應的函數值相當接近 1，並可由圖形看出其對稱於 y 軸、滿足 f(-x) = f(x) 偶函數的特性、振幅隨著$|x|$的增加而遞減，亦可把 f(x)想成正弦波被擠壓包絡在 $y=\pm\frac{1}{x}$ 之間，如圖中紅色虛線與藍色虛線所呈現。

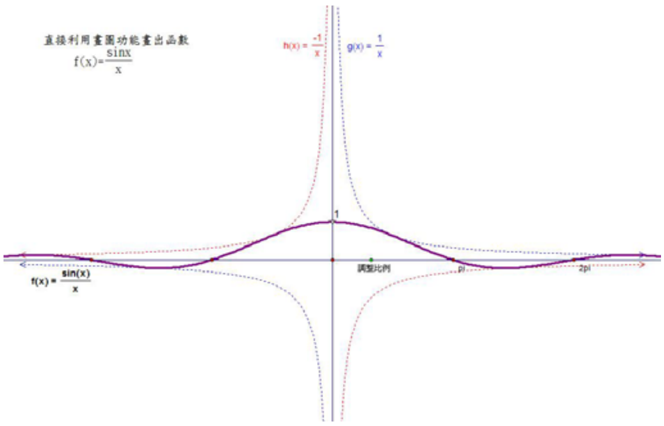


圖 4-1-25 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

4-1-4-2 夾擠定理

利用面積的關係來證明 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ．如圖4-1-26 當圓半徑為 1 時，可得面積關係：

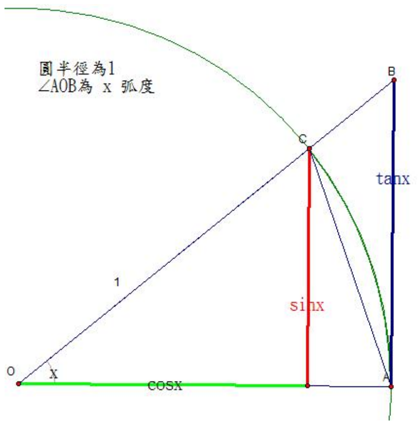


圖 4-1-26 圓半徑為 1

$$\Delta AOB > \text{扇形AOC} > \Delta AOC$$

$$\frac{1}{2}\tan x > \frac{1}{2}x > \frac{1}{2}\sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

所以當 x 趨近於 0 時，cos x 趨近於 1 .

因此，由夾擠定理可知 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4-1-4-3 切線斜率

先做 $y=\sin x$ 的圖形，在圖形上取A(0，sin 0)、B(x，sin x)，則 $\overline{AB}$ 的斜率即為 $\frac{\sin x}{x}$，當 B 點往 A 點靠近時，即 $x \to 0$ 時，$\overline{AB}$ 斜率會越來越接近 1 .

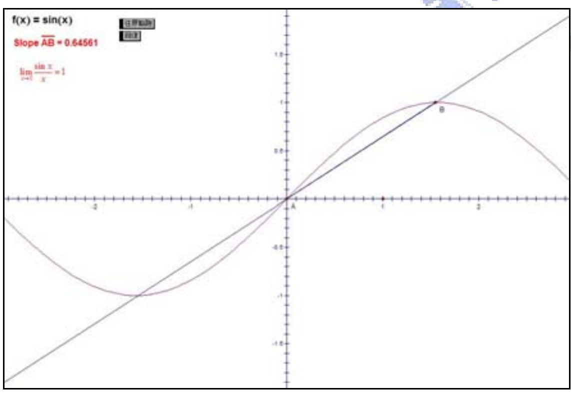


圖 4-1-27a 取A、B兩點

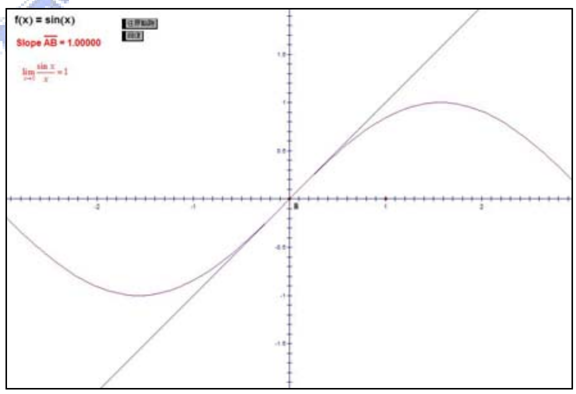


圖 4-1-27b B點往A點移動

綜合以上三種方法，我們不難發現 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 是成立的，接下來將此結果應用至微分公式 $(\sin x)' = \cos x$ 的證明。依定義證明可得

$$y = \sin x$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(\sin \mathrm{x}\cdot\frac{\cos h-1}{h})+\lim_{h\to 0}\cos \mathrm{x}\cdot\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}(\frac{\cos h-1}{h})+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

故 $y' = \cos x$ ■

亦可利用 GSP 做圖來幫助了解，如圖4-1-28 中，上方呈現的爲 y=sinx 的圖形，將每一點的 x 座標與其切線斜率(設爲 y座標) 對應的描繪在下方的座標系中，可觀察出其圖形爲餘弦函數y=cosx 的圖形。

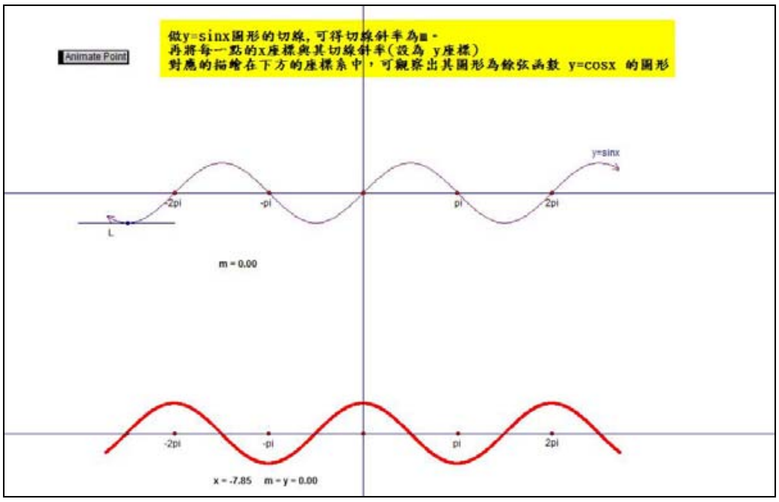


圖4-1-28 利用切線斜率求導數

在課堂上利用 GSP 的操作對教師而言可省去許多繪圖的時間，課後學生還可回家自行操作，再搭配問題的探索，可以讓學生對於三角函數圖形的變換(週期、平移)規律更加清楚。

4-2 和角公式

在三角函數的相關學習中，最令人頭痛的部份莫過於公式太多，不容易記憶。但如果將這些公式統整後，不難發現有許多公式都是由和角公式出發，如兩倍角公式、半角公式、和差化積公式、積化和差公式…等。在傳統課本中，總是先求 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，然後利用此公式再推導 $\cos(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha-\beta)$。其推導的過程是利用：如圖 4-2-1，於單位圓上取兩點 A($\cos\alpha$, $\sin\alpha$)、B($\cos\beta$, $\sin\beta$)，假設 $\alpha>\beta$，可利用距離公式及餘弦定理証得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，方法如下：

由距離公式可得 $\overline{AB}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$

$$\overline{AB}^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \qquad (1)$$

再由餘弦定理 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$$=2-2\cdot\cos(\alpha-\beta) \qquad (2)$$

由(1)、(2)即可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

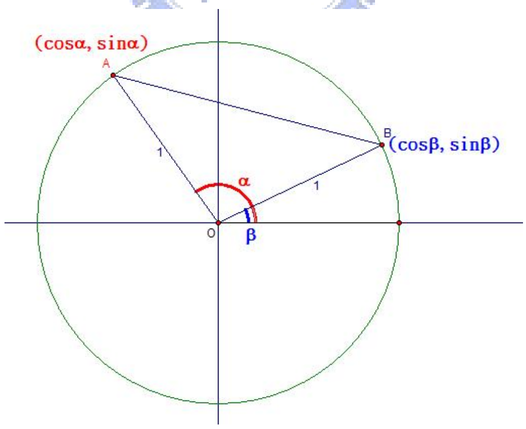


圖4-2-1 單位圓

但在教學的過程中，學生卻常因無法適當地表達出 A、B 的點座標或是忘了距離公式、餘弦定理等因素，而無法自行推導出和角公式，因而有強記、學習困難的學習經驗。

於 Proofs Without Words I、II 二書中提供了多種不一樣的圖說證明，對學習者而言，可以從基本的幾何圖形如直角三角形、矩形或圓形，推演出和角公式。在教學上可利用 PowerPoint 的動態呈現來介紹正餘弦函數的和角公式（黃國忠,2006），能提供一

個視覺化的環境讓學習者加深印象，對學生的學習將更有幫助。

藉由簡單的基本圖形來證明和角公式，對學生的學習的確輕鬆許多，但如果在這一些圖說證明中，能讓學生重複利用同一圖推論出不同的三角關係的話，將能更加深學習印象，因此在本章節中將利用三個不同的例子同時呈現正弦的和角公式與另一個三角關係：正弦與餘弦的和角公式、和角公式與正餘弦疊合、畢氏定理與和角公式，藉此加深學生的學習印象。

4-2-1 以面積的觀點證明和角公式

本例是整合自V. Priebe and E. Ramos (Mathematics Magazine , 2000) 及 William T. Webber and Matthew Bode (Mathematics Magazine , 2002) 所提出的正弦與餘弦的和角公式，在一矩形中平移內接的四個直角三角形，觀察其面積的關係：在一矩形中，取四個直角三角形，對角的兩個直角三角形全等，斜邊均相等定爲1單位長，如圖4-2-2，將這四個直角三角形推移後，觀察前後圖形中白色部分面積，即可推論出正弦的和角公式(如圖4-2-2a～圖4-2-2b)爲

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

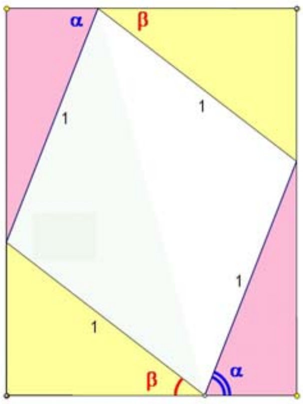


圖 4-2-2 矩形內接四直角三角形

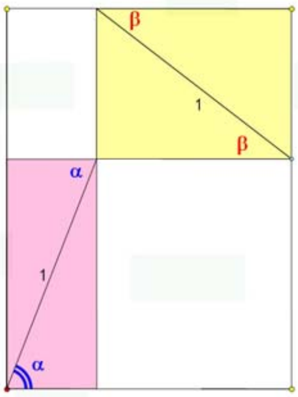


圖 4-2-2a 移動三角形

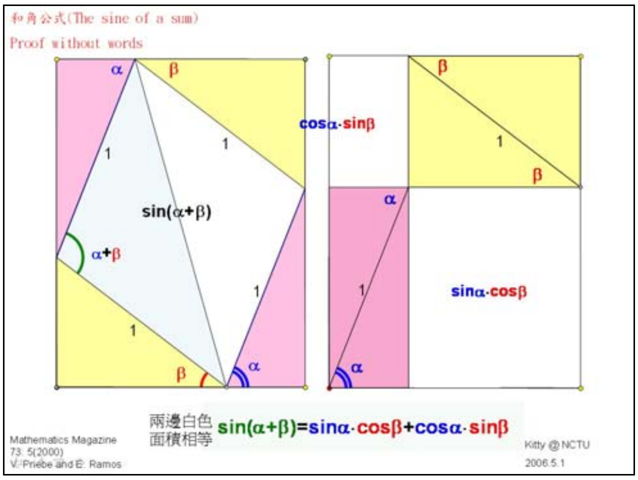


圖 4-2-2b 觀察兩邊白色部分面積

同理，利用相同圖形改取黃色三角形中另一角爲γ(如圖4-2-3)，再將這四個直角三角形推移後，觀察前後圖形中白色部分面積，即可推論出餘弦的和角公式(如圖4-2-3a～圖4-2-3b)爲：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

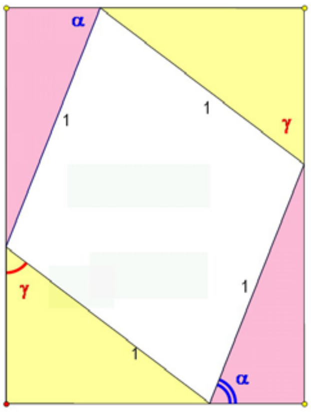


圖4-2-3 矩形內接四直角三角形

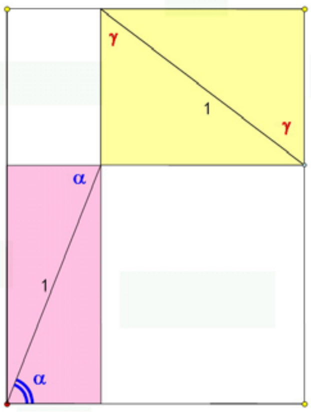


圖4-2-3a 移動三角形

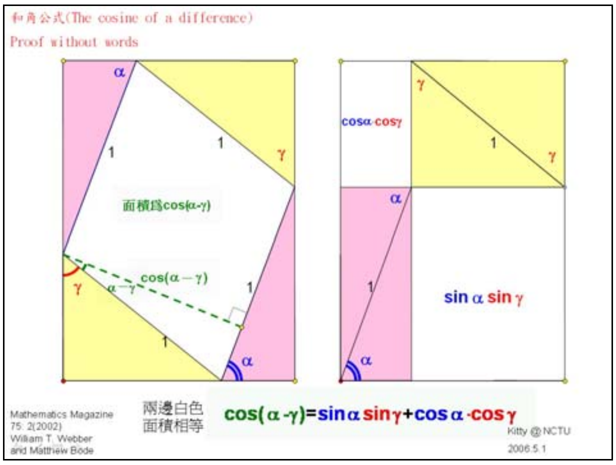


圖 4-2-3b 觀察兩邊白色部分面積

4-2-2 和角公式與正餘弦疊合

本例是整合自R.B.Nelsen (Proof without words II) 及 Rick Mabry & Paul Deiermann (Mathematics Magazine , 1998) 試圖利用一個矩形中的直角三角形的關係，同時說明正弦的和角公式與正餘弦疊合：在一矩形中取一直角三角形AEF，並令其斜邊 $\overline{AF}=1$、$\angle FAE=\alpha$、$\angle EAD=\beta$ (如圖4-2-4)，可得 $\overline{EF}=\sin\alpha$、$\overline{EA}=\cos\alpha$，進而求出紅色與藍色線段長，再自F點作一垂線，觀察此垂線長與紅色、藍色線段長關係，可得正弦的和角公式(如圖4-2-4a、圖4-2-4b)：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

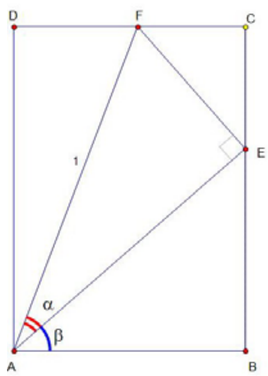


圖4-2-4 觀察邊角關係

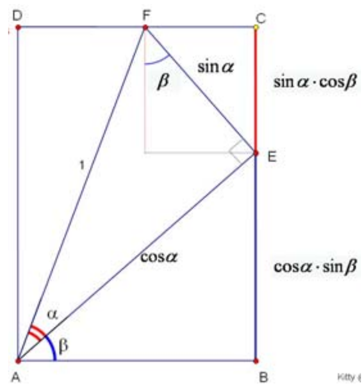


圖4-2-4a 求紅色、藍色線段長

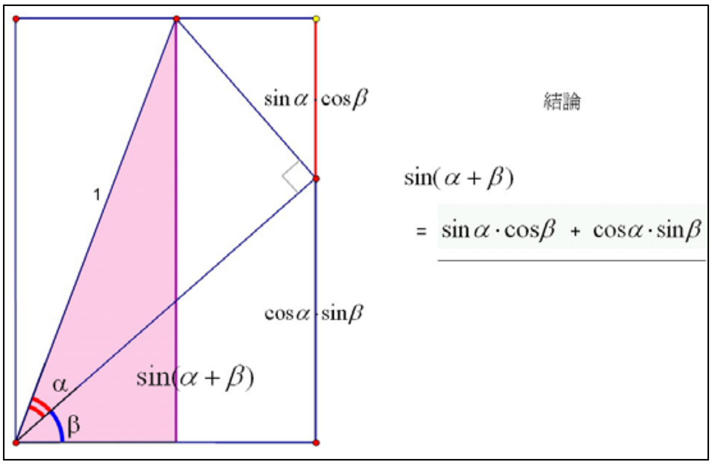


圖 4-2-4b 正弦的和角公式

利用相同的圖，令其斜邊 $\overline{AF}$ =r、 $\angle FAE=\theta$ 、 $\angle EAD$=x（如圖4-2-5），可得 $\overline{EF}=\sin\theta$ 、 $\overline{EA}=\cos\theta$ ，進而求出紅色與藍色線段長，再自F點作一垂線，觀察此垂線長與紅色、藍色線段長關係，可得正餘弦疊合(如圖4-2-5a、圖4-2-5b)：

$$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=r\cdot\sin(x+\theta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\theta)$$

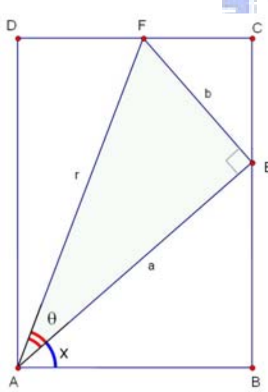


圖4-2-5 觀察邊角關係

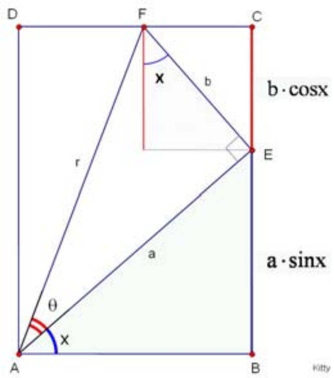


圖4-2-5a 求紅色、藍色線段長

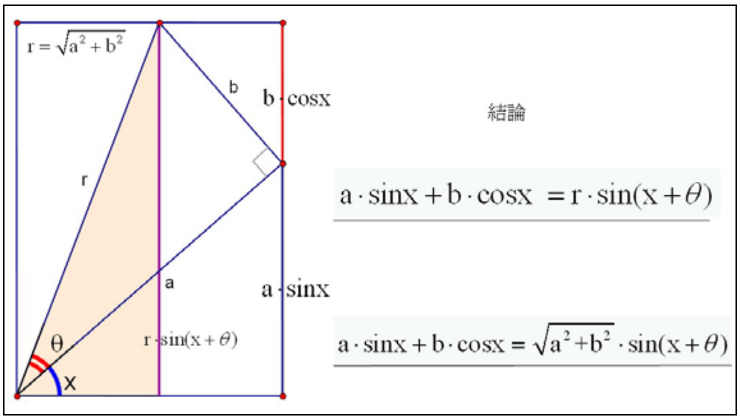


圖4-2-5b 正餘弦疊合

4-2-3 畢氏定理與和角公式

本例取自數學傳播第29卷第3期，利用加菲爾得證明方法利用三角形面積與梯形面積之間的關係，先証出畢氏定理，如圖4-2-6。根據此圖形，設直角三角形的斜邊爲1，兩角爲α、β，可得邊長關係，如圖4-2-7，再整理三角形面積與梯形面積之間的關係，即可得正弦函數的和角公式如圖4-2-8：

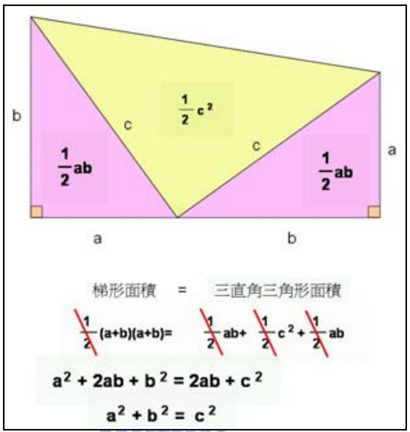


圖4-2-6 證明畢氏定理

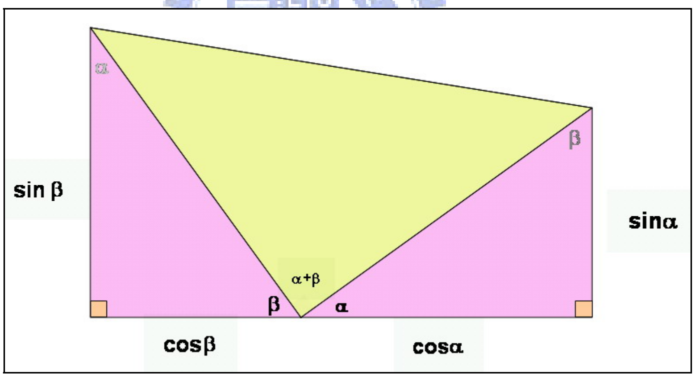


圖4-2-7 設直角三角形的兩角爲α、β

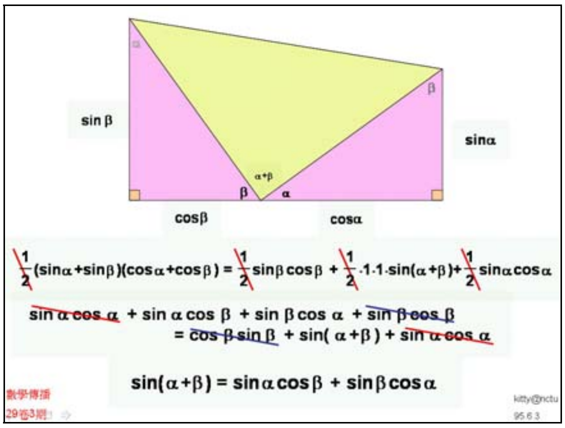


圖4-2-8 由面積關係得出正弦的和角公式

第五章 結論

資訊融入教學的好處就是能將抽象難懂的數學變的更簡單容易理解、有趣，也簡化的許許多多的計算。最大的困擾點就是資訊與教學分離，或是耗費相當大的時間，但效益卻不大。當然目前網路的發達，越來越多老師在網路上分享自己的成品，想法相近，目標一致時，直接利用在課堂教學上使用，既方便又實惠，但難免會有些小地方如果經過修正就更能符合自己教學所需。但網路上現成的動態呈現的作品，多為 Flash 或是用 JAVA 程式寫的，對這兩套軟體不熟悉的人較難從中修改，因此在本論文中主要採 GSP 及 MathPS 為介面，前者主要是利用尺規作圖的概念，後者則是具有一般簡報處理的概念即可，相當容易上手。

這兩個介面操作容易，但試圖將教學概念融入，剛著手時也是困難重重，然而在經過幾次嘗試後，不難發現出，設計者須先清楚到底想利用電腦來輔助釐清數學的哪些特點與需求。利用 MathPS 為介面時須將上課欲呈現的流程、腳本，分離成簡單的單元步驟，並將其呈現在 PowerPoint 中，上課時播放，再搭配講解與學生的互動，如此便是一套互動式的動態教材了。也可將之分享給其他的使用者使用，或是針對不同時期的需求進行修改、擴充，可以說是一套很實用的工具。利用 GSP 為介面時則需要較多的基本尺規作圖概念，想好每個元件的特性及形成的要素，就能順利地做出想呈現的動態模式。

從一開始倡導資訊融入教學，一直找尋較為恰當的平台、工具，直到接觸了 MathPS，我相信這只是一個好的開始，未來還有很長的路要走，也期望藉由 MathPS 的推廣與分享，讓更多的學生受惠，對數學不再恐懼。

參考文獻

依章節分

第一章

[1] National Research Council. (1996).The National Science Education Standards. Washington DC :National Academy Press.

[2] Manuel Santos-Trigo(2004),The Role of Dynamic Software in the Identification and Construction of Mathematical Relationship ,The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching , 23 (4)

[3] 邱建偉，在數學簡報系統上設計數學教材之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 1 月。

[4] 蔡政樺，在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 6 月。

[5] 熱納(Pierre-Gilles de Gennes)、巴竇(Jacques Badoz)，固、特、異的軟物質，天下文化出版，郭兆林、周念縈譯，1999 年 3 月。

[6] 李莉，加強數學建模教學 培養學生創新能力，遼寧教育行政學院學報，2006(4)

第二章

[1] Richard Lesh & Richard Lehrer (2003) , Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers , Mathematical Thinking and Learning , 5(2&3) , 109-129.

[2] Hironori Osawa (2002) , Mathematics of a relay－problem solving in the real world , Teaching Mathematics and its Applications , v21(2) , 85-93.

[3] 陳宜良等，中小學數學科課程綱要評估與發展研究，94 年 8 月。

[4] George Polya 著，蔡坤憲譯，怎樣解題，天下文化出版，2006 年 6 月。

[5] 嚴士健等，普通高中數學課程標準(實驗)解讀，江蘇教育出版社(數學課程標準研製組)，2004 年。

[6] 蕭志如，高中生對於無標準答案之數學問題的解決能力之研究。國科會專題研究計畫成果報告，NSC92-2521-M031-001，2003 年。

[7] 林國源，高中數學建模課程與實踐之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2004 年 6 月。

[8] 陳明璋，數學簡報系統－一個克服數位落差之老師專業發展環境，第十屆全球華人電腦教育應用大會，北京清華大學，2006 年 6 月。

[9] 吴根師，多媒體技術在數學教學中的輔助作用，山西教育半月刊，2004(15)。

第三章

[1] Nathan Kahl ,Sinusoidal Graphs, Retrieved May 2006, from the World Wide Web: http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/precalc/singraph/index.html

[2] 白啓光，正弦曲線圖，檢索日期：2006 年 5 月，取自 http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/lns/ws.htm

[3] 高建彪，數學週報，高一蘇教版第 42 期，2005 年 11 月

[4] 林孝信，自然界的照妖鏡，科學月刊，第一卷第二期，1970 年

[5] 坂江 正著，丁玲玲譯，三角函數超入門，上海世界圖書出版公司，2005 年 2 月

[6] 陳清嶺等，多變的聲，檢索日期：2005 年 5 月，取自 http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/LIGHT/sound03.htm

[7] 張智星，人生的產生，檢索日期：2005 年 5 月，取自 http://neural.cs.nthu.edu.tw/jang/books/audioSignalProcessing/humanSpeechProduction.asp?title=3-1+%A4H%C1n%AA%BA%B2%A3%A5%CD

第四章

[1] Roger B.Nelsen (1993) , Proof Without Words I ,The Mathematical Association of America.

[2] Roger B.Nelsen (2000) , Proof Without Words II ,The Mathematical Association of America.

[3] 張海潮，畢氏定理和餘弦定律的證明。數學傳播季刊 28 卷 3 期

[4] 毛爾著，胡守仁譯，毛起來說三角，天下文化出版

[5] 木棉著，睡夢中學三角，天下文化出版，2006 年 1 月

[6] 黃國忠，高中三角函數動態圖說證明元件開發研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 1 月。

[7] 李吉彬，資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 7 月。

依中英分

中文

[1] 邱建偉，在數學簡報系統上設計數學教材之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 1 月。

[2] 蔡政樺，在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 6 月。

[3] 熱納(Pierre-Gilles de Gennes)、巴竇(Jacques Badoz)，固、特、異的軟物質，天下文化出版，郭兆林、周念縈譯，1999 年 3 月。

[4] 李莉，加強數學建模教學 培養學生創新能力，遼寧教育行政學院學報，2006(4)

[5] 陳宜良等，中小學數學科課程綱要評估與發展研究，94 年 8 月。

[6] George Polya 著，蔡坤憲譯，怎樣解題，天下文化出版，2006 年 6 月。

[7] 嚴士健等，普通高中數學課程標準(實驗)解讀，江蘇教育出版社(數學課程標準研製組)，2004 年。

[8] 蕭志如，高中生對於無標準答案之數學問題的解決能力之研究。國科會專題研究計畫成果報告，NSC92-2521-M031-001，2003 年。

[9] 林國源，高中數學建模課程與實踐之研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2004 年 6 月。

[10] 陳明璋，數學簡報系統－一個克服數位落差之老師專業發展環境，第十屆全球華人電腦教育應用大會，北京清華大學，2006 年 6 月。

[11] 吳根師，多媒體技術在數學教學中的輔助作用，山西教育半月刊，2004(15)。

[12] 白啓光，正弦曲線圖，檢索日期：2006 年 5 月，取自 http://xserve.math.nctu.edu.tw/people/cpai/lns/ws.htm

[13] 高建彪，數學週報，高一蘇教版第 42 期，2005 年 11 月

[14] 林孝信，自然界的照妖鏡，科學月刊，第一卷第二期，1970 年

[15] 坂江 正著，丁玲玲譯，三角函數超入門，上海世界圖書出版公司，2005 年 2 月

[16] 陳清嶺等，多變的聲，檢索日期：2005 年 5 月，取自
http://elearning.lishin.tcc.edu.tw/km2005/FTP/LIGHT/sound03.htm

[17] 張智星，人生的產生，檢索日期：2005 年 5 月，取自
http://neural.cs.nthu.edu.tw/jang/books/audioSignalProcessing/humanSpeechProduction.asp?title=3-1+%A4H%C1n%AA%BA%B2%A3%A5%CD

[18] 張海潮，畢氏定理和餘弦定律的證明。數學傳播季刊 28 卷 3 期

[19] 毛爾著，胡守仁譯，毛起來說三角，天下文化出版

[20] 木棉著，睡夢中學三角，天下文化出版，2006 年 1 月

[21] 黃國忠，高中三角函數動態圖說證明元件開發研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 1 月。

[22] 李吉彬，資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2005 年 7 月。

英文

[1] National Research Council. (1996).The National Science Education Standards. Washington DC :National Academy Press.

[2] Manuel Santos-Trigo(2004),The Role of Dynamic Software in the Identification and Construction of Mathematical Relationship ,The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching , 23 (4)

[3] Richard Lesh & Richard Lehrer (2003) , Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers , Mathematical Thinking and Learning , 5(2&3) , 109-129.

[4] Hironori Osawa (2002) , Mathematics of a relay－problem solving in the real world , Teaching Mathematics and its Applications , v21(2) , 85-93.

[5] Nathan Kahl ,Sinusoidal Graphs, Retrieved May 2006, from the World Wide Web: http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/precalc/singraph/index.html

[6] Roger B.Nelsen (1993) , Proof Without Words I ,The Mathematical Association of America.

[7] Roger B.Nelsen (2000) , Proof Without Words II ,The Mathematical Association of America.