

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

在電腦套裝軟體環境下
經營數學探究之研究



A Study of Computer-based
Mathematical Explorings

研究生：蔡政樺

指導教授：黃大原 博士

中華民國九十五年六月

在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究

A Study of Computer-based Mathematical Explorings

研究生：蔡政樺

Student：Cheng-Hua Tsai

指導教授：黃大原

Advisor：Tayuan Huang

國立交通大學

理學院網路學習學程



Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年六月

在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究

學生：蔡政樺

指導教授：黃大原 博士

國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班

摘要

現代科技在基礎教育改革的道路上，一直扮演著重要的角色。尤其數學探究活動在電腦應用軟體和網路環境的有力支持下，能有一個可供實作的學習環境，來幫助學生快速有效獲取有用的資料、以從事自主學習為導向的數學探索，並能促進合作學習與交流。

在第一、二章裡，我們回顧探究式學習的意義、特點及其歷史脈絡；並闡明應用電腦軟體輔助數學探究的學理上的依據。我們特別指出結合現代科技的數學探究所具備的自主性、探究性及實踐性等三項特色。

融合教育學習理論，參照“問題教學法”的教學模式，輔以多年的教學經驗，設計一項以學生為主體，以問題探索為核心，來進行數學探究活動的示例。在這項數學探究活動的示例裏，我們將探討如何將實作的研究，應用到高中數學的專題研究與科展等兩項活動，提供學生有機會初步體驗數學研究的創造性過程。

利用電腦軟體 GSP 和 Cabri 3D 所提供的具有創新溝通機制與動態呈現兩項特點的環境，我們在第三、四兩章裡，透過一些數學的解題模組，設計模擬真實情境，來進行模擬與實驗，快速獲取資訊；根據觀察所獲得的結論，作進一步的猜想，在進行後續的推理與證明。希望在電腦軟體所營造的環境下，藉由問題的提出，經歷探索與解決問題的過程，讓學生體會數學的應用價值，並藉以培養學生應用資訊科技的能力。

【關鍵字】 電腦軟體、探究式學習、問題教學法、數學探究、實作研究

A Study of Computer-based Mathematical Explorings

Student : Cheng-Hua Tsai

Advisors : Dr. Tayuan Huang

Degree Program of E-Learning

National Chiao Tung University

Abstract

Modern science and technology have been always playing a vital role in the reform of school education. In particular, the activities of mathematical exploring has been benefited from the learning environments supported by computer softwares together with nowadays web technology. Within these environments, students can retrieve necessary data efficiently, they can also conduct oriented study independently, followed by cooperative study and communication as well.

The meaning and the feature of exploratory study together with its historical vein will be first recalled in Chapter 2. We explain the theoretical basis of computer-based mathematical exploring; we also point out that exploratory study of mathematics by using modern science and technology is characterized by the features of independency, exploration and practicality.

Based on educational learning theory and the teaching module of "problem methodology", together with our teaching experience, a student oriented and problem centered illustrative example is proposed to demonstrate the processing of mathematical exploration. We show how to turn this style of training into student oriented programs of topic project and scientific research activity, so that students will successfully experience themselves the creative process of mathematical research.

Taking advantage of the creative and dynamic learning environments provided by software including GSP and Cabri 3D, We will show in Chapters 3, 4 that students can be stimulated by imitating real situations, so that the students will obtain abundant information efficiently. Based on these observations, the students can make their own conjectures and then finally leads to their verifications. We hope that the students will be benefited from the performance of computer-based mathematical exploring together with computer-based problem solving, and lead finally to the appreciation of mathematics and its applications.

Keywords: software, exploratory study, problem methodology, mathematical exploring;

誌謝

在專班學習的兩年期間，從精心規劃的各領域之核心課程以及所鼎力邀請各領域專長之教授的專題演講內容，不僅可以發現現代科技技術在改進學生的學習方式上發揮巨大的潛力，而且已經滲透到各學科的課程內容。可見爲了加強電腦與網路科技在科學教育方面的應用與研發，專班的成立無疑的爲我國教育工作帶來新的前途及契機，這要感謝所有師長們前瞻性的推動以及共同努力。

除此之外，我非常感謝我的指導教授黃大原老師，他的治學務實求真，學問的淵博與思維的慎密，做事的認真與嚴謹優雅的教學風格，在在都是我學習的目標。每當我上台報告或作書面報告，他總是能提綱挈領的引導及提供我寶貴的資訊與資料，讓我的研究過程得以順利且有所收穫。

再者也要非常感謝陳明璋老師，他對軟體的熟悉與了解，技術的靈活與思考的敏捷，使得我在結合軟體應用的技術上得以精進。而且他所研發的「數學簡報系統」在 2006 年 6 月於北京清華大學所舉辦的第十屆全球華人電腦教育應用大會上，作了一個精彩的學術發表--「數學簡報系統---一個克服數位落差之教師專業發展環境」，這文章的內容對我論文的形成也有一些幫助與啓示。

還要感謝袁媛老師帶領我進入數學教育的領域，提供很多數位教學的應用與資訊，使我的作品不至於偏頗科技應用，而忽略實際教學的實務應用。也要感謝專班主任莊祚敏教授，以他豐富的學問與見聞，在論文研討課堂上循循善誘的指導，使得我論文的撰寫得以順利。同時也要感謝交大應數所李榮耀教授對論文的指導與建議。另外我想感謝專班的同學---吉彬、主安、心怡，回憶在討論中的交流與鼓勵，在研究瓶頸過程中的提示與砥礪，這些點點滴滴真令人難忘。

更要感謝的是台中一中大家長蔡炳坤校長，當初有蔡校長的鼎力支持與推薦，讓我得以順利考取專班，並給予我彈性的排課空間，得以在班級經營及教學工作的忙碌之餘，還心有餘力地進修以充實教學知能；當然也要感謝數學科召集人黃呈明老師以及所有數學科同仁，在進修期間給予我鼓勵與支持，也給我很多指導與指教，讓我在教學實務與論文研究上有很大的成長與幫助。

最後我要由衷地感謝我的家人，尤其是我的愛妻伊琪的體諒與包容，讓我無後顧之憂而能專心於課業；還有我那三位疏於照顧的心肝寶貝—沛蓉、佶恩、喬安，因爲你們的乖巧懂事，讓爲人父的我得以順利完成學業。還有我親愛的父母親、岳母及姐姐妹妹們，有你們綿綿無盡的親情支柱，讓我有勇氣、有信心的永續前進。願以此論文獻給所有愛我的親人，關心我的師長，協助我的朋友們，再以最誠摯的心謝謝你們、並祝福你們平安、順心、全家福。

目次

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目次	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論	1
1-1 研究背景	1
1-2 研究動機	2
1-3 應用 Van Hiele 理論之研究方法	2
1-4 研究目的	3
1-5 論文結構	4
第二章 探究式學習的文獻探討	5
2-1 前言	5
2-2 探究式學習的意義	6
2-3 探究式教學法的歷史脈絡	6
2-4 應用軟體輔助數學探究的理論依據	7
2-5 探究性學習的特點	8
2-6 數學軟體的介紹	10
2-7 結語	12
第三章 電腦軟體環境下的探究示例及模組	13
3-1 應用軟體輔助數學探究的模式	15
3-2 鐘錶兩針的相交情形---以週期函數為探究模組	18
3-2-1 前言	18
3-2-2 幾個預備引理	19
3-2-3 主要定理及其證明	21
3-2-4 一些推論	24
3-2-5 結語	34
3-3 從最適觀畫位置問題談起---以圖形軌跡為探究模組	35
3-3-1 前言	35
3-3-2 雷吉蒙塔努斯的問題及其延伸	35
3-3-3 數學模型的探討	41

3-4	內接於正多邊形的正三角形的構作及其面積變化---以尺規作圖為探究模組 ...	44
3-4-1	前言	44
3-4-2	正方形內接正三角形的尺規作圖	44
3-4-3	正方形內接正三角形的面積極值問題	48
3-4-4	正多邊形內接正多邊形的各邊中點及其中心的軌跡問題	50
3-5	內接於正邊形的正三角形的重心軌跡---以操作發現為探究模組	57
3-5-1	從簡單的問題出發	57
3-5-2	正 $3n$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索	57
3-5-3	正 $3n+1$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索	64
3-5-4	正 $3n+2$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索	68
3-5-5	結語	75
3-6	一道「國中基測」數學問題的疑義與探究---以類比實驗為探究模組	82
3-6-1	情況 1 的分析與探究	83
3-6-2	情況 2 的分析與探究	85
3-6-3	情況 3 的分析與探究	88
3-6-4	結語	90
第四章	在 Cabri 3D 環境下的數學探究	91
4-1	正多面體展開圖的構作---在 Cabri 3D 環境下的探究	92
4-1-1	前言	92
4-1-2	Cabri 3D 的基本指令	95
4-1-3	正多面體展開圖的構作（參見圖 4-1-3-1 ~ 14）	102
4-2	立體圖形平面截痕的探究 ---以 Cabri 3D 及 GSP 為工具	107
4-2-1	前言	107
4-2-2	正立方體被以主對角線為法線的平面所截	107
4-2-3	長方體被以主對角線為法線的平面所截	109
4-3	長方體主對角線穿過單位正方體的個數	113
4-3-1	前言	113
4-3-2	平行投影和格子點的探究模式	113
4-3-3	問題的探究	114
4-3-4	推廣到一般情形	115
4-3-5	結論	117
	參考文獻	119

表目錄

表 3-2-4-1 兩針夾 $\frac{\pi}{2}$ 弧度的時間.....	25
表 3-2-4-2 兩針夾 0 弧度的時間.....	25
表 3-2-4-3 兩針夾 $\frac{\pi}{3}$ 弧度的時間.....	25
表 3-2-4-4 時間旋轉角度差及兩針夾角的關係表.....	26
表 3-2-4-5 時、分、秒針三針之位置表.....	29
表 4-1-1-1 正多面體的種類.....	93
表 4-1-1-2 展開圖分支系列.....	95



圖目錄

圖 3-2-2-1	$\alpha(x)$ 函數圖形	19
圖 3-3-2-2	$\beta(x)$ 函數圖形	19
圖 3-2-2-3	$\gamma(x)$ 函數圖形	19
圖 3-2-2-4	$\delta(x)$ 函數圖形	19
圖 3-2-3-1	$\frac{180}{11} - \frac{360}{11\pi} \cdot \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11}{360}t))$ 的函數圖形	23
圖 3-2-4-1	旋轉角度差與有向差角之對應關係	26
圖 3-2-4-2	$\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t)$ 的函數圖形	26
圖 3-2-4-3	時、分、秒針三針之夾角 θ 對時間 t 的函數圖形	28
圖 3-2-4-4	分對秒與時對分的函數圖形	29
圖 3-2-4-5	時對分與分對秒的函數圖形	30
圖 3-3-2-1	視角與畫像的位置關係	36
圖 3-3-2-2	最大視角的外接圓	36
圖 3-3-2-3	觀察最大視角的位置	37
圖 3-3-2-4	最大視角的幾何作圖	37
圖 3-3-2-5	兩拋物線的交點之視角	38
圖 3-3-2-6	畫像不垂直地面時，視角與畫像的位置關係	38
圖 4-2-2-7	畫像不垂直地面的最大視角之幾何作圖	40
圖 4-2-2-8	畫像不垂直地面時，兩拋物線的交點與最大視角之位置	40
圖 3-3-2-9	圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 最大	41
圖 3-3-2-10	圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 最大的幾何作圖	41
圖 3-3-3-1	圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	42
圖 3-3-3-2	拋物線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	42
圖 3-3-3-3	橢圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	43
圖 3-3-3-4	雙曲線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	43
圖 3-3-3-5	正弦函數上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	43
圖 3-3-3-6	心臟線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值	43
圖 3-4-2-1	利用平行四邊形證明 $\triangle DSC$ 為正三角形	45
圖 3-4-2-2	利用平行四邊形證明 $\triangle DSC$ 為正三角形	45
圖 3-4-2-3	過 A 作正三角形 PQR	46
圖 3-4-2-4	由正三角形 PQR 可得 $\triangle CDK$ 為正三角形	46
圖 3-4-2-5	K 為 PQ 的中點	46
圖 3-4-2-6	由正三角形 PQR 可得 $\triangle BJC$ 為正三角形	46
圖 3-4-2-7	J 為 PR 的中點	47

圖 3-4-3-1 將正方形坐標化	49
圖 3-4-3-2 在 AB 上取一動點 $P(x,0)$	49
圖 3-4-4-1 Q 點的 y 坐標隨著 P 點的 x 坐標而變	51
圖 3-4-4-2 ΔPQR 的重心軌跡	51
圖 3-4-4-3 P 的 x 坐標在 $3-2\sqrt{3}$ 與 $2\sqrt{3}-3$ 之間, \overline{QR} 中點為定點	51
圖 3-4-4-4 P 的 x 坐標在 $3-2\sqrt{3}$ 與 $2\sqrt{3}-3$ 之間, ΔPQR 的重心軌跡	51
圖 3-4-4-5 P 的 x 坐標在 $2\sqrt{3}-3$ 與 1 之間, QR 中點為定點	52
圖 3-4-4-6 P 的 x 坐標在 $2\sqrt{3}-3$ 與 1 之間, ΔPQR 的重心軌跡	52
圖 3-4-4-7 P 的 x 坐標在 -1 與 $3-2\sqrt{3}$ 之間, PR 中點為定點	53
圖 3-4-4-8 P 的 x 坐標在 -1 與 $3-2\sqrt{3}$ 之間, ΔPQR 的重心軌跡	53
圖 3-4-5-1 以正方形之一邊為邊的四個正三角形	54
圖 3-4-5-2 P 在不同的區段對應的不動點	54
圖 3-4-5-3 正 ΔAB_1D_2 , ΔBA_2C_1 P 的位置	54
圖 3-4-5-4 P 在 $\overline{AA_1}$ 上移動時之不動點	54
圖 3-4-5-5 P 在 $\overline{A_1B_2}$ 上移動時之不動點	55
圖 3-4-5-6 P 在 $\overline{B_2B}$ 上移動時之不動點	55
圖 3-4-5-7 正四邊形內接正三角形之面積變化函數	55
圖 3-4-5-8 正三角形的三邊中點及其重心的軌跡	56
圖 3-5-2-1 一正三角形內接於正三角形	58
圖 3-5-2-2 三圓共交點	58
圖 3-5-2-3 一正三角形內接於正六邊形	60
圖 3-5-2-4 三個黃色的四邊形全等	60
圖 3-5-2-5 $\overline{A_1A_2}$ 上取一動點 P	61
圖 3-5-2-6 x 對 θ 的函數圖形	61
圖 3-5-2-7 $\overline{A_2A_3}$ 上取一動點 P	62
圖 3-5-2-8 \overline{OP} 長在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的函數圖形	64

圖 3-5-3-1 過 A 點作一正三角形內接於正七邊形.....	65
圖 3-5-3-2 七個內接正三角形的重心及各邊中點.....	65
圖 3-5-3-3 兩個正三角形的位置.....	66
圖 3-5-3-4 $\overrightarrow{Q_1G}$ 與 $\overrightarrow{Q_2G}$ 相交於 S 點.....	66
圖 3-5-3-5 重心的軌跡.....	67
圖 3-5-3-6 三邊中點的軌跡.....	67
圖 3-5-3-7 利用餘弦定理求邊長.....	67
圖 3-5-3-8 利用面積公式求邊長.....	67
圖 3-5-4-1 M, N 為五邊形內部兩點.....	69
圖 3-5-4-2 過 M, N 的正三角形.....	69
圖 3-5-4-3 過 A 點作正三角形.....	70
圖 3-5-4-4 五個正三角形的重心及各邊中點.....	70
圖 3-5-4-5 兩個正三角形的位置.....	71
圖 3-5-4-6 $\overline{R_1G_1}$ 與 $\overline{R_2G_2}$ 相交於 F	71
圖 3-5-4-7 重心的軌跡.....	71
圖 3-5-4-8 三邊中點的軌跡.....	71
圖 3-5-4-9 利用餘弦定理求邊長.....	72
圖 3-5-4-10 利用面積公式求邊長.....	72
圖 3-5-4-11 P 在 G_1G_2 弧上.....	73
圖 3-5-4-12 x 對 θ 的函數圖形.....	73
圖 3-5-4-13 P 在 G_1G_2 弧上.....	74
圖 3-5-4-14 x 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的函數圖形.....	74
圖 3-5-5-1 每一邊對應到的邊數.....	76
圖 3-5-5-2 正方形內的重心軌跡.....	78
圖 3-5-5-3 正五邊形內的重心軌跡.....	78
圖 3-5-5-4 正七邊形內的重心軌跡(1).....	79
圖 3-5-5-5 正七邊形內的重心軌跡(2).....	79
圖 3-5-5-6 正八邊形內的重心軌跡.....	80
圖 3-5-5-7 正十邊形內的重心軌跡.....	80
圖 3-5-5-8 正十一邊形內的重心軌跡.....	81
圖 3-6-0-1 四個六邊形一個正方形.....	82
圖 3-6-0-2 四個六邊形有共同邊.....	83
圖 3-6-0-3 四個六邊形無共同邊.....	83
圖 3-6-1-1 三角形 ABC 與 DEF 全等.....	84
圖 3-6-1-2 面積比值的變化.....	84
圖 3-6-2-1 \overline{AD} 隨 $\angle DEF$ 的改變而變.....	86

圖 3-6-2-2 \overline{AD} 對 $\angle DEF$ 的函數圖形	86
圖 3-6-2-3 面積比值有最大值	88
圖 3-6-2-4 面積比值的最小值不存在	88
圖 3-6-3-1 彼此都沒有重疊	89
圖 3-6-3-2 作外接圓 O_1, O_2	89
圖 3-6-4-1 六邊形與正方形磁磚所鋪成的地板花色	90
圖 4-1-1-1 正四面體	93
圖 4-1-1-2 正四面體	93
圖 4-1-1-3 正六面體	93
圖 4-1-1-4 正六面體展開圖	93
圖 4-1-1-5 正八面體	94
圖 4-1-1-6 正八面體展開圖	94
圖 4-1-1-7 正十二面體	94
圖 4-1-1-8 正十二面體展開圖	94
圖 4-1-1-9 正二十面體	94
圖 4-1-1-10 正二十面體展開圖	94
圖 4-1-2-1 Cabri 3D 的功能列	95
圖 4-1-2-2 Cabri 3D 的工具列	95
圖 4-1-2-3 以 L 為軸，將 K_1 旋轉至 K_2	97
圖 4-1-2-4 平面上構作三角形 $B_1B_2B_3$	97
圖 4-1-2-5 平面上構作正五邊形	98
圖 4-1-2-6 構作正十二面體的骨架	98
圖 4-1-2-7 構作一控制鈕	99
圖 4-1-2-8 構作側面 ABC 的展開圖	99
圖 4-1-2-9 構作側面 $AEFB$ 的展開圖	100
圖 4-1-2-10 構作展開圖的控制點 D'	101
圖 4-1-2-11 構作側面 $ABCDE$ 的展開圖	101
圖 4-1-2-12 過 S 作垂直平分面 M	102
圖 4-1-3-1 構作正立方體的骨架	103
圖 4-1-3-2 構作控制鈕 P 及平面	103
圖 4-1-3-3 構作側面的展開圖	103
圖 4-1-3-4 移動 P 點可控制展開圖	103
圖 4-1-3-5 利用旋轉功構作其他展開圖	103
圖 4-1-3-6 構作某一展開圖上的一個正方立體骨架	103
圖 4-1-3-7 再構作新正立方體的展開圖	104

圖 4-1-3-8 移動 P 點可控制展開圖.....	104
圖 4-1-3-9 構作正八面體的骨架.....	104
圖 4-1-3-10 構作控制鈕 P 及平面.....	104
圖 4-1-3-11 構作側面展開圖.....	104
圖 4-1-3-12 移動 P 點可控制展開圖.....	104
圖 4-1-3-13 在展開圖上構作正八面體的骨架.....	105
圖 4-1-3-14 再構作新正八面體的側面展開圖.....	105
圖 4-1-3-15 利用旋轉功構作其他展開圖.....	105
圖 4-1-3-16 隱藏新正八面體的骨架.....	105
圖 4-1-3-17 構作最上一層的側面展開圖.....	106
圖 4-1-3-18 移動 P 點可控制所有展開圖.....	106
圖 4-1-3-19 足球多面體.....	106
圖 4-1-3-20 巴克球多面體.....	106
圖 4-2-3-1 平面 $ax + by + cz = k$ 截長方體，當 $0 \leq k \leq a^2$	111
圖 4-2-3-2 平面 $ax + by + cz = k$ 截長方體，當 $b^2 + c^2 \leq k \leq a^2 + b^2 + c^2$	111
圖 4-3-2-1 三角形投影.....	114
圖 4-3-2-2 $3 \times 3 \times 3$ 方體投影.....	114
圖 4-3-2-3 長方體及其主對角線之投影.....	114
圖 4-3-3-1 主對角線穿過的正方形個數.....	114
圖 4-3-3-2 主對角線在上下層的穿越點.....	114
圖 4-3-3-3 主對角線穿過的正方形個數.....	115
圖 4-3-3-4 主對角線在上下層的穿越點.....	115
圖 4-3-3-5 $12 \times 8 \times 5$ 長方體之主對角線穿過的正方體個數.....	116
圖 4-3-3-6 $12 \times 8 \times 4$ 長方體之主對角線穿過的正方體個數.....	116

第一章 緒論

本章主要在說明研究的背景、研究動機及研究方法，並提出研究的目的以及整個論文的結構。

1-1 研究背景

一個國家的競爭力決定於該國知識經濟的實力，而知識經濟的實力通常可以從資訊科技是否蓬勃發展看出。在 1960 年代，美國伊利諾大學發展了一個叫做 PLATO (Programmed Logic for Automatic Teaching Operation) 系統，首度將電腦應用帶入教育，開啓了電腦輔助教學(Computer Assisted Instruction , CAI) 的時代。雖然利用電腦作為輔助教學工具，已經四十餘年的歷史，然而直到網際網路的盛行及科技應用軟體的發達，才為電腦輔助教學、資訊融入教學開啓嶄新的一頁〈林信男，民 89 年〉。使得現代資訊技術的廣泛應用正在對數學課程內容、數學教學、數學學習等方面產生深刻的影響。1983 年美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)建議各學年階段的教師使用科技的工具教導數學技能與概念，而國內學者〈吳鐵雄，1993〉也認為電腦輔助教學是突破我國傳統教學，適應學生個別差異，提高教學品質的有效途徑之一。

因此在資訊科技蓬勃發展的今天，教育工作者應該用積極的態度提升自己的資訊素養，進而養成將資訊融入教學的實際教學能力；並實現資訊科技技術與課程內容的有機整合，整合的目的是有利於學生認識各學科的本質；並提倡利用電腦軟體技術來呈現以往教學中難以呈現的課程內容，在保證筆算訓練的前提下，盡可能使用科學型計算器、應用軟體以及各種數學教育技術平台，加強數學教學與科技技術的結合，鼓勵學生運用電腦應用軟體所呈現的環境進行探索和發現。

教育部在 2001 年 6 月公佈「中小學資訊教育總藍圖」，積極推展資訊教育與資訊教育融入教學工作，預計在四年內完成七個指標性工作，其中之一就是將教師運用資訊科技融入教學活動的時間比率訂在 20%。在教育部大力推動之下，各項資訊設備及師資訓練幾乎已經完成目標，九十四學年將全面落實資訊融入教學計畫，依教育部中小學資訊教育總藍圖的規劃，所有教學將需要有百分之二十的資訊融入教學時數。因此，關於今後學校的資訊教育要如何規劃、融入教學要如何實施？我們的目標和方向在哪裡？都是值得我們深思熟慮的課題。

1-2 研究動機

由於科技技術的發達使得數學實作的學習活動除了紙筆運算、摺紙活動、幾何作圖、模型教具外，還可以利用電腦應用軟體所呈現的動態實驗系統來進行模擬與探索。美國數學教師協會(NCTM)指出數學的教與學中，科技產品如計算機及電腦應用軟體是不可或缺的，它影響了數學教學的方式，也提高了學生的學習能力，並建議各層次的老師為了教導數學技能與概念；而讓學生達到有效的學習，都應該使用電腦科技的工具；且使用電腦繪圖技術可以讓我們進一步地探討代數與幾何的關連性〈普通高中數學課程標準，2003〉。

目前學校教育還是存在著過於注重知識的傳授、過於強調學科本位、過於偏重書本知識的現象。因此，本研究的主要動機是希望透過電腦應用軟體的強大功能與優勢，在資訊科技融入教學的環境中，鼓勵學生使用現代化科技手段來處理繁雜的計算、解決實際問題，以取得更多的時間和精力去探索和發現數學的規律，並培養學生創新精神和實踐能力。

從中小學資訊教育總藍圖的總綱裡提到說：「為迎接二十一世紀知識經濟社會的來臨，提昇國家競爭力與科技實力，應積極培養國民具備主動學習與創新思考的基本能力，……」之內容，可見政府對於提升全民運用資訊能力與學習素養，藉由資訊科技融入教學，學生可以大量獲得資訊，進而達成學生主動學習的目標是不遺餘力的。我國自九十學年度起逐年實施九年一貫課程，其中在數學學習領域的五大主題中之幾何教學部分，將圖形與空間的瞭解分為知覺性的了解、操弄性的了解、構圖性的了解以及論述性的了解。要學會推理幾何證明並達到論述性的了解必須要有充分的操弄性與構圖性的了解，這對於日後數學邏輯推理能力及以抽象為主的高中數學學習皆有很大的幫助。

1-3 應用 Van Hiele 理論之研究方法

荷蘭數學教育家 Van Hiele 夫婦在 1957 年提出在幾何學習上的思考層次理論，他們將一個人的幾何思考模式分成五個發展層次〈劉好，1998〉：

第 0 層次 - 視覺期(Visualization)：在這個階段的學童可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形。例如，在這個階段的學童知道物件「長方形」、「正方形」、「三角形」等物件的形狀，但他們不能了解物件的真正定義。

第一層次 - 分析期(Analysis)：在這個階段的學童可以從圖形的構成要素以及構成要素間的關係分析圖形，並且可以利用實際操作(例如摺疊、用尺量、用縱橫格子或特別設計的圖樣)的方式發現圖形間的共同性質。例如，在這個階段的學童可以察覺到長方形有四個邊，四個角，而且四個角都是直角，兩雙對邊等長，但鄰邊不一

樣長。

第二層次 - 非形式演繹期(Informal Deduction)：在這個階段的兒童可以透過非正式的論證把先前發現的性質作邏輯的聯結。例如，在這個階段的學童可以認知長方形是平行四邊形的一種。

第三層次 -- 形式演繹期(Formal Deduction)：在這個階段的學童能利用演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理間的網路結構。此時，學童可以在一個公設系統中建立幾何理論。

第四層次 - 嚴密性(Rigor)或公理性(Axiomatic)：在這個階段的人可以在不同公理系統中建立定理，並且分析比較這些系統的特性。例如，在這階的人可以區分歐幾里德和非歐幾何的差異。

根據 Van Hiele 之幾何教學理論以及課程教學實務上，可以了解到幾何課程的學習應該藉由實驗、觀察、探索、研究等活動不斷地安排在不同學習層次中，讓學生透過有趣的、具體的、可操作的幾何形象更了解幾何世界，促進他們幾何思維的能力。因此，本研究的主要進行方式是以學生為主角，以問題為核心，透過電腦軟體所營造的環境，在教師的指導下，學生運用所學的數學知識及基本資訊能力採用類以科學研究的情境和途徑對某些數學問題進行深入探討，或從數學的角度對某些日常生活和其它學科中出現的問題進行探究。利用 GSP、Cabri 3D、Maple 等電腦應用軟體之特性，結合學習理論在電腦教學上的應用，選擇適當的探究問題、教學素材，形成一個創新且有創意的學習典範與型式，使教與學之過程皆有豐富的資訊科技資源。

我想資訊融入教學並不是要把老師和學生訓練成一位電腦高手；而是要大家利用電腦這一種有效率的「工具」，來幫助老師豐富教學內容、活潑教學過程，讓學生提高學習興趣和效率的一種方式。電腦是用來延伸、擴大教學效果的媒介，以擴展老師教學的深度、廣度，讓學生更容易進入學習領域，應該是資訊融入教學的主要精神。高中數學課程常以模組和專題的形式呈現。因此，數學學習活動不應只強調對概念、結論和技能的記憶、模仿和接受，而獨立思考、自主探索、動手實踐、合作交流、閱讀自學等都是學習數學的重要方式。

1-4 研究目的

有許多的研究指出，利用電腦視覺化的增強有利學生在幾何上的學習，如 Bishop (1989)覺得電腦產生的圖像能對學生的視覺化產生一個激勵的影響。Clements 和 Battisa(1992)也建議在幾何學習上可採用適當的電腦軟體來輔助學習。Hansen(1998)提到 21 世紀「電腦」將是日常生活的一部份，而且各階段的教學將廣泛地在電腦軟體環境為基礎下進行數學問題的探究，並認為「因為電腦程式很著重在視覺化的使用，因此視覺

的思考必須學習。」因此電腦對學習者在形象思維的發展中扮演一個很重要的角色〈左台益、梁勇能，民 90〉。

本研究希望透過數種電腦軟體的功能與特色，提供學生能主動學習知識、自主探索問題的有互動性、可操作性以及可動態呈現的模擬實驗環境，再設計一些數學問題的探究活動，為學生形成積極主動的、多元的學習方式進一步創造有利的條件，以激發學生的數學學習興趣，鼓勵學生在學習過程中，養成獨立思考、積極探索的習慣，而且高中數學的學習課程應力求通過各種不同形式的自主學習、探究活動，讓學生體驗數學發現和創造的歷程，發展他們的創新能力與意識。

1-5 論文結構

本研究的主要內容是使用動態幾何軟體 GSP 及立體幾何軟體 Cabri 3D 所具有的獨特功能與特色，進行一些數學問題的模擬、實驗、觀察與探索。其主要架構如下：

在第二章中，先作探究式學習之歷史淵源的文獻探討，目的是為了了解它的發展與演進，試著從歷史的背景與脈絡，來尋找探究式學習對數學教育的發展所產生的融入應用與深化效果。

在第三章中，探討應用軟體輔助數學探究的模式，而這個模式是以問題為主軸，貫穿整個探究過程，並可作為指導學生進行數學探究或進行專題式教學的一個參考依據，再舉一道有關尺規作圖的數學問題進行探究的示範，最後針對今年(95 學年)國中基測數學科第 33 題的疑義進行分析與延伸問題的探究。並分別以週期函數、圖形軌跡、尺規作圖為探究模組，藉助電腦數學軟體的圖形呈現的形象思維與動態操作的模擬實驗，來解決一些數學問題並進一步作延伸與推廣的科學探究。

在第四章是透過立體幾何軟體 Cabri 3D 的一些功能與物件，來建構出立體幾何的操作環境，以促進學習者對立體空間的理解，從而幫助他們發展良好的立體感，並且能夠運用所學過的立體幾何原理或概念進入數學實驗的模擬情境以便進行深入思考與探究。

第二章 探究式學習的文獻探討

本章主要在討論有關探究式學習之相關文獻與歷史淵源，目的是爲了了解它的發展與演進，試著從歷史的背景與脈絡，來探尋探究式學習對數學教育的發展所產生的融入應用與深化效果。十九世紀數學家西爾魏斯特（J.J.Sylvester, 1814-1897）曾說過：「置身於數學領域中不斷地探索和追求，能把人類的思維活動昇華到純淨而和諧的境界」。也就是說數學能從多方面來鍛練一個人的思維，然而，被動地聽講和單純地機械性解題，思維是得不到提升的。只有在數學的學習活動中積極地、主動地思考與探究，這樣思維才能得到鍛練。在二十世紀初，美國數學教育家杜威提倡科學教育的學習方法——探究教學法，此教學法主要是讓學生利用探究的學習模式去學習科學內容，運用實驗的證據來解釋和深化教材中的內容，這爲科學教育的學習產生了深遠的影響。所以，他可以說是最早提出在學校科學教育中要用探究方法的人。

2-1 前言



我們現階段的科學教育只強調相互孤立的學科知識，卻忽略科學方法、科學精神及科學技能的培養，而造成這種現狀的原因應歸結於我們傳統的教育思想與科學教育觀：以“教材”、“教師”爲中心的傳統教育模式；以及認爲科學就是一些既成的、關於自然、社會和思維的知識體系，而科學教育的任務就是使學生掌握這些知識，形成運用這些知識解決問題的能力的科學教育觀等。這樣的學習科學知識的方法僅限於死記硬背，缺乏深入的實踐和探索，會讓學生脫離現實生活及未來生活的發展。

美國國家科學基金會與卡內基青少年基金會聯合發表了《轉變理念：培養 21 世紀的美國青年》（1995），它們從社會、文化、科學、個人及經濟的變革等多方面去論證了中等學校課程改革的必要性，其中有一點就是“爲了讓青少年了解自己和讓他們能在 21 世紀高品質的生活”。而美國國家科學教師聯合會也認爲，科學課程應反映社會科學和科技文化的目標，應強調科學對於學生學業的重要性，更要強調科學對於生活、社會及國家的重要性。

美國國家研究理事會 2000 年出版了一本專著，對科學探究式教與學的重要問題進行了比較有系統、有說服力的闡述，其中，將探究式教學的基本特徵概括爲如下五個方面的內容：(1)學習者圍繞科學性問題展開探究活動。(2)學習者獲取可以幫助他們解釋和評價科學性問題的證據。(3)學習者要根據事實證據形成解釋，對科學性問題做出回答。(4)學習者透過比較其他可能的解釋，特別是那些體現出科學性理解的解釋，來評價他們

自己的解釋。(5)學習者要交流和論證他們所提出的解釋。具有這樣的基本特徵的探究式教學過程是有助於學生對科學概念和方法形成更清晰、更深刻的認識。因此，探究式教學和教學資源要儘可能包含所有的上述五個基本特徵，以充分發揮和利用探究的教育功能。

2-2 探究式學習的意義

探究式學習是一種積極的學習程序，主要指的是學生在科學課中自己探索問題的學習方式。要研究探究式學習，首先要明確什麼是探究。美國國家科學教育標準中對探究的定義是：“探究是多層面的作用中，包括觀察；提出問題；通過瀏覽書籍和其他資訊資源發現什麼是已經知道的結論，制定調查研究文檔期；根據實驗證據對已有的結論作出評價；用工具收集、分析、解釋資料；提出解答，解釋和預測；以及交流結果。探究要求確定假設，進行批判的和邏輯的思考，並且考慮其它可以替代的解釋。”科學探究也指的是學生建構知識、形成科學理念、領悟科學研究方法的各種活動〈National Research Council, 1996〉。

探究式學習，就是在教學過程中創設一種類似科學研究的情境或途徑，讓學生在教師引導下，從學習、生活及社會生活中去選擇和確定研究專題，用類似科學研究的模式，主動地去探索、發現和體驗。同時，學會對訊息進行收集、分析和判斷，去獲取知識、應用知識、解決問題，從而增強思考力和創造力，培養創新精神和實踐能力（程海東，2001）。

在探究式學習中，學生從問題的選擇、確定，資料的收集、分析，報告的撰寫、答辯，成果的整理、交流展示等，整個過程都是要學生自己去操作，這具有很大的自主性。也就是說，在探究式學習中，教師只起指導作用，扮演的角色應該是指導者、協助者、參與者。因此，所謂探究式學習，指的是學生在教師指導下，根據各自的興趣、愛好和動機，選擇不同研究主題，獨立自主地展開研究，從中培養創新精神和創造能力的一種學習模式。它強調讓學生透過研究性學習，提出問題，收集材料，對研究性問題進行探索、分析、研究，最後基於問題解決的模式，在實踐操作的過程中培養學生科學的態度和價值觀以及創新精神、創新思維、創造能力，進而學會解決與生活有關的實際問題〈普通高中數學課程標準，2003〉。

2-3 探究式教學法的歷史脈絡

在二十世紀之前，科學教育的方法主要是透過直接教學讓學生學習大量的科學知識、概念和原理，過於強調訊息的累積，卻忽略了科學是一種思考的模式與態度。因此，

在 1909 年教育家兼哲學家杜威在美國科學進步聯合會的發言中第一次對這種方法提出批評，他認為科學教育不僅僅是要讓學生學習大量的知識，更重要的是要學習科學研究的過程或方法。所以，他可以說是最早提出在學校科學教育中要用探究方法的人

到了 1950 年後，探究法作為一種教學方法的適合性變得越來越明確了。教育家施瓦布說：「如果要學生學習科學的方法，那麼有什麼學習比透過積極地投入到探究的過程中去更好呢？」這句話對科學教育中的探究性學習產生了深遠的影響。他認為教師應該用探究的模式來展現科學知識，學生應該用探究的模式去學習科學內容，並且建議科學教師應該到實驗室去，引導學生體驗科學實驗的過程，而不是在教室裡照本宣科地教授科學，也就是說，在向學生介紹正規的科學概念和原理之前應該先讓他們到實驗室裡做實驗，用實驗的證據來解釋和深化教材中的內容。

施瓦布還提出了一種閱讀文獻資料而非實驗的探究性學習方法，他稱之為“對探究的探究”（enquiry into enquiry）。具體做法是，教師向學生提供關於科學研究的閱讀材料和報告，師生共同討論研究的細節，譬如：問題的提出、數據的解釋、技術的應用、以及研究所得的結論推理與推廣。透過這樣討論可以讓學生了解科學知識是怎樣產生的、科學知識有那些基本的要素。

杜威、施瓦布等人的研究，包括布魯納和皮亞傑在五十年代和六十年代的研究，影響了從五十年代至七十年代早期的課程教材，這些教材的一個共同特點是使學生主動參與並體驗「做中學、學中做」，而不僅僅是被動地聽講或只是閱讀有關科學的資訊。因此，對科學學習的研究過程與方法比掌握科學知識有了更多的重視，進而發展學生的探究能力以及把科學的理解視為一種探究的過程的這樣觀點慢慢獲得廣泛的接受與傳播（陸璟，2002）。

2-4 應用軟體輔助數學探究的理論依據

美國著名數學教育家 G.波利亞在《數學與猜想(第一卷)》的序中指出：“數學的創造過程是與任何其它知識的創造過程一樣的。在證明一個數學定理之前，你先得猜測這個定理的內容，在你完全做出詳細證明之前，你先得推測證明的思路”。因此，數學的生成有賴於猜想，數學的發展也離不開證明，這是相輔相成的兩個側面。隨著計算機、電腦應用軟體等現代科技的引入，使得在中學數學的教學過程中，有更好的環境與情境來引導學生主動參與，動手操作並進行數學實驗，以提升學生學習的興趣和動機，並為創意教學課程設計開拓了新的途徑和教學策略。所以，運用現代科技技術所提供的學習環境來幫助學生進行數學問題的探索，體驗數學知識的建構與創造過程，是資訊融入教學的一環，也是教育心理學的理論延伸，我們想從以前的教育心理學的理論發展與實驗論證，來說明電腦軟體在數學探究中的應用確實有其理論基礎。

德國數學家高斯曾提到：「他的許多定理都是靠實驗和歸納發現的」。數學家歐拉也

認為「數學這門科學需要觀察，也需要實驗」。由此可見，不少數學家都有這樣的共識——用來發現數學新思想的方法之一是進行實驗。而透過電腦軟體所提供環境來進行實驗觀察不僅有其動態的視覺化效果，且具有利於學習者進行猜想、假設與推論的模擬操作的實驗性，給學生一個有主體性的探索空間，同時也激發學生投入問題、親身實踐的探究本能和興趣。相信結合現代的科技技術，來營造一個幫助學生作有系統的數學概念知識的建構，並有助學生進行有程序性的、引導性及創造性的探索環境，爲了要讓數學探究在電腦軟體環境中能夠順利進行與自由發展，是有必要以問題情境的學習模式作爲探究的主要架構，並以鼓勵學生投入問題親身實踐、主動探索爲主旨，並充分尊重學生的自主性及探究本能和興趣。

在數學電腦軟體環境下的數學探究之情境設計所依據的理論，其一是根據蘇俄教育學家維谷斯基(1896-1934)的“最近發展區”理論(the Zone of Proximal Development, 簡稱 ZPD)，此理論認爲：學生的發展有兩種層次，即“實際發展層次”，指的是學生現在能夠獨立完成學習任務的層次；而“潛在發展層次”是指在教師的指導下或啓發性問題引導下完成學習任務的層次。「實際發展」層次與「潛在發展」層次之間的差距叫“最近發展區”，如果最近發展區越大，則學生的發展能力也越大。在軟體環境中的探索性學習能夠創造學生的“最近發展區”，從而提升學生的發展水準。

其二是鷹架理論，此理論最初是由 Bruner, Ross & Wood (1976) 所提出的，它所提出的就是教師在協助學生解決超越其個人能力的問題時所扮演的角色，強調在教學的情境中，教師的理想角色乃是提供學生協助，就如同建築物的「鷹架」一樣，當學生的能力增加之後，「鷹架」就逐漸的移開，即將學習的責任慢慢轉移到學習者的身上。也就是說在教學情境中教師適當的介入學習環境，在學生能夠獨立完成一項工作之前，提供必要的提示、問題、指導、確認與舊知識，使其能完成所指定的工作，旨在減少學習初期的錯誤率與失敗經驗，並且提供愈來愈少的支援。由此可見，在數學電腦軟體的探索環境中透過事先架構設計好的內容和具有內建的認知學習輔助，例如回饋，依序進行，資料的多元化呈現方式，以及一項活動可以預期的發展歷程，能夠提供學習者的一個學習鷹架，來幫助學生在電腦軟體的環境裡完成不可能在一般教室學習環境中達成的數學問題的探索與研究〈裴小倩、朱家雄，2004〉。

2-5 探究性學習的特點

學習與研究是同一回事。在面對一些生活上的實際問題時，要以研究的態度學習，以學習的態度研究，進而培養解決問題的創新能力與實踐能力，因此，在發展資優素質教育的課程改革中，探究性學習是課程改革的一個關鍵重點。從教育理論發展的歷史觀點來看，「探究性學習」與以往的學習理論有密切的傳承關係，包括杜威的「做中學」及後來的發現學習、合作學習，甚至與當前的建構主義學習理論也有密切的關聯性，爲了能夠充分地了解什麼是「探究性學習」，我們歸納整理幾個特點加以說明：

1. 主體性：目前數學課程的教學方式主要是採用講授式的，也就是學生學習的內容是預設的，且學生在大部分的情況下只是接受教師所講授的或教材裏所呈現的知識；而探究性學習是指教師或其它專家不把現成的概念、原理或結論告訴學生，而是讓學生自己在教師指導下自主發現問題，探究問題，獲得結論的過程。在此過程中，學生始終處於主動的、探究性的狀態中，而非被動式接受的狀態。雖然傳統的講授式教學在某種程度上忽略學生的主動性發展，但在還處於累積知識及建構概念的中學階段中，如果不具備一定的從講授教學中獲得的知識，則探究性學習就無從談起，因此，探究性學習與傳統的講授式學習之間的關係應該是相輔相成的，而非完全對立。而且學生用自己的學習模式來探究新知，對他們來說是最好的方法，教師再進行“因勢利導”，這樣更符合學生的認知特點和規律。因此，學生真正處於主體地位是探究性學習最爲顯著的特徵。因爲真正有意義的學習，不是被動接受現成的書本知識，而是學生以積極的心態，在自己已有知識經驗的基礎上對新問題進行積極探索、主動建構的過程。
2. 重過程：探究性學習是指學生在教師指導下，以類似科學研究的方式去取得知識和套用知識的學習方式，它是一種以問題爲基礎，以實驗探究爲過程的綜合性學習。在過程中學生需要的是“指導”，而不是“傳授”。教師的主要職責是創設一種有利於研究性學習的情境和途徑。學生將類比科學家的研究方法和研究程序，提出問題並解決問題，例如通過專題討論、主題研究、素材設計、類比體驗、實驗模擬等各種方式，來探究學習生活和社會生活中的各種現象和問題。而學習的內容包括如何收集、處理和獲得訊息；如何運用有關的知識來解決實際問題；如何在研究程序中與人交流和合作；如何表述或展示研究成果等等。探究性學習所關注的是學習的過程，而不是學習的結果或研究的成果，即學生是否掌握某項具體的知識或技能並不重要，關鍵在於是否能對所學的知識有所選擇、判斷、解釋、運用，從而有所發現、有所創造，這樣的過程才是積極的，有意義的學習過程。
3. 重應用：學以致用是探究性學習的另一個基本特色，也就是它著重知識技能的應用及問題的解決，而不在於掌握知識量的多寡。在現今知識爆炸的網際網路時代裡，如何運用已獲得的知識來解決學習生活、社會生活以及未來生活的問題，從而提高學生的實踐能力、創造能力是探究性學習的最終目的。
4. 有反思：在探究活動的過程中，一旦學生覺得原問題得到解決之後，爲了推廣和深入，需要討論其它相關的類比問題或延伸性的問題，並對解決問題的方法進行歸納與總結，這時候學生開始有意識地反思問題的解決程序，並對自己或他人的表現作出評價，而教師也可以適當地作一些關鍵性的評價，以及輔助學生作最後的歸納與總結。因此，學生對於新學到知識或概念有了反思效果，是有助於學生的認知技能的發展，這也符合學生的學習心理特點，使得他們對周遭的事物充滿好奇，特別好問，並激發他們創造和探究的潛能。所以，探究性學習本身可以滿足學生的這種心理需要，並能激發學生學習的興趣、動機以及求知欲。

5. 合作學習：探究性學習的進行形式是自主學習和合作學習的結合，其中合作學習占有重要地位，由於探究性學習主要是以問題解決為核心的一種學習方式，因此，學習者會面臨著一些複雜的、綜合性的問題，這需要學習同儕間的集體智慧和分工合作，也就是說在問題解決時常需要幾個人一起合作探討和研究，相互討論，共同交流，且學習者在與他人共同學習、分享經驗的過程中，逐步養成合作和共享的樂趣及態度，進而提昇學習的廣度與深度。所以，在探究性學習的過程中，合作既是學習的手段，也是學習的目的，透過合作學習和研究，學習者既能截長補短，相互成長，並能獲得有價值的探究成果，而且又能學會互相交流合作的態度與方式，其中包括彼此尊重、理解以及寬容的態度，並能懂得滿通表達、傾聽與說服別人……等等方式。

掌握研究方法和獲得自然、社會、自我等領域的感性知識和實踐經驗並不是探究性學習所追求的最終目的；而在知識探尋中孕育出一種自主建構，反思探尋的途徑並將其遷移到更廣闊的學習領域才是探究性學習所追求的目的，為達到此目的，學習者需要親身去實踐，並透過觀察、試驗、猜測、檢驗、嘗試錯誤、實驗、模擬、類比、歸納、演繹等方式進行探究和解決問題，且在探索活動的過程中逐步形成一種在日常學習的生活中喜愛質疑、樂於探索、努力求知的學習習慣。

2-6 數學軟體的介紹



現代電腦軟體的種類不勝枚舉，在數學領域方面的應用軟體也很多，其功能與優勢都各有各的獨特性，因此，在教學的過程中，只要能適當的運用該軟體的特點來設計一個模擬實驗、探索研究的環境，都是值得教師去學習與接觸的，尤其是在一個科技應用時代，培養學生具有運用知識、創造價值的能力是我們面臨教育與學習的一個重要議題。在 2000 年元月全國第一座大型的學習網站亞卓市開幕時宣布了七大目標，其中之一是發展七項關鍵能力，所指的是應用資訊科技的能力、創新與創造能力、自省與批判性思考能力、分析判斷與決策能力、設計整合策劃與執行能力、團隊合作溝通與表達能力以及迎接挑戰能力，由此可見運用資訊科技融入教學活動的新穎且有創意的教學設計是重要的，而且其活動實施的時間比率也會愈來愈重。

隨著科技的發展，電腦科技在數學教學中的應用已經展現前所未有的魅力，電腦是數學情境設計的理想輔助工具。利用電腦科技創造數學情境，可以用圖文並茂的表現方式，生動地描述各種複雜抽象的數學圖像關係，並配以色彩鮮艷的動畫演示，形象逼真地模擬各種軌跡的形成過程，解決了學生對抽象數學知識形成、發展過程認知的不足，以及不能深入理解數學思考方法等問題；也就是說「計算機科技的迅速發展以及電腦軟體的形象逼真地模擬各種情境，為數學的探究式學習提供了新環境和支持條件，並為學生的探究、討論、發表意見、解決問題等活動提供了可操作、實驗模擬的工具。由於各個教學設計模組的不同與延伸問題的探究情境的差異，所需要呈現的效果不一，所以，

我們確實有必要先了解目前幾個常用來作為資訊融入教學的應用軟體的一些特性與功能（李政豐，2003）。

1. **Excel**：是一個試算表格，其計算及函數繪圖的功能很強，尤其適合處理一些演算法則與計算，如遞迴關係的表示、變數參數的調整、多種數學函數與公式可套用，是一種可以函數、圖表方式的呈現與容易表達數學式及方法的優良工具。
2. **GSP**：是一個尺規作圖功能強大的幾何繪圖軟體，適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察猜測，可利用參數概念來進行動點的軌跡探究，也可利用動態按鈕來設計一些數學上的動畫，是一種呈現幾何作圖及可操作實驗的幾何軟體。
3. **Maple**：是一個計算功能強大的數學軟體，其可用來作代數方面的一些高等代數計算，也可用參數式來繪製二維、三維空間的幾何圖形，更用符號計算的功能，可說是一個計算強、繪圖功能大的軟體，但其操作使用對中學生而言是難了點。
4. **Flash**：是一個呈現動畫功能強大的軟體，適合製作數學模型教具的圖像，如球、圓柱、圓錐。由於互動性高，也很適合製作數學遊戲，但呈現數學的精確或計算的功能比較弱一點，所以，在高層次的數學就少使用。
5. **Cabri 3D**：這個軟體是在羅馬舉行的 Cabri World 2004 正式發表，是世界第一套動態的、交談式的立體幾何軟體，它延續尺規作圖的方式，讓使用者透過視覺及滑鼠完成立體幾何圖形。點選工具列可以構作並操作一些，如：點、線、線段、射線、向量、圓和錐體曲線、平面、三角形、多角形、半平面、球面、圓錐、正多面體與幾何變換等立體幾何物件；而從功能表中可以對所構作的立體幾何圖形作屬性及視角的改變，並且可以同時開啓多個觀看視窗以及各種角度的透視圖像，還可以拖曳滑鼠右鍵，來作立體視角的改變。透過這個 **Cabri 3D** 立體幾何軟體的輔助與視覺呈現的優勢，相信在立體幾何課程的資訊融入教學設計與在立體幾何問題的探數學究與研究等方面會有令人預想不到的神奇效果。
6. **MathPS 簡報系統**：**PowerPoint** 是一個簡報系統的軟體，可以呈現非常多樣的圖像，後來此軟體增加了動畫的功能，使得圖形的呈現有了多元性、動態式的效果。最近由任教於交通大學的陳明璋教授所研發的 **MathPS** 系統，它是選用「**PowerPoint**」為系統的平台，在該平台上可以建構數學教材的編輯及課堂授課的環境，並可利用定位複製法構作大量的圖形。其中，定位法則（**Positioning**）、複製法則（**Duplication**）及雕琢式建構法（**Deconstruction**）是此系統三個重要的法則。定位法則讓使用者達到「模糊操作，精準定位」的需求；複製法則可以讓使用者建構複雜的構圖，如碎片形，視覺設計等；雕琢式構圖法以解建構取代逐一建構。視覺構圖法就是該系統所研發處理大量資訊的定位方法及複製法則所呈現的效果（陳明璋，2006）。這是其他繪圖軟體所無法達到的程度，也使得它在教學活動的素材設計與視覺化圖像的呈現效果愈來愈精采與多元，是一個普及化且平易近人的好用軟體，而且陳教授還免費提供教育版本給從事教育工作者使用，相信一定會廣受好評。

其實每一種軟體都有它獨特的功能與特色，在電腦軟體的環境中所進行的數學探究無非是想藉由這些軟體的功能與特徵來協助教學模組的設計及促進延伸性問題的探究發展，以達到呈現素材內容的最佳效果。所以，並無所謂那一種軟體較適合進行數學問題的探究教學，而是只要掌握這個數學應用軟體的功能與環境特徵並適度配合屬性相近的數學素材就可以進行有深度、廣度的數學探索，進而提昇學習的效果。

2-7 結語

現代信息技術的廣泛應用正在對數學課程內容、數學教學、數學學習等方面產生深刻的影響。高中數學課程應提倡實現信息技術與課程內容的有機整合(如把算法融入到數學課程的各個相關部分)，整合的基本原則是有利於學生認識數學的本質。高中數學課程應提倡利用信息技術來呈現以往教學中難以呈現的課程內容，在保證筆算訓練的前提下，盡可能使用科學型計算器、各種數學教育技術平台，加強數學教學與信息技術的結合，鼓勵學生運用計算機、計算器等進行探索和發現。

在數學軟體環境中的數學探究是以探究為基本特徵的一種教學活動，它包含著兩個層面：第一層數學軟體所展示的環境特徵是什麼；第二層什麼是數學探究。所謂探究，就是探討和研究；探討就是探求學問，探求知識和探本求源；研究就是研討問題，追根求源和多方尋求答案，解決疑問。現在常在說教學要創新，要有創意，我想這個創新與創意指的就是在一個探究實踐的活動中，不管是利用現代科技技術的實驗模擬，或者是利用傳統的、啟發式的發現教學來進行，都是以學生為本位，教師、教材及電腦軟體為輔助引導，為學生提供充分自由表達、質疑、猜想、探究、討論問題的機遇，並透過個人、小組、集體等多種形式的解難釋疑嘗試活動，將自己所學知識應用於解決實際問題。換句話說探究式教學特別重視開發學生的智力，發展學生的創造性思維、培養其自學能力，力圖透過自我探究引導學生學會學習和掌握科學方法，為終身學習和工作奠定良好的基礎。

而教師在探究式學習的過程中的任務是觸發學生的積極性，促使他們自己去獲取知識、發展能力，做到自己能發現問題、提出問題、分析問題、解決問題。與此同時，教師還要為學生的學習設計探究的情境，建立探究的氣氛與環境，促進探究的開展，掌握學生探究的進度與深度，並給予適度的評價與鼓勵。學生身為探究式學習的主人，自然是根據教師所提供的條件，確立探究的目標與方向，思考探究的問題，掌握探究的方法，敞開探究的思路，交流探究的內容，總結探究的成果。由此可知，探究式學習的活動是教師和學生雙方都要參與的，而且兩者都將以教學者和學習者的雙重身分參與整個探究活動的過程，在這樣合作學習的模式下，使得學生對事物的理解更加豐富而全面，並且能夠促進學生認知技能的發展，並可提高學生自我管理學習的能力。