

第三章 電腦軟體環境下的探究示例及模組

我們希望透過電腦數學軟體的視覺圖形呈現、動態模擬、幾何量與圖表的量化計算、…等定性及等量的交談式操作模式，來提供在數學問題的探究過程中一個具有直覺性、形象化、數據化、可實驗的探索環境。在這個探索環境裡我們可以發現問題、提出問題、對問題的結果作出猜測與檢驗，進而作推理論證的抽象性思考；整個探討的過程可以充分地讓學生了解數學問題的研究方法與邏輯推理；也可以初步體驗問題研究的科學精神，並體會數學定理的發現與創造的激情。

再利用在數學課程中所學過的數學基本原理或概念作為解決問題的模組，並藉助電腦數學軟體的圖形呈現的形象思維與動態操作的模擬實驗，來解決一些數學問題並進一步作延伸與推廣的科學探究。本章共分六節，各節的說明如下：

3-1 應用電腦軟體輔助數學探究的模式

提出探究模式--「提出問題—探究活動—成果交流」。這樣的模式是以問題為主軸，貫穿整個探究過程，並可作為指導學生進行數學探究或進行專題式教學的一個參考依據。

3-2 鐘錶兩針的相交情形---以週期函數為探究模組

在研究的過程中，我們透過動態幾何軟體 GSP 的操作環境來建構一個“模擬時鐘”，從時針、分針的運轉模式裡去探討一些夾角的週期性問題，並從模擬實驗的過程中去觀察、提出問題，進而猜測與分析推理，最後我們得到一些有趣的結果。

3-3 從最適觀畫位置問題談起---以圖形軌跡為探究模組

透過 GSP 動態幾何軟體的尺規作圖操作，重溫一個五百多年前的數學極值問題，即當眼睛與畫像距離多少時，看畫像的視角會最大？我們接著考慮一些相關的問題，例如若畫像所在的牆壁並沒有與地面垂直？或地面是一個球體表面，畫像所在的牆壁垂直於球表面，則當眼睛與畫像相距多少時，看畫像的視角會最大

3-4 內接於正邊形的正三角形的構作及其面積變化---以尺規作圖為探究模組

利用動態幾何軟體 GSP 來探究一道數學問題 — 正方形內接正三角形的尺規作圖，在構作的過程中透過 GSP 軟體的操作方便性，並有對一些幾何圖形(量)可作測量且以動態的方式來呈現幾何圖形(量)的變化等等特點，進而對問題作進一步的猜測與推廣。

3-5 內接於正邊形的正三角形的重心軌跡---以操作發現為探究模組

將此正多邊形分成三個類型： $3n$ 型、 $3n+1$ 型、 $3n+2$ 型來進行一些延伸性問題的探究。例如：當正三角形的三個頂點在正多邊形之邊上移動時，則此正三角形的三邊

中點及其重心的軌跡圖形為何？且其軌跡圖形之間又有何關係？

3-6 一道「國中基測」數學問題的疑義與探究---以類比實驗為探究模組

從九十五學年「國中基測」數學第 33 題的疑義出發，將不完善題意分成三個情況進行模擬實驗性的探究。



3-1 應用軟體輔助數學探究的模式

在軟體環境下的探索教學模式中，教師透過數學應用軟體來引導學生對於問題的分析與討論，其引導的過程即是提出問題，啟發思考的過程，把那些不知與知、淺知與深知之類的需要學生解決的問題帶到一定的情境中去。通過激發起學生的興趣，提供親身實驗的環境，開啓他們求知的心扉，燃起他們對知識的追求熱情；並藉由電腦技術來創設問題的模擬情境，以其逼真的形象呈現，真切的體驗與合理的猜想，降低了師生之間溝通時思維之間的差距，以及語言表達所引起的歧見，使專家型的知識結構與初學者的認知結構之間建立了溝通的橋樑；並讓學習者可以從作數學問題的過程中進行探討、猜測、推理，進而找出解決問題的模型，建立對概念的正確認識。在這樣的探究過程中將會有一個深刻體悟，那就是在利用電腦軟體所創設的數學情境中，數學對象的組織方式不同，所含的因素的多少，以及對各問題層次的不同陳述方式，將直接影響數學概念的建構與學習，只有提供適當的陳述方式和不多不少的因素數量，以及符合學習者思維習慣的組織方式才有利於問題的解決（潘巧明，2003）。

數學輔助軟體的操作性、動態呈現及模擬實驗等特性，提供學生具有創新溝通及假設猜想的學習環境，是十分有利於學生的自主發現和自主探究。因此，我們想具體的給出應用軟體輔助數學探究的模式--「提出問題—探究活動—成果交流」，而這個模式是以問題為主軸，貫穿整個探究過程，並可作為指導學生進行數學探究或進行專題式教學的一個參考依據。讓學生在數學問題的探究過程中，不會被動地記憶、理解老師所講解的知識，而是敏銳地發現問題，主動地提出問題，積極地尋找解決問題的方法和探求結論，而教師在學生自主性的探究過程中，有此模式作為其推動探究教學的參考，可以讓教師了解到自己所扮演的角色只是引導、輔助，而不是主導、決定，也就是不可過度的介入參與，卻要多了解學生在探究過程中的學習進度與目標，若有需要，則視情況給予適當的協助與引導。以下我們就這個模式的各階段之進行作個說明：

1. 提出問題：

自主學習的核心是探究，而探究的活動始於提出問題。傳統的教學是把問題在課堂上弄懂，走出教室就沒有問題了，而現代教學理論認為，問題的解決並不是教學的根本目的，不能滿足於學生已經掌握了多少個問題的答案，而是在獲得結論的同時，鼓勵學生自主地提出新的問題，帶著新問題走出教室並想辦法解決它。因此，我們希望在各種學習階段中能夠適當的引導並訓練學生提出問題是非常重要的，其方式有：

(1) 單元課程的主題提問：

在進入主要教學的課程內容後，讓學生根據課程主題提出問題，這樣的提問，一使學生從上課一開始就能明確這個單元課程的學習內容和目標，二能激起學生的

探究學習慾望。例如在教三角函數裡的“正、餘弦定理”時，教師可以揭示主題後讓學生看著主題進行提問---提出了“什麼是正、餘弦定理？”、“在什麼情況下有正、餘弦定理的性質？”、“學習了正、餘弦定理後有什麼用途？”等等有價值的問題，來激發學生想及早知道“正、餘弦定理”的強烈慾望。

(2) 自我學習的自學提問：

即學習者透過自學教材及內容，在接觸新知識的過程中發現與原有的舊知識有相似處，學習者把認為有相似的地方提出來，作為進一步探究新知而確定思維的方向。例如：在國中小階段裡所學的數以十進位表示法，與進入高中課程中的多項式表示法之間有什麼樣的相似性與關連性。學生透過自學的學、思、疑、問四個相互聯繫的學習要素---學有所思，思有所疑，疑有所問，是現代教學中需要提倡的優良學習模式。所以，只要相信學生，並給予學生充分的自學時間和空間，那麼學生的自學能力肯定會迅速提升，同時我們也可以針對自學能力較弱的學生的學習特點，讓學生進行“仿學”提問，即設計與例題相似的類題，讓學生模仿例題進行學習，在“仿學”中提出問題。

(3) 認知架構的嘗試提問：

數學知識與內容是按螺旋式推進、循序漸進的原則編排的，所以，可以讓學生嘗試在練習中提出問題，將已有的數學認知架構和生活經驗作為基礎，嘗試進一步發現問題並提出問題。

(4) 迷失概念的辨析提問：

即對於容易產生迷失的類似概念、法則、性質等知識，以及有共通性的疑點，或者一些數學概念或結語中的關鍵字、詞等，讓學生進行辨析，且在辨析的過程中產生問題並提出問題。

2. 探究活動：

在學習過程中，學生提出問題的過程就是思考的過程，以問題為中心的學習環境可以讓學生帶著問題去學習，促使學生在自主學習中發現問題，解決問題，提升認知能力。有了問題來激發學生的探究動機與慾望，並確定了主題與探究的方向，進而促進探究活動的發展。我們進行探究活動的形式主要有三種：一是獨立探究，即讓每個學生根據自己的經驗，用自己的思維模式自由地、開放地去探究、去發現，獨立探究能使學生學到科學探究的方法，從而增加學生的自主意識，培養學生的探索精神和創新能力。二是小組合作探究，合作探究能使學生集思廣益、思維互補、思路開闊，使獲得的概念更清晰、結論更準確。三是班級集體探究，班級集體探究主要是抓住中心議題或關鍵性問題，讓學生自由發表意見，集中解決難點。我們在進行探究活動時，對學生獨立探究能解決的問題，就進行獨立探究；對獨立探究不能解決的問題，就進行合作探究；小組合作探究還不能解決的問題，就改以全班團體集中討論方式進行。根據教學內容的不同特點，選擇合理的探究方法。進行探究活動，除了選用恰當的探究形式外，還應根據教學內容的不同特點，選擇合理的探

究方法，同時使學生熟悉並掌握這些科學的探究方法。通常可以讓學生用下列方法進行問題的探究：

- (1) 操作—發現：讓學生透過自己動手操作，發現規律，得出結論。
- (2) 猜想—驗證：讓學生根據已有的知識、經驗和方法，對數學問題大膽猜想，尋找規律，合理論證，這是創造性思維活動的重要途徑。
- (3) 觀察—歸納：讓學生透過大量具體事例，歸納發現事物的一般規律。問題的歸納過程，實質上就是觀察、思考、發現的過程，也是從中作總結規律的過程，而且能在歸納探究過程中，培養學生對問題的抽象分析能力。
- (4) 類比—轉化：讓學生透過類比的思維方法以及轉化的思維方法，建立新舊知識的聯繫，發現數學原理、方法，並推出結論。雖然類比推出的結論必須經過驗證，但類比、轉化在培養學生豐富的想像力和知識遷移能力方面有著不可替代的作用。

讓學生運用在探究過程中所獲得的知識，舉一反三地解決類似或相關的問題，這是學生鞏固和擴大知識，吸收、內化知識為能力的過程，而且也是開發學生創新思維的重要階段，讓學生在自我探索的過程中學會驗證假設的能力，當然不應離開教師的引導和協助。在這個階段裡教師要努力為學生創設良好的情境和條件，如介紹圖書資料訊息及網路搜尋方法，提供必要的實驗條件等，還要不斷激勵學生的探索精神，敢於嘗試，持之以恆，使學生運用正確的思維模式，如觀察、聯想、直覺和想像等創造性地解決問題。

3. 成果交流：

在模式中，學習者對知識的獲得不是由老師傳授或灌輸的，而是通過同化、順應，在學習同伴之間的交流、對話、協商、討論過程中，運用探究的方式來建構知識，並將所獲得的成果利用歸納總結整理成書面和口頭報告。所以，這一階段主要是讓學生通過交流、研討與同學們分享成果，並在交流、研討中學會欣賞他人的研究成果，學會客觀地分析和辨證地思考，也要敢於提出評價和善於申辯。透過鼓勵為主的民主評價，讓學生自由發表不同的意見，提出自己的看法，並對學生探究活動的斬獲，積極主動參與探究的精神給予充分肯定，並且在評價過程中給予適當的點撥、啓迪，調控評價過程，給學生以成功的情感體驗，增強學生主動參與探究的自信心，使學生逐漸把探究學習作為自己學習生活中的第一樂趣。探究性學習是一種自主學習，教師不能包辦代替；也是一種體驗學習，強調通過親身實踐獲得直接經驗；更是一種研究學習，要求能夠綜合運用所學知識解決生活中的實際問題。

3-2 鐘錶兩針的相交情形---以週期函數為探究模組

時鐘的背後蘊藏著很多的數學概念，兩針在準確的運轉過程中的夾角關係隨著時間的過去，不斷地呈規則的變化。我們透過數學軟體 G.SP 的動態環境來探究兩針夾角 θ 與時間 t 的關係，發現函數 $\theta = f(t)$ 的形狀為鋸齒狀，可以 \cos 和 \cos^{-1} 的合成函數來表示，我們進而利用傅立葉級數的概念來探索無理數 π 及 π^2 的一些無窮級數表示式。

3-2-1 前言

在調整時間時，我們總是會用手指去撥弄指針；在轉動分針時，時針會跟著轉動，在指針夾角的交替過程中，似乎傳遞出一種訊息，這個訊息的出現是連續的。隱藏在這連續性的互動背後的數學模型是我們要探究的主題，由於時、分針角速度不同，它們在鐘面上形成一種“追趕”的關係，正所謂「兩針之夾角與當時的時間會有某種關係」---這之間的關係值得我們作深入的探索與了解。一天的時間從分針、時針輕輕地走來而穿梭隧道，就如同我們的思緒在分針、時針週期性地交織，希望能激盪出一些數學探索的美麗詩篇。

我們藉由數學軟體 G.SP 製作「虛擬時鐘」來探究時、分兩針在“連續性”地轉動時，其夾角與時間之間的關係。在本文裡，我們透過觀察陸續考慮以下的幾個問題：

1. 在一天當中，時針與分針兩針夾角分別為 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 的次數及其時間，如表 3-2-3-1~3 所示。
2. 若兩針在 h 點 m 分時正交，若 $0 \leq h \leq 11$ 且 $0 \leq m < 60$ ，則 $m = f(h) = \frac{60h \pm 180}{11}$ ，一般而言是一個週期為 $\frac{360}{11}$ 的週期函數（見系理三）。
3. 設時針、分針兩針之角速度分別為 w_1 及 w_2 ，則此兩針的夾角 θ 與時間 t 的關係為 $\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos(w_1 - w_2) \cdot t)$ ，且其週期為 $\frac{2\pi}{|w_1 - w_2|}$ （見定理一）。
4. 若在某一時刻 t 的 m 分鐘後兩針第一次重合，則 (m, t) 的關係為 $f(t) = 0$ 當 $t = \frac{720}{11}k$ ；此外， $f(t) = \frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11t}{720} + \frac{1}{2}))$ 是一個週期為 $\frac{720}{11}$ 的週期函數，且其值域為 $[0, \frac{720}{11})$ （見定理二）。
5. 由時、分、秒針三針之兩兩夾角 θ_{hm} ， θ_{ms} ， θ_{hs} 對時間 t 的函數關係，來探討各個 (θ, t)

函數圖形的交點意義，如圖 3-2-4-3 所示。

6. 歸納出時針、分針、秒針三針夾同角的時刻與角度之關係，見系理六、七。
7. 探究時鐘的時、分、秒針三針在旋轉過程中是否能將鐘面三等分?(見系理八)
8. 利用傅立葉級數的概念導出 π , π^2 的一些無窮級數表示式，見系理十、十一。

3-2-2 幾個預備引理

在時、分兩針的旋轉過程中，我們發現其夾角有「由大變小」及「由小變大」等兩種變化情形，因兩針重合前的夾角是遞減，而重合後的夾角是遞增，又兩針的相對角速度是固定的，因此這樣的變化情形具有週期性，可以藉以下四個呈鋸齒狀及斜線段的週期函數來表示，它們分別是

$$\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 2\pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x - \pi, & x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad \delta(x) = x, 0 \leq x < 1.$$

其函數圖形如下圖 3-1-2-1~4 所示。

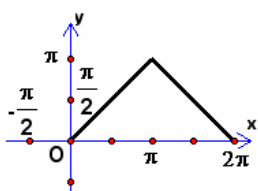


圖 3-2-2-1
 $\alpha(x)$ 函數圖形

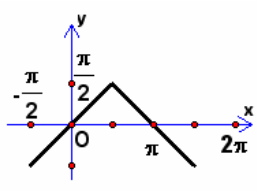


圖 3-2-2-2
 $\beta(x)$ 函數圖形

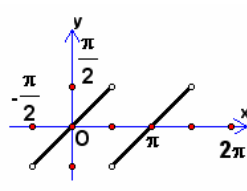


圖 3-2-2-3
 $\gamma(x)$ 函數圖形

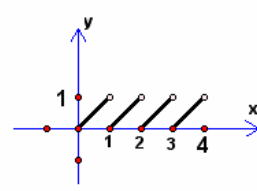


圖 3-2-2-4
 $\delta(x)$ 函數圖形

實際上我們可以以適當的三角函數及其反三角函數的合成函數來表示上述的函數，亦即 $\alpha(x) = \cos^{-1}(\cos x)$, $\beta(x) = \sin^{-1}(\sin x)$, $\gamma(x) = \tan^{-1}(\tan x)$, $\delta(x) = x - [x]$. 因此，我們先在引理一提出幾個和反三角函數 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ 有關的一些性質。令

$$\sin^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\cos^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

因爲 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 分別以 2π , 2π , π 爲週期之週期函數，則 $\sin^{-1}(\sin x)$, $\cos^{-1}(\cos x)$, $\tan^{-1}(\tan x)$ 亦均爲鋸齒狀的週期函數。

引理一：

1. $f(x) = \cos^{-1}(\cos x) : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \pi]$ 是一個週期爲 2π 的週期函數。
2. $g(x) = \sin^{-1}(\sin x) : (-\infty, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是一個週期爲 2π 的週期函數。
3. $h(x) = \tan^{-1}(\tan x) : (-\infty, \infty) \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 是一個週期爲 π 的週期函數。
4. $\sin^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\cos(x - \frac{\pi}{2}))$.

證明：1, 2, 3 顯而易見，我們只證明 4. 令 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 且 $a = \sin^{-1} \theta$ ，得 $\sin \theta = a$ ；又

因 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ ， $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta = a$ ，得 $\frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} a$ ，故

$\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ ，其中 a 用 $\sin x$ 代入即可得

$$\sin^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}[\cos(x - \frac{\pi}{2})].$$

得證。■

在引理一中，由平移及對稱變換之概念，可知 $\sin^{-1}(\sin x)$ 的圖形是由 $\cos^{-1}(\cos x)$ 的圖形先向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長，再對 x 軸作翻轉，最後再向上平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長而得的。

$\tan^{-1}(\tan x)$ 是一週期爲 π 且值域爲 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的週期函數，可經由伸縮、平移、對稱等變換而與函數 $x - [x]$ 相似。我們將在引理二探討這個關係。

引理二：令高斯符號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，則 $x - [x]$ 是一週期爲 1 的週期函數，其值域爲 $[0, 1)$ ；若 x 不爲整數，則

$$x - [x] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\tan \pi(x - \frac{1}{2})).$$

證明：令 $f(x) = x - [x]$ ，設若 $k > 0$ ， $f(x+k) = f(x)$ ，則 $(x+k) - [x+k] = x - [x]$ 得 $k = [x+k] - [x]$ 。因此， $k=1$ 。所以， $f(x) = x - [x]$ 爲一週期爲 1 的週期函數。

又 $f(x) = \tan^{-1}(\tan x)$ 是一週期為 π 且值域為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的週期函數，利用函數圖形的伸縮、平移、對稱變換之概念，先將 $f(x) = \tan^{-1}(\tan x)$ 的圖形沿著 x 軸方向壓縮 $\frac{1}{\pi}$ 倍，再沿著 y 軸方向壓縮 $\frac{1}{\pi}$ 倍，最後再向上及向右平移 $\frac{1}{2}$ 個單位長，可得函數為 $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1}[\tan \pi \cdot (x - \frac{1}{2})] + \frac{1}{2}$ 。

在 x 為整數時，函數 $x - [x]$ 的值為 0，但函數

$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1}[\tan \pi \cdot (x - \frac{1}{2})] + \frac{1}{2}$ 的值不存在。因此，若 x 不為整數時，則

$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \tan^{-1}[\tan \pi \cdot (x - \frac{1}{2})] + \frac{1}{2}$ ，得證。■

根據傅立葉變換知任何訊號都可表示成各種正餘弦波之和，我們想透過傅立葉級數去分析這個「兩針夾某一角」訊號裡到底蘊藏了什麼樣的無窮級數。 $\cos^{-1}(\cos x)$ 的傅立葉級數展開式幫助我們作這方面的探討。

引理三：函數 $\cos^{-1}(\cos x)$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 的傅立葉級數展開式為

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos nx.$$

證明：函數 $\cos^{-1}(\cos x)$ 的傅立葉級數展開式為 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ，利

用分部積分法可得 $a_0 = \pi$ ， $a_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi}$ ， $b_n = 0$ 。所以，

$$\cos^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos nx. \text{ 證畢。} \blacksquare$$

3-2-3 主要定理及其證明

時針、分針兩針在鐘面的旋轉過程中，因為兩針相對的角速度為 $\frac{11}{12}$ ，即每經過 $\frac{12}{11}$

圈時，分針就會追上時針，而且時、分兩針在這 $\frac{12}{11}$ 圈中會出現兩次夾等角。所以，兩針夾角與時間的關係具有週期性，且連續兩次夾等角的時間間隔是固定的。兩針夾角與時間的關係陳述於定理一，而定理二則說明在某一時刻 t 之後的 m 分鐘時，時針、分針兩針重合的 m 與 t 關係。

定理一：設時鐘裡的兩針之角速度分別為 w_1 及 w_2 ，則兩針的夾角 θ 與時間 t 的關係為一個週期為 $\frac{2\pi}{|w_1 - w_2|}$ 的週期函數

$$\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos(w_1 - w_2) \cdot t) = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(\sin((w_1 - w_2) \cdot t - \frac{\pi}{2})).$$

證明：因為兩針之角速度分別為 w_1 及 w_2 ，自零點零分起， t 分鐘後兩針的旋轉角度差為 $\alpha = |w_1 - w_2| \cdot t$ ，設兩針的夾角為 $\theta \in [0, \pi]$ ，由圖 3-2-4-1 中的對應關係，可知夾角 θ 與旋轉角度差 α 的關係式為 $\alpha \pm \theta = 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。因此，

$\cos \theta = \cos \alpha = \cos |w_1 - w_2| \cdot t$ 。由引理一及函數圖形的伸縮變換的概念，知函數

$\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos(w_1 - w_2) \cdot t)$ 為一週期為 $\frac{2\pi}{|w_1 - w_2|}$ 的週期函數。由引理一知，

$$\cos^{-1}(\cos(w_1 - w_2) \cdot t) = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(\sin((w_1 - w_2) \cdot t - \frac{\pi}{2})). \text{ 得證。} \blacksquare$$

我們想進一步探討在某一時刻 t 之後的 m 分鐘時兩針互相重合或垂直的情形，例如變數 m 與變數 t 之間會有什麼樣的關係？

首先討論兩針重合的情形：在某一時間 t 之後的 m 分鐘，時、分兩針會重合 ($\theta = 0$)，則變數 m 與 t 之間會有什麼樣的關係？已知時、分兩針在 0 點 0 分鐘時會重合，設某一時刻 t 之後的 m 分鐘兩針重合，又兩針重合的週期為 $\frac{720}{11}$ (見定理一)。因此，在時間 t 之

內，兩針重合 $\left\lfloor \frac{t}{\frac{720}{11}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11t}{720} \right\rfloor$ 次。自零點零分起，兩針重合，又 $\left\lfloor \frac{11t}{720} \right\rfloor + 1$ 次所需要的時

間為 $t + m = \frac{720}{11} \cdot \left(\left\lfloor \frac{11t}{720} \right\rfloor + 1 \right)$ ，可推得 $m = f(t) = \frac{720}{11} \cdot \left\{ \left\lfloor \frac{11t}{720} \right\rfloor - \frac{11}{720}t \right\} + \frac{720}{11}$ ， $t \in \mathbb{R}$ 。再

由引理二，得變數 m 對 t 的關係式為：當 $t = \frac{720k}{11}$ ， $f(t) = 0$ ；當 $t \neq \frac{720k}{11}$ 時，

$$f(t) = \frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11}{720}t + \frac{1}{2})).$$

接下來再討論兩針垂直的情形：在某一時間 t 之後的 m 分鐘時兩針互相垂直，則 m 與 t 之間的關係式為何？在圖表 3-2-4-2 中，知兩針在零點 $\frac{180}{11}$ 分鐘時垂直，利用平移

的概念，將時間軸向右平移 $\frac{180}{11}$ 分鐘，即以 0 點 $\frac{180}{11}$ 分當作新時間軸的原點，則新時間 t'

與原時間 t 的關係式為 $t' = t - \frac{180}{11}$ 。在新時間軸中，設某一時間 t' 之後的 m 分鐘，兩針會

互相垂直，又兩針垂直的週期為 $\frac{360}{11}$ 分鐘。所以，在時間 t' 之內，兩針正交 $\left[\frac{t'}{\frac{360}{11}} \right] = \left[\frac{11t}{360} \right]$

次數。從零點零分起，兩針垂直 $\left[\frac{11t}{360} \right] + 1$ 次所需要的時間為 $t' + m = \frac{360}{11} \cdot \left(\left[\frac{11t}{360} \right] + 1 \right)$ ，可推得

$$\begin{aligned} \text{當 } t \neq \frac{180k}{11}, m = f(t) &= \frac{360}{11} \cdot \left\{ \left[\frac{11t}{360} - \frac{1}{2} \right] - \left(\frac{11}{360}t - \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{360}{11}, t \in \mathbb{R} \\ &= \frac{180}{11} - \frac{360}{11\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{360}t \right) \right); \end{aligned}$$

而 $f\left(\frac{180k}{11}\right) = 0$ 。其函數圖形如下圖 3-2-3-1 所示：

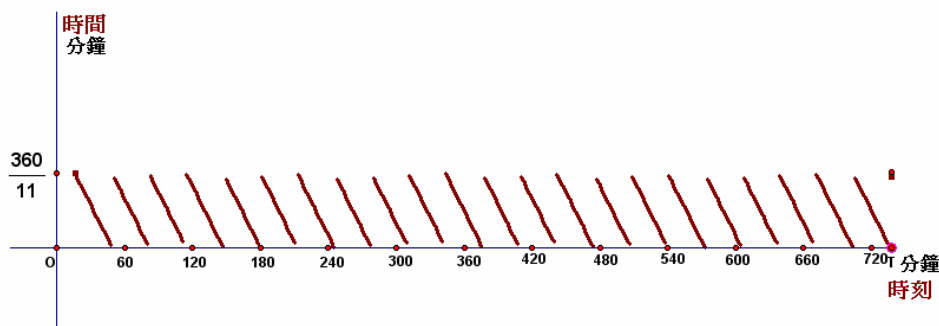


圖 3-2-3-1 $\frac{180}{11} - \frac{360}{11\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{360}t \right) \right)$ 的函數圖形

我們將這兩種情形的討論的結論歸納為定理二。

定理二：

1. 若在某一時刻 t 之後的 m 分鐘，時針、分針兩針重合，則 $f\left(\frac{720k}{11}\right) = 0$,

$$\text{當 } t \neq \frac{720k}{11} \text{ 時, } m = f(t) = \frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{720}t + \frac{1}{2} \right) \right),$$

該函數是一個週期為 $\frac{720}{11}$ 的週期函數，且其值域為 $\left[0, \frac{720}{11} \right)$ 。

2. 若在某一時刻 t 之後的 m 分鐘，時針、分針兩針垂直，則 $f\left(\frac{180k}{11}\right) = 0$,

$$\text{當 } t \neq \frac{180k}{11} \text{ 時, } m = f(t) = \frac{180}{11} - \frac{360}{11\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{360}t \right) \right),$$

該函數是一個週期為 $\frac{360}{11}$ 的週期函數，且其值域為 $[0, \frac{360}{11})$ 。

證明：1. 由前面的討論中所推導出來的變數 m 與 t 之函數關係式，若 $t \neq \frac{720k}{11}$ 時，

$$f(t) = \frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11}{720}t + \frac{1}{2})) ; \text{若 } t = \frac{720k}{11}, f(t) = 0, , \text{由引理一及}$$

函數圖形的伸縮、平移、對稱變換之概念可推知，它是一週期為 $\frac{720}{11}$ 的週期函

數，且其值域為 $[0, \frac{720}{11})$ 。

2. 同理可證，若 $t \neq \frac{180k}{11}$ ， $f(t) = \frac{180}{11} - \frac{360}{11\pi} \cdot \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11}{360}t))$ ；當 $t = \frac{180k}{11}$ ，

$f(t) = 0$ 是一週期為 $\frac{360}{11}$ 的週期函數，且其值域為 $[0, \frac{360}{11})$ ，得證。■

3-2-4 一些推論

在三點整及九點整時，時針及分針剛好互相垂直。如果從零點起， m_0 分鐘後兩針會垂直，則 $(\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{1}{12}) \cdot m_0 = \frac{\pi}{2}$ ，可得 $m_0 = \frac{180}{11}$ 。因此，在零點 $16\frac{4}{11}$ 分時，兩針互相

垂直。就一般情形而言，我們探討若在 h 點 m 分，時分針兩針夾角為 $\frac{\pi}{2}$ 時 m 與 h 的關係，

因為兩針的相對角速度固定，兩針從 h 點零分到 h 點 m 分的旋轉角度差為

$m \cdot (\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{1}{12})$ ，又兩針在 h 點零分時的夾角為 $\frac{h}{6}\pi$ ，且兩針 h 點 m 分鐘時互相垂直，

得 $m \cdot (\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{1}{12}) \pm \frac{\pi}{2} = \frac{h}{6}\pi$ ，即 $m = \frac{60h \pm 180}{11}$ 。

同理，當兩針夾角分別為 $0, \frac{\pi}{3}$ 時，其變數 h 及 m 的關係分別為 $m = \frac{60}{11}h$ ， $m = \frac{60}{11}h \pm \frac{120}{11}$ ，

$0 \leq h \leq 11$ 。

我們將這些關係歸納成系理三，並將 $0 \leq h \leq 11$ 分別代入 $\frac{60h \pm 180}{11}$ ， $\frac{60}{11}h$ ，

$\frac{60}{11}h \pm \frac{120}{11}$ ，可得一天當中兩針夾角為 $\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{3}$ 的時間及其次數，如圖 3-2-4-1~3 所示。

系理三：在 h 點 m 分鐘時，時針、分針兩針夾角 θ 分別為 $\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{3}$ 時，則

當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， $m = \frac{60h \pm 180}{11}$ ，

當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， $m = \frac{60}{11}h$ ，

當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， $m = \frac{60}{11}h \pm \frac{120}{11}$ ， $0 \leq h \leq 11$ 。

表 3-2-4-1 兩針夾 $\frac{\pi}{2}$ 弧度的時間

時·分	時·分	時·分	時·分	時·分	時·分
0 · 16 $\frac{4}{11}$	0 · 49 $\frac{1}{11}$	1 · 21 $\frac{9}{11}$	1 · 54 $\frac{6}{11}$	2 · 27 $\frac{3}{11}$	3 · 0
3 · 32 $\frac{8}{11}$	4 · 5 $\frac{5}{11}$	4 · 38 $\frac{2}{11}$	5 · 10 $\frac{10}{11}$	5 · 43 $\frac{7}{11}$	6 · 16 $\frac{4}{11}$
6 · 49 $\frac{4}{11}$	7 · 21 $\frac{9}{11}$	7 · 54 $\frac{6}{11}$	8 · 27 $\frac{3}{11}$	9 · 0	9 · 32 $\frac{8}{11}$
10 · 5 $\frac{5}{11}$	10 · 38 $\frac{2}{11}$	11 · 10 $\frac{10}{11}$	11 · 43 $\frac{7}{11}$		

表 3-2-4-2 兩針夾 0 弧度的時間

時·分	時·分	時·分	時·分	時·分	時·分
0 · 0	1 · 5 $\frac{5}{11}$	2 · 10 $\frac{10}{11}$	3 · 16 $\frac{4}{11}$	4 · 21 $\frac{9}{11}$	5 · 27 $\frac{3}{11}$
6 · 32 $\frac{8}{11}$	7 · 38 $\frac{2}{11}$	8 · 43 $\frac{7}{11}$	9 · 49 $\frac{1}{11}$	10 · 54 $\frac{6}{11}$	

表 3-2-4-3 兩針夾 $\frac{\pi}{3}$ 弧度的時間

時·分	時·分	時·分	時·分	時·分	時·分
0 · 10 $\frac{10}{11}$	0 · 54 $\frac{6}{11}$	1 · 16 $\frac{4}{11}$	2 · 0	2 · 21 $\frac{9}{11}$	3 · 5 $\frac{5}{11}$
3 · 27 $\frac{3}{11}$	4 · 10 $\frac{10}{11}$	4 · 32 $\frac{2}{11}$	5 · 16 $\frac{4}{11}$	5 · 38 $\frac{2}{11}$	6 · 21 $\frac{9}{11}$
6 · 43 $\frac{7}{11}$	7 · 27 $\frac{3}{11}$	7 · 49 $\frac{1}{11}$	8 · 32 $\frac{8}{11}$	8 · 54 $\frac{6}{11}$	9 · 38 $\frac{2}{11}$
10 · 0	10 · 47 $\frac{3}{11}$	11 · 5 $\frac{5}{11}$	11 · 49 $\frac{1}{11}$		

由表 3-2-4-1 知，每次兩針直交的間隔時間為 $\frac{360}{11}$ 分鐘，即兩針直交的週期為 $\frac{360}{11}$ 分鐘。

由表 3-2-4-2 可以發現半天之內，兩針夾角為 0 的次數有 11 次，且其週期為 $\frac{720}{11}$ 分鐘。

由表 3-2-4-3 可發現半天內，兩針夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 時共有 22 次，且時間間隔有二種情形，分別

為 $\frac{480}{11}$ 分鐘及 $\frac{240}{11}$ 分鐘。因此，可以發現每次兩針夾 $\frac{\pi}{3}$ 弧度的時間不具週期性。

由表 3-2-4-1~3 的觀察歸納，並利用 G.SP 所製作的「虛擬時鐘」，在虛擬的操作環境中來作探究，試決定時鐘的時、分兩針的夾角與時間的關係為何？假設時、分針兩針的夾角為 $\theta \in [0, \pi]$ ，先從零點零分起，經過時間 t 後，兩針的旋轉角度差與實際上兩針的夾角大小的關係作討論：

1. 設從零點零分起， t 分鐘後兩針的旋轉角度差為 $\alpha = \left(\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{1}{12}\right) \times t = \frac{11t}{360} \pi$

以 $t=60, 120, 540$ 分別代入上式，可得 t, α, θ 的關係，如表 3-2-4-4 所示。

表 3-2-4-4 時間旋轉角度差及兩針夾角的關係表

t	α	θ
60	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
120	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
540	$\frac{33\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

歸納整理，可得 $\alpha \pm \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

2. 對應關係圖：

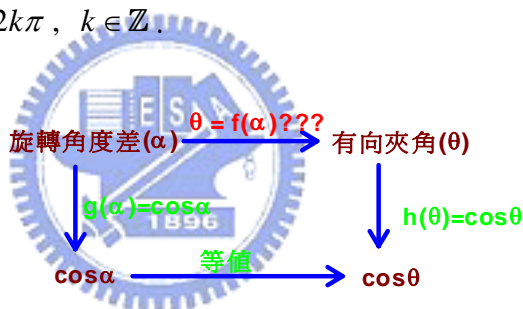


圖 3-2-4-1 旋轉角度差與有向差角之對應關係

3. 因為 $\alpha \pm \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，故 $\cos \alpha = \cos \theta$ ，但 θ 滿足 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，由反餘弦函數定義知， $\cos^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ， $\theta = \cos^{-1}(\cos \alpha)$ ，又 $\alpha = \frac{11\pi}{360} \cdot t$ 。所以，

$\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t)$ ， $t \in \mathbb{R}$ 。其函數圖形如圖 3-2-4-2 所示：

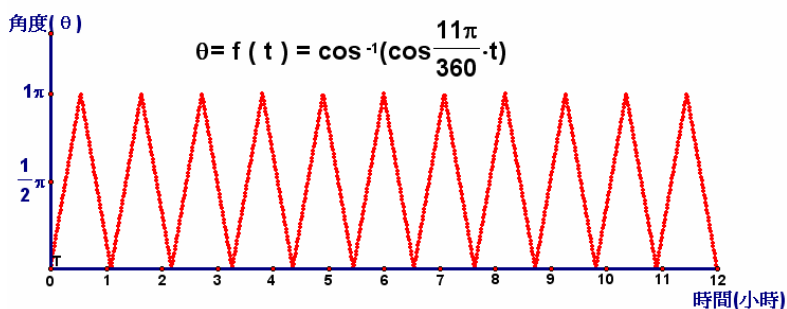


圖 3-2-4-2 $\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t)$ 的函數圖形

我們將上面的結果歸納成系理四。

系理四： 時針、分針兩針的夾角 θ 與時間 t 之關係為

$$\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

由圖 3-2-4-2 的函數圖形可以印證在表 3-2-4-1~3 所得到的結論，也就是說觀察一水平直線 $y = \frac{\pi}{2}$ 與函數 $\theta = f(t) = \cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t)$ 的相交情形，發現交點的個數就是兩針垂直的次數，即半天內共有 22 次出現兩針垂直，而每個交點的 x 坐標即為兩針垂直的時刻。同樣地，作水平直線 $y = 0$ ，亦可發現為何兩針重合的次數只有兩針垂直次數的一半，如果再進一步作出直線 $y = \frac{\pi}{3}$ ，可以說明相鄰兩次兩針夾角 $\frac{\pi}{3}$ 的時間間隔不相等，而每“兩”次兩針夾角的時間卻具有週期性的原因。

在構作出兩針夾角 θ 對時間 t 的圖形後，我們可以藉由 (θ, t) 函數圖形與在區間 $[0, \pi]$ 的水平線的相交情形，來觀察這些交點之間的水平距離，進而推算這些交點的時間間隔，好比說兩針之相隔兩次“重合”的時間需歷時多久，或發生兩針夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 的時間之關係都可以從 (θ, t) 圖形與水平線的交點來看出一些端倪。同樣地，從兩針夾角 θ 對時間 t 的函數圖形中的某個時刻，去推算離下次兩針“正交”或“重合”還要多久，都可以藉由夾角與時間的函數圖形觀察而得。

如果我們把秒針也列入考慮，那麼三針之間的相互關係，也頗耐人尋味，而時、分、秒針的角速度分別為 $\omega_h = \frac{2\pi}{720}$ ， $\omega_m = \frac{2\pi}{60}$ ， $\omega_s = 2\pi$ ，由定理一可推得系理五的三個時、分、秒針三針之夾角 θ 對時間 t 的函數關係。

系理五：

1. $\theta = f_{hm}(t) = \cos^{-1}(\cos(\omega_m - \omega_h) \cdot t) = \cos^{-1}(\cos(\frac{11\pi}{360} \cdot t))$ ，週期為 $\frac{2\pi}{|\omega_m - \omega_h|} = \frac{720}{11}$ ，
2. $\theta = f_{ms}(t) = \cos^{-1}(\cos(\omega_s - \omega_m) \cdot t) = \cos^{-1}(\cos(\frac{59\pi}{30} \cdot t))$ ，週期為 $\frac{2\pi}{|\omega_s - \omega_m|} = \frac{60}{59}$ ，
3. $\theta = f_{hs}(t) = \cos^{-1}(\cos(\omega_s - \omega_h) \cdot t) = \cos^{-1}(\cos(\frac{719\pi}{360} \cdot t))$ ，週期為 $\frac{2\pi}{|\omega_s - \omega_h|} = \frac{720}{719}$ 。

由系理五裡的三個函數關係，利用動態幾何軟體 G.SP 來構作出它們在 0 至 12 分之範圍內的函數圖形，如下圖 3-2-4-3 所示：

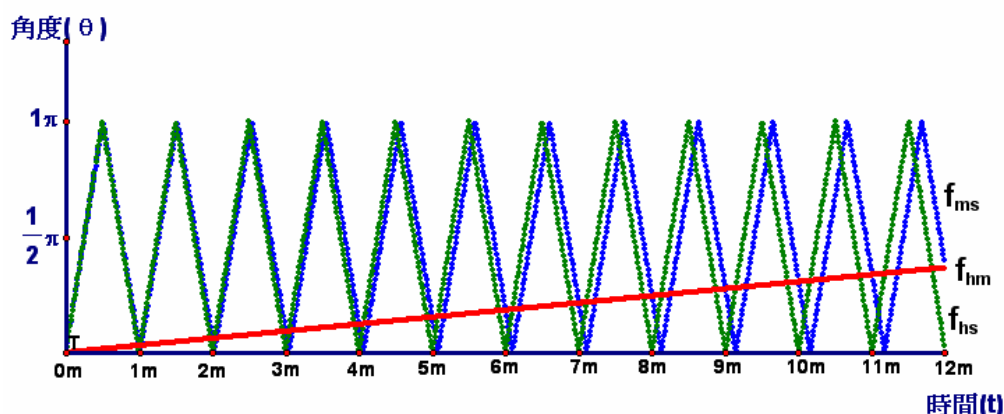


圖 3-2-4-3 時、分、秒針三針之夾角 θ 對時間 t 的函數圖形

因為 f_{ms} 的週期為 $1 + \frac{1}{59}$ ，而 f_{hs} 的週期為 $1 + \frac{1}{719}$ ，兩者都只比 1 分鐘多一些，因此，這兩個圖形十分相似。同時在坐標平面上構作 $f_{hm}(t)$ 和 $f_{ms}(t)$ 的圖形如圖 3-2-4-3 時、分、秒針三針之夾角 θ 對時間 t 的函數圖形所示，來探討函數圖形的交點並討論交點的意義：

我們進一步考慮 f_{hm} 、 f_{hs} 以及 f_{ms} 等三函數圖形的兩兩交點，將它分類並探討其意義。例如： $f_{hm}(t_i) = f_{ms}(t_i) = \theta_i$ 在 t_i 時刻，時、分兩針之夾角 θ_i 等於分、秒兩針之夾角 θ_i ； $f_{hm}(t_i) = f_{hs}(t_i) = \theta_i$ 在 t_i 時刻，時、分兩針之夾角 θ_i 等於時、秒兩針之夾角 θ_i 。在兩個函數圖形上的交點其位置若不同，則其夾角的有向形式也會不同，所以我們要引入有向夾角來作為輔助，定義以慢針為始邊，以快針為終邊之有向“夾角” $\bar{\theta}$ 中，順時針者為正（因為時鐘順時針轉動），逆時針者為負，則 $\bar{\theta} \in [-\pi, \pi]$ ，例如：十點整時之 $\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}$ 弧度，而三點整之 $\bar{\theta} = -\frac{\pi}{2}$ 弧度。

1. 當 $\bar{\theta} > 0$ 時，快針走在慢針“前面”，例如：10 點整的時、分針之位置，此時 $|\bar{\theta}|$ 是遞增的。反之，當 $\bar{\theta} < 0$ 時，兩針的 $|\bar{\theta}|$ 是遞減的，所以在 $|\bar{\theta}| - t$ 圖中， $|\bar{\theta}|$ 遞增的都是正角(+)， $|\bar{\theta}|$ 遞減的點都是負角(-)。
2. 由於 $|\bar{\theta}| - t$ 圖就是本來的 $\bar{\theta} - t$ 圖。所以，我們就舉 f_{hm} 和 f_{ms} 的交點來作說明，如圖圖 3-2-4-4 所示。

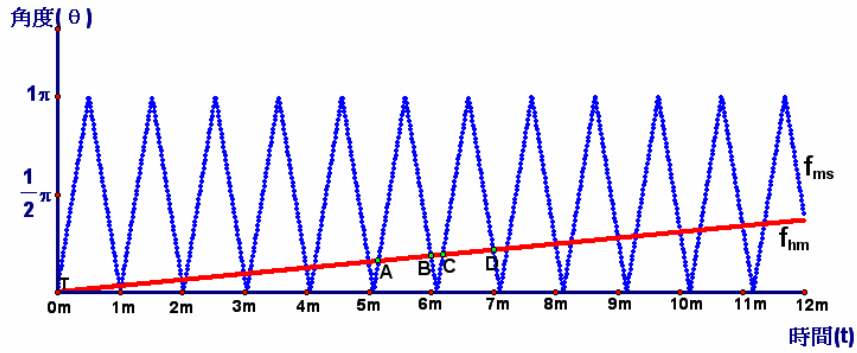


圖 3-2-4-4 分對秒與時對分的函數圖形

由上圖可知，所有的交點可以分為“ P_1 ”、“ P_2 ”、“ P_3 ”、“ P_4 ”等四種類型，如下表 3-2-4-5 所示。

表 3-2-4-5 時、分、秒針三針之位置表

類型	時、分	分、秒	夾角的有向型式	時、秒	分、秒	夾角的有向型式	時、分	時、秒	夾角的有向型式
P_1	+	+		+	+		+	+	
P_2	+	-		+	-		+	-	
P_3	-	+		-	+		-	+	
P_4	-	-		-	-		-	-	

由表 3-2-4-5 中四種交點類型及圖 3-2-4-4 中的兩函數圖形的交點，可得下面的系理六。

系理六：同類型的三針夾同角出現的時刻具有週期關係。

證明：以 f_{hm} 及 f_{ms} 的 P_1 型交點為例，如圖 3-2-4-5 所示：取相鄰三組交點來看，可

知 $\triangle OAD \sim \triangle OBE \sim \triangle OCF$ ，因為 f_{ms} 為週期函數。所以 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，得 $\overline{DE} = \overline{EF}$ 。

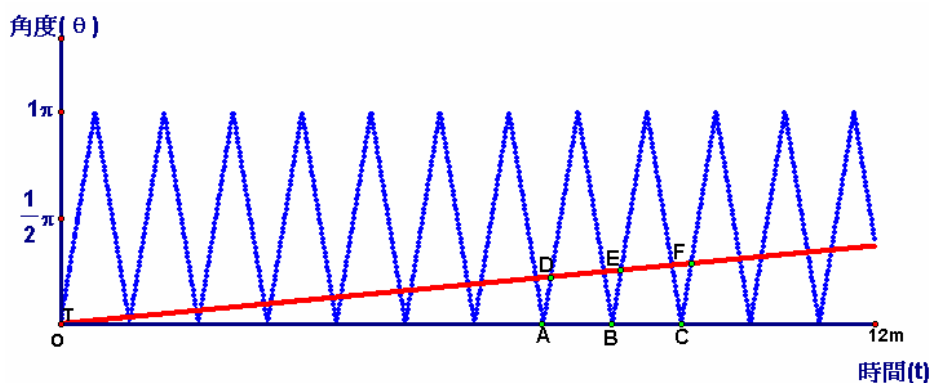


圖 3-2-4-5 時對分與分對秒的函數圖形

即出現夾同角的時間間隔一樣。同理，所有 P_1 型中之相鄰兩交點的時間間隔均相同。因此，在 P_1 型中之三針夾同角的出現時刻具有週期性，而其他類型的交點以及另兩種函數的交點都可以此類推，證畢。■

系理七：時、分、秒三針只有在 12 點整才會三針重合。

證明：將這三個函數放在同一坐標平面上，這三個函數圖形同時在 $\theta = 0$ 時有交點，此交點的意義表示此三針“重合”。已知在 12 點整時，時、分、秒針三針重合，又 f_{hm} , f_{ms} , f_{hs} 這三個函數的週期分別為 $\frac{720}{11}$, $\frac{60}{59}$, $\frac{720}{719}$ 分鐘，其最小公倍數為 720，即為 12 小時。因此，下一次三針重合是在 12 小時後，故時、分、秒針只有在 12 點整這個時刻才會三針重合，得證。■

我們繼續探究時、分、秒針三針在旋轉過程中能不能將鐘面三等分？若三針能夠將鐘面三等分，即任兩針的夾角都是 $\frac{2\pi}{3}$ ，其狀況有可分兩種，其一是時、分、秒依順時針排列，相對於 f_{hm} 與 f_{ms} 圖形中的有向夾角皆為“正”的交點，即表 3-2-4-5 中 P_1 型的點；另一是時、分、秒依逆時針排列，相對於 f_{hm} 與 f_{ms} 圖形中的有向夾角皆為“負”的交點，即表 3-2-4-5 中 P_4 型的點。

1. 時、分、秒三針順時針排列：從 12 點整開始計算，時、分兩針之有向夾角為 $+\frac{2\pi}{3}$ 的時刻為 $\frac{240}{11}$ 分。因此，任一次時、分兩針之有向夾角為 $+\frac{2\pi}{3}$ 的時刻為 $\frac{240}{11} + \frac{720}{11}k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ 。同理，分、秒兩針之有向夾角為 $+\frac{2\pi}{3}$ 的時刻為 $\frac{20}{59} + \frac{60}{59}k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，若時、分、秒三針三等分鐘面時，則存在兩整數 k_1, k_2 滿足 $\frac{240}{11} + \frac{720}{11}k_1 = \frac{20}{59} + \frac{60}{59}k_2$ 之關係。方程式 $33k_2 - 2124k_1 = 697$ 無整數解，因等號左邊為 3 的倍數，但 697 不為 3 的倍數。

所以，時、分、秒三針不可能順時針三等分鐘面。

2. 時、分、秒三針逆時針排列：同理，時、分針之有向夾角為 $-\frac{2\pi}{3}$ 的時刻為 $\frac{480}{11} + \frac{720}{11}k_1$ ， $k_1 \in \mathbb{Z}$ ，而分、秒針之有向夾角為 $-\frac{2\pi}{3}$ 的時刻為 $\frac{40}{59} + \frac{60}{59}k_2$ ， $k_2 \in \mathbb{Z}$ ，若時、分、秒三針三等分鐘面時，則存在兩整數 k_1, k_2 滿足 $\frac{480}{11} + \frac{720}{11}k_1 = \frac{40}{59} + \frac{60}{59}k_2$ ，但方程式 $33k_2 - 2124k_1 = 1394$ 無整數解，因等號左邊為 3 的倍數，但 1394 不為 3 的倍數。所以，時、分、秒三針也不可能依逆時針方向三等分圓周角。

綜合以上兩種情形的討論結果可以得系理八：

系理八：在時、分、秒三針的旋轉過程中，不可能將鐘面三等分。

在前面的探究與討論過程中，知道時、分、秒三針之夾角對時間的關係都是週期函數，如果從訊號傳遞的角度來看，可發現時、分針或分、秒針或時、分針在夾某一個特定角時，其實就代表某一種訊號，而且它出現的時間具有週期性，又根據傅立葉變換的原理知，任何訊號都可表示成各種頻率成分的正餘弦波之和。所以，我們想透過傅立葉級數的概念，去分析「兩針夾某一角」的這個訊號裡到底蘊藏了什麼樣的正餘弦函數的展開式，並利用它來導出 π 以及 π^2 的一些無窮級數和。

法國數學家傅立葉(Fourier, 1736 ~ 1813)發現若干函數能展開成一個由正弦函數 \sin 及餘弦函數 \cos 所疊合成的三角級數表示式，亦即若函數 $f(x)$ 定義在區間 $[-\pi, \pi]$ 上，則可以表示為三角級數為

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx$ ($n \geq 0$), $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx$, $n \geq 1$.

由引理三可得函數 $\cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t)$ 的傅立葉級數展開式為

$$\cos^{-1}(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos(\frac{11nt\pi}{360}).$$

同樣地，函數 $x - [x]$ 是一週期為 1 的週期函數，其傅立葉級數展開式為

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k}.$$

而在定理二裏的函數 $f(t) = \frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1}(\tan \pi \cdot (\frac{11}{720}t + \frac{1}{2}))$ 的傅立葉級數展開式為

$$\frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{720}t + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{360}{11} + \frac{720}{11\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{11nt\pi}{360}\right).$$

從以上週期函數的傅立葉級數展開式，可知如果函數定義在一個週期長的區間上，則可以直接作週期的拓延，也就是取一個週期函數，使得它在給定區間上重複原來的函數，然後對這個新的函數作傅立葉級數的展開，得到的級數即可作為原來函數的拓延。我們將主要的三個週期函數的傅立葉級數整理成下面的系理九。

系理九：

1. 函數 $\cos^{-1}\left(\cos \frac{11\pi}{360} \cdot t\right)$ 的傅立葉級數為 $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos\left(\frac{11nt\pi}{360}\right)$,
2. 函數 $x - [x]$ 的傅立葉級數為 $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k}$,
3. 函數 $\frac{360}{11} - \frac{720}{11\pi} \cdot \tan^{-1}\left(\tan \pi \cdot \left(\frac{11}{720}t + \frac{1}{2}\right)\right)$ 的傅立葉級數為 $\frac{360}{11} + \frac{720}{11\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{11nt\pi}{360}\right)$.

由系理九的傅立葉級數 $\frac{360}{11} + \frac{720}{11\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{11nt\pi}{360}\right)$ ，當式中的 $t = \frac{180}{11}$ 時，得

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

同理，當 t 值分別代以 $\frac{120}{11}$ 、 $\frac{90}{11}$ 、 $\frac{60}{11}$ 時，可得下列的無窮級數和：

$$\frac{2\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots, \quad t = \frac{120}{11},$$

$$\frac{3\sqrt{2}\pi}{8} = \frac{1}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{11} - \cdots, \quad t = \frac{90}{11},$$

$$\pi = \frac{1}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots, \quad t = \frac{60}{11},$$

將這些無窮級數和整理成圓周率 π 的一些無窮級數的表示式，如系理十。

系理十：

$$\begin{aligned} \pi &= 4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{11} - \cdots \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

同樣地，在系理九中的傅立葉級數 $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos\left(\frac{11nt\pi}{360}\right)$ ，當式中的 $t=0$ 時，可得

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots,$$

$$\text{即 } \pi^2 = 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)$$

同理，當 t 值分別代 $\frac{60}{11}$ 、 $\frac{90}{11}$ 、 $\frac{120}{11}$ 時，亦可得系理十一中之 π^2 的一些無窮級數和。

系理十一：

$$\begin{aligned} \pi^2 &= 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) \\ &= 6\sqrt{3} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + \frac{1}{23^2} + \dots \right) \\ &= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) \\ &= 12 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2}{15^2} + \dots \right) \\ &= \frac{72}{5} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{(4n-3)^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

甚至還可以進一步推導兩個無窮級數和之比值，如系理十二所示。

系理十二：

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots} \\ &= \frac{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots}{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots} \end{aligned}$$

3-2-5 結語

這樣的數學探究是一種新的學習方法，可培養學生初步嘗試數學研究的過程，並有助於培養學生發現、提出、解決數學問題的能力，就如波利亞在「怎樣解題」一書中所揭櫫的：「通過研究解題的方法，我們可以看到數學的另一個側面」。希望透過對數學問題的探究，讓學生在探究的過程中，養成獨立思考和勇於質疑的習慣，也可以學會與他人交流合作，體驗研究的過程和創造的激情，並且發揮豐富的想像力和創新力，進而建立嚴謹的科學態度和不怕困難的科學精神。



3-3 從最適觀畫位置問題談起---以圖形軌跡為探究模組

本文透過 GSP 動態幾何軟體的尺規作圖操作，重溫一個五百多年前的數學極值問題，即當眼睛與畫像距離多少時，看畫像的視角會最大？我們接著考慮一些相關的問題，例如若畫像所在的牆壁並沒有與地面垂直？或地面是一個球體表面，畫像所在的牆壁垂直於球表面，則當眼睛與畫像相距多少時，看畫像的視角會最大。

3-3-1 前言

當眼睛與畫像距離多少時，看畫像的視角會最大？這個問題源於雷吉蒙塔努斯在 1471 年給一位朋友的信中所提到的一個數學極值問題。當代美國著名數學家 P. R. Halmos 說過這樣的話：「問題是數學的心臟」。在學習數學的過程中，解決各種數學問題算是一種心智的挑戰，也是一種思考力的考驗；也就是說建構一個解題思維的系統，以數學知識為基礎，為出發點，對所提出的問題作聯結與作化歸，初步嘗試數學研究的過程，體驗創造的激情，培養發現、提出、解決數學問題的能力。這些過程與收穫，應該比從數學問題的單純解題中所經歷與體驗到的更有意義。

透過 GSP 動態幾何軟體的尺規作圖的操作，我們發現當眼睛與畫像上下兩端點所成的外接圓恰與水平視線相切時，就會產生最大視角。這個最大視角問題如果透過數學的探究與研究，應可延伸與擴展問題，並找出一個新的數學解題模型，讓它重新展現並散發出另一種藝術氣息—軌跡圖形之幾何構作。譬如這一幅畫所在的牆並沒有與地面垂直時，這時人要站在那裡看畫像才會產生最大的視角；或者地面並不是水平線，而是某一種曲線，那情形又會如何？

在數學探究的過程中，透過幾何作圖軟體 GSP 來處理軌跡圖形對探究的猜測有某種程度的幫助。雖然最大視角的問題已有了五、六百年，但經由現在的高效能計算機以及好的應用軟體的發展及協助，確實可以作出問題的另一種延伸與探究，使得問題獲得新契機與新生命。

3-3-2 雷吉蒙塔努斯的問題及其延伸

我們先用代數方法來求解雷吉蒙塔努斯的問題，如圖 3-3-2-1，取畫像的長為 $\overline{AB} = p$ ，畫像下緣在水平線上的高度為 q ，即 $\overline{BC} = q$ 。設 $\overline{EC} = x$ ，即站畫像前 x 單位長時，視角會最大。令 $\angle AEC = \alpha$ ， $\angle BEC = \beta$ ，視角為 θ ，則

$$\cot \theta = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\frac{x}{p+q} \cdot \frac{x}{q} + 1}{\frac{x}{q} - \frac{x}{p+q}} \geq 2\sqrt{\frac{(p+q)q}{p^2}},$$

得 θ 的最大值 $\cot^{-1}(2\sqrt{\frac{(p+q)q}{p^2}})$; 等號成立的充要條件為 $\frac{x}{p} = \frac{(p+q)q}{px}$, 即 $x = \sqrt{(p+q)q}$.

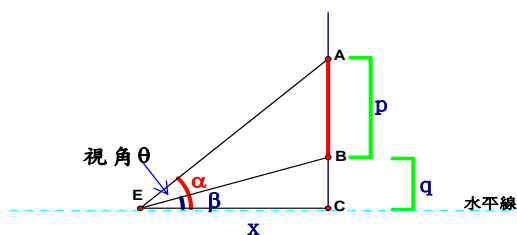


圖 3-3-2-1 視角與畫像的位置關係

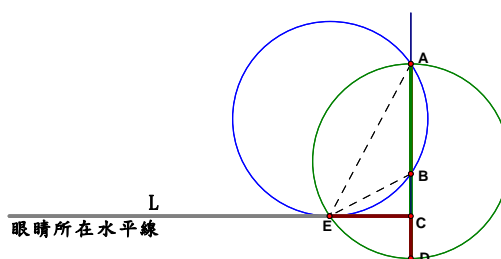


圖 3-3-2-2 最大視角的外接圓

我們也可以透過幾何作圖的方法來求解，如圖 3-3-2-2 所示：連接直線 \overline{AB} ，交直線 L 於 C 點。在直線 \overline{AB} 上取一點 D ，使得 $\overline{CD} = \overline{CB}$ ，再以 \overline{AD} 為直徑作一圓弧。令此圓弧與直線 L 的交點為 E 。因為 $\overline{AB} = p$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = q$ ，由相似性質知， $\overline{EC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CD}$ ，得 $\overline{EC} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{CD}} = \sqrt{(p+q)q}$ ，則 \overline{EC} 即為所求。

我們作進一步的觀察與思考。當眼睛沿著水平線移動時，視角會由小到大，再由大到小，因此產生視角極值的問題。第一個解法利用三角餘切函數的差角公式，列出關係式，再利用算術平均數大於或等於幾何平均數，進而解得產生視角最大時的距離為

$\sqrt{(p+q)q}$ ，距離與畫像的長度及水平高度有關。若畫像的水平高度為 0，即畫像的下沿

正好在眼睛所在的水平線時，要產生視角最大，則眼睛必須幾乎貼近牆壁。若眼睛所在的水平線正好在畫像的上、下沿之間，那麼眼睛也必須幾乎要貼近牆壁，才能產生最大的

視角。第二個解法則是利用尺規作圖，作出代數解法中的 \overline{EC} 長為 $\sqrt{(p+q)q}$ ，此時 E 點的位置會產生最大的視角。

也就是說如果作眼睛 P 點與 A 、 B 二點的外接圓 C ，當眼睛 P 在水平視線移動時， ΔABP 的外接圓的半徑大小會隨之改變，我們發現當 P 移到 E 點的位置時，此時 ΔABP 的外接圓有最小半徑，即這時候圓周角 $\angle AEC$ (即為視角) 有最大值，且此時 ΔABE 的外接圓恰與水平視線相切。我們把這個觀察，歸納成下述命題。

命題：

當 P 移到 E 點的位置時， ΔABP 的外接圓半徑最小，圓周角 $\angle AEC$ (即為視角) 有最大值，且此時 ΔABE 的外接圓恰與水平視線相切。(證明從略)

透過動態幾何軟體 GSP 的輔助，來呈現幾何解法中，最大視角時， $\triangle ABE$ 的外接圓與水平視線相切。因為在大圓中， $\angle APB = \angle AQB > \angle AEB$ ，當 P 點向 E 點移動時，Q 點也會向 E 點靠近。所以，當 $\triangle ABE$ 外接圓與水平線相切時，可得最大視角，如圖 3-3-2-3 所示。接著把原問題簡單化及概念具體化，使得問題易於作觀察與分析，進而發現、提出相關延伸的問題。

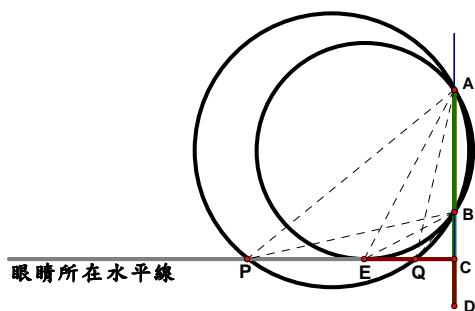


圖 3-3-2-3 觀察最大視角的位置

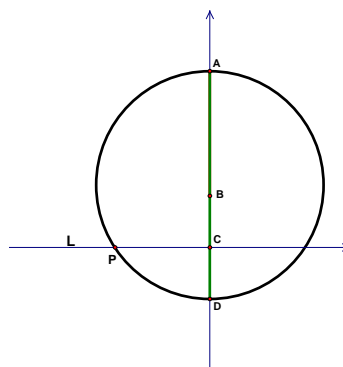


圖 3-3-2-4 最大視角的幾何作圖

延伸問題：

若一直線 L 及其外一線段 \overline{AB} ，且 $\overline{AB} \perp L$ 。試在直線 L 上找一點 P ，使得 $\angle APB$ 最大。

作法：(如圖 3-3-2-4 所示)

連接 \overline{AB} ，交 L 於 C 點。在 \overline{AB} 上取一點 D ，使得 $\overline{CD} = \overline{BC}$ ；再以 \overline{AD} 為直徑作一圓弧，設此圓弧與 L 的交點為 P ， P 即為所求。

因為 \overline{AD} 為直徑，得 $\angle APD = 90^\circ$ ，且 $\overline{PC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CA} = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ ，所以 \overline{PC} 為切線， P 即為所求。試作進一步的分析，為使得 $\angle APB$ 有最大，則 P 點為 $\triangle ABP$ 的外接圓 O 與直線 L 相切的切點。即直線 L 上異於 P 點的任意點 Q ，則 $\triangle ABQ$ 的外接圓半徑恆小於 $\triangle ABP$ 外接圓的半徑。在 $\triangle ABP$ 的外接圓 O 中， $\angle APB$ 為圓周角，所以，圓心 O 在 \overline{AB} 的中垂線上且 $\angle ACB = 2\angle APB = 2\theta$ ，且外接圓半徑為 $\overline{OP} = \frac{p+2q}{2}$ 。

$$\text{因此，} \sin \theta = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p+2q}{2}} = \frac{p}{p+2q}, \quad \cot \theta = \frac{2\sqrt{(p+q)q}}{p} \text{。 因為外接圓 } O \text{ 的圓心為 } \overline{AB} \text{ 的}$$

中垂線與過 P 點且垂直於 L 的交點，得 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP}$ 。若分別以 A 點、 B 點為焦點， L 為準線作兩拋物線 Γ_1 及 Γ_2 ，則外接圓圓心 O 為拋物線 Γ_1 與 Γ_2 的圖形交點，如圖 3-3-2-5

所示。將圖形坐標化，取 C 點為 $(0,0)$ ，直線 L 為 x 軸，直線 \overrightarrow{AB} 為 y 軸。因為， $\overline{AB} = p$ ， $\overline{BC} = q$ ， Γ_1 、 Γ_2 的方程式分別為 $x^2 = 4\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{p+q}{2}\right)$ ， $x^2 = 4\left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{q}{2}\right)$ ；其兩交點為 $(\sqrt{(p+q)q}, \frac{p+2q}{2})$ ， $(-\sqrt{(p+q)q}, \frac{p+2q}{2})$ 。其中， x 坐標 $= \sqrt{(p+q)q}$ 表視角最大時，眼睛與畫像的距離。 y 坐標 $= \frac{p+2q}{2}$ 表視角最大時， ΔABP 外接圓的半徑。

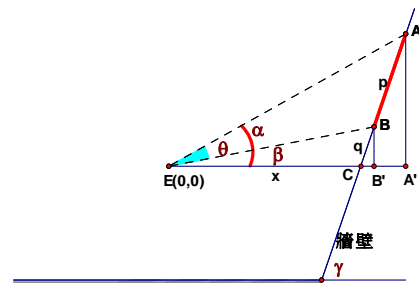
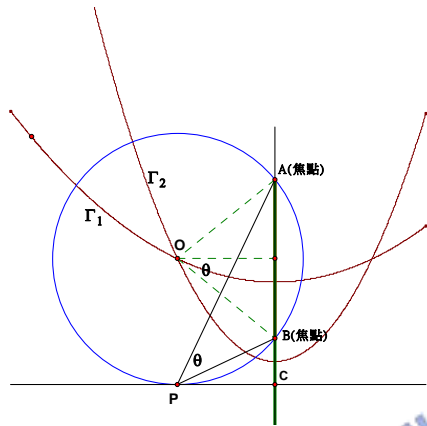


圖 3-3-2-5 兩拋物線的交點之視角

圖 3-3-2-6 畫像不垂直地面時，視角與畫像的位置關係

從前述的分析裏，雷吉蒙塔努斯問題可繼續延伸出下列幾個問題：

1. 若畫像所在的牆壁並沒有與地面垂直，則當眼睛與畫像相距多少時，看畫像的視角會最大。
2. 直線 L 外的任意相異兩點 A 、 B ，試在直線 L 上找一點 P ，使得 ΔABP 的外接圓與直線 L 相切，即使得 $\angle APB$ 最大。
3. 由問題(二)再延伸，當 ΔABP 的外接圓與直線 L 相切於 P 點時，得 $\angle APB$ 最大，則此時外接圓的圓心為以 A 點為焦點、 L 為準線的拋物線 Γ_1 與以 B 點為焦點， L 為準線的拋物線 Γ_2 的交點。
4. 大圓外的任意相異兩點 A 、 B ，若 \overrightarrow{AB} 直線通過此大圓的圓心，試在大圓上找一點 P ，使得 $\angle APB$ 最大。也就是說，如果地面是一個球體表面，畫像所在的牆壁垂直於球表面，則當眼睛與畫像相距多少時，看畫像的視角會最大。

我們試分別討論如下：

延伸問題一：

若畫像所在的牆壁並沒有與地面垂直，則當眼睛與畫像相距多少時，看畫像的視角會最大。

令 $\overline{AB} = p$, $\overline{BC} = q$, $\overline{EC} = x$, $\angle AEB = \theta$, $\angle AEC = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle ACB' = \gamma$. 再取 E 點為

$(0,0)$, \overline{EC} 直線為 x 軸，如圖 3-3-2-6 所示。於是 C 點、B' 點、A' 點、B 點、A 點座標分別為 $(x,0)$, $(x+q\cos\gamma,0)$, $(x+(p+q)\cos\gamma,0)$, $(x+q\cos\gamma,q\sin\gamma)$,

$(x+(p+q)\cos\gamma,(p+q)\sin\gamma)$. 則 $\cot\theta \geq 2\sqrt{\frac{(p+q)q}{p^2\sin^2\gamma}} + \frac{(p+2q)\cos\gamma}{p\sin\gamma}$, θ 的最大值為

$\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{(p+q)q}{p^2}} + \frac{(p+2q)\cos\gamma}{p\sin\gamma}\right)$; 等號成立的充要條件為 $\frac{x}{p\sin\gamma} = \frac{(p+q)q}{xp\sin\gamma}$, 即

$x = \sqrt{(p+q)q}$. 當圖像所在的牆壁與地面垂直，即 $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 時，得 $\cot\theta \geq 2\sqrt{\frac{(p+q)q}{p^2}}$, 這

正是雷吉蒙塔努斯原來問題的不等式。

延伸問題二：

直線 L 外的任意相異兩點 A, B , 試在直線 L 上找一點 P , 使得 $\triangle ABP$ 的外接圓與直線 L 相切，即此時 $\angle APB$ 最大。

作法：(如圖 3-3-2-7 所示)

連接 \overline{AB} , 交 L 於 C 點。在 \overline{AB} 上取一點 D , 使得 $\overline{CD} = \overline{BC}$; 再以 \overline{AD} 為直徑作一圓，並過 C 點作一直線 \overline{CQ} 垂直 \overline{AD} , 設交圓於 Q 點。以 \overline{CQ} 為半徑作一圓弧，與 L 的交點為 P 。因為 \overline{AD} 為直徑， $\angle APD = 90^\circ$, $\overline{PC}^2 = \overline{QC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CA} = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$, \overline{PC} 為切線， P 即為所求。

這個問題透過平面幾何的性質，可續作延伸：探討使得視角 $\angle APB$ 有最大值的 P 點具有怎麼樣的性質，進一步了解問題的可延伸之處以及可探究之核心。

延伸問題三：

當 $\triangle ABP$ 的外接圓與直線 L 相切於 P 點時，得 $\angle APB$ 最大，則此時外接圓的圓心為以 A 點為焦點、 L 為準線的拋物線 Γ_1 與以 B 點為焦點， L 為準線的拋物線 Γ_2 的交點。

作法：(如圖 3-3-2-8 所示)

分別以 A 為焦點，L 為準線或以 B 為焦點，L 為準線作兩拋物線 Γ_1, Γ_2 ；設 Γ_1, Γ_2 的交點之一為 O，以 O 為圓心， \overline{OA} 為半徑畫一圓弧。設交直線 L 於 P 點，即為所求。

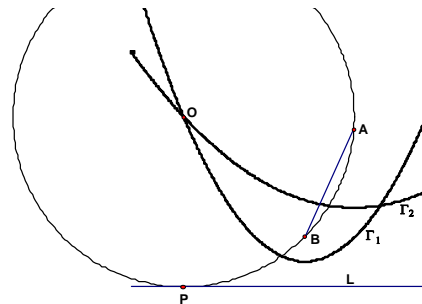
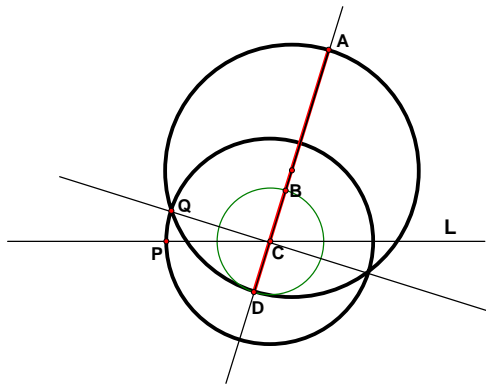


圖 4-2-2-7 畫像不垂直地面的最大視角之幾何作圖

圖 4-2-2-8 畫像不垂直地面時，兩拋物線的交點與最大視角之位置

因為 O 為兩拋物線 Γ_1, Γ_2 的交點，可知 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP}$ (O 到準線 L 的距離)，因此圓 O 為 $\triangle ABP$ 的外接圓，所以 \overline{PC} 為切線， $\overline{PC}^2 = \overline{QC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CA} = \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ 。則 P 點即為所求。取 L 為 x 軸，令 \overline{AB} 與 L 的夾角為 θ ， $\overline{AB} = p$ ， $\overline{AC} = q$ ；取 $C(0,0)$ ， $A(q \cos \phi, q \sin \phi)$ ， $B((p+q) \cos \phi, (p+q) \sin \phi)$ ，可得

$$\Gamma_1 : (x - q \cos \phi)^2 = 4 \left(\frac{q \sin \phi}{2} \right) \left(y - \frac{q \sin \phi}{2} \right),$$

$$\Gamma_2 : (x - (p+q) \cos \phi)^2 = 4 \left(\frac{(p+q) \sin \phi}{2} \right) \left(y - \frac{(p+q) \sin \phi}{2} \right).$$

於是 $x = \sqrt{(p+q)q}$ ， $y = \frac{q \sin \phi}{2} + \frac{p+q}{2 \sin \phi} + \frac{q \cos^2 \phi}{2 \sin \phi} - \frac{\sqrt{(p+q)q} \cos \phi}{\sin \phi}$ 。若 $\phi = \frac{\pi}{2}$ (即

$\overline{AB} \perp L$ 時)，得 $y = \frac{p+2q}{2}$ ，即不論直線 \overline{AB} 與直線 L 的夾角為何，會產生最大視角的距離都是 $\sqrt{(p+q)q}$ 。

延伸問題四：

大圓外的任意相異兩點 A, B，若 \overline{AB} 直線通過此大圓的圓心，試在大圓上找一點 P，使得 $\angle APB$ 最大。

視角的最大值發生於當 $\triangle ABP$ 的外接圓與大圓相切於 P 點，如圖 3-3-2-9 所示。

令 $\overline{OA} = r$ ， $\overline{AB} = p$ ， $\overline{BC} = q$ ， $\overline{CD} = R$ 。因為 $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ，可得

$$r^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (R+r)^2 - \left(R + \frac{p}{2} + q\right)^2, \text{ 所以 } r = \frac{p+2q}{2} + \frac{(p+q)q}{2R}.$$

於 Q 點，令 $\overline{PQ} = x$ ，則 $\frac{x}{R} = \frac{\sqrt{r^2 - (\frac{p}{2})^2}}{R + \frac{p}{2} + q}$ ；當 $R \rightarrow \infty$ 時（即地面是一水平線時），

$$x = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{(p+q)q + \frac{(p+2q)(p+q)q}{2R} + \frac{(p+q)^2 q^2}{4R^2}}}{1 + \frac{p}{2R} + \frac{q}{R}} \right) = \sqrt{(p+q)q}$$

問題的結論相符合。

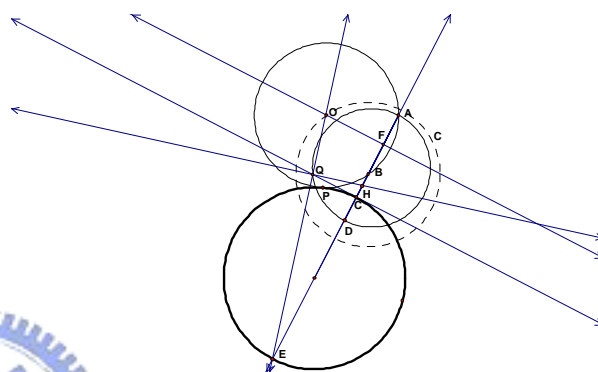
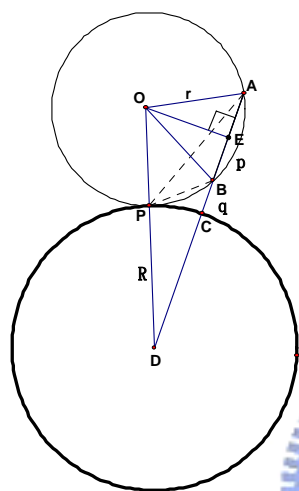


圖 3-3-2-9 圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 最大 圖 3-3-2-10 圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 最大的幾何作圖

透過幾何的尺規作圖，我們可以找到使得 $\angle APB$ 有最大值的 P 點；以下是作法及圖形，如圖 3-3-2-10 所示：

- (1) 連接直線 \overline{AB} ，交圓於 C、E 兩點；
- (2) 以 \overline{AD} 為直徑作一圓，並過 C 點作 $\overline{CQ} \perp \overline{AB}$ ，交圓於 Q 點；
- (3) 連接 \overline{QE} ，並作 $\overline{QH} \perp \overline{QE}$ ，交 \overline{AB} 於 H 點；
- (4) 以 B 點為圓心， $\frac{\overline{AD}}{2} + \overline{CH}$ 為半徑作一圓 C；
- (4) 作 \overline{AB} 的中垂線 \overline{GF} 與圓 C 交於 O 點；
- (5) 再以 O 為圓心， \overline{OA} 為半徑作一圓，恰交大圓於 P 點，則 P 點即為所求。

3-3-3 數學模型的探討

由對結果的論證的過程中，發現當 $\triangle ABP$ 的外接圓與 P 點所在的軌跡圖形相切時，

會產生最大視角。以圖形軌跡作為處理探究視角最大的問題的數學模型，有助於對這個問題的理解、擴展及延伸。我們針對這個問題建立“尺規作圖的軌跡圖形”的數學模型，也就是說已知圖形 Γ ，及其外兩點 A, B ，試在圖形 Γ 上找一個 P 使得 $\angle APB$ 最大。

其解決的數學模型是

- (1) 先在圖形 Γ 上找一動點 Q ，連接 \overline{AQ} 並作 \overline{AQ} 的中垂線 L_1 ，再過 Q 點作圖形 Γ 的切線的法線 L_2 ，設 L_1 與 L_2 的交點為 Q' ，並作動點 Q' 對動點 Q 的軌跡 Γ_1 。
- (2) 同理，在圖形 Γ 上找一動點 R ，連接 \overline{BR} 並作 \overline{BR} 的中垂線 L_3 ，再過 R 點作圖形 Γ 的切線的法線 L_4 ，設 L_3 與 L_4 的交點為 R' ，並作動點 R' 對動點 R 的軌跡 Γ_2 。
- (3) 設軌跡圖形 Γ_1 與 Γ_2 的交點為 O ，並以 O 為圓心， \overline{OA} 為半徑，作一圓恰與圖形 Γ 交於一點 P ，則 P 點即為所求。

我們以 Γ 分別為圓、拋物線、橢圓、雙曲線、正弦函數圖形、心臟線為例，蒐尋 Γ 外的任意相異兩點 A, B ，(但 \overline{AB} 直線不通過此大圓的圓心)，試在 Γ 上找一點 P ，使得 $\angle APB$ 最大，並且以GSP畫出其圖形。圖3-3-3-1~6分別為以圓、拋物線、橢圓、雙曲線、正弦函數圖形、心臟線為基底圖形，透過動態幾何軟體GSP的尺規作圖中的軌跡功能，找到了 P 點，此時 P 點滿足 $\angle APB$ 最大值的 P 點位置。在圖4-2-3-4中，發現若基底圖形為雙曲線時，會有兩個 P 點，均滿足 $\angle APB$ 有最大。

當 $\angle APB$ 有最大時，此時 $\triangle APB$ 的外接圓 O 恰好與曲線 Γ 相切，且切點為 P ，即滿足 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP}$ 。在曲線 Γ 上取一動點 Q ，作出一軌跡圖形 Γ_1 ，滿足其上任一點到 A 與到 Q 等距離；另外在曲線 Γ 上再取一動點 R ，作出一軌跡圖形 Γ_2 ，滿足其上任一點到 B 與到 R 等距離，則圖形 Γ_1 、 Γ_2 的交點 O' ，即為 $\triangle APB$ 的外接圓圓心，且此時 $\triangle APB$ 的外接圓恰好與曲線 Γ 相切於 P 點。因此，基底圖形為任何一個圖形，都可以透過方法找到一點 P ，使得 $\angle APB$ 有最大值。

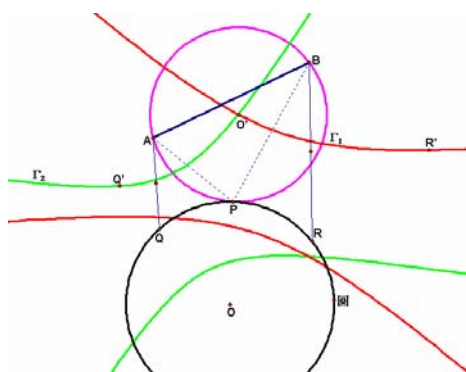


圖 3-3-3-1 圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值

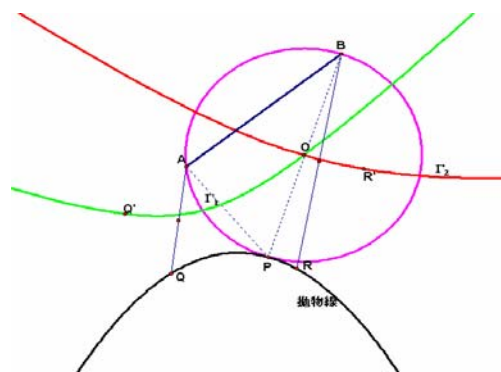


圖 3-3-3-2 拋物線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值

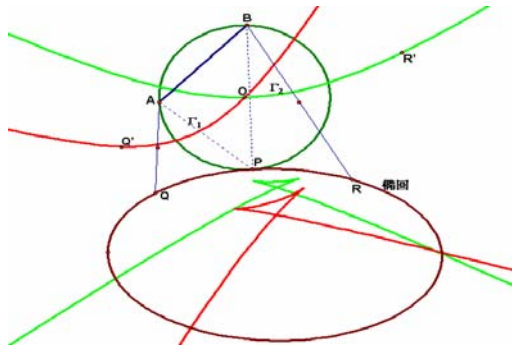


圖 3-3-3-3 橢圓上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值

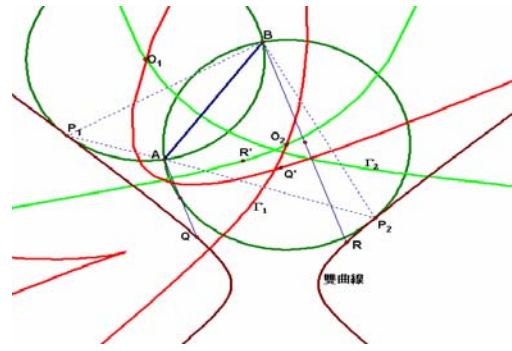


圖 3-3-3-4 雙曲線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值

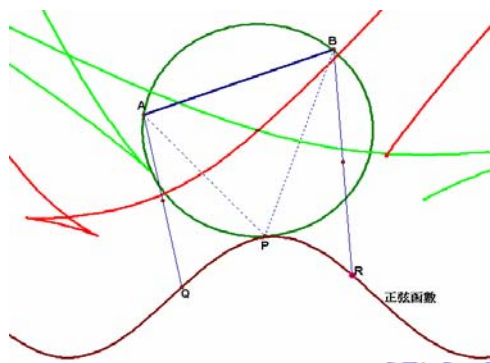


圖 3-3-3-5 正弦函數上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值

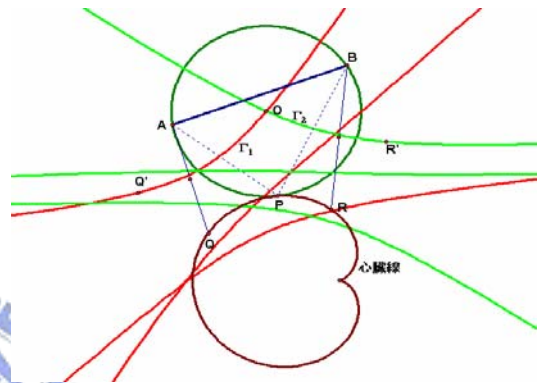
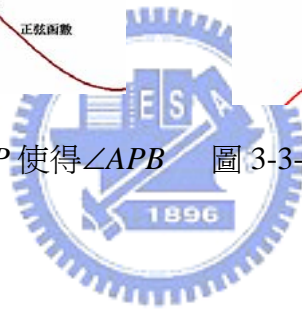


圖 3-3-3-6 心臟線上一點 P 使得 $\angle APB$ 有最大值



3-4 內接於正多邊形的正三角形的構作及其面積變化---以尺規作

圖為探究模組

本文中首先討論正方形內接正三角形的尺規作圖，藉由動態幾何軟體 G.SP 對圖形的尺規構作及變化圖形作進一步的分析與證明，接著討論正方形內接正三角形的面積極值問題，最後再來探究正方形之內接正三角形的各邊中點及其中心的軌跡問題。

3-4-1 前言

在正方形的周邊上找三個點，使得這三點形成一個正三角形，這樣的正三角形存在但並不唯一，在還沒找到之前，初步的猜測推論這三個點中任意兩點不會同時在正方形的一邊上，因為如果有兩點同在一邊上的話，那麼第三點只可能在此邊之對應邊上，否則這三個點會形成一個鈍角三角形；又如果第三點在此邊之對邊上，則會發現此正三角形的高比邊長大，這是不可能的，所以，正方形之內接正三角形的任二點不可能同時位於正方形的同一邊上。以上透過數學概念的語言來表述一個命題，對一個學生而言並不是一件難事，甚至學生可能另有獨到的思考方向。

但在這個問題的尺規作圖的過程中，完全要用抽象性的數學語言來思考問題的解決方法可能會遇到一些困難，所以，我們想利用動態幾何軟體 G.SP 來讓學生動手操作實驗並進行其他延伸問題的探究，可以把學生從被動地位拉到主體探索的地位，而且還可以引導學生自主活動與智力參與，尤其是在探究內接於正方形的這些正三角形的一些幾何性質及各邊中點與其重心的軌跡圖形時，透過動態幾何軟體的繪圖功能與參數計算的功能，不但可以進行對問題結論的猜測與驗證，還可以深入地探討這些幾何圖形的定性與定量問題，希望能有一些具有研究價值與應用推廣的數學性質與定理之成果。

因此，透過動態幾何軟體 G.SP 的操作及數學問題探究的課程設計，可以充分地提供學生動手、動腦的參與機會，來激發學生的學習興趣，並樂於接受問題的挑戰，初步理解直觀和嚴謹的關係，嘗試數學研究的過程，體會創造的激情，進而讓學生領略到數學的幾何之美以及辨證法在數學探究中的體現。

3-4-2 正方形內接正三角形的尺規作圖

引理：已知 S 為正方形 $ABCD$ 內一點，且 $\angle ABS = \angle BAS = 15^\circ$ ，則 $\triangle DSC$ 為正三角形。
證明：(綜合證法)

以 \overline{AB} 為邊，往外作一正 $\triangle ABV$ ，所以 $AVBS$ 為鳶形，如圖 3-4-2-1 所示。因為 $\overline{AB} \perp \overline{SV}$ ，所以 $\overline{AD} \parallel \overline{SV}$ 。因為 $\angle DAS = 90^\circ - 15^\circ = 60^\circ + 15^\circ = \angle VAS$ ，得 $\overline{AV} \parallel \overline{DS}$ ；又因四邊形 $AVSD$ 為平行四邊形， $\overline{DS} = \overline{AV} = \overline{AB}$ 。同理，四邊形 $BVSC$ 也是平行四邊形，得 $\overline{CS} = \overline{BV} = \overline{AB}$ ，所以 $\overline{DS} = \overline{SC} = \overline{CD}$ ，即 $\triangle DSC$ 為正三角形。

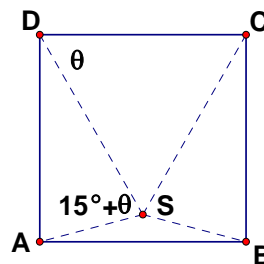
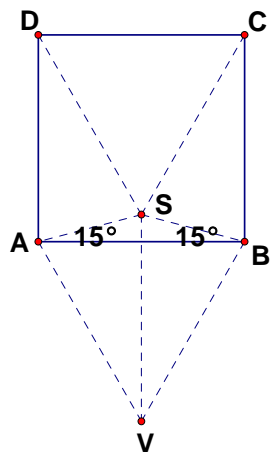


圖 3-4-2-1 利用平行四邊形證明 $\triangle DSC$ 為正三角形 圖 3-4-2-2 利用平行四邊形證明 $\triangle DSC$ 為正三角形

證明：(利用正弦定理)

如圖 3-4-2-2 所示，設 $\angle CDS = \theta$ 。∵ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ∴ $\angle ASD = 15^\circ + \theta$ ，在 $\triangle ABS$ 中，

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ASB} = \frac{\overline{AS}}{\sin \angle ABS} \dots\dots(1), \text{ 而在 } \triangle ADS \text{ 中, } \frac{\overline{AD}}{\sin \angle ASD} = \frac{\overline{AS}}{\sin \angle ADS} \dots\dots(2)$$

將 (1)/(2)，又因為 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，得 $\frac{\sin \angle ASD}{\sin \angle ASB} = \frac{\sin \angle ADS}{\sin \angle ABS}$ ，可得

$$\sin 15^\circ \times \sin(15^\circ + \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta, \text{ 整理得 } -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \sin \theta = 0.$$

所以 $\sin(\theta - 60^\circ) = 0$ ， $\theta = 60^\circ$ 。同理 $\angle DCS = 60^\circ$ ，故 $\triangle DSC$ 為正三角形。證畢。

令 $ABCD$ 為一正方形，求作一正 $\triangle PQR$ 內接於正方形 $ABCD$ ，且此三角形其中一頂點為正方形的頂點。試分析如下，假設問題已求出， $\triangle PQR$ 即為所求 (如圖 3-4-2-3 所示)。

取 $\triangle PQR$ 三邊中點 I, J, K ，並連接 \overline{AC} ， \overline{BK} ， \overline{CK} ， \overline{DK} ，則 \overline{AC} 過 I 點且 $\angle DAC = 30^\circ$ ，

又 $\angle BAC = 45^\circ$ ，所以 $\angle BAQ = 15^\circ$ 。又因 $\triangle BAQ$ 為直角三角形，且 K 為 \overline{AQ} 的中點，得

$\overline{AK} = \overline{BK} = \overline{QK}$ 。所以， $\angle ABK = \angle KAB = 15^\circ$ ，如圖 4-3-2-4 所示。又由引理可知 $\triangle CDK$ 為正三角形。

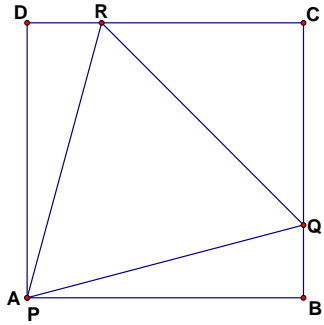


圖 3-4-2-3 過 A 作正三角形 PQR

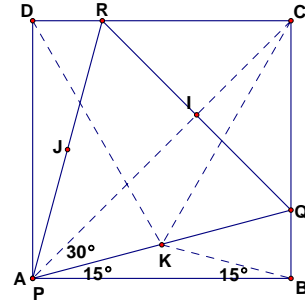


圖 3-4-2-4 由正三角形 PQR 可得 $\triangle CDK$ 爲正三角形

作法：

1. 分別以 C、D 爲圓心，以 \overline{CD} 爲半徑作兩圓弧，設其交點爲 K，如圖 3-4-2-5 所示，
2. 連接 \overrightarrow{AK} ，交 \overline{BC} 於 Q 點，
3. 再過 K 點，作 \overline{AQ} 的垂直線，交 \overline{CD} 於 R 點，
4. $\triangle PQR$ 即爲所求。

證明：由作圖知， $\triangle DKC$ 爲正三角形，得 $\angle CDK = 60^\circ$ ， $\angle ABK = \angle BAK = 15^\circ$ ；再得 $\angle AQB = \angle KBQ = 75^\circ$ 。因此， $\overline{AK} = \overline{BK} = \overline{CK}$ ，K 爲 \overline{AQ} 的中點。又 $\overline{RK} \perp \overline{AQ}$ ，得

$\overline{AR} = \overline{QR}$ ；又 $\angle ADC + \angle AKR = 90^\circ$ ，得 AKRD 四點共圓。 $\angle RAQ = \angle CDK = 60^\circ$ 。由 $\overline{AR} = \overline{QR}$ ，且 $\angle RAQ = 60^\circ$ ，可得 $\triangle PQR$ 爲正三角形。證畢。

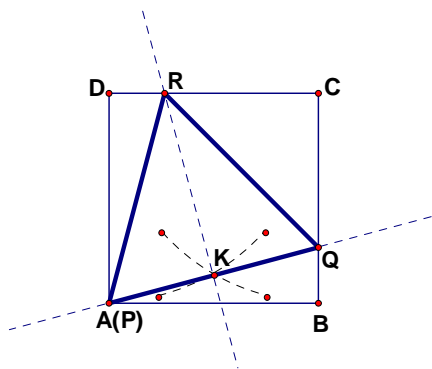


圖 3-4-2-5 K 爲 PQ 的中點

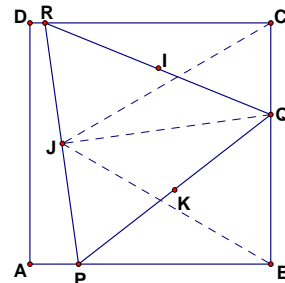


圖 3-4-2-6 由正三角形 PQR 可得 $\triangle BJC$ 爲正三角形

提出問題：

求作一正 $\triangle PQR$ 內接於正方形 $ABCD$ ，且此三角形其中一頂點為正方形的邊上的點，但非頂點。

試分析如下，假設問題已求出， $\triangle PQR$ 即為所求，如圖 3-4-2-6 所示。取 $\triangle PQR$ 的三邊中點 I, J, K ，並連接 \overline{BJ} ， \overline{CJ} ， \overline{QJ} ，可得 $\overline{QJ} \perp \overline{PR}$ ，又 $\angle ABQ=90^\circ=\angle DCQ$ 。所以

$\angle PBQ+\angle PJQ=180^\circ$ ，且 $\angle RCQ+\angle RJQ=180^\circ$ ，所以 $PBQJ$ 四點及 $JQCR$ 四點共圓。又 \overline{PQ} ，

\overline{QR} 為直徑，由正弦定理知， $\frac{\overline{BJ}}{\sin \angle BQJ} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \frac{\overline{CJ}}{\sin \angle CQJ}$ ，又 $\angle BQJ+\angle CQJ=180^\circ$

所以 $\sin \angle BQJ = \sin \angle CQJ$ ，得 $\overline{BJ} = \overline{CJ}$ ，又 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，故

$\angle BJC=\angle CRQ+\angle BPQ=\angle PQR=60^\circ$ ，所以 $\triangle BJC$ 為正三角形。

作法：

1. 分別以 B, C 為圓心，以 \overline{BC} 為半徑作兩圓弧，設其交點為 J ，如圖 3-4-2-7 所示，
2. 連接 \overline{PK} ，交 \overline{CD} 於 R 點，
3. 再過 J 點作 \overline{PR} 的垂直線，設交 \overline{BC} 於 Q 點，
4. $\triangle PQR$ 即為所求。

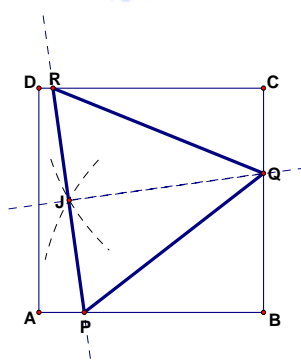


圖 3-4-2-7 J 為 PR 的中點

證明：由作圖知， $\triangle BJC$ 為正三角形，又 $\overline{RK} \perp \overline{AQ}$ ，得 $\angle PBQ+\angle PJQ=180^\circ$ ， $\angle JQC+\angle JRC$

$=180^\circ$ ，所以 $PBQJ$ 四點及 $JQCR$ 四點分別共圓，且 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 為直徑。又

$\angle BQJ+\angle CQJ=180^\circ$ ， $\sin \angle BQJ = \sin \angle CQJ$ ，由正弦定理知 $\frac{\overline{BJ}}{\sin \angle BQJ} = \overline{PQ}$ ，

$$\frac{\overline{CJ}}{\sin \angle CQJ} = \overline{RQ}. \text{因爲 } \overline{BJ} = \overline{CJ}, \overline{PQ} = \overline{RQ}; \text{又 } \angle PQR = \angle CRQ + \angle BPQ = \angle CJB = 60^\circ,$$

由 $\overline{PQ} = \overline{RQ}$ 且 $\angle PQR = 60^\circ$, 可得 $\triangle PQR$ 爲正三角形。證畢。

3-4-3 正方形內接正三角形的面積極值問題

從上述的分析結論中，可延伸正方形的內接正三角形之最大面積與最小面積問題。首先建立一直角坐標系，令正方形四頂點爲 $A(-\frac{1}{2}, 0), B(\frac{1}{2}, 0), C(\frac{1}{2}, 1), D(-\frac{1}{2}, 1)$,

如圖 3-4-3-1 所示，在 \overline{AB} 上取一動點 $P(x_1, 0)$ ，過 P 點作一正 $\triangle PQR$ 。令 $Q(\frac{1}{2}, y)$,

$R(x_2, 1)$ ，且取其三邊中點爲 $I(\frac{2x_2+1}{4}, \frac{y+1}{2}), J(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{1}{2}), K(\frac{4x_1+1}{4}, \frac{y}{2})$ 。因爲

$\triangle PQR$ 爲正三角形， $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{RP}^2$ ，得 $(x_1 - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (x_2 - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 \dots\dots(1)$

$(x_1 - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + 1^2 \dots\dots\dots(2)$ ，兩式相減得

$(x_1 - x_2)(1 - x_1 - x_2) = 2y - 1$ ，令 $x_1 + x_2 = t, x_1 - x_2 = \frac{2y-1}{1-t}$ ， $x_1 = \frac{1}{2}(t + \frac{2y-1}{1-t})$ 代

入(2)式得 $[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y-1}{1-t} - \frac{1}{2}]^2 + y^2 = (\frac{2y-1}{1-t})^2 + 1$ ，整理可得

$[(t-1)^2 - 3][(t-1)^2 + (2y-1)^2] = 0$ 。所以 $(t-1)^2 = 3$ ，即 $t = 1 \pm \sqrt{3}$ ，正不合。即

$x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{3}$ ， $x_1 - x_2 = \frac{2y-1}{\sqrt{3}}$ ，得 $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{2y-1}{2\sqrt{3}}$ ，又因 $x_1 \geq -\frac{1}{2}$ ， $x_2 \geq -\frac{1}{2}$ ，

得 $-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2} - \sqrt{3}$ ，所以， $2 - \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} - 1 \dots\dots(3)$

$$\triangle PQR \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & -1 \\ x_1 - \frac{1}{2} & -y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left| -y(x_1 - x_2) + (x_1 - \frac{1}{2}) \right| = \left| \frac{(2y-1)^2}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right|。$$

由(3)式，得的範圍爲 $2 - \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} - 1$;

1° 當 $y = \frac{1}{2}$ 時， $\triangle PQR$ 面積有最小值爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，此時 P 點坐標爲 $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$ ， Q 點坐標爲

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ， R 點坐標爲 $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1)$ 。

2° 當 $y = 2 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} - 1$ 時, ΔPQR 面積有最大值為 $2\sqrt{3} - 3$, 此時 P 點坐標為 $(-\frac{1}{2}, 0)$, Q 點坐標為 $(\frac{1}{2}, 2 - \sqrt{3})$, R 點坐標為 $(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}, 1)$ 或 P 點坐標為 $(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}, 0)$, Q 點坐標為 $(\frac{1}{2}, \sqrt{3} - 1)$, R 點坐標為 $(-\frac{1}{2}, 1)$.

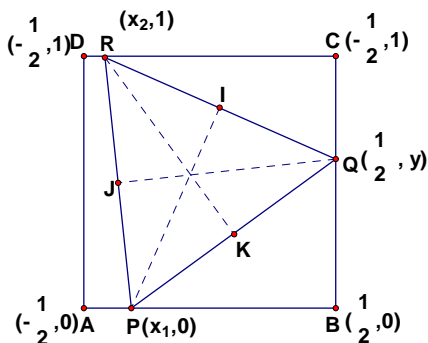


圖 3-4-3-1 將正方形坐標化

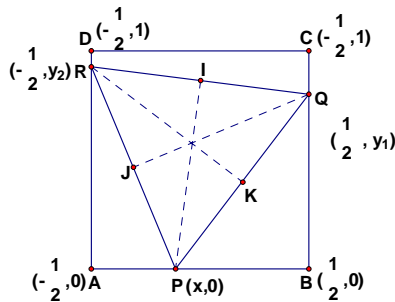


圖 3-4-3-2 在 AB 上取一動點 P(x, 0)

其次, 在 \overline{AB} 上取一動點 $P(x, 0)$, 過 P 點作一正 ΔPQR , 令 $Q(\frac{1}{2}, y_1)$, $R(-\frac{1}{2}, y_2)$ 且取其三邊中點為 $I(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$, $J(\frac{2x-1}{4}, \frac{y_2}{2})$, $K(\frac{2x+1}{4}, \frac{y_1}{2})$, 如圖 3-4-3-2 所示。因 ΔPQR 為正三角形, $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{RP}^2$, 得 $(x - \frac{1}{2})^2 + y_1^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + y_2^2 \dots\dots(1)$,

$1 + (y_1 - y_2)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + y_1^2 \dots\dots(2)$, 相減得 $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = -2x$. 令 $y_1 + y_2 = t$,

$y_1 - y_2 = \frac{-2x}{t}$. 以 $y_1 = \frac{1}{2}(t - \frac{2x}{t})$, 代入(2)式化簡得 $1 + \frac{4x^2}{t^2} = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(t - \frac{2x}{t})^2$, 即

$(t^2 + 4x^2)(t^2 - 3) = 0$. 因 $t^2 = 3$, $t = \sqrt{3}$ (負不合)。即 $y_1 + y_2 = \sqrt{3}$, $y_1 - y_2 = \frac{-2x}{\sqrt{3}}$, 得

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

因為 $y_1 \leq 1$, $y_2 \leq 1$, $\sqrt{3} - 1 \leq y_1 \leq 1$, 得 $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \dots\dots(3)$

$$\Delta PQR \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \left\| \begin{array}{c} x - \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \times \left| x(y_1 - y_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right|,$$

由(3)式, x 的範圍為 $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}$.

- 1° 當 $x=0$ 時， ΔPQR 面積為最小 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，此時 P 點坐標為 $(0,0)$ ，Q 點坐標為 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，R 點坐標為 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。
- 2° 當 $x = \frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ 時， ΔPQR 面積為最大 $2\sqrt{3}-3$ ，此時 P 點坐標為 $(\frac{3-2\sqrt{3}}{2}, 0)$ ，Q 點坐標為 $(\frac{1}{2}, 1)$ ，R 點坐標為 $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1)$ 或 P 點坐標為 $(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}, 0)$ ，Q 點坐標為 $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1)$ ，R 點坐標為 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 。

3-4-4 正多邊形內接正多邊形的各邊中點及其中心的軌跡問題

建立一直角坐標系，令 $A(-1,-1)$ ， $B(1,-1)$ ， $C(1,1)$ ， $D(-1,1)$ 。依 P 點所在的邊分四種情形討論：

(一) 當 $P(x_1, -1)$ 在 \overline{AB} 上移動時，即 $-1 \leq x_1 \leq 1$ ，若在 $-1 \leq x_1 \leq 3-2\sqrt{3}$ 範圍時，令 Q 點

坐標為 $(1, y)$ ，R 點坐標為 $(x_2, 1)$ ，由結論知， $x_1 + x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$ 且 $x_1 - x_2 = \frac{2y}{\sqrt{3}}$ ，所以

$x_1 = 1 - \sqrt{3} + \frac{y}{\sqrt{3}}$ ，且 $3 - 2\sqrt{3} \leq y \leq -3 + 2\sqrt{3}$ 。此時三邊中點分別為 $I(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y+1}{2})$ ，

$J(\frac{x_1+x_2}{2}, 0) = (1 - \sqrt{3}, 0)$ ， $K(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y-1}{2})$ ，重心為 $G(\frac{x_1+x_2+1}{3}, \frac{y}{3}) = (\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{y}{3})$ 。

觀察得到如下結果：

(1) 當 P 點的 x 坐標由 -1 到 $3-2\sqrt{3}$ 時， \overline{PR} 的中點 $J(1-\sqrt{3}, 0)$ 為一定點，而 \overline{PQ} 的中點

$K(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y-1}{2})$ 位於直線 $y = \sqrt{3}x + (1-\sqrt{3})$ ，且 $0 \leq x \leq 2-\sqrt{3}$ ，

$1-\sqrt{3} \leq y \leq -2+\sqrt{3}$ 。 \overline{QR} 的中點 $I(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y+1}{2})$ 位於直線 $y = -\sqrt{3}x + (-1+\sqrt{3})$ 且

$0 \leq x \leq 2-\sqrt{3}$ ， $2-\sqrt{3} \leq y \leq -1+\sqrt{3}$ ，如圖 3-4-4-1 所示。

(2) 當 P 點的 x 坐標由 -1 到 $3-2\sqrt{3}$ 時， ΔPQR 的重心為 $G(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{y}{3})$ ，位於直

線 $x = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ 上且 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{y}{3} \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ ，如圖 3-4-4-2 所示。

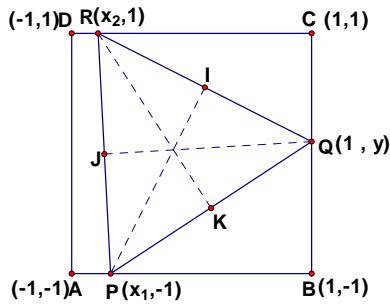


圖 3-4-4-1 Q 點的 y 坐標隨著 P 點的 x 坐標而變

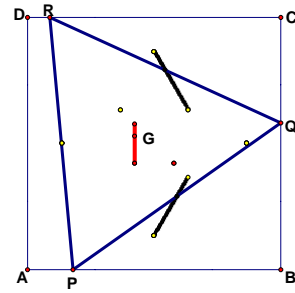


圖 3-4-4-2 $\triangle PQR$ 的重心軌跡

若 $3-2\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2\sqrt{3}-3$ 範圍時，令 Q 點坐標為 $(1, y_1)$ ， R 點坐標為 $(-1, y_2)$ ，由結論知， $y_1 + y_2 = 2\sqrt{3} - 2$ ，且 $y_1 - y_2 = \frac{2x_1}{\sqrt{3}}$ 。所以 $y_1 = \sqrt{3} - 1 + \frac{x_1}{\sqrt{3}}$ 且 $2\sqrt{3} - 3 \leq y_1 \leq 1$ ，

$2\sqrt{3} - 3 \leq y_2 \leq 1$ 。此時三邊中點分別為 $I(0, \frac{y_1 + y_2}{2}) = (0, \sqrt{3} - 1)$ ， $J(\frac{x_1 - 1}{2}, \frac{y_2 - 1}{2})$ ，

$K(\frac{x_1 + 1}{2}, \frac{y_1 - 1}{2})$ 。重心為 $G(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1 + y_2 - 1}{3}) = (\frac{x_1}{3}, \frac{2\sqrt{3} - 3}{3})$ 。觀察得到如下結果：

(3) 當 P 點的 x 坐標由 $3-2\sqrt{3}$ 到 $2\sqrt{3}-3$ 時， \overline{QR} 的中點 $I(0, \frac{y_1 + y_2}{2}) = (0, \sqrt{3} - 1)$ 為一

定點，而 \overline{PQ} 的中點 $K(\frac{x_1 + 1}{2}, \frac{y_1 - 1}{2})$ 位於直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 1 - \sqrt{3})$ ，且

$2 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$ ， $-2 + \sqrt{3} \leq y \leq 0$ ， \overline{PR} 的中點 $J(\frac{x_1 - 1}{2}, \frac{y_2 - 1}{2})$ 位於直線

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1 + \sqrt{3})$ 且 $1 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}$ ， $-2 + \sqrt{3} \leq y \leq 0$ ，如圖 3-4-4-3 所示

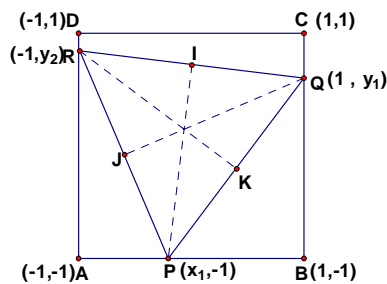


圖 3-4-4-3 P 的 x 坐標在 $3-2\sqrt{3}$ 與

$2\sqrt{3}-3$ 之間， \overline{QR} 中點為定點

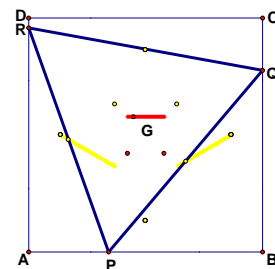


圖 3-4-4-4 P 的 x 坐標在 $3-2\sqrt{3}$ 與

$2\sqrt{3}-3$ 之間， $\triangle PQR$ 的重心軌跡

(4) 當 P 點的 x 坐標由 $3-2\sqrt{3}$ 到 $2\sqrt{3}-3$ 時， ΔPQR 的重心為 $G(\frac{x_1}{3}, \frac{2\sqrt{3}-3}{3})$ 位於直線 $y = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ 上且 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{x}{3} \leq \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ ，如圖 3-4-4-4 所示。若在 $2\sqrt{3}-3 \leq x_1 \leq 1$ 範圍

時，令 Q 點坐標為 $(x_2, 1)$ ，R 點坐標為 $(-1, y)$ ，由結論知， $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}-2$ 且

$x_1 - x_2 = \frac{-2y}{\sqrt{3}}$ 。所以 $x_1 = \sqrt{3} - 1 - \frac{y}{\sqrt{3}}$ 且 $3-2\sqrt{3} \leq y \leq 2\sqrt{3}-3$ ，此時三邊中點分別為

$K(\frac{x_1+x_2}{2}, 0) = (\sqrt{3}-1, 0)$ ， $J(\frac{x_1-1}{2}, \frac{y-1}{2})$ ， $I(\frac{x_1-1}{2}, \frac{y+1}{2})$ ，重心為

$G(\frac{x_1+x_2-1}{3}, \frac{y}{3}) = (\frac{2\sqrt{3}-3}{3}, \frac{y}{3})$ ，觀察得到如下結果：

(5) 當 P 點的 x 坐標由 $2\sqrt{3}-3$ 到 1 時， \overline{PQ} 的中點 $K(\sqrt{3}-1, 0)$ 為一定點，而 \overline{PR} 的中點

$J(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y-1}{2})$ 位於直線 $y = -\sqrt{3}x + (1-\sqrt{3})$ ，且 $-2+\sqrt{3} \leq x \leq 0$ ，

$1-\sqrt{3} \leq y \leq -2+\sqrt{3}$ \overline{QR} 的中點 $I(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y+1}{2})$ 位於直線 $y = \sqrt{3}x + (-1+\sqrt{3})$ 且

$-2+\sqrt{3} \leq x \leq 0$ ， $2-\sqrt{3} \leq y \leq -1+\sqrt{3}$ 如圖 3-4-4-5 所示。

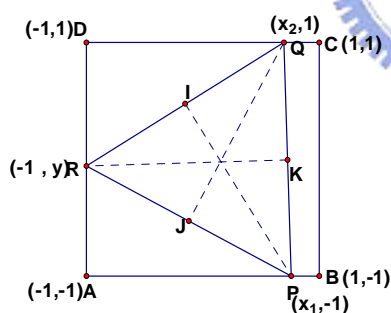


圖 3-4-4-5 P 的 x 坐標在 $2\sqrt{3}-3$ 與 1 之間，QR 中點為定點

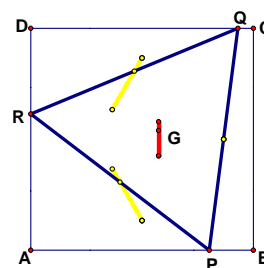


圖 3-4-4-6 P 的 x 坐標在 $2\sqrt{3}-3$ 與 1 之間， ΔPQR 的重心軌跡

(6) 當 P 點的 x 坐標由 $2\sqrt{3}-3$ 到 1 時， ΔPQR 的重心為 $G(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}, \frac{y}{3})$ ，位於直線

$x = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ 上且 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{y}{3} \leq \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ ，如圖 3-4-4-6 所示。若在 $-1 \leq y_1 \leq 3-2\sqrt{3}$

範圍時，令 Q 點坐標為 $(x, 1)$ ，R 點坐標為 $(1, y_2)$ ，由結論知， $y_1 + y_2 = 2-2\sqrt{3}$ 且

$y_1 - y_2 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. 所以 $y_1 = 1 - \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}}$ 且 $3 - 2\sqrt{3} \leq x \leq -3 + 2\sqrt{3}$, 此時三邊中點分別為 $I(\frac{x-1}{2}, \frac{y_2+1}{2})$, $J(0, \frac{y_1+y_2}{2}) = (0, 1-\sqrt{3})$, $K(\frac{x+1}{2}, \frac{y_1+1}{2})$, 重心為 $G(\frac{x}{3}, \frac{y_1+y_2+1}{3}) = (\frac{x}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3})$. 觀察得到如下結果：

(7) 當 P 點的 y 坐標由 -1 到 $3 - 2\sqrt{3}$ 時, \overline{PR} 的中點 $J(1-\sqrt{3}, 0)$ 為一定點, 而 \overline{PQ} 的中點 $K(\frac{x+1}{2}, \frac{y_1+1}{2})$ 位於直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1-\sqrt{3})$, 且 $2-\sqrt{3} \leq x \leq -1+\sqrt{3}$, $0 \leq y \leq 2-\sqrt{3}$. \overline{QR} 的中點 $I(\frac{x-1}{2}, \frac{y_2+1}{2})$ 位於直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1+\sqrt{3})$ 且 $1-\sqrt{3} \leq x \leq -2+\sqrt{3}$, $0 \leq y \leq 2-\sqrt{3}$, 如圖 3-4-4-7 所示。

(8) 當 P 點的 x 坐標由 -1 到 $3 - 2\sqrt{3}$ 時, ΔPQR 的重心為 $G(\frac{x}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3})$, 位於直線 $y = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ 上且 $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{x}{3} \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$, 如圖 3-4-4-8 所示。

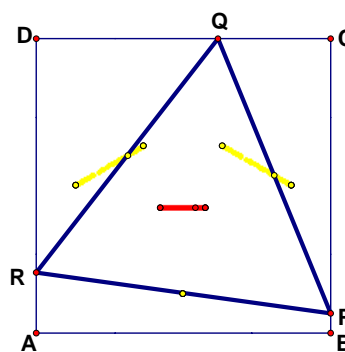
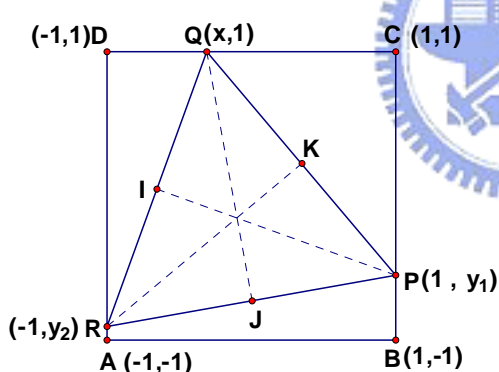


圖 3-4-4-7 P 的 x 坐標在 -1 與 $3 - 2\sqrt{3}$ 之間, PR 中點為定點

圖 3-4-4-8 P 的 x 坐標在 -1 與 $3 - 2\sqrt{3}$ 之間, ΔPQR 的重心軌跡

3-4-5 結論：

一、 作一正方形的內接正三角形。

首先在正方形的四邊上, 以邊長為邊往內各作一個正三角形, 如圖 3-4-5-1 所示, 由 A 點連接 \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{AH} 分別交 \overline{BC} , \overline{CD} 於 B_1 , D_2 , 同理, 由 B, C, D 點連接 E, F, G, H

點，可得 $A_2, C_1, D_1, B_2, A_1, C_2$ ，如圖 3-4-5-2 所示。

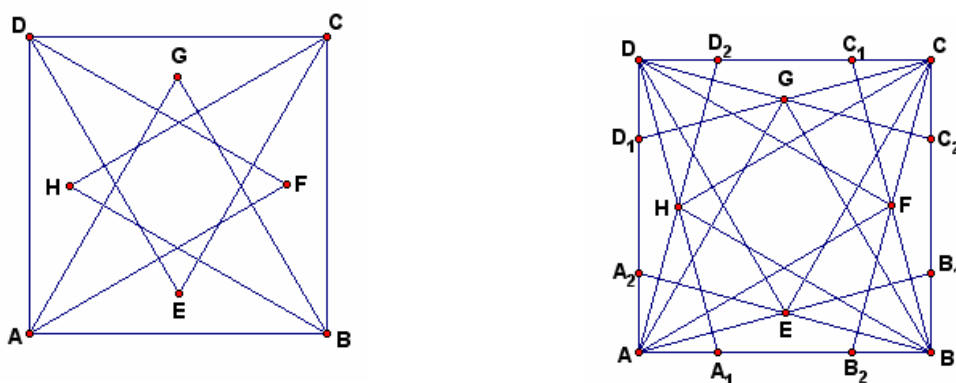


圖 3-4-5-1 以正方形之一邊為邊的四個正三角形 圖 3-4-5-2 P 在不同的區段對應的不動點

因為正方形具有對稱性，所以，我們只要討論 \overline{AB} 邊就可以，

- (1) 若正三角形的一頂點 P 恰好是 A 點或 B 點，則 $\triangle AB_1D_2$ 或 $\triangle BA_2C_1$ ，即為所求，如圖 3-4-5-3 所示。
- (2) 若正三角形的一頂點 P 位於 $\overline{AA_1}$ 上，則連接 \overrightarrow{PH} 交 \overline{CD} 於 Q 點，再過 H 點作 \overline{HR} 垂直於 \overline{PQ} 交 \overline{BC} 於 R 點，如此的 $\triangle PQR$ 即為所求，如圖 3-4-5-4 所示。

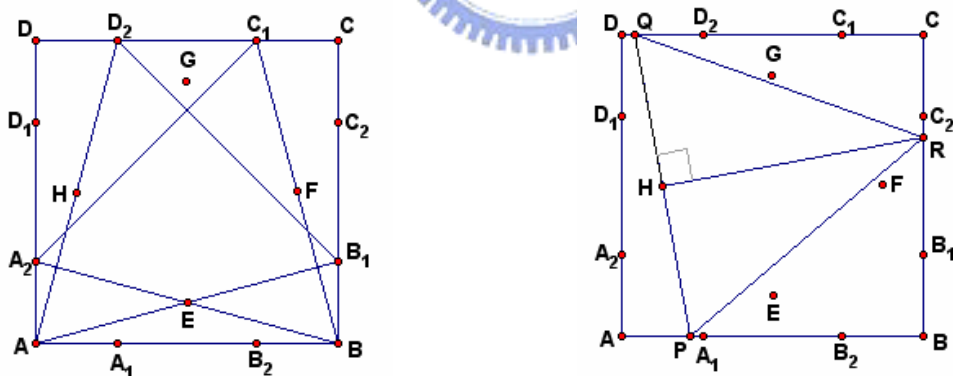


圖 3-4-5-3 正 $\triangle AB_1D_2$ ， $\triangle BA_2C_1$ P 的位置 圖 3-4-5-4 P 在 $\overline{AA_1}$ 上移動時之不動點

- (3) 若正三角形的一頂點 P 位於 $\overline{A_1B_2}$ 上，則連接 \overrightarrow{PG} ，再過 H 點作 \overline{HQ} 垂直於 \overline{PG} ，分別交 \overline{AD} 、 \overline{BC} 於 Q 、 R 點，如此的 $\triangle PQR$ 即為所求，如圖 3-4-5-5 所示。
- (4) 若正三角形的一頂點 P 位於 $\overline{B_2B}$ 上，則連接 \overrightarrow{PF} 交 \overline{CD} 於 Q 點，再過 F 點作 \overline{FR} 垂

直於 \overline{PQ} 交 \overline{AD} 於 R 點，如此的 ΔPQR 即為所求，如圖 3-4-5-6 所示。

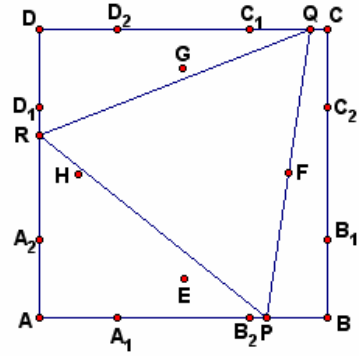
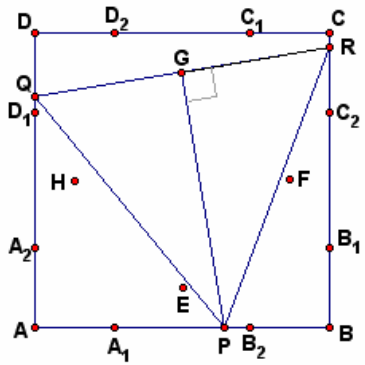


圖 3-4-5-5 P 在 $\overline{A_1B_2}$ 上移動時之不動點

圖 3-4-5-6 P 在 $\overline{B_2B}$ 上移動時之不動點

二、內接於正方形的正三角形之面積變化函數圖形

因為正方形的對稱性，所以，正三角形之面積變化函數是一週期函數建立一直角坐標系，令正方形四頂點為 $A(-\frac{1}{2}, 0)$, $B(\frac{1}{2}, 0)$, $C(\frac{1}{2}, 1)$, $D(-\frac{1}{2}, 1)$ ，設 \overline{AB} 上的一動點 P ，其坐標為 $(x, 0)$ ，其中 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

(1) 當 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ 時， ΔPQR 面積為 $f(x) = \sqrt{3}(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) 當 $\frac{3-2\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ 時， ΔPQR 面積為 $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) 當 $\frac{2\sqrt{3}-3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 時， ΔPQR 面積為 $f(x) = \sqrt{3}(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

其函數圖形如圖 3-4-5-7 所示：

正四邊形內接正三角形的面積變化函數圖形

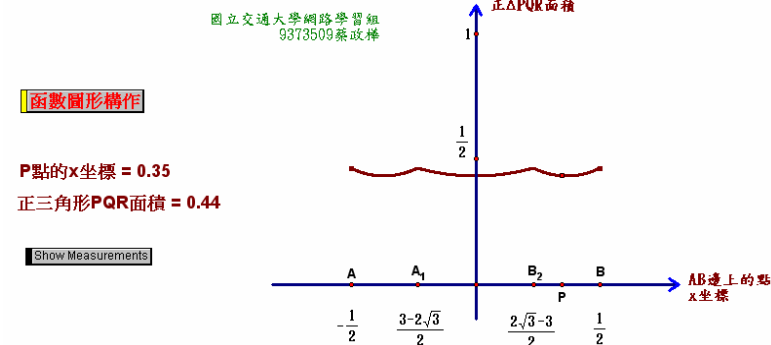


圖 3-4-5-7 正四邊形內接正三角形之面積變化函數

三、內接於正方形的正三角形之三邊中點及重心的軌跡，如圖 3-4-5-8 所示。

探究正多邊形內接正三角形的面積變化
及其三邊中點、重心的軌跡
--以動態作圖及週期函數為基模--

國立交通大學網路學習組
9373509蔡政樺

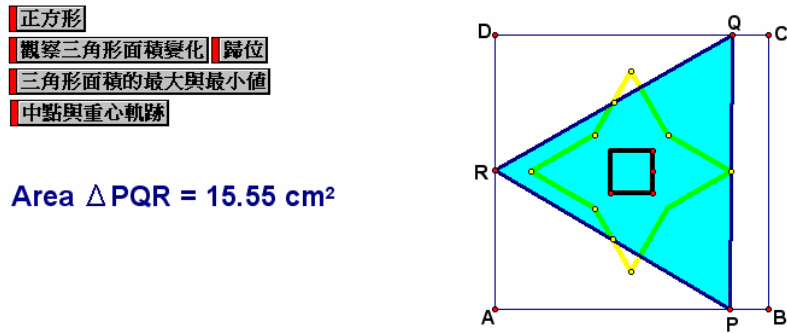


圖 3-4-5-8 正三角形的三邊中點及其重心的軌跡



3-5 內接於正邊形的正三角形的重心軌跡---以操作發現為探究模

組

我們想透過數學幾何軟體 GSP 的動態操作且可以對一些幾何量數據化，並能以模擬形態來呈現幾何量的變化而利於觀察之特點，來探索一道數學問題---「正三角形內接於正邊形的尺規作圖」。藉由 GSP 的動態環境來對這個問題作探究學習，除了使學生掌握數學基本原理，熟練幾何作圖的技能之外，還能夠體驗對問題作進一步的分析、猜想、歸納、推理與論證，使學生不斷地觀察、實驗、比較、推論，並準確地闡述自己的觀點及思想，進而形成良好的思維品質與培養優質的思維能力。

3-5-1 從簡單的問題出發

提出問題：在正三角形 ABC 的 \overline{AB} 上取一點 P ，求作正三角形 PQR 內接於正三角形 ABC 。我們只要分別在 \overline{BC} ， \overline{CA} 上取 Q ， R 兩點，使得 $\overline{AP}:\overline{PB} = \overline{BQ}:\overline{QC} = \overline{CR}:\overline{RA}$ ，則三角形 PQR 即為所求。利用線段比例及分點公式不難知道三角形 PQR 的重心與三角形 ABC 的重心會重合，所以，我們可以旋轉的概念求得正三角形 PQR ，即以三角形 ABC 的重心為旋轉中心，將 P 點分別旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 及 $\frac{4\pi}{3}$ 得 Q ， R 兩點，得三角形 PQR 為一正三角形。這兩個尺規作圖思路是基本的，但是否具有推廣性及一般性，是值得進一步探討的問題。也就是說要用前面所說的尺規作圖法在一個正多邊形的邊上，作一個三頂點位於此正多邊形邊上的內接三角形是否適用？因此，我們將此正多邊形分成三類： $3n$ 型、 $3n+1$ 型、 $3n+2$ 型來進行延伸性的探究。

3-5-2 正 $3n$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索

在這個類型中，我們先針對 $n=1$ 及 2 時，提出下面的兩個問題來進行探討：

1. 已知正 ΔABC 及邊上一點 P ，求作一正 ΔPQR 內接於正 ΔABC 。
2. 已知一正六邊形及邊上一點 P ，求作一正 ΔPQR 內接於此正六邊形。

並從討論的過程中詳加觀察、歸納結論，進行猜想，然後再把問題延伸到一般的情況，以期掌握「正 $3n$ 邊形的邊上內接一正三角形」問題的全貌。

提出問題 1

已知正 $\triangle ABC$ 及邊上一點 P ，求作一正 $\triangle PQR$ 內接於正 $\triangle ABC$ 。

問題的分析：

(1) 特殊情況

當 P 點為頂點 A 時，則正 $\triangle ABC$ 即為正 $\triangle PQR$ 。

當 P 點為 \overline{AB} 邊的中點時，則正 $\triangle ABC$ 的三邊中點即構成正 $\triangle PQR$ 。

(2) 一般情況

當 P 點非 $\triangle ABC$ 的頂點，亦非三邊中點，設 $\triangle PQR$ 為所求的正三角形

，如圖 3-2-2-1 所示。取 $\triangle PQR$ 的重心 G ，並連接 \overline{PG} 、 \overline{QG} 、 \overline{RG} 。

所以， $\overline{PG} = \overline{QG} = \overline{RG}$ ， $\angle PGQ = \angle QGR = \angle RGP = 120^\circ$ ，

又 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 。可得 $\angle PGQ + \angle A = \angle QGR + \angle B = \angle RGP + \angle C = 180^\circ$ 。

所以， $APGQ$ 四點、 $BQGR$ 四點、 $CRGP$ 四點共圓，如圖 3-5-2-2 所示，

且由正弦定理知，則此三圓半徑相等。又由等弦對等圓周角知，

$\angle PAG = \angle QAG$ ， $\angle QBG = \angle RBG$ ， $\angle RCG = \angle PCG$ 。

因此， \overline{AG} 、 \overline{BG} 、 \overline{CG} 為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分線。

所以， G 為 $\triangle ABC$ 的內心，又 $\triangle ABC$ 為正三角形，故 G 也為 $\triangle ABC$ 的重心。

從上面的討論分析可知，正 $\triangle ABC$ 的重心與其內接正 $\triangle PQR$ 之重心重合。

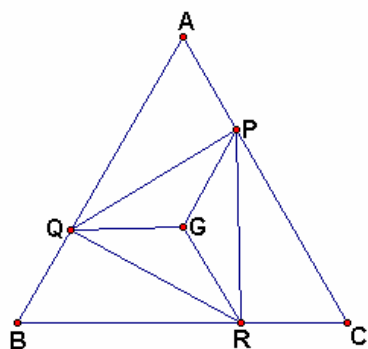


圖 3-5-2-1 一正三角形內接於正三角形

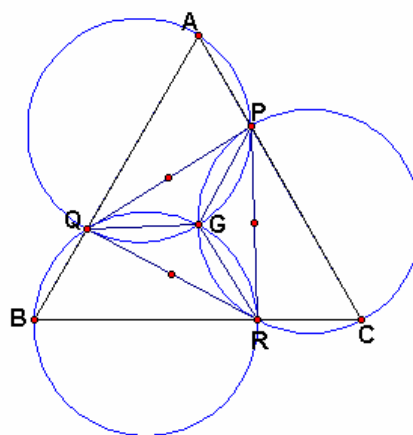


圖 3-5-2-2 三圓共交點

作法：

(方法一)

1. 以 $\triangle ABC$ 的重心為中心，將 P 點旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{4\pi}{3}$ ，得 Q ， R 兩點
2. 連接 P ， Q ， R 三點，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

(方法二)

1. 取 $\triangle ABC$ 的重心 G ，再作 $\triangle APG$ 及 $\triangle CPG$ 的外接圓，設分別交 \overline{AB} ， \overline{AC} 於 Q ， R 兩點。
2. 連接 P ， Q ， R 三點，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

證明：由作圖知， $APGQ$ 四點及 $CPGR$ 四點共圓，可知 $BQGR$ 四點也共圓。

因為 $\angle PAG = \angle QAG = 30^\circ$ 且 $\angle QBG = \angle RBG = 30^\circ$ 且 $\angle RCG = \angle PCG = 30^\circ$ 。

由等圓周長對等弦的概念，可推得 $\overline{PG} = \overline{QG} = \overline{RG}$ 。因此， $APGQ$ 圓、 $BQGR$ 圓、

$CPGR$ 圓之半徑相等。由正弦定理知， $\frac{\overline{PQ}}{\sin A} = \frac{\overline{QR}}{\sin B} = \frac{\overline{RP}}{\sin C} = 2R$ 。可推得

$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ 。即得 $\triangle PQR$ 為正三角形。

提出問題 2

已知正六邊形及邊上一點 P ，求作一正 $\triangle PQR$ 內接於此正六邊形。

問題的分析：

(1) 特殊情況：

當 P 點為頂點 A 時，則此正 $\triangle PQR$ 即為正 $\triangle ACE$ 。

當 P 點為 \overline{AF} 邊的中點時，則正六邊形 $ABCDEF$ 的三邊 \overline{AF} ， \overline{BC} ， \overline{DE} 之中點即構成正 $\triangle PQR$ 。

(2) 一般情況：

當 P 點非 $\triangle ABC$ 的頂點，亦非三邊中點，則分別在 \overline{BC} ， \overline{DE} 上取 Q ， R ，使得

$\overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{AP} : \overline{PF}$ ， $\overline{DR} : \overline{RE} = \overline{AP} : \overline{PF}$ ，則四邊形 $ABQP$ ， $CDRQ$ ， $EFPR$ 全等，

可得 $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ ，因此， $\triangle PQR$ 為正三角形。

又因為 P ， Q ， R 三點滿足 $\overline{AP} : \overline{PF} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{DR} : \overline{RE}$ ，則 $\triangle PQR$ 的重心與正六

邊形的中心點重合。

從上面的討論分析可知，正六邊形 $ABCDEF$ 的中心與其內接正 $\triangle PQR$ 之重心重合。

作法：

(方法一)

1. 以正六邊形 $ABCDEF$ 的中心為中心，將 P 點旋轉 $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ ，得 Q, R 兩點，
如圖 3-5-2-3 所示。
2. 連接 P, Q, R 三點，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

(方法二)

1. 取正六邊形 $ABCDEF$ 的中心 G ，連接 \overline{PG} ，交 \overline{CD} 邊於 S 點，作 \overline{GS} 的中垂線交 $\overline{BC}, \overline{DE}$ 於 Q, R 兩點。
2. 連接 P, Q, R 三點，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

(方法三)

1. 分別在 $\overline{BC}, \overline{DE}$ 上取 Q, R ，使得 $\overline{BQ}:\overline{QC} = \overline{AP}:\overline{PF}$ ， $\overline{DR}:\overline{RE} = \overline{AP}:\overline{PF}$ 。
2. 連接 P, Q, R 三點，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

證明：我們由方法三的作圖法來加以證明。

因為 $\overline{AP}:\overline{PF} = \overline{BQ}:\overline{QC} = \overline{DR}:\overline{RE}$ ，可得四邊形 $ABQP, CDRQ, EFPR$ 全等，如

圖 3-5-2-4 所示。即可得 $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ ，所以， $\triangle PQR$ 為正三角形。

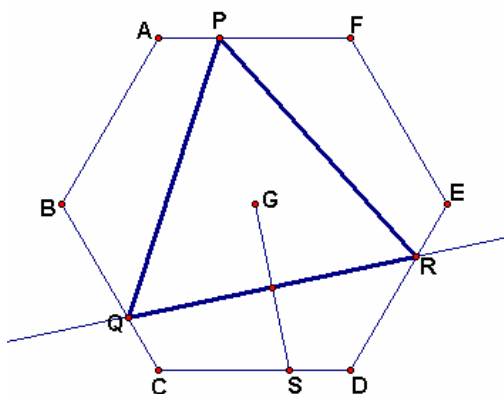


圖 3-5-2-3 一正三角形內接於正六邊形

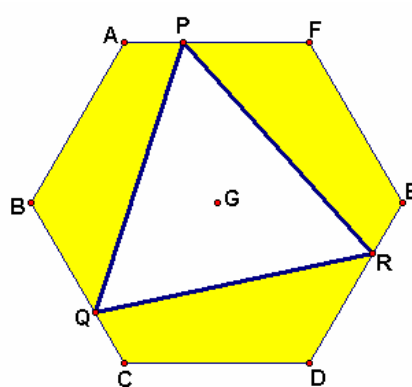


圖 3-5-2-4 三個黃色的四邊形全等

在討論前述兩個問題的內容我們發現，當 $n = 1$ 或 2 時，正 $3n$ 邊形的中心與其內接正

$\triangle PQR$ 的重心重合。事實上對所有正整數 n ，此命題均成立，利用平面幾何概念即可證明，或用數學歸納法證明。因此，要在正 $3n$ 邊形中作一其內接正 $\triangle PQR$ 的尺規作圖為以正 $3n$ 邊形的中心為旋轉中心，將其某一邊上的動點 P ，作 $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{4\pi}{3}$ 的旋轉即可得 Q ， R 兩點，連接 P ， Q ， R ，則 $\triangle PQR$ 即為所求。

以下是我們對延伸問題的進一步探討的內容：

討論一、

在正 $3n$ 邊形的第一邊 $\overline{A_1A_2}$ 上取一動點 P ，以中心點 O 為旋轉中心，將點 P 旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{4\pi}{3}$ 得到 Q ， R 兩點，令圓半徑為 r ， $\overline{OP} = x$ ， $\angle A_1OP = \theta$ ，如下圖 3-5-2-5 所示。

在 $\triangle A_1OA_2$ ， $\triangle A_1OP$ ， $\triangle A_2OP$ 中，因為 $\triangle A_1OA_2 = \triangle A_1OP + \triangle A_2OP$ ，

可得 $\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{3n} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{2\pi}{3n} - \theta)$ ，整理可得

$r \cdot \sin \frac{2\pi}{3n} = x \cdot [\sin \theta + \sin(\frac{2\pi}{3n} - \theta)]$ 之式子，再利用兩倍角及和差化積的公式化簡可得

得 $r \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3n} \cos \frac{\pi}{3n} = x [2 \sin \frac{\pi}{3n} \cos(\theta - \frac{\pi}{3n})]$ ，再整理可得

$$x = \frac{r \cdot \cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})}$$

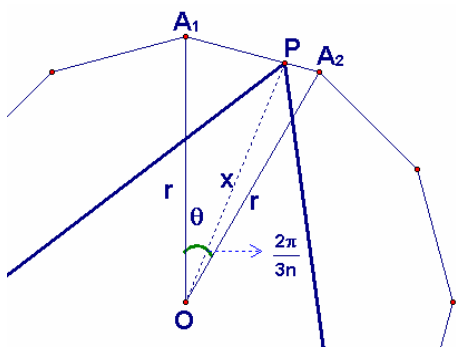


圖 3-5-2-5 $\overline{A_1A_2}$ 上取一動點 P

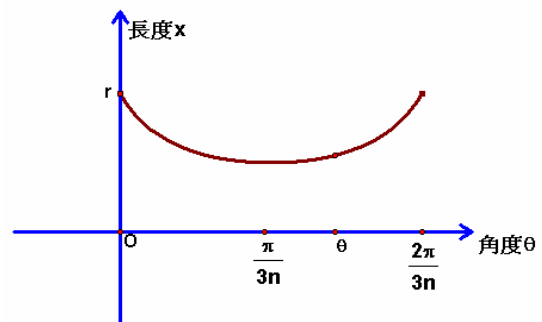


圖 3-5-2-6 x 對 θ 的函數圖形

所以，當 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ 時，即 $-\frac{\pi}{3n} \leq \theta - \frac{\pi}{3n} \leq \frac{\pi}{3n}$ ，則 $\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})$ 的範圍為

$$\cos \frac{\pi}{3n} \leq \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3n}\right) \leq 1.$$

此時， $x = \frac{r \cdot \cos \frac{\pi}{3n}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3n}\right)}$ 的最大值為 r ，最小值為 $r \cdot \cos \frac{\pi}{3n}$ 。

我們透過 GSP 的繪圖功能，構作 x 對 θ 在 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ 的函數圖形，如圖 3-5-2-6 所示。

討論二、

在正 $3n$ 邊形的第二邊 $\overline{A_2A_3}$ 上取一動點 P ，以中心點 O 為旋轉中心，將點 P 旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{4\pi}{3}$ 得到 Q, R 兩點，令圓半徑為 r ， $\overline{OP} = x$ ， $\angle A_2OP = \theta$ ，如下圖 3-5-2-7 所示：

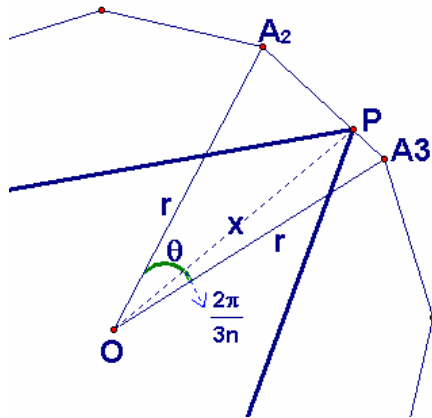


圖 3-5-2-7 $\overline{A_2A_3}$ 上取一動點 P

此情形與討論一 的情況是一樣的。所以，我們猜想正 $\triangle PQR$ 內接於正 $3n$ 邊形中，當 P 點在正 $3n$ 邊形的邊上移動時， $\overline{OP} = x$ 值會隨著 θ 的改變呈現出週期的變化關係。

以下是找出這個週期函數的探究過程：

作正 $3n$ 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{3n}$ 的外接圓 O ，並在此圓上取一動點 A ，以 $\overline{OA_1}$ 為始邊， \overline{OA} 為終邊，則有向角 $\angle A_1OA$ 為點 A 繞中心 O 的旋轉角度 θ_k ，令 $\theta_k = \theta + \frac{2k\pi}{3n}$ ，且

$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ ，則

(1) 當 $k=0$ 時，即 $0 \leq \theta_0 \leq \frac{2\pi}{3n}$ ，由前面 (一) 的結論可知，正 $\triangle PQR$ 內接於正 $3n$ 邊形

$A_1A_2A_3 \cdots A_{3n}$ 中， $\angle A_1OA$ 為 θ_0 ，則在 \overline{OA} 上取一點 P 滿足 $\overline{OP} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})}$ ，且

當 $\theta=0$ 或 $\frac{2\pi}{3n}$ 時， x 有最大值為 R ；當 $\theta = \frac{\pi}{3n}$ 時， x 有最小值為 $R \cdot \cos \frac{\pi}{3n}$ 。

(2) 當 $k=1$ 時，即 $\frac{2\pi}{3n} \leq \theta_1 \leq \frac{4\pi}{3n}$ ，則在 \overline{OA} 上取一點 P 滿足 $\overline{OP} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{n})}$ ，且當

$\theta_1 = \frac{2\pi}{3n}$ 或 $\frac{4\pi}{3n}$ 時， x 有最大值為 R ；當 $\theta_1 = \frac{\pi}{n}$ 時， x 有最小值為 $R \cdot \cos \frac{\pi}{3n}$ 。

我們將前面的討論綜合整理如下幾個結果，並構作 \overline{OP} 隨著 θ_k 的變化而成的週期函數圖形：

1. 若 $\theta_k = \theta + \frac{2k\pi}{3n}$ 且 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ ，則當 $0 + \frac{2k\pi}{3n} \leq \theta_k \leq \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{3n}$ 時， $\angle A_1OA$ 為 θ_k ，則在 \overline{OA} 上取一點 P 滿足 $\overline{OP} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})}$ ，且當 $\theta_k = \frac{2k\pi}{3n}$ 或 $\frac{2(k+1)\pi}{3n}$ 時， x 有最大值

為 R ；當 $\theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3n}$ 時， x 有最小值為 $R \cdot \cos \frac{\pi}{3n}$ 。

2. 若 $\theta_k = \theta + \frac{2k\pi}{3n}$ 且 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ ，可得 $0 + \frac{2k\pi}{3n} \leq \theta_k \leq \frac{2\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{3n}$ ，則正 $\triangle PQR$ 內接於正 $3n$

邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{3n}$ 的邊上時， $\overline{OP} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})}$ ，且正 $\triangle PQR$ 的邊長為

$$\sqrt{3} \cdot \overline{OP} = \sqrt{3}R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3n})}.$$

3. 由反餘弦函數的性質知，當 x 為實數，若 $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$ ，則 $0 \leq f(x) \leq \pi$ ，且 $f(x)$

為一週期為 2π 的週期函數。利用函數圖形的伸縮變換概念得，當 x 為實數，若 $g(x) = \frac{\cos^{-1}(\cos 3n \cdot x)}{3n}$ ，則 $g(x)$ 為一週期為 $\frac{2\pi}{3n}$ 的週期函數且值域為 $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{3n}$ 。

又 $\theta_k = \theta + \frac{2k\pi}{3n}$ 且 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3n}$ ，再利用反餘弦函數的性質知， $\theta = \cos^{-1}(\cos \theta_k)$ 。所以，

$$\overline{OP} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3n}}{\cos(\cos^{-1}(\cos \theta_k) - \frac{\pi}{3n})}$$
，對所有實數 θ_k 而其圖形如圖 3-5-2-8 所示。

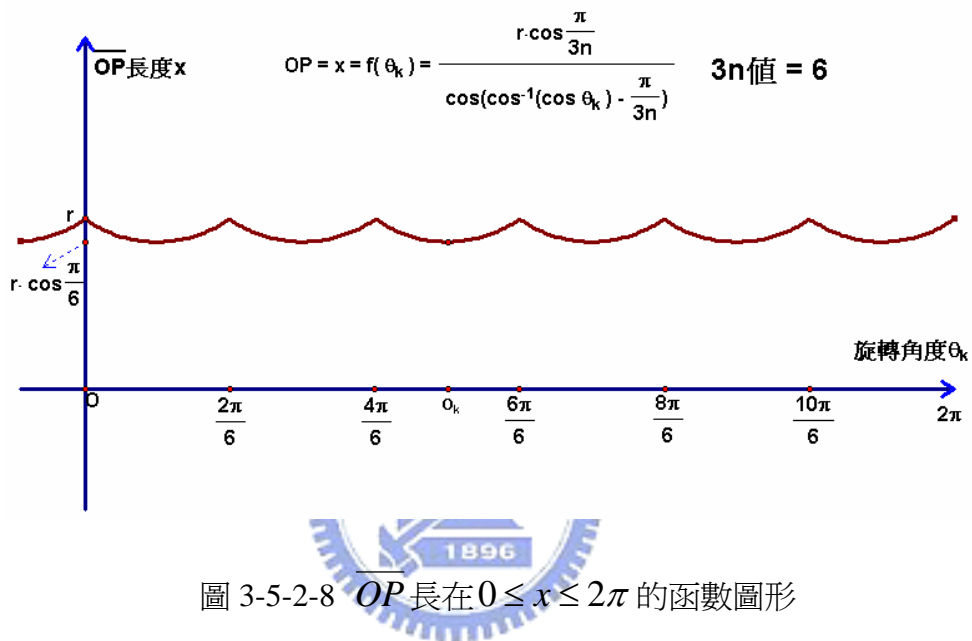


圖 3-5-2-8 OP 長在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的函數圖形

3-5-3 正 $3n+1$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索

在這個類型中，當 $n=1$ 時即為正方形的邊上內接一正三角形的情況，我們將在 3-4 節裡作詳細的探究與討論。所以，先討論 $n=2$ 的情況，即為正七邊形的邊上內接一正三角形的尺規作圖之相關問題並從探討的過程中詳加觀察、歸納結論，進行猜想與推測，然後再把問題延伸到一般的情況，以便了解「正 $3n+1$ 邊形的邊上內接一正三角形之尺規作圖」之問題的延伸性。

提出問題：

作一正 $\triangle PQR$ 內接於一正七邊形且其中一頂點恰為此正七邊形的頂點。

作法如下：

1. 過 A 點作 \overline{DE} 的垂直線 \overline{AH} 與平行線 \overline{AK} 。

2. 分別以 A, K, L 為圓心， \overline{AB} 為半徑作三圓，設其圓弧之交點為 M, N 。

3. 分別連接 $\overline{AM}, \overline{AN}$ 交 $\overline{CD}, \overline{EF}$ 於 Q, R 點。

4. 則 ΔPQR 即為所求，如圖 3-5-3-1 所示。

證明：由作圖的過程知， $\angle QAH = \angle RAH = 30^\circ$ ，可得 $\angle QAR = 60^\circ$ ，又因為

$\overline{AB} = \overline{AG} = \overline{BC} = \overline{GF}$ 且 $\angle ABC = \angle AGF$ 。所以， ΔABC 與 ΔAGF 全等。

即可推得四邊形 $ABCQ$ 與四邊形 $AGFR$ 全等。因此， $\overline{AQ} = \overline{AR}$ ，又 $\angle QAR = 60^\circ$ ，故 ΔPQR 為正三角形。

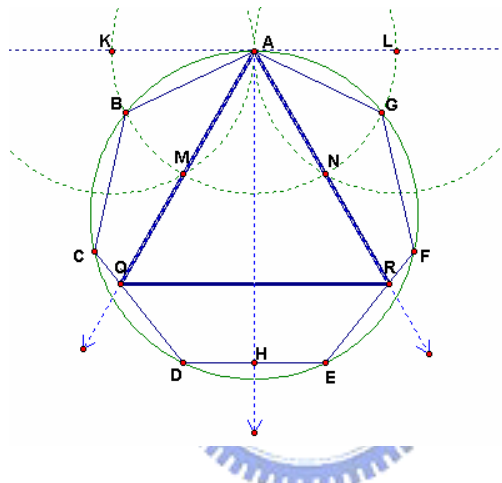


圖 3-5-3-1 過 A 點作一正三角形內接於正七邊形

透過前面的作圖法，分別以正七邊形的七個頂點為此正七邊形內接正三角形的其中一個頂點，可以構作七個內接正三角形，如下圖 3-5-3-2 所示：

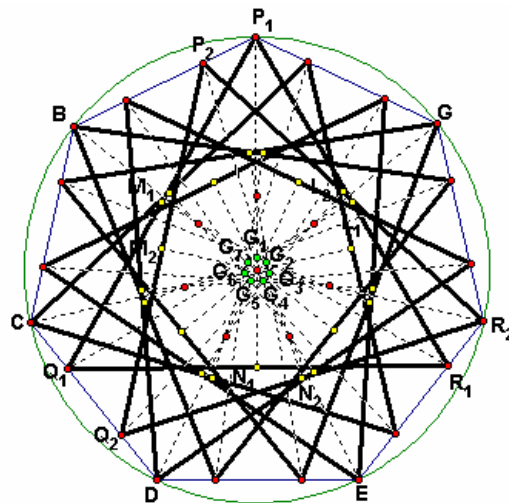


圖 3-5-3-2 七個內接正三角形的重心及各邊中點

在這七個正三角形中，綠色點 $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7$ 是重心，而黃色點 $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, L_3, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ 分別是這七個正三角形的三邊中點。透過 GSP 動態幾何軟體所提供的視覺形象思維，讓我們經由操作與模擬實驗，並觀察其中兩個正 $\Delta P_1Q_1R_1, \Delta P_2Q_2R_2$ 的重心及各邊中點的位置變化，歸納猜想出下列幾個要點：

(一) $\Delta P_1Q_1R_1$ 與 $\Delta P_2Q_2R_2$ 全等，進一步可知此七個正三角形均會全等。

(二) 當 $\Delta P_1Q_1R_1$ 之頂點 P_1 移到 $\Delta P_2Q_2R_2$ 之頂點 P_2 的位置時，發現如下的變化：

1. 其他頂點的變化：頂點 Q_1 移到頂點 Q_2 ，頂點 R_1 移到頂點 R_2 。
2. 三邊中點的變化： M_1 點移到 M_2 點， N_1 點移到 N_2 點， L_1 點移到 L_2 點。
3. 三角形重心變化：重心 G_1 移到重心 G_2 ，如圖 3-5-3-3 所示。

(三) 連接 $\overline{G_1Q_1}$ 與 $\overline{G_2Q_2}$ ，並設此兩線的交點為 S 點。我們使用 GSP 所提供的自訂工具之

操作功能，在 $\overline{P_1P_2}$ 上任取一點 P' ，過 P' 點作一正三角形 $P'Q'R'$ ，且其重心為 G' ，並

連接 $\overline{G'Q'}$ ，發現此直線恰好通過 S 點。所以，我們定義此 S 點是當 $\Delta P_1Q_1R_1$ 變換到

$\Delta P_2Q_2R_2$ 的位置時的一個不動點，如圖 3-5-3-4 所示。

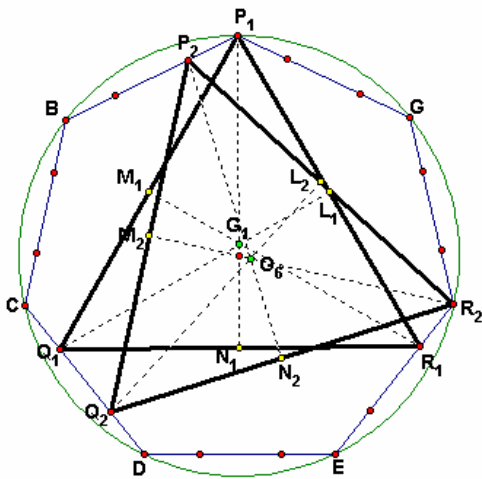


圖 3-5-3-3 兩個正三角形的位置

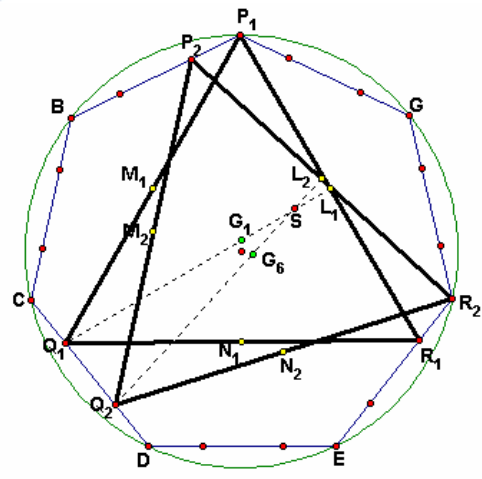


圖 3-5-3-4 $\overline{G_1Q_1}$ 與 $\overline{G_2Q_2}$ 相交於 S 點

(四) 進一步的觀察、歸納與猜想，發現

1. 當內接於正七邊形的邊上之正 ΔPQR 在邊上移動時，其重心的軌跡

為 $G_1 \rightarrow G_6 \rightarrow G_4 \rightarrow G_2 \rightarrow G_7 \rightarrow G_5 \rightarrow G_3 \rightarrow G_1 \rightarrow G_6 \rightarrow \dots$ 。

- 當正 $\triangle PQR$ 之 P 點由 A 點出發沿著五邊移動時，經 B, C, D, E ，回到 A 點時，則此正 $\triangle PQR$ 的重心也會沿著 $G_1 \rightarrow G_6 \rightarrow G_4 \rightarrow G_2 \rightarrow G_7 \rightarrow G_5 \rightarrow G_3 \rightarrow G_1 \rightarrow G_6 \rightarrow \dots$ 移動，繞經3周會回到 G_1 點，如下圖 3-5-3-5 所示。
- 當正 $\triangle PQR$ 之 P 點由 A 點出發沿著七邊移動時，經 B, C, D, E, F ，回到 A 點時，則此這正 $\triangle PQR$ 的三邊中點的軌跡圖形如下圖 3-5-3-6 所示。

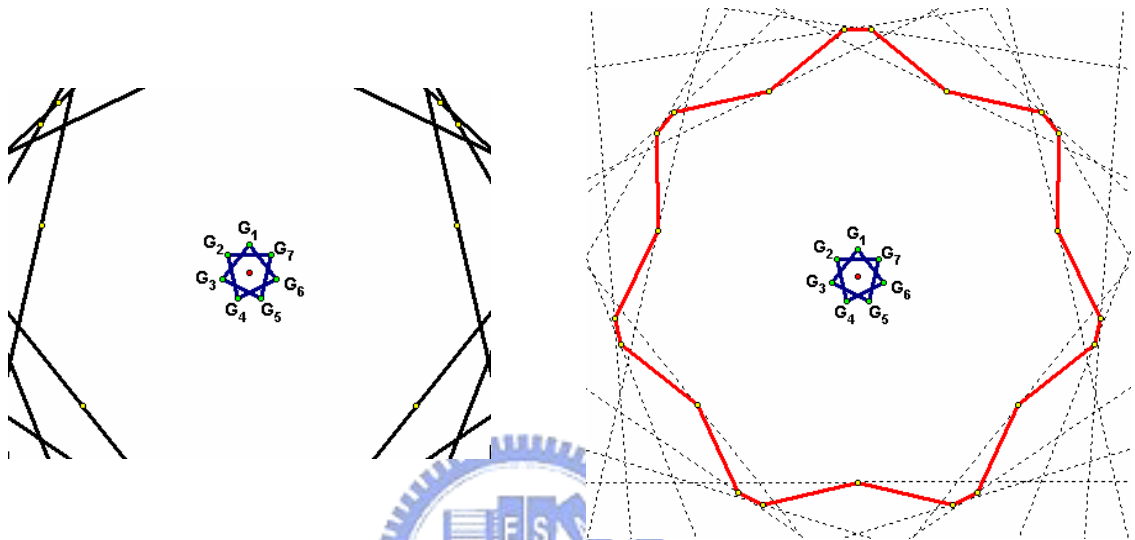


圖 3-5-3-5 重心的軌跡

圖 3-5-3-6 三邊中點的軌跡

接下來，我們進一步來探討內接於正七邊形的正三角形之邊長與此正七邊形的邊長之間的關係。如圖 3-5-3-7 所示， $\triangle PQR$ 即為內接於正七邊形的正三角形，其中一頂點恰為此正七邊形的一頂點。

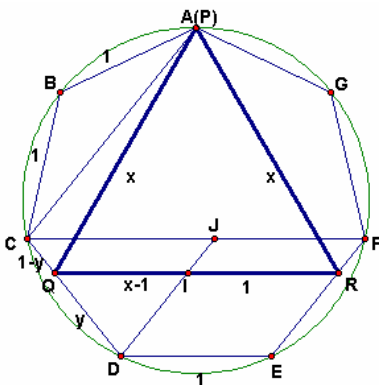


圖 3-5-3-7 利用餘弦定理求邊長

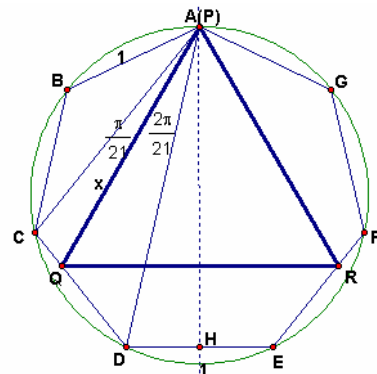


圖 3-5-3-8 利用面積公式求邊長

令此正七邊形的邊長為 1，而正三角形的邊長為 x ，如圖 3-5-3-7 所示，

並令 $\overline{DQ} = y$ ，過 C 點作 $\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ ，可得 $\overline{QI} = x - 1$ 。所以， $\overline{BF} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

我們利用面積概念來求得正三角形 PQR 的邊長，如圖 3-5-3-8 所示：在 $\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = \frac{\pi}{7}$ 且 $\angle CAH = \frac{3\pi}{14}$ ，可得 $\angle CAQ = \angle CAH - \angle QAH = \frac{3\pi}{14} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{21}$ ，且 $\angle QAD = \angle CAD - \angle CAQ = \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{21} = \frac{2\pi}{21}$ ，又 $\overline{AC} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ ， $\overline{AD} = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}$ ，由面積的等量關係知， $\triangle CAQ + \triangle QAD = \triangle CAD$ ，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \cos \frac{\pi}{7} \times x \times \sin \frac{\pi}{21} + \frac{1}{2} \times x \times (1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}) \times \sin \frac{2\pi}{21} \\ = \frac{1}{2} \times 2 \cos \frac{\pi}{7} \times (1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7}) \times \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

整理可得 $x \times \sin \frac{8\pi}{21} = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7}$ ，得其解為 $x = \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{8\pi}{21}}$ 。



3-5-4 正 $3n+2$ 邊形的邊上內接一正三角形的探索

在這個類型中我們先討論 $n=1$ 時的情況，即在一正五邊形的邊上構作一內接正三角形的作圖過程中，藉由 GSP 的可操作模擬實驗，來探究此內接正三角形在正五邊形的邊上移動時，其邊長的變化，以及其重心與各邊中點的軌跡圖形，希望從探討的過程中詳加觀察、歸納結論，進行猜想與推測，以期進一步推廣到一般情形。因此，我們先提出下面的一個預備性引理及一個問題來進行探討：

引理 1. 已知 M, N 為正五邊形 $ABCDE$ 的內部兩點，且滿足

$$\angle ABM = \angle BAM = \angle AEN = \angle EAN = 24^\circ, \text{ 則 } \triangle AMN \text{ 為正三角形。}$$

問題 2. 作一正 $\triangle PQR$ 內接於正五邊形 $ABCDE$ 的邊上，且其一頂點恰為此正五邊形的一頂點。

引理 1

已知 M, N 為正五邊形 $ABCDE$ 的內部兩點(如圖 3-5-4-1 所示)，且滿足

$$\angle ABM = \angle BAM = \angle AEN = \angle EAN = 24^\circ, \text{ 則 } \triangle AMN \text{ 為正三角形。}$$

證明：因為 $\angle BAM = \angle EAN = 24^\circ$ ，得 $\angle MAN = 60^\circ$ 。在 $\triangle ABM$ 與 $\triangle AEN$ 中，因為

$$\angle ABM = \angle BAM = \angle AEN = \angle EAN = 24^\circ \text{ 且 } \overline{AB} = \overline{AE}, \text{ 故 } \triangle ABM \cong \triangle AEN, \text{ 得}$$

$\overline{AM} = \overline{AN}$ ，又 $\angle MAN=60^\circ$ ，因此， $\triangle AMN$ 為正三角形。

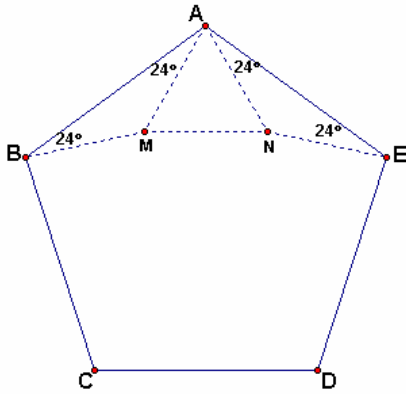


圖 3-5-4-1 M, N 為五邊形內部兩點

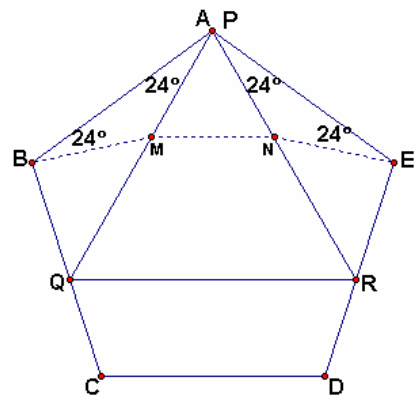


圖 3-5-4-2 過 M, N 的正三角形

問題 2

作一正 $\triangle PQR$ 內接於正五邊形 $ABCDE$ 的邊上，且其一頂點恰為此正五邊形的一頂點。

分析：假設 $\triangle PQR$ 即為所求，如圖 3-5-4-2 所示，可得 $\angle BAQ = \angle EAR = 24^\circ$ ，

分別在 \overline{AQ} ， \overline{AR} 各取一點 M ， N ，使得 $\angle ABM$ ， $\angle BAM$ ， $\angle AEN$ ， $\angle EAN$ 皆為 24° ，由引理 1，可知 $\triangle AMN$ 為正三角形。

作法：

1. 過 A 點作 \overline{CD} 的垂直線 \overline{AH} 與平行線 \overline{AK} 。
2. 分別以 A ， K ， L 為圓心， \overline{AM} 為半徑作三圓，設其一交點分別為 M ， N ，如圖 3-5-4-3 所示。
3. 分別連接 \overline{AM} ， \overline{AN} 交 \overline{BC} ， \overline{DE} 於 Q ， R 點。
4. 則 $\triangle PQR$ 即為所求。

證明：由作圖的過程知， $\angle QAH = \angle RAH = 30^\circ$ ，可得 $\angle QAR = 60^\circ$ ，且 $\angle BAQ = \angle EAR = 24^\circ$ 。

又在 $\triangle ABQ$ 與 $\triangle AER$ 中，因為 $\overline{AB} = \overline{AE}$ ， $\angle ABQ = \angle AER = 108^\circ$ ，

$\angle BAQ = \angle EAR = 24^\circ$ ，可知 $\triangle ABQ \cong \triangle AER$ 。進而可得 $\overline{AQ} = \overline{AR}$ ，又 $\angle QAR = 60^\circ$ ，

故 $\triangle PQR$ 為正三角形。

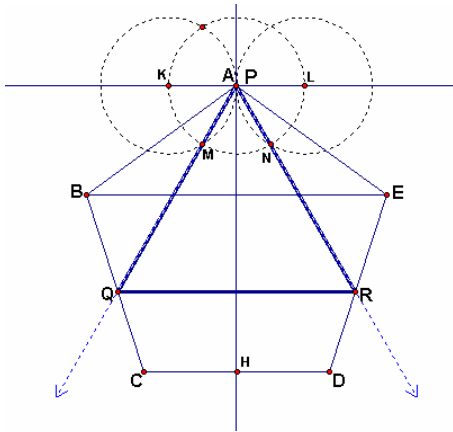


圖 3-5-4-3 過 A 點作正三角形

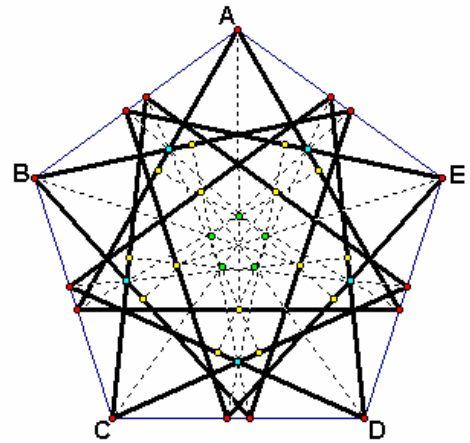


圖 3-5-4-4 五個正三角形的重心及各邊中點

透過前面的作圖法，分別以正五邊形的五個頂點為此正五邊形內接正三角形的其中一個頂點，可以構作五個內接正三角形，如圖 3-5-4-4 所示。在這五個正三角形中，綠色點 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 是重心，而黃色點 $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, L_3, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$ 是三邊的中點。透過 GSP 動態幾何軟體所提供的視覺形象思維，讓我們經由操作與模擬實驗，並觀察其中兩個正 $\triangle P_1Q_1R_1, \triangle P_2Q_2R_2$ 的重心及各邊中點的位置變化，歸納猜想出下列幾個要點：

(一) $\triangle P_1Q_1R_1$ 與 $\triangle P_2Q_2R_2$ 全等，進一步可知此五個正三角形均會全等。

(二) 當 $\triangle P_1Q_1R_1$ 之頂點 P_1 移到 $\triangle P_2Q_2R_2$ 之頂點 P_2 的位置時，發現如下的變化：

1. 其他頂點的變化：頂點 Q_1 移到頂點 Q_2 ，頂點 R_1 移到頂點 R_2 。
2. 三邊中點的變化： M_1 點移到 M_2 點， N_1 點移到 N_2 點， L_1 點移到 L_2 點。
3. 三角形重心變化：重心 G_1 移到重心 G_2 ，如圖 3-5-4-5。

(三) 連接 $\overline{G_1Q_1}$ 與 $\overline{G_2Q_2}$ ，並設此兩線的交點為 F 點。我們使用 GSP 所提供的自訂工具之

操作功能，在 $\overline{P_1P_2}$ 上任取一點 P' ，過 P' 點作一正三角形 $P'Q'R'$ ，且其重心為 G' ，並

連接 $\overline{G'Q'}$ ，發現此直線恰好通過 F 點。所以，我們定義此 F 點是當 $\triangle P_1Q_1R_1$ 變換到

$\triangle P_2Q_2R_2$ 的位置時的一個不動點，如圖 3-5-4-6 所示。

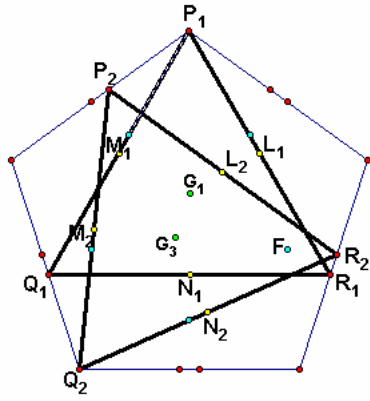


圖 3-5-4-5 兩個正三角形的位置

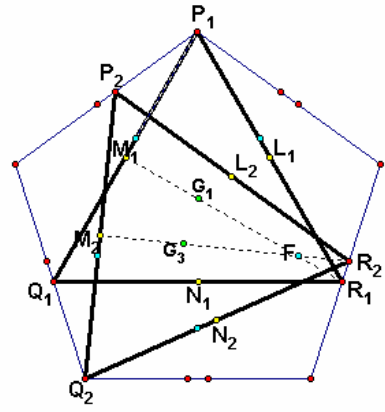


圖 3-5-4-6 $\overline{R_1G_1}$ 與 $\overline{R_2G_2}$ 相交於 F

(四) 進一步的觀察、歸納與猜想，發現

1. 當內接於正五形的邊上之正 $\triangle PQR$ 在邊上移動時，其重心的軌跡為 $G_1 \rightarrow G_3 \rightarrow G_5 \rightarrow G_2 \rightarrow G_4 \rightarrow G_1 \dots$ 。
2. 當正 $\triangle PQR$ 之 P 點由 A 點出發沿著五邊移動時，經 B, C, D, E ，回到 A 點時，則此正 $\triangle PQR$ 的重心也會沿著 $G_1 \rightarrow G_3 \rightarrow G_5 \rightarrow G_2 \rightarrow G_4 \rightarrow G_1 \dots$ 移動，繞經 3 周會回到 G_1 點，如下圖 3-5-4-7 所示。

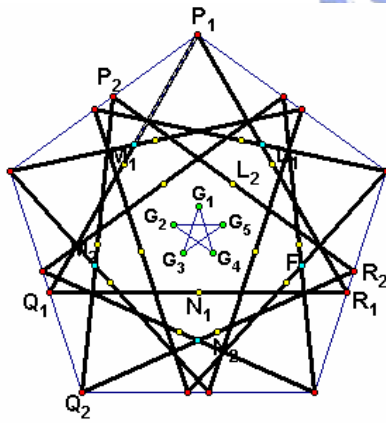


圖 3-5-4-7 重心的軌跡

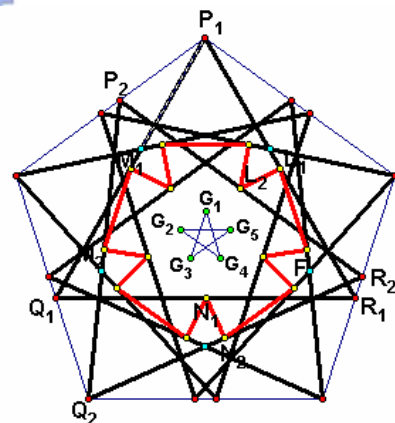


圖 3-5-4-8 三邊中點的軌跡

3. 當正 $\triangle PQR$ 之 P 點由 A 點出發沿著五邊移動時，經 B, C, D, E ，回到 A 點時，則此這正 $\triangle PQR$ 的三邊中點的軌跡圖形如下圖 3-5-4-8 所示。

接下來，我們進一步來探討內接於正五邊形的正三角形之邊長與此正五邊形的邊長之間的關係。如圖 3-5-4-9 所示， $\triangle PQR$ 即為內接於正五邊形的正三角形，其中一頂點恰為此正五邊形的一頂點。

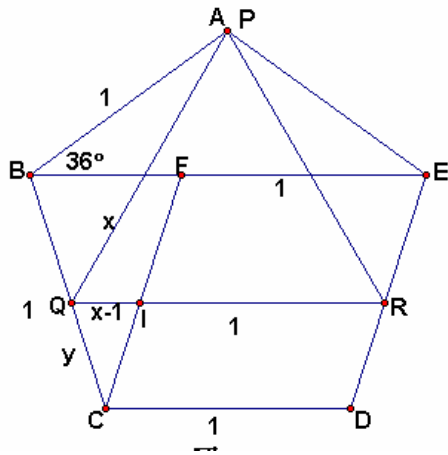


圖 3-5-4-9 利用餘弦定理求邊長

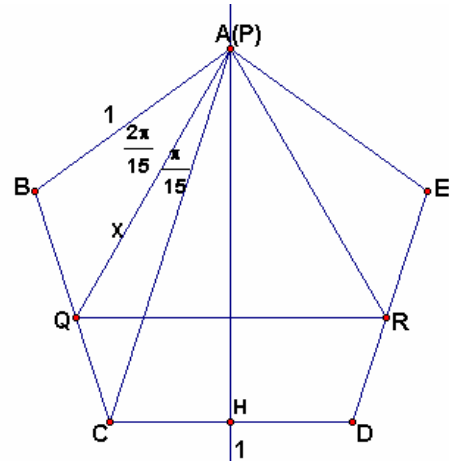


圖 3-5-4-10 利用面積公式求邊長

令正五邊形的邊長為 1，而正三角形的邊長為 x ，如圖 3-5-4-10 所示，並令 $\overline{CQ} = y$ ，

過 C 點作 $\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ ，得 $\overline{QI} = x-1$ ， $\overline{BF} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。因為 $\overline{QR} \parallel \overline{BE}$ ，可得

$$\frac{y}{1} = \frac{x-1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

進而可推得 $1-y = \frac{\sqrt{5}+3}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ 。

在 $\triangle ABQ$ 中，由餘弦定理知， $x^2 = 1 + (1-y)^2 - 2 \times 1 \times (1-y) \cos \frac{4\pi}{5}$

將 $1-y = \frac{\sqrt{5}+3}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ 代入，整理可得 $2x^2 - (5+3\sqrt{5})x + (5+3\sqrt{5}) = 0$

$$\text{解得 } x = \frac{5+3\sqrt{5} \pm \sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4} \text{ (加號不合), 且 } y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(x-1) = \frac{4+\sqrt{5}-\sqrt{15+6\sqrt{5}}}{2}.$$

當然我們也可以利用面積概念來求得正三角形 PQR 的邊長，如圖 3-5-4-10 所

示：在 $\triangle ABC$ 中，因為 $\angle BAC = \frac{\pi}{5}$ ， $\angle BAH = \frac{3\pi}{10}$ ，可得 $\angle BAQ = \angle BAH -$

$$\angle QAH = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{15}, \angle QAC = \angle BAC - \angle BAQ = \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} = \frac{\pi}{15}, \text{ 且 } \overline{AC} = 2 \cos \frac{\pi}{5},$$

又 $\triangle BAQ + \triangle QAC = \triangle BAC$ ，得

$$\frac{1}{2} \times 1 \times x \times \sin \frac{2\pi}{15} + \frac{1}{2} \times x \times (2 \cos \frac{\pi}{5}) \times \sin \frac{\pi}{15} = \frac{1}{2} \times 1 \times (2 \cos \frac{\pi}{5}) \times \sin \frac{\pi}{5},$$

$$\text{整理得 } x \times [\sin \frac{2\pi}{15} + 2 \cos \frac{\pi}{5} \times \sin \frac{\pi}{15}] = 2 \cos \frac{\pi}{5} \times \sin \frac{\pi}{5}, \text{ 解得 } x \text{ 值為 } x = \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{4\pi}{15}}.$$

其值與前面討論的 x 值為 $\frac{5+3\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$ 是一樣的。

由前面問題的探討知，當正 $\triangle PQR$ 之 P 點由 A 點出發沿著五邊移動時，經 B, C, D, E ，回到 A 點時，這正 $\triangle PQR$ 的重心也會沿著 $G_1 \rightarrow G_3 \rightarrow G_5 \rightarrow G_2 \rightarrow G_4 \rightarrow G_1 \cdots$ 的軌跡模式移動，且繞經 3 周會回到 G_1 點。透過模擬實驗、觀察發現它的軌跡有週期性，以下是其週期函數的討論內容：

(一) 因為對稱性的關係，所以，連接 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 五點會形成一正五邊形。過

G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 五點作一外接圓圓 O ，並圓 O 上任取一動點 P ，連接 \overline{OP} 交 $\overline{G_1G_3}$ 於 P' ，令圓半徑為 r ， $\overline{OP'} = x$ ，且 $\angle POG_1 = \theta$ ，如下圖 3-5-4-11 所示。

利用面積關係 $\triangle G_1OG_3 = \triangle G_1OP' + \triangle G_3OP'$ ，可得

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{5} - \theta \right), \text{ 化簡整理，得}$$

$$r \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = x \left[2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{5} \right) \right], \text{ 並得 } x \text{ 解為 } x = \frac{r \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{5} \right)}.$$

當 $0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{5}$ 時，得 $\cos \frac{2\pi}{5} \leq \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{5} \right) \leq 1$ 。因此， $x = \frac{r \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{5} \right)}$ 的最大值為 r ，

最小值為 $r \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ 。並且我們也構作出 x 對 θ 在區間 $0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{5}$ 的函數圖形，如圖 3-5-4-12 所示。

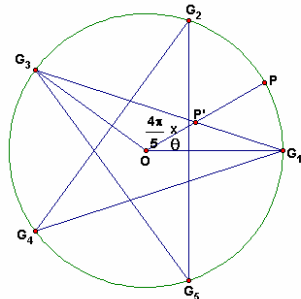


圖 3-5-4-11 P 在 G_1G_2 弧上

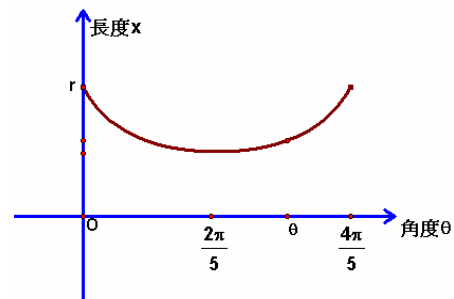


圖 3-5-4-12 x 對 θ 的函數圖形

(二) 同理，當 \overrightarrow{OP} 交 $\overline{G_3G_5}$ 於 P' ， $\overline{OP'} = x$ ，且 $\angle POG_1 = \theta$ ，如圖 3-5-4-13 所示，

其情形與(一)的討論是一樣的。所以，當 P 點在正五邊形 $G_1G_2G_3G_4G_5$ 的外接圓上移動時， $\overline{OP'} = x$ 值會隨著 θ 的改變呈現出週期的變化。接下來我們試著去找出這個

週期函數，首先在正五邊形 $G_1G_2G_3G_4G_5$ 的外接圓 O 上取一動點 P ，以 $\overline{OG_1}$ 為始邊，

\overline{OP} 為終邊，則有向角 $\angle G_1OP$ 為點 P 繞中心 O 的旋轉角度 θ_k ，令 $\theta_k = \theta + \frac{4k\pi}{5}$ ，且

$0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{5}$ ，則

$0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{5}$ ，則

1. 當 $k=0$ 時，即 $0 \leq \theta_0 \leq \frac{4\pi}{5}$ ，由(一)的討論結果可知，當 P 點在正五邊形 $G_1G_2G_3G_4G_5$ 的

外接圓上之有向角 $\angle G_1OP$ 為 θ_0 ，若 \overrightarrow{OP} 交 $\overline{G_1G_3}$ 於 P' ， P' 點滿足

$$\overline{OP'} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos(\theta - \frac{2\pi}{5})}$$

且當 $\theta = 0$ 或 $\frac{4\pi}{5}$ 時， x 有最大值為 R ； $\theta = \frac{2\pi}{5}$ 時， x 有最

小值為 $R \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ 。



2. 當 $k=1$ 時，即 $\frac{4\pi}{5} \leq \theta_1 \leq \frac{8\pi}{5}$ 時，若 \overrightarrow{OP} 交 $\overline{G_3G_5}$ 於 P' ，則 P' 點滿足

$$\overline{OP'} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos(\theta - \frac{2\pi}{5})}$$

且當 $\theta_1 = \frac{4\pi}{5}$ 或 $\frac{8\pi}{5}$ 時， x 有最大值為 R ；當 $\theta_1 = \frac{6\pi}{5}$ 時， x 有

最小值為 $R \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ 。

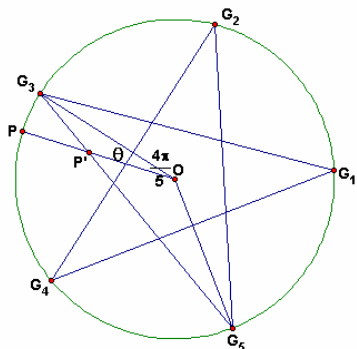


圖 3-5-4-13 P 在 G_1G_2 弧上

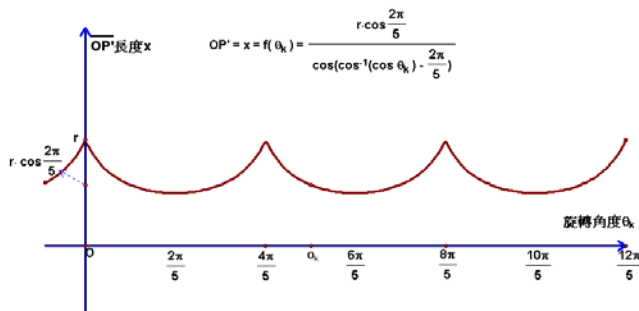


圖 3-5-4-14 x 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的函數圖形

由前面兩點的討論、歸納可得，當 $\angle G_1OP$ 為 θ_k 且 $0 + \frac{4k\pi}{5} \leq \theta_k \leq \frac{4\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5}$ 時，則 \overline{OP}

交五星形邊上一點 P' 滿足 $\overline{OP'} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos(\theta - \frac{2\pi}{5})}$ ，且當 $\theta_k = \frac{4k\pi}{5}$ 或 $\frac{4(k+1)\pi}{5}$ 時， x 有

最大值為 R ；當 $\theta_k = \frac{2\pi + 4k\pi}{5}$ 時， x 有最小值為 $R \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ 。又因為 $\theta_k = \theta + \frac{4k\pi}{5}$ ，可得

$5 \times \theta_k = 5 \times \theta + 4k\pi$ ，由反餘弦函數知，當 x 為實數時，若 $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$ ，則

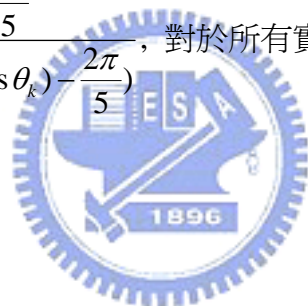
$0 \leq f(x) \leq \pi$ ，且 $f(x)$ 為一週期為 2π 的週期函數。再利用壓縮變換，當 x 為實數時，若

$g(x) = \frac{\cos^{-1}(\cos 1.25x)}{1.25}$ ， $0 \leq g(x) \leq \frac{4\pi}{5}$ ，且 $g(x)$ 為一週期為 $\frac{4\pi}{5}$ 的週期函數。又因為

$\theta_k = \theta + \frac{4k\pi}{5}$ 且 $0 \leq \theta \leq \frac{4\pi}{5}$ ，可得 $\theta = \cos^{-1}(\cos \theta_k)$ 。因此，可推得

$$\overline{OP'} = x = R \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos(\cos^{-1}(\cos \theta_k) - \frac{2\pi}{5})}$$

對於所有實數 θ_k ，其圖如 3-5-4-14 所示。



3-5-5 結語

經由前面的 3-5-2、3-5-3 及 3-5-4 的討論，可推得發現下面幾個的結論：

- 一、若 n 為3的倍數時，前面的研究討論知道此正三角形的中心會與正 n 邊形的中心重合，因此，當這個正三角形內接於正 n 邊形上時，其三邊所對應到的正 n 邊形的邊數會相等，即為 $\frac{n}{3}$ 個邊。
- 二、若 n 不為3的倍數時，雖然此正三角形的中心不與正 n 邊形的中心重合，但亦可推知當這個正三角形內接於正 n 邊形上時，其三邊所對應到的正 n 邊形的邊數會很相近，而且此邊數為 $\left[\frac{n}{3} \right]$ 個邊。
- 三、正三角形內接於正 n 邊形上的重心軌跡具有週期性。

由結論一、二可知，當這個正三角形內接於正 n 邊形上時，則此正三角形的每一邊

所對應到的正 n 邊形的整數邊數為 $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ 個。我們還可以進一步地探討，內接正三角形的邊長與正 n 邊形的外接圓之半徑的關係式。已知一正三角形內接於正 n 邊形的邊上，如圖 3-5-5-1 所示，由上面的討論結果知，正三角形的每一邊所對應到的正 n 邊形的整數邊數為 $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ 個，令其為 k 。

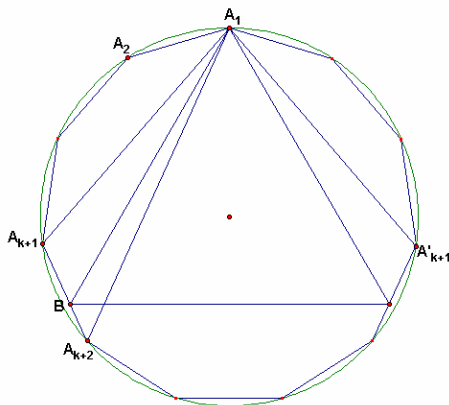


圖 3-5-5-1 每一邊對應到的邊數

因此，弦 $\overline{A_1A_{k+1}}$ 、 $\overline{A_1A'_{k+1}}$ 及 $\overline{A_1A_{k+2}}$ 所對應到的圓弧分別為 $\frac{2k\pi}{n}$ 、 $\frac{2k\pi}{n}$ 及 $\frac{2(k+1)\pi}{n}$ ，且 $\angle A_{k+1}A_1A_{k+2} = \frac{\pi}{n}$ ，可得 $\angle A_{k+1}A_1A'_{k+1} = (2\pi - \frac{2k\pi}{n} \times 2) \cdot \frac{1}{2} = \pi - \frac{2k\pi}{n}$ ，且 $\angle A_{k+1}A_1B = (\pi - \frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n}$ 。所以， $\angle BA_1A_{k+2} = \frac{\pi}{n} - (\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n}) = \frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}$ 。

設正 n 邊形的外接圓半徑為 R ，則 $\overline{A_1A_{k+1}}$ 及 $\overline{A_1A_{k+2}}$ 弦長分別為 $2R \cdot \sin \frac{k\pi}{n}$ 及 $2R \cdot \sin \frac{(k+1)\pi}{n}$ 。再由三角形的面積概念知， $\Delta A_{k+1}A_1A_{k+2} = \Delta A_{k+1}A_1B + \Delta BA_1A_{k+2}$ ，可得

$$\frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{k\pi}{n} \cdot 2R \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{k\pi}{n} \cdot x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n}) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2R \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \sin(\frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3})$$

化簡可得 $\left[\sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n}) + \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \sin(\frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}) \right] \cdot x$

$$= 2R \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

利用積化和差公式，化簡整理可得

$$\frac{1}{2} \left[\cos(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}) \right] \cdot x = 2R \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

再利用和差化積

公式，整理得 $\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot x = 2R \sin\frac{k\pi}{n} \cdot \sin\frac{(k+1)\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n}$ 。因此，解得

$$x = \frac{2R \cdot \sin\frac{k\pi}{n} \cdot \sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$$

我們分別以 $n = 4, 5, 6, 7$ 之值代入 $x = \frac{2R \cdot \sin\frac{k\pi}{n} \cdot \sin\frac{(k+1)\pi}{n}}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{3}\right)}$ ，並討論當 n 趨近到無窮大時，其所對應到的 x 值與前面 3-5-2、3-5-3、3-5-4 節裡所討論得到的值是否一致？

1. 當 $n = 4$ 時，則 k 值為 $\left[\frac{n}{3}\right] = 1$ ，可得 $x = \frac{2R \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{2\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$ ，此與前 3-5-3 的結果相符。

2. 當 $n = 5$ 時，則 k 值為 $\left[\frac{n}{3}\right] = 1$ ，可得 $x = \frac{2R \cdot \sin\frac{\pi}{5} \cdot \sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{15}}$ ，此與前 3-5-4 的結果相符。

3. 當 $n = 6$ 時，則 k 值為 $\left[\frac{n}{3}\right] = 2$ ，可得 $x = \frac{2R \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{3\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{6}}$ ，此與前 3-5-2 的結果相符。

4. 當 $n = 7$ 時，則 k 值為 $\left[\frac{n}{3}\right] = 2$ ，可得 $x = \frac{2R \cdot \sin\frac{2\pi}{7} \cdot \sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{8\pi}{21}}$ ，此與前 3-5-2 的結果相符。

5. 當 n 趨近於 ∞ 時，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n} = \frac{1}{3}$ ，同理， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{n} = \frac{1}{3}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{n} = \frac{2}{3}$ ，可得 x

值會趨近於 $\frac{2R \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}R$ ，即為圓內接正三角形的邊長。

接下來，我們分別針對 $n = 4, 5, 7, 8, 10, 11$ 之值的情況，歸納整理正三角形內接於正 n 邊形之邊上的重心軌跡：

1. 正三角形內接於正方形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-2 所示：

因為對稱性的關係，這正方形的 4 個頂點共圓，可知這 4 個重心也會共圓。設 r 為此圓的半徑， $0 + \frac{2k\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{2\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}$ ，利用面積關係知， $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_1OB + \Delta BOA_2$ ，得

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{2\pi}{4} - \theta_1). \text{化簡整理，得}$$

$$r \cdot \sin \frac{2\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\theta_1 - \frac{\pi}{4}) \cdot x. \text{ 並解得 } x = \frac{r \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\cos(\theta_1 - \frac{\pi}{4})}. \text{ 其中，}$$

$\theta_1 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{4}{2}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{2\pi}{4}$ 是一週期為 $\frac{2\pi}{4}$ 且值域為 $(0, \frac{2\pi}{4})$ 的週期函數。

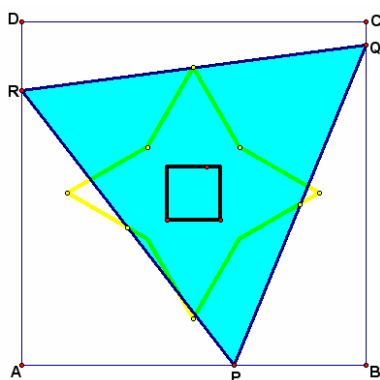


圖 3-5-5-2 正方形內的重心軌跡

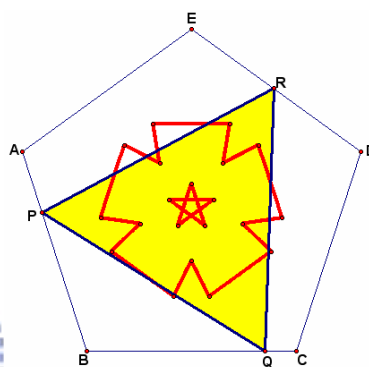


圖 3-5-5-3 正五邊形內的重心軌跡

2. 正三角形內接於正五邊形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-3 所示：

因為對稱性的關係，這正五邊形的 5 個頂點共圓，可知這 5 個重心也會共圓。設 r 為此圓的半徑， $0 + \frac{4k\pi}{5} \leq \theta_2 \leq \frac{4\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5}$ ，利用面積關係知， $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_1OB + \Delta BOA_2$ ，

$$\text{得 } \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{4\pi}{5} - \theta_2). \text{ 化簡整理，得}$$

$$r \cdot \sin \frac{4\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cdot \cos(\theta_2 - \frac{2\pi}{5}) \cdot x. \text{ 並解得 } x = \frac{r \cdot \sin \frac{2\pi}{5}}{\cos(\theta_2 - \frac{2\pi}{5})}, \text{ 其中}$$

$\theta_2 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{5}{4}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{4\pi}{5}$ 是一週期為 $\frac{4\pi}{5}$ 且值域為 $(0, \frac{4\pi}{5})$ 的週期函數。

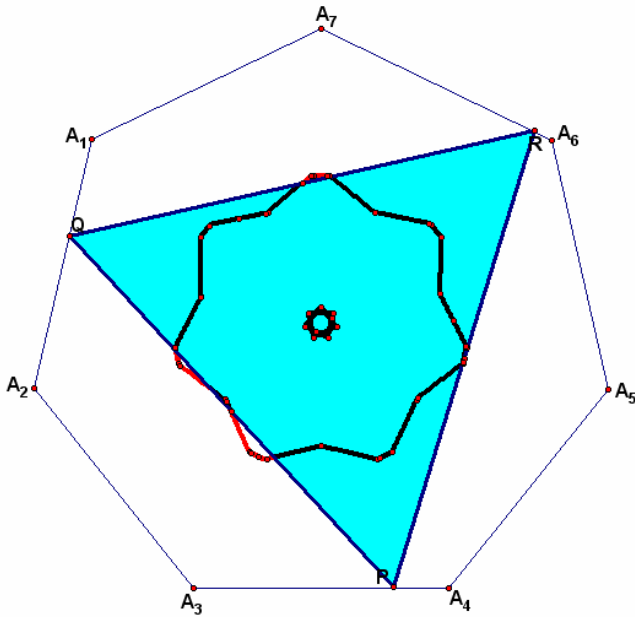


圖 3-5-5-4 正七邊形內的重心軌跡(1)

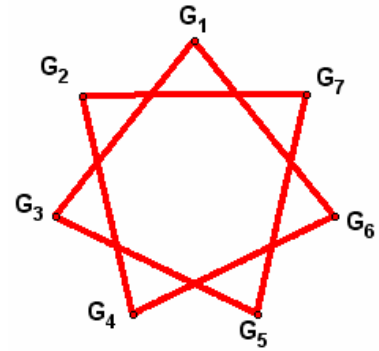


圖 3-5-5-5 正七邊形內的重心軌跡(2)

3. 正三角形內接於正七邊形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-4、5 所示：

因為對稱性的關係，這正七邊形的 7 個頂點共圓，可知這 7 個重心也會共圓。設 r 為

此圓的半徑， $0 + \frac{4k\pi}{7} \leq \theta_3 \leq \frac{4\pi}{7} + \frac{4k\pi}{7}$ ，利用面積關係知， $\Delta A_1 O A_2 = \Delta A_1 O B + \Delta B O A_2$ ，

得 $\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_3 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{4\pi}{7} - \theta_3)$ 。化簡整理，得

$$r \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos(\theta_3 - \frac{2\pi}{7}) \cdot x. \text{ 並解得 } x = \frac{r \cdot \sin \frac{2\pi}{7}}{\cos(\theta_3 - \frac{2\pi}{7})}, \text{ 其中}$$

$\theta_3 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{7}{4}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{4\pi}{7}$ 是一週期為 $\frac{4\pi}{7}$ 且值域為 $(0, \frac{4\pi}{7})$ 的週期函數。

4. 正三角形內接於正八邊形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-6 所示：

因為對稱性的關係，這正八邊形的 8 個頂點共圓，可知這 8 個重心也會共圓。設 r 為

此圓的半徑， $0 + \frac{6k\pi}{8} \leq \theta_4 \leq \frac{6\pi}{8} + \frac{6k\pi}{8}$ ，利用面積關係知，為

$$\Delta A_1 O A_2 = \Delta A_1 O B + \Delta B O A_2, \text{ 得 } \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{6\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_4 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{6\pi}{8} - \theta_4).$$

$$\text{化簡整理，} r \cdot \sin \frac{6\pi}{8} = 2 \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \cos(\theta_4 - \frac{3\pi}{8}) \cdot x. \text{ 並解得 } x = \frac{r \cdot \sin \frac{3\pi}{8}}{\cos(\theta_4 - \frac{3\pi}{8})}, \text{ 其中}$$

$\theta_4 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{8}{6}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{6\pi}{8}$ 是一週期為 $\frac{6\pi}{8}$ 且值域為 $(0, \frac{6\pi}{8})$ 的週期函數。

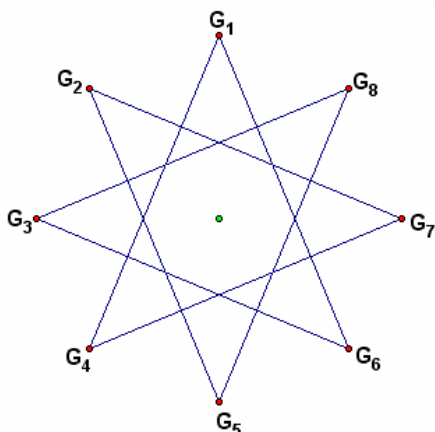


圖 3-5-5-6 正八邊形內的重心軌跡

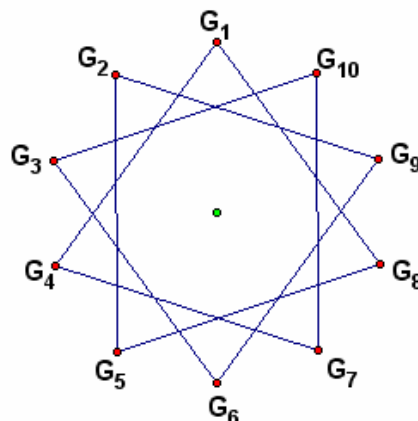


圖 3-5-5-7 正十邊形內的重心軌跡

5. 正三角形內接於正十邊形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-7 所示：

因為對稱性的關係，這正十邊形的 10 個頂點共圓，可知這 10 個重心也會共圓。設 r

為此圓的半徑， $0 + \frac{6k\pi}{10} \leq \theta_5 \leq \frac{6\pi}{10} + \frac{6k\pi}{10}$ ，利用面積關係知，為

$$\Delta A_1OA_2 = \Delta A_1OB + \Delta BOA_2, \text{ 得 } \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{6\pi}{10} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_5 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{6\pi}{10} - \theta_5).$$

化簡整理，得 $r \cdot \sin \frac{6\pi}{10} = 2 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos(\theta_5 - \frac{3\pi}{10}) \cdot x$ 。並解得 $x = \frac{r \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\cos(\theta_5 - \frac{3\pi}{10})}$ ，其中

$\theta_5 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{10}{6}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{6\pi}{10}$ 是一週期為 $\frac{6\pi}{10}$ 且值域為 $(0, \frac{6\pi}{10})$ 的週期函數。

6. 正三角形內接於正十一邊形上的重心軌跡，如圖 3-5-5-8 所示：

因為對稱性的關係，這正十一邊形的 11 個頂點共圓，可知這 11 個重心也會共圓。

設 r 為此圓的半徑， $0 + \frac{8k\pi}{11} \leq \theta_6 \leq \frac{8\pi}{11} + \frac{8k\pi}{11}$ ，利用面積關係知，

$$\Delta A_1OA_2 = \Delta A_1OB + \Delta BOA_2, \text{ 得 } \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{8\pi}{11} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_6 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{8\pi}{11} - \theta_6).$$

化簡整理， $r \cdot \sin \frac{8\pi}{11} = 2 \sin \frac{4\pi}{11} \cdot \cos(\theta_6 - \frac{4\pi}{11}) \cdot x$ 。並解得 $x = \frac{r \cdot \sin \frac{4\pi}{11}}{\cos(\theta_6 - \frac{4\pi}{11})}$ ，其中

$\theta_6 = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{11}{8}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{8\pi}{11}$ 是一週期為 $\frac{8\pi}{11}$ 且值域為 $(0, \frac{8\pi}{11})$ 的週期函數。

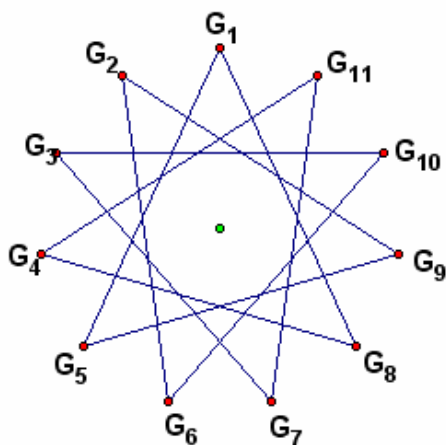


圖 3-5-5-8 正十一邊形內的重心軌跡

7. 歸納整理出一般式：

因為對稱性的關係，這正 n 邊形的 n 個頂點共圓，可知這 n 個重心也會共圓。設 r 為此圓的半徑，並設 $\text{round}(\frac{n}{3})$ 之值為 λ ，其中， $\text{round}(x)$ 的意義為用四捨五入法取 x 值的近似值。當 $0 + \frac{2\lambda k\pi}{n} \leq \theta_n \leq \frac{2\lambda\pi}{n} + \frac{2\lambda k\pi}{n}$ 時，利用面積關係知，

$$\Delta A_1 O A_2 = \Delta A_1 O B + \Delta B O A_2, \text{ 得 } \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin \theta_n + \frac{1}{2} \cdot r \cdot x \cdot \sin(\frac{2\lambda\pi}{n} - \theta_n).$$

化簡整理， $r \cdot \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{n} \cdot \cos(\theta_n - \frac{\lambda\pi}{n}) \cdot x$ 。並解得 $x = \frac{r \cdot \sin \frac{\lambda\pi}{n}}{\cos(\theta_n - \frac{\lambda\pi}{n})}$ ，其中

$\theta_n = \left[\frac{1}{\pi} \cdot (\tan^{-1}(\tan(\frac{n}{2\lambda}x - \frac{\pi}{2})) + \frac{1}{2}) \right] \times \frac{2\lambda\pi}{n}$ 是一週期為 $\frac{2\lambda\pi}{n}$ 且值域為 $(0, \frac{2\lambda\pi}{n})$ 的週期函數。

從這樣一道「尺規作圖」的數學問題出發，在 GSP 的動態模擬環境來探究其軌跡圖形等問題，讓學生圍繞這樣的問題，能夠自主探究、學習是值得在高中數學課程中引入的一種新的學習方式。這樣以學生為本位的學習方式是有助於學生初步了解數學概念和結論的產生，初步理解直觀和嚴謹的關係，初步嘗試數學研究的過程，體驗創造的激情，建立嚴謹的科學態度和不怕困難的科學精神；有助於培養學生勇於質疑和善於反思的習慣，培養學生發現、提出、解決數學問題的能力；有助於發展學生的創新意識和實踐能力（普通高中數學課程標準，2003）。

3-6 一道「國中基測」數學問題的疑義與探究---以類比實驗為探究模組

這是今年(2006年)第一次「國中基測」數學第33題的題目敘述：

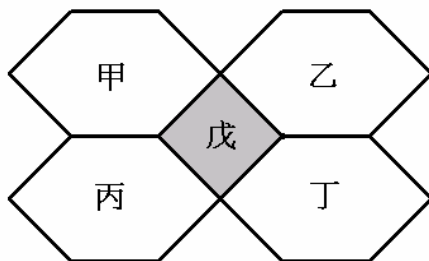


圖 3-6-0-1 四個六邊形一個正方形

如圖 3-6-0-1，甲、乙、丙、丁為四個全等的六邊形，且緊密地圍著灰色正方形戊。

若甲、乙、丙、丁、戊的每一邊長均為 1，則戊面積與甲面積的比值為何？ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 。

這個題意敘述並不妥善，我們透過數學幾何軟體 GSP 進行動態模擬觀察發現，如果先作正方形戊，再以戊的邊長畫出等邊六邊形甲，並分別以戊的兩條對角線為對稱軸將甲作鏡射，得到四個全等的等邊六角形甲、乙、丙、丁，所得圖形與題意相符，但可以明顯發現等邊六角形甲的形狀及面積並不固定，所以，甲與戊的比值也不固定，由此可知題意缺乏足夠條件來進行解題。

雖然此題是一道有瑕疵的數學問題，但也留有一些值得深入探究的空間，因此，我們針對不完善的題意條件來進行一些延伸性問題的探索，藉由問題的提出、分析，以及假設與猜想，在數學軟體環境中的動態模擬、操作實驗等特性之下，來協助我們對問題的探究、思考，以及問題的解決，並能體驗數學探索的研究過程，進而發展對數學探究的創造力與實踐力。數學教育家波利亞曾說：「要把普通性的思考方法教給學生，並善於引導學生獨立地在思考中發現問題的解決」。因此，讓學生圍繞某個數學問題，自主探究、學習的過程是需要的，而這個過程包括：了解問題，分析條件與事實，提出有意義的數學問題，進而猜測、探求適當的數學結論或規律，並給出推論證明。

我想這會是一個有潛力、有創意的教學與學習兼具的方法，它不但可以幫助教師在教學過程中對教學素材的設計與安排有深化的效果，而且也能夠讓學生初步嘗試數學研究的過程，並有助於培養學生發現、提出、解決數學問題的能力，因此，我們從這次基測數學第 33 題的疑義出發，將不完善題意分成幾個情況進行模擬實驗性的探究。以下是我們將探究的幾個情況：

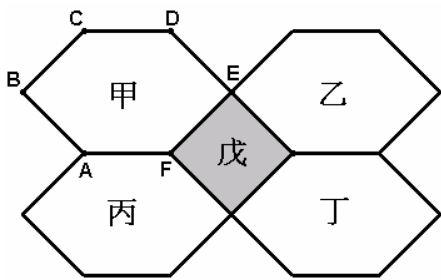


圖 3-6-0-2 四個六邊形有共同邊

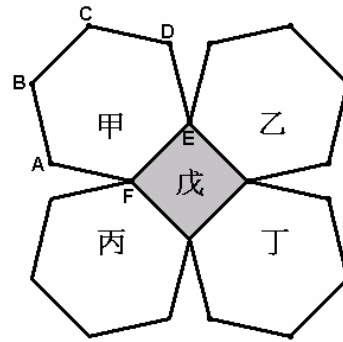


圖 3-6-0-3 四個六邊形無共同邊

如圖 3-6-0-2，甲、乙、丙、丁為四個全等的凸六邊形，且緊密地圍著灰色正方形戊，即甲、乙、丙、丁都與正方形戊有一共同邊。

情況 1：甲與丙有一共同邊 \overline{AF} (即 $\angle AFE = 150^\circ$)，且 \overline{CD} 與 \overline{AF} 平行。

情況 2：甲與丙有一共同邊 \overline{AF} (即 $\angle AFE = 150^\circ$)，但 \overline{CD} 與 \overline{AF} 不平行。

情況 3：甲、乙、丙、丁均與正方形戊有一共同邊，而彼此都沒有重疊的邊或區域，如圖 3-6-0-3 所示。



3-6-1 情況 1 的分析與探究

當六邊形甲與丙有一共同邊 \overline{AF} (即 $\angle AFE = 150^\circ$)，且 \overline{CD} 與 \overline{AF} 平行，又 $\overline{CD} = \overline{AF}$ ，

所以，四邊形 $CAFD$ 是一平行四邊形，得 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，進而可得三角形 ABC 與三角形 DEF 全等，故 $\angle ABC = \angle DEF$ ，如圖 3-6-1-1 所示。因此，在六邊形甲與正方形丙有一共同邊 \overline{AF} ，且 \overline{CD} 與 \overline{AF} 平行時，只要改變 $\angle DEF$ 的大小，就可以調整六邊形甲的大小，也就是說六邊形甲的面積與 $\angle DEF$ 之間存在一種函數的對應關係。

我們藉由動態幾何軟體 GSP 設計一個可實驗觀察的動態模擬環境，如圖 3-6-1-2 所示，當移動 D 點改變 $\angle DEF$ 的大小時，來觀察六邊形甲與正方形戊的面積比值的變化，以及四個凸六邊形甲、乙、丙、丁的圖形變化與存在性。經過實驗觀察發現，可得到以下的結果：

1. 當移動 D 點時，六邊形甲與正方形戊的面積比值介於 1.41 與 2.55 之間。

2. 若六邊形甲、乙、丙、丁的圖形存在且兩兩不重疊，則 $\angle DEF$ 的度數要介於45度與135度之間，而當 $\angle DEF$ 等於45度，則六邊形甲的圖形會變為四邊形。

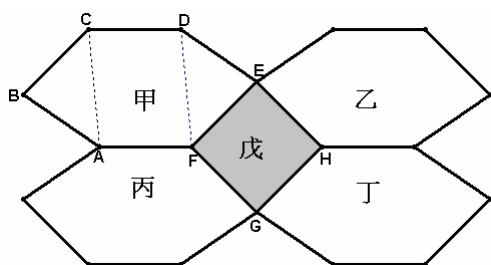


圖 3-6-1-1 三角形 ABC 與 DEF 全等

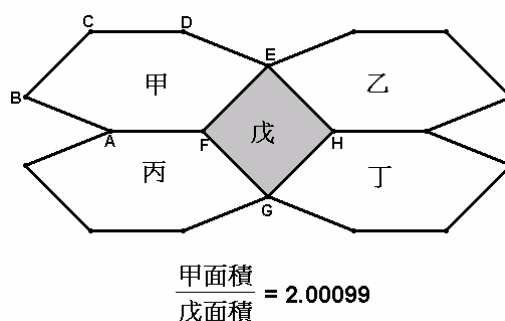


圖 3-6-1-2 面積比值的變化

經由動態幾何軟體環境的實驗與探究後，接下來我們再作推理論證上面的觀察結果是正確的：首先設 $\angle DEF = \alpha$ ，且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ，故 $\angle DFE = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ ， $\angle AFD = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ 。可得

$\overline{DF} = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ 。而六邊形甲面積為兩個三角形 ABC ， DEF ，還有平行四邊形

$CAFD$ 的面積和，所以，面積 $f(\alpha)$ 為 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha \times 2 + 1 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$

$$= \sin \alpha - [\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \cos \frac{\pi}{4}] = \sin \alpha - [\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sin(\alpha - \frac{\pi}{8}) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此，甲與戊的面積比值 $f(\alpha) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sin(\alpha - \frac{\pi}{8}) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，其中

$$\frac{\pi}{8} < \alpha - \frac{\pi}{8} < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} < \sin(\alpha - \frac{\pi}{8}) \leq 1. \text{ 因此，當 } \sin(\alpha - \frac{\pi}{8}) = 1 \text{ 時，即 } \alpha = \frac{5\pi}{8} \text{ 時，} f(\alpha)$$

有最大值為 $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。而 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 時， $f(\alpha)$ 之值為 $\sqrt{2}$ 。故當 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ 時， $f(\alpha)$ 的

域為 $\sqrt{2} < f(\alpha) \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。此比值的範圍與在 $G.S.P.$ 環境中所觀察得到的結果是

一致的。

經由上述的討論，我們可以更確認在動態幾何軟體 GSP 的實驗模擬環境中所觀察與發現的結果是正確的，而且透過這些觀察資訊而進一步的假設與猜想，可以作為推理論證的一個開頭，甚至得到一個有價值的研究結論。有了這個實驗結果與推理結論的支持，使我們有強烈的信心與好奇心想去進一步探究情況 2 的延伸問題。

3-6-2 情況 2 的分析與探究

如果六邊形甲與丙有一共同邊 \overline{AF} (即 $\angle AFE = 150^\circ$)，但 \overline{CD} 與 \overline{AF} 不平行，則除了移動 D 點可以改變六邊形甲的形狀外，移動 C 點也可以調整六邊形甲的形狀，因此，在這個情況下，凸六邊形甲的面積，會隨著 $\angle DEF$ 與 $\angle BCD$ 的變化而改變，也就是說甲與戊的面積比值分別與 $\angle DEF$ 及 $\angle BCD$ 的度數之間存在一種對應關係。

在這個情況下我們會利用到幾個預備性引理，如下：

引理一：四邊形 $ABCD$ ，設 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\overline{CD} = c$ ， $\overline{DA} = d$ ，且 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，

$\angle A + \angle C = 2\theta$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \theta}.$$

引理二：任意四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \theta}$ ，其中

$s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ， $\angle A + \angle C = 2\theta$ ，則當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時， $ABCD$ 的最大面積為

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

即當四邊長固定的四邊形，以圓內接四邊形的面積最大。

引理三：四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \theta}$ ，若當 $d = 0$ (即 A 、 D 兩點重合) 時，則可得三角形 ABC 的面積為

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

引理四：已知四邊形的四邊長分別為 a ， a ， a ， b ，其中 $0 < b < 3a$ ，則當其四頂點共圓時，其面積最大。

我們在幾何軟體 GSP 的動態模擬環境中，發現當移動 D 點改變 $\angle DEF$ 的大小時， \overline{AD} 長度會隨著 $\angle DEF$ 的變化而改變，如圖 3-6-2-1 所示。我們利用餘弦定理可推得 $\overline{AD} = \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ ，其中， $\angle DEF = \alpha$ 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ，因此，當 $\angle DEF$ 由 $\frac{\pi}{4}$ 調整到 $\frac{3\pi}{4}$ 時，則 \overline{AD} 長度會由 1 變化至 $\sqrt{2} + 1$ ，又餘弦函數 $\cos \alpha$ 在 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ 的範

圍內，是一對一函數，所以，移動 D 點時， \overline{AD} 長度會隨著 $\angle DEF$ 的大小變化而呈現一對一的關係，如圖 3-6-2-2 所示。

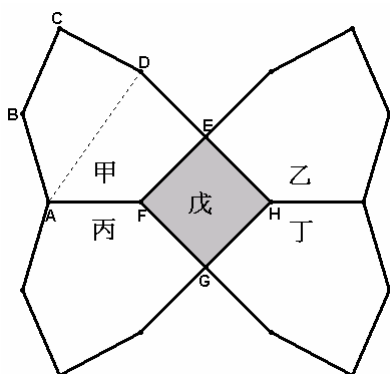


圖 3-6-2-1 \overline{AD} 隨 $\angle DEF$ 的改變而變

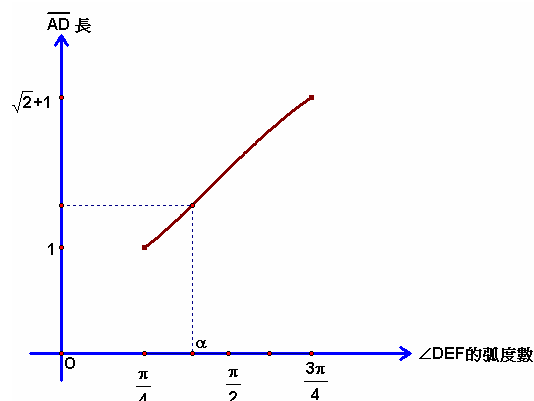


圖 3-6-2-2 \overline{AD} 對 $\angle DEF$ 的函數圖形

又每移動 D 點時， \overline{AD} 左側的四邊形 $ABCD$ 之面積會隨著 $\angle BCD$ 的大小變化而改變，由引理二知，四邊形 $ABCD$ 的最大面積產生於 A, B, C, D 四點共圓，又 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ ，且 $1 < \overline{AD} \leq \sqrt{2} + 1$ ，再由引理四知，會存在一圓通過最大面積的四邊形 $ABCD$ 之四個頂點，如圖 3-3-8 所示，所以，只要能找出四邊形 $ADEF$ 的最大面積就能確定六邊形甲的最大面積，而由引理三知，四邊形 $ADEF$ 的面積為三角形 ADE 與 AEF 的面積和

$$\sqrt{\frac{(t + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1)(t + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)(t + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} - t)}{16}} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

其中 $t = \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

令 $f(t) = (t + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1)(t + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)(t + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2})$

$= -t^4 + 2(3 + \sqrt{2})t^2 - (3 + 2\sqrt{2})$. 可得 $f(t)$ 的導函數為 $f'(t) = -4t^3 + 4(3 + \sqrt{2})t$. 令 $f'(t) = 0$,

得 $t = \pm\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ 及 0, 又 $1 < t \leq \sqrt{2} + 1$, 故 $t = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

此時， $t = \sqrt{3 + \sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ 的充要條件是 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{8}) = 0$, 即

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$. 故當 $\overline{AD} = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ 時，四邊形 $ADEF$ 的最大面積為 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

另一方面，四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\sqrt{\frac{(t+1)^3(3-t)}{16} - t \cdot \cos^2\left(\frac{\angle ABC + \angle ADC}{2}\right)}$,

其中 $t = \sqrt{3+\sqrt{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. 可得四邊形 $ABCD$ 的面積會小於或等於 $\sqrt{\frac{(t+1)^3(3-t)}{16}}$, 又當 $t=2$ 時, $\sqrt{\frac{(t+1)^3(3-t)}{16}}$ 有極大值為 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 所以, $ABCD$ 的面積小於或等於 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 而等號成立的充要條件是 A, B, C, D 四點共圓且 $\overline{AD} = 2$, 但

四邊形 $ADEF$ 的最大面積是發生於 $\overline{AD} = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ 時, 由此可知, 若六邊形甲的面積有最大值時, 則這個最大面積其實並不等於四邊形 $ABCD$ 與 $ADEF$ 的最大面積之和。

因此, 我們將在下面討論甲與戊的面積比之最大值: 設甲與戊的面積比之最大值为 r , 又甲面積等於 $ABCD$ 與 $ADEF$ 的面積之和, 得

$$r \leq \frac{1}{4}[\sqrt{-t^4+6t^2+8t+3} + \sqrt{-t^4+2(3+\sqrt{2})t^2-(3+2\sqrt{2})}] + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{令 } g(t) = \sqrt{-t^4+6t^2+8t+3} + \sqrt{-t^4+2(3+\sqrt{2})t^2-(3+2\sqrt{2})}.$$

$$\text{則 } g(t) \text{ 的導函數為 } g'(t) = \frac{-2t^3+6t+4}{\sqrt{-t^4+6t^2+8t+3}} + \frac{-2t^3+2(3+\sqrt{2})t}{\sqrt{-t^4+2(3+\sqrt{2})t^2-(3+2\sqrt{2})}}.$$

可得 $g'(t) = 0$ 的實根為 $\frac{1}{6}\lambda + \frac{8}{3\lambda} + \frac{1}{3}$, 其中 $\lambda = \sqrt[3]{152+108\sqrt{2}+12\sqrt{294+228\sqrt{2}}}$.

即當 $\overline{AD} = \frac{1}{6}\lambda + \frac{8}{3\lambda} + \frac{1}{3}$ (其近似值為 2.056839) 時, 甲與戊的面積比之最大值的近似值約為 2.57389.

所以, 當 \overline{AD} 之長度由 1 至 $\sqrt{2}+1$ 時, 則甲與戊的面積比之值會由 1.41421 至 2.57389 作變化, 且當 $\overline{AD} = 2.056839$ 時, 面積比之值有最大值為 2.57389, 如圖 3-6-2-3 所示。而面積比之值為 1.41421 時, 即 $\overline{AD} = 1$, 此時甲圖形並不是一個角形, 如圖 3-6-2-4 所示, 故甲與戊的面積比之值的最小值並不存在。

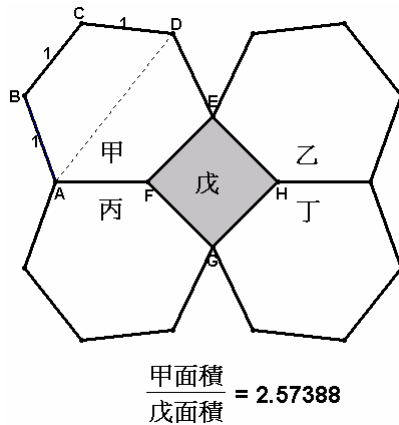


圖 3-6-2-3 面積比值有最大值

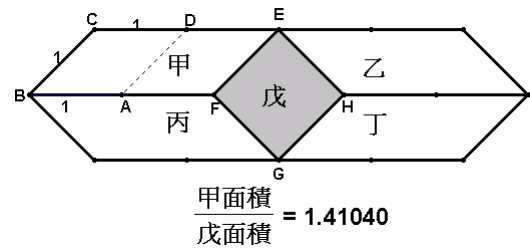


圖 3-6-2-4 面積比值的最小值不存在

雖然在 GSP 的動態模擬環境中，無法準確得到產生最大面積比值的位置，但不可否認的是在實驗操作的過程中所得到的一些數據與現象，對我們在推理論證的過程的確給了一個很好的思考方向與求證信心。我們把論證過程所得到的結論，列於下面：

1. 當移動 D 點時， \overline{AD} 之長度會 1 與 $\sqrt{2}+1$ 之間，且與 $\angle DEF$ 的大小有一一對應的函數

關係，其函數關係式為 $\overline{AD} = \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ ，其中 $\angle DEF = \alpha$ 且

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}.$$

2. 當調整 $\angle BCD$ 與 $\angle DEF$ 的大小時，若甲與戊的面積比值為 r ，則

$$r \leq \frac{1}{4} [\sqrt{-t^4 + 6t^2 + 8t + 3} + \sqrt{-t^4 + 2(3 + \sqrt{2})t^2 - (3 + 2\sqrt{2})}] + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

其中 $t = \sqrt{3 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})}$ 且 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ 。若 $1 < t \leq \sqrt{2} + 1$ ，則

$\sqrt{2} < r \leq 2.57389$ ，且當 $t = 2.056839$ 時，甲與戊的面積比值 r 有最大值為 2.57389。

在情況 1 與 2 中，六角形甲與丙，乙與丁分別有一共同邊，如果我們將這個共同邊的條件刪去，來討論這四個六角形都與正方形戊有一共同邊，而彼此都沒有重疊的邊或區域，此時六角形甲與正方形戊的面積比之最大值為何？其探究與推論的過程中，我們將在下面的情況 3 作說明。

3-6-3 情況 3 的分析與探究

這個情形中的條件是四個全等六邊形甲、乙、丙、丁均與正方形戊有一共同邊，而

彼此都沒有重疊的邊或區域，如圖 3-6-3-1 所示。

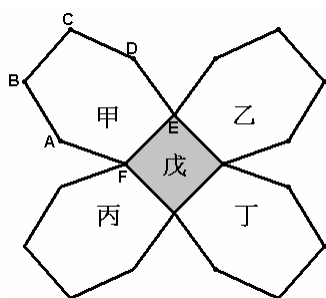


圖 3-6-3-1 彼此都沒有重疊

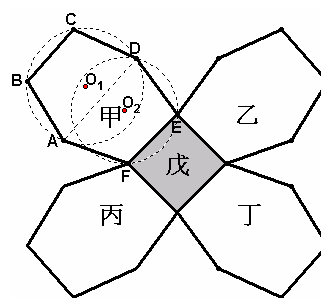


圖 3-6-3-2 作外接圓 O_1, O_2

在六邊形甲的六個頂點中，可發現 E 、 F 為兩定點，若要調整六邊形甲的形狀大小，則要移動 A 、 C 、 D 三點的位置，也就是說甲與戊的面積比值分別與 $\angle AFE$ 、 $\angle DEF$ 及 $\angle BCD$ 之間存在一種對應關係。

我們連接 \overline{AD} ，將六邊形甲分成兩個四邊形 $ABCD$ 與 $ADEF$ ，並分別作三角形 ABD 與 DEF 的外接圓 O_1 、 O_2 ，如圖 3-6-3-2 所示，可得甲的面積等於四邊形 $ABCD$ 與 $ADEF$ 的面積和。由系理二知，四邊形 $ABCD$ 與 $ADEF$ 的面積最大值分別發生於圓 O_1 通過 C 點及圓 O_2 通過 A ，又因為 \overline{AD} 為圓 O_1 、 O_2 的公共弦，由系理四及正弦定理知，圓 O_1 、 O_2 會重合，因此，當六邊形甲的六個頂點共圓時，其面積有最大值為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。換句話說如果一個六邊形的邊長均為 1，則以正六邊形的面積最大。這是一個等周問題，古希臘數學家 Zenodorus (約 180B.C.) 已經證得：在平面上，用固定長的線段圍成一塊封閉的區域，在所有 n 邊形中，以正 n 邊形的面積為最大，並且邊數越多，面積也越大。

我們透過 GSP 的動態模擬觀察，也發現當四邊形 $ABCD$ 的外接圓 O_1 與四邊形 $ADEF$ 的外接圓 O_2 重合時，甲與戊的面積比值會有最大值，而且最大值為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，此時的六邊形甲剛好是正六邊形。同樣地可知道甲與戊的面積比值之最小值並不存在，而其值會趨近於 $\sqrt{2}$ ，由此可得到下列的結論：

若四個全等六邊形甲，乙，丙，丁均與正方形戊有一共同邊，而彼此都沒有重疊的邊或區域，則甲與戊的面積比值會介於 $\sqrt{2}$ 與 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 之間，而且當六邊形甲是一正六邊形時，此比值有最大值為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

3-6-4 結語

由前面三種情況的討論結果可知，2006 年第一次「國中基測」數學第 33 題的題意敘述確實有不完善的地方，但不可否認的是凸六邊形甲與正方形戊的面積比值 r 滿足不等式 $\sqrt{2} < r \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，因此，(A)或(D)都算是正確答案，而其中當 \overline{CD} 與 \overline{AF} 平行且

$\angle DEF = 90^\circ$ 時，不難求出 r 值為 $\sqrt{2} + 1$ ，但要在甲與戊的一個相對的特殊位置來求得 r 值為 2，並不是一件容易的事，所以，(A)選項的判斷對國三程度的學生而言可能要下一番苦功才能確認。

如果把題目敘述修改如下：

如圖 3-6-4-1，是由一些六邊形與正方形磁磚所鋪成的地板花色的一部分，甲、乙、丙、丁為四個全等的六邊形，而且緊密地圍著灰色正方形戊。若甲、乙、丙、丁、戊、己的每一邊長均為 1，則戊面積與甲面積的比值為何？

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 。

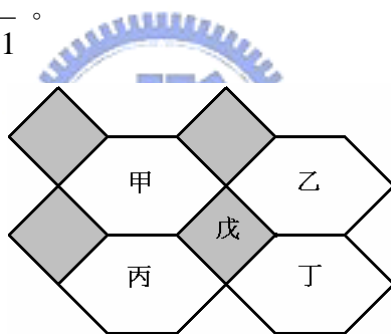


圖 3-6-4-1 六邊形與正方形磁磚所鋪成的地板花色

經過計算可以發現答案就只有(D)是正確的，且由題意清楚地知道這是一個鋪地板的問題。早在古埃及時代就已經知道，用同一種形狀與大小的正多邊形鋪地，恰好只有三種樣式，即只能用正三角形、正方形與正六邊形三種情形，才能將地板鋪成，這是三角形三內角和為 180° 的簡單推論。如果第 33 題的題意再加了鋪地板的條件，則等邊六角形甲的形狀就會固定，因此，戊面積與甲面積的比值為 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 。

愛因斯坦曾說過：「提出一個問題，往往比解決一個問題更加重要」。雖然這個問題確實有些疑義，但我們姑且不談這題的爭議如何善後，事實上這樣開放性的問題已經讓我們初步嘗試利用所學過的一些數學原理或概念作為解決問題的模型，並且透過數學軟體環境中之圖形呈現的形象思維與動態操作的模擬實驗來探索問題，讓我們能深深地體驗到問題延伸與推廣的數學探究過程，以及感受到科學研究的激情與創造力。這也讓我們見識到如波利亞所提到的「數學的另一個側面」，希望這個問題留在我們記憶裡的並不是那些疑義，而是這些引人入勝的研究的過程和創造的激情。