

第四章 在 Cabri 3D 環境下的數學探究

在第三章裡，我們發現在數學軟體的環境中運用一些數學模組與思維模式，能夠進一步去探究一些延伸性的問題，對問題的分析提出猜想與檢驗，進而進行推理論證的抽象性思考，整個探究的過程可以充分地讓學生了解數學問題的研究方法與邏輯推理過程，也可以初步體驗數學研究的科學精神，並體會數學概念的發現與創造的激情。因此，在數學學習的領域中，有了資訊科技的結合，產生動態學習的教學理念，將過去所著重的「認知的獲得---完善的推理論證之邏輯組織」，再加上現代科技化的「實驗操作的歸納---圖形模擬的形象思維之數形理念」，使得我們的教與學的方式呈現多樣化、多元化以及科技化。

在這個章節裡，我們透過數學 3D 軟體--*Cabri 3D* 的一些功能與物件，來建構出立體幾何的操作環境，以促進學習者對立體空間的理解，從而幫助他們發展良好的立體感，並且能夠運用所學過的立體幾何原理或概念進入數學實驗的模擬情境以便進行深入思考與探究，這樣的學習方式可以為現今盛行的資訊融入教學及問題解決的研究策略帶來另一種有創意的教學思維。

4-1 正多面體展開圖的構作 —— 在 Cabri 3D 環境下的數學探究

利用 Cabri 3D 套裝軟體的交談式操作，來製作正多面體及其展開圖。首先介紹構作正多面體展開圖所需的各項操作指令，及正多面體平面展開圖的逐步構作細節；也提供另一種多面體足球及巴克球的製作。我們希望在 Cabri 3D 的環境下，提供空間幾何體的形象支持，提高幾何的直觀能力，再結合一些代數方法及語言，來進行幾何問題解決的延伸與數學的探究。

4-2 立體圖形平面截痕的探究 —— 以 Cabri 3D 及 GSP 為工具

運用 Cabri 3D 立體幾何軟體，來探究一個立體圖形被一平面所截時的截痕，讓整個探究的過程有了很好的立體圖像的觀察與探知。並利用 GSP 軟體對平面幾何圖形的構作可以工具化，以及可以對圖形物件作測量與計算，甚至利用參數的函數概念去進行圖形構作的功能。

4-3 長方體主對角線穿過單位正方體的個數

以平行投影和格子點模式，探究 $a \times b \times c$ 長方體主對角線會穿過 $a+b+c-(h+k+l)+d$ 個單位正立方體，其中 $(a,b)=h$ ， $(a,c)=k$ ， $(b,c)=l$ ， $(a,b,c)=d$ 。

4-1 正多面體展開圖的構作－在 Cabri 3D 環境下的探究

本文利用 Cabri 3D 套裝軟體的交談式操作，來製作正多面體及其展開圖。首先介紹構作正多面體展開圖所需的各項操作指令，及正多面體平面展開圖的逐步構作細節；也提供另一種多面體足球及巴克球的製作。我們希望在 Cabri 3D 的環境下，提供空間幾何體的形象支持，提高幾何的直觀能力，再結合一些代數方法及語言，來進行幾何問題解決的延伸與數學的探究。

4-1-1 前言

早在 2500 年前的古希臘時代，畢達哥拉斯學派的成員就已知道了正四面體，正六面體和正八面體的存在，柏拉圖學派的先驅泰特托斯又發現了正十二面體和正二十面體。柏拉圖本人在他後期唯一一篇討論自然哲學的對話《蒂邁歐篇》中，將這 5 種正多面體與自然元素及宇宙聯繫在一起，闡發了他關於永恆不變觀念與無定形質料的觀點。約公元前 3 世紀初，歐幾里得在他的《幾何原本》第 13 卷中論述了這 5 種正多面體內接於球的作圖法，並稱它們為柏拉圖體。他在該卷的末尾第一次從數學角度討論了正多面體，證明正多面體不能多於 5 個。法國數學家笛卡兒、瑞士數學家歐拉分別發現一般凸多面體的重要公式：面數+頂角數－稜數 = 2，現在稱為歐拉多面體定理。

多面體的每一面都是全等的正多邊形，而且每一多面角是全等的正多面角。這樣的多面體就稱為正多面體(Regular Polyhedron)。如果這樣的多面體是凸的，就叫做凸正多面體。由此定義可知，我們要探討正多面體的種類個數，或許可以朝各面是正多邊形的方向及立體角的概念去作猜測與思考。

引理：正 n 多面體只當 $n = 4, 6, 8, 12, 20$ 時存在。

證明：

設現有一正多面體，它的面數、頂點數和稜邊數分別是 F 、 V 及 E 。則根據歐拉定理，我們有

$$F + V - E = 2 \quad (1)$$

設此正多面體的每一面都是正 n 邊形($n = 3, 4, 5, \dots$)，故每一面有 n 條稜邊，即

$$F = \frac{2 \cdot E}{n} \quad (2)$$

又設每個頂點與 m 條稜邊相交，因為一個立體角最少是由 3 個平面角所構成，所以， $m \geq 3$ ， $m \in N$ ，得

$$V = \frac{2 \cdot E}{m} \quad (3)$$

由(1), (2), (3)可得 $E = \frac{2mn}{4 - (m-2)(n-2)}$ ，又因為 $E > 0$ ，所以 $4 - (m-2)(n-2) > 0$ ，

得 $(m-2)(n-2) < 4$; 因 $m \geq 3$ 且 $n \geq 3$, $(m, n) = (3, 3), (4, 3), (5, 3), (3, 4)$ 或 $(3, 5)$, 即 (F, V, E) 只可能為 $(4, 4, 6), (6, 8, 12), (12, 20, 30), (8, 6, 12)$ 及 $(20, 12, 30)$, 恰只有五種正多面體。證畢。

歐拉發現正多面體的面數 F 加上它的頂點數 V , 總是比邊數 E 多 2, 稱為歐拉多面體定理。

表 4-1-1-1 正多面體的種類

正多面體的種類	每一面形狀	面數	頂點數	稜邊數
正四面體	正三角形	4	4	6
正六面體	正方形	6	8	12
正八面體	正三角形	8	6	12
正 12 面體	正五邊形	12	20	30
正 20 面體	正三角形	20	12	30

以下列出五種正多面體的平面展開圖, 如圖 4-1-1-1~10 至於如何構作這些平面展開圖, 我們將在介紹 Cabri 3D 的基本指令後, 在 4-1-4 節做逐步的介紹。

1. 正四面體及其展開圖

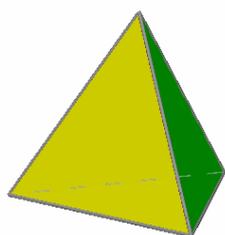


圖 4-1-1-1 正四面體

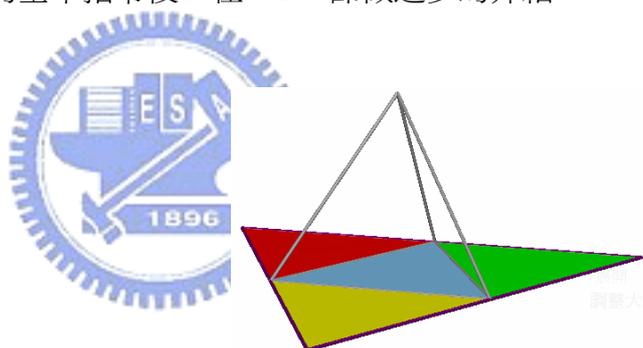


圖 4-1-1-2 正四面體

2. 正六面體及其展開圖

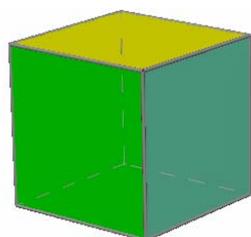


圖 4-1-1-3 正六面體

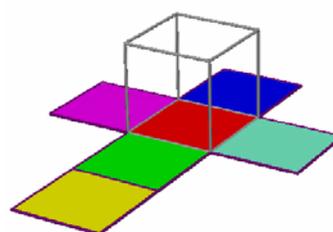


圖 4-1-1-4 正六面體展開圖

3. 正八面體及其展開圖

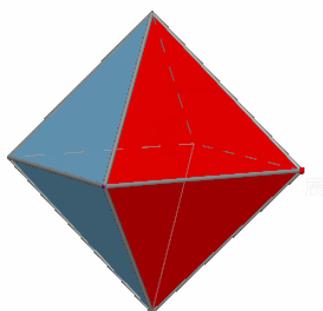


圖 4-1-1-5 正八面體

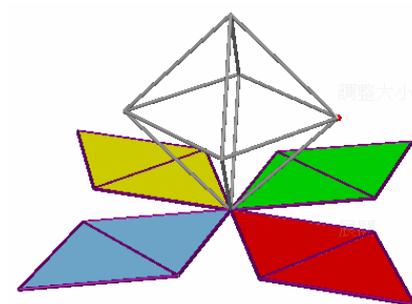


圖 4-1-1-6 正八面體展開圖

4. 正十二面體及其展開圖

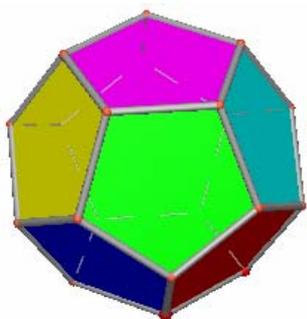


圖 4-1-1-7 正十二面體

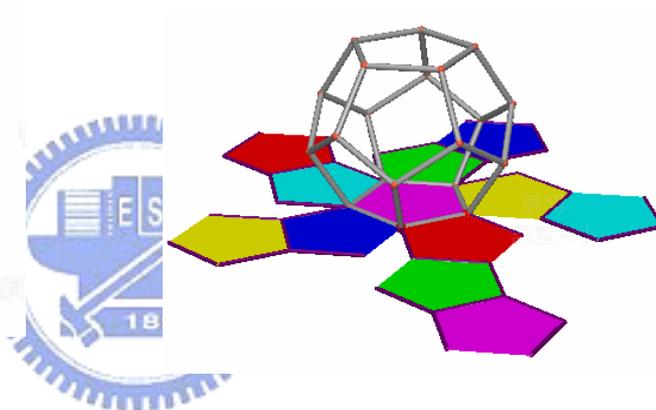


圖 4-1-1-8 正十二面體展開圖

5. 正二十面體及其展開圖

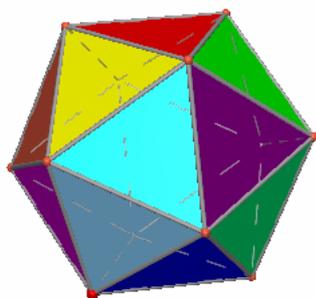


圖 4-1-1-9 正二十面體

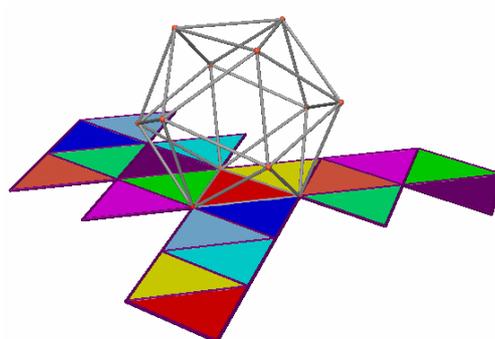


圖 4-1-1-10 正二十面體展開圖

以上五種正多面體，都是以某一面作底面，構作出其側面的展開圖，並依其邊數分

別作出展成一分支系列平面性的剖面，其構作情形如下表所列：

表 4-1-1-2 展開圖分支系列

	底面多邊形	所需構作的剖面數量
正四面體	正三角形	三支系列
正正六面體	正方形	四分支系列
正八面體	正三角形	三支系列
正十二面體	正五角形	五分支系列
正二十面體	正三角形	三支系列

這五個正多面體都滿足空間的對稱性（不論從那一個頂點來看，看到的形體都一樣），一經展開之後，在正多面體上之相對的側面於一系列平面性的剖面中，其位置關係是具有某一種對應關係；這五個正多面體的展開圖去掉頂端的側面時，可發現這些展開圖在平面上具有旋轉性。

4-1-2 Cabri 3D 的基本指令

首先介紹 Cabri 3D 軟體的一些基本功能，包括功能列與工具列之指令使用介紹。滑鼠操作和一般一樣，利用左鍵來點選及操作；利用右鍵來點選時出現功能表，按住右鍵拖曳，可以改變立體視角。

- 功能列如圖 4-1-2-1 所示，包括
- File: 開啓新(舊)檔、儲存等，
- Edit: 作一些屬性的改變，
- View: 可增刪網頁及調整網頁的大小，還可以作各種方位的觀看視窗等，
- Window: 可作水平視窗及鉛直視窗的排列，及
- Help: 問題求救等項。

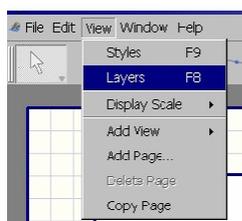


圖 4-1-2-1 Cabri 3D 的功能列

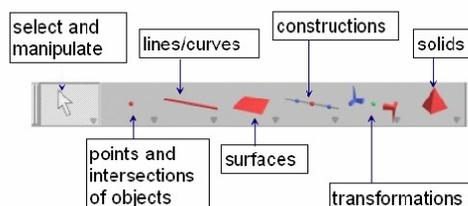


圖 4-1-2-2 Cabri 3D 的工具列

工具列如圖 4-1-2-2 所示，包括

- : 點選物件，
- : 構作空間或平面上之點，亦可作兩個幾何圖形的交點集;
- : 構作直線、線段、射線、向量、圓及圓錐曲線;
- : 構作平面、三角形、多邊形、半平面、扇面、圓錐面、圓柱面、球面;
- : 作中點、平行線(面)，垂直線(面)、中垂面、向量和;
- : 構作點對稱、線對稱、面對稱、平移、旋轉; 以及
- : 構作正多面體(4、6、8、12、20)、長方體、截多面體

等七項。

我們以構作正多面體之平面展開圖所需要的一些作圖元件為範例，來介紹 Cabri 3D 的基本指令。在 3D 立體的幾何圖形中，以

“控制鈕”來控制圖形動態的機制；

“控制鈕的最高點”來控制正多面體之側面展開圖之初始位置的點。



以下分別針對“基本作圖元件”、“工具作圖元件”作進一步的說明：

一、基本作圖元件

1-1 立體幾何圖之“旋轉變換圖形的構作”，其步驟如下：

1 工具列“Curves/ Circle”:

點選 O 點為圓心，適當的長度 r 為半徑，可作一圓 C。

2 工具列“Constructions/ Perpendicular in a plan”:

選取點 O 及 XY 平面，可得 XY 平面之垂直線 L。

3 工具列“Points/ Point”:

在圓 C 上任取兩點 A、B。

4 工具列“Polyhedrons/ Platonic solids”:

在 XY 平面上選取三點 A、B、D，可作一正四面體 K_1 。

5 工具列“Transformations/ Rotation by axis and points”:

依序選取正四面體 K_1 ，旋轉軸 L，初始點 A 與終點 B，可得另一正四面體 K_2 ，如圖 4-1-2-3 所示。

1-2 底面圓內接正三角形的構作，其步驟如下：

1 在工具列“Curves/ Circle”:

點選原點 O 為圓心，適當的長度 r 為半徑，可作一圓 C；

- 2 工具列 “Points/ Point”:
在圓 C 上任取一點 B;
- 3 工具列 “Curves/ Circle”:
點選 B 點為圓心，適當的長度 r' 為半徑，可作一圓 C_1 ;
- 4 工具列 “Points/ Intersection point(s)”:
點選在圓 C 及圓 C_1 ，可得兩交點為 B_1 、 B_3 ;
- 5 工具列 “Transformations/ Central symmetry”:
並點選 B 及原點 O，可得一對稱點 B_2 ;
- 6 工具列 “Surfaces/ Triangle”:
依序點選 B_1, B_2, B_3 三點，則三角形 $B_1B_2B_3$ 即為所求，
如圖 4-1-2-4 所示。

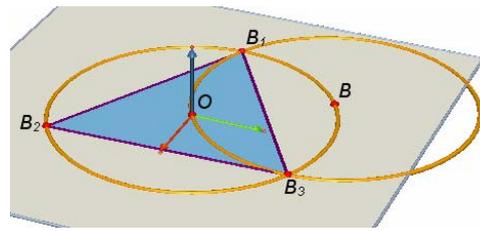
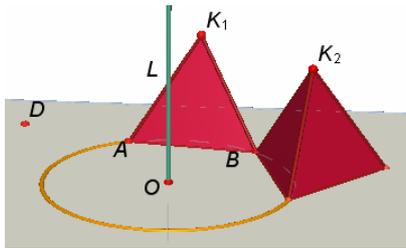


圖 4-1-2-3 以 L 為軸，將 K_1 旋轉至 K_2 圖 4-1-2-4 平面上構作三角形 $B_1B_2B_3$

1-3 底面圓內接正五角形的構作，其步驟如下：

- 1 工具列 “Curves/ Circle”:
選取原點 O 及任一點 B，可作一圓 C;
- 2 工具列 “Curves/ Segment”:
選取 B 點及原點 O，可得一線段 \overline{OB} ;
- 3 工具列 “Constructions/ Middle”:
選取線段 \overline{OB} ，可作 \overline{OB} 的中點 E;
- 4 工具列 “Transformations/ Central symmetry”:
選取圓心 O 及 B 點，可得一對稱點 B' ，並作線段 $\overline{BB'}$ (如步驟 2);
- 5 工具列 “Constructions/ Perpendicular in a plane”:
選取點 O 及線段 \overline{OB} ，可得線段 \overline{OB} 之中垂線 L;
- 6 工具列 “Points/ Intersection point(s)”:
選取圓 C 及中垂線 L，可得兩交點為 P_1 、 P_1' ;
- 7 工具列 “Curves/ Circle”:
選取 E 點及 P_1 點，可作一圓 C' ;
- 8 工具列 “Points/ Intersection point(s)”:
選取半徑 $\overline{OB'}$ 及圓 C' ，可得一交點為 F;
- 9 工具列 “Curves/ Circle”:
選取 P_1 點及 F 點，可作一圓 C'' ;
- 10 工具列 “Points/ Intersection point(s)”:

選取圓 C 及圓 C' ，可得二交點為 P_2 及 P_5 ；

11 工具列 “Transformations/ Rotation by axis and points”:

依序選取 P_2 點，旋轉軸 Z 軸，初始點 P_1 與終點 P_2 ，可得一點 P_3 ；

12 再在工具列 “Transformations/ Rotation by axis and points”:

依序選取 P_3 點，旋轉軸 Z 軸，初始點 P_1 與終點 P_2 ，可得一點 P_4 ；

13 工具列 “Surfaces/ Polygon”: 依序點選 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 三點，則五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 即為所求，如圖 4-1-2-5 所示。

1-4 以正十二面體為例，說明正多面體之骨架的構作，其步驟如下：

1 工具列 “Polyhedrons/ Platonic solids”:

在 XY 平面上選取三點 U 、 V 、 W ，可作一正多面體 K ;

2 滑鼠點選正多面體 K ，再按右鍵後，在出現的視窗中選取「Surface style」之選單中的「Empty」，可得一正多面體的骨架，再按右鍵後，在出現的視窗中選取「Curve color」之顏色選單，作骨架顏色的改變；如圖 4-1-2-6 所示。

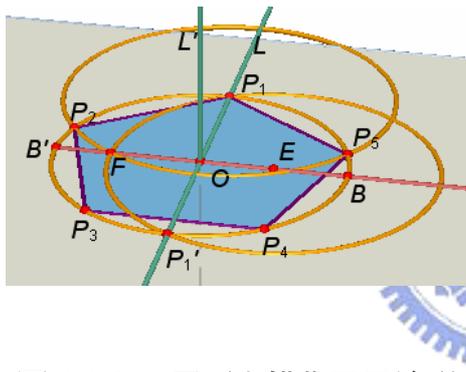


圖 4-1-2-5 平面上構作正五邊形

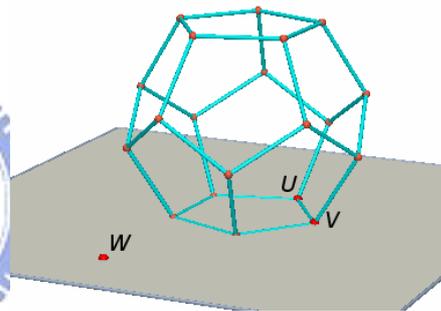
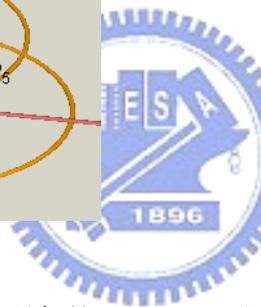


圖 4-1-2-6 構作正十二面體的骨架

二、工具作圖元件

2-1: 以正四面體為例，說明正多面體的對稱軸之構作，其步驟如下：

1 利用 “基本作圖元件 1-4”，作一正四面體的骨架;

2 工具列 “Points/ Point”: 點取底面多邊形的頂點 B 、 C 、 D ;

3 工具列 “Curves/ Segment”: 選取 B 、 C 、 D 點，可得二線段 \overline{BD} 、 \overline{CD} ;

4 工具列 “Constructions/ Middle”: 選取 \overline{BD} 、 \overline{CD} ，作 \overline{BD} 、 \overline{CD} 的中點 E 、 F ;

5 工具列 “Constructions/ Perpendicular in a plane”:

選取點 E 及 \overline{BD} 與點 F 及 \overline{CD} ，可得中垂線 L_1 、 L_2 ;

6 工具列 “Points/ Intersection point(s)”: 選取 L_1 、 L_2 ，可得交點為 G ;

7 工具列 “Constructions/ Perpendicular”:

選取 G 點及 XY 平面，可作一垂直線 L 即為所求。

2-2 以正十二面體為例，說明控制鈕的構作，其步驟如下：

1 利用 “工具作圖元件 2-1”，作正十二面體的對稱軸 L ;

- 2 工具列 “Constructions/ Perpendicular”:
選取 D 點及直線 L，可得一垂直平面 M;
- 3 工具列 “Points/ Intersection point(s)”:
選取平面 M 及直線 L，可得交點為 T(此點稱為控制鈕的最高點);
- 4 工具列 “Curor”:
選取空間坐標系中的 xy 平面，再按鍵盤之「F」，可令 xy 平面為 F 平面;
- 5 工具列 “Points/Point”:
在 F 平面上取一點 Q;
- 6 工具列 “Curves/Vector”:
選取 G 點及 T 點，可得一向量 \overrightarrow{GT} ;
- 7 工具列 “Transformations/Translation”:
選取 Q 點及向量 \overrightarrow{GT} ，可得一點 Q';
- 8 工具列 “Curves/Segment”:
選取 Q、Q' 點，作一線段 $\overline{QQ'}$;
- 9 工具列 “Points/Point”:
在線段 $\overline{QQ'}$ 上取一點 P;
- 10 工具列 “Curves/Vector”:
選取 Q、P 點，可得一向量 \overrightarrow{QP} ;
- 11 工具列 “Transformations/Translation”:
選取 G 點及向量 \overrightarrow{QP} ，可得一點 P₁;
- 12 移動 P 點即可控制點 P₁，則整個控制鈕的構作就完成了，如圖 4-1-2-7 所示。

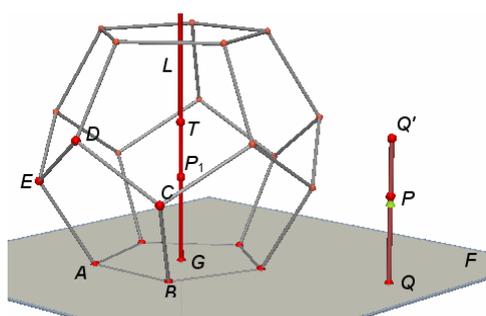


圖 4-1-2-7 構作一控制鈕

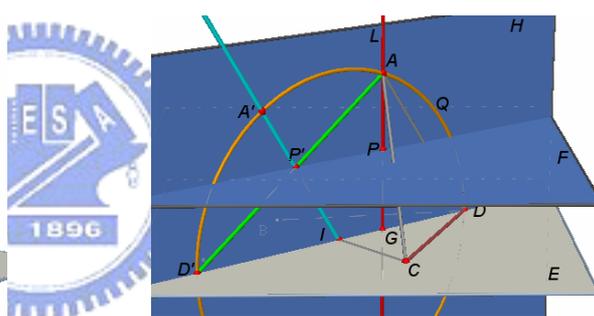


圖 4-1-2-8 構作側面 ABC 的展開圖

2-3 以正四面體為例，說明側面正三角形之展開圖的構作，其作法如下：

- 1 利用 “基本作圖元件 2-1”，作一正多面體的對稱軸 L 並在其上選取一點 P;
- 2 工具列 “Constructions/ Middle”:
選取正四面體之一稜邊 \overline{BC} ，可作 \overline{BC} 的中點 I;
- 3 工具列 “Surfaces/Plane”:
選取 A、D、I 點，可得一平面 H;
- 4 工具列 “Curves/Circle”:
選取 I 點及 A 點，可得一圓 Q;
- 5 工具列 “Transformations/Central symmetry”:
選取 D 點及 I 點，可得一對稱點 D';
- 6 工具列 “Curves/Segment”:
選取 A、D' 點，作一線段 $\overline{AD'}$;
- 7 工具列 “Constructions/Perpendicular”:
選取 P 點及直線 L，得垂直平面 F;
- 8 工具列 “Points/Intersection point(s)”:
選取平面 F 及線段 $\overline{AD'}$ ，得交點為 P';
- 9 工具列 “Curves/Ray”:
選取 I、P' 點，作一射線 $\overrightarrow{IP'}$;
- 10 工具列 “Points/Intersection point(s)”:
選取圓 Q 及射線 $\overrightarrow{IP'}$ ，得交點為 A';

11 $\Delta A'BC$ 為側面正 ΔABC 的展開圖，如圖 4-1-2-8 所示。

2-4 側面正方形之展開圖的構作，其作法如下：

- 1 利用“基本作圖元件 2-1”，作一正六面體的對稱軸 L 並在其上選取一點 P
- 2 工具列“Surface/ Plane”: 選取 A 、 E 、 D 點，可得一平面 M ;
- 3 工具列“Curves/ Circle”: 選取 A 點及 E 點，可得一圓 Q ;
- 4 工具列“Transformations/Central symmetry”:
選取 D 點及 A 點，可得一對稱點 D' ;
- 5 工具列“Curves/Segment”: 選取 E 、 D' 點，作一線段 $\overline{ED'}$;
- 6 工具列“Constructions/Perpendicular”:
選取 P 點及直線 L ，可得一垂直平面 N ;
- 7 工具列“Points/Intersection point(s)”:
選取平面 N 及線段 $\overline{ED'}$ ，可得交點為 P' ;
- 8 工具列“Curves/Ray”: 選取 A 、 P' 點，作一射線 $\overrightarrow{AP'}$
- 9 工具列“Points/Intersection point(s)”:
選取圓 Q 及射線 $\overrightarrow{AP'}$ ，可得交點為 E' ;
- 10 工具列上選「Curves/Vector»: 選取 E 、 F 點，可得一向量 \overrightarrow{EF} ;
- 11 工具列“Transformations/Translation”:
選取 E' 點及向量 \overrightarrow{EF} ，可得一點 F' ;
- 12 四邊形 $AE'F'B$ 為側面正方形 $AEFB$ 的展開圖 (如圖 4-1-2-9 所示)。

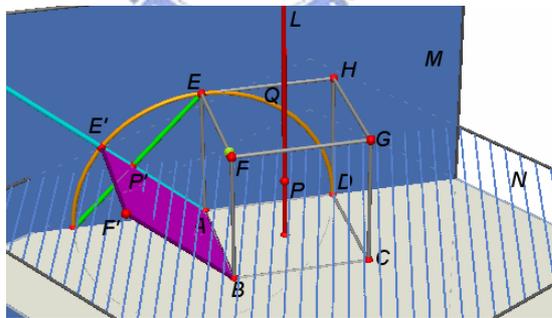


圖 4-1-2-9 構作側面 $AEFB$ 的展開圖

2-5 側面正五邊形之展開圖的構作，其作法如下：

- 1 利用“基本作圖元件 2-1”，作一正多面體的對稱軸 L 並在其上選取一點 P
- 2 在工具列“Constructions/ Middle”:
選取正十二面體之一稜邊 \overline{AB} ，可作 \overline{AB} 的中點 I ;
- 3 工具列“Surfaces/Plane”: 選取 I 、 D 、 G ，得平面 M ;
- 4 工具列“Curves/Circle”: 選取 I 點及 D 點，得一圓 Q ;
- 5 工具列“Transformations/Central symmetry”:

- 選取 H 點及 I 點，得對稱點 H' ；
- 6 工具列 “Curves/Segment”: 選取 D、 H' 點，作線段 $\overline{DH'}$ ；
 - 7 工具列 “Constructions/Perpendicular”: 選取 P 點及直線 L，得垂直平面 N；
 - 8 工具列 “Points/Intersection point(s)”: 選取平面 N 及線段 $\overline{DH'}$ ，得交點 P' ；
 - 9 工具列 “Curves/Ray”: 選取 I、 P' 點，作射線 $\overline{IP'}$ ；
 - 10 工具列 “Points/Intersection point(s)”:

選取圓 Q 及射線 $\overline{IP'}$ ，可得交點為 D' (如圖 4-1-2-10 所示)；
 - 11 工具列 “Surfaces/Plane”: 選取 A、B、 D' ，可得平面 K；
 - 12 工具列 “Curves/Segment”: 選取 A、 D' 點及 B、 D' 點，作線段 $\overline{AD'}$ 與 $\overline{BD'}$ ；
 - 13 工具列 “Constructions/Middle”:

選取二線段 $\overline{AD'}$ 與 $\overline{BD'}$ ，可作 $\overline{AD'}$ 與 $\overline{BD'}$ 的中點 S、T；
 - 14 工具列 “Constructions/Perpendicular in a plane”:

分別選取點 S 及線段 $\overline{AD'}$ 與點 T 及線段 $\overline{BD'}$ ，得中垂線 L_3 、 L_4 ；
 - 15 工具列 “Points/Intersection point(s)”: 選取 L_3 、 L_4 ，得交點為 G' ；
 - 16 工具列 “Constructions/Perpendicular”:

選取 G' 點及 K 平面，可作一垂直線 L' ；
 - 17 工具列 “Transformations/Rotation by axis and points”:

依序選取 D' 點，旋轉軸 L' 軸，初始點 A 與終點 B，得一點 D_1 ；
 - 18 工具列 “Transformations/Rotation by axis and points”:

依序選取 D' 點，旋轉軸 L' 軸，初始點 B 與終點 A，可得一點 D_2 ；
 - 19 工具列 “Surfaces/Polygon”:

依序點選 A、 D_2 、 D' 、 D_1 、B 五點，則五邊形 $AD_2D'D_1B$ 即為側面正五邊形 ABCDE 的展開圖，如圖 4-1-2-11 所示。

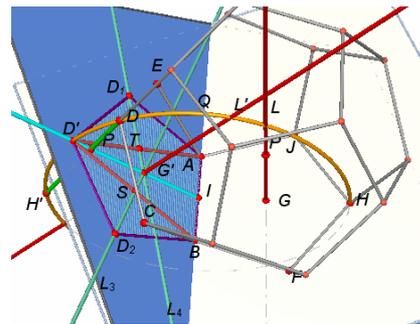
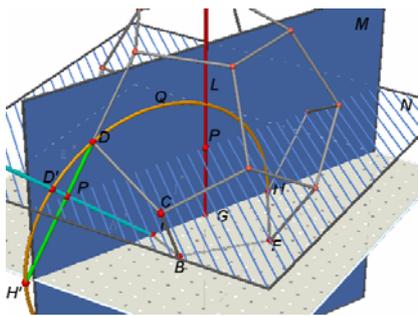


圖 4-1-2-10 構作展開圖的控制點 D' 圖 4-1-2-11 構作側面 $ABCDE$ 的展開圖

2-6 以正十二面體為例，說明控制鈕之動點之轉移的構作，其作法如下：

- 1 利用 “工具作圖元件 2-2”，作正十二面體 K_1 的控制鈕 P；
- 2 再利用 “工具作圖元件 2-5”，作一正十二面體的側面正五邊形之展開圖；
- 3 工具列 “Polyhedrons/Platonic solids”:

選取 A、B、 D' 點，可作一正十二面體 K_2 ；

- 4 利用“工具作圖元件 2-1”，作一正十二面體 K_2 的對稱軸 L' ；
- 5 在一正十二面體 K_2 的對稱軸 L' 上，作一控制鈕的最高點 T' ；
- 6 工具列“Curves/Segment”：選取 T 、 T' 點，作一線段 $\overline{TT'}$ ；
- 7 工具列“Constructions/Middle”：選取線段 $\overline{TT'}$ ，可作線段 $\overline{TT'}$ 的中點 S ；
- 8 工具列“Constructions/Perpendicular”：
 - 選取 S 點及線段 $\overline{TT'}$ ，可得一垂直平面 M ；
- 9 工具列上選“ransformations/Symmetry with respect to a plane”：
 - 選取 P_1 點及平面 M ，可得一對稱點 P_2 ；則控制點 P 經由向量平移，轉移到點 P_1 ，再經由對稱的作圖，轉移到點 P_2 。

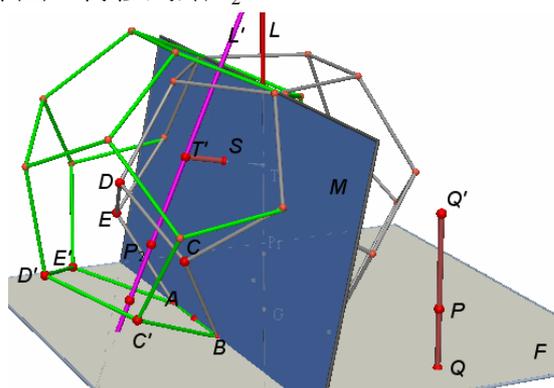


圖 4-1-2-12 過 S 作垂直平分面 M

4-1-3 正多面體展開圖的構作（參見圖 4-1-3-1 ~ 14）

根據上述的 Cabri 3D 指令，我們可以分別構作出正 n 邊多面體。我們以 $n=6, 8$ 為例，作細部的說明：

一、正立方體之展開圖的構作

1. 利用基本作圖元件 1-4，作一正立方體之骨架，再利用工具作圖元件 3-1，構作一正立方體的對稱軸 L 及控制機制的最高點 T_1 ，如圖 4-1-3-1 所示。
2. 利用工具作圖元件 2-2，構作一控制鈕 P 及過直線 L 上 P' 點的垂直平分面，如圖 4-1-3-2 所示。

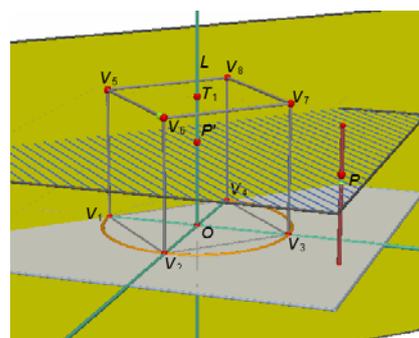
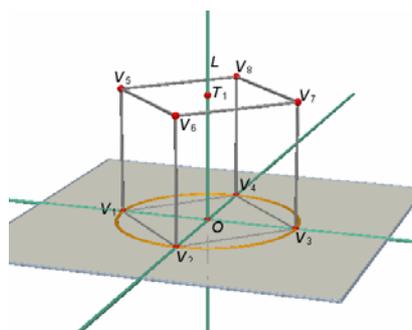


圖 4-1-3-1 構作正立方體的骨架

圖 4-1-3-2 構作控制鈕 P 及平面

3. 利用工具作圖元件 3-4，構作一正立方體側面展開圖，即為正方形 $V_1V_5'V_6'V_2$ ，如圖 4-1-3-3 所示。
4. 隱藏一些物件，讓畫面顯得清楚、乾淨，如圖 4-1-3-4 所示。

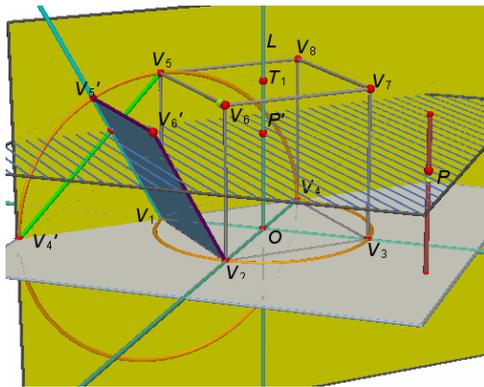


圖 4-1-3-3 構作側面的展開圖

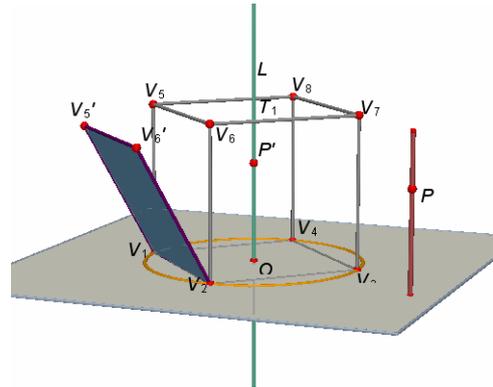


圖 4-1-3-4 移動 P 點可控制展開圖

5. 利用基本作圖元件 1-1，連續構作三個正立方體的側面展開圖的旋轉變換圖形，如圖 4-1-3-5 所示。

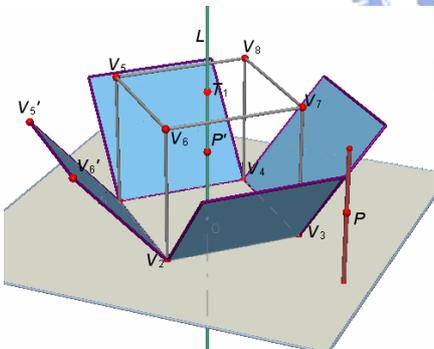


圖 4-1-3-5 利用旋轉功構作其他展開圖

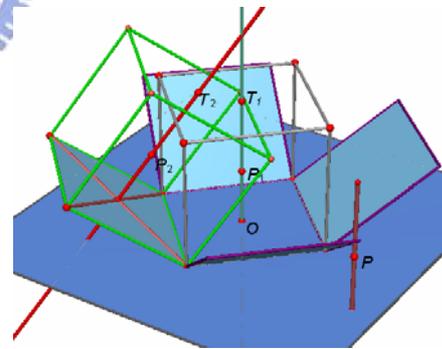


圖 4-1-3-6 構作某一展開圖上的一個正立方體骨架

6. 利用基本作圖元件 1-4，在正方形 $V_1V_5'V_6'V_2$ 上構作正立方體之骨架及其對稱軸，以及控制機制的最高點；再利用工具作圖元件 2-6–控制鈕之動點之轉移，得到第二個控制鈕點 P_2 ，如圖 4-1-3-6 所示。
7. 利用工具作圖元件 2-4，再構作一正立方體側面展開圖，如圖 4-1-3-7 所示。
8. 隱藏一些物件，並對正立方體之六個側面展開圖作顏色的調整，即可得正立方體的展開圖，如圖 4-1-3-8 所示，移動控制點 P 即可展開正立方體的側面。

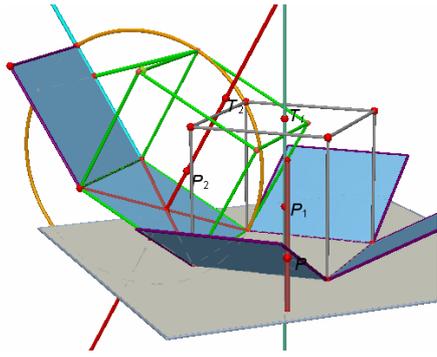


圖 4-1-3-7 再構作新正立方體的展開圖

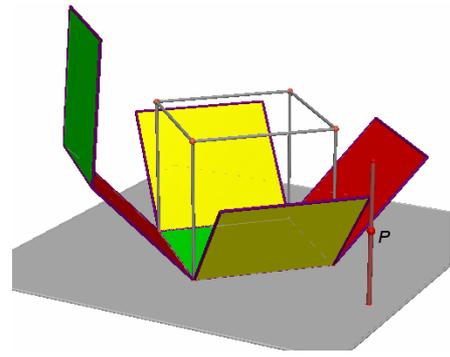


圖 4-1-3-8 移動 P 點可控制展開圖

二、正八面體之展開圖的構作

1. 利用基本作圖元件 1-4，作一正八面體之骨架，再利用工具作圖元件 2-1，構作一正八面體的對稱軸 L 及控制機制的最高點 T_1 (如圖 4-1-3-9 所示)
2. 利用工具作圖元件 2-2，構作一控制鈕 P 及過直線 L 上 P' 點的垂直平分面 (如圖 4-1-3-10 所示)。

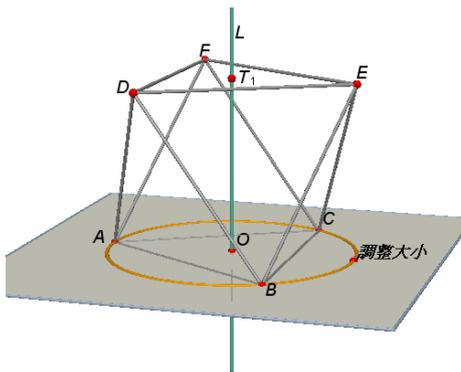


圖 4-1-3-9 構作正八面體的骨架

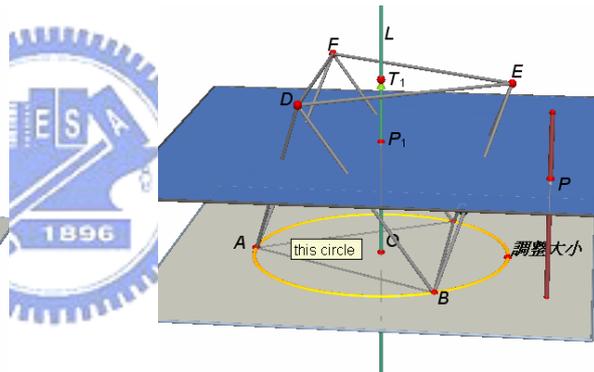


圖 4-1-3-10 構作控制鈕 P 及平面

3. 利用工具作圖元件 2-3，構作一正八面體側面展開圖，即為正三角形 $D'AB$ (如圖 4-1-3-11 所示)。
4. 隱藏一些物件，讓畫面顯得清楚、乾淨 (如圖 4-1-3-12 所示)。

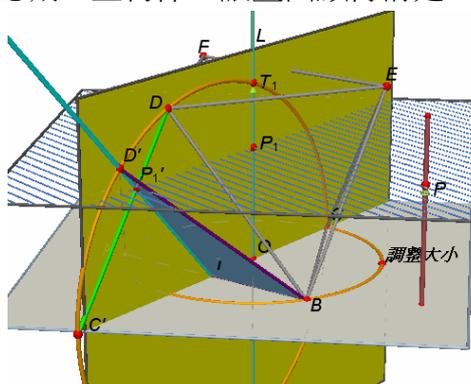


圖 4-1-3-11 構作側面展開圖

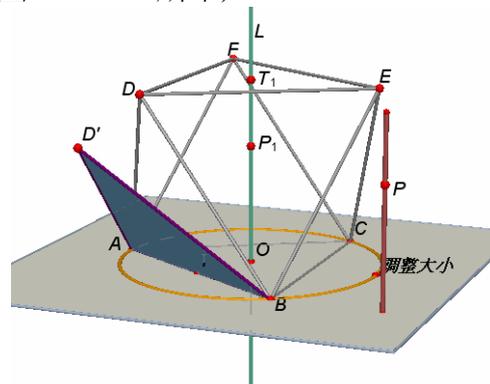


圖 4-1-3-12 移動 P 點可控制展開圖

- 利用基本作圖元件 1-3，在正三角形 $D'AB$ 上構作正八面體之骨架 K_1 及其對稱軸 L' ，以及控制機制的最高點 T_2 ；再利用工具作圖元件 2-6—控制鈕之動點之轉移，得到第二個控制鈕點 P_2 (如圖 4-1-3-13 所示)。
- 利用工具作圖元件 2-3，構作一正八面體 K_1 之側面展開圖，即為正三角形 $F'D'A$ (如圖 4-1-3-14 所示)。

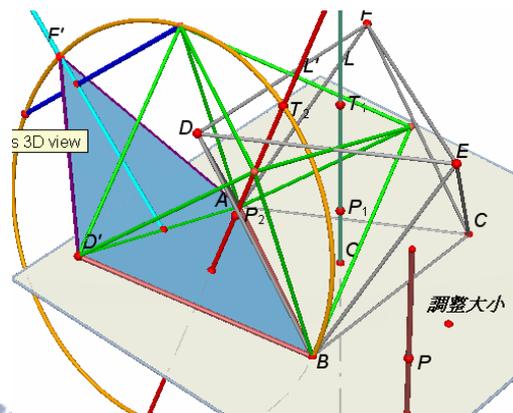
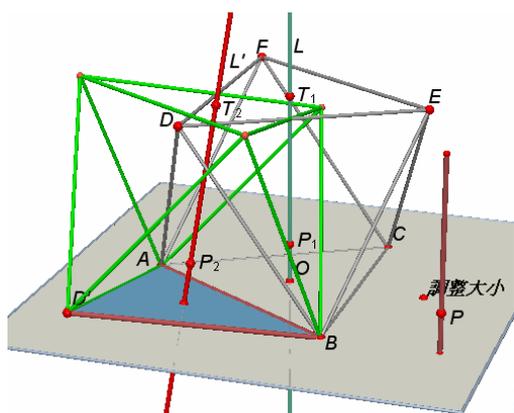


圖 4-1-3-13 在展開圖上構作正八面體的骨架 圖 4-1-3-14 再構作新正八面體的側面展開圖

- 隱藏一些物件，讓畫面顯得清楚、乾淨 (如圖 4-1-3-15 所示)

- 利用基本作圖元件 1-1，連續構作三個正八面體的側面展開圖的旋轉變換圖形 (如圖 4-1-3-16 所示)

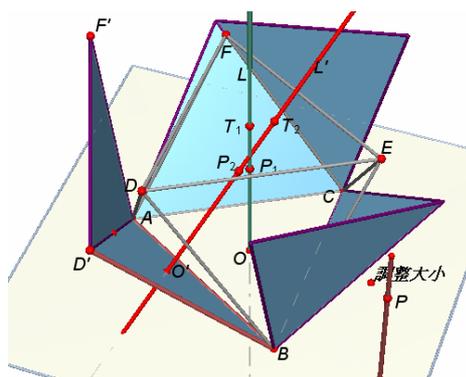
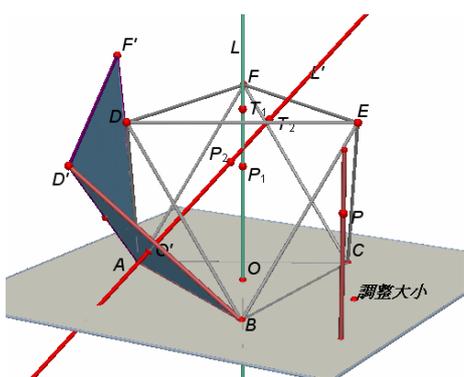


圖 4-1-3-15 利用旋轉功構作其他展開圖 圖 4-1-3-16 隱藏新正八面體的骨架

- 利用基本作圖元件 1-3，在正三角形 $F'D'A$ 上構作正八面體之骨架 K_2 及其對稱軸 L'' ，以及控制機制的最高點 T_3 ；再利用工具作圖元件 2-6—控制鈕之動點之轉移，得到第二個控制鈕點 P_3 (如圖 4-1-3-17 所示)。

10. 利用工具作圖元件 2-3，再構作一正立方體 K_3 之側面展開圖。
11. 隱藏一些物件，並對正八面體之八個側面展開圖作顏色的調整，即可得正八面體的展開圖 (如圖 4-1-3-18 所示)。移動控制點 P 即可展開正八面體的側面。

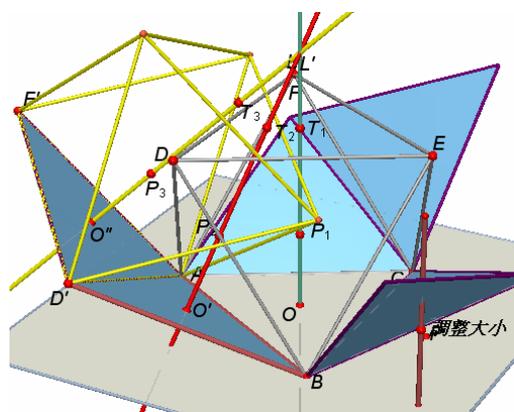


圖 4-1-3-17 構作最上一層的側面展開圖

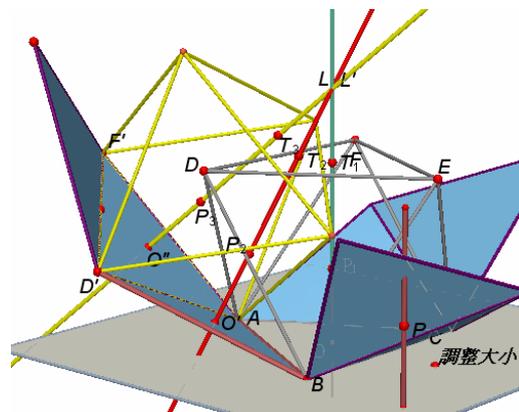


圖 4-1-3-18 移動 P 點可控制所有展開圖

此外，我們也可以在相同的環境下，製作另一種多面體：足球、巴克球，如圖 4-1-3-19 及圖 4-1-3-20 所示。

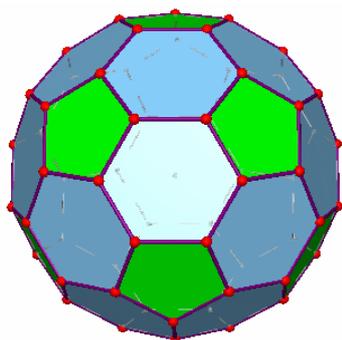


圖 4-1-3-19 足球多面體

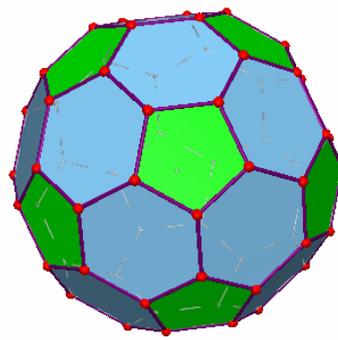


圖 4-1-3-20 巴克球多面體

4-2 立體圖形平面截痕的探究 — 以 Cabri 3D 及 GSP 為工具

本文運用 Cabri 3D 立體幾何軟體，來探究一個立體圖形被一平面所截時的截痕，讓整個探究的過程有了很大的立體圖像的觀察與探知。我們也充分利用 GSP 軟體對平面幾何圖形的構作可以工具化，以及可以對圖形物件作測量與計算，甚至能利用參數的函數概念去進行圖形構作的功能。

4-2-1 前言

這篇文章是在討論一正立方體被以主對角線為法線的平面所截，以及以主對角線為法線的平面截長方體的數學探究的過程中，運用 Cabri 3D 立體幾何軟體所提供一個立體圖形被一平面所截時的截痕的視覺呈現的效果，讓整個數學探究的過程有了很大的立體圖像的觀察與探知。而 GSP 動態幾何軟體所呈現的立體效果遠遜於 Cabri 3D 立體幾何軟體所能呈現的立體效果，但 GSP 這個軟體除了對平面幾何圖形的構作可以工具化之外，還可以對圖形物件作測量與計算，甚至能利用參數的函數概念去進行圖形的構作，因此 GSP 動態幾何軟體在數學問題的探究過程中，還是有其重要性及價值，因為它能夠啟發一些數學思考以及作數學問題的量化工作，甚至還可以透過它來進行一些數學問題的猜測及進一步的延伸與推廣，是一個良好的思考工具及繪圖工具。

4-2-2 正立方體被以主對角線為法線的平面所截

我們從最簡單的單位正立方體為探究的開始，首先建立空間坐標系，將單位正立方體坐標化，令頂點坐標為 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 、 $D(1,1,0)$ 、 $E(0,1,1)$ 、 $F(1,0,1)$ 、 $G(1,1,1)$ 。考慮以主對角線為法線的平面，因為法線的方向向量為 $(1,1,1)$ ，即為平面的法向量，令此平面方程式為 $x + y + z = k$ ，其中， $k \in [0, 3]$ 。以下就 k 值討論截痕區域圖形及其面積：

1. 當 $0 \leq k \leq 1$ 時，截痕區域為一正三角形，其面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}k^2$ ；當 $k = 1$ 時，截痕區域得最大面積 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而且其面積隨著 k 值的增加而變大。
2. 當 $1 \leq k \leq 2$ 時，截痕區域為一六邊形（仿正六邊形），其面積為 $-\sqrt{3}(k - \frac{3}{2})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。
當 $k = \frac{3}{2}$ 時，截痕區域得最大面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，且其面積在 $1 \leq k \leq \frac{3}{2}$ 的範圍內，隨著 k 值

的增加而變大；但在 $\frac{3}{2} \leq k \leq 2$ 的範圍內，隨著 k 值的增加而變小。

3. 當 $2 \leq k \leq 3$ 時，截痕區域為一正三角形，其面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}(k-3)^2$ ；當 $k=2$ 時，得最大面積 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變小。

其次我們針對 $a \times a \times a$ 正立方體進行探究，建立空間坐標系，將 $a \times a \times a$ 的正立方體坐標化，令頂點坐標為 $O(0,0,0)$ 、 $A(a,0,0)$ 、 $B(0,a,0)$ 、 $C(0,0,a)$ 、 $D(a,a,0)$ 、 $E(0,a,a)$ 、 $F(a,0,a)$ 、 $G(a,a,a)$ 。考慮以主對角線為法線的平面，因為法線的方向向量 $(1,1,1)$ ，即為平面的法向量。令此平面方程式為 $x+y+z=k$ ，式中 $k \in [0, 3a]$ 。我們以 $k \in [a, 2a]$ 為例說明，並將結論歸納於定理一。

當 $a \leq k \leq 2a$ 時，平面 $x+y+z=k$ 與空間坐標系的 x 、 y 、 z 軸之截距均為 k ，即 $A'(k,0,0)$ 、 $B'(0,k,0)$ 、 $C'(0,0,k)$ ，且與正立方體的六稜邊 \overline{AF} 、 \overline{AD} 、 \overline{BD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CE} 、 \overline{CF} 之交點分別為 $J_1(a,0,k-a)$ 、 $J_2(a,k-a,0)$ 、 $J_3(k-a,a,0)$ 、 $J_4(0,a,k-a)$ 、 $J_5(0,k-a,a)$ 、 $J_6(k-a,0,a)$ ，如圖所示。得 $J_1J_2 = J_3J_4 = J_5J_6 = \sqrt{2}(k-a)$ ， $J_2J_3 = J_4J_5 = J_6J_1 = \sqrt{2}(2a-k)$ ，所以，截痕區域 $J_1J_2J_3J_4J_5J_6$ 為一六邊形（仿正六邊形），再得截痕區域 $J_1J_2J_3J_4J_5J_6$ 的面積為 $-\sqrt{3}(k-\frac{3}{2}a)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 。當 $k = \frac{3a}{2}$ 時，得截痕區域最大面積 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ ，而且其面積在 $a \leq k \leq \frac{3a}{2}$ 的範圍內，隨著 k 值的增加而變大，在 $\frac{3a}{2} \leq k \leq 2a$ 的範圍內，隨著 k 值的增加而變小。

定理一

以平面 $x+y+z=k$ ($0 \leq k \leq 3a$) 去截正立方體 $a \times a \times a$ ，並以 $f(k)$ 表示截痕區域面積，則

1 當 $0 \leq k \leq a$ 時，則截痕為正三角形， $f(k) = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2$ ，

2 當 $a \leq k \leq 2a$ 時，則截痕為六邊形， $f(k) = -\sqrt{3}(k-\frac{3a}{2})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ ，

3 當 $2a \leq k \leq 3a$ 時，則截痕為正三角形， $f(k) = \frac{\sqrt{3}}{2}(k-3a)^2$ 。

4-2-3 長方體被以主對角線為法線的平面所截

我們從最簡單的長方體 $1 \times 2 \times 3$ ，作為探究的開始，建立空間坐標系，將 $1 \times 2 \times 3$ 的長方體坐標化。考慮以主對角線為法線的平面，因為法線的方向向量 $(1, 2, 3)$ ，即為平面的法向量。令此平面方程式為 $x + 2y + 3z = k$ ，其中， $k \in [0, 14]$ 。就 k 值討論截痕區域圖形及其面積。

1. 當 $0 \leq k \leq 1$ 時，截痕區域為三角形，截痕區域 $\Delta A'B'C'$ 的面積為 $= \frac{\sqrt{14}}{12} k^2$ 。當 $k = 1$ 時，得截痕區域最大面積 $\frac{\sqrt{14}}{12}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變大。
2. 當 $1 \leq k \leq 4$ 時，截痕區域為四邊形，其面積為 $\frac{\sqrt{14}}{12} \times (2k - 1)$ 。當 $k = 4$ 時，得截痕區域最大面積 $\frac{7\sqrt{14}}{12}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變大。
3. 當 $4 \leq k \leq 5$ 時，截痕區域為一五邊形，其面積為 $\frac{\sqrt{14}}{12} \times (-(k - 5)^2 + 8)$ 。當 $k = 5$ 時，得截痕區域最大面積 $\frac{8\sqrt{14}}{12}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變大。
4. 當 $5 \leq k \leq 9$ 時，截痕區域為一周長定值的四邊形，而面積為 $\frac{8\sqrt{14}}{12}$ 。其值不會隨著 k 值的增加而改變。
5. 當 $9 \leq k \leq 10$ 時，截痕區域為五邊形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{14}}{12} \times (-(k - 9)^2 + 8)$ 。當 $k = 9$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{8\sqrt{14}}{12}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變小。
6. 當 $10 \leq k \leq 13$ 時，截痕區域為四邊形，其面積為 $\frac{\sqrt{14}}{12} \times [-2k + 27]$ 。當 $k = 10$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{7\sqrt{14}}{12}$ ，且截痕為四邊形，而且其面積隨著 k 值的增加而變小。
7. 當 $13 \leq k \leq 14$ 時，截痕區域為三角形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{14}}{12} \times (k - 14)^2$ ；當 $k = 13$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{\sqrt{14}}{12}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變小。

其次，再從長方體為 $2 \times 2 \times 3$ 作另一探究，建立空間坐標系，將 $2 \times 2 \times 3$ 的長方體坐標化，以主對角線為法線的平面，因為法線的方向向量 $(2, 2, 3)$ ，即為平面的法向量，令此平面方程式為 $2x + 2y + 3z = k$ ，其中 $0 \leq k \leq 17$ 。就 k 值討論截痕區域圖形及其面積

- 當 $0 \leq k \leq 4$ 時，截痕區域為等腰三角形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{17}}{36}k^2$ 。當 $k = 4$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{16\sqrt{17}}{36}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變大。
- 當 $4 \leq k \leq 8$ 時，截痕區域為五邊形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{17}}{36} \times [-(k-8)^2 + 32]$ 。當 $k = 8$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{32\sqrt{14}}{36}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變大。
- 當 $8 \leq k \leq 9$ 時，即截痕區域為一四邊相等的四邊形(菱形)，截痕區域的面積 $\frac{\sqrt{17}}{36} \times [32]$ 。當 $k \in [8, 9]$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{32\sqrt{17}}{36}$ ，且其面積不會隨著 k 值的增加而改變。
- 當 $9 \leq k \leq 13$ 時，截痕區域為五邊形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{17}}{36} \times (-(k-9)^2 + 32)$ 。當 $k = 9$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{32\sqrt{17}}{36}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變小。
- 當 $13 \leq k \leq 17$ 時，截痕區域為一三角形，截痕區域的面積為 $\frac{\sqrt{17}}{36} \times (k-17)^2$ 。當 $k = 13$ 時，得最大截痕區域面積 $\frac{16\sqrt{14}}{36}$ ，且其面積隨著 k 值的增加而變小。

我們現在考慮一般 $a \times b \times c$ 長方體的探究，建立空間坐標系，將 $a \times b \times c$ 的長方體坐標化，令頂點坐標為 $O(0,0,0)$ 、 $A(a,0,0)$ 、 $B(0,b,0)$ 、 $C(0,0,c)$ 、 $D(a,b,0)$ 、 $E(0,b,c)$ 、 $F(a,0,c)$ 、 $G(a,b,c)$ 。以主對角線為法線的平面，因為法線的方向向量 (a,b,c) ，即為平面的法向量，令此平面方程式為 $ax + by + cz = k$ ，其中 $k \in [0, a^2 + b^2 + c^2]$ 。我們先就 $a < b < c$ 且 $a^2 + b^2 < c^2$ ，及 $k \in [0, a^2]$ ， $k \in [b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2]$ 為例說明，並將結論歸納於定理二。

- 當 $0 \leq k \leq a^2$ 時，平面 $ax + by + cz = k$ 與空間坐標系的 x 、 y 、 z 軸之截距分別為 $\frac{k}{a}$ 、 $\frac{k}{b}$ 、 $\frac{k}{c}$ ，且與長方體的三稜邊 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 之交點分別為 $A'(\frac{k}{a}, 0, 0)$ 、 $B'(0, \frac{k}{b}, 0)$ 、 $C'(0, 0, \frac{k}{c})$ ，如圖 4-2-3-1 所示。得 $\overline{A'B'} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}k}{ab}$ ， $\overline{B'C'} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}k}{bc}$ ， $\overline{C'A'} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}k}{ca}$ ，即截痕區域 $\Delta A'B'C'$ 為一三角形，再得截痕區域 $\Delta A'B'C'$ 的面積為

$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}k^2$ 。所以，當 $k = a^2$ 時，截痕區域面積有最大值為 $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}a^4$ ，且截痕為一三角形而且其面積隨著 k 值的增加而變大。

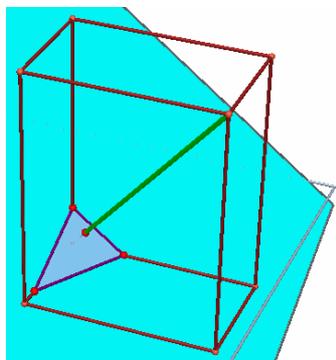


圖 4-2-3-1 平面 $ax+by+cz = k$ 截長方體，當 $0 \leq k \leq a^2$

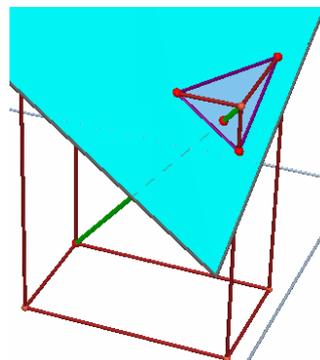


圖 4-2-3-2 平面 $ax+by+cz = k$ 截長方體，當 $b^2+c^2 \leq k \leq a^2+b^2+c^2$

2. 當 $b^2+c^2 \leq k \leq a^2+b^2+c^2$ 時，平面 $ax+by+cz = k$ 與空間坐標系的 x ， y ， z 軸之截距分別為 $\frac{k}{a}$ ， $\frac{k}{b}$ ， $\frac{k}{c}$ ，且與長方體的三稜邊 \overline{DG} ， \overline{EG} ， \overline{FG} 之交點分別為

$V_1(a, \frac{k-a^2-b^2}{c})$ ， $V_2(\frac{k-b^2-c^2}{a}, b, c)$ ， $V_3(a, \frac{k-a^2-c^2}{b}, c)$ ；如圖 4-2-3-2 所示，

得 $\overline{V_1V_2} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{ac}(a^2+b^2+c^2-k)$ ， $\overline{V_2V_3} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}(a^2+b^2+c^2-k)$ ，

$\overline{V_3V_1} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{bc}(a^2+b^2+c^2-k)$ ，即截痕區域 $\Delta A'B'C'$ 為三角形。截痕區域 $\Delta A'B'C'$

的面積為 $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}(k-a^2-b^2-c^2)^2$ 。當 $k = b^2+c^2$ 時，截痕區域面積最大值為

$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}a^4$ ，且截痕為一個三角形，其面積隨著 k 值的增加而變小。

定理二

以平面 $ax+by+cz = k$ ($0 \leq k \leq a^2+b^2+c^2$)，去截長方體 $a \times b \times c$ ，令 $f(k)$ 表示所得的截痕區域面積，則

1. 當 $0 \leq k \leq a^2$ 時，則截痕為三角形， $f(k) = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}k^2$ ，
2. 當 $a^2 \leq k \leq b^2$ 時，則截痕為四邊形， $f(k) = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc}(2a^2k - a^4)$ ；
3. 當 $b^2 \leq k \leq a^2+b^2$ 時，則截痕為五邊形，

$$f(k) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2abc} [-(k - a^2 - b^2) + 2a^2b^2];$$

4. 當 $a^2 + b^2 \leq k \leq c^2$ 時，則截痕為四邊形， $f(k) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2abc} (2a^2b^2)$;

5. 當 $c^2 \leq k \leq a^2 + c^2$ 時，則截痕為五邊形，

$$f(k) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2abc} [-(k - c^2)^2 + 2a^2b^2];$$

6. 當 $a^2 + c^2 \leq k \leq b^2 + c^2$ 時，則截痕為四邊形，

$$f(k) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2abc} (-2a^2k + a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2);$$

7. 當 $b^2 + c^2 \leq k \leq a^2 + b^2 + c^2$ 時，則截痕為三角形，

$$f(k) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2abc} (k - a^2 - b^2 - c^2)^2.$$



4-3 長方體主對角線穿過單位正方體的個數

我們以平行投影和格子點模式，探究 $a \times b \times c$ 長方體主對角線會穿過 $a+b+c-(h+k+l)+d$ 個單位正立方體，其中 $(a,b)=h$ ， $(a,c)=k$ ， $(b,c)=l$ ， $(a,b,c)=d$ 。

4-3-1 前言

學生提問一道三維空間的立體幾何問題：

一個 $7 \times 5 \times 4$ 的長方體是由 $1 \times 1 \times 1$ 的正立方體所堆積而成的，今連接主對角線 \overline{AG} ，求主對角線 \overline{AG} 會穿過多少個正立方體？

問題的關鍵是在長方體的主對角線會穿過幾個小正立方體，如說要在平面上畫出長方體的視角圖，然後再畫其主對角線來計算此主對角線所穿過的小正立方體的個數，其實是有困難的。於是我們嘗試藉由 3D 立體圖形的電腦軟體來進行輔助觀察。

針對學生的提問，我們建構了一個解題模式：利用平面上長方形的對角線所穿過的小單位正方形的問題為基礎，來探究在立體空間中的長方體的主對角線會穿過幾個小正立方體。也就是說運用平行投影的概念，將空間中的長方體投影在一平面上的影像會是一個長方形，而此長方形的對角線正好是長方體的主對角線的投影。我們首先引進平行投影與格子點的探究模式，繼而從簡單的情形開始進行探討，再推廣到一般情形。最後觀察整數邊長與所穿過的小正立方體的個數之關係式，預測公式，並予以證明。

4-3-2 平行投影和格子點的探究模式

我們先看平行投影模式。所有的投射線都互相平行，這種投影法叫做平行投影法，而在平行投影中，必須給出投射線的方向，若投射線垂直於投影面的平行投影叫做正投影法；如果投射線不垂直於投影面的平行投影叫做斜投影法。例如： $\triangle ABC$ 在平面 α 上的正投影是 $\triangle A'B'C'$ ，而斜投影是 $\triangle A''B''C''$ ，如圖 4-3-2-1 所示。其次，我們看格子點模式。將邊長皆為整數的長方體(或長方形)分割成若干個邊長為 1 的小正立方體 (或小正方形)，這些分割線的交點就稱為格子點，如圖 4-3-2-2 所示，而長方體的格子點經過平行投影之後仍然為長方形的格子點，且若長方體的主對角線通過格子點時，其經由平行投影而得的長方形的對角線也會經過格子點 (如圖 4-3-2-3 所示)；反之，則否。

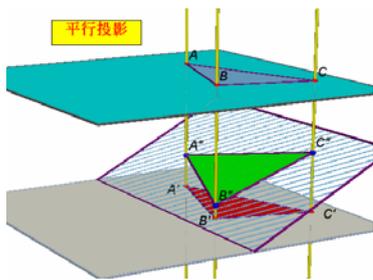


圖 4-3-2-1 三角形投影

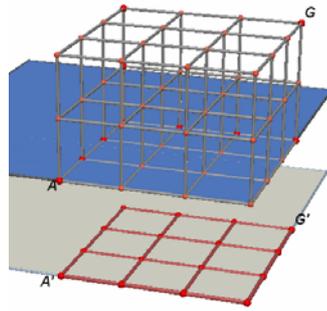


圖 4-3-2-2 3×3×3 方體投影

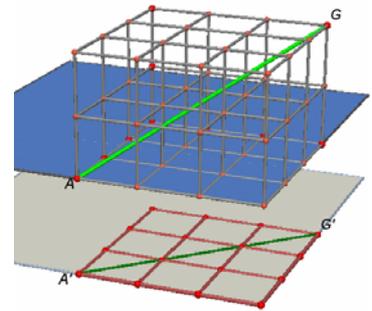


圖 4-3-2-3 長方體及其主對角線之投影

4-3-3 問題的探究

先從簡單的情形探究起，一個 $7 \times 7 \times 7$ 的正立方體是由 343 個單位正立方體所堆積而成，今連接主對角線 \overline{AG} ，求主對角線 \overline{AG} 會穿過幾個正立方體？將 $7 \times 7 \times 7$ 的正立方體坐標化，令 $A(0,0,0)$ ， $G(7,7,7)$ 。線段 \overline{AG} 的直線參數式為

$$(x, y, z) = (0 + 7t, 0 + 7t, 0 + 7t), t \in R.$$

當 $t = 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}, 1$ 時，所得之點 $(a, a, a), a = 1, 2, \dots, 7$ 皆為格子點，且在每兩點之間只穿過一個正立方體。其主對角線 \overline{AG} 會穿過 7 個正立方體。其次一個 $7 \times 5 \times 4$ 的長方體是由單位正立方體所堆積而成，今連接主對角線 \overline{AG} ，求主對角線 \overline{AG} 會穿過多少個正立方體？

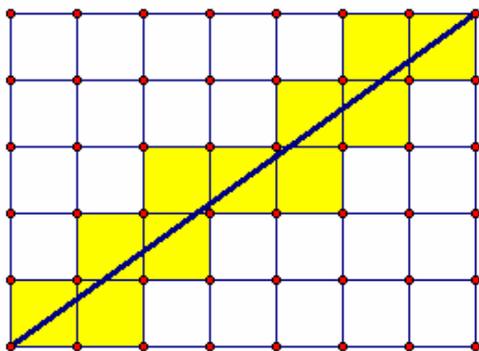


圖 4-3-3-1 主對角線穿過的正方形個數

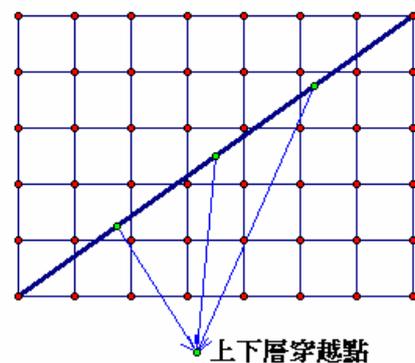


圖 4-3-3-2 主對角線在上下層的穿越點

我們先討論 7×5 的長方形，因為 5, 7 互質，其對角線上沒有格子點 (如圖 4-3-3-1 所示)，此對角線共經過 11 個正方形，以 $(7-1) + (5-1) + 1$ 表示。再討論上下層的穿越點，討論 5×4 的長方形，因為 4, 5 互質，長方體的主對角線會穿上下層的三個平面各一個交

點 (非格子點)，這三個點投影在底層的 7×5 的長方形之對角線上，並將其對角線三等分，而這三個點非格子點，亦非正方形邊上的點 (如圖 4-3-3-1 所示)。這三點的作用是主對角線在穿越上下層時，會穿過不同一個正立方體 (如圖 4-3-3-2 所示)，故共有 $(7-1)+(5-1)+(4-1)+1 = 11+3 = 14$ ，這提供我們猜測公式的基礎。

4-3-4 推廣到一般情形

我們接著推廣到 $a \times b \times c$ 長方體的一般情形。今連接主對角線 \overline{AG} ，求主對角線 \overline{AG} 會穿過多少個正立方體？

1. a, b, c 兩兩互質

(1) 先討論 $a \times b$ 的長方形，因為 $(a, b) = 1$ 互質，其對角線上沒有格子點，對角線共經過 $(a-1) + (b-1) + 1$ 個正方形。

(2) 再討論上下層的穿越點：討論 $b \times c$ 的長方形。因為 $(b, c) = 1$ 互質，所以長方體的主對角線會穿上下層的 $c-1$ 個平面各一個交點 (非格子點)。這 $c-1$ 個點投影在底層的 $a \times b$ 的長方形之對角線上，並將其對角線 $c-1$ 等分，而這 $c-1$ 個點非格子點，亦非正方形邊上的點，這 $c-1$ 點的作用是主對角線在穿越上下層時，會穿過不同一個正立方體 (以 $c-1$ 表示)，共有 $(a-1) + (b-1) + 1 + (c-1)$ 個 (舉例如圖 4-3-3-3 所示)。

2. a, b, c 其中只有二個互質，令其為 $(a, b) = 1, (b, c) = h, (a, c) = k$,

(1) 先討論 $b \times c$ 的長方形，因為 $(b, c) = h$ ，其對角线上有 $h+1$ 個格子點 (含端點)。將 $b \times c$ 的長方形分割成 $h \times h$ 個區塊，而對角線只會經過其中的 h 個區塊，為一個

$\frac{a}{h} \times \frac{b}{h}$ 的長方形，其 $(\frac{a}{h}, \frac{b}{h}) = 1$ 互質，且對角線在這些區塊中，會經過

$(\frac{a}{h}-1) + (\frac{b}{h}-1) + 1$ 個正方形。此對角線共經過 $h \times \{(\frac{a}{h}-1) + (\frac{b}{h}-1) + 1\} =$

$(a-h) + (b-h) + h$ 個正方形 (舉例如圖 4-3-3-4 所示)。

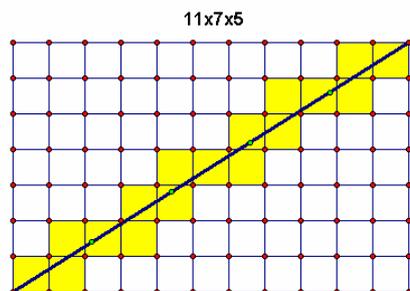


圖 4-3-3-3 主對角線穿過的正方形個數

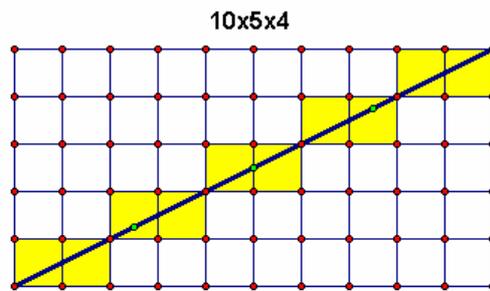


圖 4-3-3-4 主對角線在上下層的穿越點

(2) 再討論上下層的穿越點：討論 $a \times c$ 的長方形

因 $(a, c) = k$ ，又 $(a, b) = 1 \therefore (h, k) = 1$ ，在 $a \times c$ 的長方形中，其對角線上有 $k+1$ 個格子點，又長方體的主對角線會穿上下層的 $c-1$ 個平面各一個交點；這些交點中有 $k-1$ 個格子點，而這 $k-1$ 個格子點恰好落在 $a \times b$ 的長方形的格子線上。所以長方體的主對角線上的 $c-1$ 個點中有 $k-1$ 個格子點（不含端點），此主對角線投影在 $a \times b$ 的長方形對角線上，恰有 $c-1$ 個等分點，其中有 $k-1$ 個會落在格子線上。所以主對角線在穿越上下層時會經過 $(c-1) - (k-1) = (c-k)$ 個立方體，故穿越 $(a-h) + (b-h) + h + (c-k) = a+b+c-h-k$ 個單位正立方體。

3. a, b, c 其中只有二個不互質，令其為 $(a, b) = m, (b, c) = 1, (a, c) = 1$.

(1) 先討論 $a \times b$ 的長方形，因為 $(a, b) = m$ ，其對角線上有 $m+1$ 個格子點（含端點）。將 $a \times b$ 的長方形分割成 $m \times m$ 個區塊，而對角線只會經過其中的 h 個區塊，為一個

$\frac{a}{m} \times \frac{b}{m}$ 的長方形，其 $(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}) = 1$ 互質，且對角線在這些區塊中，會經過 $(\frac{a}{m}-1) + (\frac{b}{m}-1) + 1$ 個正方形。此對角線共經過 $m \times \{(\frac{a}{m}-1) + (\frac{b}{m}-1) + 1\} = (a-m) + (b-m) + m$ 個正方形。

(2) 再討論上下層的穿越點，討論 $b \times c$ 的長方形，因為 $(b, c) = 1$ 互質，長方體的主對角線會穿上下層的 $c-1$ 個平面各一個交點（非格子點）。這 $c-1$ 個點投影在底層的 $a \times b$ 的長方形之對角線上，並將其對角線 $c-1$ 等分，而這 $c-1$ 個點非格子點，亦非正方形邊上的點。這 $c-1$ 點的作用是主對角線在穿越上下層時，會穿過不同的正立方體（共有 $c-1$ 個），故總共會穿越 $(a-m) + (b-m) + m + (c-1) = a+b+c-m-1$ 個正立方體（舉例如圖 4-3-3-5 所示）。

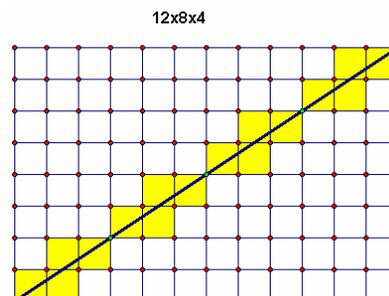
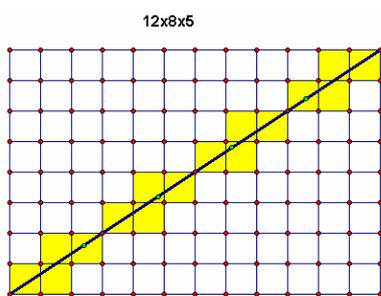


圖 4-3-3-5 $12 \times 8 \times 5$ 長方體之主對角線穿過的正方體個數 圖 4-3-3-6 $12 \times 8 \times 4$ 長方體之主對角線穿過的正方體個數

4. a, b, c 均不互質，令其最大公因數為 $(a, b, c) = d$ ，則 $a = a' \times d, b = b' \times d, c = c' \times d$ ，而 a', b', c' 的互質情形。

(1) 先將 $a \times b \times c$ 的長方體分割成 $d \times d \times d$ 個區塊，而主對角線只會經過其中的 d 個區塊，其為一個 $\frac{a}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{c}{d}$ 的長方體，其 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}) = 1$ 互質。設主對角線在這些區

塊中，會經過 t 個正立方體，則主對角線共經過 $d \times t$ 個正方形。

- (2) 再討論 t 值，即討論 $\frac{a}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{c}{d}$ 的長方體中，其主對角線會經過幾個正立方體。由結論知，若 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = h$ ， $(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}) = k$ ， $(\frac{b}{d}, \frac{c}{d}) = l$ ，則 $\frac{a}{d} \times \frac{b}{d} \times \frac{c}{d}$ 的長方體的主對角線會穿過 $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} - h - k - l$ 。所以 $t = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} - h - k - l$ ， $a \times b \times c$ 的長方體主對角線總共會穿越的正立方體數為

$$d \times \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} - h - k - l = a + b + c - hd - kd - ld \text{ (舉例如圖 4-3-3-6 所示)。}$$

由前述的探究中，可猜想邊長與所穿過的小正立方體的個數之關係式如下：

定理：

設 $(a, b) = h$ ， $(a, c) = k$ ， $(b, c) = l$ ， $(a, b, c) = d$ ，則 $a \times b \times c$ 長方體的主對角線會穿過 $a + b + c - (h + k + l) + d$ 個單位正立方體。

證明：因為 $a \times b \times c$ 長方體的長、寬、高分別為 a 、 b 、 c 單位長，可得在長、寬、高的方向上分別有 a 、 b 、 c 個小正立方體。所以，此長方體的主對角線分別在長、寬、高的方向會穿過 a 、 b 、 c 個小正立方體，又因為 $(a, b) = h$ ， $(a, c) = k$ ， $(b, c) = l$ ， $(a, b, c) = d$ 。所以，其主對角線在長與寬方向同時也會穿過 h 個小正立方體。

同理在長與高方向、寬與高方向分別同時也會穿過 k 、 l 個小正立方體

但又同時在長寬高三個方向會穿過 d 個小正立方體

因此，設 A 、 B 、 C 分別表示主對角線在長、寬、高方向的所穿過的小立方體所成的集合，由排容原理知，此主對角線會穿過的小立方體的個數為

$$\begin{aligned} & n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ & = a + b + c - (h + k + l) + d, \text{ 故得證。} \end{aligned}$$

4-3-5 結論

我們常使用代數方法研究圖形的幾何性質，尤其是在平面幾何問題中更常利用解析坐標法來討論其圖形的幾何性質，因此，要探究長寬均為整數的長方形其對角線所畫過的單位正方形個數，確實可以將長方形格子化，並將其對角線的方程式參數化，引進了坐標系及參數 t 的概念，這樣就可以透過參數 t 之值的變化來計算所畫過的單位正方形個數，如此的解題模型是可以解決平面上的問題，但是要解決空間中的延伸問

題卻會遇到困難，因此，這樣的解題模型缺少了深入與推廣，不得就此打住而往其他的思考方向前進。

此時換個方向思考，利用排容原理來討論長寬為 $m \times n$ 的長方形其對角線所畫過的單位正方形個數，其結論為 $m + n - (m, n)$ ，其中 (m, n) 為 m 與 n 的最大公因數，如果將此結論直接套用到空間中的長方體時，似乎合理但缺少了推理論證，於是藉由平行投影及格子點的概念，將平面問題類化到空間問題，進而解決了這個問題，這兩個問題的結論如下：

1. 設 $m, n \in N$ 且 $(m, n) = d$ ，則 $m \times n$ 長方形的對角線會畫過 $m + n - d$ 個單位正方形。
2. 設 $a, b, c \in N$ 且 $(a, b) = h$ ， $(a, c) = k$ ， $(b, c) = l$ ， $(a, b, c) = d$ ，則 $a \times b \times c$ 長方體的主對角線會穿過 $a + b + c - h - k - l + d$ 個單位正立方體。

透過對問題的理解與探究，可以讓學生體驗數學研究的過程，有助於學生培養發現問題、猜測結果、推理論證的能力，進而養成科學研究的嚴謹態度與積極精神，這是可以讓數學的計算測驗演變成有內涵的數學實驗課，也可以讓學生在課堂教學活動中的主體地位更確立、更主動。



參考文獻

參考文獻(按章節分)

第一章 緒論

- (1) National Research Council. (1996). *The National Science Education Standards*. Washington DC: National Academy Press. p.23.
- (2) 程海東，研究性學習模式初探教學，*教學與管理*，2001年9月。
- (3) 陸璟，探究性學習，上海市教育科學研究院智力開發研究所，中國教育和科研計算機網，2002年5月。
- (4) 裴小倩、朱家雄，發生在最近發展區內的“責任遷移”——維果斯基理論在早期教育應用中的“鷹架教學”，朱家雄學前教育網，2004年10月。
- (5) 李政豐，資訊科技融入數學教學模組實務的研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2003年6月。
- (6) 陳明璋，數學簡報系統——一個克服數位落差之老師專業發展環境，第十屆全球華人電腦教育應用大會，北京清華大學，2006年6月。

第二章 探究式學習的文獻探討

- (1) 林信男，適性化學習網站之研究：以高中數學為例，國立交通大學資訊研究所碩士論文，2000年。
- (2) 吳鐵雄，中華民國電腦應用教學與電腦輔助教學，*資訊與教育*，24，1993年。
- (3) 教育部中小學資訊教育總藍圖，2001年6月。
- (4) 中華人民共和國教育部制訂，普通高中數學課程標準，人民教育出版社，2003年7月。
- (5) 劉好，平面圖形教材的處理，國立台中師範學院數理教育學系，國立嘉義師範學院之「八十六學年度數學教育研討會」上發表的論文，1998年5月。
- (6) 左台益、梁勇能，國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究，*師大學報：科學教育類* 46(1,2)1-20，2001年。
- (7) Bishop, A. J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics education*. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16
- (8) Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
- (9) Gabriel J. Stylianides, & Andreas J. Stylianides. *Dynamic Investigation of an Optimisation Problem: Maximising the volume of Rectangular Prisms*. *Micromath*; Summer 2004; Vol. 20, 2; Academic Research Library.

第三章

- (1) G.波利亞，怎樣解題，九章出版社，台北，1997年。
- (2) 徐瀝泉，高斯函數和它的一個現實原型，數學傳播 27 卷 4 期。
- (3) 毛爾著，胡守仁譯，毛起來說三角，天下文化出版社，台北，2000年。
- (4) 張景中，平面幾何新路—解題研究，九章出版社，台北，1997年。
- (5) 胡炳生，數學解題思維方法，九章出版社，台北，1997年。
- (6) 嚴鎮軍等譯，通過問題學解題，九章出版社，台北，1997年。
- (7) 潘巧明，計算機技術支持下的數學情境設計，浙江省麗水師專計算機系，數學通報，2003年第5期。
- (8) 陸宏，研究性學習在訊息技術教學中的探索與實踐，山東師範大學傳播學院，中國教育和科研計算機網，2002年5月。

第四章 在 Cabri 3D 環境下的數學探究

- (1) 賈士代，立體幾何 34 講，凡異出版社，新竹，1999年。
- (2) 曹亮吉，阿草的葫蘆，遠哲科學教育基金會，台北，1996年。

參考文獻(按英文、中文分)

一、英文

- (1) National Research Council. (1996). *The National Science Education Standards*. Washington DC: National Academy Press. p.23.
- (2) Bishop, A. J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics education*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1), 7-16
- (3) Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
- (4) Gabriel J. Stylianides, & Andreas J. Stylianides. *Dynamic Investigation of an Optimisation Problem: Maximising the volume of Rectangular Prisms*. *Micromath*; Summer 2004; Vol. 20, 2; Academic Research Library.

二、中文

- (1) 程海東，研究性學習模式初探教學，教學與管理，2001年9月。
- (2) 陸璟，探究性學習，上海市教育科學研究院智力開發研究所，中國教育和科研計算機網，2002年5月。
- (3) 裴小倩、朱家雄，發生在最近發展區內的“責任遷移”——維果斯基理論在早期教育應用中的“鷹架教學”，朱家雄學前教育網，2004年10月。
- (4) 李政豐，資訊科技融入數學教學模組實務的研究，新竹市交通大學網路學習專班碩士論文，2003年6月。
- (5) 陳明璋，數學簡報系統----一個克服數位落差之老師專業發展環境，第十屆全球華人

- 電腦教育應用大會，北京清華大學，2006年6月。
- (6) 林信男，適性化學習網站之研究：以高中數學為例，國立交通大學資訊研究所碩士論文，2000年。
 - (7) 吳鐵雄，中華民國電腦應用教學與電腦輔助教學，資訊與教育，24，1993年。
 - (8) 教育部中小學資訊教育總藍圖，2001年6月。
 - (9) 中華人民共和國教育部制訂，普通高中數學課程標準，人民教育出版社，2003年7月。
 - (10) 劉好，平面圖形教材的處理，國立台中師範學院數理教育學系，國立嘉義師範學院之「八十六學年度數學教育研討會」上發表的論文，1998年5月。
 - (11) 左台益、梁勇能，國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究，師大學報：科學教育類 46(1,2)1-20，2001年。
 - (12) G.波利亞，怎樣解題，九章出版社，台北，1997年。
 - (13) 徐瀝泉，高斯函數和它的一個現實原型，數學傳播 27 卷 4 期。
 - (14) 毛爾著，胡守仁譯，毛起來說三角，天下文化出版社，台北，2000年。
 - (15) 張景中，平面幾何新路—解題研究，九章出版社，台北，1997年。
 - (16) 胡炳生，數學解題思維方法，九章出版社，台北，1997年。
 - (17) 嚴鎮軍等譯，通過問題學解題，九章出版社，台北，1997年。
 - (18) 潘巧明，計算機技術支持下的數學情境設計，浙江省麗水師專計算機系，數學通報，2003年第5期。
 - (19) 陸宏，研究性學習在訊息技術教學中的探索與實踐，山東師範大學傳播學院，中國教育和科研計算機網，2002年5月。
 - (20) 賈士代，立體幾何 34 講，凡異出版社，新竹，1999年。
 - (21) 曹亮吉，阿草的葫蘆，遠哲科學教育基金會，台北，1996年。