

# 國立交通大學

## 電機與控制工程學系

### 碩士論文

切換式系統實際可穩定之高階穩定條件之



**A High-order Practical Stabilizability Condition for a Class of  
Switched Systems**

研究生：陳宏泰

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十六年七月

切換式系統實際可穩定之高階穩定條件之  
研究

A high-order Practical Stabilizability Condition for a Class of  
Switched Systems

研 究 生：陳宏泰

Student: Hung-Tai Che

指 導 教 授：梁耀文 博士

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 六 年 七 月

# 切換式系統實際可穩定之高階穩定條件之研究

研究生：陳宏泰

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要

本論文主要主題為探討切換系統實際可穩定之相關問題，本論文中，我們首先回顧了一些實際可穩定的相關定義，接著陳述研究實際穩定性之動機，最後推導出對於任何非線性切換系統實際可穩定的充分條件以及切換律要如何選取。而接下來的主題是有關於可控性在切換系統上的研究，包含一些切換系統上可控的定義、可控的充分條件、以及切換法則與控制律要如何選取，最後並歸納出一套設計切換法則與控制律的演算法則。

# **A High-order Practical Stabilizability Condition for a Class of Switched**

Student: Hung-Tai Chen

Advisor: Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering

National Chiao Tung University

## **ABSTRACT**

Issues regarding practical stabilizability of a class of nonlinear switched systems and controllability of switched linear systems are addressed in this thesis. To avoid possible chattering behavior, a high-order sufficient condition and its associated algorithm for achieving practical stabilizability are proposed. It is shown that, under the designed switching law, the state is convergent to a neighborhood of the origin with pre-specified accuracy, while greatly alleviating the chattering phenomenon. On the other hand, this thesis also recalls some of the checking conditions for controllability of switched linear systems, and presents an algorithm to implement the checking condition and the state transfer tasks. Examples demonstrate the usage and the benefits of these approaches.

# 誌 謝

本篇論文得以順利完成需要感謝很多人的關心與協助。首先，我要感謝指導教授梁耀文博士的用心指導，在課業上提供寶貴的意見與想法來幫助我完成本篇論文，在生活上有任何的問題老師也都能適時的給予幫助並且提供正確且良好的觀念，使得自己在這兩年的學習中受益良多，對於往後的人生將有很大的助益。還有要感謝口試委員廖德誠博士、黃正自博士以及宋朝宗博士給予寶貴的建議與指導使得本論文更加的完整。

接下來要感謝蔡哲倫學長、黃智聖學長、江家禎以及徐聖棟學長在我遇到困難時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學昭銘、益康，陪伴了我兩年研究所生活，不管在任何時候總是給我很大的幫助與支持。而學弟們益銘、紹偉以及丞昶也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對我的幫助，使我的論文研究能夠更加順利。

最後要感謝我的家人，不管發生任何事情總是支持著我，並且給我最大的鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謝謝你們！我將這論文獻給你們。

# 目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
目錄	iii
圖目錄	iv
<b>第一章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	3
1.3 論文架構	5
<b>第二章 切換系統的高階穩定性條件</b>	<b>6</b>
2.1 切換系統的高階穩定性條件問題描述	6
2.2 多個非線性切換系統的高階穩定條件	7
2.3 多個線性系統的高階穩定性條件	10
2.4 模擬與討論	12
<b>第三章 切換系統的實際可穩定條件與切換律設計</b>	<b>14</b>
3.1 實際穩定 (Practical Stability) 之研究動機	14
3.2 切換系統實際穩定性的充分條件與切換律設計	17
3.3 模擬與討論	29

第四章 可控性在切換系統上的研究與控制律設計	37
4.1 可控性在切換系統上的問題描述	37
4.2 可控性在切換系統上的基本定義與充分條件	39
4.3 可控空間的基底計算方法	44
4.4 切換法則與控制律設計	47
4.5 模擬與討論	50
第五章 結論與未來研究方向	59
5.1 結論	59
5.2 未來研究方向	60



# 圖目錄

圖 1 兩個二階中性穩定系統，當系統凸組合為中性穩定時，模擬時間取10 秒：(a) $x_1, x_2$ 對時間分佈圖 (b) 系統切換順序 . . . . .	13
圖 2 兩個二階中性穩定系統，當系統凸組合為中性穩定時，模擬時間取10 秒： $x_1, x_2$ 狀態分佈圖 . . . . .	13
圖 3 系統(3.1)之軌跡模擬圖 . . . . .	16
圖 4 $\epsilon$ -實際穩定示意圖 . . . . .	17
圖 5 $\epsilon$ -實際漸進穩定示意圖 . . . . .	18
圖 6 證明定理2之示意圖 . . . . .	23
圖 7 當初始值選取為 $x_0 = 4.8$ 時，範例3.2之狀態響應圖 . . . . .	32
圖 8 當初始值選取為 $x_0 = 4.8$ 時，範例3.2之切換訊號圖 . . . . .	32
圖 9 當初始值選取為 $x_0 = -4.8$ 時，範例3.2之狀態響應圖 . . . . .	33
圖 10 當初始值選取為 $x_0 = -4.8$ 時，範例3.2之切換訊號圖 . . . . .	33
圖 11 範例3.3之相位 (phase) 平面圖 . . . . .	36
圖 12 範例3.3 狀態 $x_1$ 之狀態響應圖 . . . . .	36
圖 13 範例3.3 狀態 $x_2$ 之狀態響應圖 . . . . .	36
圖 14 當切換次數選取為6次時，範例4.1之狀態空間響應圖 . . . . .	52
圖 15 當切換次數選取為6次時，範例4.1之狀態 $x_1$ 對時間響應圖 . . . . .	53
圖 16 當切換次數選取為6次時，範例4.1之狀態 $x_2$ 對時間響應圖 . . . . .	53
圖 17 當切換次數選取為6次時，範例4.1之狀態 $x_3$ 對時間響應圖 . . . . .	53
圖 18 當切換次數選取為9次時，範例4.1之狀態空間響應圖 . . . . .	54
圖 19 當切換次數選取為9次時，範例4.1之狀態 $x_1$ 對時間響應圖 . . . . .	54
圖 20 當切換次數選取為9次時，範例4.1之狀態 $x_2$ 對時間響應圖 . . . . .	54
圖 21 當切換次數選取為9次時，範例4.1之狀態 $x_3$ 對時間響應圖 . . . . .	55



圖 22 當切換次數選取為 21 次時，範例 4.1 之狀態空間響應圖 . . . . . 55

圖 23 當切換次數選取為 21 次時，範例 4.1 之狀態  $x_1$  對時間響應圖 . . . . . 55

圖 24 當切換次數選取為 21 次時，範例 4.1 之狀態  $x_2$  對時間響應圖 . . . . . 56


圖 25 當切換次數選取為 21 次時，範例 4.1 之狀態  $x_3$  對時間響應圖 . . . . . 56



# 第一章

## 緒論

### 1.1 研究背景



由於先進科技的發展和進步，目前工程上實際運作的系統大多是以一種所謂混合式的系統 (hybrid systems) 方式呈現。這種混合式的系統是一種同時包含連續時間動態系統和離散事件動態系統以及兩者相互耦合作用的複雜系統。而切換系統是以控制理論的角度來研究混合系統的重要模型。此系統一般包括一組有限的子系統和一個描述子系統之間如何切換的切換規則。每個子系統由一個微分或差分方程式所描述，且在某一個時刻恰有一個子系統產生動作，至於是那個系統則完全由切換規則所決定。常見的切換式系統包含由智慧型控制，模糊控制 (fuzzy control)，適應性控制 (adaptive control)，可變結構控制 (variable structure control) 等等控制技術所衍生的多模式 (multiple modalities) 系統之間相互切換的實際例子。由於實際應用的系統通常都是極其複雜的混合系統，所以切換法則的選取將直接影響到整個系統的穩定性。在過去30年中，切換系統為一個熱門的研究主題，如果在google網頁上，搜尋”Switching Systems”會找到3410000多個相關連結，在Sciencedirect上，

則可找到1000多篇有關切換系統的文章，也反映了人們對於切換系統研究興趣的增長。在文獻上已經有許多實際應用切換控制的例子被提出來，例如：將切換式系統觀念應用在磁盤驅動器[20]、步進馬達[9]、短距離或垂直升降的飛機[42]、電力系統[21]、化工程序控制、生物學[3], [24],[27]、機械系統[16]、汽車變速系統[36], [49]、自動導航系統[34], [12], [54]、電腦控制系統、網路與通訊系統、和交通管理等等[20],[19],[23], [9],[2],[50], [31]。接下來我們簡單提出二個切換系統的實際例子：

**範例 1.1**：飛行器的經度動態模式[5]

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \dot{x} = f(x, u, p) = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_{p(t)}$$

其中  $q$  為俯仰率 (*the pitch rate*)， $\alpha$  為攻角 (*the constrained angle of attack*)， $p(t) \in \{1, 2\}$  為切換法則，控制變數  $u_{p(t)}$  是飛機與水平之間的夾角。而上述的控制系統其目的在於控制飛行角度，使得攻角  $\alpha \leq \alpha_{lim}$ 。而輸出方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{n}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} u_{p(t)}$$

其中  $n_z$  為法向加速度 (*normal acceleration*)。而此控制系統主要是在控制飛行器的法向加速度，使得飛行器可以達到飛行員要求的速度。而整個飛行器的系統有兩個控制器，分別產生兩種輸出

$$u_1 = -Fx + k_1\alpha_{lim}$$

$$u_2 = -Gx + k_2r(t)$$

在這裡  $u_1$  為穩定入侵角所設計之控制器輸出，而  $u_2$  的控制室使  $n_z$  追蹤至  $r(t)$ ，其中  $r(t)$  為要求的飛行速度。所以，經由系統的切換，可以隨時調整飛行器的飛行角度與速度，讓飛行器可以隨飛行員的控制而飛往目的地。並且有一個最大控制法則：

$$p(t) = \max(u_1, u_2)$$

使得飛行器能夠在一個安全的狀態下飛行。

範例 1.2 : 汽車手排檔的簡易動態系統 [14]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1 + \beta(p)}[-\alpha(x_2) + u]\end{aligned}$$

其中  $x_1$  為車速， $x_2$  為引擎每分鐘之轉速， $u \in [0, 1]$  為節流筏的位置， $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  為手排檔的檔數。當  $x_2 > 0$ ， $\alpha(x_2) > 0$ ， $\beta(p)$  為  $p$  函數。當汽車換檔時， $\beta(p)$  也有所不同，系統切換於不同的線性系統之間加上控制節流筏以達到駕駛所要求的速度。

切換式系統的研究動機主要是來自於許多實際的系統本質上常是以多重模式 (multiple model) 的形式來呈現，而這些子系統又常需要倚靠不同的環境因子或相關參數來做具體的描述。智慧型控制、適應性控制及可變結構控制等控制策略也是基於在不同的環境或參數下進行不同的切換而形成多重模式的切換系統。因此，由於環境的需求與工程技術的進步，切換式系統的穩定性與性能分析有其實際的需要與價值。



## 1.2 研究動機

考慮下列切換系統

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

其中  $f_i(x)$  為 locally Lipschitz 連續。在 [48] 之中提供了一個判斷存在穩定切換律的條件以及建構穩定切換律的方法。以下是這存在穩定切換律的判斷條件：

假設  $V(x)$  為一個擁有所有連續  $N$  階偏導數的正定函數，且集合  $\Omega_r = \{x | V(x) < r\}$  為有界集合，若滿足以下任一個情況，系統 (1.1) 中存在穩定法則  $\sigma(x)$ 。

1. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} < 0$
2. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \leq 0$  且對於所有  $x \in M \cap \Omega_r$ ，存在整數  $l > 1$  使得  $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x)\} < 0$  但對於所有的  $k < l$ ， $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^k V(x)\} = 0$

其中

$$M := \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) = 0\} \quad (1.2)$$

且  $\forall x \in M$

$$I(x, k) := \{i \mid L_{f_i}^j V(x) = 0, j = 1, \dots, k\} \quad (1.3)$$

而穩定的切換律可選取為下列形式：

$$\sigma(x) := \begin{cases} \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} & \text{if } x \notin M \cap \Omega_r \\ \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x)\} & \text{if } x \in M \cap \Omega_r \end{cases} \quad (1.4)$$

雖然此切換律在理論上可以保證系統軌跡最後會收斂到原點，但是在往後章節中，會說明系統在原點附近可能會產生一種所謂的”Zeno”效應，也就是說系統可能每秒要切換無限多次，最後軌跡才會收斂到原點，故在往後的章節，我們將引進實際 (Practical) 穩定性的一些觀念，並且推導系統 (1.1) 實際可穩定的充分條件，並且提出如何決定切換律。



### 1.3 論文架構

此篇論文主要可分為下列四章：第二章首先介紹兩個線性系統之凸組合 (convex combination) 為中性穩定時，系統存在穩定切換律的充分條件，並且推廣至多個非線性系統上。而第三章引入實際可穩定性的一些觀念，並且推倒實際可穩定性的充分條件與切換律的選取。第四章為可控性 (Controllability) 在切換系統上的研究，並介紹 [56] 中可控的一些充分條件以及控制法則的選取與切換律如何設計，且模擬一些範例來驗證理論的正確性，第五章則為此論文之總結，並且提供一些未來的研究方向。



## 第二章

# 切換系統的高階穩定性條件

接下來在這個章節，我們要來討論當切換系統凸組合為中性穩定時的穩定切換條件。

- 2.1: 介紹尋找切換系統高階穩定性條件的動機與用途。
- 2.2: 推廣凸組合為中性穩定的條件至非線性切換系統。
- 2.3: 將凸組合為中性穩定的條件應用在多個線性系統。

### 2.1 切換系統的高階穩定性條件問題描述

若我們考慮的系統為

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

[48] 中提出了當兩個子系統滿足了  $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$  為一個赫維茲矩陣時則系統 (2.1) 可經由切換達到狀態穩定的目的。而 [1] 中將此條件推廣為

(H1:) 若存在  $\alpha \in (0, 1)$  使得  $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$  為中性穩定 (Neutral stable)。

(H2:) 當  $x^t P A_1 x = x^t P A_2 x = 0$  時, 且  $x \neq 0$

$$\Rightarrow \forall \beta \in [0, 1], x^t (P A_1 + B^t P) (\beta A_1 + (1 - \beta) A_2) x \neq 0$$

其中 (H1) 中  $A_{eq}$  為中性穩定，代表  $A_{eq}$  的所有特徵值均位於複數平面虛軸的左半面，且在虛軸上的特徵值為單根 (simple)。在 [1] 中，作者證明若滿足上述兩個條件 (H1)-(H2) 則可以利用以下切換法則使得切換系統  $\dot{x} = A_{\rho(x)}x$  達到穩定。

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x^t P B x \leq 0 \\ 2 & \text{當 } x^t P B x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

且  $B := A_1 - A_2$ ，當滿足條件 (H1) 時，我們可以得知對所有  $x \neq 0$ ， $V_i(x) = x^t P A_i x \leq 0$ 。而當滿足條件 (H2) 時，可以保證系統在  $\dot{V} = 0$  的唯一不變集為零，因此我們可以得知系統將會收斂至原點。另外分析切換律我們可以發現當  $x^t P A_1 x < x^t P A_2 x$  時，切換至  $A_1$  系統，當  $x^t P A_2 x < x^t P A_1 x$  時，切換至  $A_2$  系統。因此，我們得到當  $\dot{V}_i$  為最小時，切換至第  $i$  個系統，可使系統 (2.1) 穩定。根據分析我們將此定理延伸至多個線性系統及非線性系統，如下列章節。

## 2.2 多個非線性切換系統的高階穩定條件

上一節中介紹的情況是針對兩個線性系統，然而在一般的情況之下系統可能並非僅為兩個線性系統。因此在這一節中我們要將上一節的結果推廣到  $N$  個非線性不穩定系統，所以我們考慮以下非線性系統

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

其中  $f_i(x), i = 1, \dots, N$  為順滑 (smooth) 函數，假設對於每個子系統  $i$ ， $f_i(0) = 0$  且原點不是任何 (2.3) 的子系統的漸近平衡點。我們所要做的目標就是建構出一個與狀態相關的切換規則  $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, N\}$  來切換這  $N$  個系統來漸進穩定以下系統的狀態軌跡

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(x)}(x(t)) \quad (2.4)$$

因此我們的主要目的就是要推導一個穩定的充分條件，並且建構一個切換法則  $\sigma(x)$  使得當  $t \rightarrow \infty$  時  $x(t) \rightarrow 0$



推導定理之前，我們先介紹幾個往後會用到的定理。

**輔助定理 2.1 :**

假設  $\phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一解析函數，且當  $t = t_0$  時  $\dot{\phi}(t_0) < 0$ 。則存在  $\delta > 0$ ，使得對於所有的  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ， $\phi(t) < \phi(t_0)$  且在所有  $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ ， $\phi(t) > \phi(t_0)$

利用輔助定理 (2.1)，我們可以衍伸出以下的結果

**輔助定理 2.2 :**

令  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  為一個正定函數， $x(t)$  為  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  的解。假設  $V$  的任意皆導數沿著系統  $f$  存在，若存在  $N > 1$

使得

$$\dot{V}(x(t_0)) = \ddot{V}(x(t_0)) = \cdots = V^{(N-1)}(x(t_0)) = 0, \quad V^{(N)}(x(t_0)) < 0 \quad (2.5)$$

則必定存在一正數  $\delta > 0$  使得

$$\forall t \in (t_0, t_0 + \delta), \quad \dot{V}(x(t)) < 0 \quad (2.6)$$

證明：

由於  $V^{(N)}(x(t_0)) < 0$  且  $V^{(N-1)}(x(t_0)) = 0$ ，根據輔助定理 2.1，我們可以找到一個正數  $\delta > 0$ ，使得

$$\forall t \in (t_0, t_0 + \delta), \quad V^{(N-1)} < 0 \quad (2.7)$$

。又根據平均值定理我們可以知道  $V^{(N-2)}(x(t))$  在  $(t_0, t_0 + \delta)$  為絕對遞減函數。由於  $V^{(N-2)}(x(t_0)) = 0$ ，則可知

$$\forall t \in (t_0, t_0 + \delta), \quad V^{(N-2)}(x(t)) < 0 \quad (2.8)$$

以此類推我們可以得到對所有  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ， $\dot{V}(x(t)) < 0$ ，故得證。 ■

為了往後描述方便我們定義以下兩個集合

$$M := \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) = 0\} \quad (2.9)$$

且  $\forall x \in M$

$$I(x, k) := \{i \mid L_{f_i}^k V(x) = 0, j = 1, \dots, k\} \quad (2.10)$$

從上式我們可以清楚的看到假如有兩個整數  $k_1 < k_2$ ，則  $I(x, k_1) \supseteq I(x, k_2)$ 。

**定理 1 :**

假設  $V(x) > 0$  且具有連續  $N$  階偏導數，集合  $\Omega_r := \{x \mid V(x) < r\}$  為一有界集合，若滿足以下任一個情況，系統 (2.3) 中存在穩定法則  $\sigma(x)$ 。

1. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} < 0$
2. 對所有非零的  $x \in \Omega_r$ ， $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \leq 0$  且對於所有  $x \in M \cap \Omega_r$ ，存在整數  $l > 1$  使得  $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x)\} < 0$  但對於所有的  $k < l$ ， $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^k V(x)\} = 0$

其中穩定切換法則為以下形式

$$\sigma(x) := \begin{cases} \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} & \text{if } x \notin M \cap \Omega_r \\ \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^l V(x)\} & \text{if } x \in M \cap \Omega_r \end{cases} \quad (2.11)$$

證明可參照 [58]。

## 2.3 多個線性系統的高階穩定性條件

上一節的條件都是針對 $N$ 個非線性系統，本節當中我們考慮一個特殊的情況，當 $V(x)$ 為二次函數形式且系統為線性不穩定系統時。即 $V(x) = x^T P x$ 且 $f_i(x) = A_i x$ 其中 $P > 0$ 為對稱正定矩陣。我們的目的即將定理1的結果來產生一個線性切換系統可穩定的充分條件。假設系統(2.3)的所有子系統皆不穩定即 $A_i, i = \dots, N$ 皆不是赫維茲矩陣。則在這情況下集合(3.19)與(3.19)則可改寫成

$$M = \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} x^T P A_i x = 0\} \quad (2.12)$$

$$I(x, k) = \{i \mid x^T (\sum_{j=0}^m C_j^m \cdot (A_i^j)^T P A_i^{m-j}) x = 0, 1 \leq m \leq k\} \text{ 對每一個 } x \in M \quad (2.13)$$

其中 $C_j^m := \frac{m!}{j!(m-j)!}$ ，經由定理1的推論，我們可以獲得以下結果

**序列定理 1** 若存在一個矩陣 $P > 0$ ，使得以下情況之一成立則系統 $\{A_1, \dots, A_N\}$ 中存在穩定切換律 $\sigma(x)$ 如下：

1.  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} < 0 \quad \forall x \neq 0$
2.  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \leq 0$  且  $\forall x \in M, \exists$  一個整數  $l > 0$  使得
 
$$\min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^l C_j^l \cdot (A_i^j)^T P A_i^{l-j}) x\} < 0$$
 且對所有  $k < l$ ,
 
$$\min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^k C_j^k \cdot (A_i^j)^T P A_i^{k-j}) x\} = 0.$$

另外，其對應的切換規則為

$$\begin{aligned} \text{當 } x \notin M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \\ \text{當 } x \in M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{i \in I(x, l-1)} \{x^T (\sum_{j=0}^m C_j^l \cdot (A_i^j)^T P A_i^{l-j}) x\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

假設序列定理1中 $l = 2$ 時，則我們可得到以下二階檢驗條件。

**序列定理 2** 若存在一個矩陣 $P > 0$ ，使得以下兩個中其中一個情況成立則系統 $\{A_1, \dots, A_N\}$ 中存在穩定切換律 $\sigma(x)$ ：

1. 對所有  $x \neq 0$ ,  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} < 0$
2. 對所有  $x$ ,  $\min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \leq 0$  且對於所有  $x \in M$ 

$$\min_{i \in I(x,l)} \{x^T (A_i^T P A_i + P A_i^2) x\} < 0$$

而穩定切換律為

$$\begin{aligned} \text{當 } x \notin M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{x^T P A_i x\} \\ \text{當 } x \in M \text{ 時 } \sigma(x) &= \arg \min_{i \in I(x,l)} \{x^T (A_i^T P A_i + P A_i^2) x\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

即可使得系統  $\{A_1, \dots, A_N\}$  穩定。



## 2.4 模擬與討論

在這一節我們要以簡單的例子來說明第本章中當切換系統凸組合為中性穩定時，如何判斷系統是否存在穩定切換律以及如何切換使得系統穩定。

範例 2.1 考慮系統

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_1, A_2$  系統的軌跡皆為 limit cycles. 令  $P$  為單位矩陣則

$$x^T P A_1 x = x_1 x_2$$

$$x^T P A_2 x = -x_1 x_2$$

因此對於所有的  $x$ ， $\min_{1 \leq i \leq 2} \{x^T P A_i x\} = \min\{x_1 x_2, -x_1 x_2\} \leq 0$

則

$$\begin{aligned} M &= \{x \neq 0 \mid x^T P A_1 x = x^T P A_2 x = 0\} \\ &= \{x \neq 0 \mid x_1 x_2 = 0\} \\ I(x, 1) &= \{1, 2\}, \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

由於  $i \in I(x, 1)$ ， $\min\{x^T (A_i^T P A_i + P A_i^2) x\} = \min_{x \in M} \{2x_1^2 - x_2^2, -x_1^2 + 2x_2^2\} < 0, \quad \forall x \in M$

根據序列定理 1，我們可以得知當  $x \notin M$ ，即  $x_1, x_2$  均不為零時

$$x_1 x_2 < 0, \quad \sigma(x) = 1$$

$$-x_1 x_2 < 0, \quad \sigma(x) = 2$$

當  $x \in M$  時

$$x = [0, x_2], \quad \sigma(x) = 1$$

$$x = [x_1, 0], \quad \sigma(x) = 2$$

利用切換法則 (2.14)，任意的選擇初始值  $x_0 = [-3, 2]'$ ，我們可以得到使得系統狀態由初始值收斂到零如以下模擬結果。

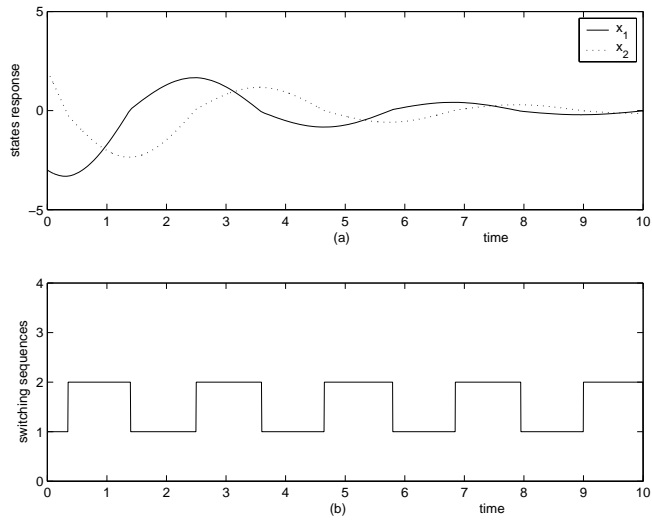


圖 1: 兩個二階中性穩定系統，當系統為凸組合中性穩定時，模擬時間取 10 秒：(a)  $x_1, x_2$  對時間分佈圖 (b) 系統切換順序

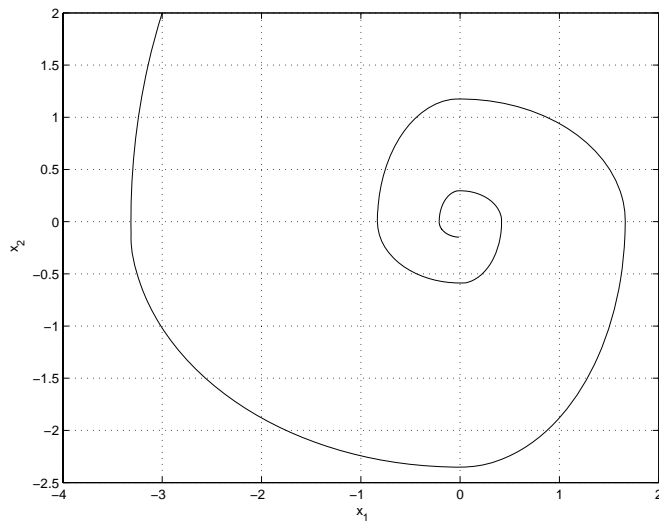


圖 2: 兩個二階中性穩定系統，當系統為凸組合中性穩定時，模擬時間取 10 秒： $x_1, x_2$  狀態分佈圖

## 第三章

# 切換系統的實際可穩定條件與切換律設計

接下來在這個章節，我們要來討論有關實際可穩定性(Practical Stability)的問題，以及系統為實際穩定的充分條件與切換律設計。

3.1: 切換系統實際(Practically)穩定之研究動機。

3.2: 介紹切換系統實際可穩定的充分條件與切換律設計。

3.3: 模擬與討論。

### 3.1 實際穩定(Practical Stability)之研究動機

上一章介紹了切換系統的高階穩定條件，雖然理論保證系統在可穩定的條件下，狀態最後會收斂到原點，但是當系統軌跡足夠接近原點時，可能會產生一個所謂的Zeno效應，也就是說；系統每秒可能要經過無限多次切換，軌跡才能收斂到原點，可用下列例子來說明。

範例 3.1 :

考慮系統

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1)$$

其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2.5 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$f_3(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2.5 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$f_4(x) = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

若定義李亞普諾夫函數

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

經過簡單計算，可知

$$L_{f_1}V(x) = -3x_1 + 2.5x_2 \quad (3.6)$$

$$L_{f_2}V(x) = -2.5x_1 - 3x_2 \quad (3.7)$$

$$L_{f_3}V(x) = 3x_1 - 2.5x_2 \quad (3.8)$$

$$L_{f_4}V(x) = 2.5x_1 + 3x_2 \quad (3.9)$$

故我們可知對於所有  $x \in R^2$ ， $\min_{1 \leq i \leq 4} \{L_{f_i}V(x)\} \leq 0$

根據定理 1 將切換律選取為

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ 2 & x_1 > 0, x_2 \geq 0 \\ 3 & x_1 \leq 0, x_2 > 0 \\ 4 & x_1 < 0, x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$



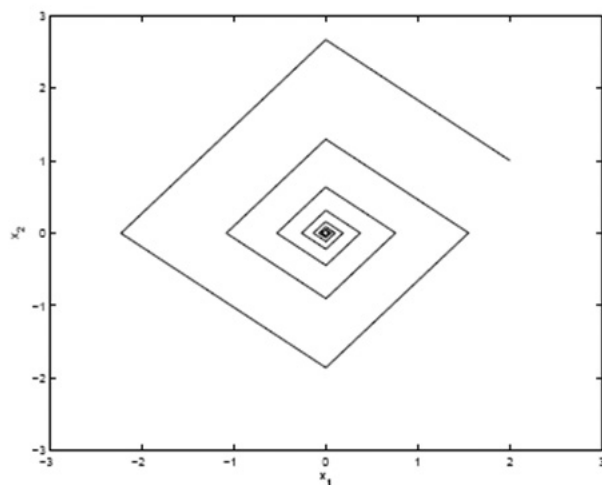


圖 3: 系統 (3.1) 之軌跡

若初始值選取為  $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  其軌跡如上圖所示

由圖 1 可知，軌跡越接近原點，切換次數越頻繁，且假如想要收斂到原點，在原點附近系統可能要切換無限多次，在實際系統中通常也不太可能達成，故我們可能會有一種想法，是否能退一步，雖然軌跡無法到達原點，但是可以進入到一個我們能夠接受的區域內，而實際穩定性主要討論的就是這一類的問題。

## 3.2 切換系統實際穩定性的充分條件與切換律設計

考慮系統

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

其中  $f_i : R^n \rightarrow R^n$  為 locally Lipschitz continuous 函數。

在介紹相關定理之前，首先先介紹有關於實際 (practically) 穩定性的相關定義及一些往後證明需要用到的輔助定理。

**定義 3.1**：考慮系統 (3.11)，給定  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta = \delta(\epsilon)$  對於任意初始值  $x(0) \in B(0, \delta)$  若軌跡  $x(t) \in B(0, \epsilon)$ ， $t \geq 0$  則稱此系統為  $\epsilon$ -實際穩定

可以下列示意圖來解釋

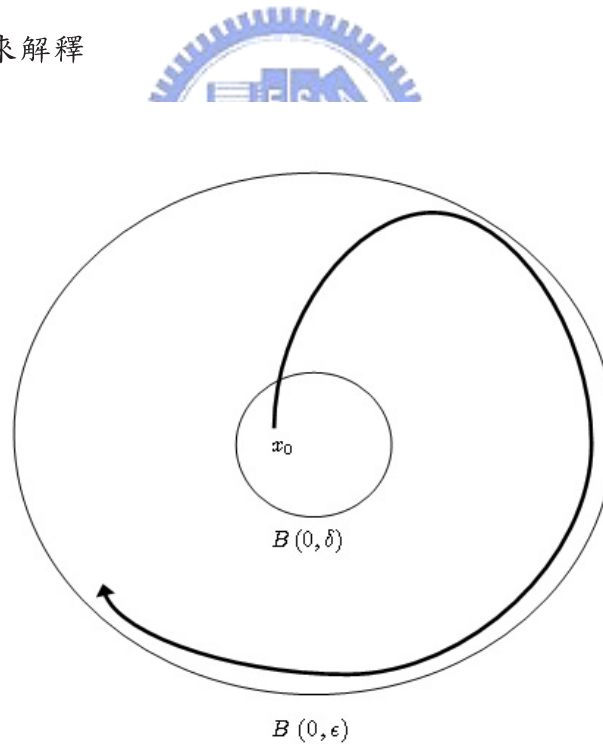


圖 4:  $\epsilon$ -實際穩定示意圖

**定義 3.2** : 考慮系統 (3.11), 若系統為  $\epsilon$ -實際穩定,  $D$  為包含原點的任意區域, 若滿足  $\forall x(0) \in D, \exists T = T(x(0))$ , 且軌跡  $x(t) \in B(0, \epsilon), t \geq T$  則稱此系統為  $\epsilon$ -實際漸進穩定。

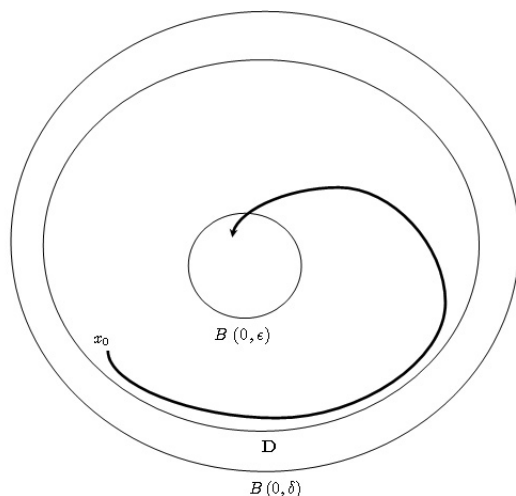


圖 5:  $\epsilon$ -實際漸進穩定示意圖

**輔助定理 3.1** :

假設  $f : \Omega \rightarrow R$  為一連續函數, 其中  $\Omega \subset R^n$  為一緊緻集 (*compact set*), 則存在  $x_1, x_2 \in \Omega$ , 使得

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in \Omega$$

亦即,  $f(x)$  在緊緻集  $\Omega$  中, 有極大值與極小值。

**輔助定理 3.2** :

$f : \Omega \rightarrow R$  為連續函數, 若  $\Omega \subset R^n$  為一緊緻集 (*compact set*), 則  $f$  為一均勻連續 (*uniformly continuous*) 函數。亦即  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  使得

$$\|x_a - x_b\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x_a) - f(x_b)\| \leq \epsilon \quad (3.12)$$

### 輔助定理 3.3 :

$M$  為  $R^n$  的一個子集合,  $V(x) : R^n \rightarrow R$  為一正定函數, 假設對於所有的  $x \in M$ ,

$$L_{f_1} V(x) = 0, L_{f_j} V(x) > 0 \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (3.13)$$

則必存在集合  $M$  之一鄰域  $N(M)$  使得

$$\forall x \in N(M), L_{f_j} V(x) > 0 \quad (3.14)$$

### 輔助定理 3.4 :

假設  $\phi(x)$  及其任意階導數在  $|x - a| < R$  均連續, 則  $\phi(x)$  可用有限多項之泰勒 (Taylor) 多項式與其餘項 (Remainder) 的總和來表示:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\phi^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n + R_N(t) \quad (3.15)$$

其中

$$R_N(t) = \frac{\phi^{(N)}(\eta)}{N!} (t - t_0)^N \quad (3.16)$$

$\eta$  為區間  $(t_0, t)$  之一點。

### 輔助定理 3.5 :

考慮方程式 (3.15),  $\phi(x)$  具有連續  $N$  階導數假設, 假設  $N$  為一奇數, 且

$$\phi'(t_0) = \phi''(t_0) = \dots = \phi^{(N-1)}(t_0) = 0, \quad \phi^{(N)}(t_0) < 0 \quad (3.17)$$

則存在  $\delta > 0$ , 使得  $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \phi(t)$  為絕對遞減。

### 輔助定理 3.6 :

假設  $\Omega$  為  $R^n$  空間的一個子集合,  $x^*$  為集合  $\Omega$  中的一個內點,  $f : \Omega \rightarrow R, f \in C^2$ , 若  $x^*$  為  $\Omega$  中的一個相對極大值, 則  $x^*$  為滿足

1.  $\nabla f(x^*) = 0$

$$2. F(x^*) \leq 0$$

其中

$$F(x) := D^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

介紹完一些實際穩定的相關定義與輔助定理，本節的目的即試圖找出一有效的 (valid) 切換律，且證明系統 (3.11) 在此切換律下為  $\epsilon$ -實際穩定。

為了往後表示方便，我們在此先回顧幾個集合的定義

$$M := \{x \neq 0 \mid \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) = 0\} \quad (3.19)$$

且  $\forall x \in M$

$$I(x, k) := \{i \mid L_{f_i}^j V(x) = 0, j = 1, \dots, k\} \quad (3.20)$$

根據集合  $M$  的定義，我們可以將其分解為各個子集合之聯集，亦即

$$M = M_1 \cup M_2 \cdots \quad (3.21)$$

其中  $M_j, j = 1, 2, \dots$  皆為連通集 (connected set)。

接著下面這個定理將介紹系統 (3.11) 為  $\epsilon$ -實際穩定的充分條件，以及如何決定切換律。

**定理 2 :**

假設  $V(x)$  為一個擁有所有連續  $l$  階偏導數的正定函數，其中  $l$  為一奇數，且集合  $\Omega_\rho := \{x \mid V(x) \leq \rho\}$  為一有界 (bounded) 集合，若滿足下列條件，則系統 (3.11) 存在  $\epsilon$ -實際穩定切換律  $\sigma(x)$ 。

1.  $\forall x \in M_j$ ，集合  $I(x, 1)$  內僅含單一元素。

2. 對所有非零的  $x \in \Omega_\rho$  ,  $\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \leq 0$  且對於所有  $x \in M_j \cap \Omega_\rho$  , 存在奇數

$l > 1$  使得  $L_{f_i}^l V(x) < 0$  , 且對於所有的  $k < l$  ,  $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^k V(x)\} = 0$

而穩定切換律  $s$  選取方式如下:

步驟1 : 先設定  $m = 0, t_0 = 0$

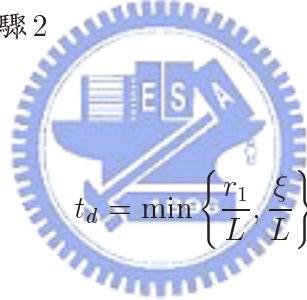
步驟2 : 假如  $x \notin \Omega_{\frac{\beta}{2}}$  , 則作用在時刻  $[mt_d, (m+1)t_d)$  的系統將選取為

$$i_m = \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \quad (3.22)$$

若  $x \in \Omega_{\frac{\beta}{2}}$  , 則作用在時刻  $[mt_d, (m+1)t_d)$  與前一時刻  $[(m-1)t_d, mt_d)$  作用的子系統相同。

步驟3 : 再設  $m=m+1$  且返回步驟2

其中



$$t_d = \min \left\{ \frac{r_1}{L}, \frac{\xi}{L} \right\} \quad (3.23)$$

$$\xi = \inf_{V(x)=\beta, V(y)=\frac{\beta}{2}} \|x - y\| \quad (3.24)$$

$$\Omega_{\frac{\beta}{2}} := \left\{ x \mid V(x) \leq \frac{\beta}{2} \right\} \quad (3.25)$$

以及

$$L = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_i(x)\| \right\} \quad (3.26)$$

$$\Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}} = \Omega_\rho - \text{Int} \left( \Omega_{\frac{\beta}{2}} \right) := \left\{ x \in R^n, \frac{\beta}{2} \leq V(x) \leq \rho \right\} \quad (3.27)$$

$r_1$  定義篇幅較長，在 (3.33) 式有清楚的定義。

證明：

根據假設  $\forall x \in M_j$ ，集合  $I(x, 1)$  內僅含單一元素，在此表示為  $k$ ，又因為  $x \in \Omega_\rho$ ,

$$\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \leq 0$$

故我們可知  $\forall x \in M_j$

$$L_{f_k} V(x) = 0, L_{f_i} V(x) > 0 \quad i \neq k$$

根據輔助定理 3.3 可得

$\exists N(M_j)$  使得

$$x \in N(M_j) \quad , L_{f_i} V(x) > 0 \quad i \neq k \quad (3.28)$$

從上式可知

$$x \in N(M_j) \quad , L_{f_k} V(x) \leq 0 \quad (3.29)$$

在往後的證明中，我們以  $\overline{N}(M)$  代表集合  $N(M)$  之閉集 (closure)。

假設

$$\Omega_\beta := \{x | V(x) \leq \beta\} \quad (3.30)$$

其中

$$\beta < \min_{x \in \Omega_\rho, \|x\| \geq \epsilon} V(x) \quad (3.31)$$

從集合  $\Omega_\beta$  的定義中，不難發現一個事實  $\Omega_\beta \subset B(0, \epsilon)$ ，證明的步驟可以由圖 6 來說明。

證明將分為下列兩個步驟：

- (i) 給定任意初始值  $x(0) \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}}$ ，系統軌跡  $x(t)$  將在有限時間內進入  $\Omega_{\frac{\beta}{2}}$  這個集合內。

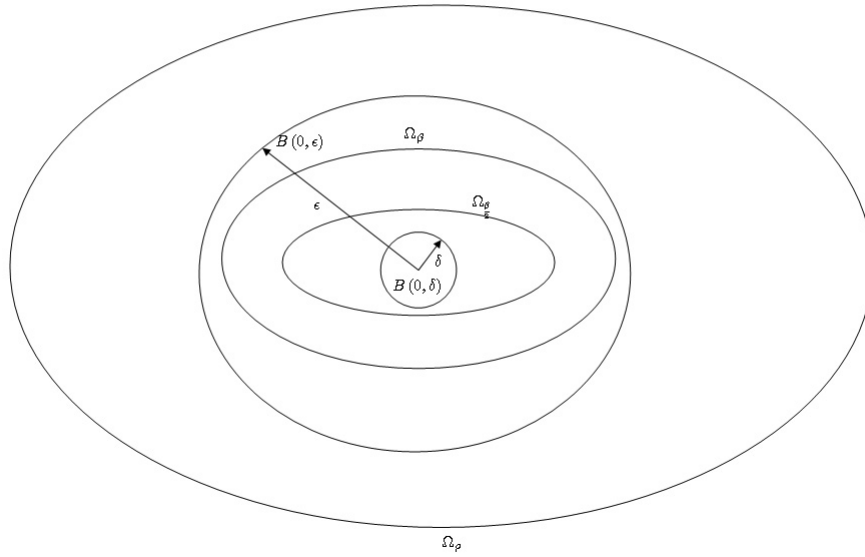


圖 6: 證明系統為  $\epsilon$  實際穩定之示意圖

(ii) 證明系統軌跡一旦進入集合  $\Omega_{\frac{\beta}{2}}$  內，將不在跑出  $\Omega_{\beta}$  以外。

首先先證明步驟 1:

假設時間  $t \in [mt_d, (m+1)t_d]$ ，此時作用的子系統為  $i_m = \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x(mt_d))\}$ ，

證明此步驟分為兩種情況：

(a)  $x \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}} - N(M)$

因為  $\Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}} - N(M)$  為一緊緻集，且  $\min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x)$  為一連續函數，故根據輔助定理 3.1 可知  $\min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x)$  具有極大值，亦即存在  $r > 0$  使得

$$\max_{x \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}} - N(M)} \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) \leq -r \quad (3.32)$$

若我們令  $\epsilon = \frac{r}{2}$ ，根據均勻連續的定義可知  $\exists r_1(r) > 0$ ，使得

$$\forall x_a, x_b \in \Omega_{\rho} - N(M)$$

$$\|x_a - x_b\| \leq r_1 \Rightarrow \|L_{f_i} V(x(t)) - L_{f_i} V(x(mt_d))\| \leq \frac{r}{2} \quad (3.33)$$



根據  $t_d$  的定義可知

$$\forall t \in [mt_d, (m+1)t_d)$$

$$\|x(t) - x(mt_d)\| = \left\| \int_{mt_d}^t f_{i_m}(x(\tau)) d\tau \right\| \quad (3.34)$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_i(x)\| \right\} \cdot t_d \quad (3.35)$$

$$= L \cdot t_d \leq r_1 \quad (3.36)$$

因此根據 (3.33) 式及 (3.35) 式，可知

$$\|L_{f_{i_m}} V(x(t)) - L_{f_{i_m}} V(x(mt_d))\| \leq \frac{r}{2} \quad (3.37)$$

由上式及 (3.32) 式可推得

$$L_{f_{i_m}} V(x(t)) \leq -\frac{r}{2} \quad (3.38)$$

此時  $V(x)$  的變化為：

$$V(x((m+1)t_d)) - V(x(mt_d)) \quad (3.39)$$

$$= \int_{mt_d}^{(m+1)t_d} L_{f_{i_m}} V(x(\tau)) d\tau \leq -\frac{r}{2} \times t_d \quad (3.40)$$

故可知在此區域系統每切換一次， $V(x)$  至少下降  $\frac{r}{2} \times t_d$ 。

$$(b) x \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}} \cap \overline{N(M)}$$

根據前述  $N(M_j)$  的定義，可知在此區域中存在一整數  $k$ ，使得  $L_{f_{i_k}} V(x) \leq 0$ ，且  $\forall x \in N(M_j) - M$ ， $L_{f_{i_k}} V(x) < 0$ ，又根據定理假設 2 可知存在一奇數  $l > 1$ ，使得

$$L_{f_{i_k}} V(x) = L_{f_{i_k}}^2 V(x) = \cdots L_{f_{i_k}}^{l-1} V(x) = 0, \quad L_{f_{i_k}}^l V(x) < 0 \quad (3.41)$$

故根據輔助定理 3.5 可知，當  $x \in N(M_j) - M$ ，此時  $V(x(t))$  為絕對遞減函數。

又因為  $\overline{N(M_j)}$  為一緊緻集，故  $\|f_i(x)\|$  在  $\overline{N(M_j)}$  具有極小值，亦即

$$\min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \min_{x \in M_j} \|f_i(x)\| \right\} \geq \eta \quad (3.42)$$

，由上式可知系統軌跡在有限多時間內會離開  $N(M_j)$ 。

接著將證明步驟 2: 假設此時時間為 0，且選取的子系統為  $i_0$

系統軌跡一旦進入集合  $\Omega_{\frac{\beta}{2}}$  內，將不在跑出  $\Omega_\beta$  以外

假設時間  $0 \leq t_a < t_b \leq t_d$ ，根據  $t_d$  的選取，可以得到

$$\|x(t_a) - x(t_b)\| = \left\| \int_{t_a}^{t_b} f_{i_0}(x(\tau)) d\tau \right\| \quad (3.43)$$

$$\leq \max \|f_{i_0}\| \cdot (t_b - t_a) < L \cdot t_d \leq \xi \quad (3.44)$$

其中  $L$  如 (3.26) 式所示。從上式可知，系統在此階段軌跡移動的距離小於集合  $\Omega_{\frac{\beta}{2}}$  與  $\Omega_\beta$  之間的最短距離，代表系統軌跡不會穿過集合  $\Omega_\beta$ 。綜合以上即可得証。

上面定理 2 主要有兩個假設，第一個假設中考慮  $\forall x \in M$ ，集合  $I(x, 1)$  內僅含一個元素。但假如  $I(x, 1)$  有多個元素，勢必可能要在多加一些條件條件，而序列定理 3 即考慮此類的問題。

**序列定理 3** 假設  $V(x)$  為一個擁有所有連續  $l$  階偏導數的正定函數，其中  $l$  為一奇數，且集合  $\Omega_\rho := \{x | V(x) \leq \rho\}$  為一有界 (*bounded*) 集合，若滿足下列條件，則系統 (3.11) 存在  $\epsilon$ -實際穩定切換律  $\sigma(x)$ 。

1. 對所有非零的  $x \in \Omega_\rho$

$$\min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \leq 0$$

2. 對於所有  $x \in M_j \cap \Omega_\rho$ ， $L_{f_i}^l V(x) < 0$ ，且對於所有的  $k < l$ ， $\min_{i \in I(x, l-1)} \{L_{f_i}^k V(x)\} =$

0

3.  $x \in M_j \cap \Omega_\rho$ ，存在一個子系統  $i_k \in I(M_j, 1)$ ，使得對於所有的  $d \in R^n$

(i)  $\nabla L_{f_{i_k}} V(x) = 0$

(ii)  $d^T D^2 L_{f_{i_k}} V(x) d \leq 0$  且僅在  $d \in T(M_j)$  等於 0。其中  $T(M_j)$  代表  $M_j$  之切平面。

證明：

證明方式類似定理 2，差別僅在於  $N(M_j)$  的選取。根據輔助定理 3.6，可知集合  $M_j$  內的點為一相對極大值，故我們可在  $M_j$  附近找一鄰域  $N(M_j)$  使得

對於所有的  $x \in N(M_j)$

$$L_{f_{i_k}} V(x) \leq 0 \tag{3.45}$$

且僅在  $x \in M_j$  時，(3.45) 式為零。故在此階段只要切換至子系統  $i_k$ ，就可保證  $V(x)$  為遞減函數。其他證明步驟仿照定理 2，即可得証。

在本章的最後，我們將本章的內容歸納成一個演算法則。

**演算法則 1** 若我們考慮切換系統如下：

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, N \tag{3.46}$$

其中  $f_i : R^n \rightarrow R^n$  為 *locally Lipschitz continuous* 函數。若系統滿足定理 2(或序列定理 3)，則穩定切換律可如下選取

步驟 1: 選取適當的  $\rho$  值與  $\varepsilon$  值。

步驟 2: 決定  $\beta$  值，與  $\xi$  值。

其中

$$\beta < \min_{x \in \Omega_\rho, \|x\| \geq \varepsilon} V(x) \quad (3.47)$$

$$\xi = \inf_{V(x)=\beta, V(y)=\frac{\beta}{2}} \|x - y\| \quad (3.48)$$

步驟 3: 選取適當的  $N(M_j)$ ，使得  $\exists k$

$$\forall x \in N(M_j)$$



$$L_{f_k} V(x) \leq 0 \quad (3.49)$$

步驟 4: 決定  $r$  值與  $r_1$  值，其中

$$\max_{x \in \Omega_\rho - N(M)} \min_{1 \leq i \leq N} L_{f_i} V(x) \leq -r \quad (3.50)$$

$r_1$  滿足  $\forall x_a, x_b \in \Omega_\rho - N(M)$

$$\|x_a - x_b\| \leq r_1 \quad \Rightarrow \quad \|L_{f_i} V(x_a) - L_{f_i} V(x_b)\| \leq \frac{r}{2} \quad (3.51)$$

步驟 5: 求出  $L$  值與  $t_d$  值，其計算方法如下

$$L = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_i(x)\| \right\} \quad (3.52)$$

$$t_d = \min \left\{ \frac{r_1}{L}, \frac{\xi}{L} \right\} \quad (3.53)$$

步驟 6: 最後將切換律選取為

步驟 (i) : 先設定  $m = 0, t_0 = 0$

步驟 (ii) : 假如  $x \notin \Omega_{\frac{\beta}{2}}$ ，則作用在時刻  $[mt_d, (m+1)t_d)$  的系統將選取為

$$i_m = \arg \min_{1 \leq i \leq N} \{L_{f_i} V(x)\} \quad (3.54)$$

若  $x \in \Omega_{\frac{\beta}{2}}$ ，則作用在時刻  $[mt_d, (m+1)t_d)$  與前一時刻  $[(m-1)t_d, mt_d)$  作用的子系統相同。

步驟 (iii) : 再設  $m=m+1$  且返回步驟 (ii)

### 3.3 模擬與討論

此節的目的，即找一些範例來驗證問題的存在性以及理論的正確性，此節將模擬兩個例子。

範例 3.2 考慮下列切換系統

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall x \in R \quad (3.55)$$

其中

$$f_1(x) = (x + 2)(x + 5)(x + 12) \quad (3.56)$$

$$f_2(x) = (x + 0.5)(x + 1.5)(x + 6)/(x + 1)^2 \quad (3.57)$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2} \quad (3.58)$$

考慮如下可能之里亞普諾夫函數

$$V(x) = x^2 \left( x^2 + \frac{8}{3}x + 2 \right) \quad (3.59)$$

很明顯的，因為  $\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 \times 2 < 0$ ，故  $V(x)$  為一正定函數。

經由簡單的計算，可求得

$$L_{f_1}V(x) = 4x(x + 2)(x + 5)(x + 12)(x + 1)^2 \quad (3.60)$$

$$L_{f_2}V(x) = 4x(x + 0.5)(x + 1.5)(x + 6)(x + 11) \quad (3.61)$$

$$L_{f_3}V(x) = -4x \quad (3.62)$$

同時

$$\{x|L_{f_1}V(x) \leq 0\} = \{(-12, -5) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0)\} \quad (3.63)$$

$$\{x|L_{f_2}V(x) \leq 0\} = \left\{(-\infty, -11) \cup \left(-6, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right\} \quad (3.64)$$

$$\{x|L_{f_3}V(x) \leq 0\} = \{0, \infty\} \quad (3.65)$$

因此

$$\min L_{f_i}V(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

以及

$$M = \{-1\}$$

首先驗證：

$$I(1, 1) = \{1\}$$

接著再驗證：

$$L_{f_1}V(-1) = L_{f_1}^2V(-1) = 0, L_{f_1}^3V(-1) < 0$$

故我們可知此系統滿足定理 2。根據前述的證明，可在集合 M 附近，找一鄰域

$$N_{0.25}(M) = \{-1.25 \leq x \leq -0.75\}$$

使得

$$\forall x \in N_{0.25}(M), L_{f_1} V(x) \geq 0$$

接著再將所需要的參數求出：

1. 取  $\epsilon = 0.5$ ，及  $\rho = 1000$ ，此時

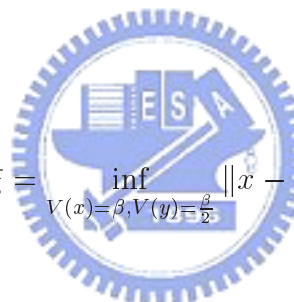
$$\Omega_\rho = \{-6.3170 \leq x \leq 4.9884\}$$

2. 求  $\beta$  值， $\beta$  滿足

$$\beta < \min_{x \in \Omega_\rho, \|x\| \geq \epsilon} V(x)$$

求得  $\beta = 0.22$ ， $\frac{\beta}{2} = 0.11$ 。

3. 求  $\xi$  值


$$\xi = \inf_{V(x)=\beta, V(y)=\frac{\beta}{2}} \|x - y\| = 0.1924$$

4. 求  $r$  與  $r_1$  值

$$r = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{x \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}}} L_{f_i} V(x) = -9.4482$$

接著可求出  $r_1 = 0.0678$ 。

5. 求  $L$  值

$$L = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_i(x)\| \right\} = 161.4375$$

6. 求  $t_d$  值

$$t_d = \min \left\{ \frac{\xi}{L}, \frac{r_1}{L} \right\} = 4.1998 \times 10^{-4}$$



若將初始值選取為  $x = 4.8$ ，其模擬圖如下所示：

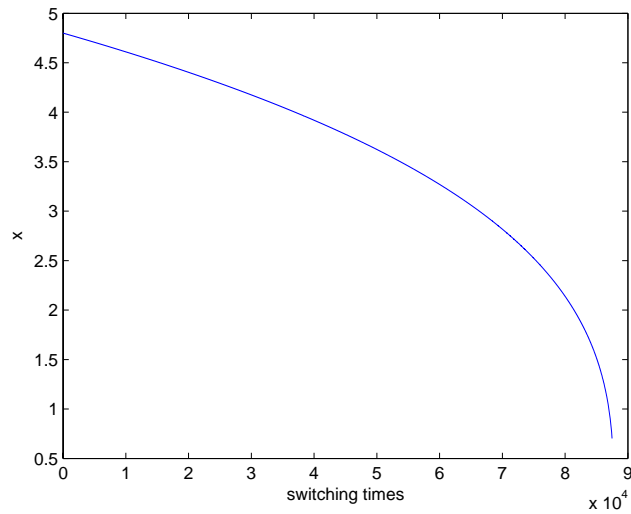


圖 7: 初始值選取為  $x_0 = 4.8$  範例 3.2 之狀態響應圖

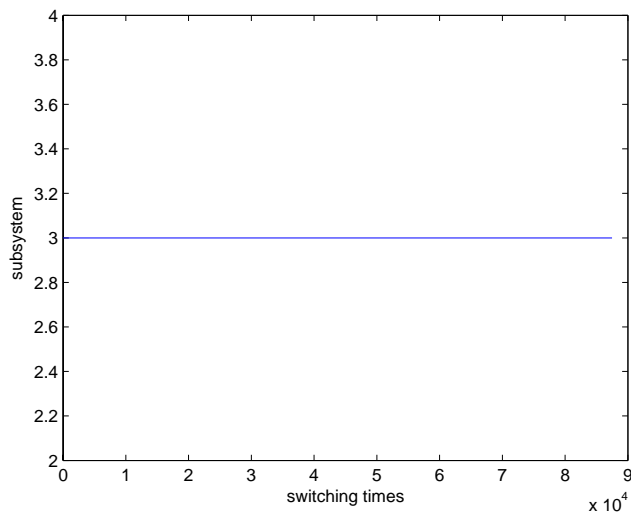


圖 8: 初始值選取為  $x_0 = 4.8$  範例 3.2 之切換訊號圖

而若將初始值選取為  $x = -6$ ，其模擬圖如下所示：

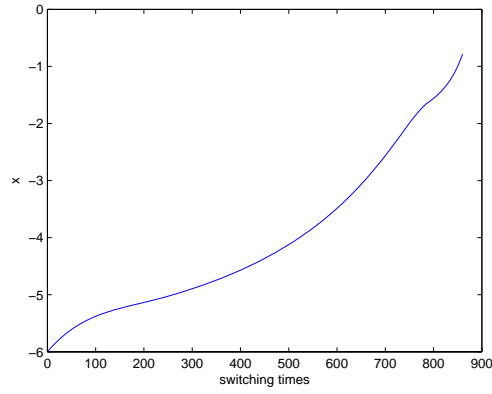


圖 9: 初始值選取為  $x_0 = -6$  範例 3.2 之狀態響應圖，橫軸表切換次數，縱軸為狀態  $x$ 。

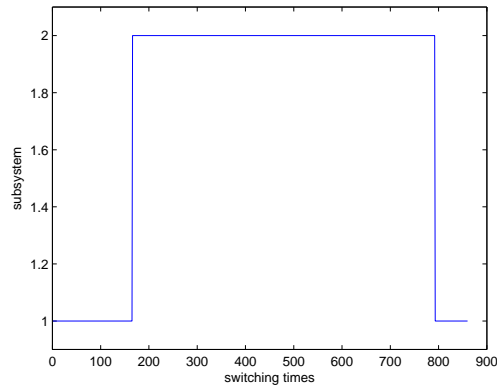


圖 10: 初始值選取為  $x_0 = -6$  範例 3.2 之切換訊號圖，橫軸表切換次數，縱軸當時作用的子系統。

### 範例 3.3

若考慮下列系統：

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.66)$$

其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} -5x_2 \\ x_1(x_1x_2(x_2 - 50) + 5) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{x} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$f_3(x) = \begin{bmatrix} -\frac{45}{x_1} \\ x_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

經過簡單計算可知

$$L_{f_1}V(x) = x_1^2x_2^2(x_2 - 50)$$

$$L_{f_2}V(x) = x_2 - 8$$

以及

$$L_{f_3}V(x) = 45 - x_2$$

故我們可知

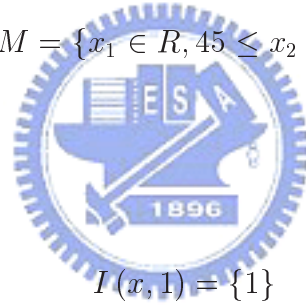
$$\min L_{f_i}V(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

以及

$$M = \{x_1 \in \mathbb{R}, 45 \leq x_2 \leq 8\}$$

首先驗證：

$$\forall x \in M$$



$$I(x, 1) = \{1\}$$

以及

$$L_{f_1}V(x) = L_{f_1}^2V(x) = 0, L_{f_1}^3V(x) < 0$$

故我們可知此系統滿足定理 2。根據前述的證明，可在集合 M 附近，找一鄰域

$$N(M) = \{x \mid -2 \leq x_1 \leq 2, 8 \leq x_2 \leq 45\}$$

使得

$$\forall x \in N(M), L_{f_1}V(x) \leq 0$$

接著再將所需要的參數求出：

1. 取  $\epsilon = 1$ ，及  $\rho = 1800$ ，此時

$$\Omega_\rho = \{x | x_1^2 + x_2^2 = 3600\}$$

2. 求  $\beta$  值， $\beta$  滿足

$$\beta < \min_{x \in \Omega_\rho, \|x\| \geq \epsilon} V(x)$$

求得  $\beta = 0.4$ ， $\frac{\beta}{2} = 0.2$ 。

3. 求  $\xi$  值

$$\xi = \inf_{V(x)=\beta, V(y)=\frac{\beta}{2}} \|x - y\| = 0.2620$$

4. 求  $r$  與  $r_1$  值

$$r = \left\| \max_{1 \leq i \leq N} \max_{x \in \Omega_{\rho, \frac{\beta}{2}}} L_{f_i} V(x) \right\| = 2$$

接著可求出  $r_1 = 0.2032$ 。

5. 求  $L$  值

$$L = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_i(x)\| \right\} = 7.0582 \times 10^6$$

6. 求  $t_d$  值

$$t_d = \min \left\{ \frac{\xi}{L}, \frac{r_1}{L} \right\} = 2.8789 \times 10^{-8}$$

1. 若將初始值選取為  $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 40 \end{bmatrix}$

其模擬圖如下所示：

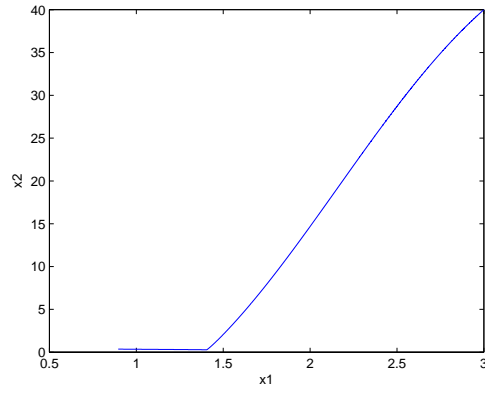


圖 11: 範例 3.3 之相位 (phase) 平面圖。

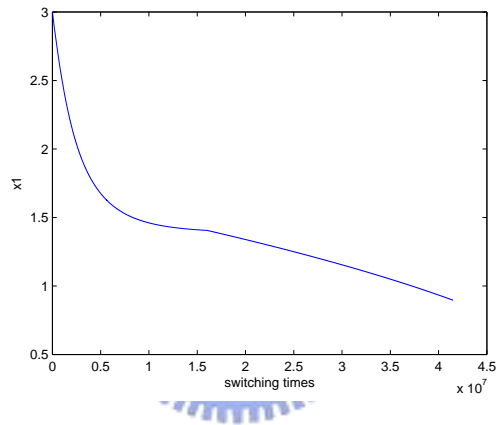


圖 12: 範例 3.3 狀態  $x_1$  之狀態響應圖，橫軸表切換次數，縱軸為狀態  $x_1$ 。

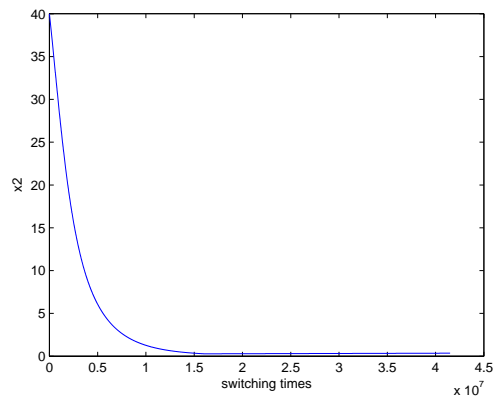



圖 13: 範例 3.3 狀態  $x_2$  之狀態響應圖，橫軸表切換次數，縱軸為狀態  $x_2$ 。

## 第四章

# 可控性在切換系統上的研究與控制律設計



接下來在這個章節，我們要介紹可控性在切換系統上的研究，首先介紹可控性在切換系統上的基本定義與可控的充分條件，接著介紹可控空間的基底計算方法與切換律設計，最後介紹一個例子且以此例來述說我們的未來研究方向。

### 4.1 可控性在切換系統上的問題描述。

在現代控制理論中，可控性與可觀察性是兩個重要的觀念，簡單來說，可控性是輸入支配系統狀態的能力；而可觀察性則是系統輸出反映系統狀態的能力。前者回答輸入能否使系統狀態做任意轉移的問題，後者則回答系統狀態能否透過輸出觀測出來，因此我們可能會有一些疑問：可控性與可觀察性這兩個觀念是否能延伸到切換系統上？是否能夠類似一般的線性系統，找到一些可控的一些充分且必要條件？以及假如系統不可控，我們是否能夠將系統中可控的部份以及不可控的部份分開？這些問題在下文中會有解答。切換系統的可控性與可觀察性的研究，目前的結果主要還是針對於線性切換系統，或許是非線性切換系統的數學太過艱難，目前還沒有看到有關於非線性切換系統可控性的相關研究。在線性連續時間切換系統

方面，[57]首先發表相關研究論文，但是那時候的系統只侷限在單一週期的週期切換系統，而[25]是首先能夠推導出充分條件與必要條件，並且證明對於三維且只有兩個子系統，充分條件即是必要條件，[47]把結果延伸到三維但是具有任意個子系統，[4]、[11]則正式提出一些有關於可控性及可觀察性的準則，亦是目前有關於這方面連續型切換系統最新的研究。



## 4.2 介紹可控性在切換系統上的一些基本定義與充分條件

我們考慮的系統為

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t) \quad (4.1)$$

其中狀態  $x \in R^n$ ，輸入  $u \in R^p$  為分段連續函數， $\sigma: [t_0, t_f) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$  為切換律， $(A_k, B_k)$ ， $k \in M$  為子系統的狀態矩陣。

為了往後描述上的方便，我們先定義符號  $\phi(t_f; t_0, x_0, u, \sigma)$  為時間  $t_f$  時的狀態，其中  $t_0$ ， $t_f$  代表初始及終止時間、 $u$  為輸入、 $\sigma$  為切換律。

切換系統有關可控性的相關定義首先由 [57] 提出，其定義如下：

**定義 4.1 :**

考慮系統 (4.1) 假如存在時間  $t_f > t_0$ ，切換律  $\sigma: [t_0, t_f) \rightarrow M$ ，及輸入  $u: [t_0, t_f) \rightarrow R^p$ ，若存在一些  $x \in R^n$  使得

$$\phi(t_f; t_0, x, u, \sigma) = 0 \quad (4.2)$$

則稱狀態  $x \in R^n$  在時間  $t_0$  為可控。亦即；假如狀態  $x \in R^n$  對於系統 (4.1) 為可控，則只要給予適當的輸入  $u$  及切換律  $\sigma$  即可在有限多時間內將其移動到原點。

**定義 4.2 :**

針對系統 (4.1)，若一集合其元素包含所有在時間  $t_0$  能被控制到原點的狀態，則稱此集合為可控集合 (controllable set)。在此表示為  $C(A_i, B_i)_M$ ，假如可控集合為整個  $R^n$  空間，則稱此系統為可控。

**定義 4.3 :**

考慮系統 (4.1)，假如存在時間  $t_f > t_0$ ，切換律  $\sigma: [t_0, t_f) \rightarrow M$ ，及輸入  $u: [t_0, t_f) \rightarrow R^p$ ，若存在一些  $x \in R^n$  使得

$$\phi(t_f; t_0, 0, u, \sigma) = x \quad (4.3)$$



，則稱狀態  $x \in R^n$  在時間  $t_0$  為可達 (Reachable)。亦即；假如狀態  $x \in R^n$  對於系統 (4.1) 為可達，則只要給予適當的輸入  $u$  及切換律  $\sigma$ ，即可在有限多時間內將初始值  $x_0$  移動到  $x$ 。

**定義 4.4 :**

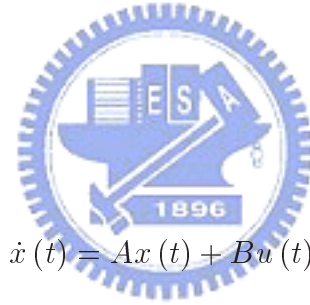
考慮系統 (4.1)， $t_0$  為系統初始時間， $x_0$  為初始值，給定適當的輸入及切換律  $\sigma$  能經過的所有狀態，稱之為可達集合 (Reachable set)。在此表示為  $R(A_i, B_i)_M$ ，假如可達集合為整個  $R^n$  空間，則稱此系統為可達。

在介紹下列定理之前，我們先定義往後一些符號及一些輔助定理。

任意方陣， $A \in R^{n \times n}$ ， $B \in R^{n \times p}$ ， $\text{Im}B$  為  $B$  矩陣的行空間，為了往後表示方便，我們定義  $\mathbf{B}_k = \text{Im}B_k$ ， $\mathbf{D}_k = \sum_{j=0}^{n-1} A_k^j \text{Im}B_k$ ，

**輔助定理 4.1 [30]**

考慮下列線性系統



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.4)$$

其中狀態  $x \in R^n$ ， $u \in R^p$  為輸入， $A \in R^{n \times n}$ ， $B \in R^{n \times p}$  為系統狀態矩陣。

對於任意時間  $T$ ，下列子空間戶為相等

1.  $R_T = \left\{ \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau : u \in C(0, T) \right\}$
2.  $\text{Range} \{ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \}$
3.  $\text{Range} \left\{ \int_0^T e^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} d\tau \right\}$

接下來我們將說明一個輔助定理，考慮系統 (4.1)，若切換律選取為

$$\sigma(t) = \begin{cases} i_0 & t \in [t_0, t_1) \\ i_1 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ i_k & t \in [t_k, t_f) \end{cases} \quad (4.5)$$

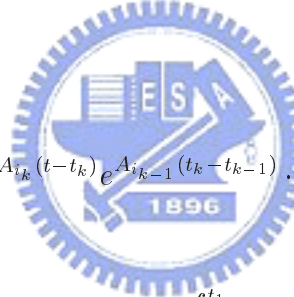
根據 [29] 可知系統 (4.1) 在時間  $t_1$  時的軌跡為

$$x(t_1) = e^{A_{i_0}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_{i_0}(t_1-\tau)}B_{i_0}u_{i_0}(\tau)d\tau \quad (4.6)$$

若將  $x(t_1)$  當作新的初始值，可得時間  $t_2$  時的軌跡為

$$\begin{aligned} x(t_2) &= e^{A_{i_1}(t_2-t_1)}x_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_{i_1}(t_2-\tau)}B_{i_1}u_{i_1}(\tau)d\tau \\ &= e^{A_{i_1}(t_2-t_1)}e^{A_{i_0}(t_1-t_0)}x_0 + e^{A_{i_1}(t_2-t_1)}\int_{t_0}^{t_1} e^{A_{i_0}(t_1-\tau)}B_{i_0}u_{i_0}d\tau \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_{i_1}(t_2-\tau)}B_{i_1}u_{i_1}(\tau)d\tau \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

重複上面步驟可得



$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{i_k}(t-t_k)}e^{A_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})}\dots e^{A_{i_0}(t_1-t_0)}x_0 \\ &\quad + e^{A_{i_k}(t-t_k)}\dots e^{A_{i_1}(t_2-t_1)}\int_{t_0}^{t_1} e^{A_{i_0}(t_1-\tau)}B_{i_0}d\tau + \dots \\ &\quad + \int_{t_k}^t e^{A_{i_k}(t-\tau)}B_{i_k}u_{i_k}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.7)$$

因此我們可以得到如下結果：

#### 輔助定理 4.2 [4]

考慮系統 (4.1)，若切換律選取如 (4.5) 式，則當  $t \in [t_k, t_f)$  時，其狀態軌跡如 (4.7) 所示。

接著我們再看一個輔助定理，考慮(4.1)假如切換律定義為

$$\sigma(t) = \begin{cases} i_0 & t \in [t_0, t_1) \\ i_1 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ i_k & t \in [t_k, t_f) \end{cases} \quad (4.8)$$

根據定義4.2可知在此切換律下，可控集合為

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\sigma(A_i, B_i)_M &= \{x \mid e^{A_{i_k}(t-t_k)} e^{A_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} \dots e^{A_{i_0}(t_1-t_0)} x \\ &\quad + e^{A_{i_k}(t-t_k)} \dots e^{A_{i_1}(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{A_{i_0}(t_1-\tau)} B_{i_0} d\tau + \dots \\ &\quad + \int_{t_k}^t e^{A_{i_k}(t-\tau)} B_{i_k} u_{i_k}(\tau) d\tau = 0\} \end{aligned}$$

又根據輔助定理4.1可知在此切換律下，可控集合為

$$\mathbf{C}_\sigma(A_i, B_i)_M = e^{-A_{i_k} h_k} \dots e^{-A_{i_1} h_1} \mathbf{D}_{i_0} + \dots + \mathbf{D}_{i_k}$$

但事實上，可以將狀態送到0的切換律可能不只一種，故其可控集合為

$$\mathbf{C}(A_i, B_i)_M = \bigcup_{\sigma} \mathbf{C}_\sigma(A_i, B_i)_M \quad (4.9)$$

$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i_0, \dots, i_k} \bigcup_{h_0, \dots, h_k} \left( e^{-A_{i_k} h_k} \dots e^{-A_{i_1} h_1} + \mathbf{D}_{i_0} \dots + \mathbf{D}_{i_k} \right) \quad (4.10)$$

則我們可以得到如下輔助定理。

**輔助定理 4.3** 由[4]可知系統(4.1)之可控集合(controllable set)為

$$\mathbf{C}(A_i, B_i)_M = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i_0, \dots, i_k} \bigcup_{h_0, \dots, h_k} \left( e^{-A_{i_k} h_k} \dots e^{-A_{i_1} h_1} + \mathbf{D}_{i_0} \dots + \mathbf{D}_{i_k} \right) \quad (4.11)$$

輔助定理 4.4 [4] 可達集合為

$$\mathbf{R}(A_i, B_i)_M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_0, \dots, i_k} \bigcup_{h_0, \dots, h_k} \left( e^{A_{i_k} h_k} \dots e^{A_{i_1} h_1} \mathbf{D}_{i_0} + \dots + \mathbf{D}_{i_k} \right) \quad (4.12)$$

證明: 參考 [4]

定理 3 : [57]

考慮系統 (4.1), 可控集合與可達集合相等, 亦即

$$\mathbf{C}(A_i, B_i)_M = \mathbf{R}(A_i, B_i)_M = \mathbf{V} \quad (4.13)$$

其中

$$\mathbf{V} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, 1, \dots, n-1 \\ i_1, \dots, i_n=1, \dots, m}} A_{i_n}^{j_n} \dots A_{i_1}^{j_1} \mathbf{B}_{i_1} \quad (4.14)$$

證明: 參考 [57]。

序列定理 4 對於一個線性切換系統 (4.1) 而言, 下列敘述為對等的

1. 系統為完全可控 (Completely Controllable)
2. 系統為可達 (Completely Reachable)
3.  $\mathbf{V} = R^n$

根據前面的定理, 我們可以重新定義可控性

定義 4.3 :

考慮系統 (4.1) 假如存在時間  $t_f > t_0$ , 切換律  $\sigma : [t_0, t_f] \rightarrow M$ , 及輸入  $u : [t_0, t_f] \rightarrow R^p$ , 若對於所有的  $x_0, x_f \in R^n$  使得

$$\phi(t_f; t_0, x_0, u, \sigma) = x_f \quad (4.15)$$

則稱狀系統 (4.1) 為可控。

### 4.3 可控空間的基底計算方法

上一節中，定理3介紹了判斷系統(4.1)可控的充分條件，而條件如下：

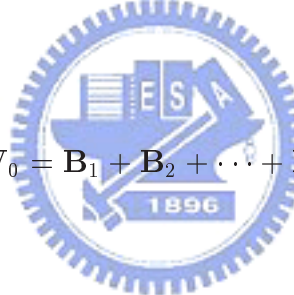
$$\mathbf{V} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0,1, \dots, n-1 \\ i_1, \dots, i_n=1, \dots, m}} A_{i_n}^{j_n} \cdots A_{i_1}^{j_1} \mathbf{B}_{i_1} = R^n \quad (4.16)$$

但事實上，在計算方面有一定的難度，本節的目標就是要介紹如何去找集合 $\mathbf{V}$ 中的基底，在介紹定理之前，首先先介紹一個輔助定理。

**輔助定理 4.5** 若 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_k$ 皆為向量空間 $V$ 之子空間，假設 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 為其基底，則

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \cdots + \mathbf{W}_k = \text{span}(S_1, S_2, \dots, S_k) \quad (4.17)$$

若我們定義


$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \cdots + \mathbf{B}_m \quad (4.18)$$

以及

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_{j-1} + \sum_{k=1}^m A_k \mathbf{W}_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

根據 $\mathbf{B}_k$ 的定義以及輔助定理4.5可知

$$\mathbf{W}_0 = \text{span}[B_1, B_2, \dots, B_m] \quad (4.20)$$

以及

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_0 + \sum_{k=1}^m A_k \mathbf{W}_0 \quad (4.21)$$

⋮

$$\mathbf{W} = \text{span} [B_1, \dots, B_m, A_1 B_1, \dots, A_m B_1, \dots, A_m B_m, A_1^2 B_1, \dots, A_m A_1 B_1, \dots,$$

$$A_1^{n-1} B_1, \dots, A_m A_1^{n-2} B_1, \dots, A_1 A_m^{n-2} B_m, \dots, A_m^{n-1} B_m] = \mathbf{V} \quad (4.22)$$

根據前述定理，集合  $\mathbf{V}$  與集合  $\mathbf{W}$  相等，但比較起來找  $\mathbf{W}$  的基底容易許多，在這邊將介紹如何找出集合  $\mathbf{W}$  的基底。

首先，第一步先找出  $\mathbf{W}_0$  的基底

$$\mathbf{W}_0 = \text{span} [B_1, B_2, \dots, B_m] \quad (4.23)$$

集合  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  中獨立的行，即為  $\mathbf{W}_0$  之基底，在此表示為  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_0}\}$  其中  $n_0 = \dim \mathbf{W}_0$ 。

求得  $\mathbf{W}_0$  的基底後，接著可以很容易的找出  $\mathbf{W}_1$  的基底，根據(4.21)式

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_0 + \sum_{k=1}^m A_k \mathbf{W}_0$$

$$= \mathbf{W}_0 + \text{span} \{A_k \gamma_j, k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n_0\}$$

$$= \text{span} \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_0}, A_k \gamma_j, k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n_0\} \quad (4.24)$$

⋮

重複此步驟可得

$$\mathbf{W}_{l+1} = \mathbf{W}_l + \text{span} \{A_j \gamma_k, j = 1, \dots, m, k = n_{l-1} + 1, \dots, n_l\}$$

$$= \text{span} \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_k} A_j \gamma_k, j = 1, \dots, m, k = n_{l-1} + 1, \dots, n_l \} \quad (4.25)$$

其中  $n_{l-1} = \dim W_l$

即可找出  $V$  之基底。



## 4.4 切換法則與控制律設計

考慮系統

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t) \quad (4.26)$$

其中狀態  $x \in R^n$ ，輸入  $u \in R^p$  為分段連續函數， $\sigma: [t_0, t_f) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$  為切換律， $(A_k, B_k)$ ， $k \in M$  為子系統的狀態矩陣。

從定理3我們可以知道假如系統(4.1)為可控，則  $R^n$  空間中的任何狀態，皆可轉移到  $R^n$  空間中的另一個狀態，現在最大的問題在於切換法則以及控制律要如何決定，在這邊我們將介紹一個方法來解決這些問題。根據定理3我們可知

$$\mathbf{V} = e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} \mathbf{D}_{i_0} + \dots e^{A_{i_l} h_l} \mathbf{D}_{i_{l-1}} + \mathbf{D}_{i_l} \quad (4.27)$$

假如我們定義切換時間順序為  $t_0 = 0$ ， $t_k = t_{k-1} + h_{k-1}$ ， $k = 1, 2, \dots, l+1$ ，其中  $l$  為系統切換的次數，根據輔助定理4.1，給定任意  $k \in M$ ， $t > 0$  我們可知

$$\mathbf{D}_k = \text{Im} W_t^k \quad (4.28)$$

其中  $W_t^k = \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k B_k^T e^{A_k^T(t-\tau)} d\tau$ 。

將(4.28)帶入到(4.27)我們可以得到

$$\mathbf{V} = e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} \text{Im} W_{h_0}^{i_0} + \dots e^{A_{i_l} h_l} \text{Im} W_{h_{l-1}}^{i_{l-1}} + \text{Im} W_{h_l}^{i_l} \quad (4.29)$$

又系統的最終狀態為

$$\begin{aligned} x_f = x(t_{l+1}) &= e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_0} h_0} x_0 + e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} \int_0^{t_1} e^{A_{i_0}(t_1-\tau)} B_{i_0} u(\tau) d\tau \\ &+ \dots + \int_{t_l}^{t_{l+1}} e^{A_{i_l}(t_{l+1}-\tau)} B_{i_l} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.30)$$



如我們把輸入選取為

$$u(t) = B_{i_k}^T e^{A_{i_k}^T (t_{k+1}-t)} a_{k+1} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad k = 0, 1, \dots, l \quad (4.31)$$

其中  $a_k \in R^n$ ,  $k = 1, 2, \dots, l+1$  為待求的常數向量。

比較(4.31)與(4.30)兩式可得

$$\begin{aligned} x_f - e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} e^{A_{i_0} h_0} x_0 \\ = e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{A_{i_1} (t-\tau)} B_{i_1} B_{i_1}^T e^{A_{i_1}^T (t_1-\tau)} d\tau a_1 \\ + \dots + \int_{t_l}^{t_{l+1}} e^{A_{i_{l+1}} (t_{l+1}-\tau)} B_{i_{l+1}} B_{i_{l+1}}^T e^{A_{i_{l+1}}^T (t_{l+1}-\tau)} d\tau a_{l+1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

又根據輔助定理 4.1 可知

$$x_f - e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_0} h_0} x_0 = [e^{A_{i_l} h_l} \dots e^{A_{i_1} h_1} W_{h_0}^{i_0}, \dots, W_{h_l}^{i_l}] a \quad (4.33)$$

即可求得系數矩陣  $a = [a_1^T, \dots, a_{l+1}^T]^T$ ，而控制律選取為

$$u(t) = B_{i_k}^T e^{A_{i_k}^T (t_{k+1}-t)} a_{k+1} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad k = 0, 1, \dots, l \quad (4.34)$$

即可完成目的，亦即；將狀態  $x_0$  在時間  $t_{l+1}$  時移動到終止狀態  $x_f$ 。

最後，我們將本章的內容整合成一個演算法則

#### 演算法則 4.1 考慮系統

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t) \quad (4.35)$$

其中狀態  $x \in R^n$ ，輸入  $u \in R^p$  為分段連續函數， $\sigma: [t_0, t_f) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$  為切換律， $(A_k, B_k)$ ， $k \in M$  為子系統的狀態矩陣。

若給定出始值  $x_0$ ，以及終止值  $x_f$ ，我們的目標即設計一組切換法則與控制律，在有限多時間內將狀態  $x_0$  移動到  $x_f$ 。

1. 判斷可控集合是否為整個  $R^n$  空間，令

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \cdots + \mathbf{B}_m \quad (4.36)$$

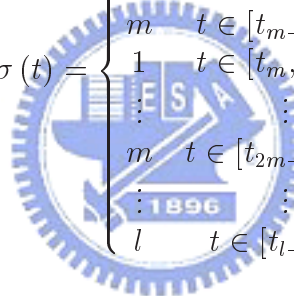
以及

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_{j-1} + \sum_{k=1}^m A_k \mathbf{W}_{j-1} \quad j = 1, 2, \cdots \quad (4.37)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}_j \quad (4.38)$$

假如  $V = R^n$  則跳到步驟 2，若  $V \neq R^n$  則無法達成任務。

2. 選取適當的  $l$  值，使得切換法則為

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_0, t_1) \\ 2 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ m & t \in [t_{m-1}, t_m) \\ 1 & t \in [t_m, t_{m+1}) \\ \vdots & \vdots \\ m & t \in [t_{2m-1}, t_{2m}) \\ \vdots & \vdots \\ l & t \in [t_{l-1}, t_l) \end{cases} \quad (4.39)$$


接著進行到下一個步驟。

3. 將步驟 2 決定好的切換律，帶入下列式子，並且將係數矩陣  $a$  之係數求出

$$x_f - e^{A_{i_l} h_l} \cdots e^{A_{i_0} h_0} x_0 = [e^{A_{i_l} h_l} \cdots e^{A_{i_1} h_1} W_{h_0}^{i_0}, \cdots, W_{h_l}^{i_l}] a \quad (4.40)$$

其中  $W_t^k = \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} B_k B_k^T e^{A_k^T(t-\tau)} d\tau$ 。

假設  $a_0 = [a_{0,1}^T, \cdots, a_{l+1}^T]$  為上式之解，則控制律為

$$u_{i_k}(t) = B_{i_k}^T e^{A_{i_k}^T(t_{k+1}-t)} a_{0,k+1} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, l \quad (4.41)$$

即可將狀態初始值  $x_0$ ，在時間  $t = l + 1$  時移動到終止狀態  $x_f$ 。

## 4.5 模擬與討論

範例 4.1 考慮如下之切換系統

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.42)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

首先驗證系統 (4.42) 是否為可控，根據 4.3 節的計算方法

$$W_0 = \text{span} \{B_1, B_2, B_3\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} W_2 &= W_0 + \sum_{k=1}^3 A_k W_0 = W_0 + \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$W_2 = W_1 + \sum_{k=1}^3 A_k W_1 = W_1 + \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = R^3 \quad (4.48)$$

由上式我們可知系統(4.42)為可控。

假設考慮初始狀態  $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ ，若我們的目的為設計切換法則與控制律使得系統在有限次切換到達原點，則可根據前一章節的內容來達到我們的目的，其過程如下：

假設切換次數  $l = 6$ ，切換律為

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 2 & t \in [1, 2) \\ 3 & t \in [2, 3) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \in [6, 7) \end{cases} \quad (4.49)$$

經過簡單的計算可知

$$W_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_t^k = 0, \quad k = 2, 3 \quad (4.50)$$

根據(4.33)式可得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} a \quad (4.51)$$

可解得  $a = [-22 \ 0 \ 0 \ 28 \ 0 \ 0 \ -9]^T$ ，控制律可選取為

$$u(t) = \begin{cases} -22 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 2) \\ 0 & t \in [2, 3) \\ 28 & t \in [3, 4) \\ 0 & t \in [4, 5) \\ 0 & t \in [5, 6) \\ -9 & t \in [6, 7) \end{cases} \quad (4.52)$$

若將切換次數選取為  $l = 9$ ，切換律為

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 2 & t \in [1, 2) \\ 3 & t \in [2, 3) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \in [9, 10) \end{cases} \quad (4.53)$$

根據(4.33)式可解得

$$a = [-15.35 \ 0 \ 0 \ 8.05 \ 0 \ 0 \ 10.95 \ 0 \ 0 \ -6.65]^T \quad (4.54)$$

將控制律可選取為

$$u(t) = \begin{cases} -15.35 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 2) \\ 0 & t \in [2, 3) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & t \in [7, 8) \\ 0 & t \in [8, 9) \\ -6.65 & t \in [9, 10) \end{cases} \quad (4.55)$$

模擬結果展示於圖 14-21，依據同樣的設計方式，當切換次數 = 21 時，模擬圖結果展示於圖 22-25。

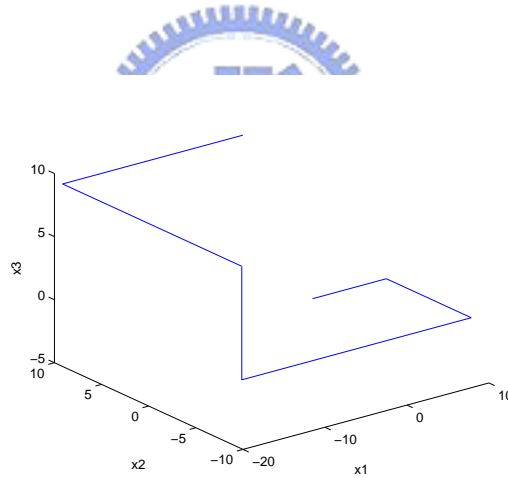


圖 14: 三個線性不穩定系統，切換次數為 6 次時，狀態  $x_1, x_2, x_3$  分布圖

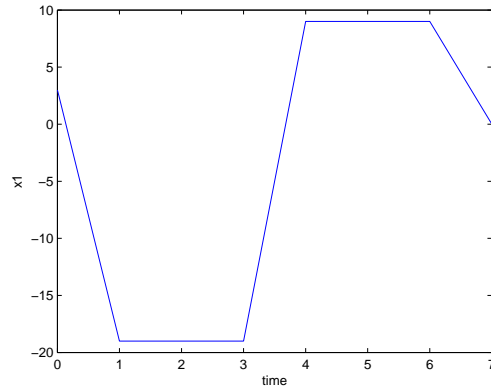


圖 15: 三個線性不穩定系統，切換次數為6次時，狀態  $x_1$  對時間的軌跡

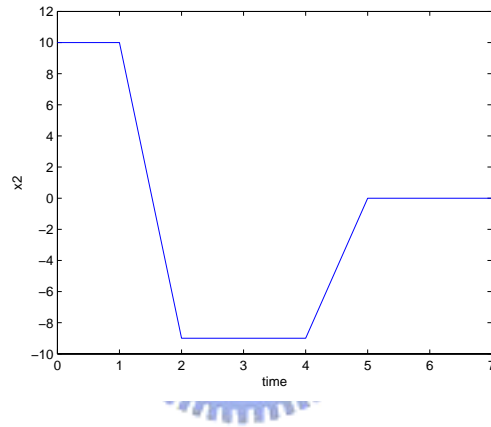


圖 16: 三個線性不穩定系統，切換次數為6次時，狀態  $x_2$  對時間的軌跡

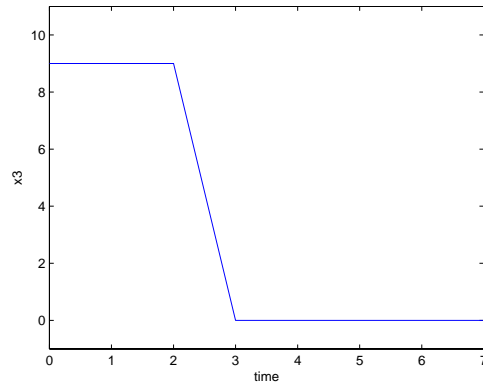


圖 17: 三個線性不穩定系統，切換次數為6次時，狀態  $x_3$  對時間的軌跡

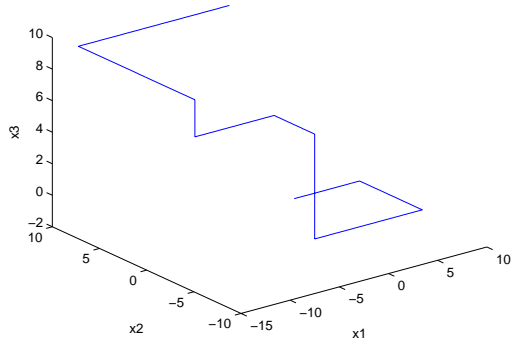


圖 18: 三個線性不穩定系統，切換次數為9次時，狀態  $x_1, x_2, x_3$  分布圖

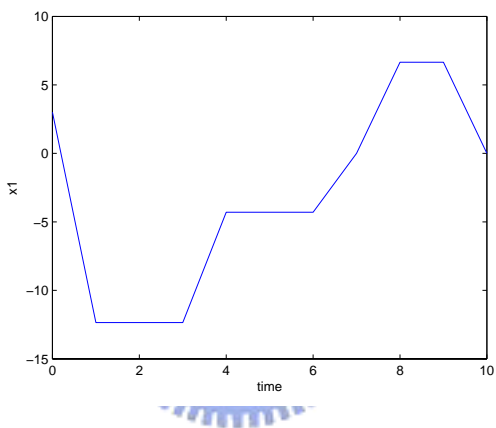


圖 19: 三個線性不穩定系統，切換次數為9次時，狀態  $x_1$  對時間的軌跡

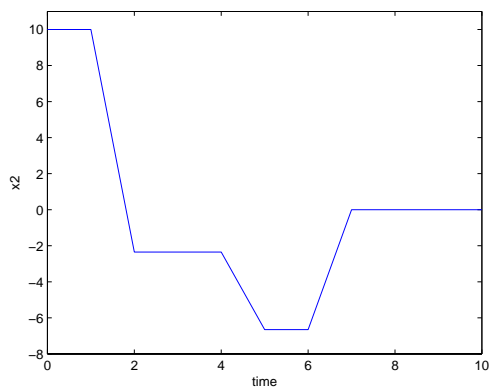


圖 20: 三個線性不穩定系統，切換次數為9次時，狀態  $x_2$  對時間的軌跡

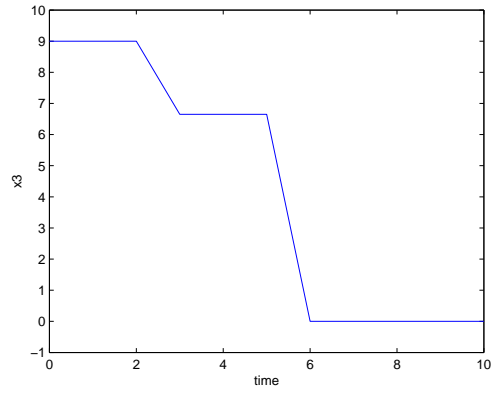


圖 21: 三個線性不穩定系統，切換次數為9次時，狀態  $x_3$  對時間的軌跡

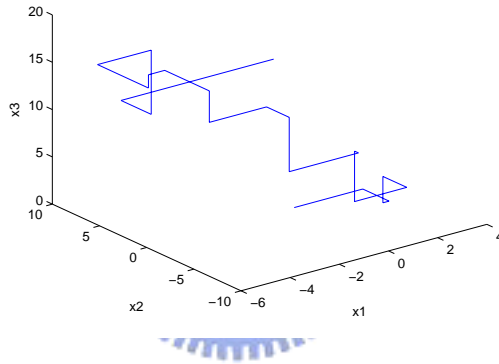


圖 22: 三個線性不穩定系統，切換次數為21次時，狀態  $x_1, x_2, x_3$  分布圖

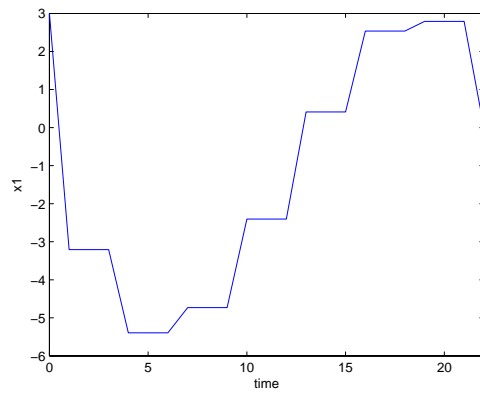


圖 23: 三個線性不穩定系統，切換次數為21次時，狀態  $x_1$  對時間的軌跡



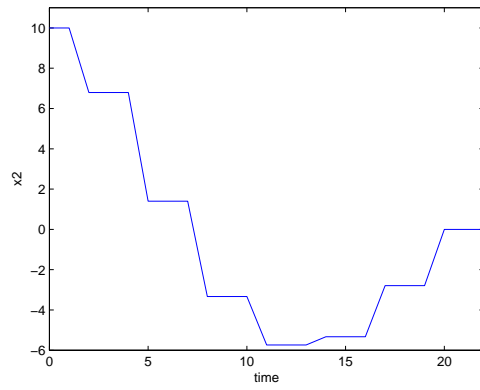


圖 24: 三個線性不穩定系統，切換次數為 21 次時，狀態  $x_2$  對時間的軌跡

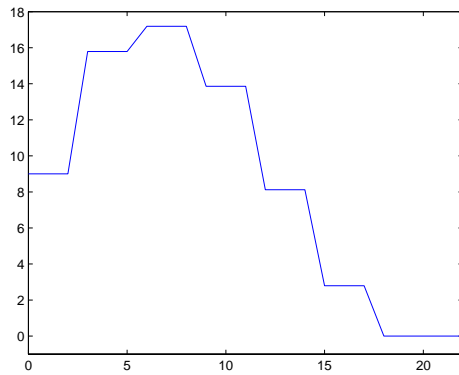


圖 25: 三個線性不穩定系統，切換次數為 21 次時，狀態  $x_3$  對時間的軌跡

若我們考慮一些最佳化的指標：

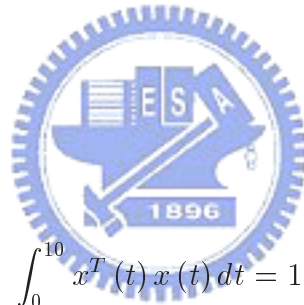
1. 當切換次數為  $l = 6$  時，經過簡單的計算可得

$$\int_0^7 x^T(t) x(t) dt = 1662.3 \quad (4.56)$$

$$\|x(t)\|_\infty = 19 \quad (4.57)$$

$$\int_0^7 u^T(t) u(t) dt = 1349 \quad (4.58)$$

2. 當當切換次數為  $l = 9$  時



$$\int_0^{10} x^T(t) x(t) dt = 1195.2 \quad (4.59)$$

$$\|x(t)\|_\infty = 12.35 \quad (4.60)$$

$$\int_0^{10} u^T(t) u(t) dt = 464.55 \quad (4.61)$$

3. 當當切換次數為  $l = 21$  時，也可求得

$$\int_0^{21} x^T(t) x(t) dt = 3458.5 \quad (4.62)$$

$$\|x(t)\|_{\infty} = 17.1906 \quad (4.63)$$

$$\int_0^{21} u^T(t) u(t) dt = 69.47 \quad (4.64)$$


從此範例，我們可以很清楚的看到，若我們希望在短時間內達成將  $x_0$  移動到  $x_f$ ，相對的所需要的輸入也較大，而當切換律選取不同時，所選取的控制律亦不同，故如何有效的選取切換律，將是我們未來的一個研究方向。



## 第五章

# 結論與未來研究方向

### 5.1 結論



本論文主要在探討關於切換系統實際可穩定性的充分條件以及切換律的設計，接著是探討可控性在切換系統上的研究。接下來我們把本篇論文的主要結果整理如下：

1. 針對 $N$ 個非線性系統 $\dot{x} = f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ，我們提出且證明實際可穩定性的充分條件以及如何建構穩定的切換律。
2. 我們整理出切換系統中可控性的各個條件，以及如何建構切換法則與設計控制律。

### 5.2 未來的研究方向

本論文中的主要貢獻已在上一節陳述。不過除了上述的結果以外，還有一些可以延伸下去的研究。

1. 在第2章中，我們所討論系統的凸組合滿足中性穩定時的穩定條件時都是建構在單一的李亞普諾夫函數上，而如何建構在多重李亞普諾夫函數上，也是一個可進行的方向。
2. 在第4章中，我們整理了切換系統可控的充分條件、切換法則與控制律的設計，但是切換法則與控制律可能存在有無限多種，未來我們可以朝著最佳控制方面著手，看看是否能設計出最少次切換或者使用的輸入最小。
3. 在前面所有的章節中，我們所討論的是不穩定系統之間切換的問題。而目前在一般的實際系統的應用結果當中，多只是考慮在穩定系統間的切換例子。所以，將我們的研究結果應用在實際例子上是一個重要的課題。



## 參考書目

- [1] A. Bacciotti, “Stabilization by means of state depending switching rules,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, pp.195-201, 2004.
- [2] A. Back, J. Guckenheimer, and M. Myers, “A dynamical simulation facility for hybrid systems,” *Hybrid systems*. New York: Springer, In R. L. Grossman, A. Nerode, P. Ravn, & H. Rishel (Eds.), 1993.
- [3] P. Baldi and G. Hatfield, “DNA microarrays and gene expression,” *Cambridge University Press*, 2002.
- [4] Sun, Z., Ge, S.S., and Lee, T.H., “Controllability and reachability criteria for switched linear systems,” *Automatica*, pp.775-786. 2002.
- [5] M.S. Branicky, “Analysis of continuous switching systems: Theory and examples,” *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, MD, pp. 3110-3114, June 29-July 1 1994.
- [6] M. S. Branicky, “Stability of switched and hybrid systems,” in *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL , Dec. 14 – 16, 1994, pp. 3498 – 3503.
- [7] M.S. Branicky, “Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 475-482, 1998.
- [8] R.W. Brockett, “Asymptotic stability and feedback stabilization,” in *Differential Geometric Control Theory* (R.W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, eds.), pp. 181-191, Birkhauser, Boston, 1983.
- [9] R. W. Brockett, “Hybrid models for motion control systems,” In *H. L. Trentelman and J. C. Willems, editors, Essays on Control: Perspectives in the Theory and Its Applications*, pp.29-53, Birkhauser, Boston, 1993.
- [10] D. Casagrande, “Stabilizability of non-holonomic systems by means of switching controllers,” *The Powerpoint for Internal Seminar*, CAP Group, EE Dept, Imperial College, January 6, 2005.
- [11] G. Xie and L. Wang, “Necessary and sufficient conditions for controllability of switched linear systems,” *Proc. Of American Control Conference*, vol.47, pp. 1897-1902, 2002.
- [12] B.-S. Chen, Y.-Y. Chen, and C.-C. Lin, “Nonlinear fuzzy guidance law with saturation of actuators against maneuvering targets,” *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 769-779, 2002.

- [13] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung, "Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, pp. 1883-1887, 2002.
- [14] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, and B. Lennartson, "Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, pp. 1069-1082, 2000.
- [15] E. Feron, "Quadratic stabilizability of switched system via state and output feedback," Technical report CICS-P-468, MIT, 1996.
- [16] R. Fierro, F. Lewis and A. Lowe, "Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 29, pp. 649-654, 1999.
- [17] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, and C.K. Li, "The control of switching dc-dc converters -A general LQR problem," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 38, NO. 1. February 1991 pp. 413-418.
- [18] H.F.L. Frank, K.S.T. Peter, and C.K. Li, "An improved LQR-based controller for switching dc-dc converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. Vol. 40, NO. 5. October 1993 pp. 521-528.
- [19] S. B. Gershwin, "Hierarchical flow control: A framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 1, 195-209, 1989.
- [20] A. Gollu and P. Varaiya, "Hybrid dynamical systems," in *Proc. 28th IEEE Conf. Decision and Control*, Tampa, FL, USA, pp. 2708-2712, Dec. 1989.
- [21] I.A. Hiskens and M.A. Pai, "Hybrid systems view of power system modelling", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Geneva, Switzerland, May 2000.
- [22] J.P. Hespanha and A.S. Morse, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching," *Automatica*, Vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [23] D. J. Houghton, P. B. Luh, E. Max, and K. R. Pattipati, "Scheduling jobs with simple precedence constraints on parallel machines," *IEEE Control Systems Mag.*, vol. 10, no. 2, pp. 34-40, 1990.
- [24] H. de Jong, J. Geiselmann, G. Batt, C. Hernandez, and M. Page, "Qualitative simulation of the initiation of sporulation in *Bacillus Subtilis*," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 66, pp. 261-299, 2004.
- [25] Z. Sun and D. Zheng, "On stabilization of switched linear control systems," *IEEE AC*, vol. 46, pp. 291-295. 2001.

- [26] M. Johansson, A. Rantzer and K-E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems.*, Vol. 7, No. 6, pp. 713-722, 1999.
- [27] H. de Jong, G. J., C. Hernandez, M. Page, T. Sari, and J. Geiselmann, "Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 66, pp. 301-340, 2004.
- [28] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, Boston, 2003.
- [29] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford Univ,1999.
- [30] Zhendong Sun and Shuzhi S. Ge, *Swiched Linear Systems Control and Design*, Spring,2004.
- [31] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and stability of switched linear systems: a short survey of recent results," *Proc. IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, Limassol, Cryprus, June 27-29, 2005.
- [32] D. Liberzon and A.S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control System Magazine*, Vol. 19, pp. 59-70, 1999.
- [33] D.-C. Liaw, Y.-W. Liang and T.C. Lee, "Reliable control of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 706-710, 2000.
- [34] D.-C. Liaw, C.-C. Cheng and Y.-W. Liang, "A 3-D guidance law for landing on a celestial object," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp.890-892, 2000.
- [35] Z.G. Li, C.Y. Wen and Y.C. Soh, "Stabilization of a class of switched systems via designing switching laws," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, pp.665-670, 2001.
- [36] F.-J. Lin, R.-J. Wai, and M.-P. Chen, "Wavelet neural network control for linear ultrasonic motor drive via adaptive sliding mode technique," *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 50, no. 6, pp. 686-698, June 2003.
- [37] S.C. Benghea and R.A. DeCarlo, "Optimal control of switching systems," *Automatica*,vol. 41, pp. 11-27, 2005.
- [38] C.F. Matrtin and W.P. Dayawansa, "On the existence of a Lyapunov function for a family of switching systems," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 1820-1821, December 1996.
- [39] J.V. Medanic, "Design of realiable controllers using redundant control elements," *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, CA, pp. 3130-3134, June 2-4, 1993.



- [40] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov functions for stable LTI systems with commuting A-matrices," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2469-2471, 1994.
- [41] T. Ooba and Y. Funahashi, "Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 42, No. 5, pp. 719-721, 1997.
- [42] M. Oishi and C. Tomlin, "Switched nonlinear control of a VSTOL aircraft," in *Proc. 38th Conf. Decision and Control*, Phoenix, AZ, pp. 2685-2690, Dec. 1999.
- [43] P. Peleties and R. A. DeCarlo, "Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions," in *Proc. 1991 American Control Conf.*, Boston, MA, 1991, pp. 1679 - 1684.
- [44] E. Skafidas, R.J. Evans, A.V. Savkin and I.R. Petersen, "Stability results for switched controller systems," *Automatica*, Vol. 35, pp. 553-564, 1999.
- [45] R.N. Shorten and K.S. Narendra, "On the stability and existence of common Lyapunov Function for stable linear switching systems," In *Proc. 37th Conf. Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, December pp. 3723-3724, 1998.
- [46] M. A. Wicks and R. A. DeCarlo, "Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems," *Proceedings of 1997 American Control Conference*, pp. 1709-1713, Albuquerque, NM, June 1997.
- [47] G. Xie, D. Zheng, and L. Wang, "Controllability of Switched linear systems," *IEEE AC*,47(8), pp.1401 -1405, 2002.
- [48] M.A. Wicks, P. Peleties and R.A. DeCarlo, "Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switching systems," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 3492-3497, December 14-16, 1994.
- [49] R.-J. Wai and J.-D. Lee, "Intelligent motion control for linear piezoelectric ceramic motor drive," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Part B, vol. 34, no. 5, pp. 2100-2111, Oct. 2004.
- [50] P. P. Varaiya, "Smart cars on smart roads: Problems of control," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, no. 2, 195-207, 1993.
- [51] R.J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control," *Automatica* pp. 137-143, 1995.
- [52] G. Xie and L. Wang "Quadratic stability and stabilization of discrete-time switched systems with state delay," *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, 14-17 December 2004 pp.3235 - 3240

- [53] X. Xu and P.J. Antsaklis, "Stabilization of second-order LTI switched systems," *Int. J. Control*, Vol. 73, pp.1261-1279, 2000.
- [54] F.-K. Yeh, H.-H. Chien, and L.-C. Fu, "Design of optimal midcourse guidance sliding-mode control for missiles with TVC," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, no. 3, pp. 824-837, May 2003.
- [55] Q. Zhao and J. Jiang, "Reliable state feedback control system design against actuator failures," *Automatica* 1998, pp. 1267-1272.
- [56] Sun, Z., Ge, S.S., and Lee, T.H, "Controllability and reachability criteria for switched linear systems," *Automatica*, pp.775-786, 2002.
- [57] J.Ezzine and A. H. Haddad, "Controllability and observability of hybrid systems," *Int. J. Control*, vol. 49, pp.2045-2055. June, 1989.
- [58] 江家禎, "切換式系統與切換式線性控制系統," 交通大學電機與控制所碩士論文, 2006.

