

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

切換式系統可穩定性及切換律之研究



Study of Stabilizability of a class of Switched Systems and  
their Stabilizability Switching Law

研究生：曾昭銘

指導教授：梁耀文 博士

中華民國九十六年七月

切換式系統可穩定性及切換律之研究

Study of Stabilizability of a class of Switched Systems and  
their stabilizability Switching Law

研究生：曾昭銘

Student : Zhao-Ming Zeng

指導教授：梁耀文 博士

Advisor : Yew-Wen Liang

國立交通大學電機與控制工程學系



A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering  
College of Electrical Engineering and Computer Science  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master  
in  
Electrical and Control Engineering  
July 2007  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

# 切換式系統可穩定性及切換律之研究

研究生：曾昭銘

指導教授：梁耀文 博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要



本篇論文使用李亞普諾夫理論探討子系統為不穩定之切換式系統可穩定化的條件及穩定切換律的建構。由於切換式系統經過切換後要達到漸近穩定有可能會出現 zeno 的現象(即有限時間內無限次切換)，因此本論文利用讓每個系統至少動作一段時間後再進行切換，藉此來改善 zeno 的現象，但此法有可能無法使切換式系統達到漸近穩定的目的，因此在此介紹了實際穩定性，讓切換式系統經過切換後可達到實際穩定。而本論文中也探討了如何建構 nonzeno 的切換律並且整理出實現 nonzeno 切換律的演算法則，最後提出一些例子來驗證其結果。

# Study of Stabilizability of a class of Switched Systems and their Switching Law

Student : Zhao-Ming Zeng

Advisor : Dr. Yew-Wen Liang

Department of Electrical and Control Engineering  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

This thesis investigates the issue of stabilizability of a class of switched systems, where all the subsystems are assumed to be unstable, through the Lyapunov approach. Since the stabilizability switching law might result in chattering behavior (or zero), a kind of switching law that acts on each subsystem at least on a constant time period  $T$  between adjacent switch is proposed for alleviating the zero phenomenon; However, this modified switching law can only guarantee practical stability rather than asymptotic stability performance. This study also presents an algorithm to perform the non-zero stabilization switching law in practical stability sense. Finally, examples demonstrate the usage and benefits of the approach.

## 誌 謝

本篇論文的完成，實在要感謝太多人了，沒有你們的幫助，恐無法有所精進，希望日後能繼續給予指教與鼓勵，必銘記在心！

首先，要感謝我的指導教授梁耀文博士在專業領域上的指導，使我這兩年的學習中受益良多，除此之外老師對於日常生活、人生處世以及做人的道理也不吝提供幫助以及提供正確且良好的觀念，將對於往後的人生有所助益，也要感謝系上曾給予協助的老師，同時，也要感謝口試委員廖德誠博士、鄭治中博士和陳俊宏博士給予指正與寶貴的建議，使本論文更加完備。

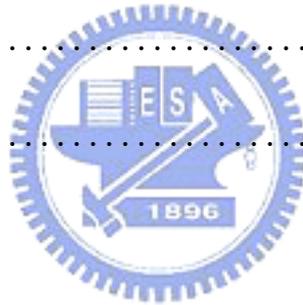
接下來要感謝江家禎學長，蔡哲倫學長，黃智盛學長及徐聖棟學長在我遇到困難及心情低落時能給予適時的幫助與鼓勵，再來要感謝實驗室的同學宏泰，逸康在研究上給予支持與協助，而學弟紹偉，益銘，丞昶也都會適時的給予我一些意見，感謝你們對於我的幫助，使我能夠更專心於研究，以及感謝其他的同學，你們曾給予我幫助，陪我度過這兩年的日子，充實我的研究生生活。

最後要感謝我的家人，感謝我的父親、母親、哥哥，從小到大陪我一路走來，對我的包容，實在辛苦你們了！我將這論文獻給你們，謝謝你們對我的支持與鼓勵，讓我可以無後顧之憂的在學業上勇往直前，進而完成研究所的學業，謝謝你們！

# 目 錄

	頁次
中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝	III
目錄	IV
圖目錄	VI
Chapter 1 緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究動機.....	4
1.3 論文架構.....	6
Chapter 2 不穩定子系統間存在穩定切換律條件及其切換律之探討.....	7
2.1 兩個不穩定子系統.....	9
2.2 N 個不穩定子系統.....	12
2.3 多重李亞普諾夫函數.....	16
Chapter 3 有限時間進行有限次切換(nonzeno)之切換律研究.....	21
3.1 存在時間(dwell time).....	23
3.2 實際穩定性(Practical Stability).....	25

3.3 達成實際穩定性之 nonzeno 切換律可行性研究 .....	27
Chapter 4 應用範例模擬與討論 .....	36
4.1 倒單擺使用 nonzeno 切換律和 zeno 切換律之比較 .....	37
4.2 倒單擺系統使用 VSC 設計及使用切換式系統的比較 .....	44
4.3 對於兩個不穩定線性系統之 nonzeno 切換律設計與討論 .....	51
4.4 存在時間切換律之模擬與討論 .....	56
Chapter 5 結論與未來研究方向 .....	60
5.1 結論 .....	60
5.2 未來研究方向 .....	61
參考文獻 .....	62



# 圖目錄

圖 1-1 切換式系統示意圖.....	1
圖 1-2 多個控制器控制單一受控體示意圖.....	2
圖 1-3 例 1.1 經過切換後之 $x_1, x_2$ 相位圖.....	5
圖 1-4 例 1.1 之切換信號.....	5
圖 2-1 $A_1$ 和 $A_2$ 之 $x_1, x_2$ 相位圖.....	8
圖 2-2 例 2.1 經過切換後之 $x_1, x_2$ 相位圖.....	8
圖 2-3 例子 2.2 中 $\bigcup_{i=1}^3 \{\mathbf{x}   \mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} < 0\} = R^n \setminus \{0\}$ 示意圖.....	14
圖 2-4 例 2.3 經過切換後之 $x_1, x_2$ 相位圖.....	17
圖 2-5 連續函數 $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$ 實線系統 1, 虛線系統 2.....	18
圖 2-6 不連續函數 $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$ 實線動作中系統, 虛線未動作系統.....	18
圖 3-1 (a)例 3.1 經過切換後之 $x_1, x_2$ 相位圖; (b)切換信號.....	22
圖 3-2 切換序列.....	24
圖 3-3 實際穩定性圖示.....	26
圖 3-4 各集合示意圖.....	29
圖 4-1 倒單擺示意圖.....	37
圖 4-2 倒單擺使用不同的輸入 $u$ .....	38
圖 4-3 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號; (d) 3 秒到 3.1 秒 切換信號.....	42
圖 4-4 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號; (d) 3 秒到 3.1 秒 切換信號.....	44
圖 4-5 (a) $x_1, x_2$ 的軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 輸入 $u$ .....	48
圖 4-6 $\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0, I := \{1, 2\}$ .....	49

圖 4-7 (a) $x_1, x_2$ 的軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號; (d) 0.22 到 0.4 秒之切換信號 .....	51
圖 4-8 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號; (d) 1.2 到 1.45 秒 切換信號 .....	54
圖 4-9 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號; (d) 1.2 到 1.45 秒 切換信號 .....	55
圖 4-10 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號 .....	56
圖 4-11 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號 .....	57
圖 4-12 (a) $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) $x_1, x_2$ 相位圖; (c) 切換信號 .....	58
圖 4-13 (a) 系統 1 $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) 系統 1 $x_1, x_2$ 相位圖 .....	58
圖 4-14 (a) 系統 2 $x_1, x_2$ 軌跡圖; (b) 系統 2 $x_1, x_2$ 相位圖 .....	59



# CHAPTER 1

## 緒論



### 1.1 研究背景

目前工業上實際使用中的系統大多都是混合了離散事件及連續變數的動態系統，即所謂的混合系統(hybrid system)。所謂的切換式系統一般來說是一組包含了多個子系統，及一個適當的切換規則組合而成，其子系統可由微分方程式或差分方程式來表示，此系統也是屬於混合系統的一種，其架構可由圖 1-1 來表示。

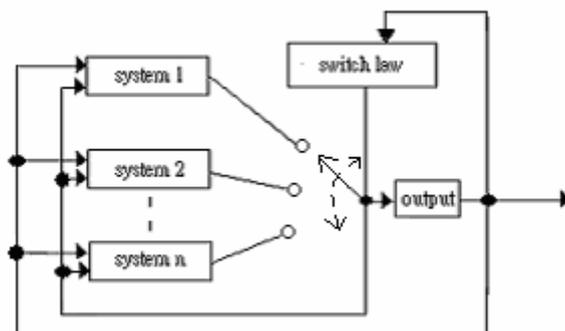


圖 1-1 切換式系統示意圖

除此之外，在[15]，[1]，[16]中所提到的非完整系統(nonholonomic control system)，這類型的系統在某些條件下，經由 Brockett's condition[16]，[2]可知無法使用單一個回授控制使其穩定，在[13]中使用了切換式系統的概念來解決這個問題，而在[15]中也提出了一個非完整系統的實際例子就是推車的應用，在這個例子的應用中，我們可以看到[15]是使用了兩組控制器輸入來達到穩定的目的。這種使用多組控制器，控制單一個受控體的架構如圖 1-2 所示。

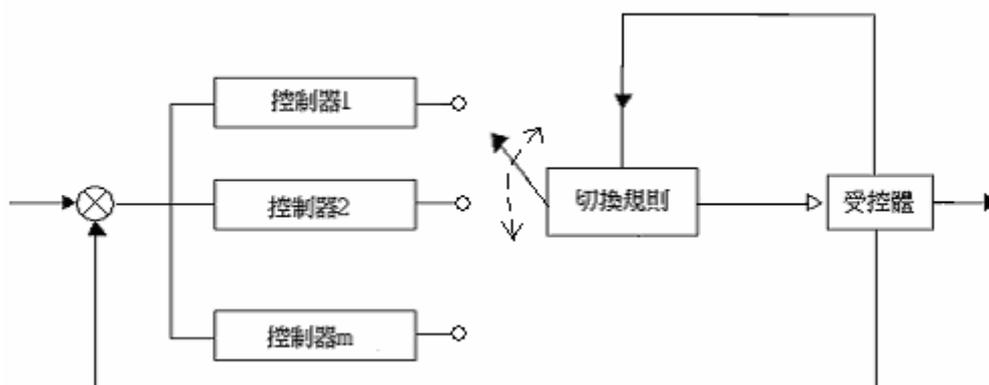


圖 1-2 多個控制器控制單一受控體示意圖

而此種型式也是屬於切換式系統的一種，因為我們可以將第一個控制器和受控體看成第一個子系統，第二個控制器和受控體看成第二個子系統，再配合一個適當的切換規則轉為圖 1-1 的架構。其他像是模糊控制(Fuzzy control)，適應性控制(adaptive control)，可變結構控制(variable structure control)這種有多重模式的控制技術，也可以將切換式系統的概念應用在其上面，由上可知切換式系統可應用的範圍是很廣泛的。

目前也有很多切換式系統的實際運用，例如：電力系統[14][5]，通訊系統[28]，網路控制[17]，化工程序[10]，PWM 控制[25]，磁浮軸承控制[20]，遙控氣墊船[24]，冷暖氣空調[6]等等。因此，對於切換式系統該如何設計其切換規則，切換式系統的穩定性及性能分析等等的相關議題在最近幾十年內也被廣泛的討論。其中，穩定性的分析是每一種系統所遇到的第一個重要問題，而且對於切換

式系統來說更為重要，因為從[18]中我們可以知道就算是每一個子系統皆為穩定，但切換律選取不當整體系統仍然是不穩定，也因此切換式系統穩定性的分析[18][7][8][19][3][26]在目前為最受大家所感興趣的問題。

而目前對於切換式系統的穩定性分析大多都是使用李亞普諾夫方程式(Lyapunov function)來討論，這是一個從能量觀點來分析系統是否穩定的理論，也是一個被廣泛用來討論系統穩定性的方法。其中切換式系統的穩定性主要包含了以下的幾個問題：

- 1.如何判斷切換式系統是否存在穩定切換律的條件
- 2.如何設計穩定切換律

其中問題 1 中的子系統可分為三類：

- (a)子系統皆為穩定
- (b)子系統可為不穩定
- (c)子系統皆為不穩定



而問題 2 內目前所使用的穩定切換律有以下幾種：

- (a)狀態變數切換法則[8]
- (b)選取最大或最小的李亞普諾夫方程式(Lyapunov function)的切換法則[16]
- (c)存在時間(dwell time)切換法則[16]
- (d)最小投影(min-projection)策略[23]

除了穩定性問題外，其他像是切換式系統性能分析[12]，切換律設計[26][23]等等的問題，也是有越來越多人加入研究，由此可知切換式系統逐漸被大家所重視。

## 1.2 研究動機

一般在討論切換式系統穩定性，大多是討論子系統皆為穩定時的狀況下，但若子系統皆為不穩定時是否可經由切換後達到穩定呢？我們先考慮以下切換式系統：

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n$$

在[26]對於這個問題提供了一個判斷存在穩定切換律的條件及建構穩定切換律的方法，其存在穩定切換律的判斷條件為：

$$\exists \alpha > 0 \text{ 使 } \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (1-1)$$

還有一另個條件為

$$\exists P > 0 \text{ 使 } \bigcup_{i=1}^2 \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} < 0 \} = R^n \setminus \{0\} \quad (1-2)$$

而這兩個條件在[11]已被證明是對等條件，其中  $A_i$  可以為不穩定的系統。滿足(1-1)，(1-2)之條件後則切換式系統是可以經過切換後達到穩定的目的，我們利用以下的例子來說明。



### 例 1.1:

考慮以下兩個子系統

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1.2 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2.5 \\ -1.5 & -3 \end{bmatrix}$$

$A_1$  其之特徵值為  $0.25 \pm 0.4873i$ ， $A_2$  之特徵值為  $1.7839$ ， $-3.7839$ ，我們可以知道這兩個系統皆為不穩定，令  $\alpha = 0.6$  及  $P$  為：

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix}$$

可滿足條件(1-1),(1-2), 切換規則使用[23]之最小投影(min-projection)策略, 由[23]可知此策略可達到指數穩定。由圖 1-3 可知這兩個系統經過切換後是會一直往原點趨近, 但為了達到這個目的會發生 zeno 現象(有限時間內無限次切換), 由圖 1-4 我們也可以看出其切換次數是非常的多, 而這是我們不希望發生的。

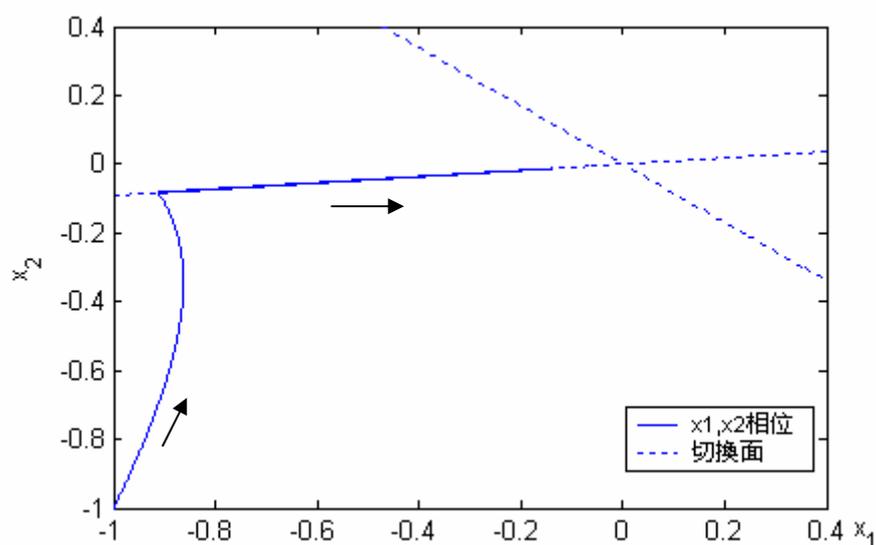


圖 1-3 例 1.1 經過切換後之  $x_1$ ,  $x_2$  相位圖

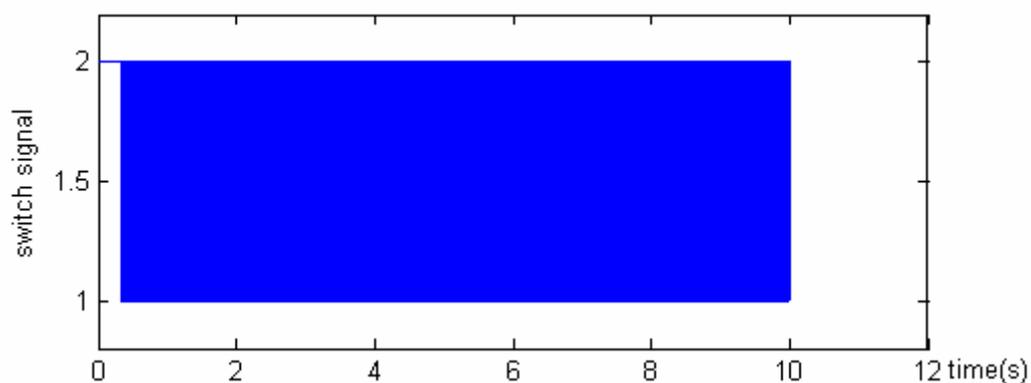


圖 1-4 例 1.1 之切換信號

而一般實際的系統有些是當狀態進入我們所設定的範圍後, 系統之狀態即保持在裡面的情況, 在這種情形下也稱為穩定即實際穩定(Practical Stability)的觀念, 因此希望利用此穩定的觀念來解決 zeno 的現象。而在此篇論文中利用了存在時間

(Dwell Time)及實際穩定(Practical Stability)的想法來解決 zeno 的問題，並且比較使用實際穩定(Practical Stability)與指數穩定的結果。

### 1.3 論文架構

此篇論文中主要是要探討切換式系統如何建構 nonzeno(有限時間內有限次切換)的切換律，及不同切換律之比較。在第二章中使用了李亞普諾夫方程式(Lyapunov Function)來判斷不穩定子系統間存在可穩定化之條件及切換律設計，而在第二章中所使用之切換律，有可能會產生有限時間內無限次切換之問題即 zeno 的現象，所以在第三章中說明了如何建構一個 nonzeno 的切換律來處理這個問題，並且整理出[27]中建構 nonzeno 的切換律之步驟。第四章中我們使用了倒單擺的例子及線性切換式系統，來對第二章及第三章提出之理論做一個比較，最後第五章則是對此篇論文做一個總結及提供一些未來可研究之方向。



# CHAPTER 2

## 不穩定子系統間存在穩定切換律條件及其切換律之探討



一般切換式系統的數學表示如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n$$

在此我們考慮一個特別的情況，就是其子系統皆為線性系統則可將上式改寫為

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n$$

我們的目的是希望此切換式線性系統，可經由切換後穩定，即  $t \rightarrow \infty, \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$

考慮底下例子[16]:

**例子 2.1:**

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i \in \{1, 2\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -2 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

令初值  $x_1 = 1, x_2 = 1$  由圖 2-1 的相位圖可以知道這兩個線性子系統是穩定的，  
計算其  $A_1$  之特徵值為  $-0.1000 \pm 1.4142i$ ， $A_2$  之特徵值為  $-0.1000 \pm 1.4142i$ 。

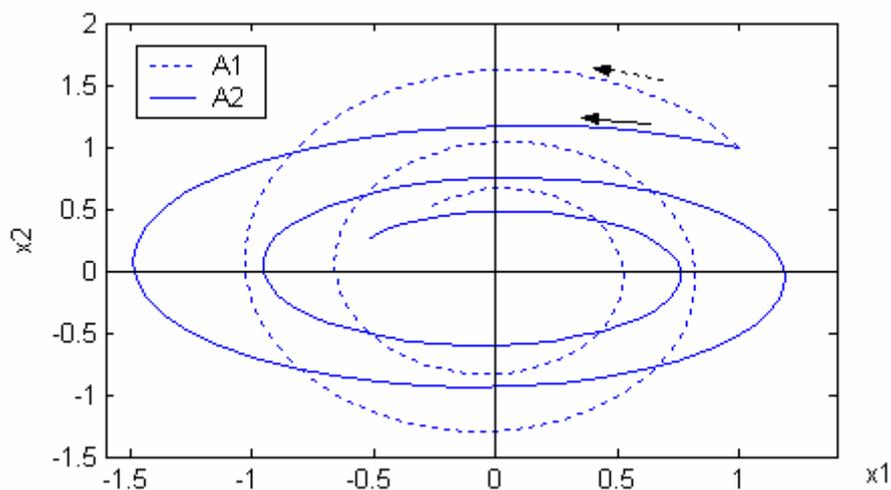


圖 2-1  $A_1$  和  $A_2$  之  $x_1, x_2$  相位圖

使用底下切換律進行切換。

$$i = \begin{cases} 2, & x_1 x_2 \leq 0 \\ 1, & x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

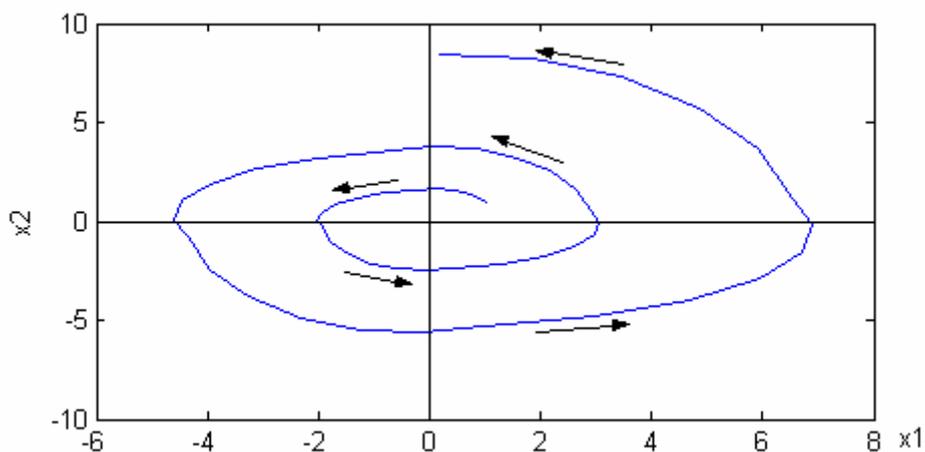


圖 2-2 例 2.1 經過切換後之  $x_1, x_2$  相位圖

我們由圖 2-2 可知兩個穩定系統間的切換，若使用不適當的切換律也有可能造成

不穩定，因此我們可以了解到切換律對切換式系統之影響是很重要的。即穩定的子系統經由切換後，有可能造成穩定或不穩定的結果，那如果子系統皆不穩定是否也可以經由切換後達到穩定的結果，我們從[26]也可以知道對於不穩定之子系統間也有是可能經過切換來達到穩定的目的，而此章主要是在討論不穩定子系統間是否存在可穩定切換律的條件及其切換律之探討。

2.1 兩個不穩定子系統使用共同李亞普諾夫方程式來判斷不穩定子系統間存在可穩定化之條件及其切換律設計。

2.2 如何將 2.1 的條件使用到 N 個不穩定子系統。

2.3 若共同李亞普諾夫方程式無法求得時，使用多重李亞普諾夫方程式來判斷不穩定子系統間是否可穩定化，及其切換律設計。

## 2.1 兩個不穩定子系統

式子(2-1)為描述切換式系統的數學表示：

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i \in I := \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2-1)$$

若此切換式系統中之子系統皆不穩定的話，我們要如何去判斷這些子系統是否可以經由切換來達到穩定的目的，而其條件為何呢？對於這個問題，我們可以使用李亞普諾夫方程式的理論來處理這個問題[21],[22]。其主要想法是，若在系統(2-1)中我們找到一個共同李亞普諾夫方程式  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ ，且其一次微分後滿足

$$\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0 \quad I := \{1, 2, \dots, N\} \quad (2-2)$$

則系統(2-1)可經由一個適當的切換律[23]，最小投影策略(min-projection)根據(2-3)決定要動作的系統。

$$i = \arg \min_{j \in I} \mathbf{x}^T P f_j(\mathbf{x}) \quad , \quad I := \{1, 2, \dots, N\} \quad (2-3)$$

根據定理 2.1 我們可以知道此切換律是保證使系統穩定。

**定理 2.1**[23]:

考慮切換式系統(2-1)。若存在矩陣  $P > 0$ ，而且存在一個常數  $\gamma > 0$  使得所有的  $\mathbf{x}$  在  $f_i(\mathbf{x})$  內至少有一個系統滿足(2-4)

$$2\mathbf{x}^T P f_i(\mathbf{x}) \leq -\gamma \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (2-4)$$

由 Lyapunov 的觀念，可知在最小投影(min-projection)策略(2-3)下可使切換式系統在滿足可穩定化條件後，經由切換達到指數穩定。

在此章中我們討論(2-1)中的一個特別的情況，就是其子系統皆為線性系統，且其子系統只有兩個，則其切換式線性系統表示為：

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i \in I := \{1, 2\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2-5)$$

其中  $A_1$ ， $A_2$  皆不為赫維茲矩陣(Hurwitz matrix)，我們定義李亞普諾夫方程式(Lyapunov function)為：

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

從(2-2)可知道對於這兩個不穩定之線性系統間，存在穩定切換律之充分條件，可用以下式子來表示：

$$\exists P > 0 \quad \text{使得} \quad \bigcup_{i=1,2} \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} < 0 \} = R^n \setminus \{0\} \quad (2-6)$$

若滿足(2-6)之條件後則可以使用一個適當的切換律[23]使得  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  達到穩定的目的，但是在這個理論中有一個問題就是其矩陣  $P$  要如何決定。後來在 1994[26]中也提出了存在穩定切換律之充分條件如下所示：

$$\exists \alpha \quad (0 < \alpha < 1) \quad \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2-7)$$

及

$$\exists \beta > 0 \quad A_1 + \beta A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2-8)$$

而(2-7)，(2-8)是對等的，在此我們可以使用羅斯赫維茲穩定準則來驗證是否存在  $\beta$  值。現在我們可以得到(2-6)及(2-8)這兩個判斷存在穩定切換律之充分條件。然而在 1996 年[11]中(2-6)及(2-8)被證明了是對等的條件，因此我們可以從(2-8)式中所找出之  $A_{eq}$  由下列的李亞普諾夫方程式，來求解出矩陣  $P$ 。

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} \leq -Q \quad , \quad Q > 0 \quad (2-9)$$

由以上之討論我們可以得到判斷存在穩定切換律之充分條件，當(2-6)或(2-8)成立時我們可以使用適當的切換律，來進行切換使切換式線性系統(2-5)穩定，在此我們使用[23]中的最小投影(min-projection)策略，根據(2-3)決定要動作的系統，其中  $f_j(\mathbf{x}) = A_j \mathbf{x} \quad j = 1, 2$ 。

對於線性切換式系統(2-5)來說矩陣  $P$  可由(2-9)來求解出，其矩陣  $P$  可滿足(2-4)。以下整理出建構穩定切換的步驟。

**演算法則 2.1:** (兩個不穩定子系統達成穩定之步驟)

**Step1:** 使用羅斯赫維茲穩定準則來檢查  $A_1 + \beta A_2 = A_{eq}$  是否存在  $\exists \beta > 0$ ，使得  $A_{eq}$  為一個赫維茲矩陣，如果成立則進行 **Step2**。

**Step2:** 選擇一個  $\beta$  值，使  $A_{eq}$  為赫維茲矩陣，並且由下列李亞普諾夫方程式來求解出矩陣  $P$ ：

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q, \quad Q > 0。$$

**Step3:** 使用最小投影策略(2-3)來進行切換，其中  $f_j(\mathbf{x}) = A_j \mathbf{x}$

$$i = \arg \min_{j \in I} \mathbf{x}^T P f_j(\mathbf{x}), \quad I := \{1, 2\}。$$

## 2.2 N 個不穩定子系統

在上節中我們所討論的切換式系統(2-5)其子系統只包含了兩個線性系統，那如果其子系統不只兩個時，那其(2-6)及(2-8)這兩個判斷存在穩定切換律之條件是否可以使用呢?在這一小節中我們將來討論這個問題。

現在考慮以下切換式系統型式

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2-10)$$

其中  $A_i, i = 1, \dots, N$  皆不為赫維茲矩陣，定義李亞普諾夫方程式為

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

則(2-6)存在穩定切換律之充分條件，可以改寫為下列式子：

$$\exists P > 0 \quad \text{使得} \quad \bigcup_{i=1}^N \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} < 0\} = R^n \setminus \{0\} \quad (2-11)$$

若滿足(2-11)之條件後則可以使用一個適當的切換律(2-3)使得  $t \rightarrow \infty$ ， $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  達到穩定的目的。由[8]我們可以知道(2-8)的條件可以改寫為：

$$\exists \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i < 1, \quad \text{使得} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (2-12)$$

在上節中我們知道  $N=2$  時(2-11)和(2-12)是對等，但在  $N>2$  的情況下是否也成立呢？答案是不行的，而以下將說明條件(2-11)  $\nRightarrow$  條件(2-12)，條件(2-12)  $\Rightarrow$  條件(2-11)。

我們可以從以下之反例來說明條件(2-11)  $\nRightarrow$  條件(2-12)



### 例子 2.2:

考慮底下三個系統：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2.5 \\ -2.5 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & -1 \end{bmatrix}$$

計算其特徵值為  $\lambda(A_1) = \{-2, 2\}$ ， $\lambda(A_2) = \{-2.69, 2.69\}$ ， $\lambda(A_3) = \{-1.8, 1.8\}$ ，可以清楚看出這三個系統皆為不穩定。令  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，畫  $\mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} = 0$  而此式可分解為  $(a_i x_1 + b_i x_2)(a'_i x_1 + b'_i x_2) = 0$  其中  $a_i, b_i, a'_i, b'_i$  為常數，所以我們可以畫出兩條直線再判斷小於零的區域。因此由圖 2-3 中我們可以知道，虛線為  $\mathbf{x}^T (A_1^T P + P A_1) \mathbf{x} < 0$  的區域，點線為  $\mathbf{x}^T (A_2^T P + P A_2) \mathbf{x} < 0$  區域，實線為

$\mathbf{x}^T (A_3^T P + PA_3) \mathbf{x} < 0$  區域。所以由圖 2-3 看出

$$\bigcup_{i=1}^3 \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T (A_i^T P + PA_i) \mathbf{x} < 0 \} = R^n \setminus \{0\}$$

是成立的。

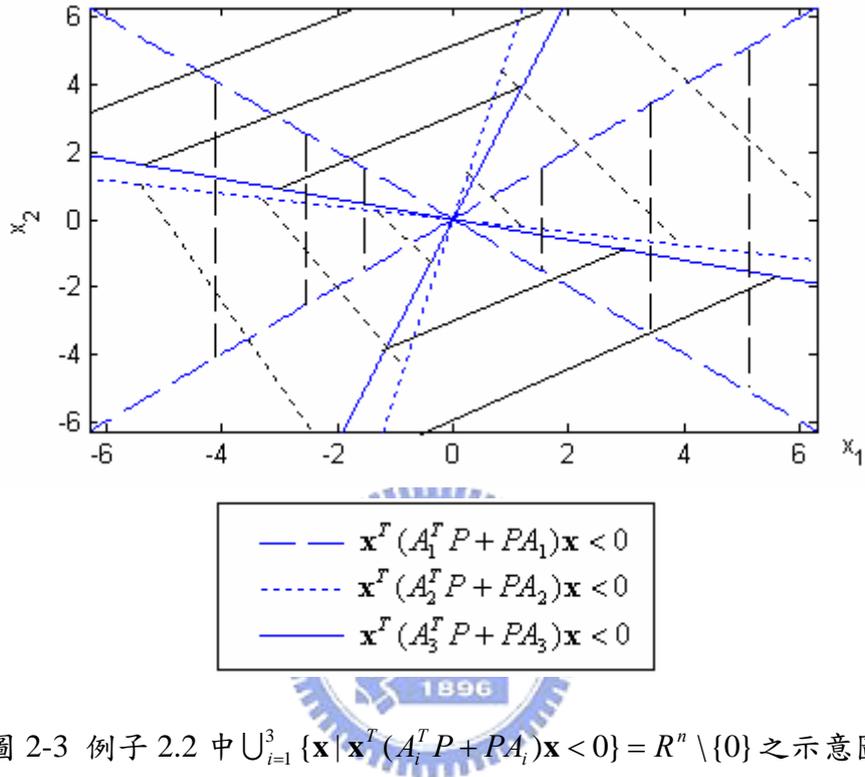


圖 2-3 例子 2.2 中  $\bigcup_{i=1}^3 \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T (A_i^T P + PA_i) \mathbf{x} < 0 \} = R^n \setminus \{0\}$  之示意圖

接下來我們令

$$A_{eq} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) A_3$$

則可得

$$\begin{aligned} A_{eq} &= \begin{bmatrix} -2\alpha_1 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -2.5\alpha_2 \\ -2.5\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \alpha_1 - \alpha_2 & 1.5(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ 1.5(1 - \alpha_1 - \alpha_2) & -(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 & 1.5 - 1.5\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ 1.5 - 1.5\alpha_1 - 4\alpha_2 & -1 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令  $A_{eq}$  之特徵值為  $\lambda_1, \lambda_2$ ，根據(2-12)其  $A_{eq}$  必須為赫維茲矩陣，即特徵值皆在左

半平面，但是由我們求解出之  $A_{eq}$  是找不出  $\alpha_i$  值使  $A_{eq}$  為赫維茲矩陣因為：

$$\text{trace}(A_{eq}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

其特徵值不可能全在左半平面，不為赫維茲矩陣因此我們可以知道條件(2-11) $\Rightarrow$ 條件(2-12)。

而當條件(2-12)成立時  $\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq}$  為赫維茲矩陣，我們可以找到一個矩陣  $P$  使得下列式子成立：

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q < 0 \quad , \quad Q > 0 \quad (2-13)$$

將(2-12)代入(2-13)中可以得到：

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} < 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (2-14)$$

將(2-14)展開後可得



$$\alpha_1 \mathbf{x}^T (A_1^T P + P A_1) \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{x}^T (A_2^T P + P A_2) \mathbf{x} + \dots + \alpha_N \mathbf{x}^T (A_N^T P + P A_N) \mathbf{x} < 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

我們可以知道  $\forall \mathbf{x} \neq 0$  其  $\mathbf{x}^T (A_i^T P + P A_i) \mathbf{x}$ ,  $i=1, \dots, N$  中，必定至少有一個是小于零。因此可以得到條件(2-12) $\Rightarrow$ 條件(2-11)這個結論。

由以上討論我們知道雖然條件(2-11)及條件(2-12)並不是對等的，但條件(2-12)仍然為(2-11)之充分條件，因此我們還是可以使用(2-12)之結果依照底下步驟來建構穩定的切換。

**演算法則 2.2:**(多個不穩定子系統達成穩定之步驟)

**Step1:** 檢查是否存在  $\exists \alpha_i > 0$  ,  $\sum_{i=1}^N \alpha_i < 1$  , 使得  $\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = A_{eq}$  為赫維茲矩陣，如

果成立則進行 **Step2**。

**Step2:** 利用  $A_{eq}$  由下列李亞普諾夫方程式來求解出矩陣  $P$  :

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} \leq -Q, \quad Q > 0 \quad .$$

**Step3:** 使用最小投影策略(2-3)來進行切換其中  $f_j(\mathbf{x}) = A_j \mathbf{x}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$

$$i = \arg \min_{j \in I} \mathbf{x}^T P f_j(\mathbf{x}) \quad I := \{1, 2, \dots, N\} \quad .$$

## 2.3 多重李亞普諾夫函數

上面二節中分析切換式系統(2-1)穩定性及建構穩定切換律的方法是，在多個子系統中找出單一個李亞普諾夫方程式  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ ，使其一次微分  $\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0$ ,  $I := \{1, 2, \dots, N\}$  但是若其單一李亞普諾夫方程式無法找出時，是否就無法使其切換式系統穩定？我們先看看以下例子：

### 例 2.3:

考慮切換以下兩個子系統

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

首先要判斷這兩個子系統是否符合可穩定化的條件(2-7)，我們經由簡單的計算可得：

$$\alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 = A_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.5\alpha \\ 0.5 + 0.5\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

由上式可看出不論  $\alpha$  的值為何， $A_{eq}$  為赫維茲矩陣是不可能存在的。因為其

$tr(A_{eq}) = 0$ 。因此由 2.2 節的討論中我們知道共同李亞普諾夫方程式是無找到的。但是這兩個系統是否就無法經由切換到達穩定的目的?我們使用以下切換律來進行切換:

$$i = \begin{cases} 1 & , x_1 x_2 \leq 0 \\ 2 & , x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

由圖 2-4 我們可以看到系統還是可以經由切換來達到穩定。

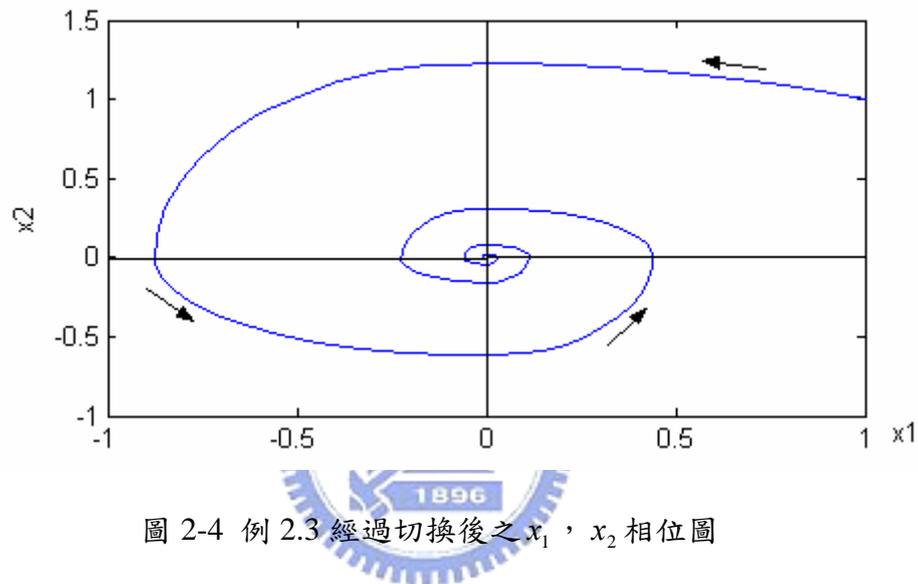


圖 2-4 例 2.3 經過切換後之  $x_1, x_2$  相位圖

因此對於單一李亞普諾夫方程式無法找出時,是否就無法使其切換式系統穩定的這個問題, [3]提出了一個多重李亞普諾夫方程式(Multiple Lyapunov functions)的概念來處理這個問題。此多重李亞普諾夫方程式的基本想法為,對於每個子系統  $f_i(\mathbf{x})$ , 定義對應於  $f_i(\mathbf{x})$  的類李亞普諾夫方程式  $V_i(\mathbf{x})$ , 並且建構一個切換律來使得切換至  $i$  的  $V_i(\mathbf{x})$  是逐次遞減。我們用兩個子系統來說明此想法。我們令  $t_k$  為切換的時間點,  $k = 1, 2, \dots$  切換次數, 整體的李亞普諾夫方程式為  $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$ ,  $\sigma(t_k) = 1, 2$  為切換信號, 假設在切換的瞬間  $V_1 = V_2$ , 即對於所有  $k$   $V_{\sigma(t_{k-1})}(\mathbf{x}(t_{k-1})) = V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$ , 則  $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$  為一連續函數, 由[3]的想法從圖 2-5 可看出系統是一直往原點趨近使系統狀態達到穩定。

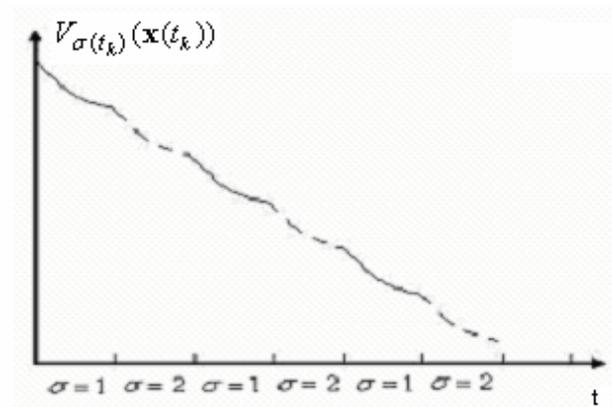


圖 2-5 連續函數  $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$  實線系統 1，虛線系統 2

但在一般的情況下有可能會發生以下情形，當第  $i$  個系統動作時其  $V_i(\mathbf{x})$  是逐漸遞減，但切換至其他系統時原本之前動作的系統之  $V_i(\mathbf{x})$  是遞增，則此時的  $V_{\sigma(t_{k-1})}(\mathbf{x}(t_{k-1})) \neq V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$ ， $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$  不為一連續函數。由 [3] 的想法，我們用兩個子系統來看的話，由圖 2-6 可以看出系統也是一直往原點趨近使系統狀態達到穩定。

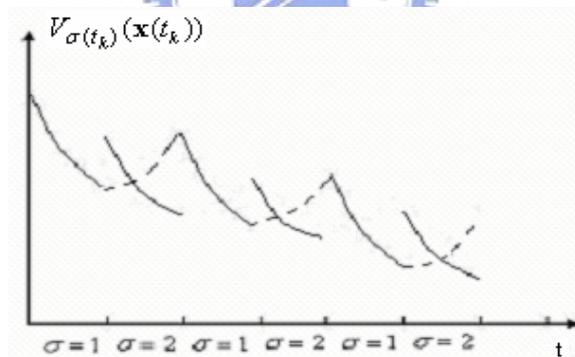


圖 2-6 不連續函數  $V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k))$  實線動作中系統，虛線未動作系統

經由以上之觀念我們整理出底下穩定條件，我們考慮以下系統

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2-15)$$

使其滿足以下兩個條件

$$V_i(0) = 0 \text{ 且 } \mathbf{x} \in \Omega_i, \mathbf{x} \neq 0 \text{ 時 } V_i(\mathbf{x}) > 0 \quad (2-16)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_i \text{ 時 } \dot{V}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2-17)$$

則我們可以由以下之定理 2.2 來保證系統(2-15)可以達到漸近穩定的目的。

**定理 2.2**[16]:

假設條件(2-17),(2-16)成立且  $\cup_i \Omega_i = R^n$ ，對於  $k < p$ ，令  $t_k < t_p$  使  $\sigma_{(t_k)} = \sigma_{(t_p)} = i$  及  $\sigma_{(t_j)} \neq i$  在  $t_k < t_j < t_p$ ，若存在  $\gamma > 0$  使得

$$V_{\sigma(t_p)}(\mathbf{x}(t_p)) - V_{\sigma(t_k)}(\mathbf{x}(t_k)) \leq -\gamma \|\mathbf{x}(t_k)\|^2$$

則系統(2-15)為漸近穩定。



所以我們知道當單一李亞普諾夫方程式無法求出時，可以使用多重李亞普諾夫方程式的概念來判斷系統(2-15)是否可穩定，這也使得系統(2-15)得到穩定的條件可以放寬。由上的討論我們知道使用多重李亞普諾夫理論也可以判斷切換式系統是否穩定，接下來我們考慮切換兩個不穩定的線性系統使用多重李亞普諾夫方程式來建構穩定的切換律。

考慮切換以下兩個不穩定的線性系統

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} \quad , \quad i \in \{1,2\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (2-18)$$

對應於其類李亞普諾夫函數為  $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x}$ ， $V_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_2 \mathbf{x}$ ，其中  $P_1 = P_1^T > 0$ ， $P_2 = P_2^T > 0$ 。 $\Omega_1$ ， $\Omega_2$  定義為  $\dot{V}_1(\mathbf{x}) < 0$  和  $\dot{V}_2(\mathbf{x}) < 0$  的區域。若切換式系統(2-18)滿足條件(2-16)，(2-17)及定理 2.2，則系統(2-18)在滿足以下情況[16]時會存在穩定的切換律。

$$\mathbf{x}^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) \mathbf{x} < 0 \quad \text{當} \quad \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T P_2 \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (2-19)$$

$$\mathbf{x}^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) \mathbf{x} < 0 \quad \text{當} \quad \mathbf{x}^T P_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad (2-20)$$

其切換律[16]為

$$i = \arg \min_{i \in I} V_i(\mathbf{x}(t)) \quad I = \{1, 2\}$$

我們可以知道經由此切換律若在  $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_2 \mathbf{x}\}$  沒有滑動模式下時，則對應系統  $A_1$  及  $A_2$  的李亞普諾夫方程式  $V_1(\mathbf{x})$  和  $V_2(\mathbf{x})$  是會逐漸的遞減因此由李亞普諾夫的理论可以保證系統(2-18)為穩定。但在  $\mathbf{x} \in S$  時發生滑動模式的話，我們可以得到以下兩個不等式

$$\mathbf{x}^T (A_1^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A_1) \mathbf{x} \geq 0 \quad (2-21)$$

$$\mathbf{x}^T (A_2^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A_2) \mathbf{x} \leq 0 \quad (2-22)$$

當滑動模式產生時我們無法確定是那個系統動作，因此不失一般性我們令  $i=1$ ，底下將說明滑動模式產生時會隨著其符合的 Filippov 解遞減。對所有  $\alpha \in (0,1)$  我們可得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T ((\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2)^T P_1 + P_1 (\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2)) \mathbf{x} \\ &= \alpha \mathbf{x}^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) \mathbf{x} + (1-\alpha) \mathbf{x}^T (A_2^T P_1 + P_1 A_2) \mathbf{x} \\ &\leq \alpha \mathbf{x}^T (A_1^T P_1 + P_1 A_1) \mathbf{x} + (1-\alpha) \mathbf{x}^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) \mathbf{x} < 0 \end{aligned}$$

上式中第一個不等號是根據(2-22)得來的，因此我們可以知道當產生滑動模式系統軌跡也向原點趨近達到穩定的目的。

# CHAPTER 3

## 有限時間進行有限次切換(nonzeno) 之切換律研究



對於第二章所使用之切換律(2-3)，由[23]有提到說是有可能發生有限時間內無限次切換的現象即 zeno 的現象。我們考慮以下例子。

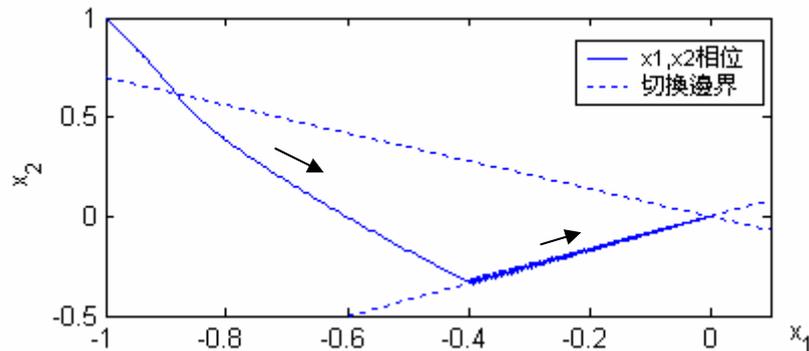
例 3.1[26]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$$

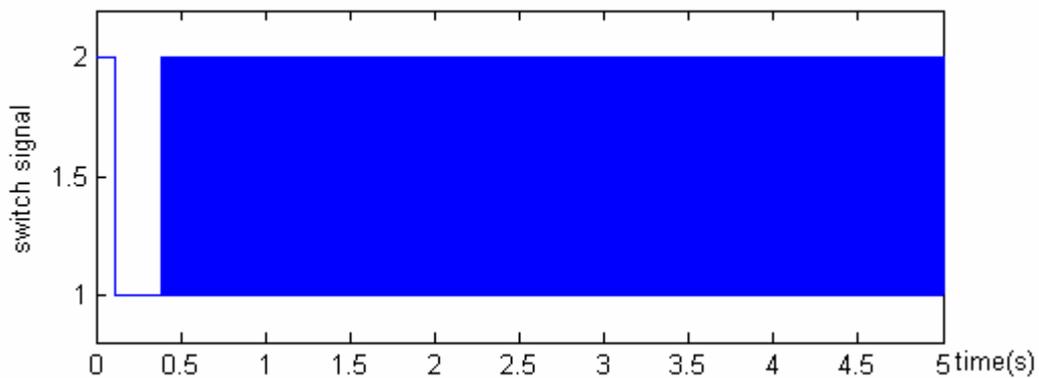
令  $\beta = \frac{2}{3}$  可以使得  $A_1 + \beta A_2 = A_{eq}$  為赫維茲矩陣，由  $A_{eq}^T P + P A_{eq} = -I$  來解出  $P$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5413 & 0.0105 \\ 0.0105 & 0.3147 \end{bmatrix}$$

經由切換律(2-3)來進行切換我們從圖 3-1(a)可知系統會趨近原點，但從圖 3-1(b)中可以看到會發生 zeno 的現象。



(a)



(b)

圖 3-1 (a)例 3.1 經過切換後之  $x_1$  ,  $x_2$  相位圖(b)切換信號

而這個現象是我們不希望發生的，因此我們利用找出一個時間  $T_d$ ，使得每個系統都至少都動作  $T_d$  的時間後再用切換律(2-3)來判斷要動作的系統，來解決有限時間內無限次切換，但是這樣有可能無法達到漸近穩定的效果，因此我們引入實際穩定(Practical Stability)的觀念，即系統狀態進入我們所接受的範圍後，系統之狀態即保持在這個的範圍內，而使用此時間  $T_d$  可保證系統為實際穩定性。在此章中我們將介紹實際穩定性(Practical Stability)的觀念[27]及利用此觀念來建構出

nonzero 的切換律，整理出[27]中建構此切換律之步驟。對於若切換式系統中的子系統皆為穩定時，我們將介紹存在時間(Dwell Time)的切換律，來避免 zeno 現象。以下分三節來討論 nonzero 的切換律。

3.1 存在時間(Dwell Time)

3.2 何謂實際穩定性(Practical Stability)

3.3 如何由可實際穩定之切換式系統建構 nonzero 切換律，並且整理出建構此切換律之步驟

### 3.1 存在時間(dwell time)

對於切換式系統

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (3-1)$$

考慮其子系統皆為赫維茲矩陣，我們可以找出一個  $\tau_d$  的時間，使每個子系統至少動作  $\tau_d$  時間後再進行切換，使得有限時間內無限次切換的情況不會發生。

以下我們考慮  $i=1,2$  的情況下如何求出時間  $\tau_d$  [16]。由於子系統皆穩定因此存在李亞普諾夫方程式  $V_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_i \mathbf{x}, i=1,2$ ，決定  $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$  滿足

$$a_i |\mathbf{x}|^2 \leq V_i(\mathbf{x}) \leq b_i |\mathbf{x}|^2 \quad (3-2)$$

和

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \leq -c_i |\mathbf{x}|^2 \quad (3-3)$$

將(3-2)，(3-3)合併起來得

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \leq -2\lambda_i V_i(\mathbf{x}) \quad (3-4)$$

其中

$$\lambda_i = \frac{c_i}{2b_i} \quad (3-5)$$

考慮圖 3-2 切換序列

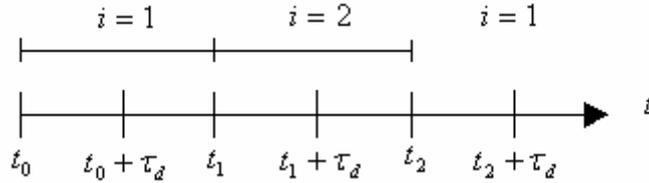


圖 3-2 切換序列

我們知道

$$V_i(\mathbf{x}(t_0 + \tau_d)) \leq e^{-2\lambda_i \tau_d} V_i(\mathbf{x}(t_0)) \quad t \in [t_0, t_0 + \tau_d]$$

由上述之不等式關係我們可以得到以下之式子

$$V_2(\mathbf{x}(t_1)) \leq \frac{b_2}{a_1} V_1(\mathbf{x}(t_1)) \leq \frac{b_2}{a_1} e^{-2\lambda_1 \tau_d} V_1(\mathbf{x}(t_0)) \quad (3-6)$$

和

$$V_1(\mathbf{x}(t_2)) \leq \frac{b_1}{a_2} V_2(\mathbf{x}(t_2)) \leq \frac{b_1}{a_2} e^{-2\lambda_2 \tau_d} V_2(\mathbf{x}(t_1)) \leq \frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau_d} V_1(\mathbf{x}(t_0)) \quad (3-7)$$

若滿足定理 2.2 之要求我們可以明確的算出時間  $\tau_d$ ，並且知道系統(3-1)當  $N = 2$

時是漸近穩定。因此我們可得

$$V_1(\mathbf{x}(t_2)) - V_1(\mathbf{x}(t_0)) \leq -\gamma |\mathbf{x}(t_0)|^2$$

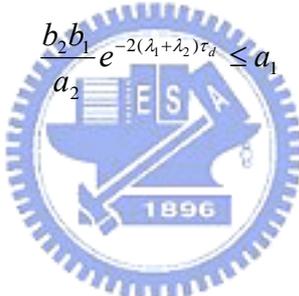
其中  $\gamma$  為一任意正整數。由(3-6)，(3-7)我們可以得到

$$\left( \frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} - 1 \right) V_1(\mathbf{x}(t_0)) \leq -\gamma \|\mathbf{x}(t_0)\|^2$$

根據(3-2)可以知

$$\left( \frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} - 1 \right) a_1 \leq -\gamma$$

由於  $\gamma$  為一任意正整數因此



$$\frac{b_2 b_1}{a_1 a_2} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau_d} \leq a_1$$

我們可以計算出其

$$\tau_d > \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \log \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \quad (3-8)$$

因此對於系統(3-1) 當  $N = 2$  時若求出時間  $\tau_d$ ，我們可以使子系統至少動作  $\tau_d$  時間後再進行切換，使得有限時間內無限次切換的情況不會發生。

## 3.2 實際穩定性(Practical Stability)

上節中討論的切換式系統，為子系統皆為穩定，而在第二章中我們已經知道，如何判斷切換式系統(2-1)是否可穩定化的條件及切換律的建構，雖然第二章中所用之切換律(2-3)由[23]可知是保證可以達到指數穩定，但從例 3.1 可以看出會有 zeno 的現象，為了解決這個問題我們可以令每個系統都至少動作一個適當的  $T_d$  時間後再用切換律(2-3)來判斷要切換至那一個子系統，改善這個有限時間

內無限切換的 zero 現象，然而此方法有可能使系統軌跡在原點附近振盪，但若是振盪的大小在我們可接受範圍內的話我們稱此為實際穩定性(Practical Stability)。我們可以從圖 3-3 來表示此觀念。

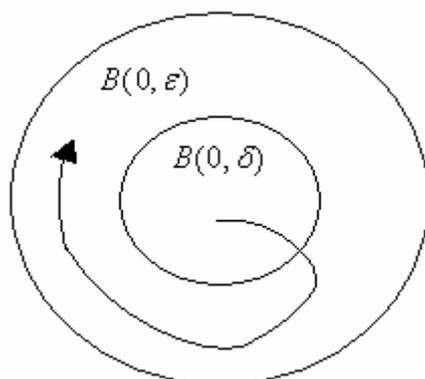


圖 3-3 實際穩定性圖示

我們考慮以下切換式系統

$$\dot{\mathbf{x}} = f_i(\mathbf{x}), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (3-9)$$

現在我們對切換式系統(3-9)來定義實際穩定性(Practical Stability)[27]。

### 定義 3.1:

假設對切換式系統(3-9)給定切換律  $S$ ，給定一個  $\epsilon > 0$ ，若  $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$  使得

$$\mathbf{x}(0) \in B(0, \delta) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B(0, \epsilon), \forall t \geq 0$$

則在這個切換律  $S$  下切換式系統(3-9)為  $\epsilon$  實際穩定( $\epsilon$ -practically stable)

### 定義 3.2:

假設對切換式系統(3-9)給定一個切換律  $S$ ，給定一個  $\epsilon > 0$ ，若在這個切換律  $S$  下切換式系統(3-9)為  $\epsilon$ -practically stable 且  $\forall \mathbf{x}(0) \in D$ ， $\exists T = T(\mathbf{x}(0)) \geq 0$  使得

$$\mathbf{x}(t) \in B(0, \varepsilon), \forall t \geq T$$

則在這個包含原點的區域  $D$  中，在切換律  $S$  下切換式系統為  $\varepsilon$  實際漸近穩定 ( $\varepsilon$ -practically asymptotically stable)

**定義 3.3:**

若對於所有  $\varepsilon > 0$ ，存在切換律  $S = S(\varepsilon)$  使得系統在這個切換律  $S$  下為  $\varepsilon$  實際穩定則切換式系統(3-9)為可實際穩定(practically stabilizable)

**定義 3.4:**

若對於所有  $\varepsilon > 0$ ，存在切換律  $S = S(\varepsilon)$  使得系統在這個切換律  $S$  下為  $\varepsilon$  實際漸近穩定，則切換式系統(3-9)在這個包含原點的區域  $D$  中，為可實際漸近穩定 (practically asymptotically stabilizable)

### 3.3 達成實際穩定性之 nonzeno 切換律可行性研究

在上節中我們對切換式系統(3-9)定義了什麼是實際穩定性，接下來我們要利用這個實際穩定性的觀念，來說明如何建構一個 nonzeno 的切換律。

**輔助定理 3.1:**

若  $f(\mathbf{x})$  為定義在  $\Omega$  上之連續函數且  $\Omega \subset R^n$  為緊緻集(compact set)，則存在  $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in \Omega$  使得

$$f(\mathbf{x}_a) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_b) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

即  $f(\mathbf{x})$  在  $\Omega$  內存在有最大值和最小值

**輔助定理 3.2:**

若  $f(\mathbf{x})$  為定義在  $\Omega$  上之連續函數， $\Omega \subset R^n$  為緊緻集(compact set)，則  $f(\mathbf{x})$  在  $\Omega$  上為一均勻連續函數，即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{若 } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta(\varepsilon) \quad \text{則} \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

**定理 3.1**[27]:

從切換式系統(3-9)假設能找到一個連續可微的正定函數  $V(\mathbf{x})$ ，令  $\rho > 0$  且集合

$\Omega_\rho$  為  $\Omega_\rho = \{\mathbf{x} \in R^n : V(\mathbf{x}) \leq \rho\}$  是有界的，若滿足以下條件

$$\min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\rho - \{0\} \quad (3-10)$$

則切換式系統(3-9)在包含原點的任意區域  $D \in \Omega_\rho$  是為可實際漸近穩定

(practically asymptotically stabilizable)。

若滿足定理 3.1 時，我們可以找出一個時間  $T_d$  使每一個系統都可以至少動作  $T_d$  時間後再切換，以下說明如何找出時間  $T_d$ 。

選取  $\varepsilon > 0$ ， $\beta > 0$  使得 ( $\varepsilon$  表示軌跡最後會保留在  $B(0, \varepsilon)$ ，即以 0 為原點  $\varepsilon$  為半徑的圓之範圍內)

$$\beta < \min_{\mathbf{x} \in \Omega_\rho \text{ and } \|\mathbf{x}\| \geq \varepsilon} V(\mathbf{x}) \quad (3-11)$$

令  $\Omega_\beta = \{\mathbf{x} \in \Omega_\rho \mid V(\mathbf{x}) \leq \beta\}$ ，且滿足  $\Omega_\beta \subseteq B(0, \varepsilon)$ ，考慮集合

$$\Omega_{\beta/2} = \{\mathbf{x} \in \Omega_\rho \mid V(\mathbf{x}) \leq \frac{\beta}{2}\}$$

我們定義

$$\xi = \text{dist}(\partial(\Omega_\beta), \partial(\Omega_{\beta/2})) = \inf_{\substack{V(\mathbf{x})=\beta \\ V(\mathbf{y})=\beta/2}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (3-12)$$

在此  $\text{dist}$  表示為  $\Omega_\beta$ ， $\Omega_{\beta/2}$  這兩個有界集合之距離。圖 3-4 為以上集合之關係。

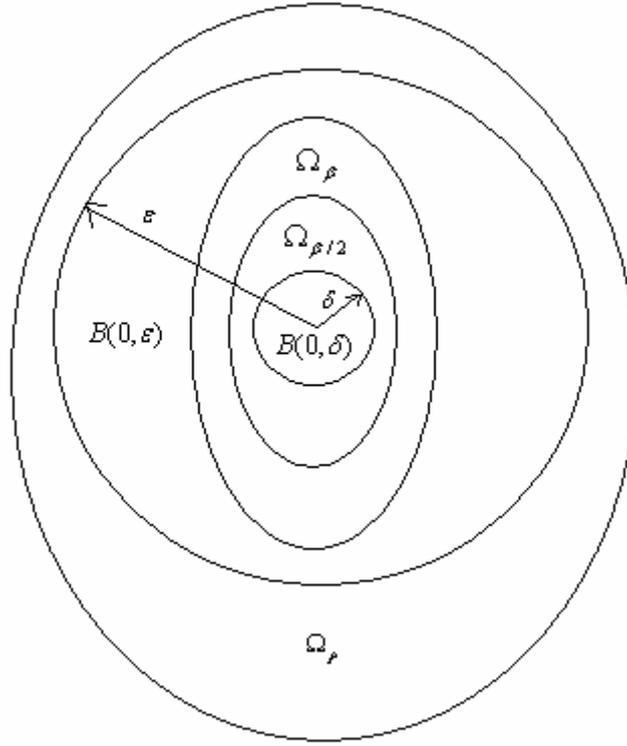


圖 3-4 各集合示意圖

在  $\Omega_\rho$  的範圍內我們定義

$$h_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad i \in I \quad , \quad I := \{1, 2, \dots, N\} \quad (3-13)$$

$$H(\mathbf{x}) = \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) = \min_{i \in I} h_i(\mathbf{x}) \quad (3-14)$$

定義集合  $\Omega_{\beta/2, \rho} = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \beta/2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \rho\}$ 。很明顯的  $\Omega_{\beta/2, \rho}$  為一個緊緻集

(compact set)。由輔助定理 3.1 知

$$\exists \gamma > 0 \text{ 使得 } \max_{\mathbf{x} \in \Omega_{\beta/2, \rho}} H(\mathbf{x}) = -\gamma \quad (3-15)$$

由輔助定理 3.2 可知  $h_i(\mathbf{x})$  在緊緻集(compact set)  $\Omega_\rho$  內為一均勻連續函數，故

$$\exists r_1 > 0 \text{ 使得 } |h_i(\mathbf{x}_a) - h_i(\mathbf{x}_b)| \leq \frac{\gamma}{2} \text{ 當 } \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in \Omega_\rho \text{ 及 } |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b| < r_1 \quad (3-16)$$

最後令  $L = \max_{i \in I} \max_{\mathbf{x} \in \Omega_\rho} \|f_i(\mathbf{x})\|$  定義：

$$T_d = \min \left\{ \frac{r_1}{L}, \frac{\xi}{L} \right\}$$

當  $T_d$  時間求出後可用以下切換律來切換達到實際穩定的效果

**演算法則 3.1:**(達成實際穩定之切換律)

- (i)  $k = 0, t_0 = 0, i_0 = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$ 。
- (ii) 若  $\mathbf{x}(t_k) \notin \Omega_{\beta/2}, t_k = kT_d$  在  $[kT_d, (k+1)T_d]$  時間內使用  $i_k = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$  之系統，若  $\mathbf{x}(t_k) \in \Omega_{\beta/2}$  則使用  $[(k-1)T_d, kT_d]$  時間內所動作的系統。
- (iii)  $k = k + 1$ ，重複步驟(ii)

底下我們說明上述切換律可以使系統(3-9)達到實際穩定。我們分兩步驟來說明，第一個步驟說明，當  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2, \rho}$  時切換式系統狀態在有限時間內會進入  $\Omega_{\beta/2}$ ，第二個步驟說明若  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$  則  $V(\mathbf{x}(t)) \leq \beta, \forall t \in [0, T_d)$ ，也就是說若  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$  則在  $T_d$  時間內系統狀態會保持在  $B(0, \varepsilon)$  內。

步驟一(若  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2, \rho}$  時切換式系統狀態在有限時間內會進入  $\Omega_{\beta/2}$ ):

使用反證法來說明。假設軌跡不會進入  $\Omega_{\beta/2}$  也就是說  $V(\mathbf{x}(t)) \geq \beta/2, \forall t$ 。

由上述切換律步驟(2)我們知道在  $kT_d$  的時間點由(3-15)知

$$h_{i_k}(\mathbf{x}(kT_d)) = H(\mathbf{x}(kT_d)) \leq -\gamma$$

此外根據我們定義之  $T_d$  由(3-16)推斷出

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(kT_d)\| = \left\| \int_{kT_d}^t f_{i_k}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \right\| < r_1, \forall t \in [kT_d, (k+1)T_d]$$

及

$$\|h_{i_k}(\mathbf{x}(t)) - h_{i_k}(\mathbf{x}(kT_d))\| \leq \frac{\gamma}{2}, \forall t \in [kT_d, (k+1)T_d]$$

因此

$$h_{i_k}(\mathbf{x}(t)) \leq -\frac{\gamma}{2}, \forall t \in [kT_d, (k+1)T_d]$$

由上式可知

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &= V(\mathbf{x}(0)) + \sum_{k=0}^{K-1} \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} h_{i_k}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau + \int_{KT_d}^t h_{i_K}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \\ &\leq V(\mathbf{x}(0)) - \frac{\gamma}{2}t \end{aligned} \quad (3-17)$$

因此由(3-17)當  $t$  足夠大時  $V(\mathbf{x}(t))$  將小於  $\beta/2$ ，這與假設  $\mathbf{x}(t) \notin \Omega_{\beta/2}$  (i.e.,

$V(\mathbf{x}(t)) \geq \beta/2, \forall t$ ) 不合因此軌跡會在有限時間內進入  $\Omega_{\beta/2}$ 。

**步驟二**(若  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$  則  $V(\mathbf{x}(t)) \leq \beta, \forall t \in [0, T_d)$ ):

此步驟相當於說明若  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$  則在  $T_d$  時間內系統狀態會保持在  $B(0, \varepsilon)$  內。此處我們也同樣使用反證法來說明，假設  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$ ， $\sigma(0) = i_0$  存在一個  $t_1 \in [0, T_d)$  使得  $V(\mathbf{x}(t_1)) > \beta$ 。因為  $V(\mathbf{x}(t))$  為連續，所以存在  $t_a$  及  $t_b$ ， $0 \leq t_a < t_b < t_1 \leq T_d$ ，使  $V(\mathbf{x}(t_a)) = \frac{\beta}{2}$ ， $V(\mathbf{x}(t_b)) = \beta$  及  $V(\mathbf{x}(t)) \in (\frac{\beta}{2}, \beta)$ ， $\forall t \in (t_a, t_b)$ 。根據選取的  $T_d$  可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t_b) - \mathbf{x}(t_a)\| &= \left\| \int_{t_a}^{t_b} f_{i_0}(\mathbf{x}_\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \max_{x \in \Omega_\rho} \|f_{i_0}(x)\| \cdot (t_b - t_a) \\ &< L \cdot T_d \\ &\leq \xi \end{aligned}$$

由上式知  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T_d)\|$  在  $T_d$  時間內會皆小於  $\xi$ ，根據  $\xi$  的定義(3-10)，可以看出和假設  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$ ， $\sigma(0) = i_0$  存在一個  $t_1 \in [0, T_d)$  使得  $V(\mathbf{x}(t_1)) > \beta$  不合，所以當  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\beta/2}$  時在  $\forall t \in [0, T_d)$  的時間間隔中， $V(\mathbf{x}(t)) \leq \beta$  軌跡會保持在  $B(0, \varepsilon)$  內。

我們將  $T_d$  的計算，整理如下之演算法則 3.2。

### 演算法則 3.2:

**Step1:** 給定  $\varepsilon$  值及  $\rho$  值，其中  $\varepsilon > 0$ ， $\rho > 0$ 。

**Step2:** 決定  $\beta$  及  $\xi$  值，其中  $\beta < \min_{\mathbf{x} \in \Omega_\rho \text{ and } \|\mathbf{x}\| \geq \varepsilon} V(\mathbf{x})$ ， $\xi < \min_{\substack{V(\mathbf{x})=\beta \\ V(\mathbf{y})=\beta/2}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 。

1) 決定  $\beta$  的方法為求解以下的最佳化問題。

$$\begin{aligned} \min \quad & V(\mathbf{x}) \\ \text{s.t} \quad & V(\mathbf{x}) \leq \rho \\ & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > \varepsilon^2 \end{aligned}$$

求解出  $\min V(\mathbf{x})$  後再選取一個小於  $\min V(\mathbf{x})$  的值當做  $\beta$  值。

2) 決定  $\xi$  的方法為求解以下的最佳化問題。

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \\ \text{s.t} \quad & V(\mathbf{x}) = \beta \\ & V(\mathbf{y}) = \beta / 2 \end{aligned}$$

求出此問題的答案後將此解開根號為所求之  $\xi$  值。

**Step3:** 決定  $\gamma$  值，其值為  $\max_{\mathbf{x} \in \Omega_{\beta/2, \rho}} H(\mathbf{x}) = -\gamma$ 。其中

$$\Omega_{\beta/2, \rho} = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid \beta/2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \rho \right\}, \quad H(\mathbf{x}) = \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$$

此  $\gamma$  值之取得由解決以下之最佳化問題取得。

$$\text{令 } h_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \quad i = 1 \cdots m$$

計算  $a_i$ ，其中  $a_i$  為如下有限制條件之最佳化問題的解。

$$\begin{aligned} \min \quad & h_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t} \quad & h_i(\mathbf{x}) - h_j(\mathbf{x}) < 0, \quad j := \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\} \\ & V(\mathbf{x}) \geq \beta / 2 \\ & V(\mathbf{x}) \leq \rho \end{aligned}$$

$\gamma$  為  $\max(a_1, a_2, \dots, a_m)$

**Step4:** 決定  $r_1$  值

計算  $b_i$ ，其中  $b_i$  為如下有限制條件之最佳化問題的解。

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \\ \text{s.t} \quad & h_i(\mathbf{x}) \leq \rho \\ & h_i(\mathbf{y}) \leq \rho \\ & |h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{y})| = \gamma / 2 \end{aligned}$$

$r_1$  為  $\min(b_1, b_2, \dots, b_m)$

**Step5:** 決定  $L$  及  $T_d$  值，其中  $L = \max_{i \in I} \max_{\mathbf{x} \in \Omega_\rho} \|f_i(\mathbf{x})\|$ ， $T_d = \min\left\{\frac{r_1}{L}, \frac{\xi}{L}\right\}$

計算  $c_i$ ，其中  $c_i$  為如下有限制條件之最佳化問題的解。


$$\begin{aligned} \max \quad & \|f_i(\mathbf{x})\| \\ \text{s.t} \quad & V(\mathbf{x}) \leq \rho \end{aligned}$$

$L$  為  $\max(c_1, c_2, \dots, c_m)$

我們可以整理出以下步驟來建構出系統(3-7)的穩定切換律：

**演算法則 3.3:** (達成實際穩定之步驟)

**Step1:** 找出切換式系統(3-7)中一個連續可微的正定函數  $V(\mathbf{x})$ ，令  $\rho > 0$ ，

$\Omega_\rho = \{x \in R^n : V(\mathbf{x}) \leq \rho\}$  是有界的，滿足以下條件

$$\min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) < 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\rho - \{0\}$$

**Step2:** 使用演算法則 3.2 求出時間  $T_d$

**Step3:** 使用以下切換律切換

(i)  $k = 0, t_0 = 0, i_0 = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$  。

(ii) 若  $\mathbf{x}(t_k) \notin \Omega_{\beta/2}, t_k = kT_d$  在  $[kT_d \quad (k+1)T_d]$  時間內使用  $i_k = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$  之

系統，若  $\mathbf{x}(t_k) \in \Omega_{\beta/2}$  則使用  $[(k-1)T_d \quad kT_d]$  時間內所動作的系統。

(iii)  $k = k + 1$ ，重複步驟(ii)



# CHAPTER 4

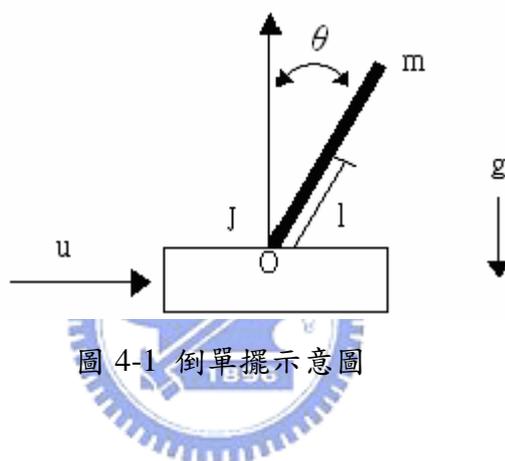
## 應用範例模擬與討論



在此章中我們將以幾個簡單的例子來說明，如何運用前兩章節之結果讓切換式系統經過切換後使系統狀態穩定，並且使用倒單擺系統這個例子根據前兩章節之結果來建構穩定的切換律，對其切換律做比較。我們在 4.1 節中討論對於倒單擺系統分別使用 nonzeno 切換律和 zeno 切換律後，比較其切換行為及狀態之變化。在 4.2 節中對於倒單擺系統我們分別使用 VSC(Variable Structure Control)設計和使用 nonzeno 切換律之切換式系統這兩種方法做處理，比較其結果。4.3 節內模擬了兩個不穩定線性子系統使用 nonzeno 切換律進行切換後的結果。最後在 4.4 節中對於存在時間切換律做了模擬與討論。

## 4.1 倒單擺使用 nonzeno 切換律和 zeno 切換律之比較

倒單擺系統為一個具有非線性及不穩定特性之系統，常被用來驗證各種控制理論，所以我們也將使用此系統對於二，三章中提出之理論來做一個比較。在此我們是使用[29]中所提出之倒單擺系統來做為討論，圖 4-1 為倒單擺系統之圖示。從圖 4-1 可以知道若沒有輸入  $u$  只要  $\theta$  有一點點的變化則單桿就會往下掉，因此在這裡我們考慮如何設計輸入  $u$  使得單桿可以到達垂直並且維持垂直的目的。



其中參數之意義如下：

$m$  : 單桿質量

$J$  : 支點(O)的慣性動能

$u$  : 輸入加速度

$g$  : 萬有引力

$l$  : 單桿一半的長度

利用 O 點的轉矩平衡，可得方程式

$$J\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ml u \cos \theta = 0$$

其  $J$  為

$$J = \frac{1}{12}m(2l)^2 + ml(l) = \frac{4}{3}ml^2$$

因此可得到[29]之倒單擺系統方程式表示

$$J\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + mlu \cos \theta = 0 \quad (4-1)$$

我們的目標是，當  $\theta$  在  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  這個範圍內找出控制律  $u$  使得， $\theta \approx 0$ ， $\dot{\theta} \approx 0$ ，由圖 4-2 所示我們可以利用不同的輸入  $u$ ，經過切換來達到目的。



圖 4-2 倒單擺使用不同的輸入  $u$

而其輸入  $u$  之決定由以下討論來求出，首先我們令  $\theta = x_1$ ， $\dot{\theta} = x_2$  將(4-1)轉為狀態變數方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mgl}{J} \sin x_1 - \frac{ml}{J} u \cos x_1 \end{aligned} \quad (4-2)$$

選取之李亞普諾夫方程式為

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1^2 \quad (4-3)$$

對  $\mathbf{x}$  微分後可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)\frac{mgl}{J}\sin x_1 - (x_1 + x_2)\frac{ml}{J}u \cos x_1 \quad (4-4)$$

我們要找出  $u_1$  及  $u_2$  使得  $x_1, x_2$  在要控制的範圍內滿足

$$\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0, \quad I = \{1, 2\}, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

考慮當  $(x_1 + x_2) \geq 0$  時令

$$u_1 = g \tan x_1 + \frac{J}{ml \cos x_1}(ax_2 + b) \quad (4-5)$$

其中  $a, b$  為待決定之常數。將(4-5)代入(4-4)我們可以得到

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = (2-a)x_1x_2 - (a-1)x_2^2 - b(x_1 + x_2)$$

因為在  $(x_1 + x_2) \geq 0$  時我們希望  $\dot{V}_1(\mathbf{x}) < 0$ ，令  $a = 2, b > 0$  可得

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = -x_2^2 - b(x_1 + x_2) \quad (4-6)$$

由(4-6)我們可以知道當  $(x_1 + x_2) \geq 0$  時若  $a = 2, b > 0$  則(4-5)式之  $u_1$  可使  $\dot{V}_1(\mathbf{x}) < 0$  成立。

接者我們考慮  $(x_1 + x_2) < 0$  時令

$$u_2 = g \tan x_1 + \frac{J}{ml \cos x_1}(a'x_2 - b') \quad (4-7)$$

其中  $a', b'$  為待決定常數。將(4-7)代入(4-4)我們可以得到

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = (2 - a')x_1x_2 - (a' - 1)x_2^2 + b'(x_1 + x_2)$$

因為在  $(x_1 + x_2) < 0$  時我們希望  $\dot{V}_2(\mathbf{x}) < 0$ ，令  $a' = 2$ ， $b' > 0$  可得

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = -x_2^2 + b'(x_1 + x_2) \quad (4-8)$$

由(4-8)我們可知道當  $(x_1 + x_2) < 0$  時若  $a' = 2$ ， $b' > 0$  則(4-7)式之  $u_2$  可使  $\dot{V}_2(\mathbf{x}) < 0$  成立。因此使用(4-5)，(4-7)這兩個輸入我們可以滿足  $\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0$ ， $I \in \{1, 2\}$ ，

$\forall \mathbf{x} \neq 0$ 。

現在我們將參數設定如下：



$m$	單桿質量	0.6kg
$J$	支點的慣性動能	0.2kg-m <sup>2</sup>
$g$	萬有引力	9.8m/s <sup>2</sup>
$l$	單桿一半的長度	0.5m

表 4-1 倒單擺參數設定

令  $a' = a = 2$ ， $b' = b = 1$  我們可以得到  $u_1$ ， $u_2$ ：

$$u_1 = 9.8 \tan x_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\cos x_1} (2x_2 + 1) \quad (4-9)$$

$$u_2 = 9.8 \tan x_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\cos x_1} (2x_2 - 1) \quad (4-10)$$

將(4-9)，(4-10)代回(4-2)我們可以得到以下兩個子系統的狀態方程式。

系統 1:

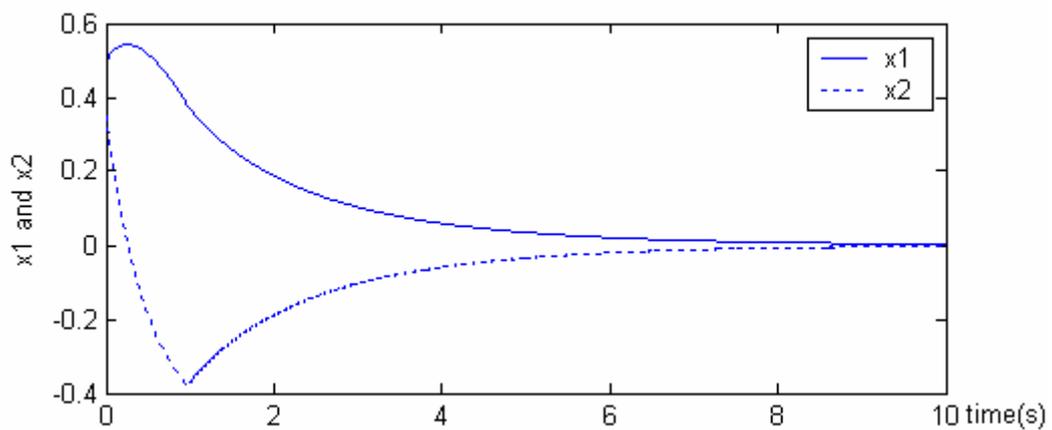
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - 1\end{aligned}$$

系統 2:

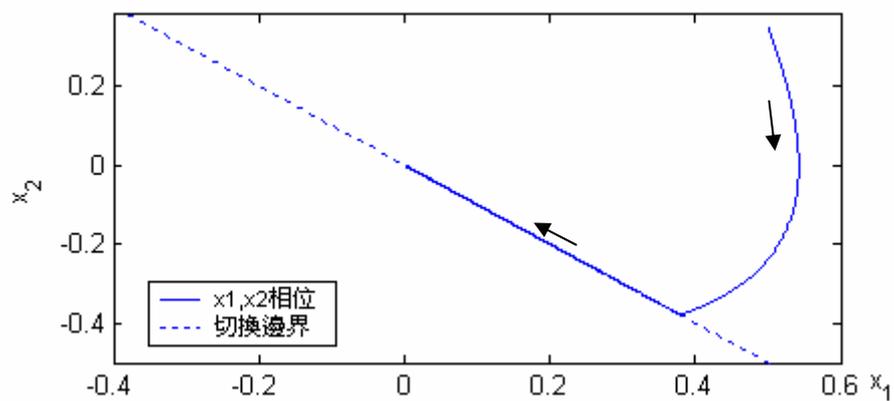
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 1\end{aligned}$$

首先我們利用最小投影(min-projection)的切換規則來使此系統狀態穩定。

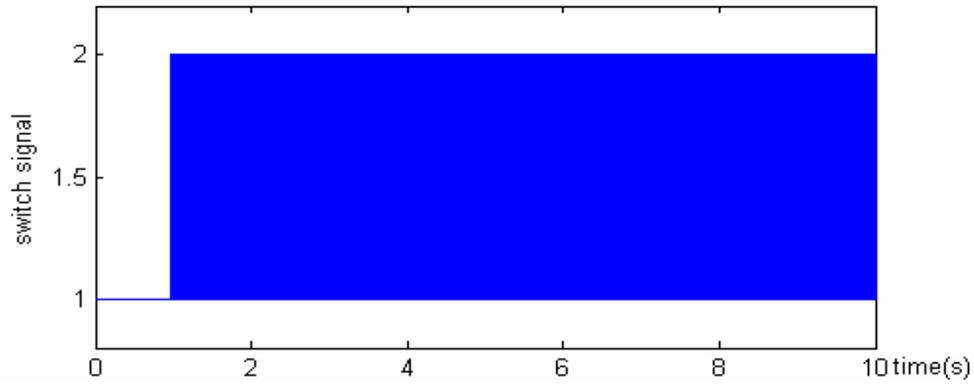
令初值為  $x_1 = 0.5$  ,  $x_2 = 0.35$  , 其模擬如圖 4-3



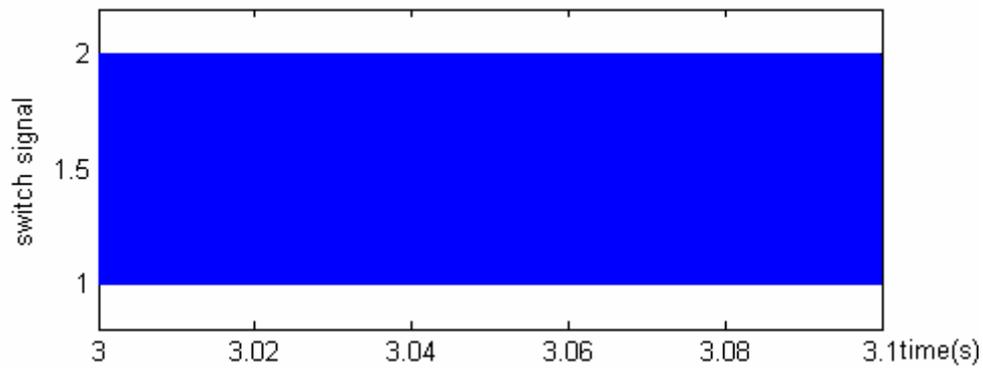
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 4-3 (a)  $x_1, x_2$  軌跡圖; (b)  $x_1, x_2$  相位圖; (c) 切換信號; (d) 3 秒到 3.1 秒切換信號

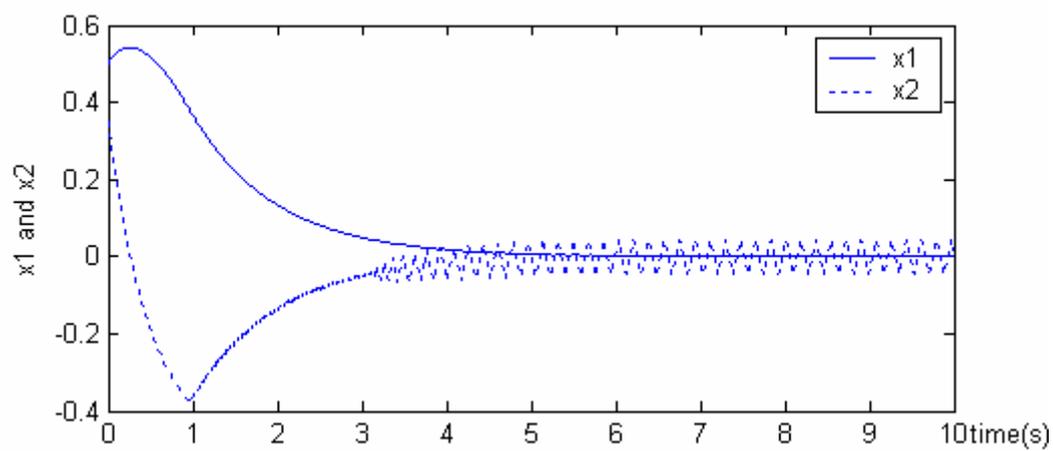
由圖 4-3 可看出系統是趨近原點，但出現 zeno 的現象。再來我們利用第三章的方法建構 nonzeno 的切換律，令  $\rho = 0.5$ ， $\Omega_\rho = \{\mathbf{x} \in R^n : V(\mathbf{x}) \leq \rho\}$ ，並且希望軌跡最後會進入  $B(0, 0.1)$  的圓內，使用演算法則 3.2 求出  $T_d = 0.0027\text{sec}$ 。再以下列的切換規則來切換：

(i)  $k = 0, t_0 = 0, i_0 = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$ 。

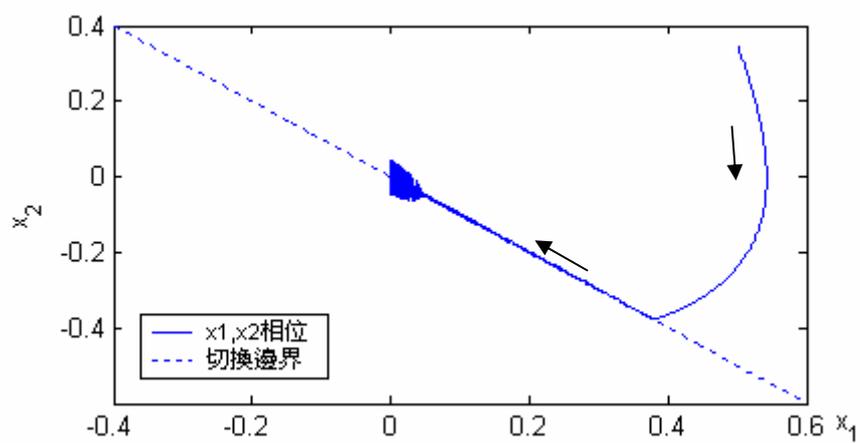
(ii) 若  $\mathbf{x}(t_k) \notin \Omega_{\rho/2}$ ， $t_k = kT_d$  在  $[kT_d, (k+1)T_d]$  時間內使用  $i_k = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$  之系統，若  $\mathbf{x}(t_k) \in \Omega_{\rho/2}$  則使用  $[(k-1)T_d, kT_d]$  時間內所動作的系統。

(iii)  $k = k + 1$ ，重複步驟(ii)

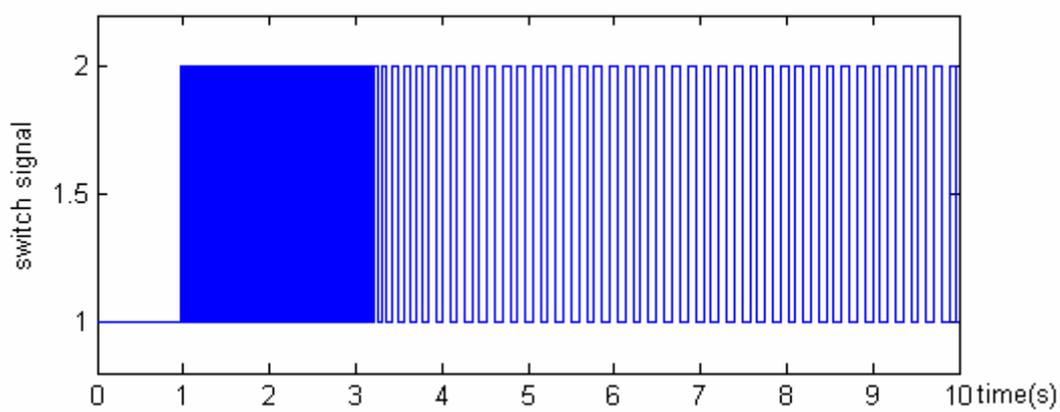
其模擬如圖 4-4



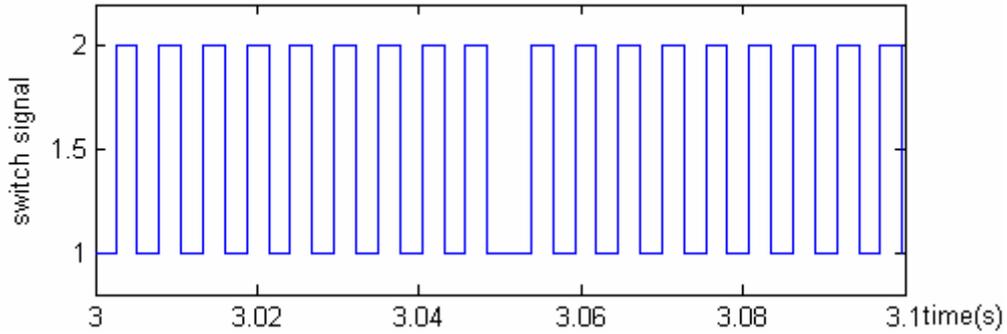
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 4-4 (a)  $x_1, x_2$  軌跡圖; (b)  $x_1, x_2$  相位圖; (c) 切換信號; (d) 3 秒到 3.1 秒切換信號

由圖 4-4 我們可以看出其系統狀態最後是保持在  $B(0,0.1)$  內，和我們在第 3.3 節所說明之理論是符合的。從以上模擬結果圖 4-3 及圖 4-4，分別使用切換律(2-3)及達成實際穩定之切換律(敘述如演算法則 3.1)這兩個切換律，使  $\mathbf{x}$  進入我們所設定的範圍  $B(0,0.1)$  其時間皆為 2.65 秒是一樣的，從圖 4-3(c)，圖 4-4(c)的比較可以清楚的看出，當我們須要單桿維持在垂直的狀態即  $\theta \approx 0$  時，用 nonzero 的切換律時可以用比較少的切換次數來達到我們所需的效果，而從圖 4-3(d)，圖 4-4(d) 看出可以改善有限時間內無限次切換的現象。由這個例子可以看出若我們使用實際穩定性(practically stable)的觀念是可以有效的使切換次數減少，並改善 zeno 的現象。

## 4.2 倒單擺系統使用 VSC 設計及使用切換式系統的比較

在此節中我們對 4-1 節的問題，使用 VSC 的設計方法來設計輸入  $u$ ，由 [9]VSC 的理論中我們可以知道此使用 sign-type 的設計方法會產生 chattering(跳切)的現象，因此這節中我們先使用 VSC 的計設求出變結構控制律再將此問題轉為切換式系統的形式及使用 nonzero 切換律來減少 chattering 的現象，最後我們比較上述 sign-type 變結構控制律及用切換理論改良 sign-type 變結構控制律的結果。

(4-2)式的狀態方程式可以重寫為以下型式：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})u\end{aligned}$$

首先使用 VSC 的設計方法求出  $u$ ，利用 [30] 的方法。首先令順滑面  $s$  為  $s = x_2 + mx_1 = 0$ ， $m > 0$ ，很明顯的當系統狀態維持在順滑面時簡化的系統模型為  $\dot{x}_1 + mx_1 = 0$ ，因此  $x_1 \rightarrow 0$  且  $x_2 \rightarrow 0$  也就是說穩定的目的可以被達成。對  $s$  做一次微分後得：

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{x}_2 + m\dot{x}_1 \\ &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + mx_2\end{aligned}\tag{4-11}$$

令(4-11)為零求出  $u^{eq}$ ，此  $u^{eq}$  的目的是讓順滑面成為一個不變曲面(invariant manifold)，因此可以得到  $u^{eq}$  為：

$$u^{eq} = \frac{1}{g(x)}(-f(x) - mx_2)\tag{4-12}$$

接下來令  $u = u^{eq} + u^{re}$  代入(4-11)得

$$\dot{s} = 0 + gu^{re}\tag{4-13}$$

使用[4]的迫近條件

$$s\dot{s} < -\sigma|s| \quad \text{當 } s \neq 0\tag{4-14}$$

將(4-13)兩邊同乘  $s$  得：

$$s\dot{s} = sg(\mathbf{x})u^{re}\tag{4-15}$$

$u^{re}$  需使式(4-14)成立，當  $s \neq 0$ 。我們可以知道  $u^{re}$  是使軌跡往順滑面移動的力量。令

$$u^{re} = -\frac{\eta}{g(\mathbf{x})} \text{sign}(s) \quad (4-16)$$

將(4-16)代入(4-15)得  $s\dot{s} = -\eta|s| < 0$ ，當  $s \neq 0$ 。可滿足(4-14)的迫近條件其中

$$\sigma > 0, \eta > 0。$$

底下我們 Lyapunov 的原理可說明(4-14)可在有限時間內到達順滑面。令

$$V = \frac{1}{2}s^2$$

做一次微分後得

$$\dot{V} = s\dot{s}$$

當(4-14)成立時可得

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} < -\sigma|s| = -\sigma\sqrt{V} < 0 \Rightarrow \frac{dV}{\sqrt{V}} < -\sigma dt$$

因此

$$\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{dV}{\sqrt{V}} = 2\sqrt{V} \Big|_{V(0)}^{V(t)} = 2(\sqrt{V(t)} - \sqrt{V(0)}) < -\sigma t$$

故

$$0 \leq \sqrt{V(t)} \leq \sqrt{V(0)} - \frac{1}{2}\sigma t$$

所以我們可以知道最遲在  $t = \frac{2\sqrt{V(0)}}{\sigma}$  時會到達順滑面。

由以上步驟可以求出輸入  $u$ ：

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x})}(-f(\mathbf{x}) - mx_2) - \frac{\eta}{g(\mathbf{x})} \text{sign}(s) \quad (4-17)$$

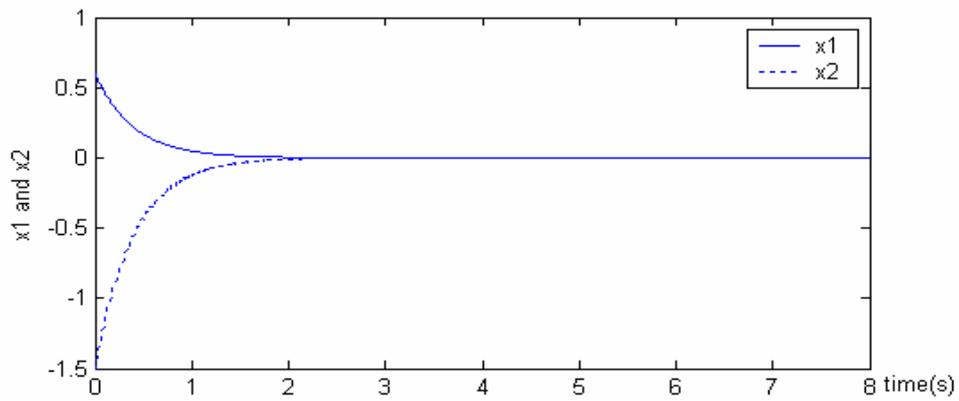
為了說明起見我們令  $m = 2.5$ ， $\eta = 1.5$ ，其他參數設定如表 4-1，因此可得到輸入  $u$  如下：

$$u = \frac{1}{1.5 \cos(x_1)} (14.7 \sin(x_1) + 2.5x_2 + 1.5 \text{sign}(x_2 + 2.5x_1)) \quad (4-18)$$

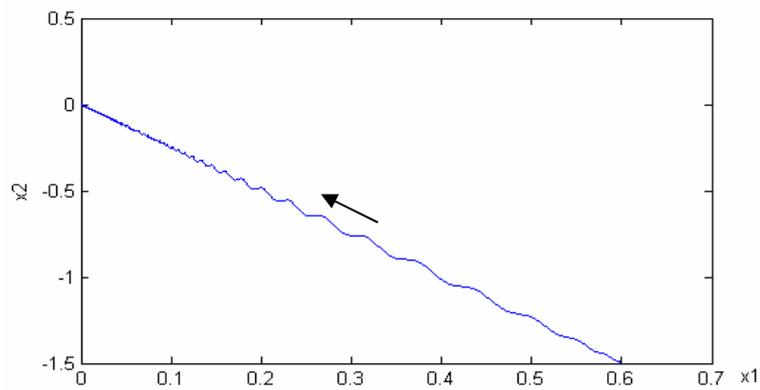
將(4-18)代回(4-2)可得回授後系統表示為

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2.5x_2 - 1.5 \text{sign}(x_2 + 2.5x_1) \end{aligned} \quad (4-19)$$

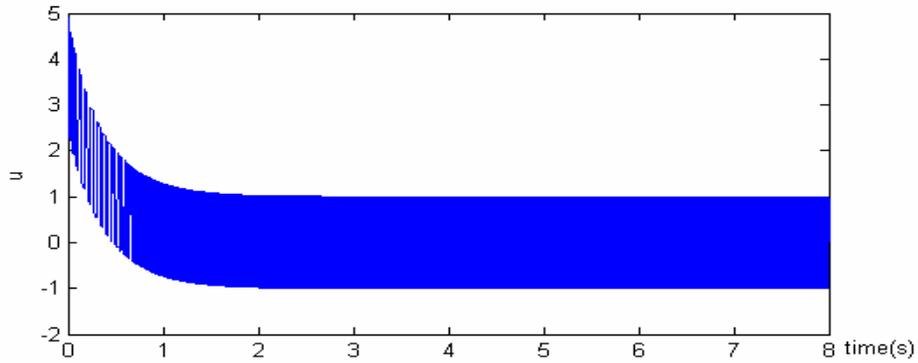
令初值  $x_1 = 0.6$ ， $x_2 = -1.5$  其模擬如圖 4-5。



(a)



(b)



(c)

圖 4-5 (a)  $x_1$ ,  $x_2$  的軌跡圖; (b)  $x_1$ ,  $x_2$  相位圖; (c) 輸入  $u$

圖 4-5(c)可以看出輸入有切跳現象。在 VSC 的理論中可以知道，若我們使用延遲時間的方法來減少切跳的現象是有可能無法做到漸近穩定的目的，也可能造成不穩定的現象，但是我們使用切換式系統和實際穩定性的觀念可以保證系統軌跡會進入我們所希望的範圍，且可改善切跳的次數。

現在我們將輸入(4-18)改寫為下列兩個

$$u_1 = \frac{1}{1.5 \cos(x_1)} (14.7 \sin(x_1) + 2.5x_2 + 1.5) \quad (4-20)$$

$$u_2 = \frac{1}{1.5 \cos(x_1)} (14.7 \sin(x_1) + 2.5x_2 - 1.5) \quad (4-21)$$

將(4-20)，(4-21)分別代入(4-2)轉為切換式系統的形式，列出兩個子系統

系統 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2.5x_2 - 1.5 \end{aligned}$$

系統 2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2.5x_2 + 1.5 \end{aligned}$$

選取李亞普諾夫方程式為

$$V(\mathbf{x}) = (x_2 + 2.5x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

一次微分後將(4-20)，(4-21)分別代入可得以下兩式

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}) = -2.5x_2^2 - (4.5x_2 + 7.5x_1) + x_1x_2$$

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = -2.5x_2^2 + (4.5x_2 + 7.5x_1) + x_1x_2$$

在此我們將要使用實際穩定性的觀念來減少切跳的次數，首先，先做以下之設定

我們希望  $x_1$  的初值在  $-\pi/4 < x_1 < \pi/4$ ，因此令  $\rho = 1.5$ ， $\Omega_\rho = \{\mathbf{x} \in R^n : V(\mathbf{x}) \leq \rho\}$ ，

並且希望軌跡最後會進入  $B(0,0.1)$  的圓內，由圖 4-6 中，斜線的區域其  $\dot{V}_1(\mathbf{x})$  大於零，斜線區域以外的  $\dot{V}_1(\mathbf{x})$  小於零，直線區域其  $\dot{V}_2(\mathbf{x})$  大於零，直線區域以外的

$\dot{V}_2(\mathbf{x})$  小於零，因此可知在我們設定的範圍內可滿足  $\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0$ ， $I := \{1,2\}$

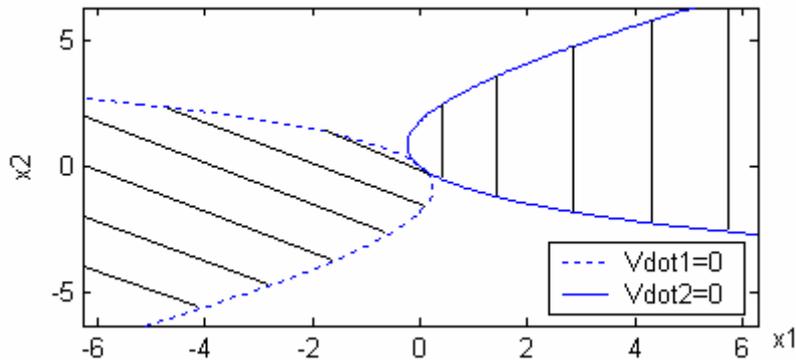
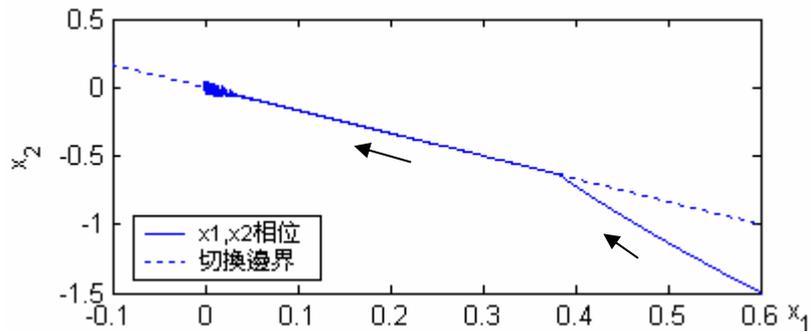
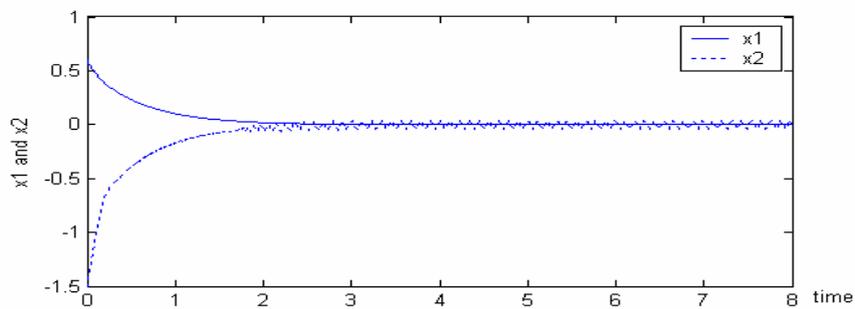


圖 4-6  $\min_{i \in I} \dot{V}_i(\mathbf{x}) < 0$ ， $I := \{1,2\}$

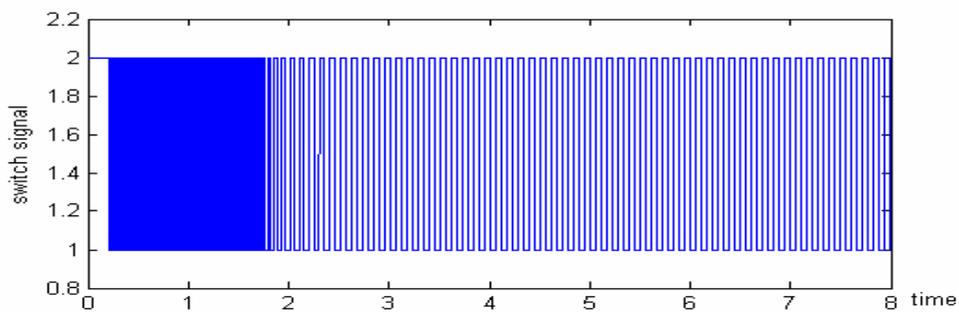
使用演算法則 3.2 求出  $T_d = 0.0012\text{sec}$ 。再依下列的切換規則來切換：

- (i)  $k = 0, t_0 = 0, i_0 = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$ 。
- (ii) 若  $\mathbf{x}(t_k) \notin \Omega_{\rho/2}, t_k = kT_d$  在  $[kT_d, (k+1)T_d]$  時間內使用  $i_k = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x})$  之系統，若  $\mathbf{x}(t_k) \in \Omega_{\rho/2}$  則使用  $[(k-1)T_d, kT_d]$  時間內所動作的系統。
- (iii)  $k = k + 1$ ，重複步驟(ii)

其模擬如圖 4-7



(b)



(c)

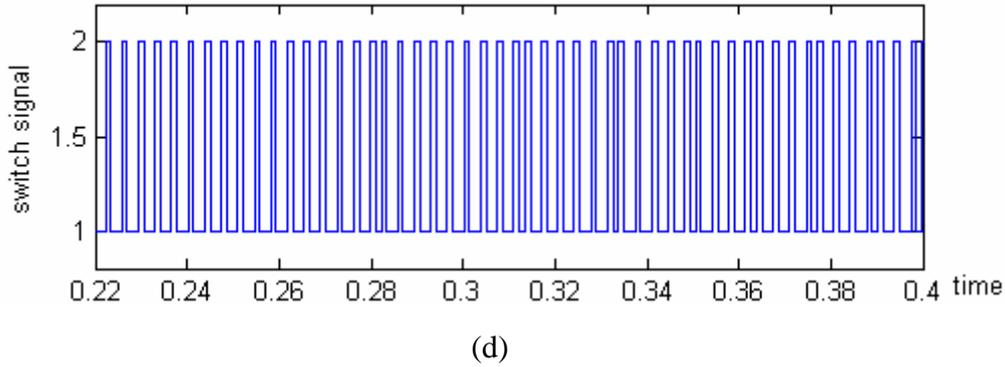


圖 4-7 (a)  $x_1, x_2$  軌跡圖; (b)  $x_1, x_2$  相位圖; (c) 切換信號; (d) 0.22 到 0.4 秒切換信號

由圖 4-5(c)及圖 4-7(c)我們可以知道若須要單擺維持在垂直附近的位置，使用 VSC 的設計 sign-type 其輸入的會發生切跳(chattering)現象及 zero 的現象，但使用切換式系統及實際穩定性的觀念是可以改善上述之現象。

### 4.3 對於兩個不穩定線性系統之 nonzeno 切換律設計與討論

在這節中我們將考慮以下兩個不穩定的線性系統，比較使用第二章及 3.3 節中所提到的切換律。

考慮底下之線性切換式系統：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f_i(\mathbf{x}) \\ &= A_i \mathbf{x} \end{aligned} \quad i = 1, 2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2.7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.3 & 2 \\ -1 & -3.5 \end{bmatrix}$$

計算  $A_1$  特徵值為  $1+1.1832i, 1-1.1832i$ ， $A_2$  之特徵值為  $0.8391, -3.0391$ ，可知此兩個子系統皆為不穩定之線性子系統。由第二章可知若  $A_1$  及  $A_2$  滿足(4-22)

$$\exists \alpha \quad (0 < \alpha < 1) \quad \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2 = A_{eq} \text{ 為赫維茲矩陣} \quad (4-22)$$

則切換式系統可穩定化，我們令  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ ，可從下式來求出  $P$ ，

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q, \quad Q > 0$$

由以下之步驟來達到穩定的目的。

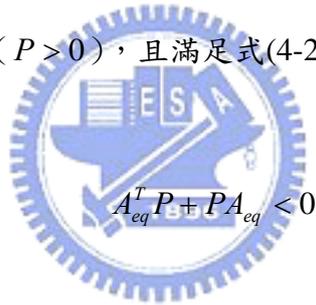
第一步找出  $\alpha$  使得(4-22)成立，經由計算， $\alpha$  使(4-22)中之  $A_{eq}$  赫維茲矩陣的

範圍為  $0.4723 < \alpha < 0.5238$ ，取  $\alpha = 0.48$  可得到

$$\begin{aligned} A_{eq} &= 0.48A_1 + 0.52A_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0.196 & -0.256 \\ 0.44 & -0.38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其特徵值為  $-0.092 + 0.1723i$ ， $-0.092 - 0.1723i$ ， $A_{eq}$  為赫維茲矩陣。

第二步找出一個正定矩陣  $P (P > 0)$ ，且滿足式(4-23)



$$A_{eq}^T P + P A_{eq} < 0 \quad (4-23)$$

可以使用 Matlab 提供之 LMI 指令來求得，因此我們可求得：

$$P = \begin{bmatrix} 1.4353 & -0.7028 \\ -0.7028 & 0.5438 \end{bmatrix}$$

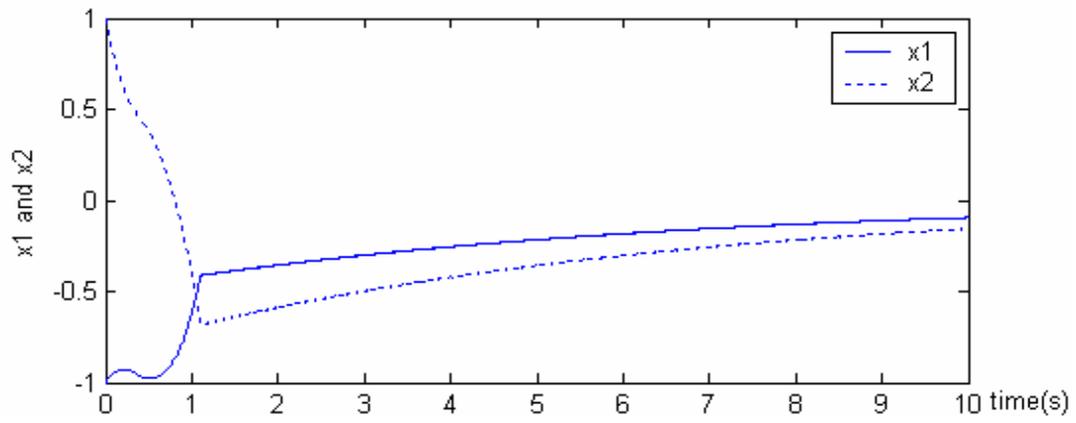
第三步利用第二章之切換律，最小投影策略(min-projection)

$$i = \arg \min_{j \in I} \mathbf{x}^T P f_j(\mathbf{x}) \quad I := \{1, 2\}$$

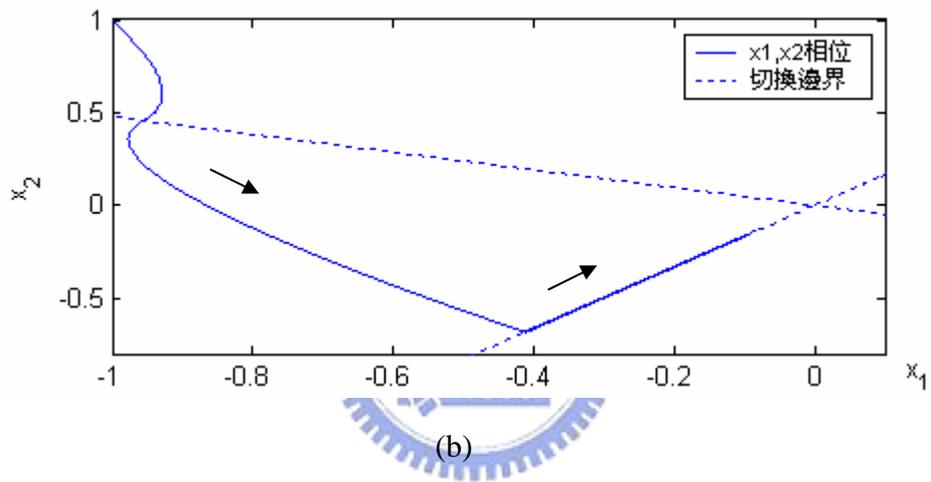
使用此切換律來達到穩定的目的。在這個切換策略下，動作中的系統是所有

子系統在當時狀態及在該時間時  $\dot{V}_i(\mathbf{x})$  最小的那一個系統。其模擬如圖 4-8。

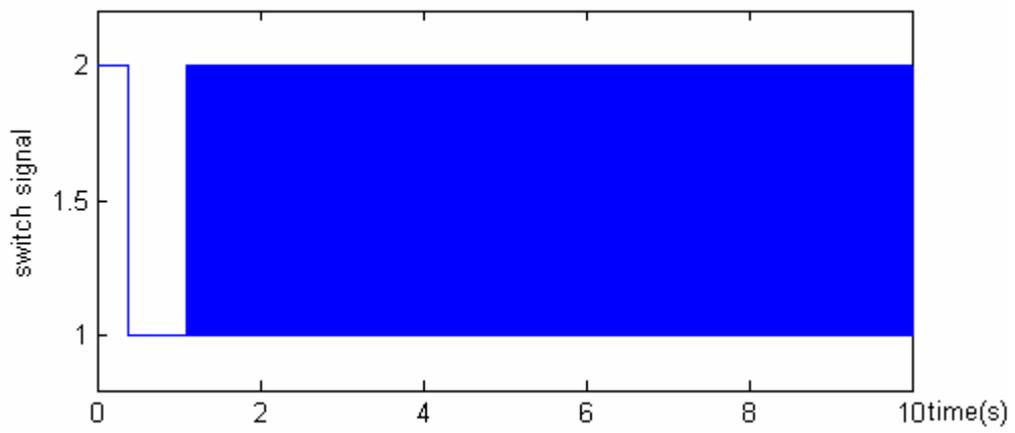
令初值为  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 1$



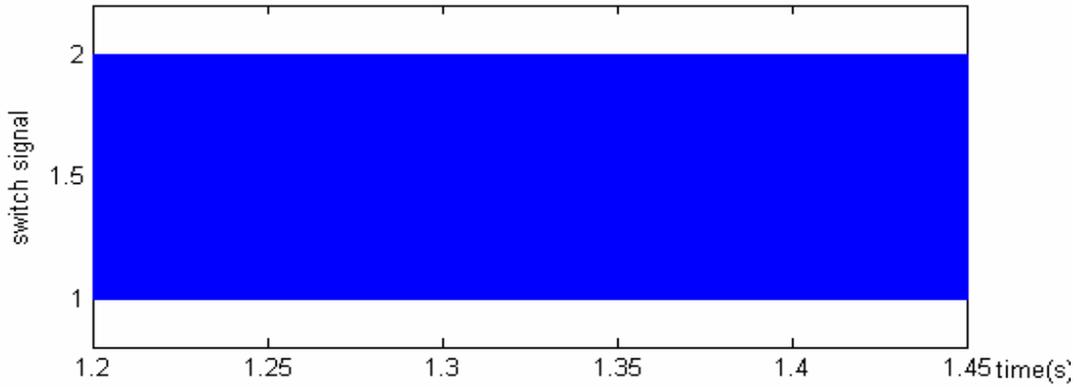
(a)



(b)



(c)



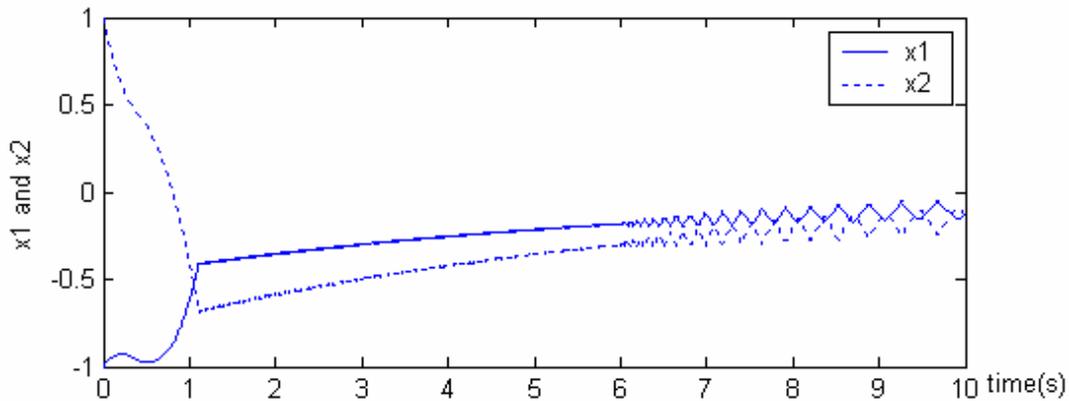
(d)

圖 4-8 (a)  $x_1, x_2$  軌跡圖; (b)  $x_1, x_2$  相位圖; (c) 切換信號; (d) 1.2 到 1.45 秒切換信號

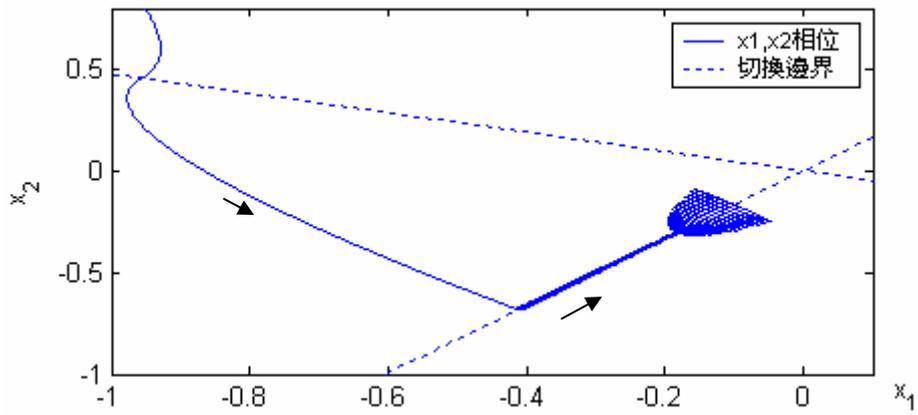
由圖 4-8 可知為了使軌跡往原點趨近達到指數穩定的目的，可看出發生 zeno 的現象。因此以下使用實際穩定性的觀念來改善此現象。我們先做以下之設定，令  $\rho = 2$ ， $\Omega_\rho = \{x \in R^n : V(x) \leq \rho\}$ ，並且希望軌跡最後會進入  $B(0, 0.5)$  的圓內，利用演算法則 3.2 求出  $T_d$  時間為 0.002 秒，使用以下之切換規則：

- (i)  $k = 0, t_0 = 0, i_0 = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial x} f_i(x)$ 。
- (ii) 若  $x(t_k) \notin \Omega_{\rho/2}$ ， $t_k = kT_d$  在  $[kT_d, (k+1)T_d]$  時間內使用  $i_k = \arg \min_{i \in I} \frac{\partial V}{\partial x} f_i(x)$  之系統，若  $x(t_k) \in \Omega_{\rho/2}$  則使用  $[(k-1)T_d, kT_d]$  時間內所動作的系統。
- (iii)  $k = k + 1$ ，重複步驟(ii)

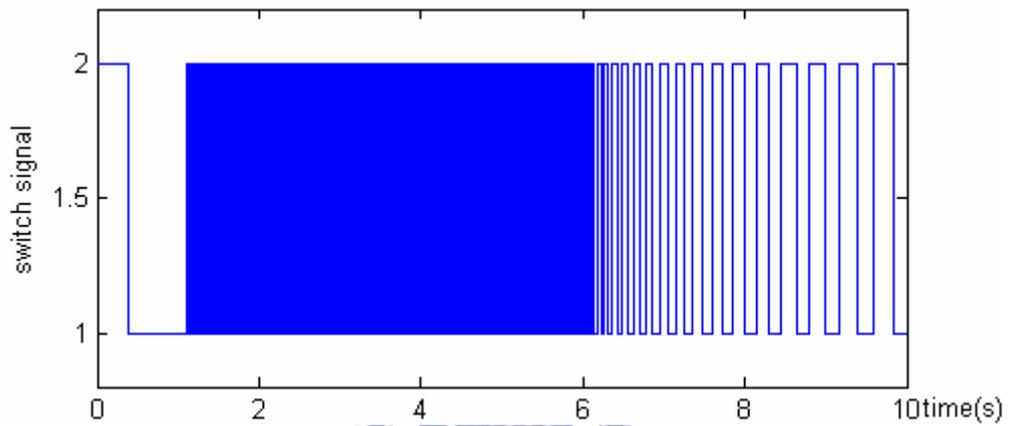
其模擬圖如圖 4-9



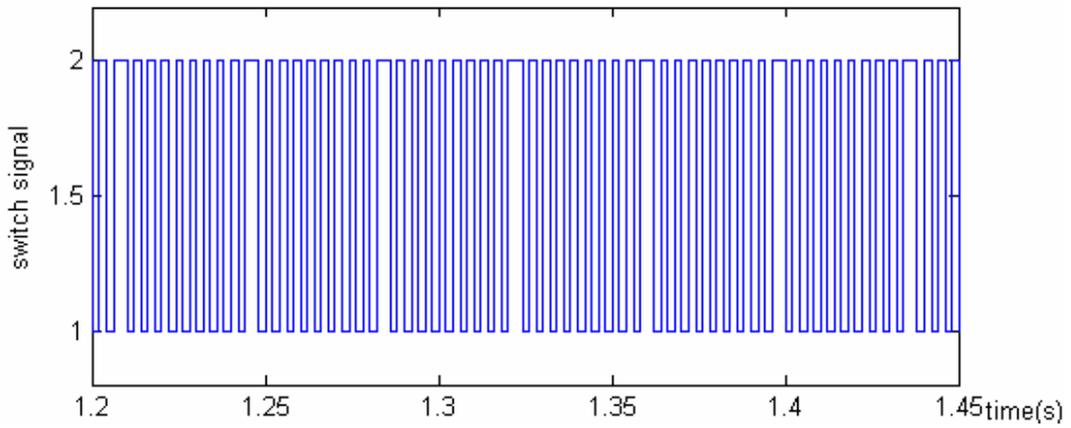
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 4-9 (a)  $x_1, x_2$  軌跡圖; (b)  $x_1, x_2$  相位圖; (c) 切换信號; (d) 1.2 到 1.45 秒切换信號

由圖 4-8 可知使用最小投影(min-projection)的切换律是可以使軌跡一直往原點趨近，達到指數穩定的目的，但是有可能會發生 zeno 的現象即有限時間內無

限次切換圖 4-8(c)。因此我們思考使用實際穩定性的觀念，希望系統軌跡進入我們設定的範圍內後，即保留在這個範圍內，由設定的精確度，我們可以求出每個系統最少要動作一個  $T_d$  的時間，由圖 4-9(d)我們可以看出在給定精確度  $B(0,0.5)$  每一系統最少需動作 0.002 秒，因此我們可以改善有限時間內無限次切換的現象。

#### 4.4 存在時間切換律之模擬與討論

在這節中我們將考慮切換以下兩個穩定的子系統，比較使用第二章及 3.1 節中所提到的切換律。

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 2 & -0.2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 2.5 \\ -1.5 & -0.2 \end{bmatrix}$$

首先我們看看利用切換律(2-3)時之切換式系統狀態。根據第二章所提到的理論我們找出  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ )，使得  $\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2 = A_{eq}$  為赫維茲矩陣，經由計算  $\alpha$  使  $A_{eq}$  為赫維茲矩陣的範圍為  $(0,0.44) \cup (0.703,1)$ 。為了說明起見我們取  $\alpha = 0.3$ ，令  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  解

$$P = \begin{bmatrix} 1.6877 & 0.3610 \\ 0.3610 & 5.1173 \end{bmatrix}$$

為  $A_{eq}^T P + P A_{eq} = -I$  的解。再由切換律(2-3)來進行切換，其模擬如圖 4-10 所示

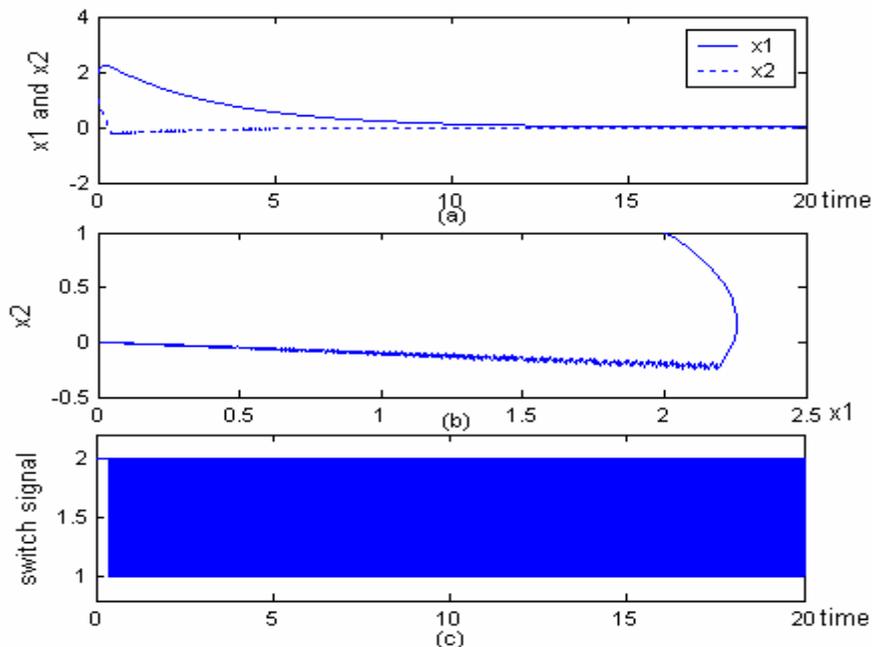


圖 4-10 (a)  $x_1$ ， $x_2$  軌跡圖；(b)  $x_1$ ， $x_2$  相位圖；(c) 切換信號

由圖 4-10(c)可知會發生 zeno 的現象，因此我們考慮使用存在時間的切換法則。

令  $V_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_i \mathbf{x}$ ,  $i = 1, 2$ ，求解以下方程式將矩陣  $P_i$  求出，

$$A_i^T P_i + P_i A_i = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

求得之矩陣  $P_i$  為

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.7255 & 0.1225 \\ 0.1225 & 1.8873 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2.0053 & 0.066 \\ 0.066 & 3.3245 \end{bmatrix}$$

因為  $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x}$ ,  $P_1 = P_1^T$ ，所以(3-2)式中的  $a_1$ ， $b_1$  須滿足  $a_1 \leq \lambda_{\min}(P_1) = 1.88$ ， $b_1 \geq \lambda_{\max}(P_1) = 3.7336$  即可，同理可知  $a_2$ ， $b_2$  須滿足  $a_2 \leq \lambda_{\min}(P_2) = 2.002$ ， $b_2 \geq \lambda_{\max}(P_2) = 3.3278$ 。選取  $a_1 = 1.3$ ,  $b_1 = 4$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $b_2 = 4$  可滿足(3-2)，由(4-24)可看出選取  $c_1 = c_2 = 1$  可滿足(3-3)，由(3-5)式得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.125$ ，從(3-8)式我們計算出  $\tau_d > 1.8281$ 。在此我們令子系統每 2 秒就進行切換，其切換律為

$$i = \begin{cases} 1, & t \in [2k, 2(k+1)) \\ 2, & t \in [2(k+1), 2(k+2)) \end{cases}, \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots$$

模擬如圖 4-11 所示：

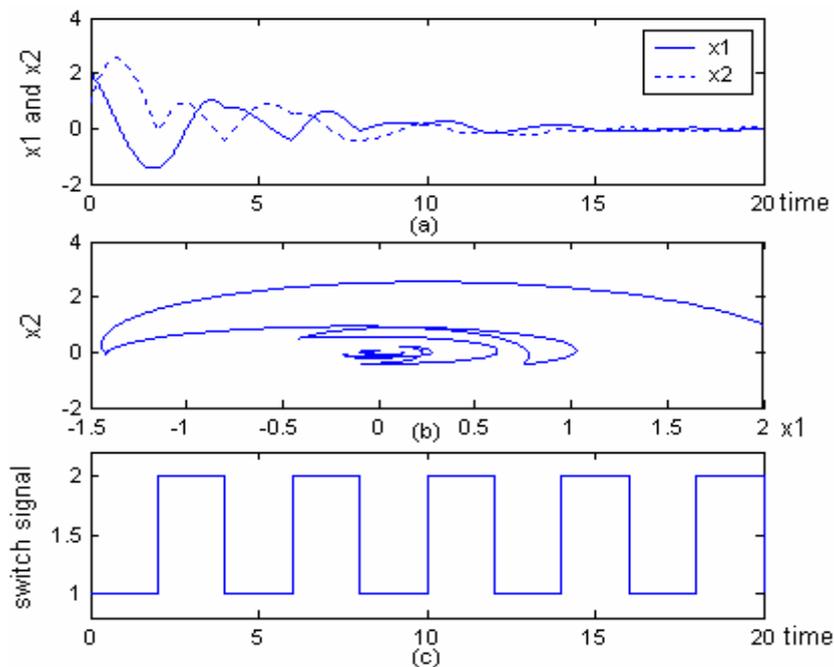


圖 4-11 (a)  $x_1$ ， $x_2$  軌跡圖；(b)  $x_1$ ， $x_2$  相位圖；(c) 切換信號

由圖 4-10，圖 4-11 我們可以清楚的看出系統狀態都是趨近於零，從圖 4-10(c)及圖 4-11(c)可以知道其 zero 現象已被改善了。

現在我們來看看若  $\tau_d$  選取之值過小時會發生什麼情形，令子系統每 0.8 秒就進行切換，其模擬如圖 4-12 所示

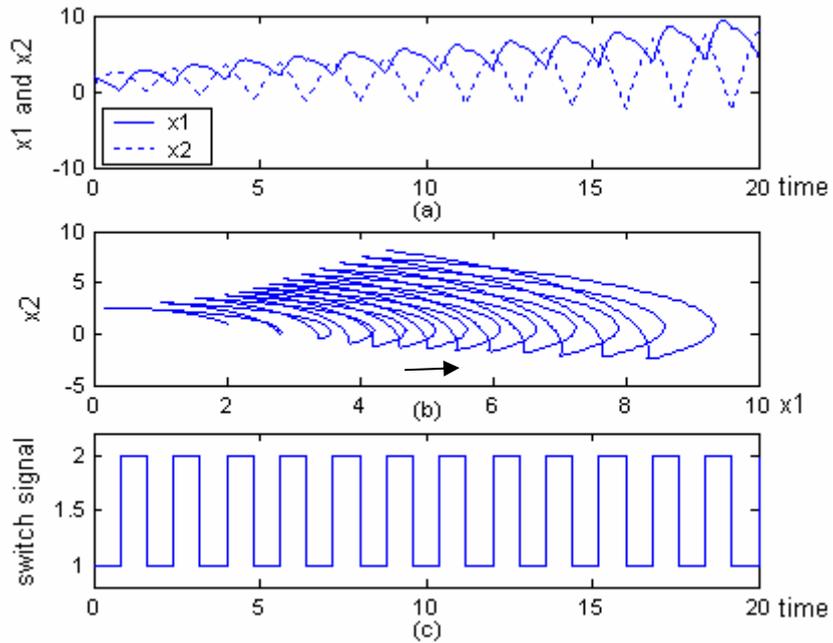


圖 4-12 (a)  $x_1$ ， $x_2$  軌跡圖；(b)  $x_1$ ， $x_2$  相位圖；(c) 切換信號

因此由圖 4-12 我們可以知道  $\tau_d$  選取不當是有可能使系統狀態發散的。

底下為子系統 1 及子系統 2 之系統狀態

系統 1:

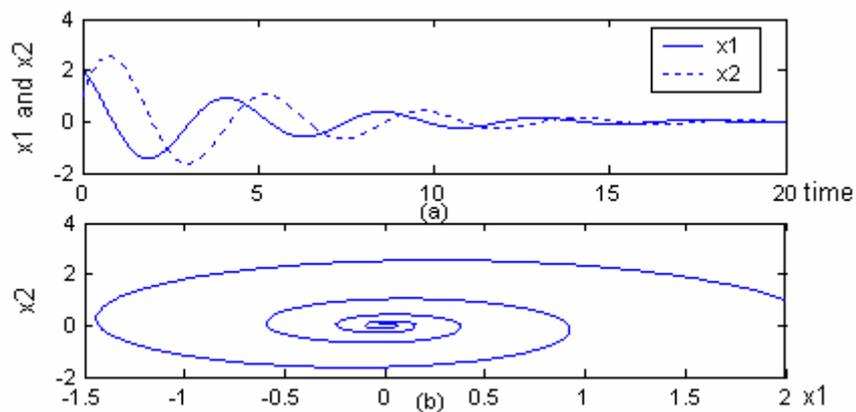


圖 4-13 (a) 系統 1  $x_1$ ， $x_2$  軌跡圖；(b) 系統 1  $x_1$ ， $x_2$  相位圖

系統 2:

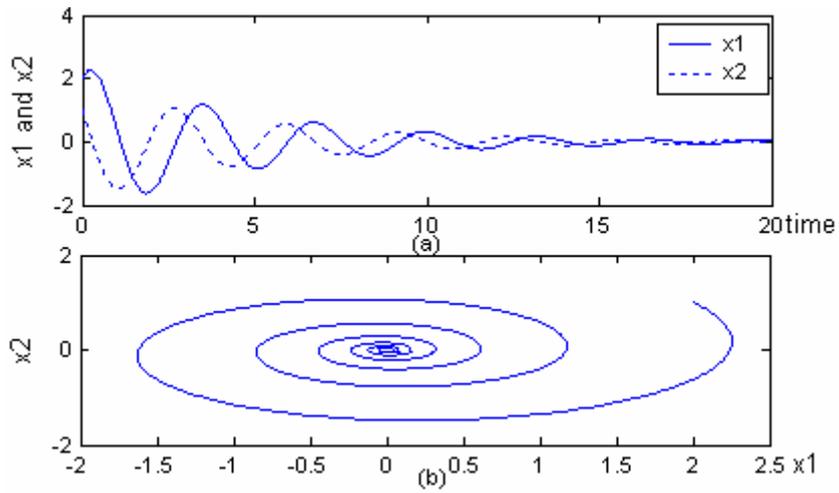


圖 4-14 (a)系統  $2x_1, x_2$  軌跡圖;(b)系統  $2x_1, x_2$  相位圖

在此我們比較系統 1，系統 2，使用切換律(2-3)切換及使用存在時間切換法則這四種不同的情況下，收斂至  $\| \mathbf{x} \| \leq 0.1$  的時間，如下表所示：

	收斂至 $\  \mathbf{x} \  \leq 0.1$ 的時間
系統 1(不切換)	16.76 秒
系統 2(不切換)	15.31 秒
最小投影切換律	10.67 秒
存在時間切換法則	14.52 秒

我們可以看出雖然系統 1，和系統 2 都是穩定的系統，但是經過適當的切換後是有可能使系統的性能變的更好。

# CHAPTER 5

## 結論與未來研究方向



### 5.1 結論

在此論文中我們探討了在不穩定的子系統間存在可穩定化的條件及如何改善有限時間內無限次切換的 zeno 現象，並實現[27]的 nonzeno 切換律。首先我們整理出[16][8]中使用李亞普諾夫理論來判斷子系統為不穩定之切換式系統可穩定化的兩個條件，在第 2.2 節中我們提出了一個反例來說明這兩個條件在包含多個子系統之切換式系統中並不是對等的條件。對於若無法找出單一李亞普諾方程式時我們也整理出[16][3]中使用多重李亞普諾方程式來判斷子系統為不穩定之切換式系統可穩定化的條件。除此之外我們也整理出演算法則來使切換式系統狀態達到穩定的目的。

在第二章中所使用的切換律可以使切換式系統切換後達到漸近穩定的目的，但有可能會產生有限時間內無限次切換的 zeno 現象，因此在第三章中我們討論讓每個系統至少動作一段時間後再進行切換，藉此來改善 zeno 的現象但系

統狀態無法達到漸近穩定的目的，所以在 3.2 節中我們介紹了實際穩定性，希望切換式系統經過切換後可以達到實際穩定。雖然實際穩定只保證系統狀態最後會保持在我們所能容忍的範圍內，但由此觀念可以建構出一個可實現的切換律。對於切換兩個穩定子系統之切換式系統可以使用[16]中存在時間(Dwell Time)的切換方法來改善 zeno 的問題，而在 4.4 節中我們提出了一個例子來驗證此結果，並且對各穩定子系統的性能和穩定的子系統經過切換後的性能做比較，我們可以發現經過適當的切換是可以使系統性能變好。而對於包含有不穩定子系統之切換式系統，在此論文中我們整理出演算法則來實現[27]中使用實際穩定性來建構 nonzeno 切換律的方法來解決 zeno 的問題，並且在 4.1 節的例子中和切換律(2-3)做比較及驗證此方法的可行性。除此之外在 4.2 節中我們也利用[27]的切換理論來改良 VSC 的 sign-type 變結構控制律。

## 5.2 未來研究方向



在上節中我們對此論文的結論及目前相關研究做了整理，由這些結論中我們整理出一些未來可以研究之方向。

1. 對於多個不穩定的子系統是否可以找到充分且必要的條件，來判斷這些子系統是否可穩定化。
2. 由於使用多重李亞普諾夫方程式的概念，判斷切換式系統是否可穩定化其條件會比只使用單一個李亞普諾夫方程式來的寬鬆，但其如何求出多重李亞普諾夫方程式仍然沒有一個較明確的方法，而這也是一個可研究的方向。
3. 對於改善有限時間內無限次切換的 zeno 現象的方法是否更好的切換律可以使用，及使用不同切換律對切換式系統其性能的影響也是值得探討的問題。

## 參考文獻

- [1] A. M. Bloch and M. Reyhanoglu and N. H. McClamroch, “Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 37, Issue 11, p. 1746-1757, Nov., 1992.
- [2] R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, eds. “Asymptotic stability and feedback stabilization,” in *Differential Geometric Control theory*, Birkhauser, Boston, p. 181-191, 1989.
- [3] M. S. Branicky, “Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, p. 475-482, 1998.
- [4] E. Baily and A. Arapostathis, “simple sliding mode control scheme applied to robot manipulator,” *Int. J. Control*, Vol. 45, p. 1197-1209, 1987.
- [5] B. Chaudhuri, R. Majumder, B. C. Pal, “Application of multiple-model adaptive control strategy for robust damping of interarea oscillations in power system,” *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, Vol. 12, Issue 5, p. 727-736, Sept., 2004.
- [6] M. L. Chiang, L. C. Fu, “Hybrid system based adaptive control for the nonlinear HVAC system,” *American Control Conference*, p. 14-16, June, 2006.
- [7] G. Davrazos and N. T. Koussoulas, “A Review of Stability Results for Switched and Hybrid Systems,” *University of Patras, Electrical and Computer Engineering Department, Rio Patras, GREECE*.
- [8] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, “Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems,” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, Issue 7, p. 1069-1082, July, 2000.
- [9] R. A. Decarlo, S. H. Zak and G.P. Matthews, “Variable structure control of nonlinear multivariable system: A tutorial,” *IEEE Proceedings*, Vol. 76, p. 212-232, 1988.
- [10] N. H. El-Farra1, P. Mhaskar, P. D. Christofides, “Output feedback control of

switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions,” *Systems & Control Letters*, p. 1163-1182, Dec., 2005.

- [11] E. Feron, “Quadratic stabilizability of switched system via state and output feedback,” technical report CICS-P-468, MIT, 1996
- [12] L. Fang, H. Lin, P. J. Antsaklis, “Stabilization and performance analysis for a class of switched systems,” *Decision and Control 2004 CDC. 43rd IEEE Conference on*, Vol. 3, p. 3265-3270, Dec. 14-17, 2004.
- [13] J. P. Hespanha and A. S. Morse, “Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching,” *Automatica*, Vol. 35, p. 385-393, 1999.
- [14] Z. Hongshan, M. Zengqiang, S. Wei, Y. Qixun, “Multiple Lyapunov functions analysis of hybrid power systems with discrete event actions,” *PowerCon 2002. International Conference on*, Vol. 4, p. 2026-2029, Oct., 2002.
- [15] I. Kolmanovsky and N. Harris McClamroch, “Developments in Nonholonomic Control Problems,” *Control Systems Magazine, IEEE*, Vol. 15, Issue 6, p. 20-36, Dec., 1995.
- [16] D. Liberzon, “*Switching in Systems and Control*,” Birkhauser, Boston, 2003.
- [17] H. Lin, P. J. Antsaklis, “Stability and persistent disturbance attenuation properties for a class of networked control systems: switched system approach,” *International Journal of Control*, Vol. 78, Issue 18, p. 1447-1458, 2005.
- [18] D. Liberzon and A. S. Morse, “Basic problems in stability and design of switched systems,” *IEEE Control Systems*, Vol. 19, Issue 5, p. 59-70, October, 1999.
- [19] H. Lin, P. J. Antsaklis, “Stability and stability of switched linear systems: a short survey of recent results,” *Proc. IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, Limassol, Cyprus, p. 27-29, June, 2005.
- [20] N. Motee, M. S. de Queiroz, “A switching control strategy for magnetic bearings with a state-dependent bias,” *Decision and Control, 2003 Proceedings 42nd IEEE Conference on*, Vol. 1, p. 245-250, Dec., 2003.

- [21] J. L. Mancilla-Aguilar, "A condition for the stability of switched nonlinear systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 45, Issue 11, p. 2077-2079, Nov., 2000.
- [22] J. L. Mancilla-Aguilar and R. A. García, "A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 44, p. 67-71, 2000.
- [23] S. Pettersson, B. Lennartson, "Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy," *American Control Conference 2001 Proceedings of the 2001*, Vol. 1, p. 223-228, June 25-27, 2001.
- [24] K. Tanaka, M. Iwasaki, H. O. Wang, "Switching control of an R/C hovercraft: stabilization and smooth switching," *Systems Man and Cybernetics Part B, IEEE Transactions on*, Vol. 31, Issue 6, p. 853-863, Dec., 2001.
- [25] E. Van Dijk, J. N. Spruijt, D. M. O'Sullivan, J. B. Klaassens, "PWM-switch modeling of DC-DC converters," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 10, Issue 6, p. 659-665, Nov., 1995.
- [26] M. A. Wicks, P. Peleties, R. A. DeCarlo, "Construction of piecewise lyapunov functions for stabilizing switched systems," *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake, Buena Vista*, vol. 4, p. 3492-3497, December, 1994.
- [27] X. Xu, G. Zhai, S. He., "Stabilizability and practical stabilizability of continuous-time switched systems: A unified view," March 2007, available at: <http://ecse.bd.psu.edu/~xxx12/publications/ACC07longa.pdf>.
- [28] M. Yamauchi, Y. Nakagome, "Electronic Switching Systems in Japan," *Communications, IEEE Transactions on*, [legacy, pre - 1988], Vol. 20, Issue 4, p. 746 -752, 1972.
- [29] A. Yamada, S. Yamakawa, H. Fujimoto, "Switching Control for Inverted Pendulum System Based on Energy Modification," *2004 SICE Annual Conference*, Vol. 3, p. 2316-2321, Aug. 4-6, 2004.
- [30] 陳永平, "可變結構控制," 全華科技圖書, 1999.