

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

使用時參數估測技術的駕駛人模型辨識

Identification of Driver Models Via Time-Varying Parameter
Estimation Techniques

研究生：黃國展

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國九十六年十月

使用時變參數估測技術的駕駛人模型辨識

Identification of Driver Models Via Time-Varying Parameter

Estimation Techniques

研究生：黃國展

Student: Kuo-Chan Huang

指導教授：蕭得聖 博士

Advisor: Dr. Te-Sheng Hsiao

國立交通大學

電機學院 電機與控制工程學系



A Thesis

Submitted to College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electrical and Control Engineering

October 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年十月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 電機與控制工程 學系碩士班 黃國展 君

所提論文 Identification of Driver Models Via Time-Varying
Parameter Estimation Techniques

合於碩士資格標準、業經本委員會評審認可。

口試委員：

_____	_____
<u>楊介澤</u>	<u>胡竹生</u>
<u>陳守麟</u>	<u>蕭得聖</u>
_____	_____

指導教授：蕭得聖 教授

系主任：邵俊斌 教授

中華民國九十六年十月十一日

使用時變參數估測技術的駕駛人模型辨識

研究生:黃國展

指導教授：蕭得聖 博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班

摘要

交通運輸帶來生活上的便利，不過交通事故是主要問題，減少交通事故是各國政府努力的目標，安全輔助系統提供警示及迴避事故等功能，使駕駛有足夠時間避開危險，了解駕駛行為是發展安全輔助系統時最重要的項目之一，本文使用實際道路駕駛所得資料分析。本研究使用系統識別法將駕駛行為模型化，首先使用非時變系統識別法將駕駛行為模型化，分析非時變模型特性時看出駕駛行為變化極快，正常駕駛行為適合以時變系統表示，文中推導一套線性時變參數估測法則，由估測之模擬驗證結果得知，此方法於低階模型參數估測可得到不錯之識別效果，以此方法模型化駕駛行為，分析各時間點之駕駛行為，並和非時變系統識別法比較其優點所在。由實驗結果可知時變模型輸出模擬數據和量測輸出值比較可達到較高之符合度(符合度 $>80\%$)，由模型參數變化能觀察出駕駛面對不同路況(道路曲率改變，鄰近車輛接近)之反應。時變系統模型可達到非時變系統模型無法達到之高符合度(表示準確性高)，並看出使用非時變模型無法看到之駕駛行為變化原因，解決非時變模型應用於駕駛行為分析之問題。

Identification of Driver Models Via Time-Varying Parameter Estimation Techniques

Student : Kuo-Chan Huang

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

Institute of Electrical and Control Engineering
National Chiao-Tung University

Abstract

Modern transportation systems make the daily life more convenient; however the ever increasing number of traffic accidents becomes an issue. It is very important for the government of each country to reduce the amount of traffic accidents. Whenever the driver is in an emergency, the safety and assistant system can make an alarm and avoid the danger. One of the most important things in developing the safety and assistant system is to understand the behavior of the driver. This study analyzes the data collected from real driving tasks to investigate the drivers' steering behavior.

In this thesis, the system identification techniques are applied to model the driving behavior. The time-invariant model is used first. It can be observed that the driving behavior varies so quickly that the time-invariant system is inadequate for the rapid-changing driver model. On the other hand, the time varying system is more fitted to model the normal driving behavior. This study is focused on the estimation of linear time varying parameters. Good identification results are obtained as long as the order of the time-varying model is low. In addition, comparisons between the proposed time-varying method and time-system identification methods are carried out in this thesis.

Better fits to data can be achieved by using the time-varying model. The driver's response to different driving conditions (e.g. changes of road curvatures, or car approaching from adjacent lanes) can be observed by the variations of parameters, and the time-varying model outperforms the time-invariant model because the former can detect the causes of the variation of driving behavior.

誌謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，老師悉心的教導使我得以一窺駕駛人模型領域的深奧，不時的討論並指點我正確的方向，使我在這些年中獲益匪淺。老師對學問的嚴謹更是我輩學習的典範。

兩年裡的日子，實驗室裡共同的生活點滴，學術上的討論、言不及義的閒扯、讓人又愛又怕的宵夜、趕作業的革命情感、因為睡太晚而遮遮掩掩閃進實驗室……，感謝眾位學長、同學、學弟的共同砥礪，你們的陪伴讓兩年的研究生活變得絢麗多彩。

感謝永洲、欣峰學長們不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在我迷惘時為我解惑，也感謝峻嘉、主恩同學的幫忙，恭喜我們順利走過這兩年。實驗室的昭明、暉鈞、毅泓、宗明學弟們的幫忙。

女朋友雅智在背後的默默支持更是我前進的動力，沒有雅智的體諒、包容，相信這兩年的生活將是很不一樣的光景。最後，謹以此文獻給我摯愛的雙親。



黃國展 謹識
中華民國九十六年十月
新竹 交大

目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
符號說明.....	X
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 研究方法.....	2
1.3 研究內容.....	2
第二章 相關研究.....	3
2.1 駕駛安全系.....	3
2.2 駕駛人模型.....	6
2.3 線性時變系統識別法.....	9
2.3.1 基底函數(Basis Function):.....	10
2.3.2 隨機方法(Stochastic method):.....	13
第三章 線性非時變系統識別法.....	15
3.1 線性非時變(LINEAR TIME-INVARIANT, LTI)系統的表示法.....	15
3.2 參數模型.....	17
3.2.1 方程式誤差模型.....	18
3.2.2 輸出誤差模型.....	21
3.3 階數選定.....	23
3.4 參數模型的識別.....	24
3.4.1 線性回歸模型的參數識別情況.....	25

3.4.2 預測誤差法(一般的多項式黑箱模型).....	26
第四章 線性時變系統識別法.....	28
4.1 系統參數的機率分佈.....	28
4.2 系統參數的估測法.....	31
4.2.1 解條件機率 $p(\bar{A}, \bar{B} \bar{y})$	31
4.2.2 Maximum a posteriori(MAP).....	35
4.3 加馬分佈參數選擇.....	41
4.4 LTV 識別法模擬驗證.....	44
第五章 實驗分析與討論.....	51
5.1 資料收集與前處理.....	51
5.2 線性非時變系統模型參數估測.....	54
5.3 線性非時變系統模型識別.....	55
5.3.1 2005/3/9 線性非時變系統識別結果分析.....	55
5.3.2 2005/5/23 線性非時變系統識別結果分析.....	59
5.3.3 2005/5/26 線性非時變系統識別結果分析.....	61
5.3.4 2005/6/3_1 線性非時變系統識別結果分析.....	63
5.3.5 2005/6/3_2 線性非時變系統識別結果分析.....	65
5.4 線性時變系統模型識別.....	68
第六章 結論與未來工作.....	78
6.1 結論.....	78
6.2 未來工作.....	79
參考文獻.....	80

圖目錄

圖 2.1 計算行駛到道路轉彎處所需之時.....	4
圖 2.2 駕駛/車輛 系統.....	6
圖 2.3 駕駛/車輛 系統.....	7
圖 2.4 The whitening lattice filter, with p cells.....	11
圖 2.5 時變 lattice cell, 包括兩個延遲 z^{-1}	11
圖 3.1 系統的一般表示.....	14
圖 3.2 線性系統的一般表示.....	16
圖 3.3 ARX 模型.....	18
圖 3.4 ARMAX 模型.....	20
圖 3.5 OE 模型.....	20
圖 4.1 二階 AR 模型識別圖.....	43
圖 4.2 二階 ARX 模型 AR 部分之識別結果圖.....	44
圖 4.3 二階 ARX 模型 MA 部分之識別結果圖.....	44
圖 4.4 三階的 AR 模型識別圖.....	45
圖 4.5 三階 ARX 模型 AR 項之識別結果圖.....	45
圖 4.6 三階 ARX 模型 MA 項之識別結果圖.....	46
圖 4.7 四階的 AR 模型識別圖.....	46
圖 4.8 四階 ARX 模型 AR 項之識別結果圖.....	47

圖 4.9 四階 ARX 模型 MA 項之識別結果圖.....	47
圖 5.1 影像裝置(SafeTRAC 系統).....	49
圖 5.2 駕駛影像.....	50
圖 5.3 道路駕駛輸出入資料.....	50
圖 5.4 不同模型之誤差比較.....	51
圖 5.5 ARMAX 各階數誤差值.....	52
圖 5.6 2005/3/9 駕駛模型參數分佈.....	53
圖 5.7 2005/3/9 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖.....	54
圖 5.8 2005/3/9 四階 ARMAX 模型輸出模擬比對結果.....	55
圖 5.9 2005/5/23 駕駛模型參數分佈.....	56
圖 5.10 2005/5/23 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖.....	57
圖 5.11 2005/5/23 四階 ARMAX 模型模擬結果比對.....	57
圖 5.12 2005/5/26 駕駛人模型參數分佈.....	58
圖 5.13 2005/5/26 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖.....	59
圖 5.14 2005/5/26 四階 ARMAX 模型模擬結果比對.....	59
圖 5.15 2005/6/3_1 駕駛人模型參數分佈.....	60
圖 5.16 2005/6/3_1 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖.....	61
圖 5.17 2005/6/3_1 四階 ARMAX 模型模擬結果比對.....	61
圖 5.18 2005/6/3_2 駕駛人模型參數分佈.....	62

圖 5.19	2005/6/3_2 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖.....	63
圖 5.20	2005/6/3_2 四階 ARMAX 模型模擬結果比對.....	63
圖 5.21	所有時間參數分佈標準化.....	64
圖 5.22	2005/3/9 11:44:07~11:45:07 時變模型參數分佈.....	65
圖 5.23	2005/3/9 11:44:07~11:45:07 模擬輸出曲線符合度.....	66
圖 5.24	2005/3/9 12:08:07~12:09:07 時變模型參數分佈.....	67
圖 5.25	2005/3/9 12:08:07~12:09:07 模擬輸出結果比對.....	68

表目錄

表 3.1	參數模型.....	20
表 4.1	係數表一.....	35
表 4.2	係數表二.....	35
表 4.3	係數表三.....	37
表 4.4	係數表四.....	37
表 5.1	2005/3/9 駕駛模型參數平均值與標準差.....	53
表 5.2	2005/5/23 駕駛模型參數平均值與標準差.....	56
表 5.3	2005/5/26 駕駛模型參數平均值與標準差.....	58
表 5.4	2005/6/3_1 駕駛模型參數平均值與標準差.....	60
表 5.5	2005/6/3_2 駕駛模型參數平均值與標準差.....	62

表 5.6 所有時間駕駛模型參數平均值與標準差.....	64
表 5.7 各路況下 b_0 各種參數變化情況之機率.....	69
表 5.8 各路況下 b_1 各種參數變化情況之機率.....	70
表 5.9 各路況下 b_2 各種參數變化情況之機率.....	70
表 5.10 各路況下 b_3 各種參數變化情況之機率.....	71
表 5.11 b_0 不同參數變化情況下各路況之機率.....	72
表 5.12 b_1 不同參數變化情況下各路況之機率.....	73
表 5.13 b_2 不同參數變化情況下各路況之機率.....	73
表 5.14 b_3 不同參數變化情況下各路況之機率.....	74



符號說明

$u(k)$: 系統輸入訊號

$y(k)$: 系統輸出訊號

$v(k)$: 雜訊

n : 參數總數

$\omega(k)$: 白雜訊

$g(k)$: 系統之脈衝響應

$G(q)$: 系統轉移函數

$H(q)$: 雜訊轉移函數

$J_N(\theta)$: 參數誤差

N : 資料數

q^{-1} : 移位算子

$\varepsilon(t, \theta)$: 預測誤差

θ : 參數向量

V : 損失函數

α, β : 加馬函數之參數

$\varphi(k)$: 輸入輸出資料向量

σ^2 : 隨機變數之變異數

$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$: 預測誤差正純量函數



第一章 緒論

1.1 研究動機與目的

目前工商業仰賴交通運輸促進工商業經濟繁榮，相對的必須面對與日俱增的道路交通事故，世界各國政府與車廠除了積極研究並採取有效防止交通事故發生的策略及法令外，也致力於設法減輕交通事故所可能造成的傷亡程度，改良車體間結構與設計、座椅的設計、儀表板及轉向機構的改良、先進安全車輛(Advanced Safety Vehicle ASV)的研發等等。

其中車輛安全系統目的為安全預防(睡眠警告系統、車輛危險狀態監視系統)、事故迴避(道路環境資訊事故迴避系統、駕駛者危險狀態迴避系統)等，當駕駛處於危險狀態時安全系統提供警示及迴避事故(例如:行駛路徑偏移出車道時系統保持車於道路中線)等功能。要成功開發一套車輛安全系統前必須先了解駕駛人行為模式，駕駛人模型表示駕駛於各種不同狀態(安全、危險)之駕駛行為模式，由這些模式分析判斷安全系統是否介入車輛操縱。以駕駛人對車輛的側向控制(亦即轉向控制)而言，駕駛人模型的輸入為車輛的側向位置，而其輸出為方向盤的轉角。

本論文目的要利用實際道路駕駛收集之駕駛人資料，使用系統識別法建立駕駛人模型，並由這些模型中觀察一般情況下駕駛人模式，比較各駕駛人之間行為的差異。

1.2 研究方法

本論文使用系統識別法模型化駕駛人行為，論文中推導線性時變系統參數估測法，將此估測法應用於駕駛人模型參數估測，實驗模擬部分使用非時變系統及時變系統識別法估測駕駛人模型，並分析各駕駛人行為之特性及討論估測法的準確性，並和傳統文獻中使用駕駛模擬器收集資料所得之駕駛特性比較。

1.3 研究內容

第一章主要說明研究動機與目的以及研究的方法。第二章為文獻回顧，針對近期的車輛安全系統、駕駛人模型、時變系統之相關研究回顧。第三章介紹線性非時變系統識別法，包含系統識別轉移函數、基本模型及參數化的模型估測法。第四章介紹時變系統參數機率分佈，及模型參數的估測法，最後驗證此估測法的準確性。第五章為實驗部分，使用非時變和時變系統識別法於駕駛人模型之分析，畫出模型參數分佈和極點分佈，比較各駕駛人間之差異。第六章為本論文之總論和建議事項。

第二章 相關研究

近年來智慧型運輸系統的蓬勃發展，有越來越多駕駛安全系統的相關研究，發展一套駕駛安全系統前需要先了解駕駛人行為，首先要將駕駛人行為模型化並分析處於何種狀態(安全與否、閃避來車、變換車道、加速行駛、疲勞等)，將系統參數模型化常用方法之一為系統識別，本文中採用參數化系統識別法取得駕駛人模型，由實驗結果看出非時變系統模型參數變化不規律(第五章介紹)，可以合理假設時變系統較符合駕駛人行為。

本章節第一小節介紹主動和被動式安全系統的種類，第二小節介紹駕駛人模型的相關研究，最後討論兩種常用的時變系統識別法，並分析方法的優缺點。

2.1 駕駛安全系統



安全系統主要分為主動式和被動式安全輔助系統，被動式安全系統於駕駛處於危險狀態(和鄰近車輛距離過近、車輛偏離車道、變換車道有危險性)時，系統發出警告要求駕駛迴避危險情況;主動式安全系統警告駕駛並介入操縱，使用雷達、攝影機等相關工具收集路況相關資訊，計算介入的程度(剎車讓車定速或急停、固定路徑行駛所要提供的方向盤操縱角度)。下文將介紹數種主動與被動式安全系統。

1. A. G Ulsoy [1] 文中要發展一套側向的安全系統避免單一車輛偏移路徑 (SVRD, single-vehicle road departure)的發生，(圖 2.1)中車子起始位置到偏移出車道處的距離等於車輛速度乘以到跨越車道處所需之時間 (Time-to-Lane-Crossing, TLC)車輛裝上量測加速度和側向位置的感測器，先使用攝影機拍攝路徑，系統根據車輛速度和側向位置計算到(圖 2.1)的格線區(grid)需花的時間，進入格線區前駕駛必須沿道路彎度過彎，當車輛進入格線區後安全系統會給予駕駛警示聲，同時介入駕駛的控制，依據路彎情況給予減速和操縱方向盤使車輛過彎，當駕駛回復正常反應(將車子操縱到道路中線)時即解除介入的控制。

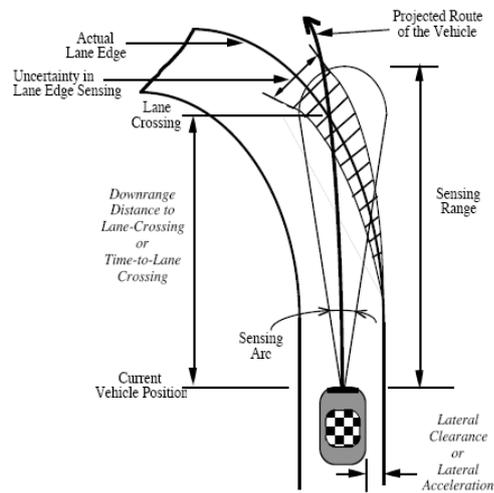


圖 2.1 計算行駛到道路轉彎處所需之時間[1]

這是一個很複雜的系統，要達到此系統要求之功能，必須包括駕駛/車輛、警示/介入/控制、路徑感測系統...等子系統。其中最重要為駕駛人模，此模型為系統判斷駕駛人危險狀態及控制器設計的依據。

此安全系統為主動式安全輔助系統，優點是可以在駕駛分心來不及反應時，給予警告和保持車輛行駛於道路中線，但受限於攝影機可以拍攝的角度、距離、能見度及影像處理的能力，系統效能受很大影響。

2. E. Bertolazzi, et al. [2] 觀察駕駛方向盤操縱角度、剎車器、油門控制為輸入，推導出風險函數(risk function)，依危險程度的高低判斷是否給予警示及建議的速度，目的是發展一套安全警示系統。系統依路徑算出行駛時最佳的安全速度並提供建議。實驗中使用摩托車於固定區域道路中保持固定的速度 72km/h 行駛，記錄下方向、剎車、油門控制的資料，算出各路段的危險程度值。其中直線路段的危險程度為最低，彎道路段危險程度較高，建議彎道必須減速行駛，但若為連續彎道不適合短時間內降低速度(需緩慢地減速)，若駕駛於連續彎道減速反而會讓危險程度增加。

此實驗的目的是求行駛速度和路徑之間的安全性關係，經實驗計算求得最佳的速度值(危險程度最低)，在危險程度高時系統警示駕駛減速行駛，此為一套被動式的安全輔助系統，文中所提供的安全速度建議是在已知的路況下計算，若在新的道路上沒有辦法達到即時判斷安全性的能力，且沒考慮到周圍有車輛時危險程度應該會不同，所考慮到的安全相關因素過少，使用摩托車當實驗工具所得之結果和汽車會有極大誤差，實驗之可靠性有很大的問題。

3. Y. Takatori, T. Hasegawa [3] 開發一套安全輔助系統，此系統目地要判斷駕駛變換車道於何種情況會有危險發生，有危險性時系統會警示駕駛人，所建立之駕駛模擬器採用視程模型，此模型假設駕駛注視的範圍為正前後方 100m 處和鄰近車道前後各 50m，文中假設駕駛在下列情況下變換車道為安全:①前後方 50m 內無車輛②無鄰近車道之車輛進入前後 50m③前方鄰近車道車輛車速較本車慢者方向燈無閃爍④後方鄰近車道車輛車速較本車快者方向燈無閃爍。駕駛模擬器中兩台車輛以時速一百公里的速度行駛於兩個車道，要變換車道之車輛開於後方，使用兩種方法估測變換車道時移動的路徑是否會有危險，①依車輛速度計算變換車道後之位置，②算出車輛行駛路徑並決定危險區。

文中所提方法①只要計算出換道後之位置，所使用之計算量較少，但無法準確判斷危險區域，方法②算出變換車道之軌跡可決定危險區，通知駕駛避開有危險性的變換車道行為，但從換車道前就要計算出完整的路徑，所需的計算時間相對增加。實驗中只考慮到一台車輛變換車道後和鄰近車道間危險性判斷，危險性判斷皆在變換車道前決定，若在變換車道時有其他車輛進入文中所指之危險區則會有危險產生的可能。

2.2 駕駛人模型

設計一個判斷駕駛人狀態之安全系統前，需了解駕駛人的行為模式，因此駕駛人模型的取得是重要的研究。

1.A. Modjtahedzadeh, R. A. Hess [4] 文中表示一個單輸入單輸出的駕駛/車輛模型如(圖 2.2)所示

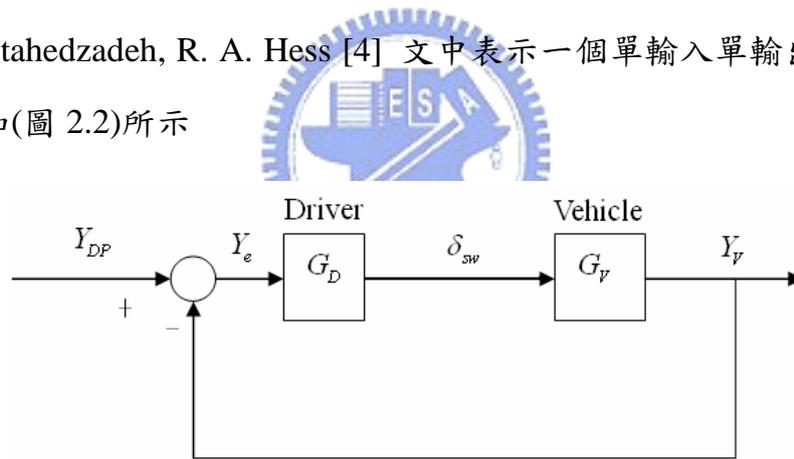


圖 2.2 駕駛/車輛 系統[4]

駕駛的動態方程式可以用線性的轉移函數 G_D 表示， G_D 輸入為側向偏移 Y_e 輸出為方向盤操縱角度 δ_{sw} ，根據(McRuer and Krendel,1974)所提出交越(crossover)模型，駕駛人的補償行為 G_D 必須像下式

$$G_D G_V(s) \approx \omega_c e^{-\tau_e s} / s \quad (2.1)$$

ω_c 為迴路轉移函數 $G_D G_V(s)$ 的增益交越頻率，亦即 $|G_D G_V(j\omega_c)| = 1.0$ 。

一個良好的駕駛/車輛 系統的特性是駕駛或車輛與雜訊的靈敏度為最小，低頻的增益較高使駕駛有效率的操控，高頻區增益較低因此和不明確項 (uncertainty) 的靈敏度較低，交越頻率發生處有斜率為 -20 dB/dec 的遞減，交越區 $\left(\left| G_D G_V(j\omega_c) \right| = 1.0 \text{ 至 } \left| G_D G_V(j\omega) \right| = \frac{1}{10} \right)$ 有良好的暫態響應和足夠的穩定性邊際 ($GM = 20 \text{ dB}$, $PM = 90^\circ$)。

要達成交越模型的要求，模型結構最少要有三個回授迴路所組成，文將“crossover”模型表示成(1)包含駕駛人注視前方路徑的行為(preview)、(2)低頻的補償行為、(3)高頻的補償行為模型結構。如(圖 2.3)

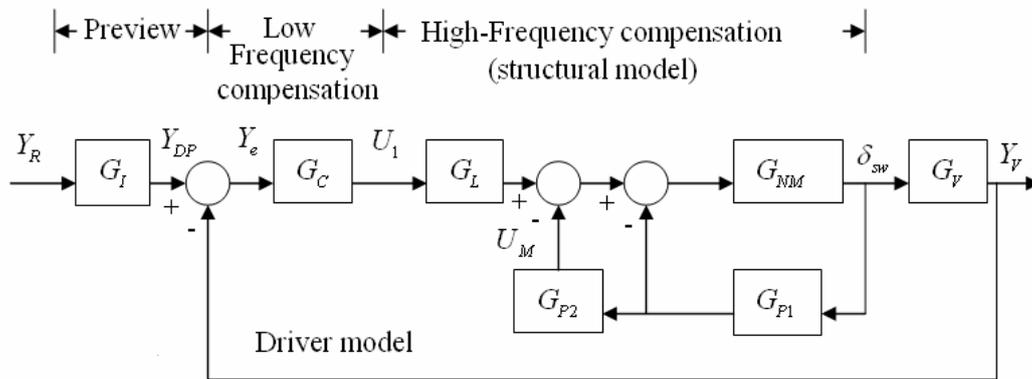


圖 2.3 駕駛/車輛 系統[4]

駕駛補償行為: **高頻區**。高頻補償於交越頻率處 ($\left| G_D G_V(j\omega) \right| = 1.0$ 至增益下降十倍 $\left| G_D G_V(j\omega) \right| = \frac{1}{10}$) 的頻域範圍內，所使用的模型稱為結構(structural)模型，(圖 2.3)中的結構模型由 G_{NM} 、 G_{P1} 、 G_{P2} 、 G_L 四個轉移函數組成之迴路，表示駕駛人手臂神經及肌肉組織之運動。

駕駛補償行為: **低頻區**。補償 Y_V / U_1 的轉移函數的低頻響應可以由方塊 G_C 所示

$$G_C = K_y (T_3 s + 1) \quad (2.2)$$

式(2.2)中 K_y 為常數，為了達到交越頻率處有 -20 dB/dec 的現象，因此低頻區零點位於 $-1/T_3$ 處，低頻增益主要和駕駛注意行駛路徑的效能有關，並不會造成穩定性的問題。

駕駛在開車時都會有看前方路徑的行為(preview)，所看的距離會因為行車速度而有所影響，依作者的經驗通常在 2s 到 9s (6.1-91.4m) 之間，Preview 可以讓駕駛知道下一段路的軌跡，更容易照路徑行駛。

Crossover 模型可以表示駕駛之行為模式，擁有良好的操縱及受雜訊的影響小，文中提到駕駛 preview 的行為，合乎一般駕駛行為該有的觀點，此觀點可和實驗所得之駕駛人模型特性比較，判斷實驗準確性。

2. L.K Chen,A.G Ulsoy [5] 文中讓十二個駕駛人於駕駛模擬器開兩小時的車，隨時觀察詢問駕駛人狀況，記錄駕駛時車子的側向位置和方向盤操縱角度，將側向位置 y 當系統輸入，方向盤角度 δ 為系統輸出，以系統識別的方法分析，分別使用了 ARX、ARMAX、BJ 和 OE 模型結構之系統識別分析(有關非時變系統識別將於第三章介紹)，由模擬的數據看出 ARMAX 和 BJ 模型較 ARX 與 OE 模型的識別效果更為準確，且使用 ARMAX 二階模型即可得到較佳的資料比對結果。

文中之實驗時間為兩小時，可以使用後半段資料分析駕駛疲勞之情況，且實驗時間中駕駛會有專注力較高或較低的情況，因此可以分析出多種狀態情況下之駕駛行為，在文中提到實驗得到一個變化很快且無法模型化的不確定項(uncertainty)，此不確定項表示駕駛行為的改變明顯受到時間影響，可以推測駕駛人行為變化速度極快，使用非時變系統並不能完全表示駕駛各種狀態。

3. J.H Kim, et al. [6] 建造一個 3D 的虛擬環境，讓駕駛人尾隨著一輛卡車後行駛，收集駕駛人方向盤操縱角度和剎車器使用之資料，並在特定路段讓卡車停住，觀察前車急停時駕駛者之反應，觀察出時速 50 公里，車距 26 公尺時駕駛人反應時間為 2 秒，開車時間超過一年的駕駛可在不剎車減速的情況下閃避碰撞，開車時間不到半年的新手駕駛在沒有剎車減速的情況下將無法避開碰撞;以此實驗收集之資料發展一套開關式模型，將駕駛人狀態區分為五個形式，表示各種情況下的駕駛人狀態。

文中用模擬器收集資料之優點是不必裝上任何的感應器，因此收集的資料不會受到感應器誤差之影響，但實際行車中要考慮的不只有行車速度，道路狀況(晴天、雨天不同)也會影響到駕駛閃避的反應，在模擬器中駕駛已知前車會急停，已做出反應的準備，因此反應速度會比臨時狀況下反應快，所得到的模型特性應為駕駛狀況較好之特性。



2.3 線性時變系統識別法

早期系統常使用線性非時變系統識別法分析，觀念建立在系統特性不隨時間變化的基礎上，但大部分系統的變化會隨著時間改變，因此時變的系統識別法在應用上較近似真實的物理意義，近期系統識別研究以時變系統為重心，下述一些常見的方法:

2.3.1 基底函數(Basis Function):

1. R. Zou and K. H. Chon [7] 提到一個 TVARX (time-varying autoregressive eXogeneous) 方程式為

$$y(n) = \sum_{i=1}^P a(i,n) y(n-i) + \sum_{j=0}^Q b(j,n) x(n-j) + e(n), n=1, \dots, N \quad (2.3)$$

式(2.3)中 $a(i,n)$ 、 $b(j,n)$ 分為 AR 和 MA 的係數項， $y(n)$ 為輸出， $x(n)$ 為輸入， $e(n)$ 為預測誤差。

將時變的係數 $a(i,n)$ 與 $b(j,n)$ 表示成基底函數(basis function) $\pi_k(n)$ $k=0, \dots, V$; 的線性組合，可以表示如下

$$a(i,n) = \sum_{k=0}^V \alpha(i,k) \pi_k(n) \quad , \quad b(j,n) = \sum_{k=0}^V \beta(j,k) \pi_k(n) \quad (2.4)$$

當時間為 $n=1, \dots, N$ 時之系統係數個數由 $(P+Q+1)N$ 變成 $P \times (V+1) + (Q+1) \times (V+1)$ ，當 $V+1 < N$ 時，係數個數變少。基底函數可由使用者選擇，可將估測複雜度變低。

TVARMA 可改寫成

$$y(n) = \sum_{i=1}^P \sum_{k=0}^V \alpha(i,k) y_k(n-i) + \sum_{j=0}^Q \sum_{k=0}^V \beta(j,k) x_k(n-j) + e(n) \quad (2.5)$$

$$y_k(n-i) = \pi_k(n) y(n-i)$$

$$x_k(n-j) = \pi_k(n) x(n-j)$$

式中的 $\pi_k(n)$ 是由使用者的經驗去判斷，文中建議當係數為平滑時使用 Legendre polynomial，其他情況下使用 Walsh functions。將 $\pi_k(n)$ 帶入 TVARX 後即可以使用最小平方法算出 $\alpha(i,k)$ 、 $\beta(j,k)$ 並計算出變數值 $a(i,n)$ 、 $b(j,n)$ 。

2. Y. Grenier[8] 提到模型化變化較複雜的系統(線性時變系統)時可以使用線性時變 ARMA(autoregressive moving-average)模型、lattices filter 求解。

(1) ARMA 模型

系統輸入白訊號 ε_t 輸出為 y_t ，使用線性非時變 ARMA 模型表示如下

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} = b_0 \varepsilon_t + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.6)$$

線性時變系統 ARMA 模型可寫成

$$\begin{aligned} y_t + a_1(t-1)y_{t-1} + \dots + a_p(t-p)y_{t-p} \\ = b_0(t)\varepsilon_t + b_1(t-1)\varepsilon_{t-1} + \dots + b_q(t-q)\varepsilon_{t-q} \end{aligned} \quad (2.7)$$

若將時變的係數 $a_i(t)$ 與 $b_i(t)$ 表示成基底函數(basis function) $f_i(t)$ 的線性組合，如下所示

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^m a_{ij} f_j(t), \quad b_i(t) = \sum_{j=0}^m b_{ij} f_j(t) \quad (2.8)$$

式 (2.8) 中之基底 $f_i(t)$ 為使用者自訂之函數利用式(2.8)可以將 $a_i(t-i)y_{t-i}$ 改寫成

$$a_i(t-i)y_{t-i} = \sum_{j=0}^m a_{ij} (f_j(t-i)y_{t-i}) \quad (2.9)$$

定義 $Y_t = [f_0(t)y_t \dots f_m(t)y_t]'$ 此時式(2.9)可以寫成 $a_i(t-i)y_{t-i} = [a_{i0} \dots a_{im}] Y_{t-i}$

定義未知參數 $\theta = [a_{10} \dots a_{1m} \dots a_{p0} \dots a_{pm}, b_{00} \dots b_{0m} \dots b_{q0} \dots b_{qm}]'$ ，雜訊項 e_t 的定義

為 $e_t = y_t - \hat{y}_t$ ，其中 $\hat{y}_t = E(y_t | y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = -[Y'_{t-1} \dots Y'_{t-p}] \cdot \theta$ ，使變數 e_t 為最小

化需要 e_t 對未知參數 θ 的梯度為零

$$E[(grad_{\theta} \cdot e_t) \cdot e_t] = 0$$

經過推導後得 $grad_{\theta} e_t = [Y'_{t-1} \dots Y'_{t-p}]'$ 時即可得 θ 最佳解。

(2) LATTICE FILTERS

“whitening” lattice filter 結構如(圖 2.4)所示

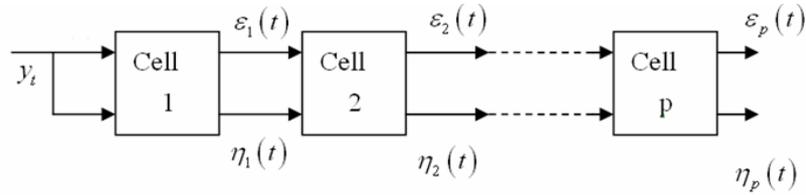


圖 2.4 The whitening lattice filter, with p cells.[8]

線性時變系統所使用的 cell 結構為(圖 2.5)

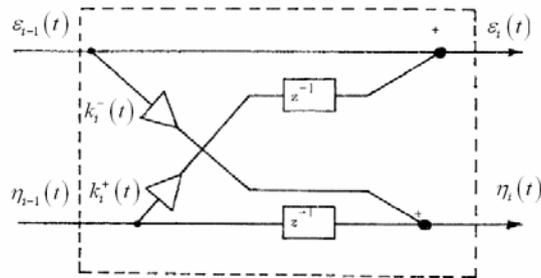


圖 2.5 時變 lattice cell,包括兩個延遲 z^{-1} [8]

將時變的係數 $k_i^+(t)$ 與 $k_i^-(t)$ 表示成基底函數(basis function) $f_j(t)$ 的線性組

合如下

$$k_i^+(t) = \sum_{j=0}^m k_{ij}^+ f_j(t) \quad k_i^-(t) = \sum_{j=0}^m k_{ij}^- f_j(t) \quad (2.10)$$

由(圖 2.4)可以寫出 lattice 方程式

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_i(t) \\ \eta_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_i^+(t-1) \\ k_i^-(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{i-1}(t) \\ \eta_{i-1}(t-1) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

考慮一個輸出狀態 y_t residuals 為 $\varepsilon_i(t)$ 、 $\eta_i(t)$ 、 i 階的 AR 模型如下

$$\varepsilon_i(t) = y_t + a_1^i(t-1)y_{t-1} + \cdots + a_i^i(t-i)y_{t-i} \quad (2.12)$$

$$\eta_i(t) = y_{t-i} + \alpha_1^i(t-i+1)y_{t-i+1} + \cdots + \alpha_i^i(t)y_t \quad (2.13)$$

使用 Burg's 法[11]可求上式 ε_i 最小化之參數解。

將系統參數拆成一個已知函數之線性組合，可以將複雜度變低，但模型化的準確度因基底選擇不同而有所影響，無法保證所得到的模型為最佳解

2.3.2 隨機方法(Stochastic method):

S. Godsill and T. Clapp [9]使用 Stochastic method 解 TVAR(time varying autoregressive)系統識別的問題。

(1) particle filters

考慮一個 Markovian 狀態空間模型

$$x_t \sim f(x_t | x_{t-1})$$

$$y_t \sim g(y_t | x_t)$$

State evolution density

Observation density

x_t 為未觀測到之狀態， y_t 為區間 $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ 觀測到的狀態，定義 $x_{1:t} \triangleq (x_1, \dots, x_t)$; $y_{1:t} \triangleq (y_1, \dots, y_t)$ ，由機率密度函數 $p(x_{1:t} | y_{1:t})$ 取得時間 t 時權

重 particles $\{x_{1:t}^{(i)}, \omega_t^{(i)}; i = 1, 2, \dots, N\}$ ，將機率密度函數寫成

$$p(x_{1:t} | y_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(x_{1:t} - x_{1:t}^{(i)}), \quad \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1 \quad (2.14)$$

式(2.16)中 $\delta(\cdot)$ 為 Dirac delta function， $\omega_t^{(i)}$ 為 $x_t^{(i)}$ 的附屬權重，要更新從 t-1 至 t 時間的機率密度，可將式(2.16)分解成

$$p(x_{1:t} | y_{1:t}) = p(x_{1:t-1} | y_{1:t-1}) \times \frac{g(y_t | x_t) f(x_t | x_{t-1})}{p(y_t | y_{1:t-1})} \quad (2.14)$$

估測 TVAR 之系統，輸出訊號 z_t 為之前訊號的總合

$$z_t = \sum_{i=1}^P a_{i,t} z_{t-i} + e_t = a_t^T z_{t-1:t-P} + e_t \quad (2.15)$$

式(2.15) $a_t = (a_{1,t}, a_{2,t}, \dots, a_{p,t})^T$ 為 P 階的 AR 參數向量，雜訊項 e_t 變異量 variance 為 $\sigma_{e_t}^2$ 之高斯分佈，將 $p(x_t | x_{t-1}, y_t)$ 寫成 weighting term 的形式：

$$p(x_t | x_{t-1}, y_t) \propto q(x_t | x_{t-1}, y_t) p(y_t | z_{t-1:t-p}, a_t, \sigma_{e_t}^2, \sigma_{v_t}^2)$$

使用 Gibbs sampling 法對 a_t 取樣，則 a_t 的估測值為

$$E[a_t | y_{1:t}] \approx \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} a_t^{(i)} \quad (2.16)$$

其中 $a_t^{(i)}$ 是隨機變數 a_t 的第 i 個樣本(sample)， $w_t^{(i)}$ 是該樣本的在上列近似式中的權重。若選擇適當的權重，則根據大數法則，當取樣數目 N 夠大時，上式右邊會驅近於左邊的條件期望值。但是取得大量的樣本數與計算權重需要花費大量的時間。

本章介紹了主動、被動式安全系統研究，主要功能由系統判斷危險狀態，提供駕駛人迴避危險情況之警示和輔助操縱，一套安全系統包括許多子系統，其中以駕駛/車輛系統最為關鍵，因此駕駛/車輛系統的特性，即駕駛人模型的取得很重要，使用系統識別法能將複雜的系統特性以現有的模型(模型結構第三章會介紹)表示，一般的物理系統多為非線性系統，以線性非時變系統近似非線性系統之結果誤差較大，近期許多線性時變系統參數估測法的研究，將非線性系統以線性時變系統近似，可較接近真實之物理意義，第三章介紹使用參數化模型的線性非時變系統識別法，線性時變系統參數估測法則在第四章介紹。

第三章 線性非時變系統識別法

建立具系統對象行為特性之模型稱為模型化(modeling)。依系統對象與目的，存在各種模型化的方法，主要分為數學模型及圖形模型。數學模型是使用代數方程式、微分方程式或邏輯式來表示系統的行為。另一方面，圖形模型是使用圖形來表示系統組成要素之連接或系統內的資訊傳達路徑等，方塊圖、訊號流程圖等都是常用的方法。控制系統時必需要知道控制對象的數學模型，表示數學模型常用的方法為以下兩種。

白箱模型化:這是模型結構已知之模型化法。將系統看作「白色箱子」，可以看見系統裡面全部內容。此方法也稱為物理模型化，以觀察對象的物理法則(例如運動方程式、電路方程式、電磁場方程式或化學反應方程式等)模型化之方法。

黑箱模型化:不使用與對象相關之物理特性之模型化法。這裡是將對象看作「黑色箱子」。就是系統識別(system identification)

系統識別依所識別之系統對象反應可分為線性 (linear)、非線性 (non-linear)，時變 (time-varying)、非時變 (time-invariant)。

3.1 線性非時變(Linear time-invariant, LTI)系統的表示法

考慮一個離散時間線性非時變系統，假設系統輸出為 $y(k)$ 輸入為 $u(k)$ 如(圖3.1) 所示



圖 3.1 系統的一般表示

離散時間線性非時變系統時域中，迴旋積分關係式如下式

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m) u(k-m) = g(k) * u(k) \quad (3.1)$$

式(3.1)中， $g(k)$ 為系統之脈衝響應(impulse response)。式(3.1)稱為 $g(k)$ 與 $u(k)$ 的迴旋積分(convolution)。將(3.1)式使用 z 轉換得在 z 領域的輸入輸出關係

$$Y(z) = G(z)U(z) \quad (3.2)$$

上式中

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}, Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}$$

$G(z)$ 為離散時間線性非時變系統的轉移函數。

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \quad (3.3)$$

然而在實際工程問題中，尚須考慮會影響系統反應的雜訊項。如將雜訊 $v(k)$ 的影響列入考量，則輸入輸出關係可記述如下

$$y(k) = G(q)u(k) + v(k) \quad (3.4)$$

上式中 $G(q)$ 以移位算子(shift operator) q^{-1} 表示之離散時間線性非時變系統的轉移函數

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) q^{-k} \quad (3.5)$$

$g(k)$ 為系統的脈衝響應，移位算子的定義如下

$$q^{-1} u(k) = u(k-1) \quad (3.6)$$

一般造成雜訊產生的來源有很多種，主要可分為量測儀器本身之雜訊，另外則是系統外部之擾動。雜訊項 $v(k)$ 亦可表示如下

$$v(k) = H(q)\omega(k)$$

上式中 $H(q)$ 稱為雜訊轉移函數， $\omega(k)$ 為白雜訊(white noise)， $H(q)$ 之表示如下

$$H(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h(k) q^{-k} \quad (3.7)$$

因此離散時間線性非時變系統一般可以表示如下

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)\omega(k) \quad (3.8)$$

(圖 3.2)為(3.8)式的方塊圖

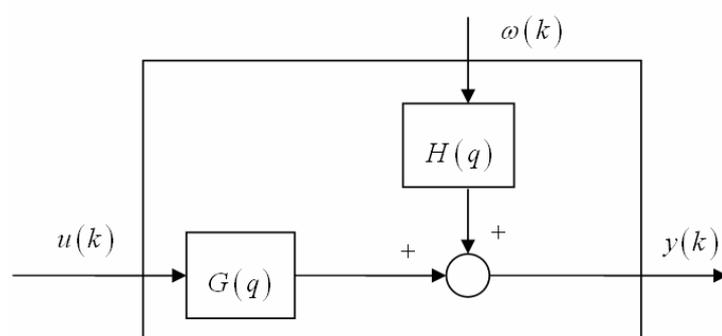


圖 3.2 線性系統的一般表示

3.2 參數模型

依系統轉移函數 $G(q)$ 與雜訊轉移函數 $H(q)$ 為 q 的多項式有理函數，可定義各種參數模型，即所謂的多項式黑箱模型(polynomial black-box model)，可分為：方程式誤差模型(equation error model)及輸出誤差模型(output error model)

3.2.1 方程式誤差模型

將系統之輸入輸出關係，用一簡單之差分方程式表示

$$\begin{aligned}y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) \\ = b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) + v(k)\end{aligned}\quad (3.9)$$

雜訊 $v(k)$ 直接以誤差加入差分方程式中，故稱為方程式誤差模型，根據雜訊項的選擇方式，方程式誤差模型又可以分成各種模型

(A) ARX (Auto-Regressive with eXogenous) 模型

式 (3.9) 中假設雜訊項 $v(k)$ 為白雜訊 $\omega(k)$ 時

$$\begin{aligned}y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) \\ = b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) + \omega(k)\end{aligned}\quad (3.10)$$

定義參數向量為

$$\theta = [a_1, a_2, \cdots, a_{n_a}, b_1, b_2, \cdots, b_{n_b}]^T \quad (3.11)$$

定義輸入輸出資料向量(或稱為迴歸向量 (regression vector)) 為

$$\varphi(k) = [-y(k-1), \cdots, -y(k-n_a), u(k-1), \cdots, u(k-n_b)]^T \quad (3.12)$$

則輸出 $y(k)$ 可以如下表示

$$y(k) = \varphi^T \theta(k) + \omega(k) \quad (3.13)$$

此時，考慮 $A(q)$ 、 $B(q)$ 兩個多項式

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

n_a 為多項式 $A(q)$ 之階數， n_b 為多項式 $B(q)$ 之階數。式(3.13)可改寫為

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \omega(k) \quad (3.14)$$

ARX 對應於式(3.14)的系統轉移函數 $G(q, \theta)$ 與雜訊轉移函數 $H(q, \theta)$ 如下

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, H(q, \theta) = \frac{1}{A(q)} \quad (3.15)$$

上述表示之模型，稱為 ARX 模型，(圖 3.3)為 ARX 模型的方塊圖

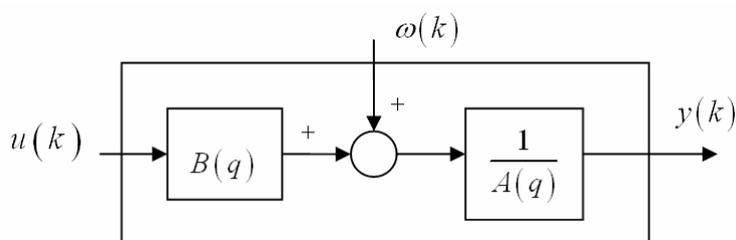


圖 3.3 ARX 模型

根據[10]之定義，到時間(k-1)所測定的輸入輸出資料，輸出 $y(k)$ 一步先預測值

$$\hat{y}(k|\theta) = [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(k) + H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) \quad (3.16)$$

式(3.16)中 θ 為模型參數向量， $G(q, \theta)$ 為系統轉移函數， $H(q, \theta)$ 為雜訊轉移函數， $u(k)$ 、 $y(k)$ 為時間 k 之輸入、輸出狀態。

ARX 模型的一步先預測值如下

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)u(k) + [1 - A(q)]y(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (3.17)$$

由式(3.17) 可知，ARX 模型之一步先預測值與 θ 呈線性關係，因此 ARX 模型又稱為線性回歸模型(linear regression model)。

(B) FIR(Finite Impulse Response)模型

(3.14)式之 ARX 模型中，令 $A(q)=1$ 時，模型表示式如下

$$\begin{aligned}y(k) &= B(q)u(k) + \omega(k) \\ &= b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) + \omega(k) \\ &= \theta^T \varphi(k) + \omega(k)\end{aligned}\quad (3.18)$$

(3.18)稱為 FIR 模型，此模型中 $\theta = [b_1, \dots, b_{n_b}]^T$ ， $\varphi(k) = [u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T$

FIR 模型為一線性回歸模型，此模型的輸出一先預測值為

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)u(k) = \theta^T \varphi(k)\quad (3.19)$$

(C) ARMAX (Auto-Regressive Moving Average eXogenous) 模型

加入白雜訊之移動平均(moving average)來描述方程式誤差，如下式所示：

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)\omega(k)\quad (3.20)$$

其中 $C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$

此即為 ARMAX 模型。其相關轉移函數表示方式如下：

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad H(q, \theta) = \frac{C(q)}{A(q)}\quad (3.21)$$

參數向量為

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, c_1, \dots, c_{n_c}]^T$$

ARMAX 模型的一步先預測值為

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q)u(k) + [1 - A(q)]y(k) + [C(q) - 1]\varepsilon(k|\theta)\quad (3.22)$$

$\varepsilon(k|\theta)$ 為預測誤差(prediction error)定義如下

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta)\quad (3.23)$$

其輸入輸出資料向量為

$$\begin{aligned}\varphi(k, \theta) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), \dots, \\ &\quad u(k-n_b), \varepsilon(k-1, \theta), \dots, \varepsilon(k-n_c, \theta)]^T\end{aligned}\quad (3.24)$$

將式(3.24)代入式(3.22)得

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi(k, \theta)\theta \quad (3.25)$$

雖然上式看起來像是線性回歸關係式，但是式 (3.24)中向量 $\varphi(k, \theta)$ 含有 θ 的非線性影響，並非線性回歸，因此 ARMAX 模型為虛擬線性回歸模型 (pseudolinear regression model)。ARMAX 模型之訊號流程如(圖 3.4)所示。

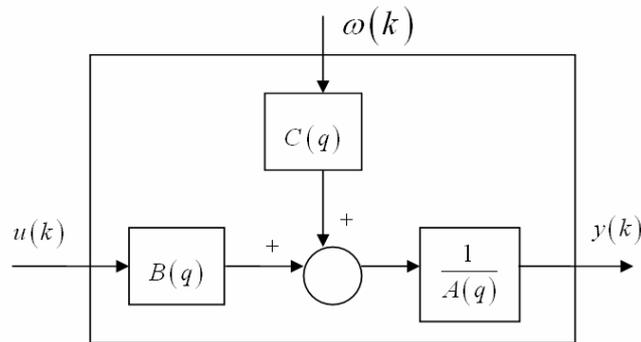


圖 3.4 ARMAX 模型

3.2.2 輸出誤差模型

輸出誤差模型之雜訊項是以輸入的形式到系統當中。而在觀測輸出信號時，將雜訊混入模型化，如下式

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \omega(k) \quad (3.26)$$

$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}$ ， n_f 為多項式 $F(q)$ 之階數。

式(3.26)之雜訊直接進入輸出 $y(k)$ 因此稱為 OE(Output Error)模型(圖 3.5)

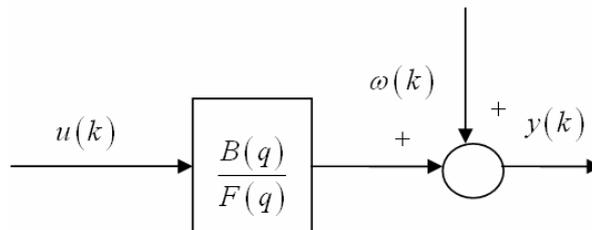


圖 3.5 OE 模型

OE 模型之參數向量為

$$\theta = [b_1, \dots, b_{n_b}, f_1, \dots, f_{n_f}]^T$$

一步先預測值為

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) \quad (3.27)$$

依系統的複雜度和雜訊的影響程度，可以依據 $A(q)$ 、 $B(q)$ 、 $C(q)$ 、 $D(q)$ 、 $F(q)$ 之有無與階數多寡，建立恰當的轉換函數模型，以描述欲了解之系統特性。表 3.1 為式(3.28) 於各種特殊情況之模型表示。

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} v(k) \quad (3.28)$$

從式(3.17)可以知道式(3.28)的一步先預測誤差為

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)} u(k) + \left[1 - \frac{D(q)A(q)}{C(q)} \right] y(k) \quad (3.29)$$

當輸入輸出之間有一個延遲 n_k ，如下式

$$B(q) = b_{n_k} q^{-n_k} + b_{n_k+1} q^{-n_k-1} + \dots + b_{n_k+n_b-1} q^{-n_k-n_b+1} = q^{-n_k} \bar{B}(q), \quad b_{n_k} \neq 0$$

因此可以將式(3.28)改寫為帶有延遲項之式子

$$A(q)y(k) = q^{-n_k} \frac{\bar{B}(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} v(k) \quad (3.30)$$

於式(3.28)中常見的模型結構如表 3.1

表 3.1 參數模型

多項式數目	模型名稱
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (output error)
BFCD	BJ (Box-Jenkins)

3.3 階數選定

關於模型的參數如何選取，其理論為計算損失函數 (loss function) 為愈小愈好。以下三個為常用的判斷準則，令 n 為參數總數， N 為資料數， V 為損失函數：

$$V = \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) \quad (3.31)$$

(1) AIC (Akaike's information criterion) 赤池資訊準則，由 Akaike's 提出：

$$AIC = \ln \left[\left(1 + \frac{2n}{N} \right) * V \right] \quad (3.32)$$

(2) MDL (minimum description length)，由Rissanen 所提出：

$$MDL = \left(1 + \frac{2n}{N} \log N \right) * V \quad (3.33)$$

(3) FPE (final prediction error) 最終預測誤差，由Akaike's 提出：

$$FPE = \frac{1+n/N}{1-n/N} \frac{1}{N} * V \quad (3.34)$$

當 AIC、MDL 或 FPE 之值最小時，通常為模擬此系統之最佳階數。一般來說，提高階數可使識別效果愈好，但是較高階數會使模型化的計算更加複雜化。

3.4 參數模型的識別

本節將說明 3-2 節之參數模型的識別法，當模型結構選定之後，接下來就是推測模型參數的問題。定義參數誤差準則函數

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) \quad (3.35)$$

式(3.35)中 $l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$ 為計算預測誤差值

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \quad \text{同(3.23)}$$

的大小之任意正的純量函數。

根據準則規範的定義，假設未知參數 θ 的推測值為 $\hat{\theta}(N)$ ，要讓誤差最小

$$\hat{\theta}(N) = \arg \min_{\theta} J_N(\theta) \quad (3.36)$$

使預測誤差準則函數 $J_N(\theta)$ 為最小的參數推測法總稱為預測誤差法 (prediction error method : PEM)。以預測誤差法為準則，依模型與函數 $l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$ 選擇之不同，可提出不同之參數估測法，當選擇

$$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) = -\log f\{\varepsilon(k, \theta)\} \quad (3.37)$$

當式(3.35)選擇式(3.37)之 $l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$ 的方法稱為最大似然估測法 (maximum likelihood estimation method)。其中 $f(\cdot)$ 表示預測誤差 $\varepsilon(k, \theta)$ 的

機率密度函數。另外，若選擇為二次函數

$$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) = \varepsilon^2(k, \theta) \quad (3.38)$$

式(3.35)選擇此 $l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$ 的情況稱為最小平方法(least-squares method)

3.4.1 線性回歸模型的參數識別情況

ARX 模型和 FIR 模型皆為線性回歸模型，其輸出的一步先預測值 $\hat{y}(k|\theta)$ 和 θ 之關係為線性，即

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T \varphi(k) \quad (3.39)$$

此時預測誤差值為

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \theta^T \varphi(k)$$

對此線性回歸模型使用最小平方法的估測法，因此選擇

$$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) = \varepsilon^2(k, \theta)$$

此時參數推測的準則規範可以寫成

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{y(k) - \theta^T \varphi(k)\}^2 \quad (3.40)$$

計算(3.40)式，可以得到

$$J_N(\theta) = c(N) - 2\theta^T f(N) + \theta^T R(N)\theta \quad (3.41)$$

其中

$$R(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) : n \times n \text{ 正定矩陣}$$

$$f(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \varphi(k) : n \text{ 維向量}$$

$$c(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) : \text{純量}$$

以 ARX 為例

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \omega(k)$$

以最小平方法估測此時 $R(N)$ 表示為

$$R(N) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \varphi_y(k) \varphi_y^T(k) & \sum_{k=1}^N \varphi_y(k) \varphi_u^T(k) \\ \sum_{k=1}^N \varphi_u(k) \varphi_y^T(k) & \sum_{k=1}^N \varphi_u(k) \varphi_u^T(k) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

式(3.42)中

$$\varphi_y(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a)]^T$$

$$\varphi_u(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b)]^T$$

計算式(3.41)使 $J_N(\theta)$ 為最小即可得到 θ 之最佳解。



3.4.2 預測誤差法(一般的多項式黑箱模型)

離散時間 LTI 系統一般的表示式

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)\omega(k)$$

此時預測誤差的定義如下式

$$\varepsilon(k, \theta) = H^{-1}(q)\{y(k) - G(q)u(k)\} \quad (3.43)$$

假設參數推測的準則規範值為預測誤差的累積平方和時

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) \quad (3.44)$$

計算使此準則規範為最小之方法稱為預測誤差法。

這裡考慮 $J_N(\theta)$ 不一定是 θ 的線性函數，必須使用某些數值搜尋法來求最佳解(高斯·牛頓法、牛頓·拉夫生法)，在此用牛頓·拉夫生法來介紹

牛頓·拉夫生法:求解方程式

$$h(x)=0$$

可以使用下列之方法反覆計算求解，此方法稱為牛頓·拉夫生法 (Newton-Raphson method)

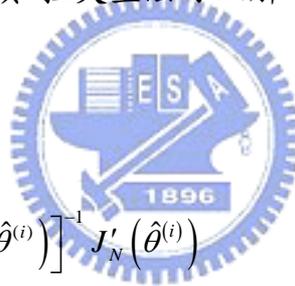
$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \mu \left[h'(x^{(i)}) \right]^{-1} h(x^{(i)}) \quad (3.45)$$

式(3.45)中 $h'(x)$ 是 $h(x)$ 對 x 的一次微分，而 μ 稱為步階常數，是調整演算法收斂速度之參數。根據牛頓·拉夫生法可以解

$$\frac{d}{d\theta} J_N(\theta) = 0$$

得到

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \mu \left[J_N''(\hat{\theta}^{(i)}) \right]^{-1} J_N'(\hat{\theta}^{(i)}) \quad (3.46)$$



以式(3.46)可以求出對應 $J_N(\theta)$ 極小之 θ 值

系統識別目的將系統之特性模型化，所得模型準確度會因輸出輸入資料的處理、模型選擇而不同，當收集資料夠多(不同對象所需要之資料數不同)時可得到一個較近似的系統表示，但以線性非時變系統，表示系統特性通常是不足夠的，因為實際識別對象一般是非線性系統，使用非線性系統表示識別對象的複雜度過高，因此非線性的問題可以線性時變系統近似其系統特性，下一章節會介紹估測時變系統參數的識別法，本論文使用此方法模型化駕駛人模型。

第四章 線性時變系統識別法

4.1 系統參數的機率分佈

在此用一個帶延遲項的 ARX 模型為基準討論，其他線性模型(ARMA、FIR、AR)的識別方法皆相同，線性非時變情況下的模型如下式

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \cdots - a_n y_{k-n} + b_0 u_{k-d} + \cdots + b_n u_{k-d-n} + \omega_k \quad (4.1)$$

其中 y_k 為輸出項， u_{k-d} 為帶有時間延遲的輸入項，ARX 之 ω_k 為外擾項 (process noise)，表示未模型化的動態(unmodeled dynamics)，本文假設為白雜訊(White noise);若以線性時變系統表示式(4.1)則可改寫為下式

$$y_k = -a_{1,k} y_{k-1} - \cdots - a_{n,k} y_{k-n} + b_{0,k} u_{k-d} + \cdots + b_{n,k} u_{k-d-n} + \omega_k \quad (4.2)$$

定義

$$\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{1,N-1} \end{bmatrix}, \dots, \bar{a}_n = \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ \vdots \\ a_{n,N-1} \end{bmatrix}; \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_0 = \begin{bmatrix} b_{0,0} \\ \vdots \\ b_{0,N-1} \end{bmatrix}, \dots, \bar{b}_n = \begin{bmatrix} b_{n,0} \\ \vdots \\ b_{n,N-1} \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \vdots \\ \omega_{N-1} \end{bmatrix}$$

假設 $a_{i,k}$ 與 $b_{j,k}$ 為隨機變數(random variable)(變數皆有一特定的機率)，對所

有的 i, j 與 k ， $a_{i,k}$ 與 $b_{j,k}$ 是獨立的隨機變數，假設在每個時間 k 的系統參數和前一時間 $k-1$ 之系統參數變化不大，變異量在固定範圍內，可假設系統參數 $a_{i,k}$ 之機率分佈情況為高斯分佈，平均值 (mean) 為 $a_{i,k-1}$ ，變異量 (variance) 為 $\sigma_{a_i}^2$ ，表示如下

$$a_{i,k} | a_{i,k-1} \sim N(a_{i,k-1}, \sigma_{a_i}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma_{a_i}^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(a_{i,k} - a_{i,k-1})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right] \quad (4.3)$$

$$i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, N-1$$

假設 $a_{i,0}$ 是高斯分佈，平均值為 μ_{a_i} ，變異量為 $\sigma_{a_i}^2$ 。

$$a_{i,0} \sim N(\mu_{a_i}, \sigma_{a_i}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma_{a_i}^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(a_{i,0} - \mu_{a_i})^2}{2\sigma_{a_i}^2} \right] \quad (4.4)$$

式(4.3)、式(4.4)假設之機率分佈皆以 $a_{i,k-1}$ 為平均值，當 $k=0$ 時之平均值 μ_{a_i} 為一未知參數，其值可藉由最大似然估測(Maximum likelihood estimation, MLE)決定。假設 Z 為一隨機變數， x 為欲估測的參數，根據似然函數(Likelihood Function)定義

$$\Lambda_Z(x) \triangleq p(Z|x) \quad (4.5)$$

使似然函數為最大值的 x 稱為對參數 x 的最大似然估測

$$\hat{x}^{ML}(Z) = \arg \max_x \Lambda_Z(x) = \arg \max_x p(Z|x) \quad (4.6)$$

MLE 即找一次導函數之根，如下

$$\frac{d\Lambda_Z(x)}{dx} = \frac{dp(Z|x)}{dx} = 0 \quad (4.7)$$

式(4.4)中 $\Lambda(\mu_{a_i}) = p(a_{i,0} | \mu_{a_i})$ ，極大值發生於 $\mu_{a_i} = a_{i,0}$

此時

$$\hat{\mu}_{a_i}^{ML} = \arg \max_{\mu_{a_i}} \Lambda(\mu_{a_i}) = a_{i,0} \quad (4.8)$$

因此選擇 $\mu_{a_i} = a_{i,0}$ 。

同式(4.3)、(4.4)假設 $b_{j,k}$ 為高斯分佈平均值(mean)為 $b_{j,k-1}$ ，變異量(variance)為 $\sigma_{b_j}^2$ ，可以表示如下

$$b_{j,k} | b_{j,k-1} \sim N(b_{j,k-1}, \sigma_{b_j}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{b_j}^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(b_{j,k} - b_{j,k-1})^2}{2\sigma_{b_j}^2}\right] \quad (4.9)$$

$$j = 0, \dots, n; k = 1, \dots, N-1$$

假設隨機變數 $b_{j,0}$ 是高斯分佈，平均值為 μ_{b_j} ，變異量為 $\sigma_{b_j}^2$ 。

$$b_{j,0} \sim N(\mu_{b_j}, \sigma_{b_j}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{b_j}^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(b_{j,0} - \mu_{b_j})^2}{2\sigma_{b_j}^2}\right] \quad (4.10)$$

同樣計算 MLE 可得 $\mu_{b_j} = b_{j,0}$ 。

假設雜訊項 ω_k 為隨機變數，其機率分佈為高斯分佈，平均值為零(zeros mean)，變異量(variance)為 σ_{ω}^2 ，對所有的 k ， ω_k 是獨立的隨機變數，則可如下表示

$$\omega_k \sim N(0, \sigma_{\omega}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{\omega}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\omega_k^2}{2\sigma_{\omega}^2}\right) \quad (4.11)$$

式(4.3)、式(4.9)與式(4.11)中的 $\sigma_{a_i}^2$ ， $i = 1, \dots, n$ 、 $\sigma_{b_j}^2$ ， $j = 0, \dots, n$ 與 σ_{ω}^2 為未知。可以假設這些變數亦為互相獨立(mutually independent)的隨機變數，故各有其對應的機率分佈。為了下一小節推導方便起見，令這些隨機變數的倒數(亦即 $\sigma_{a_i}^{-2}$ 、 $\sigma_{b_j}^{-2}$ 與 σ_{ω}^{-2})為加馬分佈(Gamma Distribution)。換言之

$$\sigma_{a_i}^{-2} \sim f(\sigma_{a_i}^{-2}; \alpha_{a_i}, \beta_{a_i})$$

$$\sigma_{b_j}^{-2} \sim f(\sigma_{b_j}^{-2}; \alpha_{b_j}, \beta_{b_j})$$

$$\sigma_{\omega}^{-2} \sim f(\sigma_{\omega}^{-2}; \alpha_{\omega}, \beta_{\omega})$$

其中 f 為加馬分佈的機率密度函數，其表示式如下：

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (4.12)$$

x 為加馬分佈的隨機變數 α 和 β 為加馬分佈之參數， $\alpha > 0$ 且 $\beta > 0$ 。式中的 $\Gamma(\alpha)$ 為加馬函數(gamma function)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (4.13)$$

4.2 系統參數的估測法

上節中定義了參數機率分佈，此節要找出系統參數和輸入輸出資料之間的條件機率值，取得參數估測值。



4.2.1 解條件機率 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$

本文中參數估測使用的方法是 Maximum a posteriori (MAP)，即算出事後機率 (posterior probability) $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 的最大值。

\bar{A} 、 \bar{B} 、 $\sigma_{a_i}^{-2}$ 、 $\sigma_{b_j}^{-2}$ 與 σ_{ω}^{-2} 於給定 \bar{y} 時的條件機率可以寫成

$$p(\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2} | \bar{y}) = \frac{p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2}) \cdot p(\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2})}{p(\bar{y})} \quad (4.14)$$

式(4.14)中 \bar{y} 為已知因此 $p(\bar{y})$ 為常數，故將(4.14)表示為

$$p(\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2} | \bar{y}) \propto p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2}) \cdot p(\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2}) \quad (4.15)$$

上節中提到 $a_{i,k}, b_{j,k}$ 是獨立的隨機變數因此(4.15)式改寫為

$$p(\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{a_i}^{-2}, \sigma_{b_j}^{-2}, \sigma_{\omega}^{-2} | \bar{y}) \propto p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B}, \sigma_{\omega}^{-2}) \cdot p(\bar{A}, \sigma_{a_i}^{-2}) \cdot p(\bar{B}, \sigma_{b_j}^{-2}) \quad (4.16)$$

上式中 $p(\bar{A}, \sigma_{a_i}^{-2}) \cdot p(\bar{B}, \sigma_{b_j}^{-2})$ 可以寫成

$$p(\bar{A}, \sigma_{a_i}^{-2}) = p(\bar{a}_1, \sigma_{a_i}^{-2}) \times \cdots \times p(\bar{a}_n, \sigma_{a_i}^{-2}) \quad (4.17)$$

$$p(\bar{B}, \sigma_{b_j}^{-2}) = p(\bar{b}_0, \sigma_{b_j}^{-2}) \times \cdots \times p(\bar{b}_n, \sigma_{b_j}^{-2}) \quad (4.18)$$

\bar{a}_i 為 Markov Chain，此時 $p(\bar{a}_i, \sigma_{a_i}^{-2})$ 可以寫成

$$\begin{aligned} p(\bar{a}_i, \sigma_{a_i}^{-2}) &= p(a_{i,N-1} | a_{i,N-2}, \sigma_{a_i}^{-2}) \times \cdots \times p(a_{i,1} | a_{i,0}, \sigma_{a_i}^{-2}) \times f(\sigma_{a_i}^{-2}; \alpha_{a_i}, \beta_{a_i}) \\ &\propto N(a_{i,N-2}, \sigma_{a_i}^{-2}) \times \cdots \times N(a_{i,0}, \sigma_{a_i}^{-2}) \times N(\mu_{a_i}, \sigma_{a_i}^{-2}) \times f(\sigma_{a_i}^{-2}, \alpha_{a_i}, \beta_{a_i}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

式(4.19)中 $\alpha_{a_i}, \beta_{a_i}$ 為隨機變數 \bar{a}_i 變異數 $\sigma_{a_i}^{-2}$ 之加馬分佈參數。將式(4.19)



開整理得

$$p(\bar{a}_i, \sigma_{a_i}^{-2}) \propto \frac{(\sigma_{a_i}^{-2})^{\frac{N}{2}-1+\alpha_{a_i}}}{\beta_{a_i}^{\alpha_{a_i}} \Gamma(\alpha_{a_i}) \times (2\pi)^{N/2}} \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma_{a_i}^2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a_{i,k} - a_{i,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{a_i}} \right] \right\} \quad (4.20)$$

同樣的， $p(\bar{b}_j)$ 也是 Markov chain 因此可以表示成

$$\begin{aligned} p(\bar{b}_j, \sigma_{b_j}^{-2}) &= p(b_{j,N-1} | b_{j,N-2}, \sigma_{b_j}^{-2}) \times \cdots \times p(b_{j,1} | b_{j,0}, \sigma_{b_j}^{-2}) \times f(\sigma_{b_j}^{-2}; \alpha_{b_j}, \beta_{b_j}) \\ &\propto N(b_{j,N-2}, \sigma_{b_j}^{-2}) \times \cdots \times N(b_{j,0}, \sigma_{b_j}^{-2}) \times N(\mu_{b_j}, \sigma_{b_j}^{-2}) \times f(\sigma_{b_j}^{-2}, \alpha_{b_j}, \beta_{b_j}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

式(4.21)中 $\alpha_{b_j}, \beta_{b_j}$ 為隨機變數 \bar{b}_j 變異數 $\sigma_{b_j}^{-2}$ 之加馬分佈參數。將式(4.21)

展開整理得

$$p(\bar{b}_j, \sigma_{b_j}^{-2}) \propto \frac{(\sigma_{b_j}^{-2})^{\frac{N}{2}-1+\alpha_{b_j}}}{\beta_{b_j}^{\alpha_{b_j}} \Gamma(\alpha_{b_j}) \times (2\pi)^{N/2}} \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma_{b_j}^2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b_{j,k} - b_{j,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{b_j}} \right] \right\}$$

由式(4.2)可知當 \bar{A} 、 \bar{B} 給定時未知變數為 $\bar{\omega}$ ，此時 $p(\bar{y}|\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{\omega}^{-2})$ 可以寫成

$$\begin{aligned} p(\bar{y}|\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{\omega}^{-2}) &= p(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}, \sigma_{\omega}^{-2}) \\ &\propto N(\omega_0, \sigma_{\omega_0}^{-2}) \times \dots \times N(\omega_{N-1}, \sigma_{\omega_{N-1}}^{-2}) \times f(\sigma_{\omega}^{-2}; \alpha_{\omega}, \beta_{\omega}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

式(4.22)中 α_{ω} 、 β_{ω} 為隨機變數 $\bar{\omega}$ 變異數 σ_{ω}^{-2} 之加馬分佈參數。將式(4.22)開整理後得

$$p(\bar{y}|\bar{A}, \bar{B}, \sigma_{\omega}^{-2}) \sim \frac{(\sigma_{\omega}^{-2})^{\frac{N}{2}-1+\alpha_{\omega}}}{\beta_{\omega}^{\alpha_{\omega}} \Gamma(\alpha_{\omega}) (2\pi)^{N/2}} \exp \left[\frac{-1}{\sigma_{\omega}^2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{\beta_{\omega}} \right) \right] \quad (4.23)$$

對聯合機率分佈(joint probability distribution) $p(\bar{a}_i, \sigma_{a_i}^{-2})$ 之 $\sigma_{a_i}^{-2}$ 變數積分可得 \bar{a}_i 的機率密度函數 $p(\bar{a}_i)$ ，亦即

$$\begin{aligned} p(\bar{a}_i) &= \int_0^{\infty} p(\bar{a}_i, \sigma_{a_i}^{-2}) d\sigma_{a_i}^{-2} \\ &= \frac{1}{\beta_{a_i}^{\alpha_{a_i}} \Gamma(\alpha_{a_i}) (2\pi)^{p_{a_i}}} \frac{1}{\left(r_{a_i}\right)^{p_{a_i}}} \times \prod_{i=0}^{p_{a_i}-1} (p_{a_i} - i) \end{aligned} \quad (4.24)$$

式(4.24)中

$$p_{a_i} = \frac{N}{2} - 1 + \alpha_{a_i}, r_{a_i} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a_{i,k} - a_{i,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{a_i}}$$

同理將聯合機率分佈(joint probability distribution) $p(\bar{b}_j, \sigma_{b_j}^{-2})$ 之 $\sigma_{b_j}^{-2}$ 獲得 \bar{b}_j 本身的機率分佈 $p(\bar{b}_j)$ ，可得到

$$\begin{aligned} p(\bar{b}_j) &= \int_0^{\infty} p(\bar{b}_j, \sigma_{b_j}^{-2}) d\sigma_{b_j}^{-2} \\ &= \frac{1}{\beta_{b_j}^{\alpha_{b_j}} \Gamma(\alpha_{b_j}) (2\pi)^{p_{b_j}}} \frac{1}{\left(r_{b_j}\right)^{p_{b_j}}} \prod_{i=0}^{p_{b_j}-1} (p_{b_j} - i) \end{aligned} \quad (4.25)$$

式(4.25)中 $p_{b_j} = \frac{N}{2} - 1 + \alpha_{b_j}$ ， $r_{b_j} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b_{j,k} - b_{j,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{b_j}}$

$$\text{令 } \frac{1}{\beta_{a_i}^{\alpha_{a_i}} \Gamma(\alpha_{a_i}) (2\pi)^{p_{a_i}}} \prod_{i=0}^{p_{a_i}-1} (p_{a_i} - i) = \Lambda_{a_i}$$

$$\frac{1}{\beta_{b_j}^{\alpha_{b_j}} \Gamma(\alpha_{b_j}) (2\pi)^{p_{b_j}}} \prod_{i=0}^{p_{b_j}-1} (p_{b_j} - i) = \Lambda_{b_j}$$

則可以將式(4.24)、(4.25)縮寫為

$$p(\bar{a}_i) = \Lambda_{a_i} (r_{a_i})^{-p_{a_i}} \quad (4.26)$$

$$p(\bar{b}_j) = \Lambda_{b_j} (r_{b_j})^{-p_{b_j}} \quad (4.27)$$

使用同樣方法將聯合機率分佈(joint probability distribution) $p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B}, \sigma_\omega^{-2})$

之 σ_ω^{-2} 積分獲得機率分佈 $p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B})$

$$p(y_k | \bar{A}, \bar{B}) = \int_0^\infty p(\bar{y} | \bar{A}, \bar{B}, \sigma_\omega^{-2}) d\sigma_\omega^{-2} = \Lambda_\omega (r_\omega)^{-p_\omega} \quad (4.28)$$

式(4.28)中

$$p_\omega = \frac{N}{2} - 1 + \alpha_\omega, r_{\omega_k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{\beta_\omega}, \Lambda_\omega = \beta_\omega^{\alpha_\omega} \Gamma(\alpha_\omega) \times \prod_{i=0}^{p_\omega-1} (p_\omega - i) \times \frac{1}{(2\pi)^{p_\omega}}$$

將式(4.26)、(4.27)、(4.28)整合可得

$$\begin{aligned} p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y}) &\propto \prod_{i=1}^n \Lambda_{a_i} (r_{a_i})^{-p_{a_i}} \times \prod_{j=0}^n \Lambda_{b_j} (r_{b_j})^{-p_{b_j}} \times \Lambda_\omega (r_\omega)^{-p_\omega} \\ &\propto \prod_{i=1}^n (r_{a_i})^{-p_{a_i}} \times \prod_{j=0}^n (r_{b_j})^{-p_{b_j}} \times (r_\omega)^{-p_\omega} \end{aligned} \quad (4.29)$$

為方便下節中將 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 整理成 $p(a_{i,k}) \times p(\chi_{a_{i,k}})$ 及 $p(b_{j,k}) \times p(\chi_{b_{j,k}})$ ，選擇

$$\alpha_{a_i} = \alpha_{b_j} = \alpha_\omega \text{ 即 } p_{a_i} = p_{b_j} = p_\omega = p$$

式(4.29)可寫成 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y}) \propto \prod_{i=1}^n (r_{a_i})^{-p} \times \prod_{j=0}^n (r_{b_j})^{-p} \times (r_{\omega})^{-p}$

4.2.2 Maximum a posteriori(MAP)

MAP 估測值為使事後機率 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 有最大值的參數。由於參數個數眾多，且函數 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 的形式複雜，直接求其最大值並不容易。為了簡化問題，在此一次只求 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 沿著一個參數方向的極大值，其餘參數則視為常數。依序計算所有參數的極大值，然後以疊代(iteration)方式反覆計算，直到參數收斂為止。這種求極值的方式可稱為 ”coordinate climbing”，亦即使 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 在參數空間中沿著每個參數的座標方向逐步趨向其最大值。優點是將多變數求極值的問題化簡為單變數求極值的問題，但是需要較長的計算時間才能收斂到真正的極大值。

若欲求 $a_{i,k}$ 方向的極大值，則將 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 整理成 $p(a_{i,k}) \times p(\chi_{a_{i,k}})$ ， $p(\chi_{a_{i,k}})$ 為和 $a_{i,k}$ 無關之項視為常數項，求其 MAP 即算出隨機變數 $a_{i,k}$ 最大機率發生處，同理將 $p(\bar{A}, \bar{B} | \bar{y})$ 整理成 $p(b_{j,k}) \times p(\chi_{b_{j,k}})$ ， $p(\chi_{b_{j,k}})$ 為和 $b_{j,k}$ 無關之項視為常數項，求其 MAP 即算出隨機變數 $b_{j,k}$ 最大發生機率處。

假設第一個隨機變數 $a_{i,k}$ 為變數 x 其他隨機變數為常數，此時和 $a_{i,k}$ 相關之機率函數為

$$p(x) \propto r_{a_i}^{-p} r_{\omega}^{-p} \quad (4.30)$$

式(4.30)中的 r_{a_i} 、 r_{ω} 各別為

$$r_{a_i} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(a_{i,k} - a_{i,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{a_i}} ; k=0 \text{ 時 } a_{i,k-1} = \mu_{a_i} , r_{\omega} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{\beta_{\omega}}$$

將(4.30)整理成與 $a_{i,k}$ 相關的函數，經過推導之後此時

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_{a_i,k}} \right)^p &\propto \left[1 + \left(\frac{a_{i,k} - C_{i,k}^1}{\sqrt{\frac{\xi_{i,k} + \lambda_{i,k}}{2} + \frac{1}{\beta_{a_i}}}} \right)^2 \right]^{-p} \\ &= \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^1}{\eta_{i,k}^1} \right)^2 \right]^{-p} \end{aligned} \quad (4.31)$$

上式中 $C_{i,k}^1$ 、 $\eta_{i,k}^1$ 相關係數如表 4.1 所示

表 4.1 係數表一

k	0	$1 \sim N-2$	$N-1$
$C_{i,k}^1$	$\frac{a_{i,k+1} + \mu_{a_i}}{2}$	$\frac{a_{i,k+1} + a_{i,k-1}}{2}$	$a_{i,N-2}$
$\eta_{i,k}^1$	$\sqrt{\frac{\xi_{i,k} + \lambda_{i,k}}{2} + \frac{1}{\beta_{a_i}}}$	$\sqrt{\xi_{i,k} + \lambda_{i,k} + \frac{2}{\beta_{a_i}}}$	
$\xi_{i,k}$	$\sum_{k=2}^{N-1} (a_{i,k} - a_{i,k-1})^2$	$\sum_{l=1}^{k-1} (a_{i,l} - a_{i,l-1})^2$ $+ \sum_{l=k+2}^{N-1} (a_{i,l} - a_{i,l-1})^2$	$\sum_{k=1}^{N-2} (a_{i,k} - a_{i,k-1})^2$
$\lambda_{i,k}$	$\frac{(a_{i,k+1} - \mu_{a_i})^2}{2}$	$\frac{(a_{i,k+1} - a_{i,k-1})^2}{2}$	0

接著將 r_{ω} 中與 $a_{i,k}$ 相關式展開，整理後如下

$$r_\omega = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{\beta_\omega};$$

$$\omega_k = y_k + a_{1,k}y_{k-1} + \cdots + a_{n,k}y_{k-n} - b_{0,k}u_{k-d} - \cdots - b_{n,k}u_{k-d-n}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (a_{i,k}y_{k-i} + \rho_{i,k})^2 = (a_{i,k}y_{k-i} + \rho_{i,k})^2 + \zeta_{i,k} \quad (4.32)$$

其中 $\rho_{i,k} = \omega_k - a_{i,k}y_{k-i}$ ， $\zeta_{i,k}$ 的值如表 4.2 所示

表 4.2 係數表二

k	0	1 ~ N-2	N-1
$\zeta_{i,k}$	$\sum_{k=1}^{N-1} \omega_k^2$	$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_l^2 + \sum_{l=k+1}^{N-1} \omega_l^2$	$\sum_{k=0}^{N-2} \omega_k^2$

因此使用(4.32)將 $(r_\omega)^{-p}$ 改寫如下

$$\begin{aligned} (r_\omega)^{-p} &= \left[\frac{(a_{i,k}y_{k-i} + \rho_{i,k})^2 + \zeta_{i,k}}{2} + \frac{1}{\beta_\omega} \right]^{-p} \\ &\propto \left[1 + \frac{\left(\frac{a_{i,k} + \frac{\rho_{i,k}}{y_{k-i}}}{\sqrt{\zeta_{i,k} + \frac{2}{\beta_\omega}}} \right)^2}{y_{k-i}} \right]^{-p} = \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^2}{\eta_{i,k}^2} \right)^2 \right]^{-p} \end{aligned} \quad (4.33)$$

上式中

$$C_{i,k}^2 = \frac{-\rho_{i,k}}{y_{k-i}}; \eta_{i,k}^2 = \frac{\sqrt{\zeta_{i,k} + \frac{2}{\beta_\omega}}}{y_{k-i}};$$

最後將(4.30)表示為

$$p(x) \propto \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^1}{\eta_{i,k}^1} \right)^2 \right]^{-p} \times \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^2}{\eta_{i,k}^2} \right)^2 \right]^{-p} \quad (4.34)$$

計算 $b_{j,k}$ 之 MAP 時假設隨機變數 $b_{j,k}$ 為變數 x ，其他隨機變數為常數，此

時和 $b_{j,k}$ 相關之機率函數為

$$p(x) \propto r_{b_j}^{-p} r_{\omega}^{-p} \quad (4.35)$$

式(4.35)中的 r_{b_j} 、 r_{ω} 各別為

$$r_{b_j} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b_{j,k} - b_{j,k-1})^2}{2} + \frac{1}{\beta_{b_j}}; k=0 \text{ 時 } b_{j,k-1} = \mu_{b_j}, r_{\omega} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{\beta_{\omega}}$$

同式(4.31~4.34)之推導，可求得同式(4.34)之表示式

$$p(x) \propto \left[1 + \left(\frac{x - C_{j,k}^1}{\eta_{j,k}^1} \right)^2 \right]^{-p} \times \left[1 + \left(\frac{x - C_{j,k}^2}{\eta_{j,k}^2} \right)^2 \right]^{-p}$$

式(4.35)中 $C_{j,k}^1$ 、 $\eta_{j,k}^1$ 、 $C_{j,k}^2$ 、 $\eta_{j,k}^2$ 之係數如表 4.3、4.4 所示

表 4.3 係數表三

k	0	1 ~ N-2	N-1
$C_{j,k}^1$	$\frac{b_{j,k+1} + \mu_{b_j}}{2}$	$\frac{b_{j,k+1} + b_{j,k-1}}{2}$	$b_{j,N-2}$
$\eta_{j,k}^1$	$\sqrt{\frac{\xi_{j,k} + \lambda_{j,k}}{2} + \frac{1}{\beta_{b_j}}}$	同左	$\sqrt{\xi_{j,k} + \lambda_{j,k} + \frac{2}{\beta_{b_j}}}$
$\xi_{j,k}$	$\sum_{k=2}^{N-1} (b_{j,k} - b_{j,k-1})^2$	$\sum_{l=0}^{k-1} (b_{j,l} - b_{j,l-1})^2$ + $\sum_{l=k+2}^{N-1} (b_{j,l} - b_{j,l-1})^2$	$\sum_{k=0}^{N-2} (b_{j,k} - b_{j,k-1})^2$
$\lambda_{j,k}$	$-\frac{(b_{j,k+1} - \mu_{b_j})^2}{2}$ + $(b_{j,k+1}^2 + \mu_{b_j}^2)$	$-\frac{(b_{j,k+1} - b_{j,k-1})^2}{2}$ + $(b_{j,k+1}^2 + b_{j,k-1}^2)$	0

表 4.4 係數表四

k	0	1 ~ $N-2$	$N-1$
$C_{j,k}^2$		$\frac{\rho_{j,k}}{u_{k-d-j}}$	
$\eta_{j,k}^2$		$\frac{\sqrt{\zeta_{j,k} + \frac{2}{\beta_\omega}}}{u_{k-d-j}}$	
$\rho_{j,k}$		$\omega_k + b_{j,k} u_{k-d-j}$	
$\zeta_{j,k}$	$\sum_{k=1}^{N-1} \omega_k^2$	$\sum_{l=0}^{k-1} \omega_l^2 + \sum_{l=k+1}^{N-1} \omega_l^2$	$\sum_{k=0}^{N-2} \omega_k^2$

計算 $a_{i,k}$ 時實際之機率分佈 $p(x)$ 如下式

$$p(x) = L \times \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^1}{\eta_{i,k}^1} \right)^2 \right]^{-p} \times \left[1 + \left(\frac{x - C_{i,k}^2}{\eta_{i,k}^2} \right)^2 \right]^{-p} \quad (4.36)$$

估測模型參數的步驟如(圖 4.1)所示

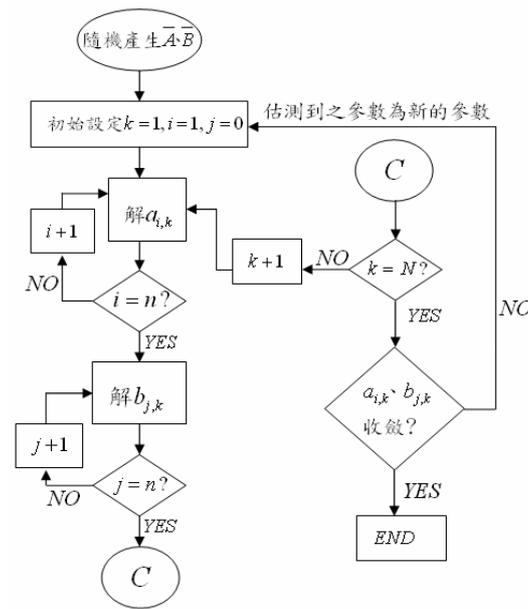


圖 4.1 時變參數估測步驟

$a_{i,k}$ 、 $b_{j,k}$ 解法如上述

計算 MAP 時比例項 L 並不會影響其結果 ($L > 0$)，求 $p(x)$ 之最大值時對 $p(x)$ 微分得到 $p'(x)$ 之根將根代回 $p(x)$ 驗算出最大值式(4.34)之一次導函數為

$$p'(x) = 4x^3 - 6(C_{i,k}^1 + C_{i,k}^2)x^2 + 2x \left[(C_{i,k}^1 + C_{i,k}^2)^2 + 2C_{i,k}^1 C_{i,k}^2 + (\eta_{i,k}^1)^2 + (\eta_{i,k}^2)^2 \right] - 2 \left[C_{i,k}^1 (C_{i,k}^1 C_{i,k}^2 + (\eta_{i,k}^2)^2) + C_{i,k}^2 (C_{i,k}^1 C_{i,k}^2 + (\eta_{i,k}^1)^2) \right] = 0 \quad (4.37)$$

求解一元三次方程式可使用 cubic equation，假設方程式如下

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0 \quad (4.38)$$

令 $x = x_0 - \frac{a}{3}$ 代入式(4.37)得

$$x_0^3 = \left(-b + \frac{a^2}{3} \right) x_0 + \left(-c - \frac{2}{27} a^3 + \frac{ab}{3} \right) = Ax_0 + B \quad (4.39)$$

令 $p = \frac{A}{3}$ ， $q = \frac{B}{2}$ ，可以套入公式解一元三次方程式，方法如下

(1) $q^2 - p^3 < 0$ ，解得三相異實根

$$\begin{aligned} \cos(u) &= q / (p\sqrt{p}), 0 < u < 180^\circ \\ x_1 &= 2\sqrt{p} \cos(u/3) \\ x_2 &= 2\sqrt{p} \cos(u/3 + 120^\circ) \\ x_3 &= 2\sqrt{p} \cos(u/3 + 240^\circ) \end{aligned} \quad (4.40)$$

(2) $q^2 - p^3 > 0$ ，解得一實根兩虛根

$$x_1 = \left(q + \sqrt{q^2 - p^3} \right)^{1/3} + \left(q - \sqrt{q^2 - p^3} \right)^{1/3} \quad (4.41)$$

(3) $q^2 - p^3 = 0$ ，解得三實根其中兩根相等

$$x_1 = 2q^{1/3}, x_2 = x_3 = -q^{1/3} \quad (4.42)$$

上述中 x_1 、 x_2 、 x_3 為式(4.38)之三根，代回 $x = x_0 - \frac{a}{3}$ 可解得式(4.34)之根，代回式(4.34)計算比較三個根所得之函數值，得最大值之根為最大機率發生處。

4.3 加馬分佈參數選擇

4.2 節已提到模型參數估測方法，其中變異數 ($\sigma_{a_i}^{-2}$ 、 $\sigma_{b_j}^{-2}$ 與 σ_{ω}^{-2}) 為加馬分佈，(α_{a_i} 、 α_{b_j} 、 α_{ω} 、 β_{a_i} 、 β_{b_j} 與 β_{ω}) 選擇會影響到參數估測準確性，本節介紹(α_{a_i} 、 α_{b_j} 、 α_{ω} 、 β_{a_i} 、 β_{b_j} 與 β_{ω}) 選擇方法。式(4.34)中(α_{a_i} 、 α_{b_j} 與 α_{ω}) 選擇只會影響到階數高低，並不會影響 MAP 計算之結果，此時只有 (β_{a_i} 、 β_{b_j} 與 β_{ω}) 選擇會對估測準確度有所影響，以下以一個二階 AR 模型為例敘述(較高階數及 ARX 模型之算法皆同)。時變系統二階 AR 模型表示如下

$$y_k = -a_{1,k}y_{k-1} - a_{2,k}y_{k-2} + \omega_k, k=0, \dots, N-1 \quad (4.43)$$

定義

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & y_{N-2} \end{bmatrix}; Y_2 = \begin{bmatrix} y_{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & y_{N-3} \end{bmatrix} \text{ 此時式(4.41)可寫成}$$

$$\bar{y} = -\bar{a}_1 Y_1 - \bar{a}_2 Y_2 + \bar{\omega} \quad (4.44)$$

根據 4.2.1 節之討論，將 $p(\bar{a}_1, \bar{a}_2 | \bar{y})$ 展開

$$\begin{aligned} p(\bar{a}_1, \bar{a}_2 | \bar{y}) &\propto \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k + a_{1,k}y_{k-1} + a_{2,k}y_{k-2})^2 + \frac{1}{\beta_{\omega}} \right]^{-P} \\ &\times \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (a_{1,k} - a_{1,k-1}) + \frac{1}{\beta_{a_1}} \right]^{-P} \\ &\times \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (a_{2,k} - a_{2,k-1}) + \frac{1}{\beta_{a_2}} \right]^{-P} \end{aligned} \quad (4.45)$$

令 $q(\bar{a}_1, \bar{a}_2 | \bar{y})$ 等於 $p(\bar{a}_1, \bar{a}_2 | \bar{y})$ 之分母項，將式(4.45)之分母項整理成

$$\begin{aligned}
 q(\bar{a}_1, \bar{a}_2 | \bar{y}) &= \left[\frac{1}{2} (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2)^T (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + \frac{1}{\beta_\omega} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - 2a_{1,0} \mu_{a_1} + \frac{1}{\beta_{a_1}} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - 2a_{2,0} \mu_{a_2} + \frac{1}{\beta_{a_2}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

上式中

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\bar{a}_1 及 \bar{a}_2 極值發生於一次導函數等於零處，即 $\frac{\partial q}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial q}{\partial a_2} = 0$ 處

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial q}{\partial a_1} = 0 &= Y_1 (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - 2a_{1,0} \mu_{a_1} + \mu_{a_1}^2 + \frac{1}{\beta_{a_1}} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - 2a_{2,0} \mu_{a_2} + \mu_{a_2}^2 + \frac{1}{\beta_{a_2}} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2} (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2)^T (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + \frac{1}{\beta_\omega} \right] \\
 &\quad \times [D \bar{a}_1 - \mu_{a_1} e] \left[\frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - 2a_{2,0} \mu_{a_2} + \mu_{a_2}^2 + \frac{1}{\beta_{a_2}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial q}{\partial a_2} = 0 &= Y_2 (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - 2a_{1,0} \mu_{a_1} + \mu_{a_1}^2 + \frac{1}{\beta_{a_1}} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - 2a_{2,0} \mu_{a_2} + \mu_{a_2}^2 + \frac{1}{\beta_{a_2}} \right] \\
 &\quad + [D \bar{a}_2 - \mu_{a_2} e] \times \left[\frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - 2a_{1,0} \mu_{a_1} + \mu_{a_1}^2 + \frac{1}{\beta_{a_1}} \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2)^T (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + \frac{1}{\beta_\omega} \right]
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

其中 $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ，選擇適當之 $\frac{1}{\beta_{a_1}}$ 、 $\frac{1}{\beta_{a_2}}$ 、 $\frac{1}{\beta_\omega}$ 簡化式(4.47)、(4.48)首先假設

$$\frac{1}{\beta_\omega} = \frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - \mu_{a_1}^2 + \frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - \mu_{a_2}^2 + \rho \quad (4.49)$$

ρ 選擇大於 0 之實數，此時選擇

$$\frac{1}{\beta_{a_1}} = \frac{1}{K_1} \left[\frac{1}{2} (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2)^T (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + \frac{1}{\beta_\omega} \right] - \left(\frac{1}{2} \bar{a}_1^{-T} D \bar{a}_1 - \mu_{a_1}^2 \right) \quad (4.50)$$

可將式(4.47)簡化為

$$\frac{\partial q}{\partial a_1} = 0 = Y_1 (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + K_1 (D \bar{a}_1 - \mu_{a_1} e) \quad (4.51)$$

接著選擇

$$\frac{1}{\beta_{a_2}} = \frac{1}{K_2} \left[\frac{1}{2} (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2)^T (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + \frac{1}{\beta_\omega} \right] - \left(\frac{1}{2} \bar{a}_2^{-T} D \bar{a}_2 - \mu_{a_2}^2 \right) \quad (4.52)$$

將式(4.48)簡化為

$$\frac{\partial q}{\partial a_2} = 0 = Y_2 (\bar{y} + Y_1 \bar{a}_1 + Y_2 \bar{a}_2) + K_2 (D \bar{a}_2 - \mu_{a_2} e) \quad (4.53)$$

\bar{a} 為估測值和實際值之關係式為 $\bar{a} = a + \tilde{a}$ ， a 為實際數值 \tilde{a} 為估測之誤差項。

此時將式(4.51)、(4.53)，寫成

$$Y_1 (\bar{y} + Y_1 (a_1 + \tilde{a}_1) + Y_2 (a_2 + \tilde{a}_2)) + K_1 (D (a_1 + \tilde{a}_1) - \mu_{a_1} e) = 0$$

$$Y_2 (\bar{y} + Y_1 (a_1 + \tilde{a}_1) + Y_2 (a_2 + \tilde{a}_2)) + K_2 (D (a_2 + \tilde{a}_2) - \mu_{a_2} e) = 0$$

$$(Y_1^2 + K_1 D) \tilde{a}_1 + Y_1 Y_2 \tilde{a}_2 = -K_1 D a_1 - Y_1 \bar{\omega} + K_1 \mu_{a_1} e \quad (4.54)$$

$$(Y_2^2 + K_2 D) \tilde{a}_2 + Y_1 Y_2 \tilde{a}_1 = -K_2 D a_2 - Y_2 \bar{\omega} + K_2 \mu_{a_2} e \quad (4.55)$$

選擇 K_1 與 K_2 使得式(4.54)、(4.55)等號右邊的向量長度為最小，亦即使得 $Y_1\bar{\omega}$ 在 Da_1 方向的分量為 0， $Y_2\bar{v}$ 在 Da_2 方向的分量為 0，此時 K_1 與 K_2 有下列表示式

$$K_1 = \frac{(Da_1)^T (-Y_1\bar{\omega})}{(Da_1)^T (Da_1)} \quad (4.56)$$

$$K_2 = \frac{(Da_2)^T (-Y_2\bar{v})}{(Da_2)^T (Da_2)} \quad (4.57)$$

最後將 K_1 、 K_2 代回式(4.47)、(4.49)中可得 $1/\beta_{a_1}$ 、 $1/\beta_{a_2}$ 當我們知道模型係數實際值 a 與誤差項 $\bar{\omega}$ 的時候，可以選到正確的 β 使誤差 v 之影響為最小，本章介紹之變參數估測法會因 β 選定影響估測結果。

4.4 LTV 識別法模擬驗證



在此就本章提出之時變系統參數估測技術分析驗證，給定一個帶有雜訊項的系統之輸出入資料，採用 AR 模型和 ARX 模型模擬分析，階數為 n_a 之 AR 模型為 $y(k) = -a_{1,k}y_{k-1} - \dots - a_{n_a,k}y_{k-n_a} + \omega_k$

AR 項階數為 n_a MA 項階數為 n_b 且輸入輸出間無延遲之 ARX 模型如下式

$$y(k) = -a_{1,k}y_{k-1} - \dots - a_{n_a,k}y_{k-n_a} + b_{0,k}u_k + \dots + b_{n_b,k}u_{k-n_b} + \omega(k)$$

本章節中模擬驗證雜訊 $\omega(k)$ 變異數 σ_ω^2 皆為 10^{-6}

二階 AR 模型參數識別結果如(圖 4.2)

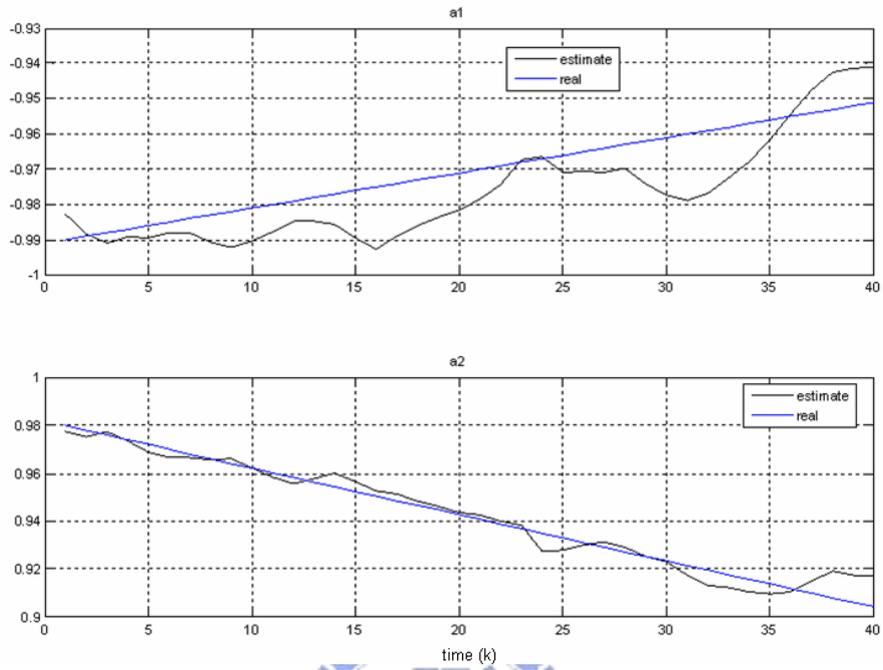


圖 4.2 二階 AR 模型識別圖

(圖 4.2)二階的 AR 模型識別圖中看出估測的曲線非常近似實際的曲線。

估測較複雜的時變 ARX 模型參數， $n_a = 2$ ， $n_b = 5$ 如(圖 4.3)、(圖 4.4)

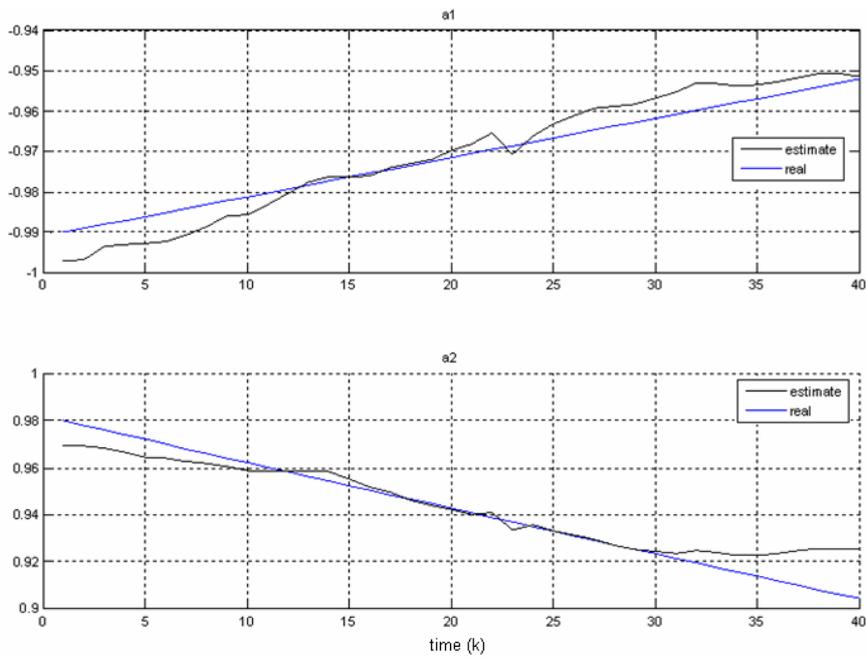


圖 4.3 二階 ARX 模型 AR 部分之識別結果圖

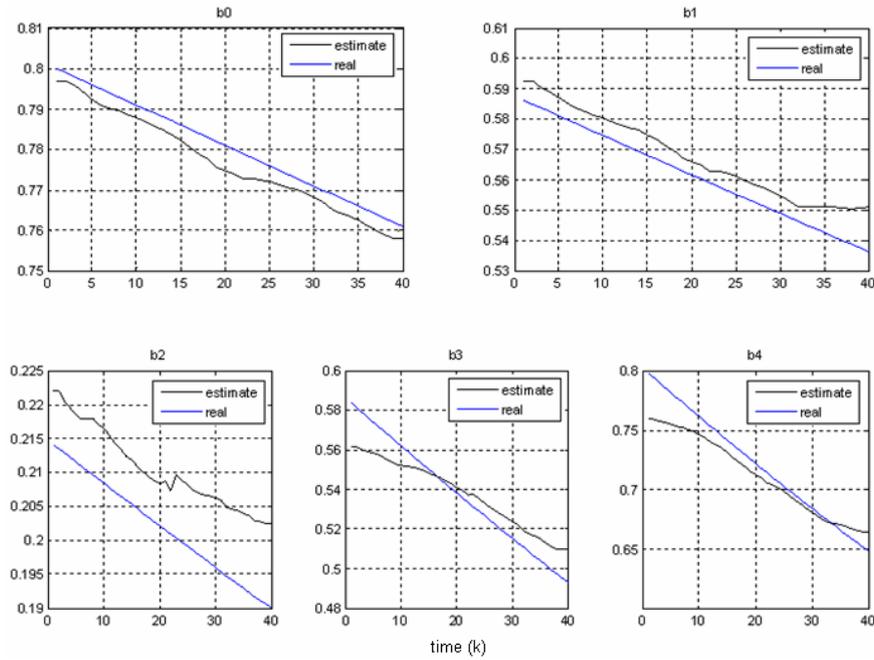


圖 4.4 二階 ARX 模型 MA 部分之識別結果圖

由(圖 4.3)和(圖 4.4)可看出時變二階 ARX 模型參數估測結果除 b_2 部分有些許誤差，其他參數皆可追到實際參數值。

三階的 AR 模型參數識別結果如(圖 4.5)

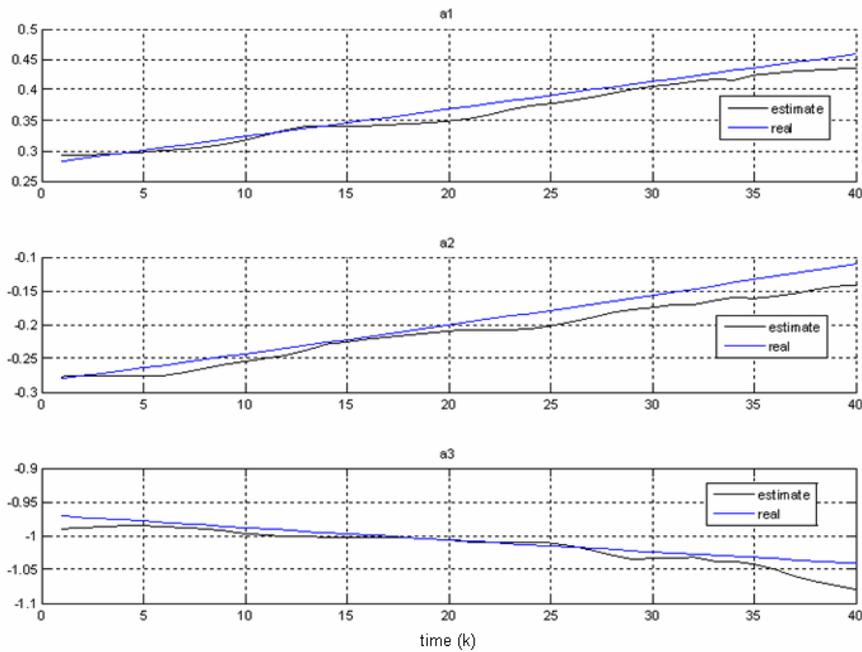


圖 4.5 三階的 AR 模型識別圖

三階 AR 估測結果曲線和二階 AR 情況一樣非常近似實際曲線。

估測時變 ARX 模型參數， $n_a = 3$ ， $n_b = 5$ 如(圖 4.6)、(圖 4.7)

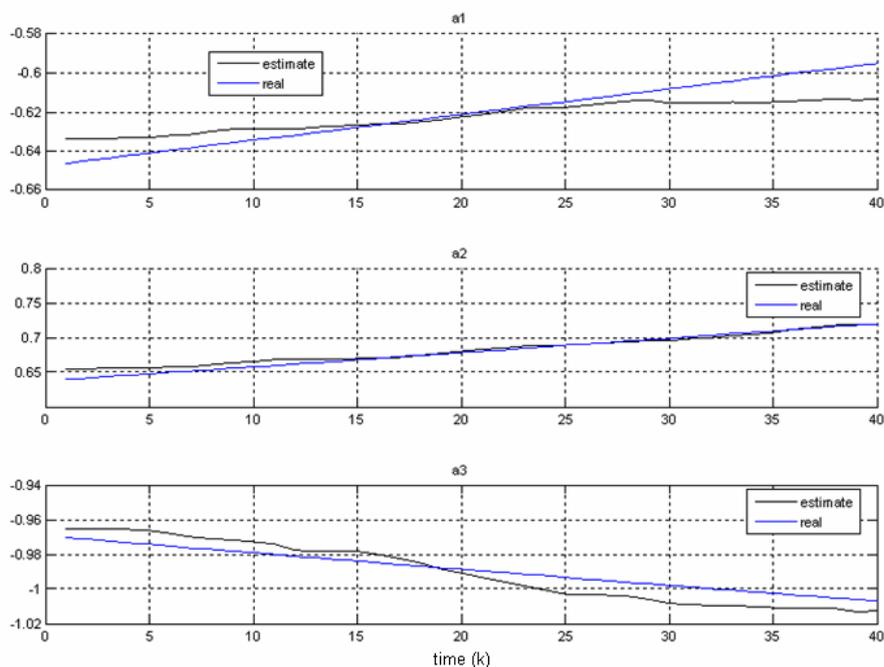


圖 4.6 三階 ARX 模型 AR 項之識別結果圖

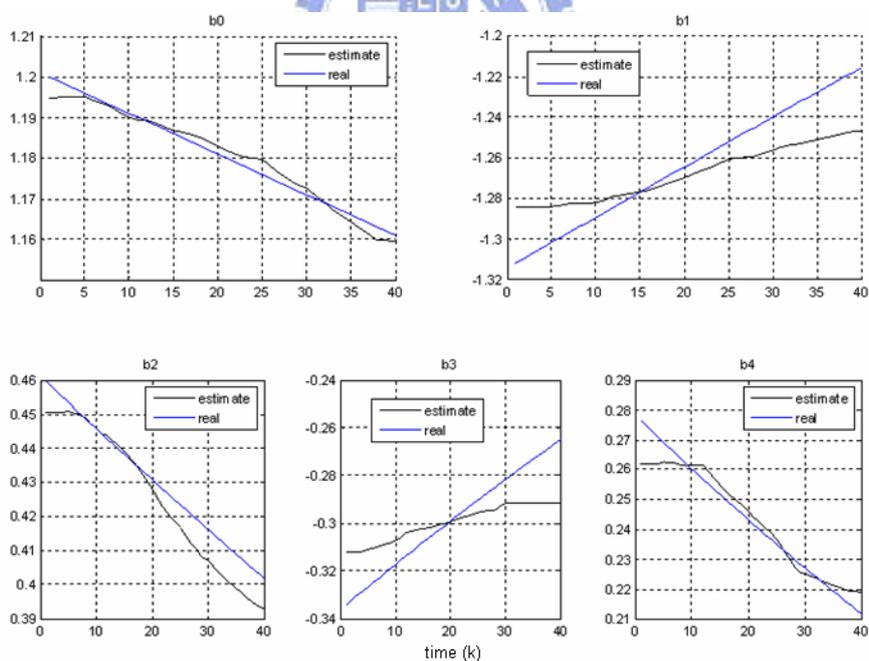


圖 4.7 三階 ARX 模型 MA 項之識別結果圖

估測三階 ARX 模型結果於 b_3 近似結果較差，識別效果會因為 AR 項係數的增加而影響。

四階的 AR 模型參數識別結果如(圖 4.8)

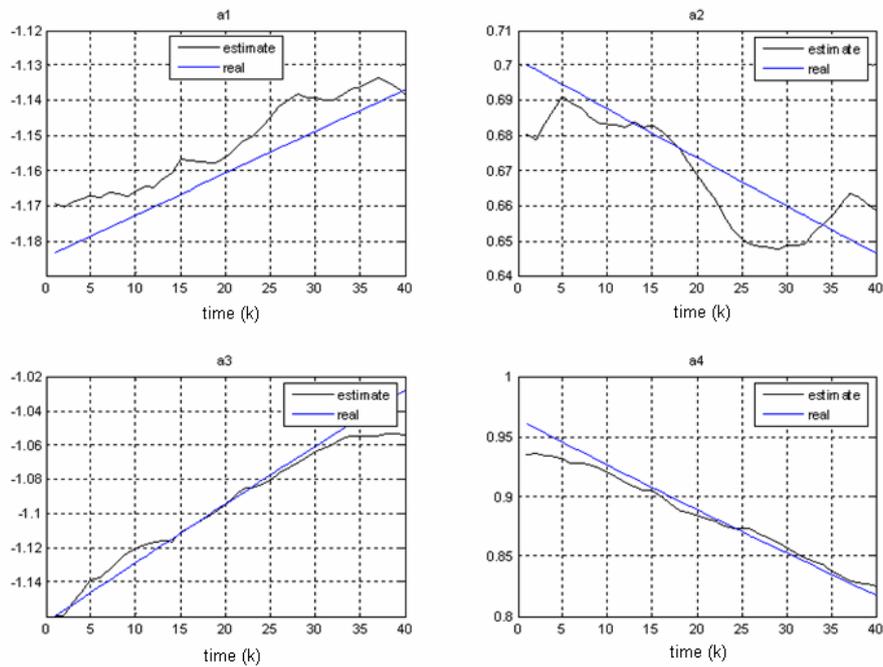


圖 4.8 四階的 AR 模型識別圖

由(圖 4.8)中看出四階 AR 模型的識別結果也不差，但 $a_{2,k}$ 的部分誤差較大。

(圖 4.9)、(圖 4.10)ARX 模型 $n_a = 4$ ， $n_b = 5$ 時參數識別

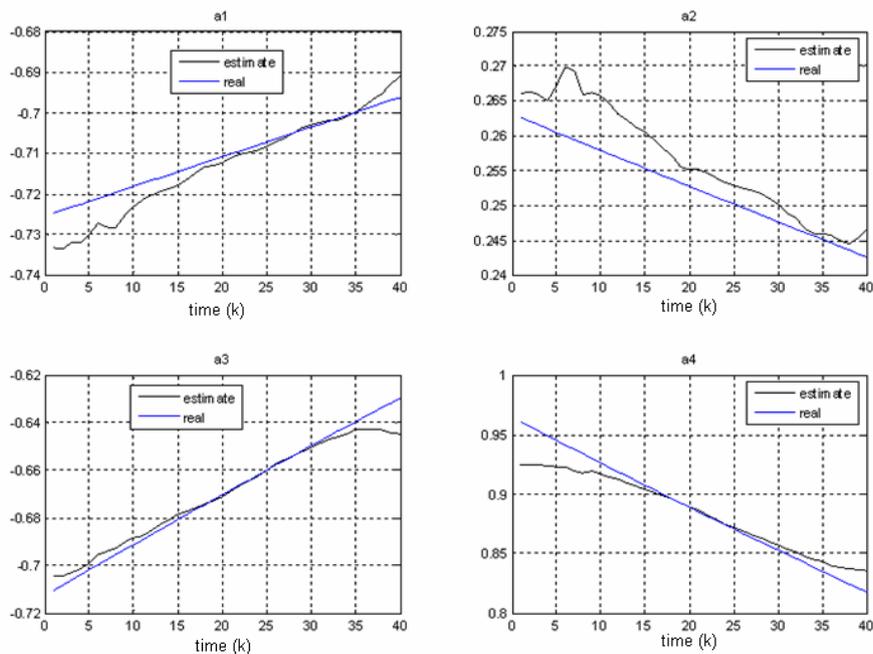


圖 4.9 四階 ARX 模型 AR 項之識別結果圖

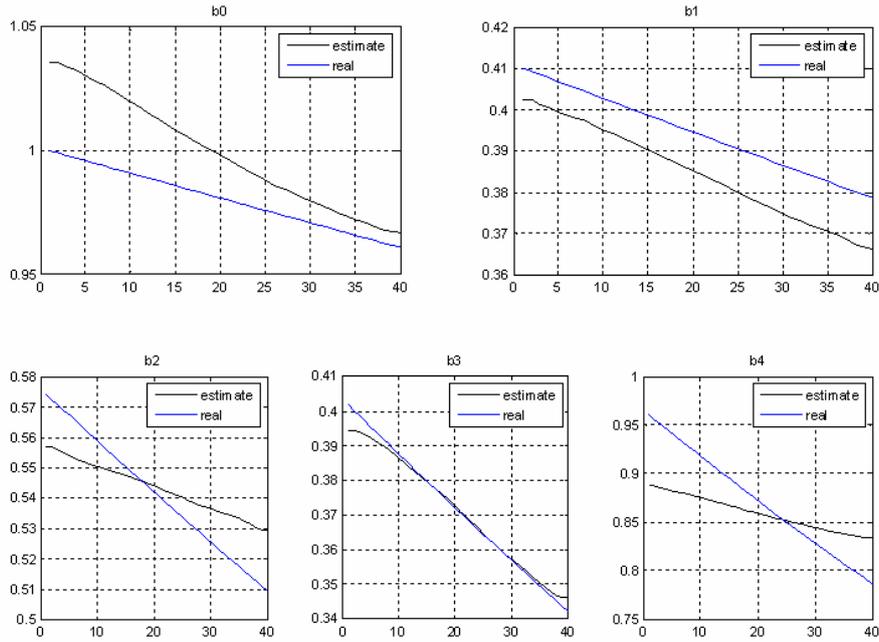


圖 4.10 四階 ARX 模型 MA 項之識別結果圖

(圖 4.9)、(圖 4.10)中可看出參數都可收斂到實際值附近，但近似的結果因變數變多而變差。

本章提到之時變參數估測技術，所假設參數的機率分佈是規律性的，不同變數 $\overline{a_{i,k}}$ 、 $\overline{b_{j,k}}$ 之間為獨立關係，演算法的推導不會因系統階數增加而變複雜，本文使用 MAP 法取得參數值，而第二章提到 Stochastic 法是隨機的取樣參數值，必需經過較多的取樣數才會近似實際值，本章節介紹之時變系統可以表示各時間點之變化，其缺點是變數量會增多，估測參數所花的時間會比非時變系統多許多倍。

模擬驗證中假設變異數 σ_w^2 不大於 10^{-6} ，模擬結果看出 AR、ARX 系統階數 2、3 階估測結果較好(估測值追到實際值，誤差量不大)，但 4 階估測結果較差($b_{2,k}$ 、 $b_{4,k}$ 只有近似實際值，沒有追到實際數值)，可知階數變高時此估測法誤差情況會較大，必須加入其他的條件讓估測法更準確(變異數隨時間改變、不同變數之間的相互影響)，估測誤差之變異數需要較多的點，本實驗所使用之估測點數不夠誤差較大。

本章發展的時變系統參數估測方法將應用於下一章的駕駛人模型辨識。第五章實驗部分首先使用非時變系統識別法估測模型參數，分析參數分佈情況和系統準確性，由模擬結果判斷非駕駛行為變化速度較快，非時變系統無法表示駕駛人行為，接著使用時變系統估測模型參數，由參數分佈與極點變化分析各時間點模型變化關係，以分析不同駕駛人間之行為模式。



第五章 實驗分析與討論

本文實驗分析之資料來源為加州高速公路道路駕駛所收集得，本章節採用非時變與時變參數估測法將駕駛行為模型化，分析駕駛行為和兩種方法之差異和優缺點。

5.1 資料收集與前處理

駕駛資料共 5 筆(依日期區分，共有 2005/3/9、2005/5/23、2005/5/26、2005/6/1_1、2005/6/1_2)長度各約 50 分鐘，將通過交流道、收費站等資料去除，可用資料長度為 40 分鐘，輸入資料為車輛相對道路中線之側向位置(lateral offset)，輸出為方向盤操縱角度(steering wheel angle)。

實驗用車輛配備有影像感測裝置，計算駕駛影像中道路分隔線與車輛相對位置可求得側向位置，使用的影像裝置是美國 AssistWare 公司的 SafeTRAC 系統，將鏡頭置於後照鏡上，裝置如(圖 5.1)所示，並於方向盤上裝電位計(potential meter)以收集方向盤操縱角度，每筆分析資料長度皆為一分鐘。(圖 5.1)之系統取樣頻率為 13.33Hz 一分鐘資料長度為 800 個取樣數(Samples)



圖 5.1 影像裝置(SafeTRAC 系統)

駕駛影像如(圖 5.2)所示



圖 5.2 駕駛影像

模型參數識別前使用式(5.1)之取樣平均法對實驗輸出入資料去除直流成份(駕駛開車時會習慣性偏離道路中線左或右幾十公分)，並使用 5 階的巴特沃斯濾波器(Butterworth filter)去除高頻雜訊(截波頻率為 1Hz)。

$$\begin{aligned} & \{u_{raw}(k), y_{raw}(k); k = 0, \dots, N-1\} \\ & u(k) = u_{raw}(k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{raw}(k) \\ & y(k) = y_{raw}(k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_{raw}(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

式(5.1)中 $u_{raw}(k), y_{raw}(k)$ 為實驗收集之資料， $u(k)$ 、 $y(k)$ 為去直流成份後之資料

(圖 5.3)是原始的模型輸出輸入資料圖，輸入為側向位置(lateral offset)，輸出為方向盤操縱角度(steering wheel angle)，資料長度為 800 個點(一分鐘之資料)。

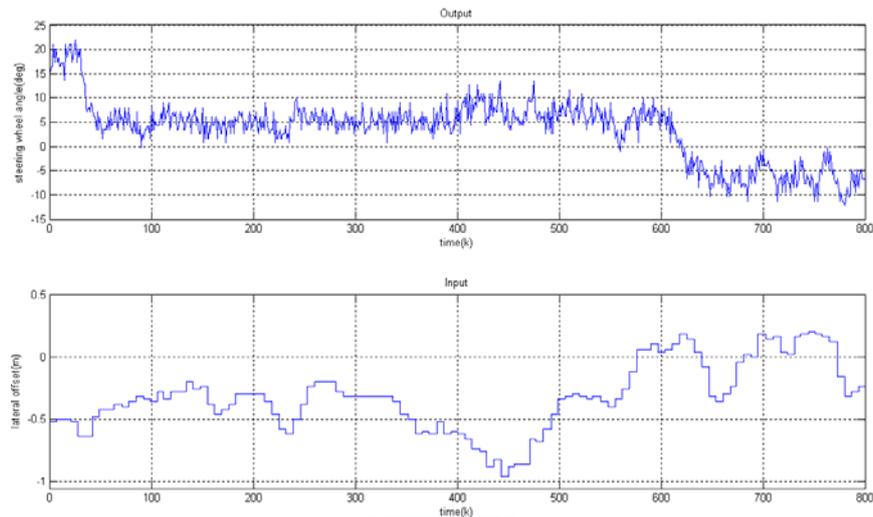


圖 5.3 道路駕駛輸出輸入資料

(圖 5.4)是去直流、雜訊後的模型輸出輸入資料圖

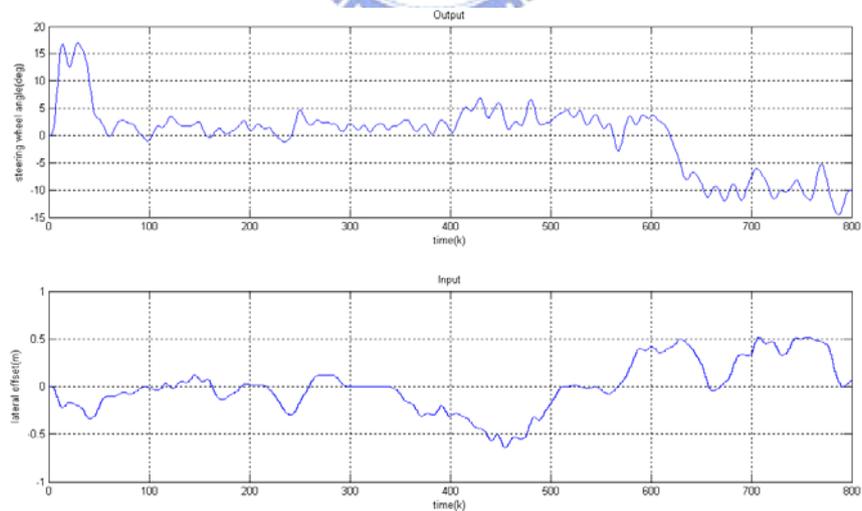


圖 5.4 去直流與濾波後道路駕駛輸出輸入資料

5.2 線性非時變系統模型參數估測

本節計算誤差所使用之程式碼見[23]

(圖 5.5)為 ARMAX、ARX 與 OE 模型識別誤差比較，圖中可看出 ARMAX 之誤差項較 ARX 與 OE 模型小，因此 LTI 模型採用線性非時變系統 ARMAX 模型。

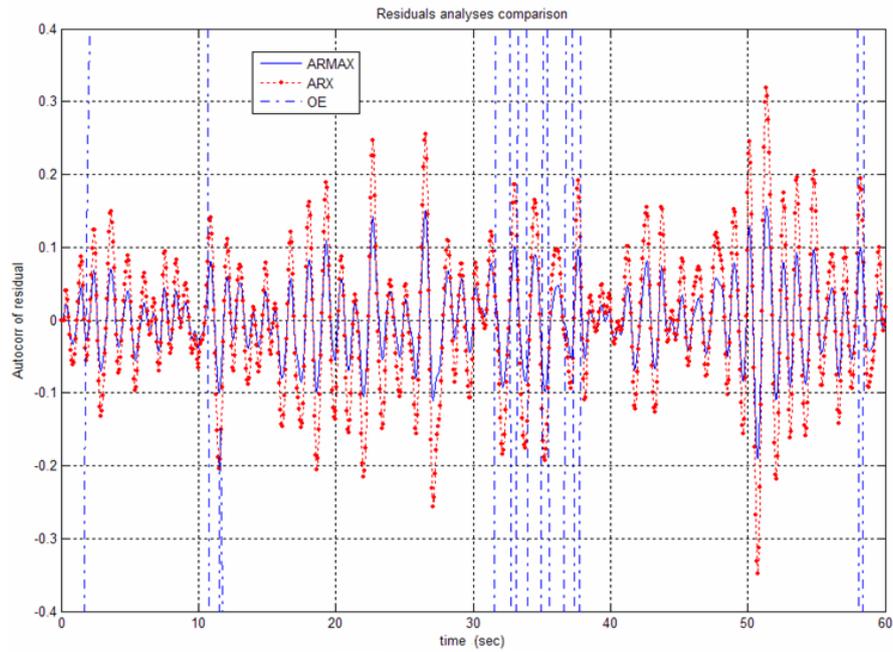


圖 5.5 不同模型之誤差比較

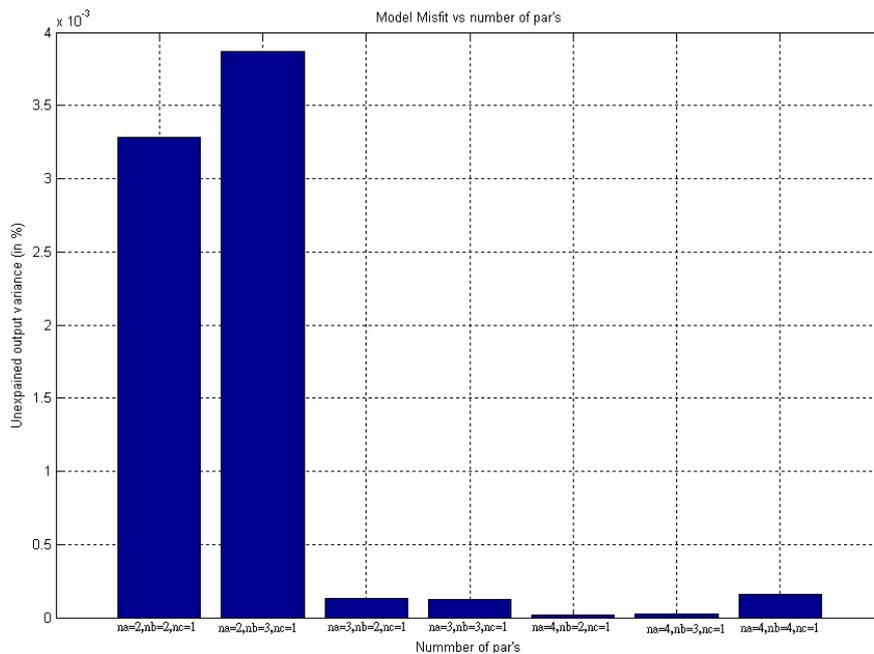


圖 5.6 ARMAX 各階數誤差值

系統模型化使用較低階數能使系統複雜度降低，將資料分為推測用資料和模型妥當性檢驗用資料(各一分鐘之資料)，判斷最終預測誤差數值(Final Prediction Error, FPE)以決定系統階數如(圖 5.6)。(圖 5.6)可看出較少的參數值中以 $n_a = 4, n_b = 2, n_c = 1$ 時損失函數值最低 (7×10^{-5})，選擇階數 $n_a = 4, n_b = 2, n_c = 1$ 可滿足低階且誤差數值小之要求。

5.3 線性非時變系統模型識別

本節之實驗一筆資料約 40 分鐘左右之長度，將 40 分之資料分為 40 組一分鐘(800 點)之資料識別得到模型，模型識別方法使用 MATLAB 內建之非時變識別法，MATLAB code 見[23]

5.3.1 2005/3/9 線性非時變系統識別結果分析

此資料為 2005/3/9 之駕駛資料，preview 設定為 40m (preview 之意義見第二章)，採用 $n_a = 4, n_b = 2, n_c = 1$ 之 ARMAX 模型

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - a_3 y_{k-3} - a_4 y_{k-4} + b_0 u_{k-1} + b_1 u_{k-2} + \omega(k) + c_1 \omega(k-1)$$

ARMAX 模型參數分佈如(圖 5.7) ，極零點、直流增益如(圖 5.8)所示

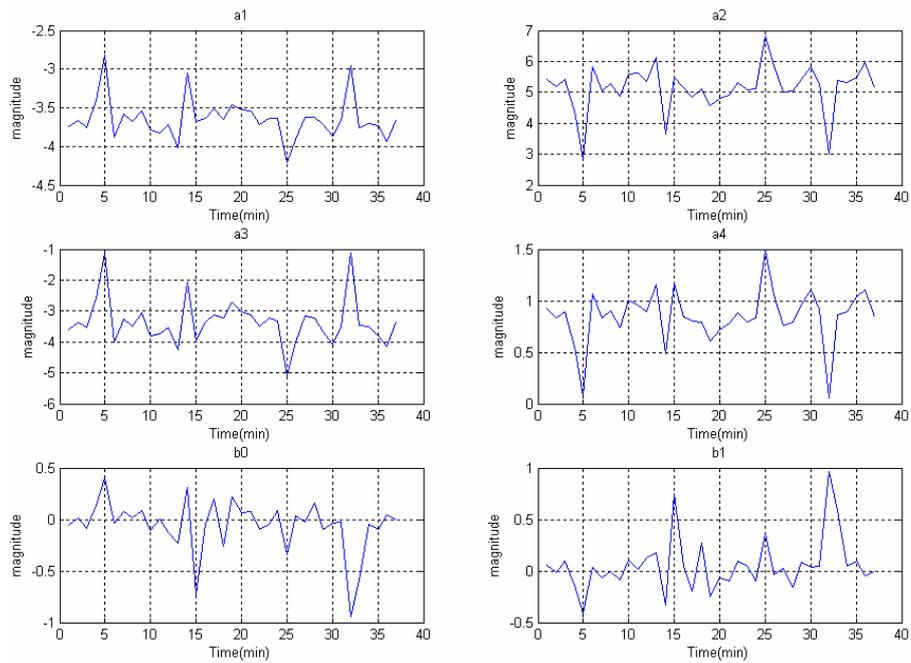


圖 5.7 2005/3/9 駕駛模型參數分佈

表 5.1 2005/3/9 駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.6441	5.1489	-3.3523	0.84868	-0.056933	0.055038
標準差	0.06891	0.56084	0.56102	0.069062	0.065654	0.069684

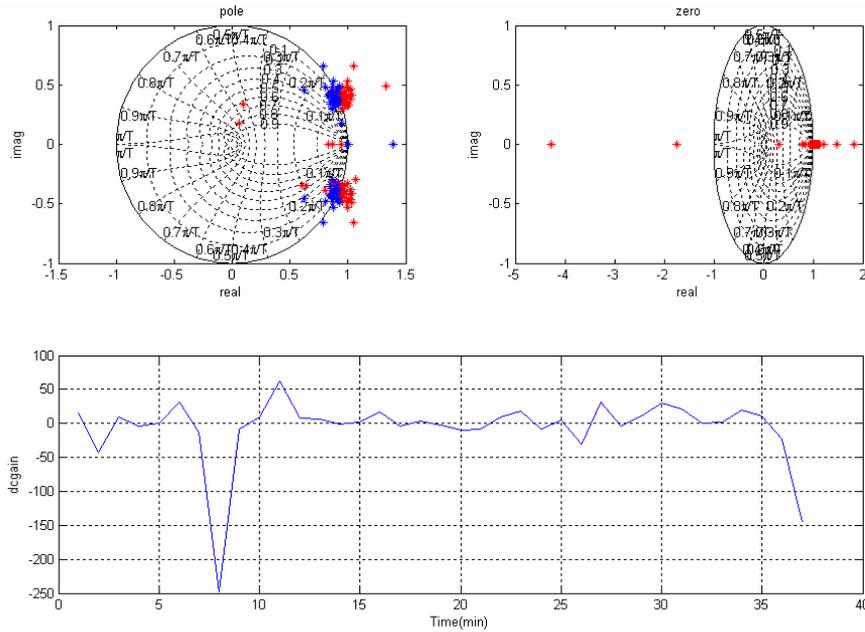


圖 5.8 2005/3/9 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖

(圖 5.7)表示各分鐘時模型參數值大小，其中 b_0 、 b_1 為不規則正負變化，(圖 5.8)大部分時間點至少一極點落於單位圓外，表示系統為不穩定，極點與零點分佈散表示每分鐘駕駛之行為差異性大，直流增益變化極大且正負變化，代表駕駛人於不同時間時相同的側向位置會有不同駕駛反應。接著以所得之模型參數算出輸出模擬曲線，觀察符合度判斷所得到之模型是否準確。符合度的算法如下

$$\text{符合度} = \left[1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \mu)^2}} \right] \times 100\% \quad (5.2)$$

其中 $\mu = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_k}{N}$ 為平均值，式(5.2)中 y_k 為量測之輸出值， \hat{y}_k 為模擬輸出值。

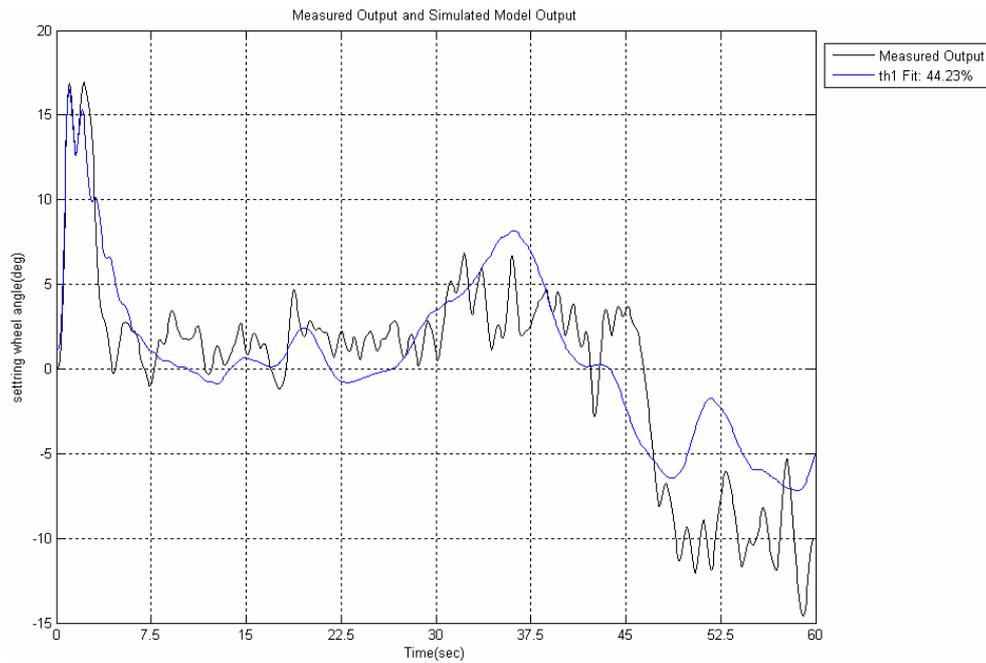


圖 5.9 2005/3/9 四階 ARMAX 模型輸出模擬比對結果

上圖中可看出符合度低，2005/3/9 識別所得之模型 FPE 皆低(約 $10^{-5} \sim 10^{-4}$)，但所識別之結果並沒有達到模型化之要求。因為系統為不穩定，無法觀察每分鐘之增益邊際(Gain margin)、相位邊際(Phase margin)，與長時間駕駛對駕駛之影響分析;接著觀察其他時間所識別之模型所呈現之特性，並和 2005/3/9 所得之特性比較。

5.3.2 2005/5/23 線性非時變系統識別結果分析

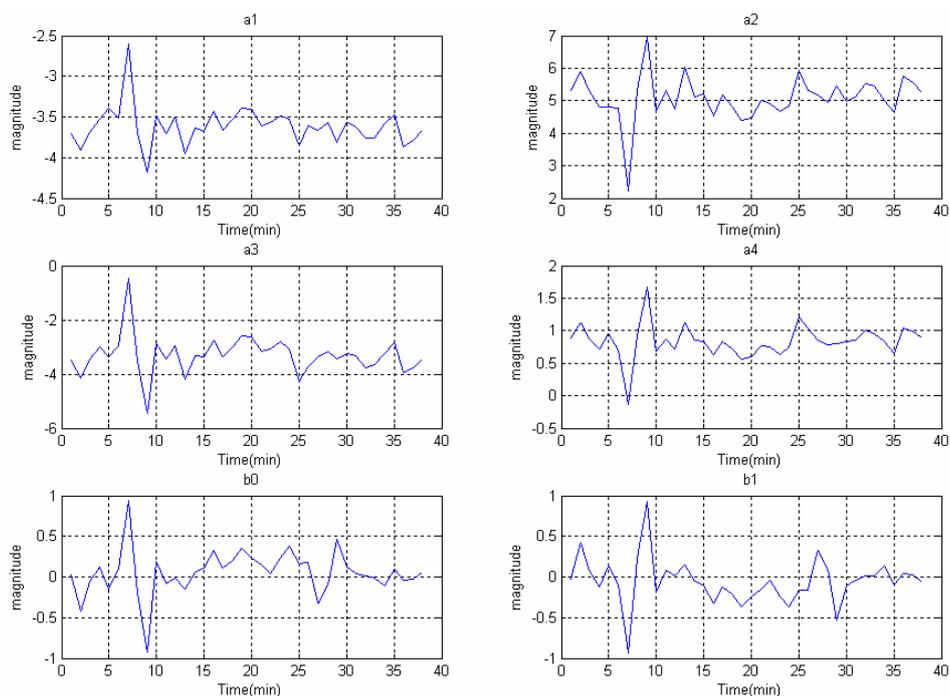


圖 5.10 2005/5/23 駕駛模型參數分佈

表 5.2 2005/5/23 駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.616	5.091	-3.3104	0.83674	0.05385	-0.055751
標準差	0.05555	0.46782	0.49646	0.065263	0.07804	0.080522

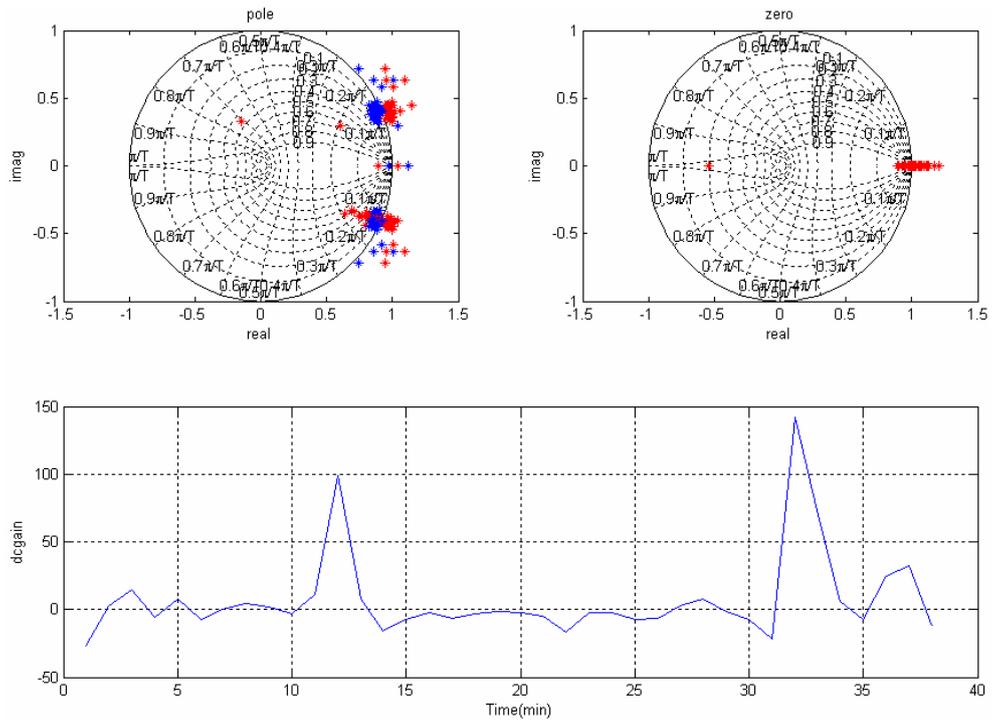


圖 5.11 2005/5/23 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖

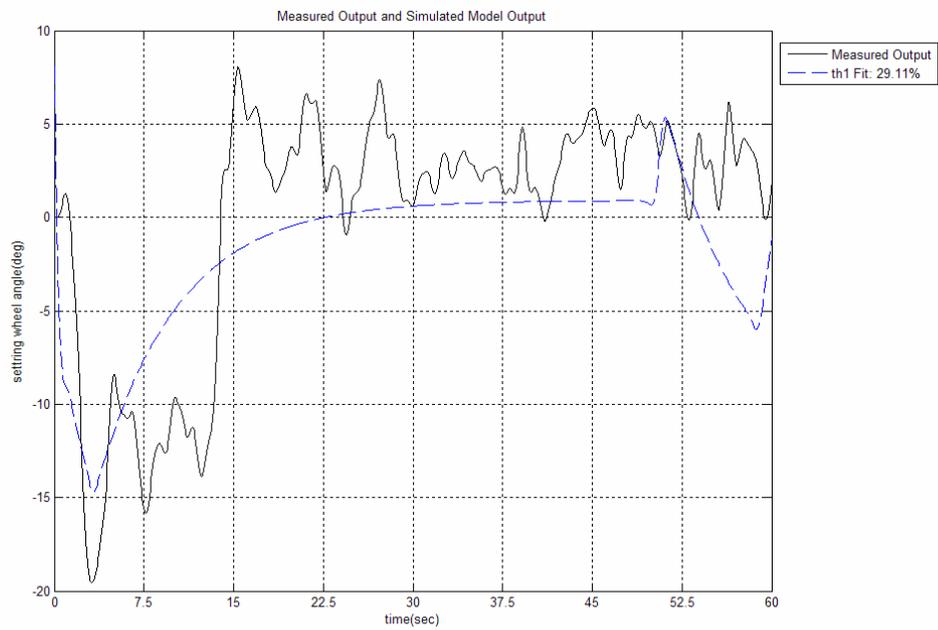


圖 5.12 2005/5/23 四階 ARMAX 模型模擬結果比對

5.3.3 2005/5/26 線性非時變系統識別結果分析

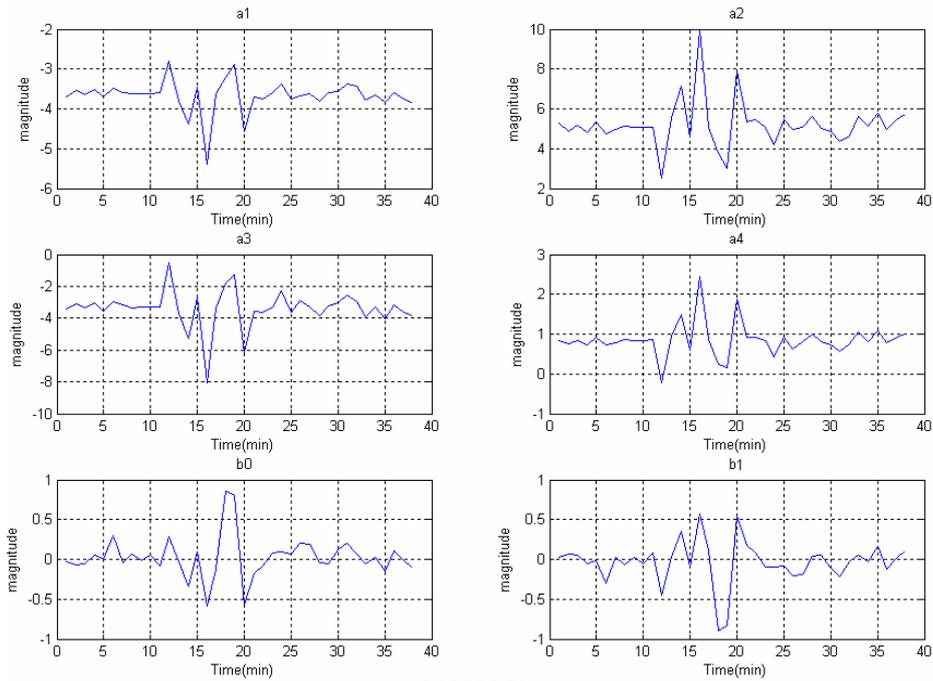


圖 5.13 2005/5/26 駕駛人模型參數分佈

表 5.3 2005/5/26 駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.6699	5.2048	-3.385	0.85069	0.02909	-0.036214
標準差	0.17265	1.4147	1.4348	0.18034	0.07005	0.075642

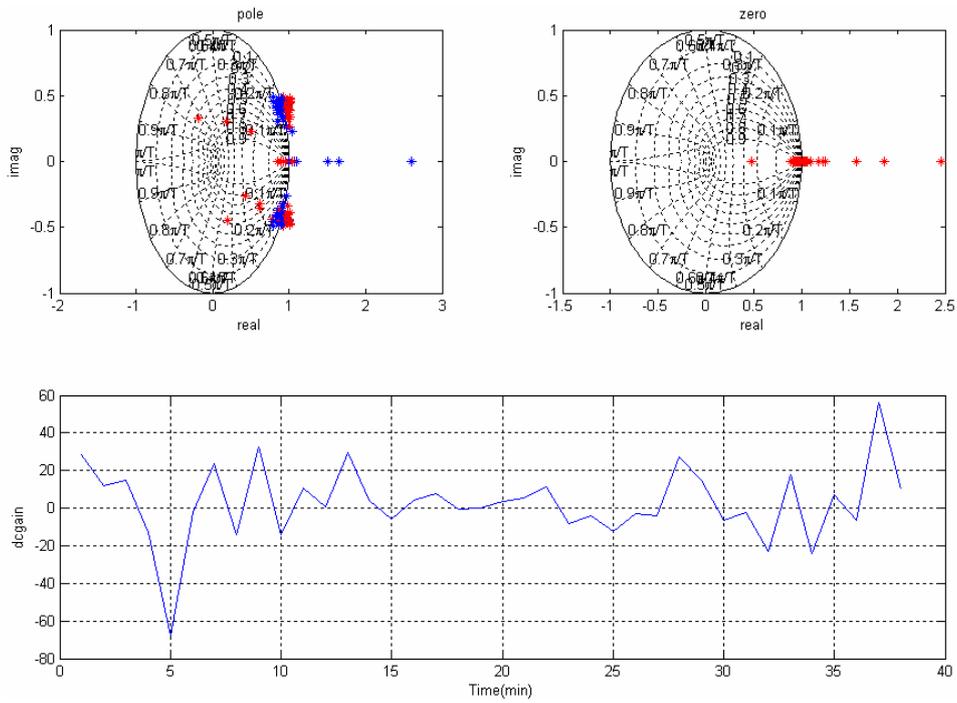


圖 5.14 2005/5/26 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖

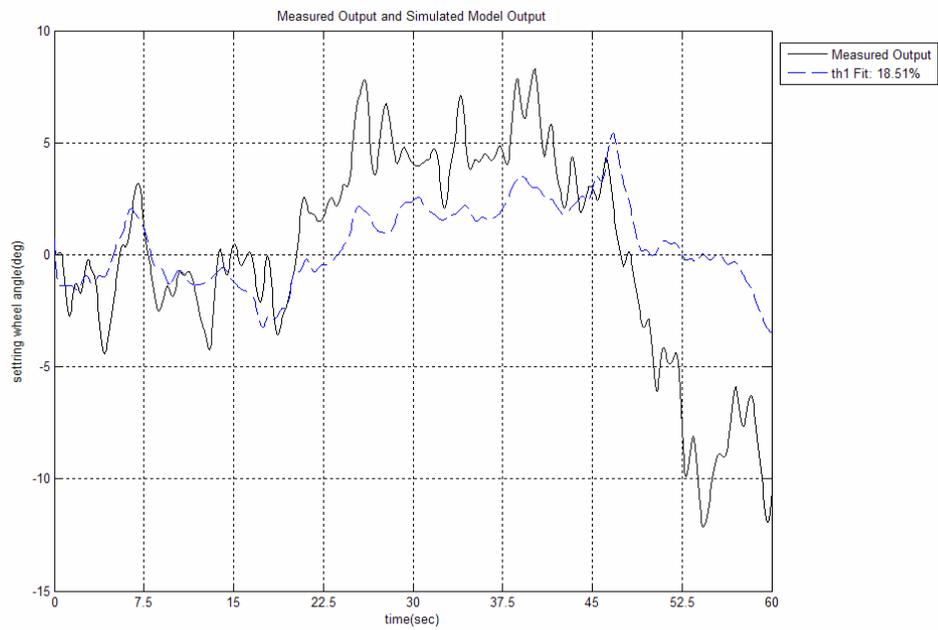


圖 5.15 2005/5/26 四階 ARMAX 模型模擬結果比對

5.3.4 2005/6/3_1 線性非時變系統識別結果分析

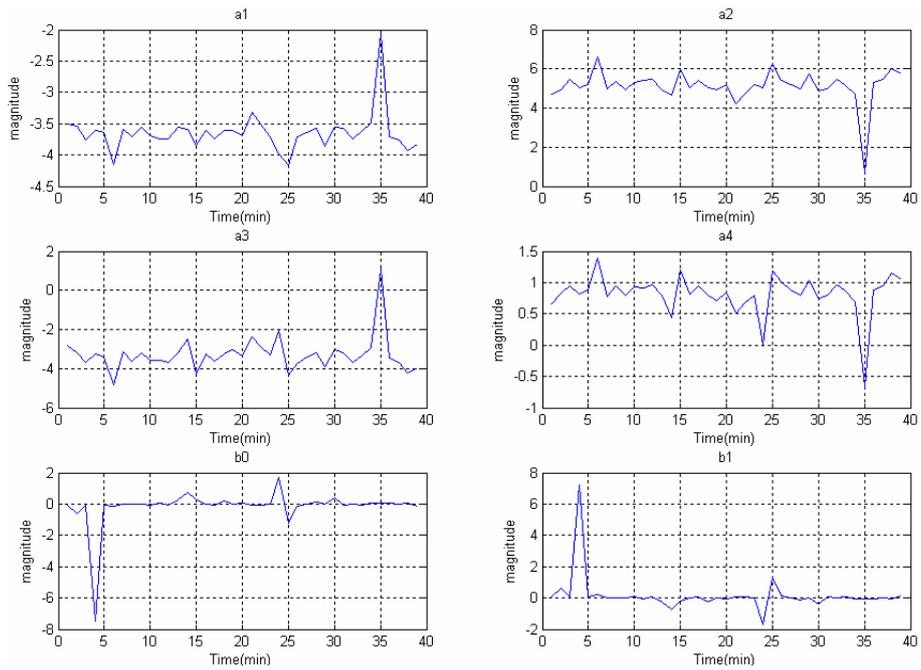


圖 5.16 2005/6/3_1 駕駛人模型參數分佈

表 5.4 2005/6/3_1 駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.6458	5.1199	-3.2839	0.81074	-0.1742	0.16744
標準差	0.096559	0.75158	0.79138	0.11061	1.6026	1.4914

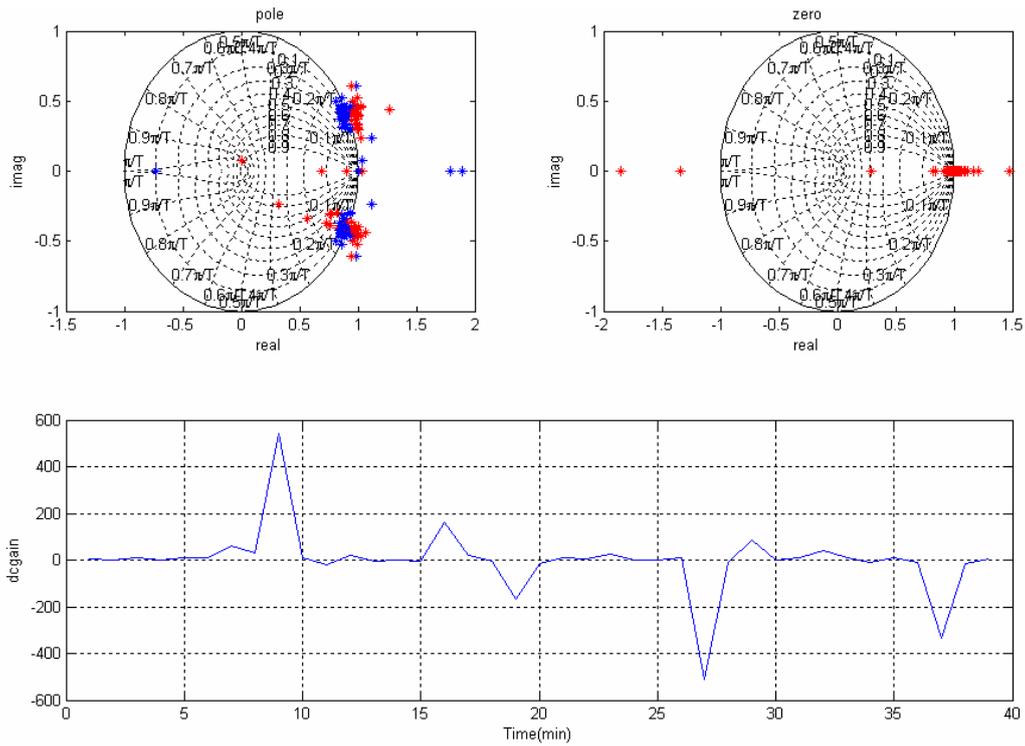


圖 5.17 2005/6/3_1 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖

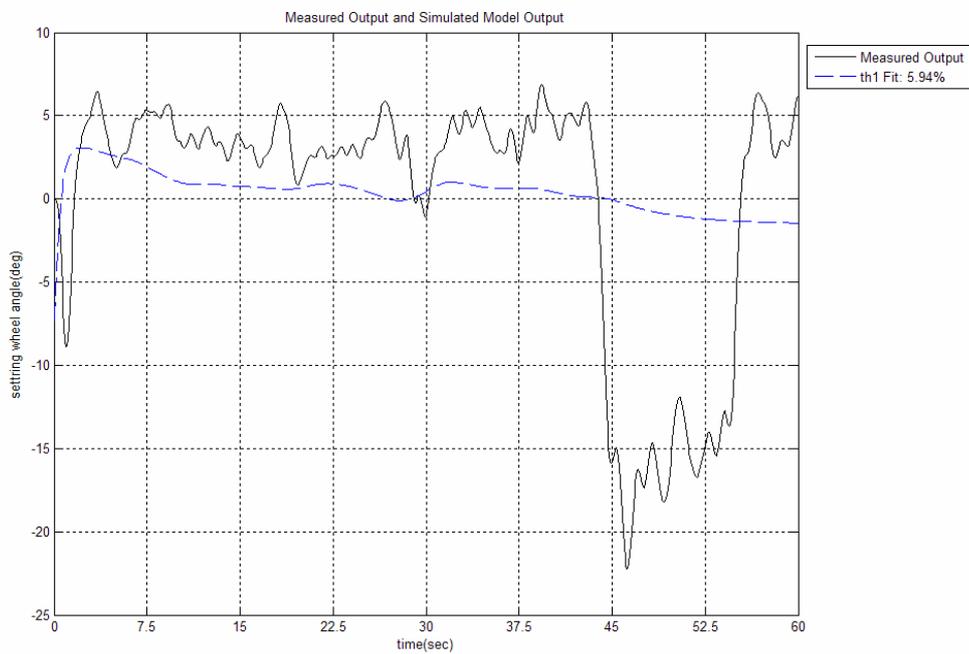


圖 5.18 2005/6/3_1 四階 ARMAX 模型模擬結果比對

5.3.5 2005/6/3_2 線性非時變系統識別結果分析

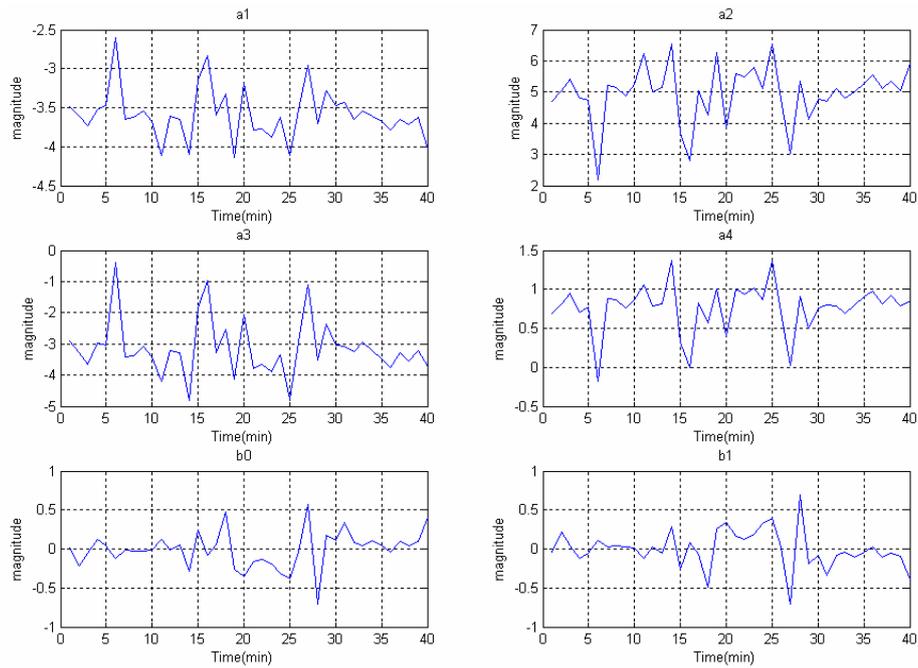


圖 5.19 2005/6/3_2 駕駛人模型參數分佈

表 5.5 2005/6/3_2 駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.5896	4.978	-3.1603	0.77313	-0.006018	0.000753
標準差	0.10136	0.80263	0.78174	0.093962	0.04983	0.054454

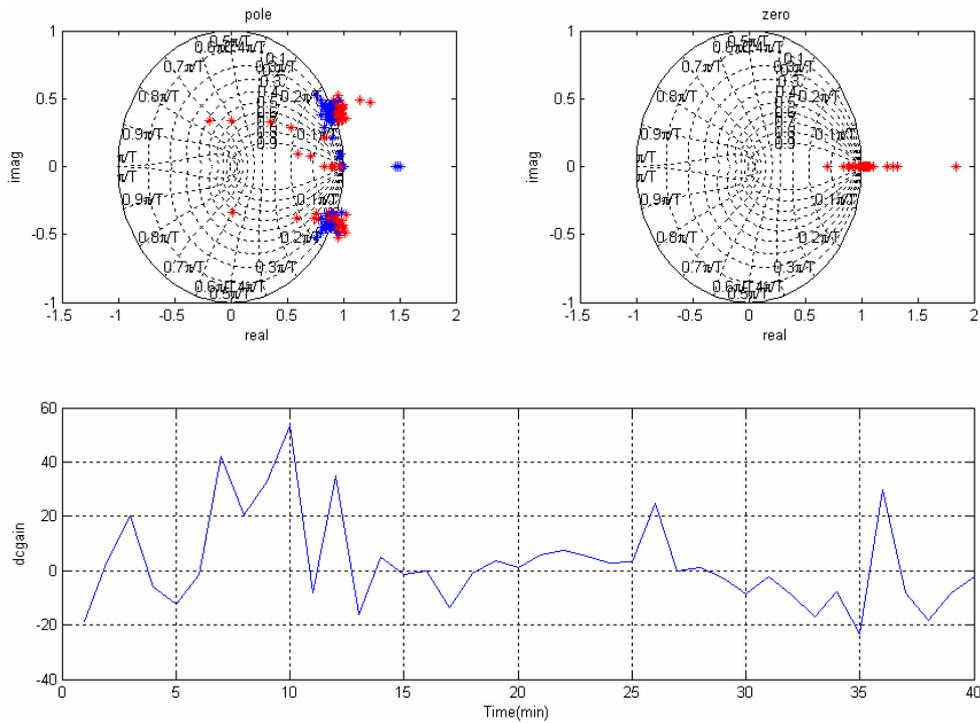


圖 5.20 2005/6/3_2 駕駛人模型極點零點、直流增益分佈圖

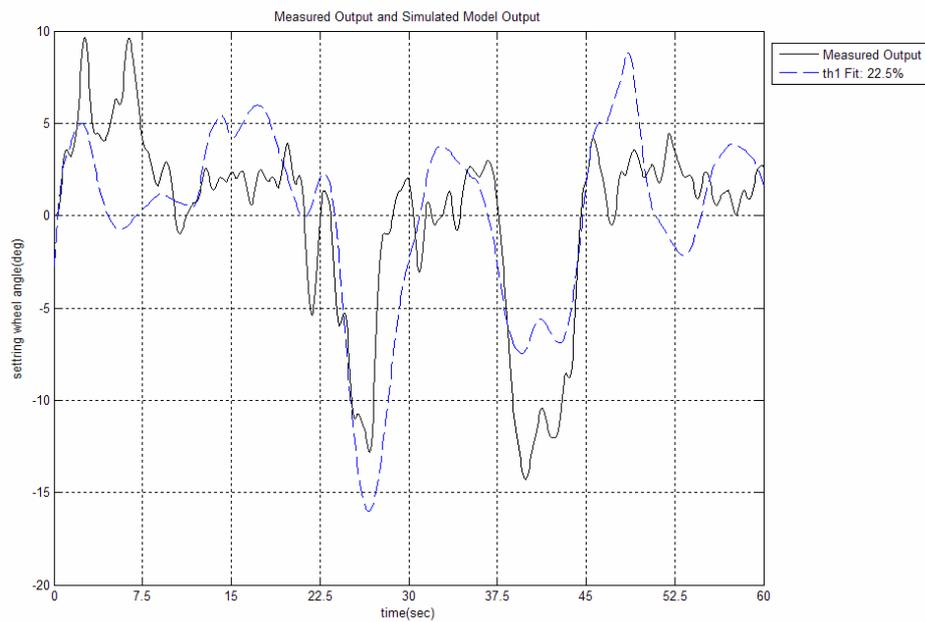


圖 5.21 2005/6/3_2 四階 ARMAX 模型模擬結果比對

(圖 5.21)是將五筆模型化之參數分佈標準化之結果。

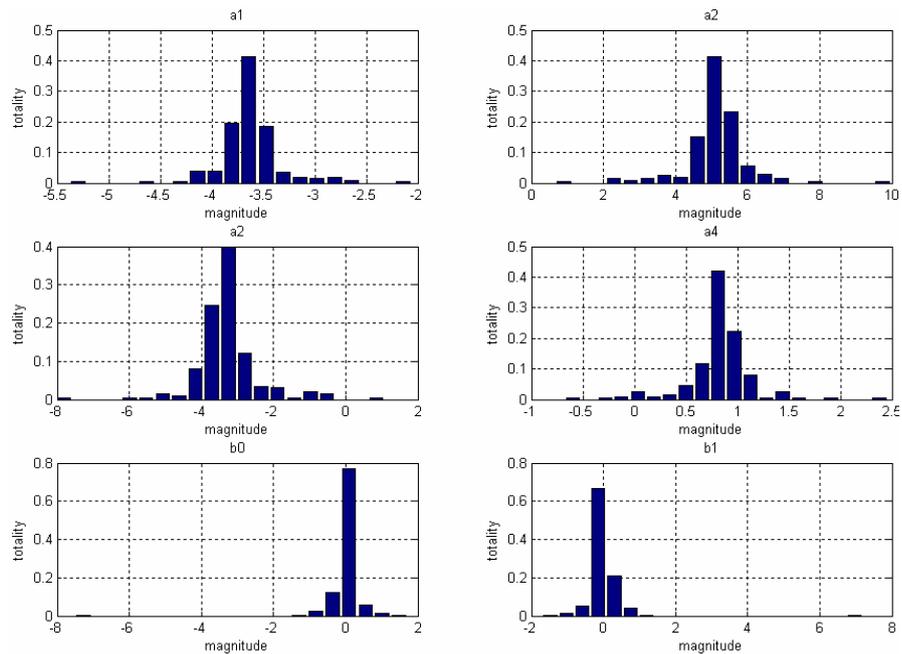


圖 5.22 所有時間參數分佈標準化

表 5.6 所有時間駕駛模型參數平均值與標準差

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_0	b_1
平均值	-3.6314	5.1037	-3.2932	0.82207	-0.030127	0.025505
標準差	0.097801	0.78872	0.80141	0.10231	0.36692	0.34866

由其他時間點之參數分佈和(圖 5.22)可看出所有時間參數之分佈和單一時間一樣， a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 分佈較為規律，而 b_0 、 b_1 以零附近為中心正負不規律分佈(正負變化表示系統相位反相)，本小節敘述之特性(駕駛之相位每分鐘皆變化、駕駛為不穩定系統)並不符合合理之駕駛行為表示，且參數不規律變化和系統不穩定之原因無法以非時變系統模型表示出(無法知道各時間駕駛行為之變化、影響駕駛行為之因素);因此可假設駕駛行為隨著時間而改變，以時變系統模型可得較佳之響應，下節介紹時變系統參數估測法求得駕駛模型之研究。

5.4 線性時變系統模型識別

本節分析資料與(5.3)節相同一組資料為一分鐘(800 點)，時變系統模型結構如式(5.3)之 ARX 模型

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_0 u_{k-1} + b_1 u_{k-2} + b_2 u_{k-3} + b_3 u_{k-4} + v_k \quad (5.3)$$

選擇低階模型並要求能達到較高的模擬輸出符合度(80%以上)，於 $A(q)$ 為

2 階 $B(q)$ 為 4 階輸入延遲 1 步時，即可得較佳之模擬輸出符合度

($B(q)$ 為 2、3 階之符合度較 4 階時低)

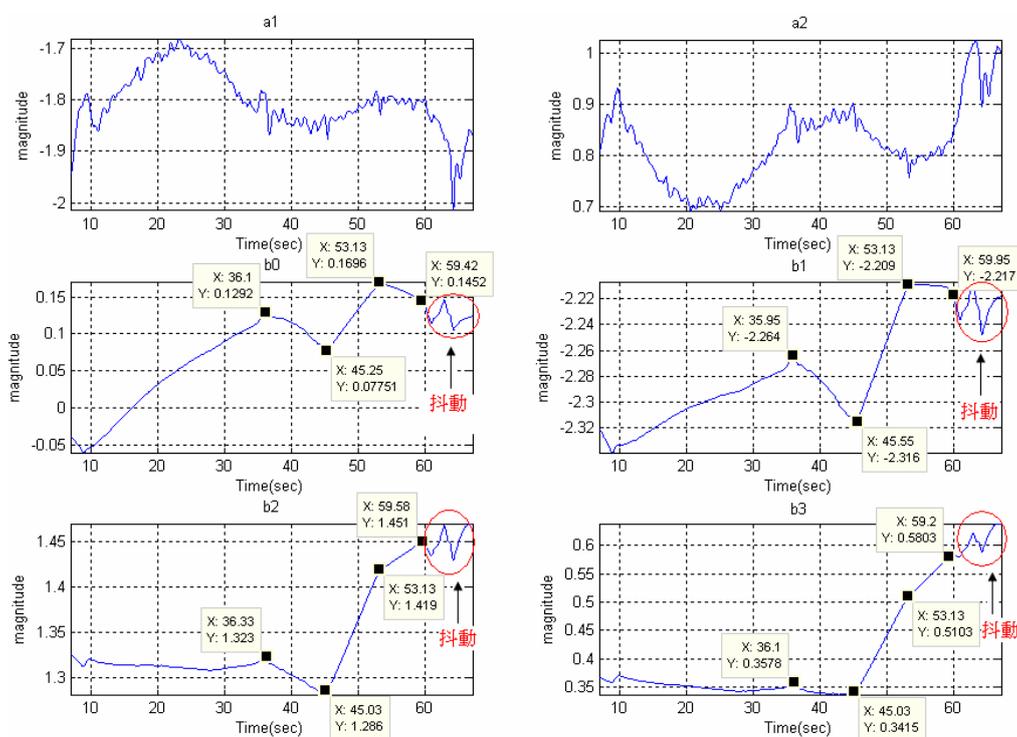


圖 5.23 2005/3/9 11:44:07~11:45:07 時變模型參數分佈

$B(q)$ 參數變化斜率轉折點發生於(36s、45s、53s、59s)，觀察駕駛影像得知道路曲率變動(車輛由直路進入彎路或車輛由彎路進入直路)於 36s、53s。45s 轉折原因無法由影像中確定，60s~67s 處出現明顯之參數抖動。(由 $A(q)$ 之參數變化不容易分辨出駕駛行為之改變，相對的 $B(q)$ 變化極為容易看出駕駛行為之改變)。

使用時變參數估測法計算出各時間點參數，並觀察參數變化和路況(道路曲率、鄰近車輛)之關係，時變模型模擬結果可達到較好之符合度，如(圖 5.23)之參數輸出模擬結果可達到 95%之模擬輸出符合度(圖 5.24)。

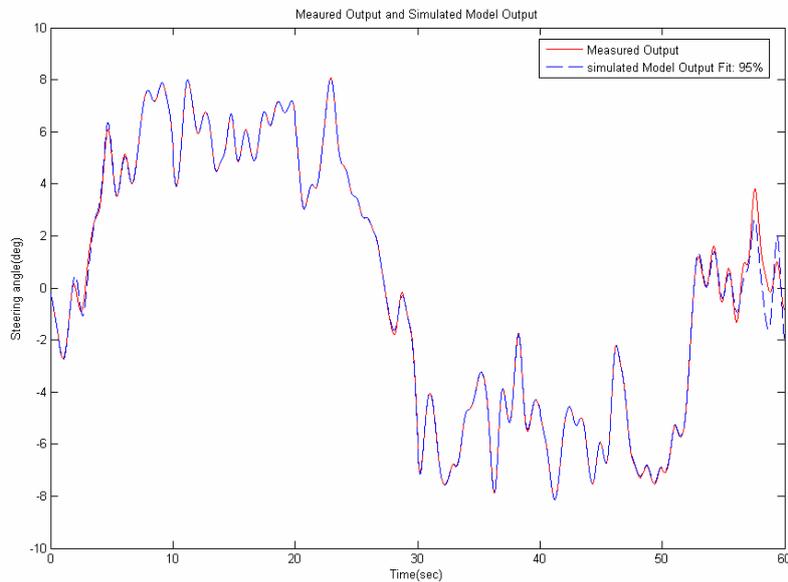


圖 5.24 2005/3/9 11:44:07~11:45:07 模擬輸出曲線符合度

(圖 5.24)可看出時變模型模擬輸出結果曲線和實際輸出曲線符合度高(95%)，與非時變模型所得模擬輸出結果符合度比較(非時變模型模擬輸出結果符合性均低於 50%)，得知時變模型比非時變模型所得模擬輸出符合度高許多(時變模型最高符合度可達 99.5%)。

由(圖 5.23) $B(q)$ 參數變化可知道駕駛人於不同道路曲率會有不同之控制反應，影響駕駛行為的因素除道路曲率不同外，鄰近車輛也會造成一定影響，如(圖 5.25)

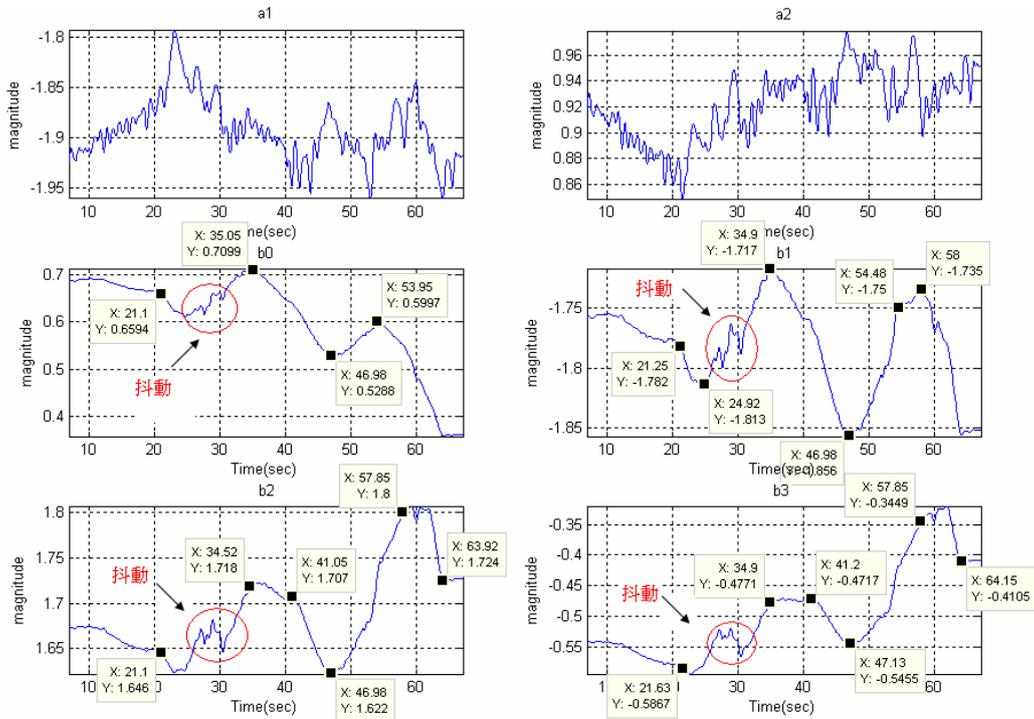


圖 5.25 2005/3/9 12:08:07~12:09:07 時變模型參數分佈

(圖 5.25) $B(q)$ 參數變化斜率轉折點發生於(21s、35s、41s、47s、54s、57s、64s);道路曲率改變於 21s、41s、60s;47s~56s 時左側車道為一部小客車由後方超越，58s~63s 時為本車超越右側車道之小客車，上述兩段小客車通過之時間中道路曲率不變但有轉折點產生，可推測車輛經過會影響駕駛之行為，25s~31s 處有一抖動現象，35s 處之轉折原因未知。

(圖 5.26)為 2005/3/9 12:08:07~12:09:07 之模擬輸出比對圖。

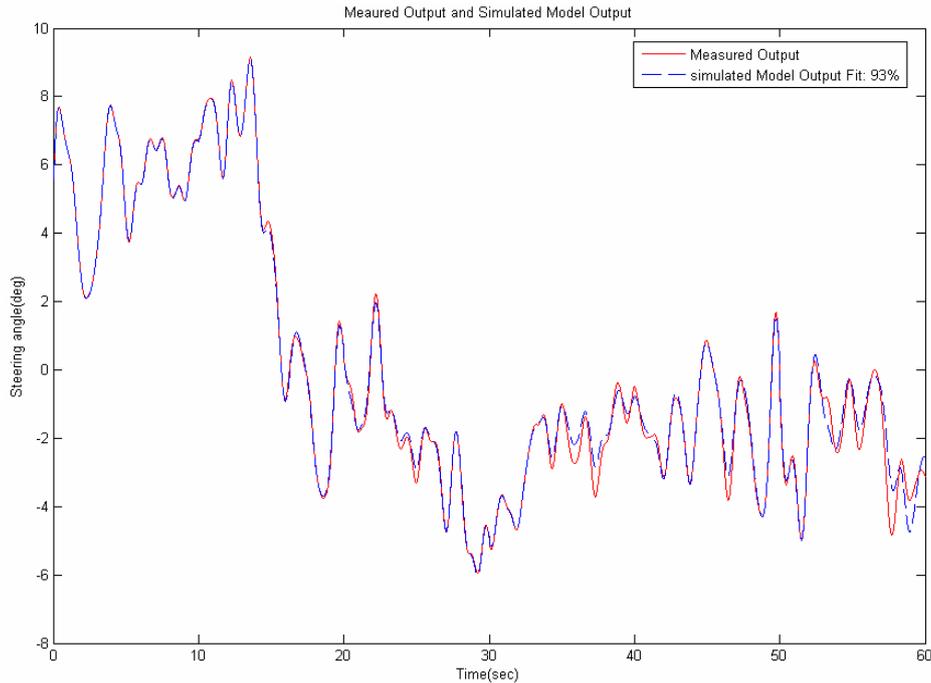


圖 5.26 2005/3/9 12:08:07~12:09:07 模擬輸出結果比對

上圖中符合度和(圖 5.24)一樣(>90%)，可知時變模型於不同之路況皆可達到不錯之模擬輸出，其他時間(共 5 天各 40 分鐘)時變參數分佈也可看出各時間 $B(q)$ 與路況之變化關係，將這 5 天之時變參數 $B(q)$ 分佈變化情況與路況關係統計建立表格(5.7~5.10)。

表(5.7~5.10)之斜率 s 單位為 $B(q)$ 各參數每秒變化千分之幾($10^{-3}/\text{sec}$) (取絕對值為判斷參數變化速度快慢)，本車輛和鄰近車輛速度差距大時為(速差 $>3\text{m}/\text{sec}$)、速度差距小時為(速差 $<3\text{m}/\text{sec}$)，以小客車為例，當速度差距大時 $2\text{s}\sim 3\text{s}$ 即可通過 3 個車身(經觀察鄰近車輛與本車輛距兩車身內駕駛行為影響較明顯)，速度差距小則會車需要更長時間(由表 5.7~5.10 可知影響比例較高)。

表(5.7~5.10)表示特定路況下(如行駛於直路上鄰近車道有一車速差小之小客車通過)各種參數變化情況(抖動、 $|s|<1$ 、 $1<|s|<100$ 、 $100<|s|$ 其中任一種)出現之機率，以同一路況下所有參數變化情況的數量總合為分母，同路況下特定參數變化情況(如 $|s|<1$ 時)之數量總合為分子所計算出之比例。

表 5.7 各路況下 b_0 各種參數變化情況之機率

路況	鄰近車輛	速差	無影響	抖動	$ s <1$	$1< s <100$	$100< s $
直	無			40%	6%	42%	12%
彎	無			0%	13%	78%	9%
直	小客車	大	74%	0%	0%	23%	3%
直	小客車	小	4%	9%	9%	69%	9%
彎	小客車	大	93%	0%	0%	7%	0%
彎	小客車	小	11%	0%	16%	62%	11%
直	大客車	大	84%	0%	0%	16%	0%
直	大客車	小	11%	0%	11%	71%	7%
彎	大客車	大	94%	0%	0%	6%	0%
彎	大客車	小	3%	0%	10%	87%	0%

表 5.8 各路況下 b_1 各種參數變化情況之機率

路況	鄰近車輛	速差	無影響	抖動	$ s < 1$	$1 < s < 100$	$100 < s $
直	無			40%	12%	42%	6%
彎	無			0%	13%	78%	9%
直	小客車	大	74%	0%	3%	20%	3%
直	小客車	小	4%	9%	4%	74%	9%
彎	小客車	大	93%	0%	0%	7%	0%
彎	小客車	小	11%	0%	0%	73%	16%
直	大客車	大	84%	0%	0%	16%	0%
直	大客車	小	11%	0%	11%	71%	7%
彎	大客車	大	94%	0%	0%	6%	0%
彎	大客車	小	3%	0%	7%	90%	0%

表 5.9 各路況下 b_2 各種參數變化情況之機率

路況	鄰近車輛	速差	無影響	抖動	$ s < 1$	$1 < s < 100$	$100 < s $
直	無			40%	6%	39%	15%
彎	無			0%	13%	83%	4%
直	小客車	大	74%	0%	3%	20%	3%
直	小客車	小	4%	9%	13%	70%	4%
彎	小客車	大	93%	0%	0%	7%	0%
彎	小客車	小	11%	0%	0%	67%	22%
直	大客車	大	84%	0%	0%	16%	0%
直	大客車	小	11%	0%	4%	81%	4%

彎	大客車	大	94%	0%	0%	6%	0%
彎	大客車	小	3%	0%	10%	87%	0%

表 5.10 各路況下 b_3 各種參數變化情況之機率

路況	鄰近車輛	速 差	無影 響	抖動	$ s < 1$	$1 < s < 100$	$100 < s $
直	無			40%	6%	42%	12%
彎	無			0%	9%	77%	14%
直	小客車	大	74%	0%	3%	20%	3%
直	小客車	小	4%	9%	13%	70%	4%
彎	小客車	大	93%	0%	0%	7%	0%
彎	小客車	小	11%	0%	0%	78%	11%
直	大客車	大	84%	0%	0%	16%	0%
直	大客車	小	11%	0%	15%	70%	4%
彎	大客車	大	94%	0%	0%	6%	0%
彎	大客車	小	3%	0%	10%	87%	0%

表(5.7~5.10)可看出直路上鄰近車道無車輛時，參數 $B(q)$ 發生抖動機率最高(40%)，直路上鄰近車道有車輛經過時 $B(q)$ 發生抖動比例較低(9%)，車輛於彎路行駛時 $B(q)$ 並不會發生抖動現象；本車輛與鄰近車道車輛速度差距大時駕駛行為受影響比例較低(26%以下)，兩車輛之速度差距小時駕駛行為受影響機率較高(89%~97%)。由(圖 5.23)、(圖 5.25)和表(5.7~5.10)得知時變參數可由觀察各時間之參數變化情況，得到各時間之駕駛行為變化和影響駕駛行為之因素，且能達到良好之模擬輸出結果，這些現象與優點非時變系統模型並無法得到，更確定使用時變參數估測法識別駕駛行為之必要性。

表(5.7~5.10)必須比對影像才可得知駕駛行為改變，無法當判斷駕駛人狀態之依據，表(5.11~5.14)表示特定參數變化情況下駕駛處於各種路況之機率，以相同參數變化情況下所有路況出現數量總合為分母，同參數變化情況下特定路況出現之數量總合為分子所計算之比例。 $|s|$ 單位同表(5.7~5.10)所示。

表 5.11 b_0 不同參數變化情況下各路況之機率

路況	直	彎	直	直	彎	彎	直	直	彎	彎
鄰近車輛	無	無	小 客 車	小 客 車	小 客 車	小 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車
速差	無	無	大	小	大	小	大	小	大	小
抖動	86%	0%	0%	14%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$ s < 1$	17%	27%	0%	17%	0%	27%	0%	6%	0%	6%
$1 < s < 100$	16%	22%	11%	21%	1%	14%	1%	5%	1%	8%
$100 < s $	36%	17%	9%	17%	0%	17%	0%	4%	0%	0%

表 5.12 b_1 不同參數變化情況下各路況之機率

路況	直	彎	直	直	彎	彎	直	直	彎	彎
鄰近車輛	無	無	小 客 車	小 客 車	小 客 車	小 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車
速差	無	無	大	小	大	小	大	小	大	小
抖動	86%	0%	14%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$ s < 1$	39%	29%	10%	10%	0%	0%	0%	7%	0%	5%
$1 < s < 100$	16%	21%	10%	21%	1%	16%	1%	5%	1%	8%
$100 < s $	19%	19%	9%	19%	0%	30%	0%	4%	0%	0%



表 5.13 b_2 不同參數變化情況下各路況之機率

路況	直	彎	直	直	彎	彎	直	直	彎	彎
鄰近車輛	無	無	小 客 車	小 客 車	小 客 車	小 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車
速差	無	無	大	小	大	小	大	小	大	小
抖動	86%	0%	0%	14%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$ s < 1$	20%	30%	10%	30%	0%	0%	0%	3%	0%	7%
$1 < s < 100$	15%	22%	10%	20%	1%	16%	1%	6%	1%	8%
$100 < s $	40%	8%	8%	8%	0%	34%	0%	2%	0%	0%

表 5.14 b_3 不同參數變化情況下各路況之機率

路況	直	彎	直	直	彎	彎	直	直	彎	彎
鄰近車輛	無	無	小 客 車	小 客 車	小 客 車	小 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車	大 客 車
速差	無	無	大	小	大	小	大	小	大	小
抖動	86%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
$ s < 1$	20%	20%	10%	32%	0%	0%	0%	10%	0%	8%
$1 < s < 100$	16%	23%	10%	19%	1%	17%	1%	5%	1%	7%
$100 < s $	35%	26%	9%	9%	0%	19%	0%	2%	0%	0%

表(5.11~5.14)可看出參數發生抖動現象時，駕駛於直路行駛的可能性非常高，但鄰近車輛為大客車時行駛於直路或彎路上皆不會出現參數抖動， $|s| < 1$ 以鄰近車道無車或速差小的可能性較高(速差大時 b_0 皆無變化， b_1 只於直路鄰車為小客車有 10%之機率變化， b_2 、 b_3 之機率和 b_1 同)， $1 < |s| < 100$ 時不易分辨較高機率之路況($b_0 \sim b_3$ 較高機率之路況會變化)， $100 < |s|$ 以直路鄰近車道無車輛時通過機率最高。整體而言，鄰近車道無車輛時較容易判斷出，兩車輛速差大比速差小時較不易辨別，而鄰近車輛為大客車之數量相對於其他路況明顯少許多，辨識出難度也較高。本文使用方法之優點與必須改善之地方將於下個章節提出。

第六章 結論與未來工作

6.1 結論

近年交通事故量增加，為減少事故發生，發展一套安全輔助駕駛系統乃為當務之急。發展此系統時必須了解駕駛行為，本研究使用系統識別法將實際道路駕駛資料模型化，分析非時變模型得知駕駛行為變化極快，但無法知道變化原因，為解決此問題推導出線性時變參數估測法，以此估測法得時變參數模型，將非時變與時變模型特性分析比較，以下為所得之結果：

1.使用線性非時變系統識別駕駛行為時，因只考慮到整筆資料內(一分鐘=800 個取樣點)駕駛行為總合，無法得知駕駛於各種路況下之反應，模型之最終預測誤差 FPE(final prediction error)之值皆極小($10^{-5} \sim 10^{-4}$)，但所得模型模擬結果差(<50%)，並得到許多(>50%)不穩定模型(正常駕駛行為可確定為穩定系統)，由極零點、直流增益知駕駛變化快，可確定駕駛行為隨時間變化。

2.當時變系統模型參數變化為規律時，假設參數為隨機變數，參數變化以前一時間點之參數為平均取高斯(Gaussian)分佈，由模擬驗證結果可知，本文推導出之時變參數估測法於低階線性時變系統識別可得良好之估測結果。

3.使用時變系統識別法模型化駕駛行為，可看出每一個時間點駕駛行為之變化，分析模型參數變化情況，看出駕駛於各種不同路況(道路曲率改變、鄰近車輛通過時)會有不同控制行為，鄰近車輛和本車輛之速度差距小時對駕駛之影響會較明顯，時變模型輸出模擬結果可達較高之符合度，由時變模型識別結果可得知非時變識別之問題所在(駕駛行為隨時變化)，分析模型參數變化情況可知駕駛處於何種路況之機率。

6.2 未來工作

本論文所提之方法，於實驗中可得不錯之結果，但仍有一些需要加強的地方，值得未來再繼續深入研究。

- 1.時變系統模型參數隨輸出輸入資料長度與使用模型階數增加呈等比例增加，估測模型參數使收斂至準確值之時間也呈線性增加，當識別資料長度較長時收斂所需時間會成為實驗主要問題(本論文實驗之資料一筆為 800 點，當 $A(q)=2$ $B(q)=4$ $n_a=2$, $n_b=4$ 時疊代 500,000~2,000,000 次才會收斂至準確值)，需進一步化檢時變參數估測演算法，提高運算效率。
- 2.表(5.7)~表(5.14)由模型參數變化和駕駛影像比對統計算出，因駕駛影像只顯示前方路況，當鄰近車道車輛由後方接近本車輛，與本車輛等速(並排)時之情況無法得知(實驗中部分無法得知參數變化之原因，有部分為此狀況)，兩車輛之速差和距離由人眼觀察，沒有車輛間相對速度則實驗判斷之速差快慢較不客觀(實驗中以通過三個車身之時間計算相對速度)。建議相對距離可由影像上之分隔線格數計算，並計算鄰近車輛之車身長度的，可使實驗之可靠度提升。
- 3.實驗使用五筆各約 40 分鐘之資料得到駕駛模型，由這些模型統計所得表(5.11)~表(5.14)會因為資料量不夠，和一般的駕駛行為分佈有誤在，必須收集更多的駕駛資料，取得模型建立更完整的駕駛行為表。
- 4.本實驗所得之駕駛行為描述為正常情況下之狀態(文獻上[12]提到超過一小時駕駛時駕駛人開始出現疲勞之現象，五十分鐘道路駕駛對駕駛人之影響較不明顯)，若多分析各種不同情況(熬夜開車、長時間開車、雨天、陰天、生病...)之駕駛行為，可建立較完整之駕駛行為模式表，分析精神狀況佳、不佳之駕駛行為模式，判斷該給予警示之模式。
- 5.交通事故通常發生於極短時間內(約一秒)，需要短時間得知駕駛狀態，需驗證本文時變識別法估測短時間駕駛模型的準確度。

參考文獻

- [1] A. Galip, "Vehicle Active Safety Systems for Preventing Road Departure Accident," Proceedings of ESDA2002:6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis Istanbul, Turkey, July 8-11, 2002
- [2] E. Bertolazzi, et al. "Future Advanced Driver Assistance Systems based on Optimal Control: the influence of 'risk function' on overall system behavior and on prediction of dangerous situations," IEEE Intelligent Vehicles Symposium University of Parma, Italy. June 14-17, 2004
- [3] Y. Takatori, T. Hasegawa, "Influence of accident prediction methods in the driving assistance system on safety," IEEE Intelligent Transportation Systems Conference Washington, D.C., USA, October 3-6, 2004
- [4] A. Modjtahedzadeh, R. A. Hess, "A Model of Driver Steering Control Behavior for Use in Assessing Vehicle Handling Qualities," Transaction of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control Table of Contents for Vol. 115, No.3, September 1993
- [5] L.K Chen, A.G Ulsoy, "Identification of a Driver Steering Model, and Model Uncertainty, From Driving Simulator Data," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 123, pp 623-629, December 2001.
- [6] J.H Kim, et al. "Modeling of Driver's Collision Avoidance Maneuver Based on Controller Switching Model," IEEE Transactions, Man, and Cybernetics_Part B: Cybernetics, Vol.35, No.6, December 2005
- [7] R. Zou and K. H. Chon, 'Robust Algorithm for Estimation of Time-Varying Transfer Functions,' IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 51, pp. 219-228, 2004.

- [8] Y. Grenier, "Time-Dependent ARMA Modeling of Nonstationary Signals," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 899-911, 1983.
- [9] A. Doucet, S. J. Godsill, and M. West, "Monte Carlo Filtering and Smoothing with Application to Time-varying Spectral Estimation," presented at IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing II, 2000.
- [10] L. Ljung, "System Identification: Theory for the User," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987
- [11] J. P. Burg, "A new analysis technique for time-series data," NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, 1968
- [12] T. Pilutti, et al. "Identification of Driver State for Lane-Keeping Tasks," IEEE Transactions on Systems, man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, Vol 29, No. 5, September 1999
- [13] W.T. Eugene I, P and M.N.S. Swamy, "On Global Stability of a Linear Time-varying system in the Presence of Two kinds of Local Instabilities," IEEE Center for Signal Processing and Communications, 1995
- [14] R.W. Allen, "Stability and Performance Analysis of Automobile Driver Steering Control," SAE Society of Automotive Engineers, 1982
- [15] D.J. LeBlanc, et al. "CAPC:A Road-Departure Prevention System," IEEE Control Systems, 1996
- [16] L.K. Chen, et al. "Design of a Vehicle Steering Assist Controller Using Driver Model Uncertainty," Journal of Vehicle Autonomous Systems, 2000

- [17] D.T. McRuer, “Mathematical Models of Human Pilot Behavior,” NATO AGARDograph, No. 188, 1974
- [18] J.H Kim, et al. “Modeling of Driver’s Collision Avoidance Behavior based on Piecewise Linear Model,” 43rd IEEE Conference on Decision and Control 14-17, December 2004
- [19] G. Ulsoy, “On-Line Identification of Driver State for Lane-Keeping Tasks,” Proceedings of the American Control Conference Seattle, Washington. June 1995
- [20] B. Walsh, “Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling,” Lecture Notes for EEB 581, version 26 April 2004
- [21] 張智星, MATLAB程式設計用, 清蔚科技, 台北, 2001
- [22] 莊益瑞, C++程式設計實務, 碁峰, 台北, 2005
- [23] 趙清風, 控制之系統識別 使用MATLAB, 全華, 台北, 2001

