

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

盤狀刀具創成蝸桿與蝸輪之特性分析

The Characteristic Analysis of the Worm Gear Set Generated by
Disc-Type Cutter

研究生：黃健育

指導教授：徐瑞坤 教授

共同指導教授：蔡忠杓 教授

中華民國九十六年六月

盤狀刀具創成蝸桿與蝸輪之特性分析

The Characteristic Analysis of the Worm Gear Set Generated by
Disc-Type Cutter

研究生：黃健育

Student：Jian-Yu Huang

指導教授：徐瑞坤
蔡忠杓

Advisor：Dr. Ray-Quen Hsu
Dr. Chung-Biau Tasy

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文

A Thesis
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Mechanical Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

盤狀刀具創成蝸桿與蝸輪之特性分析

研究生：黃健育

指導教授：徐瑞坤 博士

共同指導教授：蔡忠杓 博士

國立交通大學機械工程學系

摘要

蝸桿蝸輪組可以克服一般傳統齒輪組在特定的模數下齒數太少時，齒輪齒面會產生過切的現象，亦可以提供一般傳統正齒輪及螺旋齒輪無法達成之大減速比效果，又蝸桿蝸輪組為多齒接觸，接觸比較高，因而可應用在須較高負荷的場合。由於工業界對於定位精度與穩定度之要求日益升高的情況下，高接觸比之蝸桿蝸輪組所帶來之效益也日益顯著。為提高蝸桿蝸輪組之接觸比，可將蝸桿與蝸輪之軸交錯角設定為非 90° ，以此種方式增加了蝸桿蝸輪組之接觸比，使得機構的結構更為緊湊。

本研究將利用齒輪原理以及電腦輔助設計技術，針對盤狀刀具創成之蝸桿蝸輪組，進行其齒面數學模式的建立並以程式語言建構所推導之蝸桿蝸輪組齒面數學模式，並以電腦繪圖軟體建構並繪製模型。此外，本研究亦將以程式語言模擬此機構運動中之運動狀況，針對蝸桿與蝸輪兩齒面間的接觸情形進行模擬與分析研究，探討正常裝配狀況下與具有裝配誤差狀況下蝸桿蝸輪組之傳動特性及接觸齒印大小、分佈位置與形狀的差異等，此分析結果可供蝸桿蝸輪設計與製造者之重要參考。

The Characteristic Analysis of the Worm Gear Set Generated by Disc-Type Cutter

Student: Jian-Yu Huang

Advisor: Dr. Ray-Quen Hsu
Dr. Chung-Biau Tasy

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

Worm gear sets can conquer the tooth undercutting problem, which occurs due to the small number of teeth of conventional gear sets with some special modules. Therefore, worm gear sets can provide high gear ratio that spur and helical gear sets could not offer. Besides, the worm gear set has a larger contact ratio which enables its loading capability. In order to increase the contact ratio of a worm gear set, the worm gear set can be generated with a non-ninety-degree crossing angle. This kind of generating method not only increase the contact ratio of worm gear sets, but also make the transmission mechanism more compact.

In this research, the mathematical model of a worm gear set is developed based on the theory of gearing and the technique of computer aided design. The worm is generated by a disc-type grinding wheel and worm gear is generated by a fly-cutter. Based on the developed mathematical model, a computer graph of the worm gear set is presented. Besides, tooth contact analysis of the worm gear set is also performed to calculate the location of the contact points. Meanwhile, contact patterns and transmission errors of the worm gear set with assemble errors are also investigated. The analysis results are most helpful to the designers and manufacturers.

誌謝

本論文能順利完成，首先要感謝指導教授 蔡忠杓博士，在公事繁忙之餘仍撥冗指導學生之論文研究，此外，老師認真耿直的待人處世態度，亦讓學生受益匪淺。

同時也感謝指導教授 徐瑞坤博士以及劉家彰學長給予學生論文的指正與建議，使本論文的立論與措辭均更趨於完備。亦感謝齒輪研究室的瑞堂學長、冠宇學長、立基學長不吝惜提供寶貴的意見，以及與威良學長、偉旭學長、家誠同學、宗賢同學的意見交流，這些討論總是能激發新的想法來解決研究上的困惑，著實助益不少，讓我能在研究室平穩和樂的氣氛之中，順利的度過兩年的研究生活。

此外，也要感謝交通大學友聲合唱團志趣相投的朋友們，和你們相處讓我忘卻課業上的壓力，能夠以嶄新的心態去面對下個挑戰。

最後要感謝我的父母以及兄長，有他們的栽培以及支持才能成就今日的我。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	v
表目錄	vi
符號表	ix
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究方向	2
第二章 ZK 型蝸桿之數學模式推導	4
2.1 前言	4
2.2 直邊磨輪刀具之數學模式	6
2.3 蝸桿之嚙合方程式	10
2.4 蝸桿之齒面數學模式	14
2.5 ZK 型蝸桿之電腦輔助繪圖	17
第三章 蝸輪數學模式之推導	19
3.1 前言	19
3.2 假想齒條刀之刀面數學模式	19
3.3 蝸輪之嚙合方程式	26
3.4 蝸輪之齒面數學模式	28
3.5 蝸輪之電腦輔助繪圖	29
第四章 蝸桿蝸輪之接觸與齒印分析	31

4.1 前言	31
4.2 蝸桿蝸輪組齒面接觸分析數學模式	32
4.3 蝸桿蝸輪組接觸齒印分析之數學模式	37
4.4 例題討論	42
4.5 本章結論	76
第五章 結論與未來展望	77
5.1 結論	77
5.2 未來展望	78
參考文獻	79

圖目錄

圖 2.1 單包絡蝸桿的種類[1]	5
圖 2.2 磨輪直邊刀具之法向剖面圖	7
圖 2.3 磨輪直邊刀具之導角法向剖面放大圖	9
圖 2.4 模擬直邊磨輪座標系 $S_c^{(H)}$ 與 $S_a^{(H)}$ 之關係	9
圖 2.5 空間中兩嚙合曲面之運動關係示意圖	12
圖 2.6 直邊磨輪創成蝸桿之座標示意圖	15
圖 2.7 ZK 型蝸桿之電腦輔助繪圖	18
圖 3.1 飛刀之法向剖面圖	21
圖 3.2 飛刀法向剖面之導角放大圖	21
圖 3.3 飛刀剖面形成具導程角之假想齒條刀的相對座標關係圖	22
圖 3.4 齒條刀與蝸輪相對運動關係圖	23
圖 3.5 蝸桿蝸輪組之軸交角關係示意圖	25
圖 3.6 蝸輪之電腦繪圖	30
圖 4.1 蝸桿蝸輪組具裝配誤差之座標系關係示意圖	33

圖 4.2 兩嚙合齒面與切平面座標關係示意圖.....	38
圖 4.3 固定一 θ_i 角時之 $r_i - Z_i$ 截面圖.....	38
圖 4.4 切平面座標系與其他座標系之關係示意圖.....	40
圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(1).....	46
圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(2).....	47
圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(3).....	48
圖 4.6 Case3 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1).....	59
圖 4.6 Case3 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2).....	60
圖 4.7 Case4 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1).....	61
圖 4.7 Case4 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2).....	62
圖 4.8 Case5 裝配在具有裝配誤差下之接觸齒印(1).....	63
圖 4.8 Case5 裝配在具有裝配誤差下之接觸齒印(2).....	64
圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1).....	71
圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2).....	72
圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(3).....	73
圖 4.10 Case2 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1).....	74
圖 4.10 Case2 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2).....	75

表目錄

表 2.1 ZK 型蝸桿與直邊磨輪之設計參數.....	17
表 3.1 蝸輪與飛刀之設計參數.....	30
表 4.1 蝸桿蝸輪組之主要設計參數.....	43
表 4.2 理想裝配狀況下 Case1 之配對嚙合接觸情形.....	44
表 4.3 理想裝配狀況下 Case2 之配對嚙合之接觸情形.....	44
表 4.4 理想裝配狀況下 Case3 之配對嚙合之接觸情形.....	45

表 4.5 理想裝配狀況下 Case4 之配對嚙合之接觸情形.....	45
表 4.6 理想裝配狀況下 Case5 之配對嚙合之接觸情形.....	46
表 4.7 Case3 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形.....	50
表 4.8 Case3 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形.....	50
表 4.9 Case3 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	51
表 4.10 Case3 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	51
表 4.11 Case3 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	52
表 4.12 Case3 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	52
表 4.13 Case4 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形.....	53
表 4.14 Case4 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形.....	53
表 4.15 Case4 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	54
表 4.16 Case4 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	54
表 4.17 Case4 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	55
表 4.18 Case4 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	55
表 4.19 Case5 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形.....	56
表 4.20 Case5 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形.....	56
表 4.21 Case5 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	57
表 4.22 Case5 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	57
表 4.23 Case5 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	58
表 4.24 Case5 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	58
表 4.25 Case1 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形.....	65
表 4.26 Case1 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形.....	66
表 4.27 Case1 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	66
表 4.28 Case1 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形.....	67
表 4.29 Case1 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形.....	67

表 4.30 Case1 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形	68
表 4.31 Case2 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形	68
表 4.32 Case2 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形	69
表 4.33 Case2 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形	69
表 4.34 Case2 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形	70
表 4.35 Case2 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形	70
表 4.36 Case2 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形	71



符號表

u_1	直邊磨輪刀具之刀面直邊參數(mm)
u_2	飛刀直邊刀刃之設計參數(mm)
$\alpha_n^{(H)}$	直邊磨輪之法向壓力角(度)
$\alpha_n^{(F)}$	飛刀直邊刀刃之法向壓力角(度)
$m_n^{(H)}$	直邊磨輪刀具之法向模數(mm/齒)
$m_n^{(F)}$	飛刀之法向模數(mm/齒)
r_c	直邊磨輪刀具面之節圓半徑(mm)
R_l	飛刀圓形刀盤之半徑(mm)
a_H	直邊磨輪刀具之齒冠高(mm)
h_H	直邊磨輪刀具之齒根高(mm)
a_F	假想齒條刀之齒冠高(mm)
h_F	假想齒條刀之齒根高(mm)
b_H	直邊磨輪刀具之刀面設計參數(mm)
b_F	齒條刀法向節距的四分之一(mm)
ρ_{Hr}	直邊磨輪導角之圓弧半徑(mm)
θ_{Hr}	直邊磨輪導角之圓弧參數(度)
f_{Hr}	直邊磨輪導角圓弧半徑相關之參數(mm)
ρ_{Fr}	飛刀法向剖面導角之圓弧半徑(mm)
θ_{Fr}	飛刀法向剖面導角之圓弧參數(度)
f_{Fr}	飛刀法向剖面導角圓弧半徑相關之參數(mm)
D	直邊磨輪導角之圓心
C	飛刀法向剖面導角之圓心
λ_H	磨輪導程角(度)
λ_F	假想齒條刀之導程角(度)
θ_H	磨輪的外形設計參數(度)
θ_F	飛刀法向剖面之位置參數(度)

W	假想齒條刀之齒寬(mm)
r_1	蝸桿節圓半徑(mm)
r_2	蝸輪之節圓半徑(mm)
A_c	蝸桿與磨輪之中心距(mm)
p	蝸桿單位角度之導程(mm/rad)
γ	蝸桿蝸輪之交錯角(度)
ϕ_1	蝸桿創成時之旋轉角(度)
ϕ_2	蝸輪創成時之旋轉角(度)
ϕ_1'	蝸桿實際嚙合時的旋轉角(度)
ϕ_2'	蝸輪實際嚙合時的旋轉角(度)
S	齒輪座標系 S_1 及 S_2 之中心距(mm)
ΔS	垂直軸向中心距誤差(mm)
$\Delta\gamma_h$	水平軸向裝配誤差(度)
$\Delta\gamma_v$	垂直軸向裝配誤差(度)
δ	Z_m 軸與 Z_n 軸之夾角(度)
ε	Z_n 軸與 Z_i 軸之夾角(度)
$M_0^{(H)}$	磨輪剖面之直邊固定點
$M^{(H)}$	在磨輪剖面之直邊上移動的動點
$M_0^{(F)}$	飛刀法向直邊之起點
$M^{(F)}$	在飛刀法向直邊上移動的動點
$S_j^{(i)}(X_j^{(i)}, Y_j^{(i)}, Z_j^{(i)})$	座標系 $S_j^{(i)}$ ($i = H, F$, $j = a, ar, c, cr, h, f', b, br, b', F$)
$S_i(X_i, Y_i, Z_i)$	座標系 S_i ($i = f, f2, fh, fv, 1, 2, t, m, n, t$)
$O_j^{(i)}$	座標系 $S_j^{(i)}$ 之原點
O_i	座標系 S_i 之原點
$\mathbf{R}_j^{(i)}$	表示在座標系 $S_j^{(i)}$ 之位置向量 ($i = H, F$, $j = a, ar, c, cr, h, f', b, br, b', F, 1, 2$)
$\mathbf{n}_j^{(i)}$	表示在座標系 $S_j^{(i)}$ 之單位法向量 ($i = H, F$, $j = a, ar, c, cr, h, f', b, br, b', F, 1, 2$)

$\omega_j^{(i)}$	表示在座標系 $S_j^{(i)}$ 之角速度 ($i = H, F, j = f', 2$)
$M_{jk}^{(i)}$	齊次座標轉換矩陣，表座標系 $S_k^{(i)}$ 轉換至座標系 $S_j^{(i)}$
$L_{jk}^{(i)}$	法向量轉換矩陣，表座標系 $S_k^{(i)}$ 轉換至座標系 $S_j^{(i)}$
$V_k^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之速度，表示在 S_k 座標系上
$V_j^{(i)}$	物體 i 表示於 S_j 座標系上之速度
Σ_1	蝸桿齒面
Σ_2	蝸輪齒面
Σ_T	Σ_1 與 Σ_2 之共同切平面
P_i	座標系 S_i 上之動點
d_1	動點 P_i 至齒面 Σ_1 距離
d_2	動點 P_i 至齒面 Σ_2 距離
θ_i	切平面 Σ_T 上之角度(度)
r_i	切平面 Σ_T 上之位置向量
R_i	O_i 點至動點 P_i 點之距離



第一章 緒論

1.1 前言

蝸桿蝸輪組為空間交錯軸(Crossed Axes)之動力傳動元件，通常運用在交錯軸傳動或是需高減速比的場合。一般的齒輪在設計上是以其節圓(Pitch Circle)或是節圓面(Axode)為假想圓或假想面，在節點(Pitch Point)或節線(Pitch Line)處以純滾動的方式傳遞動力，此一節圓的半徑取決於齒輪齒數與模數。然而齒輪在特定模數下當齒數太少時，齒輪會產生齒面過切(Undercutting)現象，故傳統正齒輪以及螺旋齒輪無法提供大減速比，而必須藉由多級之減速機構才能達到此一效果，但此類多級之減速機構也會佔據較大的空間，應用上相當不便。以蝸桿蝸輪而言，蝸桿節圓半徑在設計上與蝸桿齒數並無直接關聯，使得蝸桿蝸輪組之傳動具有較大的單級傳動減速比(一般約為 8 到 100 之間)，因單級之蝸桿蝸輪組具備此一高減速比之特性，可取代一般多級齒輪減速機構所能達到的傳動比，達成減少齒輪對之數目以及簡化傳動機構的效果，同時，當蝸桿導程角小於蝸輪組之摩擦角時，可使蝸桿蝸輪組在傳動時具備有自鎖(Self Locking)特性，可承受一定程度之振動與衝擊，也具有安全上的優點。

一般齒輪組傳遞動力之齒面接觸位置多落在靠近節圓附近並以滾動為主，而蝸桿蝸輪組在傳遞動力上則是以滑動為主。蝸桿蝸輪組之平均接觸比在 2 以上(含)，為高接觸比之齒輪組。一般而言，當齒輪組作為減速機構時，高速運轉中的主動齒輪會因為齒隙而產生振盪或顫振，因而在與從動齒輪相互作用時會產生振動與噪音。然而具備高接觸比之蝸桿蝸輪組在運轉時，由於其每一瞬間齒輪組嚙合工作的齒數較多，可以降低齒輪組接觸齒面之平均負載，因此，在高速運轉時具備有較高的齒面承載能力，且可降低齒輪組之運動誤差(Kinematic Error)，在傳動時較為穩定且噪音較小。

由於蝸桿蝸輪組具備以上優點，因而廣泛地應用於汽車的轉向機構、連續分度機構、高樓電梯之減速機構等，需具備有較大傳動減速比的場合。近年來，工業產品對定位精度要求較高者，如大型天文望遠鏡之赤道儀，以及精密工具機工作台之定位機構等，也多採用雙導程蝸桿蝸輪機構。

1.2 文獻回顧

Zheng[2,3]等人於 1989 年，利用一條動線(Generating Line)在空間中運動所產生之軌跡面，用以表示蝸桿之齒面，並討論其製造加工程序。Janninck[4]則於 1988 年提出齒面外形法(Surface Topology Method)，來模擬利用增徑滾刀(Over Size Hob Cutter)滾削蝸輪時其創成齒面之接觸情形。Bair 和 Tsay[5]於 1998 年則探討了 ZK 型蝸桿蝸輪組之接觸齒數、接觸比和運動誤差。Fang 和 Tsay[6]於 2000 年推導出 ZN 型蝸桿蝸輪組之齒面數學模式，並研究利用增徑滾刀來滾削 ZN 型蝸輪及探討此蝸桿蝸輪組之接觸分析(Tooth Contact Analysis)，除計算蝸桿蝸輪組之接觸點及其接觸齒印(Contact Pattern)的大小與形狀，並探討其嚙合接觸路徑(Contact Path)。陳嘉宏[7]於 2003 年進行非 90° 交錯角之 ZK 型蝸桿，與利用飛刀(Fly Cutter)配合軌跡法建立之蝸輪齒面模式推導，並進行蝸桿蝸輪組之接觸分析。2004 年廖健雄[8]則進行非 90° 交錯角之 ZN 型蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析與齒印分析。

1.3 研究方向

本研究將利用 Litvin[9,10]所發展之齒輪原理並配合電腦輔助設計，針對不同交錯角之蝸桿蝸輪組，進行齒面數學模式推導與接觸特性分析。本研究主要有以下四個主題：

- 一、利用直邊磨輪機構，以創成法求得 ZK 型蝸桿之齒面數學模式。
- 二、將飛刀裝置在盤狀刀具上，利用飛刀法向截面沿盤狀迴旋之路徑，模

擬出假想齒條刀之外形，再依據齒輪創成原理以推導蝸輪齒面之數學模式。

- 三、針對此蝸桿蝸輪組齒面之接觸情形進行齒面嚙合分析與研究，探討具裝配誤差情況下，蝸桿蝸輪組之傳動特性、接觸比以及接觸齒印大小。
- 四、針對此一蝸桿蝸輪組，提出未來之工作重點。



第二章 ZK 型蝸桿之數學模式推導

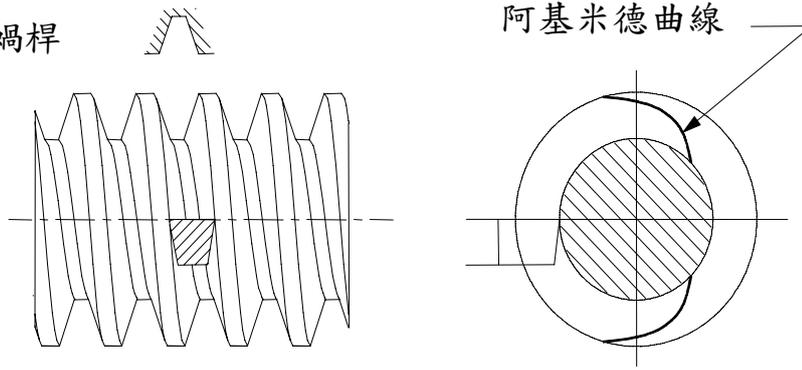
2.1 前言

蝸桿蝸輪組依照其外形輪廓可區分為兩大類：(1)單包絡蝸桿與蝸輪(圓柱型蝸桿)；(2)雙包絡蝸桿與蝸輪(Hourglass 蝸桿)。如圖 2.1 所示，單包絡蝸桿蝸輪又可分為：阿基米德蝸桿(Archimedean Worm)，即 ZA 型蝸桿；漸開線蝸桿(Involute Shaped Worm)，即 ZI 型或 ZE 型蝸桿；法向直廓蝸桿(Straight-Sided Normal Worm)，即 ZN 型蝸桿；盤狀錐面包絡圓柱蝸桿(Milled Helicoid Worm)，即 ZK 型蝸桿和 Flender 蝸桿，亦稱 ZH 型蝸桿。雙包絡蝸桿蝸輪可分為：Hinley 蝸桿、螺旋齒輪及其包絡蝸桿、Lorentz 蝸桿、平齒面蝸輪及其包絡蝸桿。

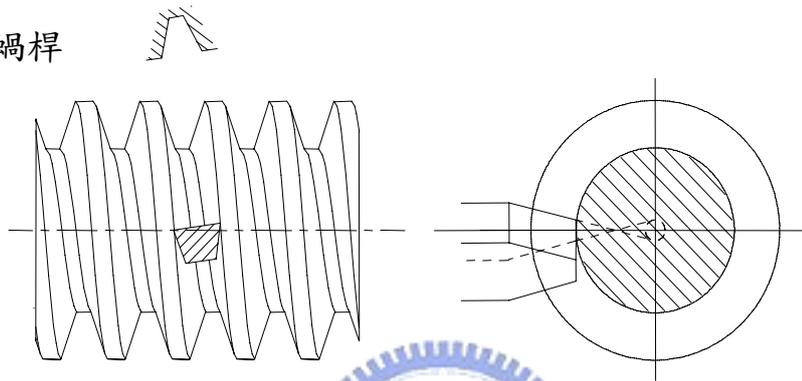
蝸桿其製造方式主要可分為軌跡法(Locus Method)以及創成法(Generation Method)。軌跡法所切削之蝸桿是在加工蝸桿齒面時，由一母線(即刀刃)沿著蝸桿(工件)軸線作相對螺旋運動，便可切削出蝸桿之齒面，以這種加工方法所切削之齒面稱為軌跡曲面，一般是在車床上以直邊刀刃的車刀切削出來。根據車刀安裝位置之不同，其所切削出來的蝸桿齒面之齒廓剖面曲線形狀也不同，如上述之 ZA、ZN 與 ZE 蝸桿。創成法所製造之蝸桿是在銑床或磨床上用端銑刀或盤狀環面刀具加工出來，用這種方法加工的蝸桿齒面為刀具面的包絡面(Envelope)，故以此種加工方法所產生之齒面稱為包絡曲面，如：ZK 型蝸桿。

本研究之蝸桿類型屬於單包絡 ZK 型蝸桿，係利用直邊磨輪所創成，並求得其磨削過程中磨輪之包絡面。在推導蝸桿蝸輪之數學模式過程中，須假設：(1)切削中之刀具以及工件均視為剛體，亦即不考慮兩者之彈性變形；(2)不考慮動態情形與溫度之效應；(3)無任何機器設定誤差與間隙之影響。

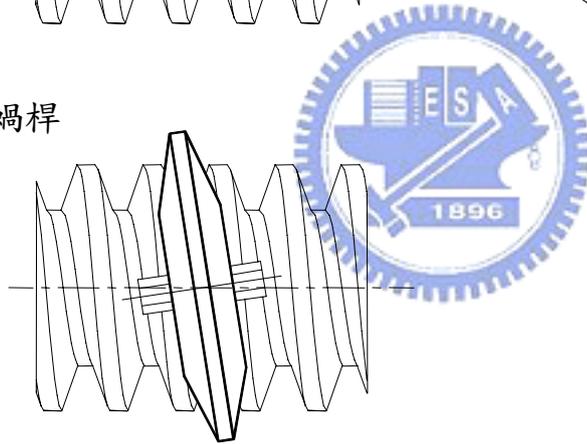
(a)ZA 型蝸桿



(b)ZN 型蝸桿



(c)ZK 型蝸桿



(d)ZE 型蝸桿

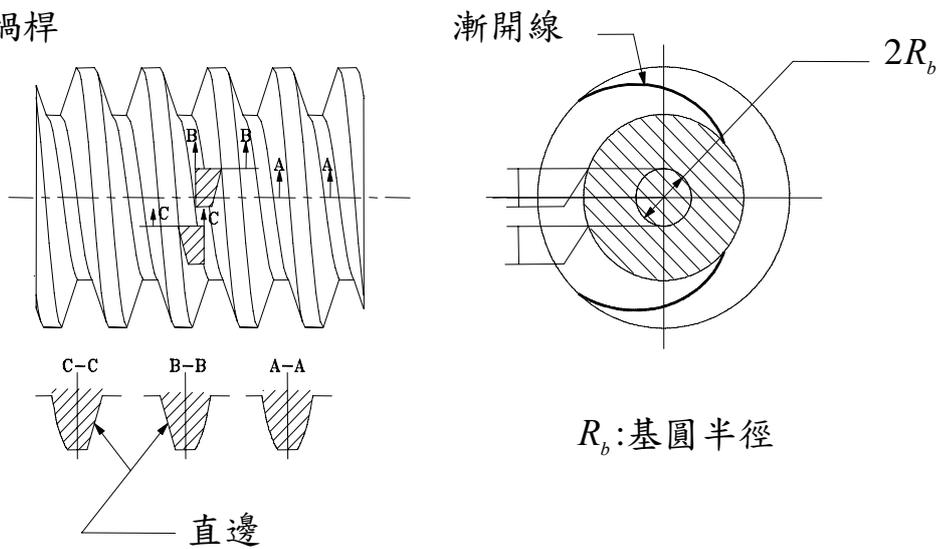


圖 2.1 單包絡蝸桿的種類[1]

由於本研究所創成之 ZK 型蝸桿的齒面是直邊磨輪的包絡面，且 ZK 型蝸桿之齒面與磨輪刀具間之接觸恆保持相切的情形，因此在推導 ZK 型蝸桿之齒面數學方程式時，除了須求得直邊磨輪刀具表示在被創成蝸桿齒面上之軌跡方程式外，尚須求得直邊磨輪刀具與蝸桿齒面之嚙合方程式 (Equation of Meshing)，才得以推導出蝸桿之齒面數學方程式。

2.2 直邊磨輪刀具之數學模式

假設蝸桿齒面為 Σ_1 ， Σ_H 為創成蝸桿齒面之磨輪刀具。如圖 2.2 所示為直邊磨輪刀具之法向剖面圖 (Normal Cross Section)，其左右刀面為對稱，直邊磨輪法向外形之刀面方程式可表示於 $S_a^{(H)}(X_a^{(H)}, Y_a^{(H)}, Z_a^{(H)})$ 座標系如下

$$\mathbf{R}_a^{(H)} = \begin{bmatrix} X_a^{(H)} \\ Y_a^{(H)} \\ Z_a^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \\ 0 \\ \pm (b_H - u_1 \sin \alpha_n^{(H)}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

(2.1) 式之正負號上方的符號代表直邊磨輪之右刀具面的刀刃，此刀具面係用以創成蝸桿之左側齒面；正負號下方的符號則代表直邊磨輪之左刀具面的刀刃，此刀具面用以創成蝸桿之右側齒面。 $\alpha_n^{(H)}$ 為直邊磨輪之法向壓力角 (Normal Pressure Angel)； u_1 為構成直邊磨輪刀具之刀面的其中一個設計參數，表示由磨輪剖面之直邊固定點 $M_0^{(H)}$ (如圖 2.2)，沿此剖面之直邊移動到任一動點 $M^{(H)}$ 之距離，亦即 $u_1 = \overline{M_0^{(H)} M^{(H)}}$ ，其範圍定義為 $(r_c - h_H) / \cos \alpha_n^{(H)} \leq u_1 \leq (r_c + a_H) / \cos \alpha_n^{(H)}$ 。此外， b_H 亦可由圖 2.2 所示之幾何關係求出： $b_H = \frac{\pi m_n^{(H)}}{4} + r_c \tan \alpha_n^{(H)}$ ，其中 $m_n^{(H)}$ 為直邊磨輪刀具之法向模數 (Normal Module)； r_c 為直邊磨輪刀具面之節圓半徑； a_H 與 h_H 分別為齒冠高與齒根高，在本研究中兩者均設定為 $m_n^{(H)}$ 。

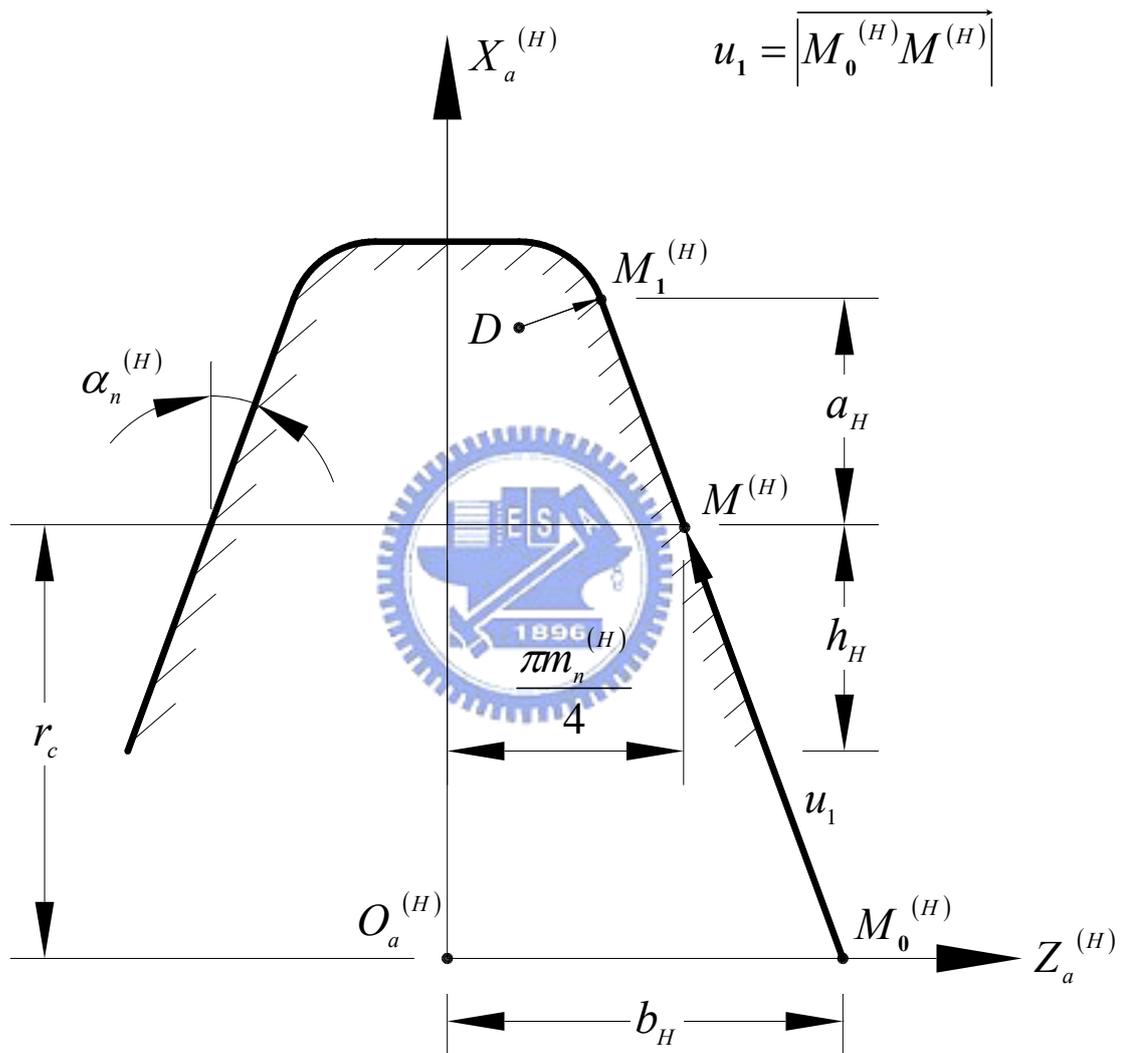


圖 2.2 磨輪直邊刀具之法向剖面圖

圖 2.3 則為圖 2.2 直邊磨輪刀具之導角放大圖，此導角之方程式可表示於 $S_a^{(H)}(X_a^{(H)}, Y_a^{(H)}, Z_a^{(H)})$ 座標系如下：

$$\mathbf{R}_{ar}^{(H)} = \begin{bmatrix} X_{ar}^{(H)} \\ Y_{ar}^{(H)} \\ Z_{ar}^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{Hr}(\sin \theta_{Hr} - \sin \alpha_n^{(H)}) + (r_c + a_H) \\ 0 \\ \pm \left[\frac{\pi m_n^{(H)}}{4} - a_H \tan \alpha_n^{(H)} - \rho_{Hr}(\cos \alpha_n^{(H)} - \cos \theta_{Hr}) \right] \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中 ρ_{Hr} 為直邊磨輪導角之圓弧半徑； θ_{Hr} 為導角之圓弧參數，其範圍定義為 $\alpha_n^{(H)} \leq \theta_{Hr} \leq \frac{\pi}{2}$ ； f_{Hr} 係與圓弧半徑相關之參數，於本研究中設定為 $0.25m_n^{(H)}$ 。

圖 2.2 所示之磨輪刀具法向剖面的 $Z_a^{(H)}$ 軸即為磨輪在創成蝸桿時之旋轉軸，因此，若將此磨輪刀具法向剖面沿著 $Z_a^{(H)}$ 軸旋轉，即可形成完整的磨輪外形。如圖 2.4 所示， $S_a^{(H)}(X_a^{(H)}, Y_a^{(H)}, Z_a^{(H)})$ 座標系之 $Z_a^{(H)}$ 軸若與磨輪座標系 $S_c^{(H)}(X_c^{(H)}, Y_c^{(H)}, Z_c^{(H)})$ 之旋轉軸 $Z_c^{(H)}$ 重合，並以此 $Z_c^{(H)}$ 軸旋轉 θ_H 角，此處 $0 \leq \theta_H \leq 360^\circ$ ，即構成一完整的磨輪外形。因此，磨輪刀具面之法向剖面位置向量可利用齊次座標轉換(Homogeneous Coordinate Transformation)矩陣方程式，由磨輪之刀面法向座標系 $S_a^{(H)}(X_a^{(H)}, Y_a^{(H)}, Z_a^{(H)})$ 轉換至磨輪座標系 $S_c^{(H)}(X_c^{(H)}, Y_c^{(H)}, Z_c^{(H)})$ 如下：

磨輪直邊刀面方程式為

$$\mathbf{R}_c^{(H)} = \mathbf{M}_{ca}^{(H)} \mathbf{R}_a^{(H)} = \begin{bmatrix} X_c^{(H)} \\ Y_c^{(H)} \\ Z_c^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \cos \theta_H \\ u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \sin \theta_H \\ \pm (b_H - u_1 \sin \alpha_n^{(H)}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

磨輪之圓弧導角刀面方程式為

$$\mathbf{R}_{cr}^{(H)} = \mathbf{M}_{ca}^{(H)} \mathbf{R}_{ar}^{(H)} = \begin{bmatrix} X_{cr}^{(H)} \\ Y_{cr}^{(H)} \\ Z_{cr}^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

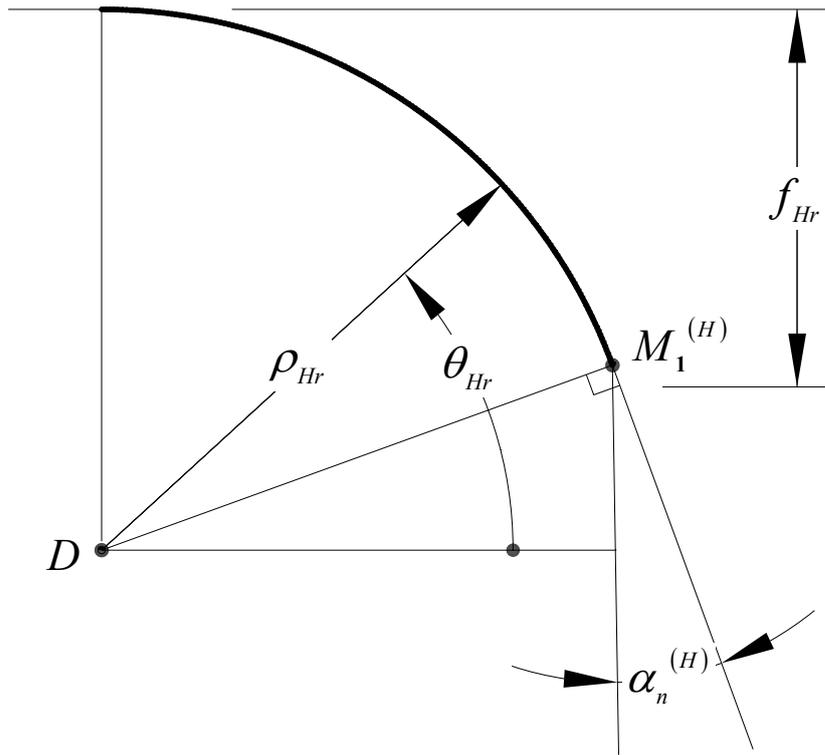


圖 2.3 磨輪直邊刀具之導角法向剖面放大圖

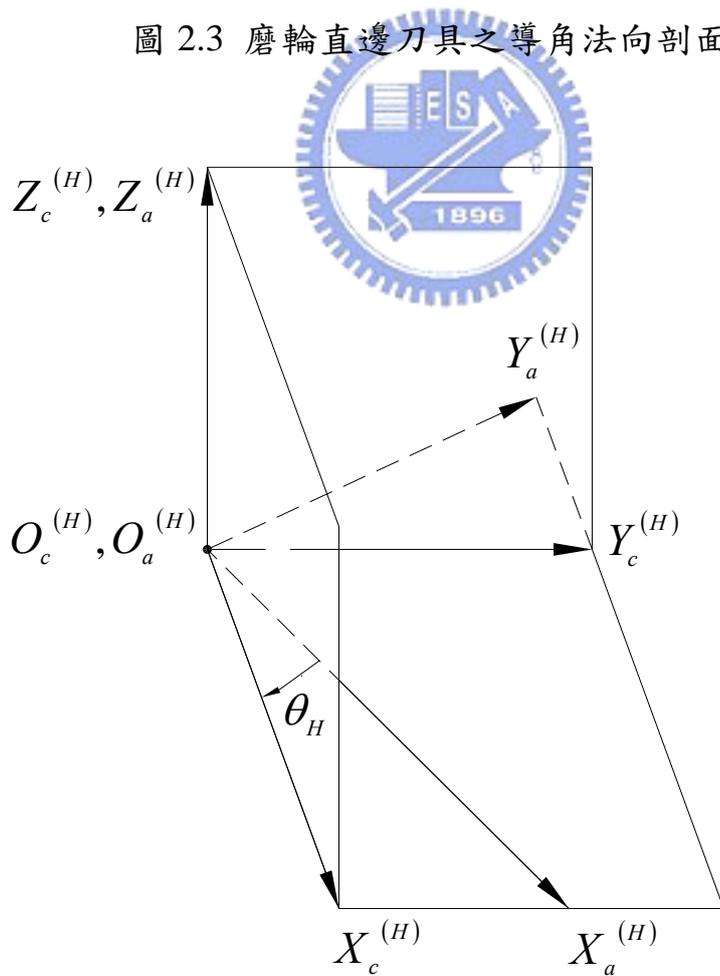


圖 2.4 模擬直邊磨輪座標系 $S_c^{(H)}$ 與 $S_a^{(H)}$ 之關係

$$= \begin{bmatrix} \left[\rho_{Hr} (\sin \theta_{Hr} - \sin \alpha_n^{(H)}) + (r_c + a_H) \right] \cos \theta_H \\ \left[\rho_{Hr} (\sin \theta_{Hr} - \sin \alpha_n^{(H)}) + (r_c + a_H) \right] \sin \theta_H \\ \pm \left[\frac{\pi m_n^{(H)}}{4} - a_H \tan \alpha_n^{(H)} - \rho_{Hr} (\cos \alpha_n^{(H)} - \cos \theta_{Hr}) \right] \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

其中

$$\mathbf{M}_{ca}^{(H)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_H & -\sin \theta_H & 0 & 0 \\ \sin \theta_H & \cos \theta_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

θ_H 為磨輪的外形設計參數，(2.3)與(2.4)式即為直邊磨輪刀具之數學模式。

2.3 蝸桿之嚙合方程式

兩相互嚙合齒輪之嚙合方程式是表示這兩個齒輪之齒面參數與其運動參數之間的關係式。由於兩齒面於嚙合時之接觸狀態應為連續，如圖 2.5 所示， O_T 點為兩嚙合齒面或曲面 Σ_1 與 Σ_2 於空間相切時之共切點(Common Tangent Point)，同時亦為兩曲面之瞬時接觸點，因此兩曲面在 O_T 點具有共同法向量 \mathbf{N} ， $\mathbf{V}^{(12)}$ 表示曲面 Σ_1 與 Σ_2 在 O_T 點之相對速度。

由於兩曲面在嚙合的過程中為連續接觸之狀態，既不會發生一曲面撞入另一曲面，也不會有兩曲面分離的情形，因此，不論是點接觸或線接觸的狀態，在兩曲面之共同法向量方向不應存在兩曲面之相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ ，又因兩曲面存在嚙合之運動關係，故兩曲面必存在一相對速度且與其共同法向量垂直，亦即此相對速度必落在兩曲面之共同切平面 Σ_T (Common Tangent Plane) 上。因此兩曲面進行嚙合運動時，其共同法向量 \mathbf{N} 與其相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 在共切點 O_T 處必互相垂直，亦即兩者之內積為零。此一現象可以下列式子表示之：

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (2.6)$$

此一關係式即為兩共軛運動曲面之嚙合方程式。

根據齒輪原理[9]，被創成之齒輪外形可由刀具在被創成之齒輪座標系上的軌跡方程式與嚙合方程式聯立而得。由齒輪基本理論得知，要推導磨輪與被創成之蝸桿的嚙合方程式，須先將直邊磨輪齒面與蝸桿齒面之接觸點相對速度 $\mathbf{V}^{(H)}$ ，與直邊磨輪之法向量 $\mathbf{N}^{(H)}$ 表示在同一座標系。由於相對速度與法向量在其共同接觸線上係呈現相互垂直之關係，若將此一關係表示在 $S_f^{(H)}$ 座標系，則嚙合方程式可表示為：

$$\mathbf{N}_r^{(H)} \cdot \mathbf{V}_r^{(H)} = 0 \quad (2.7)$$

由於直邊磨輪刀具之左右刀面是由 θ_H 與 u_1 決定之規則曲面，因此將直邊磨輪刀具外形之數學模式對 θ_H 與 u_1 取偏微分之外積，即可求得磨輪刀具之直邊左右刀面之法向量：

$$\mathbf{N}_c^{(H)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(H)}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(H)}}{\partial \theta_H} \quad (2.8)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(H)}}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n^{(H)} \cos \theta_H \\ \cos \alpha_n^{(H)} \sin \theta_H \\ \mp \sin \alpha_n^{(H)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(H)}}{\partial \theta_H} = \begin{bmatrix} -u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \sin \theta_H \\ u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \cos \theta_H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

將方程式(2.9)以及(2.10)代入方程式(2.8)，化簡可得：

$$\mathbf{N}_c^{(H)} = \begin{bmatrix} \pm u_1 \sin \alpha_n \cos \alpha_n \cos \theta_H \\ \pm u_1 \sin \alpha_n \cos \alpha_n \sin \theta_H \\ u_1 \cos^2 \alpha_n^{(H)} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

(2.11)式正負號上方符號代表直邊磨輪之右刀面之法向量，下方符號則代表左刀面之法向量，而單位法向量可由下列式子求得：

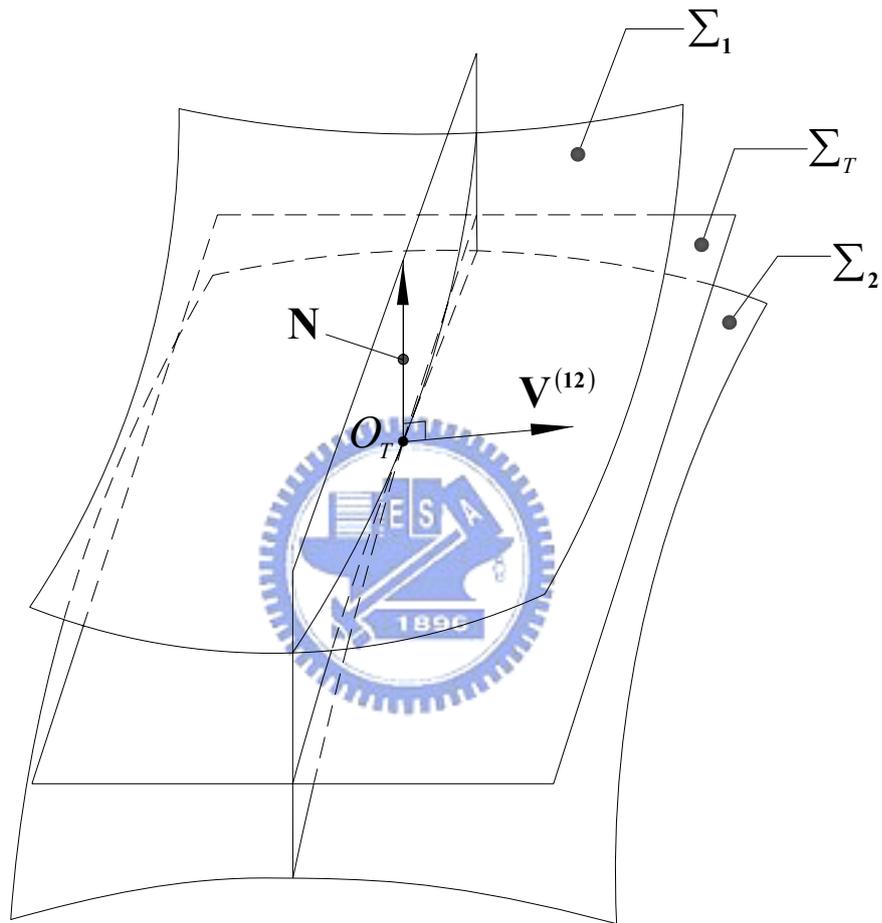


圖 2.5 空間中兩嚙合曲面之運動關係示意圖

$$\mathbf{n}_c^{(H)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(H)}}{|\mathbf{N}_c^{(H)}|} \quad (2.12)$$

由(2.11)及(2.12)式可求得直邊磨輪刀具面之單位法向量為：

$$\mathbf{n}_c^{(H)} = \begin{bmatrix} n_{cx}^{(H)} \\ n_{cy}^{(H)} \\ n_{cz}^{(H)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \cos \theta_H \\ \pm \sin \alpha_n \sin \theta_H \\ \cos \alpha_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

如前所述，正負號上方符號代表直邊磨輪之右刀面之單位法向量，下方符號則為左刀面之單位法向量。同理亦可求得磨輪刀具之導角左右刀面單位法向量如下：

$$\mathbf{n}_{cr}^{(H)} = \begin{bmatrix} \pm \sin \theta_{Hr} \cos \theta_H \\ \pm \sin \theta_{Hr} \sin \theta_H \\ \cos \theta_{Hr} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

直邊磨輪刀具面與被創成之蝸桿齒面之相對速度，可由圖 2.6 之相對關係圖看出。假設直邊磨輪刀具固定在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上，即直邊磨輪刀具在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上之速度 $\mathbf{V}_r^{(H)} = 0$ 。將被切製之蝸桿與直邊磨輪刀具之相對應接觸點速度表示在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r^{(H)} &= \boldsymbol{\omega}_r^{(H)} \times \left(\mathbf{R}_h^{(H)} + \overline{O_1 O_h^{(f')}} \right) + \mathbf{V}_r^{(H)} \\ &= \omega_1 \begin{bmatrix} -u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \sin \theta_H \cos \lambda_H \mp (b_H - u_1 \sin \alpha_n^{(H)}) \sin \lambda_H \\ u_1 \cos \alpha_n^{(H)} \cos \theta_H - A_c \\ p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中

$$\mathbf{R}_h^{(H)} = \mathbf{M}_{hc}^{(H)} \mathbf{R}_c^{(H)} = \begin{bmatrix} X_h^{(H)} \\ Y_h^{(H)} \\ Z_h^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c^{(H)} \\ Y_c^{(H)} \cos \lambda_H + Z_c^{(H)} \sin \lambda_H \\ -Y_c^{(H)} \sin \lambda_H + Z_c^{(H)} \cos \lambda_H \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\omega}_r^{(H)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_r^{(H)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p\omega_1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{O_1 O_h^{(f')}} = \begin{bmatrix} -A_c \\ 0 \\ -p\phi_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_h^{(H)}$ 為表示於 $S_h^{(H)}(X_h^{(H)}, Y_h^{(H)}, Z_h^{(H)})$ 座標系中之磨輪刀具面位置向量； $\boldsymbol{\omega}_r^{(H)}$ 為表示在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上之蝸桿角速度； $\mathbf{V}_r^{(H)}$ 為表示在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上之蝸桿切線速度； $\overrightarrow{O_1 O_h^{(f'')}}$ 為表示在 $S_{f'}^{(H)}$ 座標系上之 O_1 至 $O_h^{(H)}$ 的相對位置向量。

磨輪刀具面之單位法向量亦可由 $S_c^{(H)}(X_c^{(H)}, Y_c^{(H)}, Z_c^{(H)})$ 座標系轉換至 $S_{f'}^{(H)}(X_{f'}^{(H)}, Y_{f'}^{(H)}, Z_{f'}^{(H)})$ 座標系如下：

$$\mathbf{n}_r^{(H)} = \mathbf{L}_{rc}^{(H)} \mathbf{n}_c^{(H)} = \begin{bmatrix} n_{f'x}^{(H)} \\ n_{f'y}^{(H)} \\ n_{f'z}^{(H)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{cx}^{(H)} \\ n_{cy}^{(H)} \cos \lambda_H + n_{cz}^{(H)} \sin \lambda_H \\ -n_{cy}^{(H)} \sin \lambda_H + n_{cz}^{(H)} \cos \lambda_H \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

將方程式(2.15)以及方程式(2.17)代入(2.7)式可得嚙合方程式：

$$f_1(u_1, \theta, \phi_1) = \mathbf{n}_r^{(H)} \cdot \mathbf{V}_r^{(H)} = \mathbf{n}_r^{(H)} \cdot (\mathbf{V}_r^{(H)} - \mathbf{V}_r^{(1)}) = \mathbf{n}_r^{(H)} \cdot (-\mathbf{V}_r^{(1)}) = 0$$

化簡整理後可得蝸桿與磨輪刀具之嚙合方程式如下：

$$f_1(u_1, \theta, \phi_1) = -Y_h^{(H)} n_{f'x}^{(H)} + (X_h^{(H)} - A_c) n_{f'y}^{(H)} + p n_{f'z}^{(H)} = 0 \quad (2.18)$$

2.4 蝸桿之齒面數學模式

根據齒輪原理[9]，欲求得被創成齒輪的齒面方程式，除了嚙合方程式之外，尚須求得刀具表示在被創成齒輪座標系之軌跡方程式。如圖 2.6 所示，直邊磨輪刀具在蝸桿座標系所形成的軌跡方程式，可利用齊次座標轉換矩陣方程式，將直邊磨輪刀具在 $S_h^{(H)}$ 座標系上的位置向量 $\mathbf{R}_h^{(H)}$ 轉換至蝸桿座標系 S_1 ，以求得其位置向量 \mathbf{R}_1 ，此座標轉換矩陣方程式可表示如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1r}^{(H)} \mathbf{M}_{rh}^{(H)} \mathbf{R}_h^{(H)} = \mathbf{M}_{1h}^{(H)} \mathbf{R}_h^{(H)} \quad (2.19)$$

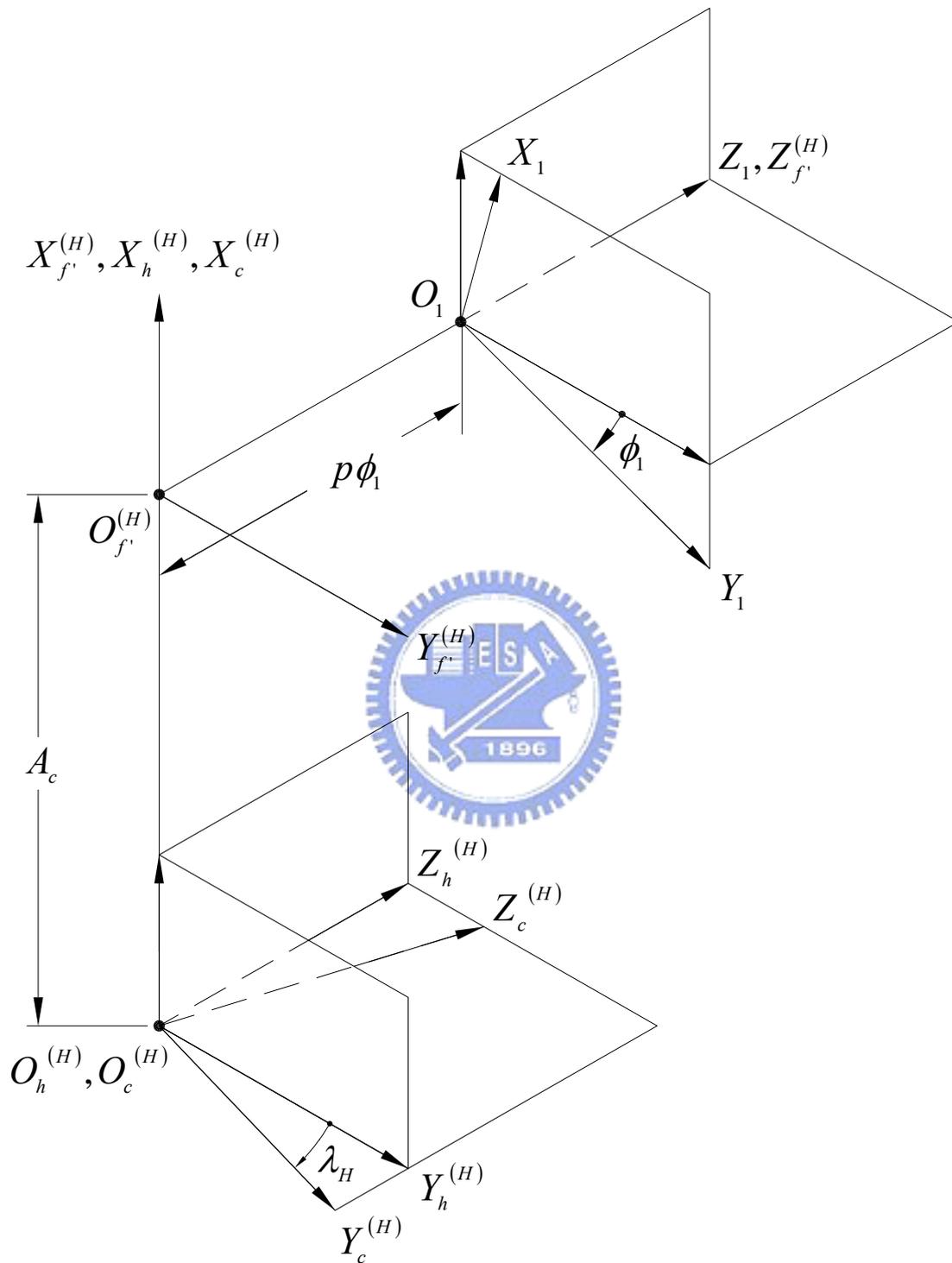


圖 2.6 直邊磨輪創成蝸桿之座標示意圖

其中

$$\mathbf{M}_{1r}^{(H)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p\phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{rh}^{(H)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -A_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{1h}^{(H)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & -A_c \cos \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & A_c \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & -p\phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將(2.16)式代入(2.19)式即可求得直邊磨輪刀具表示在蝸桿座標系 S_1 上之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1^{(H)} \\ Y_1^{(H)} \\ Z_1^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_h^{(H)} \cos \phi_1 + Y_h^{(H)} \sin \phi_1 - A_c \cos \phi_1 \\ -X_h^{(H)} \sin \phi_1 + Y_h^{(H)} \cos \phi_1 + A_c \sin \phi_1 \\ Z_h^{(H)} - p\phi_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

同理，亦可得直邊磨輪刀具表示在蝸桿座標系 S_1 上之單位法向量如下：

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{1x}^{(H)} \\ n_{1y}^{(H)} \\ n_{1z}^{(H)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{cx}^{(H)} \\ n_{cy}^{(H)} \cos \lambda_H + n_{cz}^{(H)} \sin \lambda_H \\ -n_{cy}^{(H)} \sin \lambda_H + n_{cz}^{(H)} \cos \lambda_H \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

因方程式(2.20)表示直邊磨輪刀具左右齒面在蝸桿座標系 S_1 上之軌跡方程式，若將軌跡方程式(2.20)與嚙合方程式(2.18)聯立，即可得到蝸桿之齒面數學方程式。

2.5 ZK 型蝸桿之電腦輔助繪圖

依據 2.4 節所建立之蝸桿齒面數學模式，並利用電腦輔助繪圖軟體即可繪製出蝸桿外形，在此選定 ZK 型蝸桿及磨輪之主要設計參數如表 2.1 所示，經繪製出磨輪所創成的蝸桿齒面外形如圖 2.7 所示。

表 2.1 ZK 型蝸桿與直邊磨輪之設計參數

名稱	代號	關係	數值
蝸桿旋向			右旋
蝸桿齒數	T_1		3
磨輪法向壓力角	$\alpha_n^{(H)}$	= 蝸桿法向壓力角	20°
磨輪導程角	λ_H	= 蝸桿導程角	30°
磨輪法向模數	$m_n^{(H)}$	= 蝸桿法向模數	4.0 mm/tooth
磨輪齒根高	h_H	= $m_n^{(H)}$	4.0 mm
磨輪齒冠高	a_H	= $m_n^{(H)}$	4.0 mm
磨輪刀具面節圓半徑	r_c		100.0 mm
蝸桿與磨輪之中心距	A_c	= $r_c + r_1$	112.0 mm
蝸桿節圓半徑	r_1	= $\frac{m_n^{(H)} T_1}{2 \sin \lambda_H}$	12.0 mm
蝸桿單位角度之導程	p	= $\frac{m_n^{(H)} T_1}{2 \cos \lambda_H}$	6.93mm/rad
導角半徑相關參數	f_{Hr}	= $0.25 m_n^{(H)}$	1.00 mm
導角圓弧半徑	ρ_{Hr}	= $\frac{f_{Hr}}{(1 - \sin \alpha_n^{(H)})}$	1.52 mm

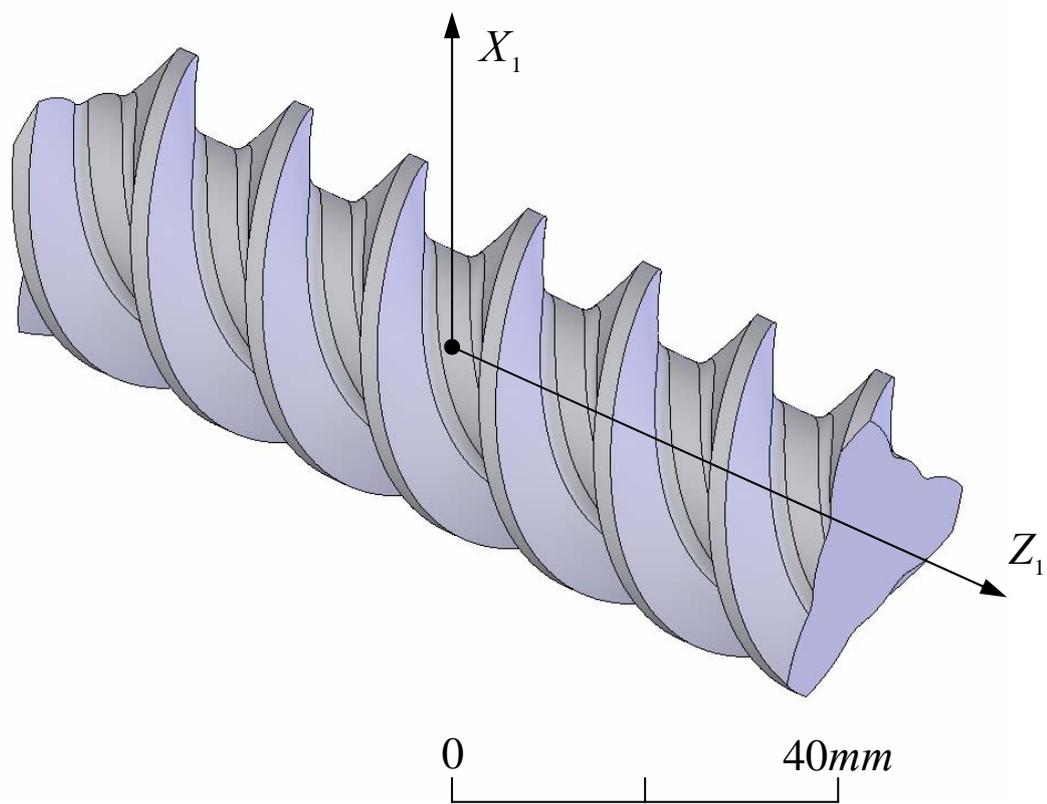


圖 2.7 ZK 型蝸桿之電腦輔助繪圖

第三章 蝸輪數學模式之推導

3.1 前言

蝸輪在製造上主要有兩種方式，一是以飛刀切削，另一種方式是利用滾刀滾削。一般而言，飛刀切削的優點是可以小量生產時成本較低以及齒形的精度較高；然而滾刀之切削效率較高，適合大量生產。因此，在試切蝸輪或生產少量樣本時，適合以飛刀作為切製蝸輪之工具，而工業上量產規格穩定之蝸輪時，則多以滾刀來滾削蝸輪。在本文中所探討之蝸輪齒面，係將飛刀掛載於刀盤上以模擬飛刀切製過程，所以在建立蝸輪齒面數學模式之前，須先建立齒條刀的刀面外形數學模式，並利用齊次座標轉換及微分幾何的原理，找出接觸點或接觸線的位置，以及其在接觸面上的共同法向量，並推導嚙合方程式，以建構出蝸輪齒面之數學模式。

3.2 假想齒條刀之刀面數學模式

假設蝸輪齒面為 Σ_2 ，而 Σ_F 則為創成蝸輪齒面之齒條刀。圖 3.1 所示為飛刀之法向剖面圖，飛刀之法向剖面呈左右對稱形狀，飛刀法向外形之直邊刀面方程式可表示於 $S_b^{(F)}(X_b^{(F)}, Y_b^{(F)}, Z_b^{(F)})$ 座標系如下：

$$\mathbf{R}_b^{(F)} = \begin{bmatrix} X_b^{(F)} \\ Y_b^{(F)} \\ Z_b^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \cos \alpha_n^{(F)} - a_F \\ 0 \\ \pm (b_F - a_F \tan \alpha_n^{(F)} + u_2 \sin \alpha_n^{(F)}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

(3.1)式之正負號上方的符號代表飛刀之右刀具面的刀刃，係用以創成蝸輪之左側齒面；正負號下方的符號則代表飛刀之左刀具面的刀刃，用以創成蝸輪之右側齒面。 $\alpha_n^{(F)}$ 為法向壓力角； u_2 為飛刀直邊刀刃之設計參數，表示由直邊之起點 $M_0^{(F)}$ 沿著齒刀面之直邊移動至任一動點 $M^{(F)}$ 之距離，亦即

$u_2 = \left| \overline{M_0^{(F)}} M^{(F)} \right|$ ，其範圍定義為 $0 \leq u_2 \leq (h_F + a_F) / \cos \alpha_n^{(H)}$ ； a_F 為齒條刀之齒冠高，於本文中設定為 $m_n^{(F)}$ ， $m_n^{(F)}$ 為飛刀之法向模數； h_F 為齒條刀之齒根高，於本文中設定為 $m_n^{(F)}$ ； $2b_F$ 為齒條刀法向節距的一半，也等於齒厚，亦即 $2b_F = \pi m_n^{(F)} / 2$ 。

圖 3.2 為圖 3.1 飛刀法向剖面之導角放大圖，其方程式可表示於 $S_b^{(F)}(X_b^{(F)}, Y_b^{(F)}, Z_b^{(F)})$ 座標系如下：

$$\mathbf{R}_{br}^{(F)} = \begin{bmatrix} X_{br}^{(F)} \\ Y_{br}^{(F)} \\ Z_{br}^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{Fr} (\sin \alpha_n^{(F)} - \sin \theta_{Fr}) - a_F \\ 0 \\ \pm [b_F - a_F \tan \alpha_n^{(F)} - \rho_{Fr} (\cos \alpha_n^{(F)} - \cos \theta_{Fr})] \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

其中 ρ_{Fr} 為飛刀法向剖面導角之圓弧半徑； θ_{Fr} 為導角之圓弧參數，其範圍定義為 $\alpha_n^{(F)} \leq \theta_{Fr} \leq \frac{\pi}{2}$ ； f_{Fr} 係與圓弧半徑相關之參數，於本研究中設定為 $0.25m_n^{(F)}$ 。

欲模擬具導程角(Lead Angle) λ_F 之齒條刀外形時，則圖 3.1 所示之飛刀正交剖面應依圖 3.3 所示之圓弧路徑運動，才可形成此一齒條刀外形且與飛刀切削蝸輪路徑一致。其中座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 為齒條刀之固定座標系， $Y_c^{(F)} - Z_c^{(F)}$ 平面為齒條刀之基準節面(Axode)與被切製之蝸輪節圓所在的平面相切，如圖 3.3 及圖 3.4 所示。飛刀法向剖面座標系 $S_b^{(F)}(X_b^{(F)}, Y_b^{(F)}, Z_b^{(F)})$ 係以 O_l 為圓心及 R_l 為旋轉半徑，沿著飛刀刀盤圓弧路徑 $O_b^{(F)} O_b^{(F)}$ 運動，而在齒條刀之固定座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 模擬形成假想齒條刀，而 $Z_c^{(F)}$ 軸與 $Z_b^{(F)}$ 軸間的夾角則為假想齒條刀之導程角 λ_F 。利用齊次座標轉換矩陣方程式可將飛刀刀具面 Σ_F 表示在 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 座標系如下：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = \mathbf{M}_{cb'}^{(F)} \mathbf{M}_{b'b}^{(F)} \mathbf{R}_b^{(F)} = \mathbf{M}_{cb}^{(F)} \mathbf{R}_b^{(F)}$$

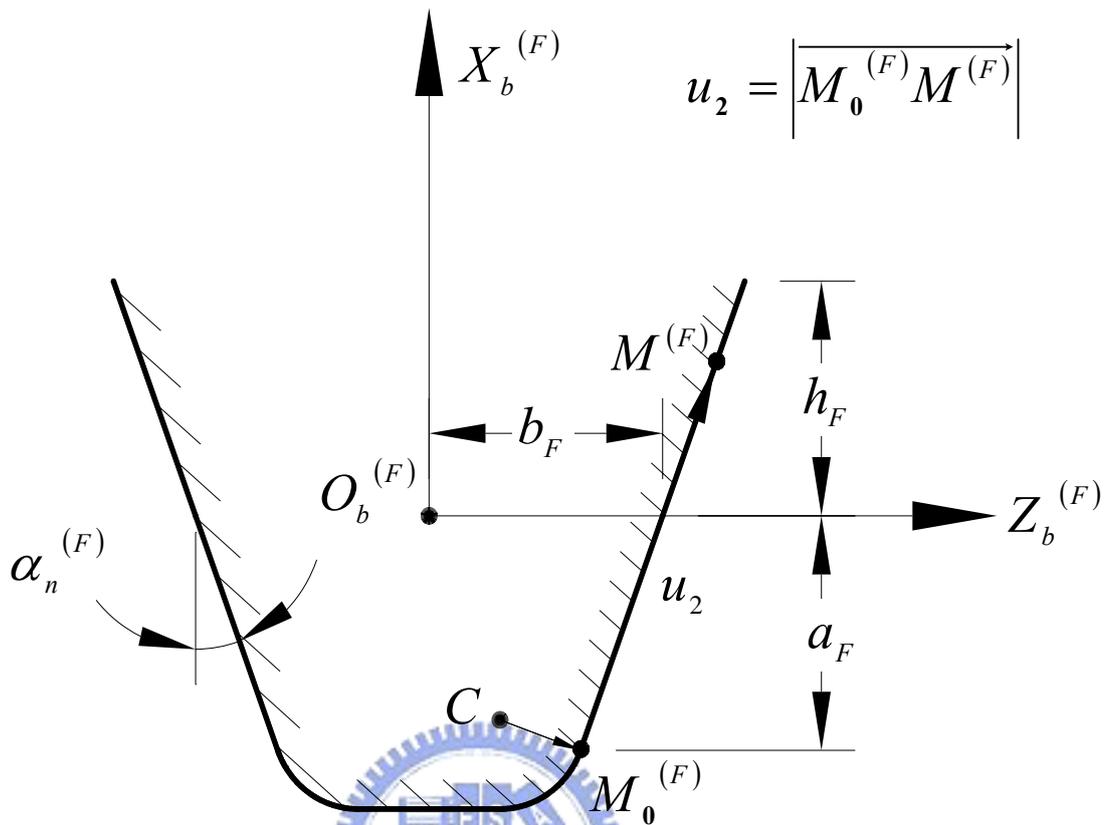


圖 3.1 飛刀之法向剖面圖

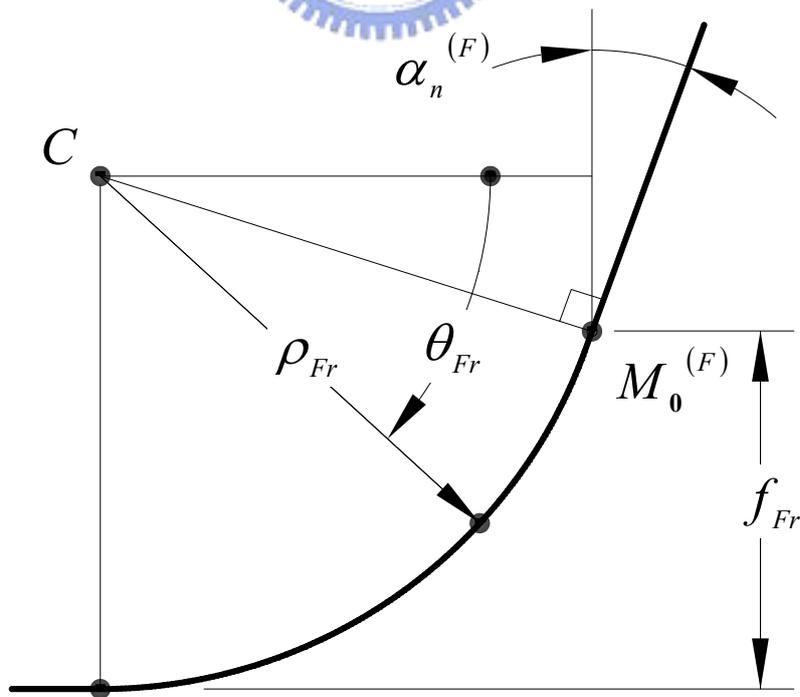


圖 3.2 飛刀法向剖面之導角放大圖

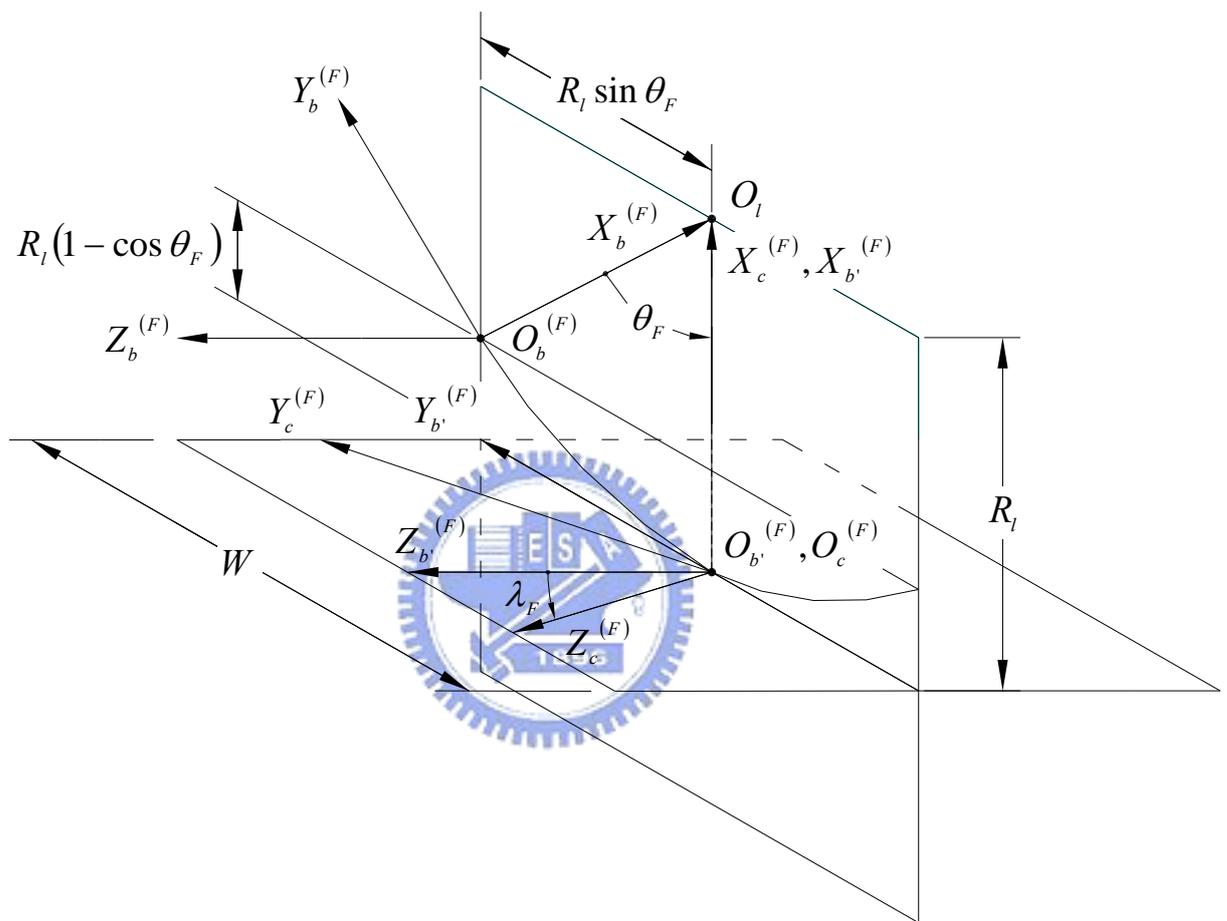


圖 3.3 飛刀剖面形成具導程角之假想齒條刀的相對座標關係圖

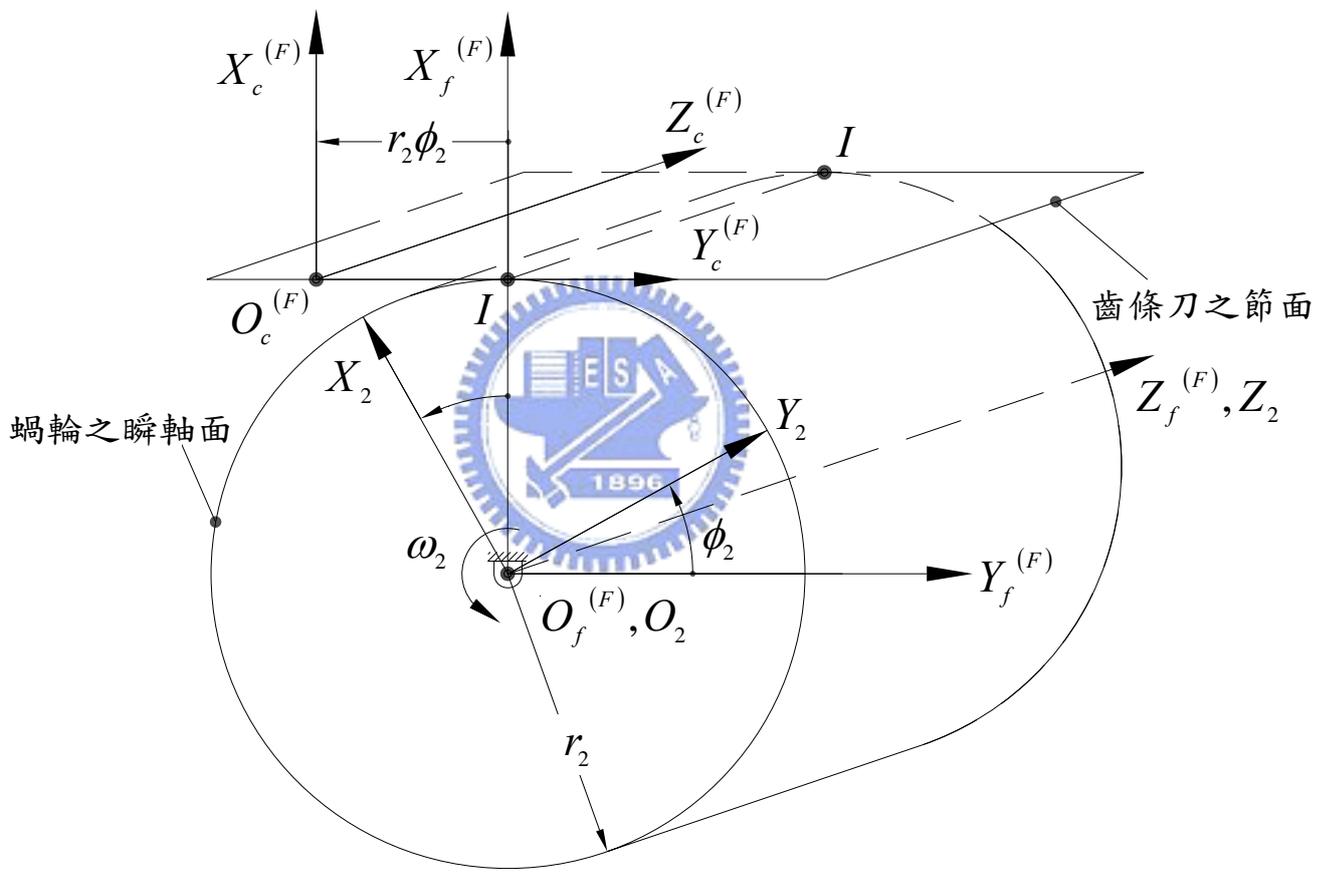


圖 3.4 齒條刀與蝸輪相對運動關係圖

$$= \begin{bmatrix} X_c^{(F)} \\ Y_c^{(F)} \\ Z_c^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_b^{(F)} \cos \theta_F + R_l (1 - \cos \theta_F) \\ -X_b^{(F)} \cos \lambda_F \sin \theta_F + Z_b^{(F)} \sin \lambda_F + R_l \sin \theta_F \cos \lambda_F \\ X_b^{(F)} \sin \lambda_F \sin \theta_F + Z_b^{(F)} \cos \lambda_F - R_l \sin \theta_F \sin \lambda_F \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

其中

$$\mathbf{M}_{b'b}^{(F)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_F & \sin \theta_F & 0 & R_l (1 - \cos \theta_F) \\ -\sin \theta_F & \cos \theta_F & 0 & R_l \sin \theta_F \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{cb'}^{(F)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_F & \sin \lambda_F & 0 \\ 0 & -\sin \lambda_F & \cos \lambda_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{cb}^{(F)} = \begin{bmatrix} \cos \theta_F & \sin \theta_F & 0 & R_l (1 - \cos \theta_F) \\ -\cos \lambda_F \sin \theta_F & \cos \lambda_F \cos \theta_F & \sin \lambda_F & R_l \sin \theta_F \cos \lambda_F \\ \sin \lambda_F \sin \theta_F & -\sin \lambda_F \cos \theta_F & \cos \lambda_F & -R_l \sin \theta_F \sin \lambda_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式中 R_l 為飛刀圓形刀盤之半徑； θ_F 為飛刀法向剖面之位置參數，用以決

定飛刀在刀盤上的位置，其範圍為 $-\sin^{-1} \frac{W}{2R_l \cos \lambda_F} \leq \theta_F \leq \sin^{-1} \frac{W}{2R_l \cos \lambda_F}$ ，

W 表示齒寬； λ_F 則為假想齒條刀之導程角，即被創成蝸輪之導程角，如圖

3.5 蝸桿蝸輪組之軸交角關係示意圖所示，其值為 $\lambda_H + \gamma$ ； γ 為蝸桿蝸輪組

裝時之交錯角，表示蝸桿之 Z_1 軸與蝸輪之 Z_2 軸所夾角度，其範圍為

$0 \leq \gamma \leq \pi/2$ 。同理可得飛刀導角表示在假想齒條刀 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 座標

系之方程式如下：

$$R_{cr}^{(F)} = \begin{bmatrix} X_{cr}^{(F)} \\ Y_{cr}^{(F)} \\ Z_{cr}^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{br}^{(F)} \cos \theta_F + R_l (1 - \cos \theta_F) \\ -X_{br}^{(F)} \cos \lambda_F \sin \theta_F + Z_{br}^{(F)} \sin \lambda_F + R_l \sin \theta_F \cos \lambda_F \\ X_{br}^{(F)} \sin \lambda_F \sin \theta_F + Z_{br}^{(F)} \cos \lambda_F - R_l \sin \theta_F \sin \lambda_F \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Z_1 軸與 Z_2 軸為旋轉軸

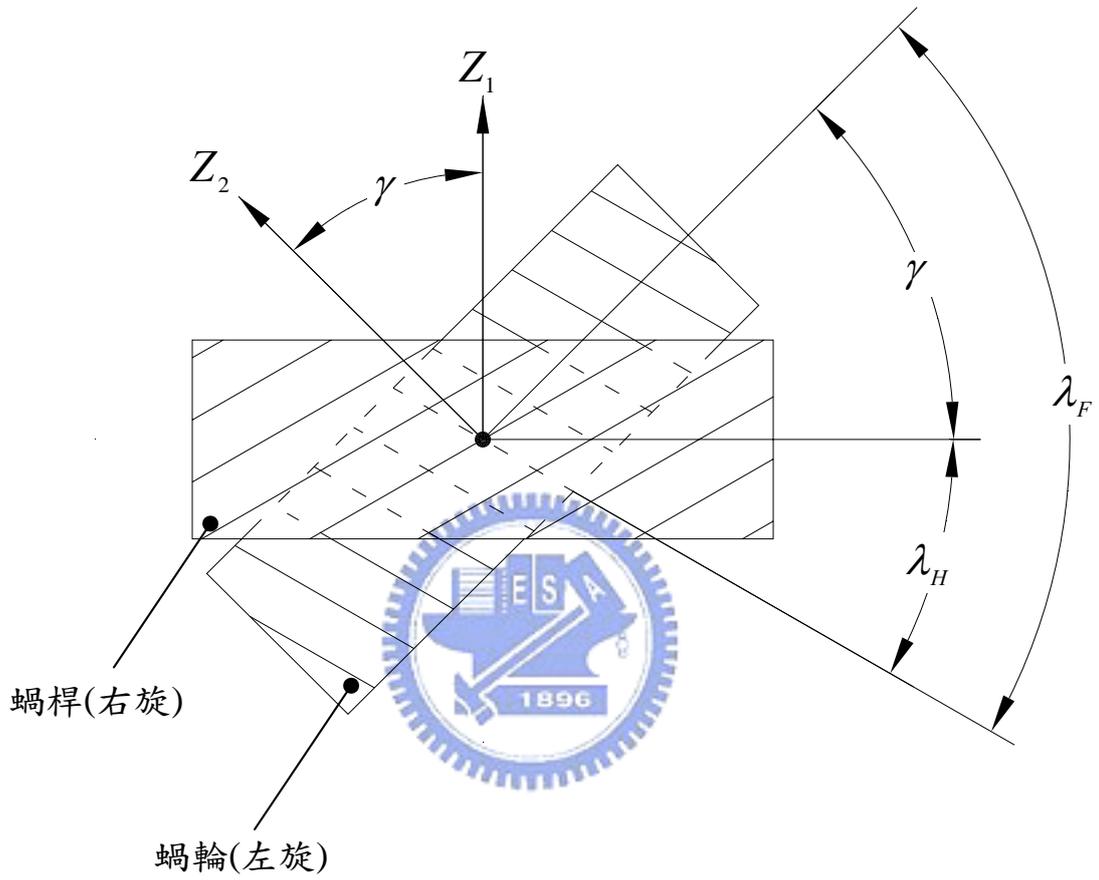


圖 3.5 蝸桿蝸輪組之軸交角關係示意圖

3.3 蝸輪之嚙合方程式

根據齒輪原理[9]，被創成之齒輪外形可由刀具表示在被創成之齒輪座標系的軌跡方程式與兩者之嚙合方程式聯立而得。由齒輪基本理論得知，須先將 3.2 節所推導之假想齒條刀齒面與蝸輪齒面之接觸點相對速度 $\mathbf{V}^{(F2)}$ ，與假想齒條刀之刀面法向量 $\mathbf{N}^{(F)}$ 表示在同一座標系。依據(2.6)公式，由於相對速度與法向量在其共同接觸線上係呈現相互垂直之關係，若將此一關係表示在 $S_f^{(F)}$ 座標系，則假想齒條刀與被創成之蝸輪的嚙合方程式可表示為：

$$\mathbf{N}_f^{(F)} \bullet \mathbf{V}_f^{(F2)} = 0 \quad (3.5)$$

由於假想齒條刀之齒面是由 θ_F 與 u_2 這兩個參數所建構之規則曲面，因此，若假想齒條刀刀面之數學模式對 θ_F 與 u_2 取偏微分之外積，即可求得假想齒條刀左右刀面之法向量：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \quad (3.6)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n^{(F)} \cos \theta_F \\ -\cos \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \sin \theta_F \pm \sin \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \\ \cos \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \sin \theta_F \pm \sin \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} = \begin{bmatrix} -(X_b^{(F)} - R_l) \sin \theta_F \\ -(X_b^{(F)} - R_l) \cos \lambda_F \cos \theta_F \\ (X_b^{(F)} - R_l) \sin \lambda_F \cos \theta_F \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

將方程式(3.7)與(3.8)代入方程式(3.6)，經化簡後可得假想齒條刀左右刀面之法向量如下：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} \pm (X_b^{(F)} - R_l) \sin \alpha_n^{(F)} \cos \theta_F \\ (X_b^{(F)} - R_l) \left(-\cos \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \mp \sin \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \sin \theta_F \right) \\ (X_b^{(F)} - R_l) \left(-\cos \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \pm \sin \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \sin \theta_F \right) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

假想齒條刀之齒面單位法向量則可由下式求得：

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(F)}}{|\mathbf{N}_c^{(F)}|} \quad (3.10)$$

將(3.9)式代入(3.10)式，即可求得假想齒條刀刀面之單位法向量為：

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} n_{cx}^{(F)} \\ n_{cy}^{(F)} \\ n_{cz}^{(F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n^{(F)} \cos \theta_F \\ -\cos \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \mp \sin \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \sin \theta_F \\ -\cos \alpha_n^{(F)} \cos \lambda_F \pm \sin \alpha_n^{(F)} \sin \lambda_F \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

同理亦可求得假想齒條刀導角之單位法向量為：

$$\mathbf{n}_{cr}^{(F)} = \begin{bmatrix} n_{crx}^{(F)} \\ n_{cry}^{(F)} \\ n_{crz}^{(F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp \sin \theta_{Fr} \cos \theta_F \\ \cos \theta_{Fr} \sin \lambda_F \pm \sin \theta_{Fr} \cos \lambda_F \sin \theta_F \\ \cos \theta_{Fr} \cos \lambda_F \mp \sin \theta_{Fr} \sin \lambda_F \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

至於假想齒條刀與被創成之蝸輪間的相對速度，可依據圖 3.4 所示之相對關係圖求得。假想齒條刀在蝸輪瞬軸面上方由右向左平移，假想齒條刀刀面與蝸輪之接觸點速度表示在 $S_f^{(F)}$ 為：

$$\mathbf{V}_f^{(F)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_2 \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

將被創成之蝸輪齒面與假想齒條刀相對應之接觸點的速度表示於 $S_f^{(F)}$ 座標系為：

$$\mathbf{V}_f^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_f^{(F)} \times \left(\mathbf{R}_c^{(F)} + \overline{O_2 O_c^{(f)}} \right) = \begin{bmatrix} (Y_c^{(F)} - r_2 \phi_2) \omega_2 \\ (-X_c^{(F)} - r_2) \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

其中

$$\overrightarrow{O_2 O_c^{(f)}} = \begin{bmatrix} r_2 \\ -r_2 \phi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

將方程式(3.13)與(3.14)相減，即可求得假想齒條刀左右齒面與被創成之蝸輪在創成過程時之相對速度：

$$\mathbf{V}_f^{(F2)} = \mathbf{V}_f^{(F)} - \mathbf{V}_f^{(2)} = \begin{pmatrix} -(Y_c^{(F)} - r_2 \phi_2) \omega_2 \\ X_c^{(F)} \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

(3.11)式之假想齒條刀刀面之單位法向量亦可經由下列之座標轉換矩陣方程式，由 $S_c^{(F)}$ 座標系轉換至 $S_f^{(F)}$ 座標系：

$$\mathbf{n}_f^{(F)} = \begin{bmatrix} n_{fx}^{(F)} \\ n_{fy}^{(F)} \\ n_{fz}^{(F)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{fc} \mathbf{n}_c^{(F)} = \mathbf{n}_c^{(F)} \quad (3.17)$$

由於假想齒條刀在創成蝸輪的瞬間，也會有共同切平面產生，此共同切平面與假想齒條刀和蝸輪之相對速度相互垂直，所以嚙合方程式(3.5)式可由方程式(3.16)和(3.17)求得如下：

$$f_2(u_2, \theta_F, \phi_2) = \mathbf{n}_f^{(F)} \cdot \mathbf{V}_f^{(F2)} = -(Y_c^{(F)} - r_2 \phi_2) n_{fx}^{(F)} + X_c^{(F)} n_{fy}^{(F)} = 0 \quad (3.18)$$

此嚙合方程式經過整理後亦可簡化成下列關係式：

$$\phi_2 = \frac{Y_c^{(F)}}{r_2} - X_c^{(F)} \frac{n_{fy}^{(F)}}{r_2 n_{fx}^{(F)}} \quad (3.19)$$

3.4 蝸輪之齒面數學模式

根據齒輪原理[9]，欲求得被創成齒輪的齒面方程式，除了嚙合方程式之外，尚須求得刀具表示在被創成齒輪座標系之軌跡方程式。假想齒條刀刀具面在蝸輪座標系所形成的軌跡方程式，可利用齊次座標轉換矩陣方程式，將假想齒條刀由原來表示在 $S_c^{(F)}$ 座標系上的位置向量 $\mathbf{R}_c^{(F)}$ 轉換至蝸輪

座標系 S_2 ，並以位置向量 \mathbf{R}_2 表示之，此其次座標轉換矩陣方程式可表示如下：

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{2c}^{(F)} \mathbf{R}_c^{(F)} \quad (3.20)$$

其中

$$\mathbf{M}_{2c}^{(F)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 & r_2(\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_2) \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & r_2(\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

將(3.3)式代入(3.20)及(3.21)可得假想齒條刀之刀具面表示在蝸輪座標系 S_2 之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} X_2^{(F)} \\ Y_2^{(F)} \\ Z_2^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c^{(F)} \cos \phi_2 - Y_c^{(F)} \sin \phi_2 + r_2(\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_2) \\ X_c^{(F)} \sin \phi_2 + Y_c^{(F)} \cos \phi_2 + r_2(\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2) \\ Z_c^{(F)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

同理亦可求得假想齒條刀之刀具面表示在蝸輪座標系 S_2 之單位法向量為：

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{2x}^{(F)} \\ n_{2y}^{(F)} \\ n_{2z}^{(F)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{cx}^{(F)} \cos \phi_2 - n_{cy}^{(F)} \sin \phi_2 \\ n_{cx}^{(F)} \sin \phi_2 + n_{cy}^{(F)} \cos \phi_2 \\ n_{cz}^{(F)} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

因方程式(3.22)表示假想齒條刀之左右齒面表示在蝸輪座標系 S_2 之軌跡方程式，若將軌跡方程式(3.22)與嚙合方程式(3.19)聯立，即可得到蝸輪之齒面數學方程式。

3.5 蝸輪之電腦輔助繪圖

依據 3.4 節所建立之蝸輪齒面數學模式配合電腦輔助繪圖軟體，即可繪製出蝸輪之外形，在此選定飛刀和蝸輪之主要設計參數如表 3.1 所示，以驗證本章所推導之蝸輪齒面模式。所繪製出的蝸輪齒面外形如圖 3.6 所示

表 3.1 蝸輪與飛刀之設計參數

名稱	代號	關係式	數值
蝸輪旋向			右旋
蝸輪齒數	T_2		30
飛刀法向壓力角	$\alpha_n^{(F)}$	= 蝸輪法向壓力角	20°
飛刀導程角	λ_F	= 蝸輪導程角	30° (右旋)
飛刀法向模數	$m_n^{(F)}$	= 蝸輪法向模數	4.0 mm/tooth
飛刀與蝸輪之交錯角	γ	= 蝸桿蝸輪之交錯角	90°
飛刀齒頂高	a_F	= $m_n^{(F)}$	4.0 mm
飛刀齒根高	h_F	= $m_n^{(F)}$	4.0 mm
飛刀圓形刀盤半徑	R_l		100.0 mm
蝸輪節圓半徑	r_2	= $m_n^{(F)} T_2 / 2 \sin \lambda_F$	62.0 mm
導角半徑相關參數	f_{Fr}	= $0.25 m_n^{(F)}$	1.0 mm
導角圓弧半徑	ρ_{Fr}	= $f_{Fr} / (1 - \sin \alpha_n^{(F)})$	1.5 mm

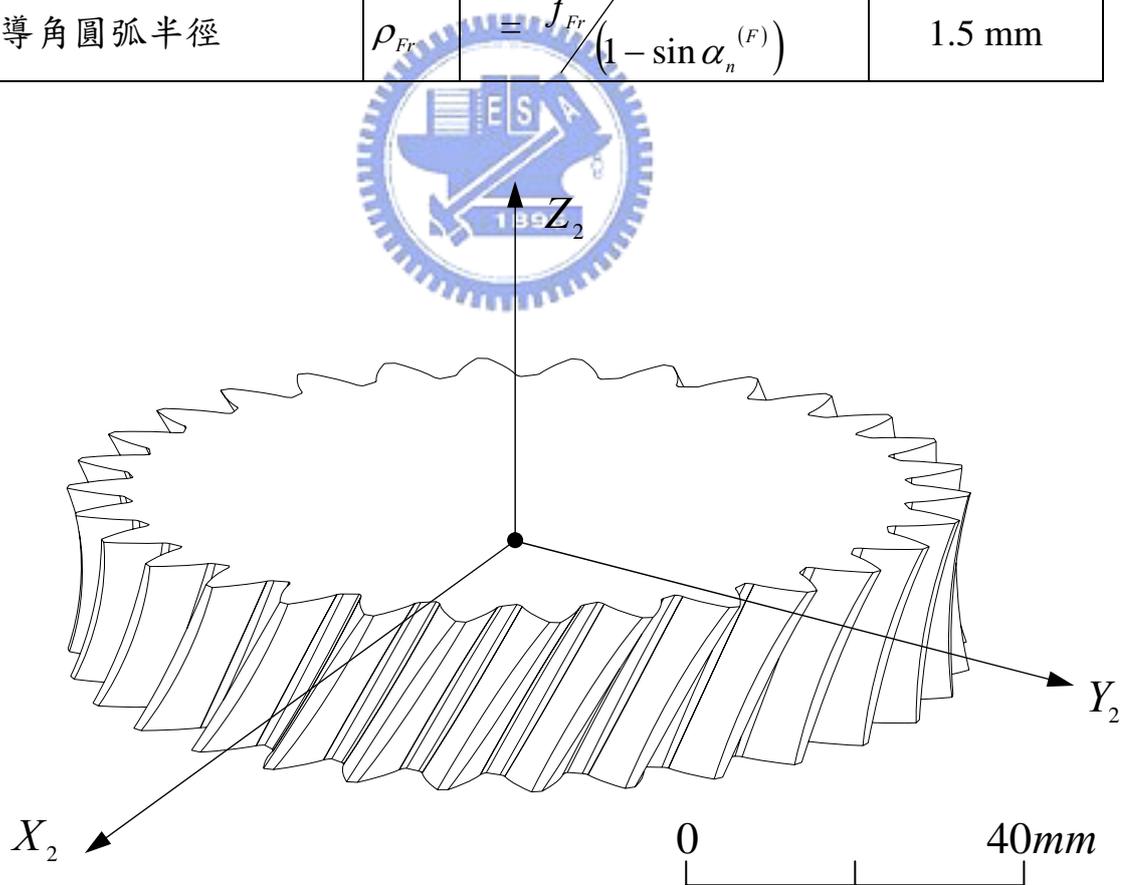


圖 3.6 蝸輪之電腦繪圖

第四章 蝸桿蝸輪之接觸與齒印分析

4.1 前言

齒輪組在進行嚙合運動時，齒輪之齒形以及其裝配誤差是影響齒輪組傳動之重要因素。齒形誤差包括靜態精度誤差，即單一齒形誤差、連續累積齒形誤差、壓力角誤差、導程角誤差等，以及齒輪組在裝配的過程中，水平軸向裝配誤差、垂直軸向裝配誤差以及中心距裝配誤差等所造成的運動誤差。本研究依據 Litvin[9,10,11]所提出之齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis)方法，並配合前述章節所建立之蝸桿蝸輪齒面數學模式，利用本研究所建構之電腦輔助齒輪接觸模擬分析程式，進行蝸桿蝸輪組在嚙合時所產生的運動誤差分析，由分析之結果可以作為改變齒形設計參數之依據，而可設計出傳動特性更佳的蝸桿蝸輪組。此一理論之齒輪接處分析需包括以下假設條件：

- 一、假設齒面為剛體(Rigid Body)。
- 二、不考慮齒輪製造上的誤差。
- 三、不考慮齒輪溫度以及潤滑狀態所造成之影響。
- 四、蝸桿蝸輪組之裝配狀態穩定，誤差呈現週期性變化。

齒輪之接觸齒印模擬分析乃是於齒輪接觸分析中，進一步模擬齒輪因齒面受力所造成之彈性變形，而使得接觸點成為一接觸區域。剛體齒印分析有曲率分析法[9,10,11]以及齒面外形法(Surface Topology Method)[4]，而具負載之齒印分析則使用有限元素法(Finite Element Method)來進行模擬分析。本研究所使用的齒面外形法，其原理是仿照齒輪之齒印試驗[6]，於兩嚙合齒面接觸點附近，齒面原先塗覆之紅丹顆粒會因齒面接觸而刮除，因此，依照接觸分析所得之接觸點週遭，其齒面分離量若符合紅丹顆粒大小條件之範圍，即可視為接觸區域。此一分析之目的主要是讓齒輪之接觸分

析能更趨於實際情形，瞭解齒輪啮合時之接觸狀況及齒印之變化趨勢。

4.2 蝸桿蝸輪組齒面接觸分析數學模式

在進行蝸桿蝸輪組之齒面接觸分析前，需先將蝸桿蝸輪之齒面數學方程式以及齒面單位法向量，經過座標轉換表示在同一參考座標系上方可進行分析。圖 4.1 所示為蝸桿蝸輪組具裝配誤差之座標系關係示意圖，座標系 $S_1(X_1^{(H)}, Y_1^{(H)}, Z_1^{(H)})$ 與座標系 $S_2(X_2^{(F)}, Y_2^{(F)}, Z_2^{(F)})$ 分別固聯在 ZK 型蝸桿以及蝸輪上，其中 Z_1 軸為蝸桿之旋轉軸， ϕ_1' 則為蝸桿實際啮合時的旋轉角； Z_2 軸為蝸輪之旋轉軸， ϕ_2' 則為蝸輪實際啮合時的旋轉角；蝸桿與蝸輪之節圓半徑分別為 r_1 和 r_2 。座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為固定座標系；座標系 $S_{f2}(X_{f2}, Y_{f2}, Z_{f2})$ 為相對於固定座標系 S_f 與蝸桿座標系 S_1 及蝸輪座標系 S_2 ，具有垂直軸向中心距誤差 ΔS 之輔助座標系， S 則為齒輪座標系 S_1 及 S_2 之中心距，其大小為 $r_1 + r_2$ ；座標系 $S_{fh}(X_{fh}, Y_{fh}, Z_{fh})$ 與座標系 $S_{fv}(X_{fv}, Y_{fv}, Z_{fv})$ 分別為相對於固定座標系 S_f 與蝸桿座標系 S_1 及蝸輪座標系 S_2 ，具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h$ 以及垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v$ 之輔助座標系。茲將兩相啮合之蝸桿齒面 Σ_1 以及蝸輪齒面 Σ_2 之數學模式與單位法向量，利用齊次座標轉換矩陣方程式轉換至固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 如下：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{M}_n \mathbf{R}_1 \quad (4.1)$$

以及

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \mathbf{L}_n \mathbf{n}_1 \quad (4.2)$$

其中

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \cos\phi_1' & -\sin\phi_1' & 0 & 0 \\ \sin\phi_1' & \cos\phi_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

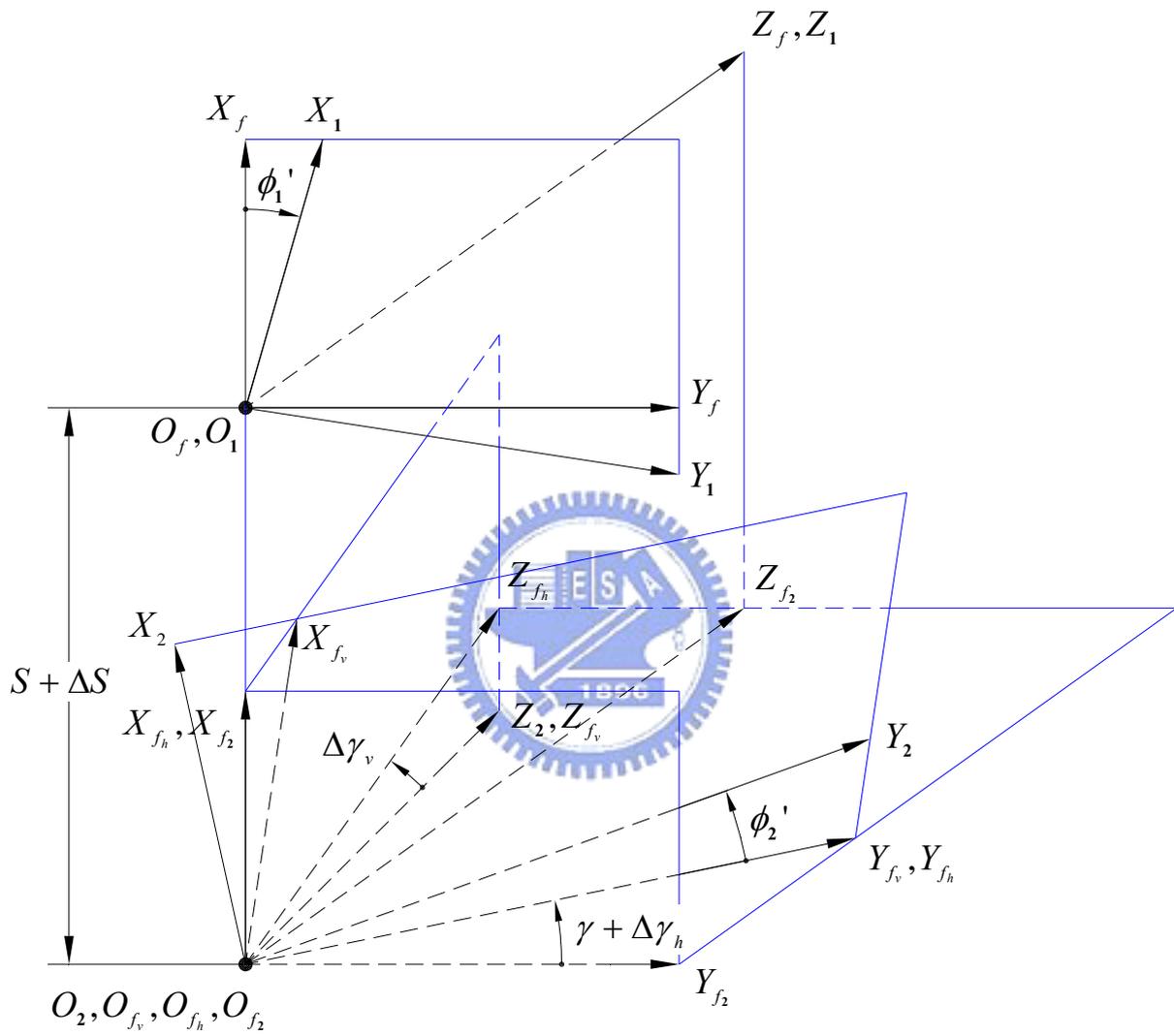


圖 4.1 蝸桿蝸輪組具裝配誤差之座標系關係示意圖

$$\mathbf{L}_{f1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & -\sin \phi_1' & 0 \\ \sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

經過運算後可得 ZK 型蝸桿表示在固定座標系 $S_f (X_f, Y_f, Z_f)$ 之齒面數學模式與單位法向量分別為：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} X_f^{(1)} \\ Y_f^{(1)} \\ Z_f^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^{(H)} \cos \phi_1' - Y_1^{(H)} \sin \phi_1' \\ X_1^{(H)} \sin \phi_1' + Y_1^{(H)} \cos \phi_1' \\ Z_1^{(H)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \begin{bmatrix} n_{fx}^{(1)} \\ n_{fy}^{(1)} \\ n_{fz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{1x}^{(H)} \cos \phi_1' - n_{1y}^{(H)} \sin \phi_1' \\ n_{1x}^{(H)} \sin \phi_1' + n_{1y}^{(H)} \cos \phi_1' \\ n_{1z}^{(H)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

其中 $X_1^{(H)}$ 、 $Y_1^{(H)}$ 以及 $Z_1^{(H)}$ 表示於方程式(2.20)， $n_{1x}^{(H)}$ 、 $n_{1y}^{(H)}$ 以及 $n_{1z}^{(H)}$ 則表示於方程式(2.21)。

同理，亦可將蝸輪之齒面數學模式及其單位法向量表示於固定座標系 $S_f (X_f, Y_f, Z_f)$ 如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \mathbf{M}_{ff_2} \mathbf{M}_{f_2f_h} \mathbf{M}_{f_hf_v} \mathbf{M}_{f_vf_2} \mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{f2} \mathbf{R}_2 \quad (4.5)$$

以及

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \mathbf{L}_{ff_h} \mathbf{L}_{f_hf_v} \mathbf{L}_{f_vf_2} \mathbf{n}_2 = \mathbf{L}_{f2} \mathbf{n}_2 \quad (4.6)$$

其中

$$\mathbf{M}_{ff_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(S + \Delta S) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{f_h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{f_v} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v & 0 & -\sin\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Delta\gamma_v & 0 & \cos\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{r,2} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2' & \sin\phi_2' & 0 & 0 \\ -\sin\phi_2' & \cos\phi_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

經過運算後可得

$$\mathbf{M}_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v \cos\phi_2' & \cos\Delta\gamma_v \sin\phi_2' & -\sin\Delta\gamma_v & -(S + \Delta S) \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v & 0 \\ b_{31} & b_{21} & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma_v \cos\phi_2' & \cos\Delta\gamma_v \sin\phi_2' & -\sin\Delta\gamma_v \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \\ b_{31} & b_{21} & \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\Delta\gamma_v \end{bmatrix}$$

其中

$$b_{21} = -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \cos\phi_2' - \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\phi_2'$$

$$b_{22} = -\sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \sin\phi_2' + \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\phi_2'$$

$$b_{31} = \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \cos\phi_2' - \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\phi_2'$$

$$b_{32} = \cos(\gamma + \Delta\gamma_h)\sin\Delta\gamma_v \sin\phi_2' + \sin(\gamma + \Delta\gamma_h)\cos\phi_2'$$

經過計算推導可得蝸輪表示在固定座標系 $S_f (X_f, Y_f, Z_f)$ 之齒面數學模式與

及其單位法向量如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} X_2^{(F)} \cos \Delta\gamma_v \cos \phi_2' + Y_2^{(F)} \cos \Delta\gamma_v \sin \phi_2' - Z_2^{(F)} \sin \Delta\gamma_v - (S + \Delta S) \\ b_{21} X_2^{(F)} + b_{22} Y_2^{(F)} - Z_2^{(F)} \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \\ b_{31} X_2^{(F)} + b_{32} Y_2^{(F)} + Z_2^{(F)} \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \begin{bmatrix} n_{2x}^{(F)} \cos \Delta\gamma_v \cos \phi_2' + n_{2y}^{(F)} \cos \Delta\gamma_v \sin \phi_2' - n_{2z}^{(F)} \sin \Delta\gamma_v \\ b_{21} n_{2x}^{(F)} + b_{22} n_{2y}^{(F)} - n_{2z}^{(F)} \sin(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \\ b_{31} n_{2x}^{(F)} + b_{32} n_{2y}^{(F)} + n_{2z}^{(F)} \cos(\gamma + \Delta\gamma_h) \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中 $X_2^{(F)}$ 、 $Y_2^{(F)}$ 以及 $Z_2^{(F)}$ 表示於方程式(3.21)， $n_{2x}^{(F)}$ 、 $n_{2y}^{(F)}$ 以及 $n_{2z}^{(F)}$ 則表示於方程式(3.22)。

當蝸桿蝸輪組在進行嚙合運動時，ZK 型蝸桿齒面 Σ_1 與蝸輪齒面 Σ_2 需滿足相切之條件，亦即兩嚙合齒面之瞬間接觸點 P 會落在蝸桿與蝸輪齒面之共同切平面上，如圖 2.5 所示。因此，表示在固定座標系 $S_f (X_f, Y_f, Z_f)$ 之蝸桿與蝸輪的嚙合齒面，其位置向量必定相同，且兩齒面之單位法向量亦必為共線，故須滿足下列兩個方程式：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{R}_f^{(2)} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (4.10)$$

方程式(4.9)表示蝸桿與蝸輪之嚙合齒面，在其齒面共同接觸點之位置向量相等，(4.9)式亦可表示為下列三個獨立分量方程式：

$$X_f^{(1)} = X_f^{(2)} \quad (4.11)$$

$$Y_f^{(1)} = Y_f^{(2)} \quad (4.12)$$

$$Z_f^{(1)} = Z_f^{(2)} \quad (4.13)$$

方程式(4.10)表示蝸桿與蝸輪之嚙合齒面，在其齒面共同接觸點之單位法向量共線，即兩齒面單位法向量之外積為零，(4.10)式亦可表示為下列三個方程式：

$$n_{fy}^{(1)} n_{fz}^{(2)} - n_{fy}^{(2)} n_{fz}^{(1)} = 0 \quad (4.14)$$

$$-n_{f_x}^{(1)}n_{f_z}^{(2)} + n_{f_x}^{(2)}n_{f_z}^{(1)} = 0 \quad (4.15)$$

$$n_{f_x}^{(1)}n_{f_y}^{(2)} - n_{f_x}^{(2)}n_{f_y}^{(1)} = 0 \quad (4.16)$$

然而單位法向量之長度等於 1，即 $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ ，故上列三個方程式中僅有兩個獨立方程式。此外，在利用盤狀磨輪創成蝸桿以及蝸輪時，會有兩個獨立的嚙合方程式(2.18)以及(3.18)，所以進行齒面接觸分析時，共有七個獨立方程式來求解八個未知數： u_1 、 θ_H 、 ϕ_1 、 u_2 、 θ_F 、 ϕ_2 、 ϕ_1' 和 ϕ_2' 。一般而言，蝸桿蝸輪組以蝸桿為主動件而蝸輪為從動件，故將兩齒面實際嚙合傳動時，蝸桿的旋轉角 ϕ_1' 設為已知，如此一來，兩齒面之接觸分析便成為七個非線性方程式求解七個未知數，便可透過數值分析法來求解之。

在求得兩嚙合齒面之接觸點各參數後，蝸桿蝸輪組在嚙合運動時的運動誤差 KE 便可經由以下關係式求得：

$$KE = \Delta\phi_2' = \phi_2' - \frac{T_1}{T_2}\phi_1' \quad (4.17)$$

其中 T_1 與 T_2 分別代表 ZK 型蝸桿與蝸輪之齒數。

4.3 蝸桿蝸輪組接觸齒印分析之數學模式

如圖 4.2 所示，接觸齒印分析所使用之齒面外形法乃是假設佈滿紅丹顆粒之兩嚙合齒面，將接觸瞬間之接觸點作為共同切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ 之原點 O_t ，其中 Z_t 與接觸點之法向量同向， X_t 與 Y_t 落於共同切平面 Σ_T 上。兩齒面接觸點周圍之紅丹顆粒會因齒面間距小於紅丹顆粒大小而被刮除，此一被刮除區域即為所求之接觸齒印。

在模擬接觸齒印時，先將兩嚙合齒面之數學模式經過座標轉換至兩齒面之共同切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ ，再沿著與 X_t 軸夾角 θ_t ($0 \leq \theta_t \leq 2\pi$)之向量 \mathbf{r}_t 的方向(如圖 4.2 所示)，計算該嚙合瞬間兩齒面之間距。圖 4.3 為固定一 θ_t 角時之 $\mathbf{r}_t - Z_t$ 截面圖，其中 P_t ($0 \leq P_t \leq P_t'$)為 \mathbf{r}_t 方向上之一動點，且 $|\overrightarrow{O_t P_t}|$

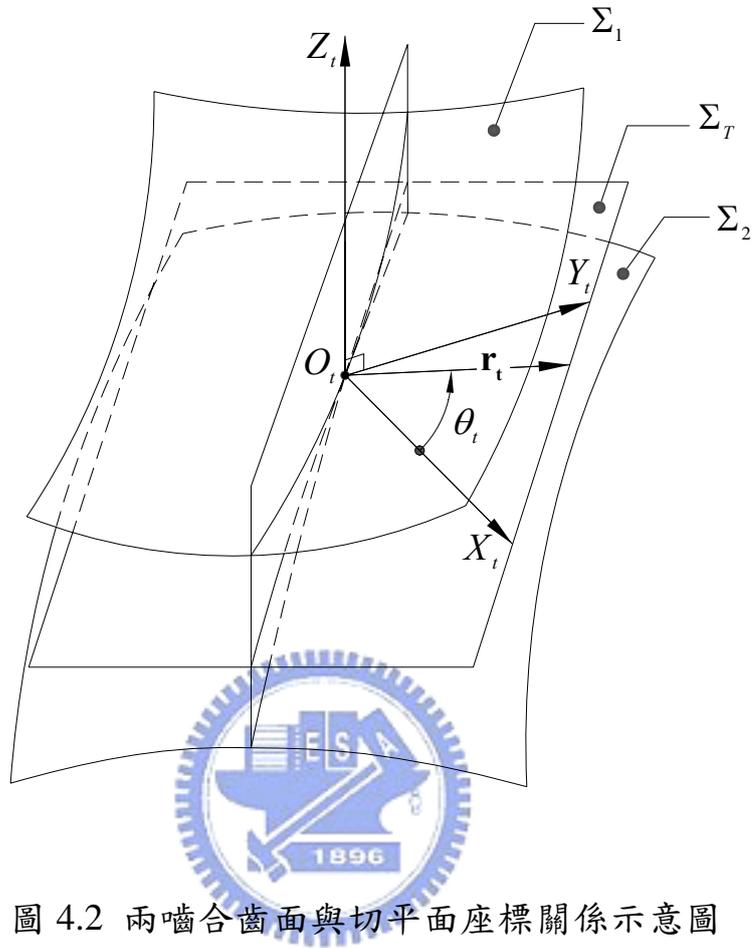


圖 4.2 兩嚙合齒面與切平面座標關係示意圖

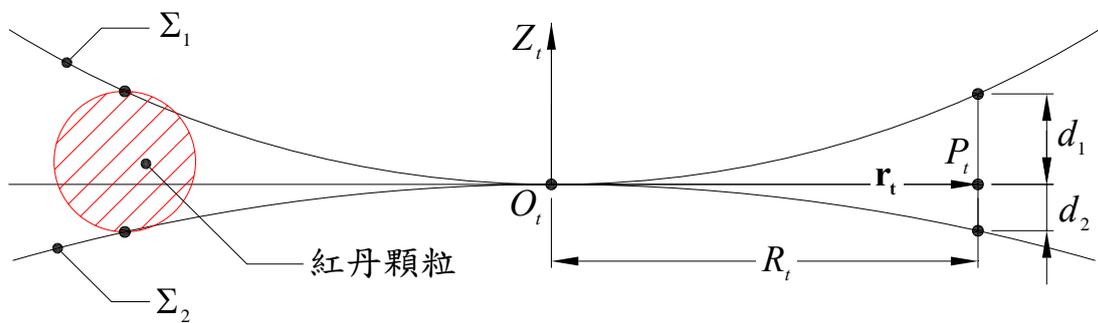


圖 4.3 固定一 θ_t 角時之 r_t - Z_t 截面圖

$=|\mathbf{r}_t| = R_t$ 。點 P_t 至齒面 Σ_1 與 Σ_2 的距離分別為 d_1 與 d_2 ， d_1 與 d_2 之和即表示在動點 P_t 處兩齒面之間距。沿 \mathbf{r}_t 方向之動點 P_t 的位置可用極座標表示為 $P_t(\theta_t, R_t)$ 。當計算所得之間距值等於紅丹顆粒大小(0.00632mm)，即表示由 O_t 點至動點 P_t 點之間範圍的紅丹顆粒均會因小於兩齒面間距而遭刮除。改變 θ_t 值並重覆上述之過程，以求得在該 θ_t 值時齒面之接觸齒印範圍。接觸點 O_t 周圍所有符合間距條件的 $P_t(\theta_t, R_t)$ 點集合，即為蝸桿蝸輪組之兩嚙合齒面於此接觸瞬間的接觸齒印外形。

要進行接觸齒印分析須先將兩齒面之數學模式，經由座標轉換至切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ ，圖 4.4 為切平面座標系與其他座標系之關係示意圖，其中座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為蝸桿蝸輪組之固定座標系，座標系 $S_m(X_m, Y_m, Z_m)$ 與 $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ 為輔助座標系， δ 角為 Z_m 軸與 Z_n 軸之夾角， ε 角為 Z_n 軸與 Z_t 軸之夾角。接觸點 O_t 表示於 S_f 座標系為 (p_x, p_y, p_z) ，茲將兩嚙合齒面之數學模式表示於同一切平面座標系 S_t 如下：

$$\mathbf{R}_t^{(1)} = \mathbf{M}_{tm} \mathbf{M}_{nm} \mathbf{M}_{mf} \mathbf{R}_f^{(1)} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{R}_t^{(2)} = \mathbf{M}_{tm} \mathbf{M}_{nm} \mathbf{M}_{mf} \mathbf{R}_f^{(2)} \quad (4.19)$$

其中

$$\mathbf{M}_{mf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{M}_{nm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

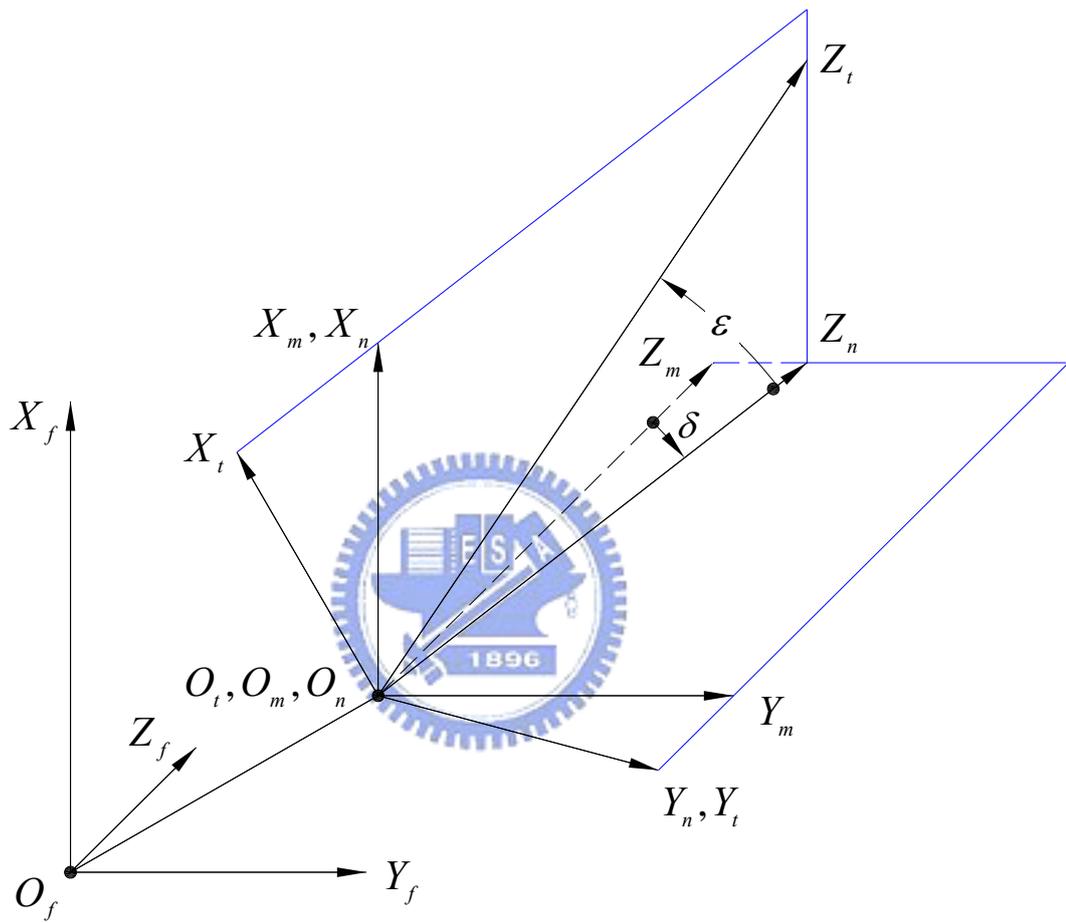


圖 4.4 切平面座標系與其他座標系之關係示意圖

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

將方程式(4.3)、(4.7)以及方程式(4.20)、(4.21)、(4.22)分別代入(4.18)以及(4.19)式，即可得到經過座標轉換至共同切平面座標系 $S_t(X_t, Y_t, Z_t)$ 後之蝸桿和蝸輪齒面方程式如下：

$$\mathbf{R}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} X_t^{(1)} \\ Y_t^{(1)} \\ Z_t^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_f^{(1)} \cos \varepsilon - Y_f^{(1)} \sin \varepsilon \sin \delta - Z_f^{(1)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ Y_f^{(1)} \cos \delta - Z_f^{(1)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ X_f^{(1)} \sin \varepsilon + Y_f^{(1)} \cos \varepsilon \sin \delta + Z_f^{(1)} \cos \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \cos \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{R}_t^{(2)} = \begin{bmatrix} X_t^{(2)} \\ Y_t^{(2)} \\ Z_t^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_f^{(2)} \cos \varepsilon - Y_f^{(2)} \sin \varepsilon \sin \delta - Z_f^{(2)} \sin \varepsilon \cos \delta - p_x \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ Y_f^{(2)} \cos \delta - Z_f^{(2)} \sin \delta - p_y \cos \delta + p_z \sin \delta \\ X_f^{(2)} \sin \varepsilon + Y_f^{(2)} \cos \varepsilon \sin \delta + Z_f^{(2)} \cos \varepsilon \cos \delta - p_x \sin \varepsilon - \cos \varepsilon (p_y \sin \delta + p_z \cos \delta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

由於接觸點之單位法向量 \mathbf{n}_t 與 Z_t 軸重合，故可從圖 4.4 之幾何關係得知：

$$\tan \delta = \frac{n_{fy}}{n_{fz}} \quad (4.25)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{n_{fx}}{\sqrt{n_{fy}^2 + n_{fz}^2}} \quad (4.26)$$

其中 n_{fx} 、 n_{fy} 與 n_{fz} 為兩齒面共同單位法向量 \mathbf{n}_t 之三個分量，根據前述推導之

齒印分析數學模式，用以計算齒印範圍 $P_i(\theta_i, R_i)$ 之方程式可表示如下：

$$x_i^{(1)} = x_i \quad (4.27)$$

$$x_i^{(2)} = x_i \quad (4.28)$$

$$y_i^{(1)} = y_i \quad (4.29)$$

$$y_i^{(2)} = y_i \quad (4.30)$$

其中 x_i 與 y_i 為 $P_i(\theta_i, R_i)$ 點之位置向量表示於 X_i 軸與 Y_i 軸上的兩個分量。方程式(4.27)至(4.30)再加上兩個嚙合方程式(2.18)與(3.18)，共有六個方程式求解六個未知數 u_1 、 θ_H 、 u_2 、 θ_F 、 ϕ_1 與 ϕ_2 。由前述座標系之關係亦可得知：

$$|z_i^{(1)}| = d_1 \quad (4.31)$$

$$|z_i^{(2)}| = d_2 \quad (4.32)$$

將所求得之六個參數分別代回表示於切平面座標系 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 之蝸桿與蝸輪的齒面方程式，即可獲得 $z_i^{(1)}$ 與 $z_i^{(2)}$ 之值，則接觸齒印的範圍值，即點 $P_i(\theta_i, R_i)$ 所需滿足的條件式為：

$$d_1 + d_2 = |z_i^{(2)} - z_i^{(1)}| = 0.00632\text{mm} \quad (4.33)$$

所有符合上述條件式之 $P_i(\theta_i, R_i)$ 點之集合，即為所求之接觸齒印輪廓點。

4.4 例題討論

依據 4.2 節所建構之蝸桿蝸輪組齒面接觸分析數學模式，並配合電腦數值分析來模擬蝸桿蝸輪組之接觸情形，以下將討論數種不同設計參數之蝸桿蝸輪組，分別在各種裝配誤差狀況下之接觸情形與運動誤差。

例題 4.1 理想狀況下之接觸分析

蝸桿蝸輪組之主要設計參數如表 4.1 所示，其餘之設計參數皆與前述章節建立繪圖模型時所使用之參數相同，假設蝸桿蝸輪組分別為 Case1：蝸桿 1 與蝸輪 1 配對、Case2：蝸桿 2 與蝸輪 2 配對、Case3：蝸桿 3 與蝸輪 3 配對、Case4：蝸桿 4 與蝸輪 4 配對以及 Case5：蝸桿 5 與蝸輪 5 配對，而其

裝配情形均為理想狀態，亦即 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 以及 $\Delta S = 0.0mm$ 。經 4.3 節所建構之蝸桿蝸輪組接觸齒印分析模式，配合電腦輔助模擬分析後，即可得到蝸桿蝸輪組在理想裝配狀態下之運動誤差，如表 4.2 至表 4.6 所示，而齒印分析之結果則如圖 4.5 所示。

表 4.1 蝸桿蝸輪組之主要設計參數

Case1				
	齒數	法向壓力角(度)	導程角(度)	軸交錯角(度)
蝸桿 1	3	20.0	30.0(右旋)	30.0
蝸輪 1	30	20.0	60.0(左旋)	
Case2				
	齒數	法向壓力角(度)	導程角(度)	軸交錯角(度)
蝸桿 2	3	20.0	30.0(右旋)	60.0
蝸輪 2	30	20.0	90.0(左旋)	
Case3				
	齒數	法向壓力角(度)	導程角(度)	軸交錯角(度)
蝸桿 3	3	20.0	30.0(右旋)	90.0
蝸輪 3	30	20.0	30.0(右旋)	
Case4				
	齒數	法向壓力角(度)	導程角(度)	軸交錯角(度)
蝸桿 4	3	22.5	30.0(右旋)	90.0
蝸輪 4	30	22.5	30.0(右旋)	
Case5				
	齒數	法向壓力角(度)	導程角(度)	軸交錯角(度)
蝸桿 5	3	17.5	30.0(右旋)	90.0
蝸輪 5	30	17.5	30.0(右旋)	

註：蝸桿與蝸輪之其他設計參數請參照表 2.1 及表 3.1 所示

表 4.2 理想裝配狀況下 Case1 之配對嚙合接觸情形

裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.97	110.24	7.99	-47.78	-6.25	1.81
-40.00	-3.98	109.67	7.45	-38.24	-5.00	1.16
-30.00	-2.99	109.11	6.92	-28.70	-3.74	0.65
-20.00	-2.00	108.56	6.39	-19.14	-2.49	0.29
-10.00	-1.00	108.02	5.86	-9.57	-1.24	0.07
0.00	0.00	107.49	5.33	0.00	0.00	0.00
10.00	1.00	106.97	4.81	9.58	1.24	0.07
20.00	2.00	106.46	4.28	19.17	2.48	0.29
30.00	3.01	105.95	3.76	28.77	3.72	0.66
40.00	4.02	105.45	3.23	38.37	4.96	1.18
50.00	5.03	104.96	2.71	47.97	6.20	1.84
60.00	6.04	104.47	2.18	57.58	7.44	2.65
70.00	7.06	104.00	1.66	67.20	8.68	3.61

表 4.3 理想裝配狀況下 Case2 之配對嚙合之接觸情形

裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	110.28	8.04	-56.78	-7.58	1.57
-50.00	-4.98	109.81	7.60	-47.28	-6.34	1.10
-40.00	-3.99	109.35	7.15	-37.80	-5.09	0.70
-30.00	-2.99	108.88	6.70	-28.33	-3.83	0.40
-20.00	-2.00	108.42	6.25	-18.87	-2.56	0.18
-10.00	-1.00	107.96	5.79	-9.42	-1.29	0.04
0.00	0.00	107.49	5.33	0.00	0.00	0.00
10.00	1.00	107.03	4.87	9.40	1.30	0.04
20.00	2.00	106.57	4.40	18.79	2.61	0.18
30.00	3.01	106.10	3.92	28.14	3.94	0.40
40.00	4.01	105.63	3.44	37.47	5.28	0.72
50.00	5.02	105.16	2.95	46.76	6.64	1.13
60.00	6.03	104.68	2.45	56.00	8.03	1.64

表 4.4 理想裝配狀況下 Case3 之配對嚙合之接觸情形

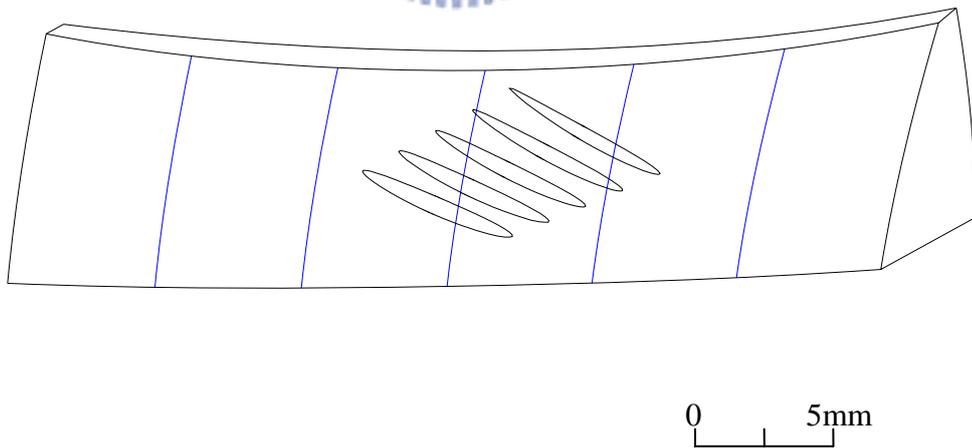
裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.94	110.58	8.22	-55.39	-8.60	3.92
-50.00	-4.96	110.07	7.77	-46.10	-7.21	2.74
-40.00	-3.97	109.56	7.31	-36.82	-5.81	1.77
-30.00	-2.98	109.05	6.83	-27.58	-4.38	1.00
-20.00	-1.99	108.53	6.35	-18.35	-2.94	0.45
-10.00	-1.00	108.01	5.85	-9.16	-1.48	0.11
0.00	0.00	107.49	5.33	0.00	0.00	0.00
10.00	1.00	106.97	4.80	9.12	1.51	0.12
20.00	2.01	106.44	4.25	18.20	3.05	0.47
30.00	3.02	105.89	3.68	27.22	4.62	1.06
40.00	4.03	105.34	3.09	36.18	6.24	1.91
50.00	5.05	104.77	2.47	45.06	7.90	3.02
60.00	6.07	104.18	1.82	53.83	9.64	4.41

表 4.5 理想裝配狀況下 Case4 之配對嚙合之接觸情形

裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.95	112.33	8.28	-46.06	-7.23	3.12
-40.00	-3.97	111.76	7.76	-36.80	-5.82	2.01
-30.00	-2.98	111.18	7.22	-27.56	-4.39	1.14
-20.00	-1.99	110.60	6.67	-18.35	-2.95	0.51
-10.00	-1.00	110.02	6.11	-9.16	-1.48	0.13
0.00	0.00	109.44	5.53	0.00	0.00	0.00
10.00	1.00	108.85	4.94	9.12	1.51	0.13
20.00	2.01	108.26	4.33	18.21	3.04	0.53
30.00	3.02	107.66	3.70	27.25	4.61	1.20
40.00	4.03	107.05	3.04	36.24	6.21	2.16
50.00	5.05	106.42	2.37	45.16	7.85	3.42
60.00	6.08	105.77	1.66	54.00	9.55	4.98
70.00	7.11	105.10	0.91	62.73	11.32	6.88

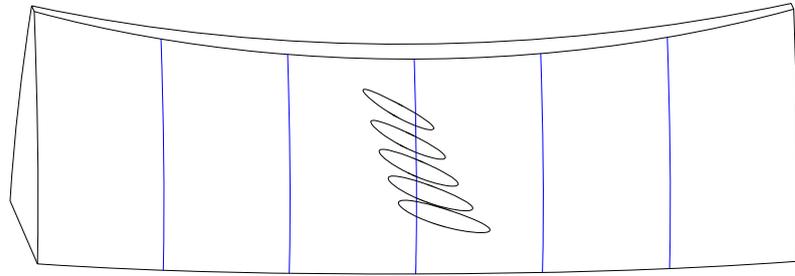
表 4.6 理想裝配狀況下 Case5 之配對嚙合之接觸情形

裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.95	108.51	7.66	-55.45	-8.58	3.38
-50.00	-4.96	108.06	7.27	-46.14	-7.19	2.37
-40.00	-3.98	107.61	6.87	-36.85	-5.79	1.53
-30.00	-2.99	107.16	6.45	-27.59	-4.38	0.87
-20.00	-1.99	106.71	6.03	-18.36	-2.94	0.39
-10.00	-1.00	106.26	5.59	-9.16	-1.48	0.10
0.00	0.00	105.80	5.14	0.00	0.00	0.00
10.00	1.00	105.34	4.67	9.12	1.51	0.10
20.00	2.01	104.87	4.19	18.19	3.05	0.40
30.00	3.01	104.39	3.68	27.19	4.64	0.92
40.00	4.03	103.89	3.15	36.11	6.27	1.66
50.00	5.04	103.38	2.59	44.92	7.98	2.64
60.00	6.06	102.83	1.98	53.56	9.78	3.87



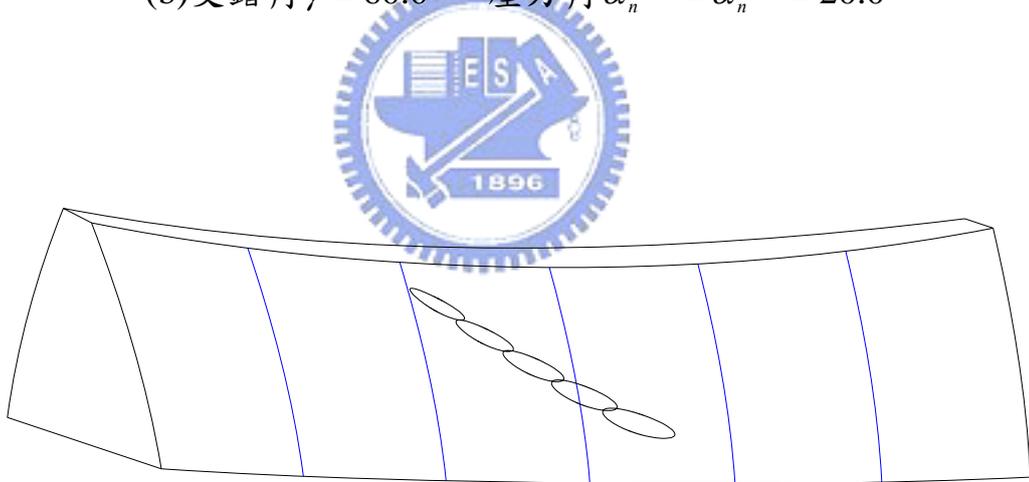
(a) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$

圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(1)



0 5mm

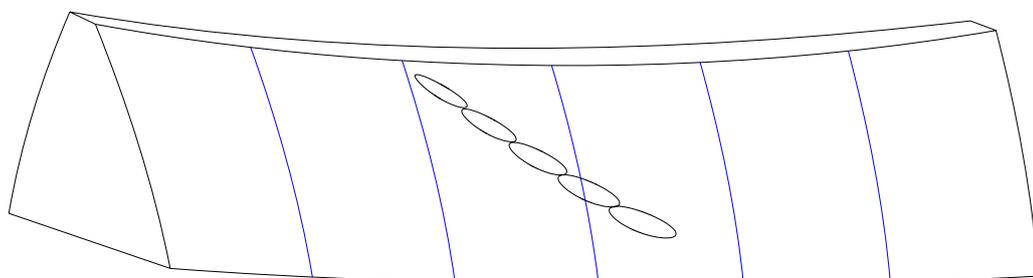
(b) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$



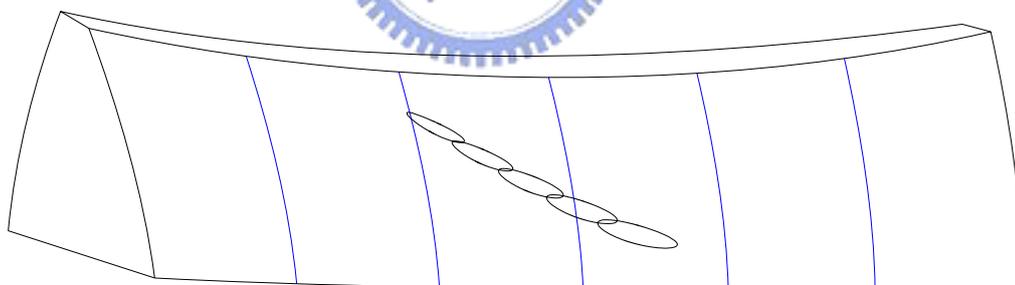
0 5mm

(c) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$

圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(2)



(d) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$



(e) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$

圖 4.5 理想裝配之蝸桿蝸輪組接觸齒印比較圖(3)

由表 4.2 至表 4.6 之數據顯示，蝸桿蝸輪組於理想裝配狀態下之運動誤差並非為零，此應為非共軛創成之蝸桿蝸輪組特性所致。由圖 4.5 之接觸齒印分析顯示，不同壓力角之蝸桿蝸輪組其接觸齒印位置雖略有不同，但接觸橢圓的大小並無太大改變。不同交錯角之蝸桿蝸輪組其接觸齒印位置改變相當明顯，且接觸橢圓之長軸會隨著交錯角變小而變長，接觸齒印也隨之增大，故齒面接觸應力隨之降低，亦即具有較小交錯角之蝸桿蝸輪組但可以承受或傳動更大的扭矩，此一研究結果有助於蝸桿蝸輪組之設計與應用。

例題 4.2 不同壓力角之蝸桿蝸輪組具有裝配誤差狀態下之接觸分析

本例題係探討法向壓力角為 17.5° 、 20.0° 和 22.5° 之蝸桿蝸輪組，在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h$ 、垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v$ 以及中心距裝配誤差 ΔS 的情況下，其運動誤差變化的情形，其接觸分析之結果如表 4.7 至表 4.24 所示。整體看來蝸桿蝸輪組之運動誤差雖隨裝配誤差之改變而有所增減，但並未有特別對某一裝配誤差敏感的現象。不同壓力角之蝸桿蝸輪組具有裝配誤差之接觸齒印分析結果如圖 4.6 至圖 4.8 所示，由圖顯示隨著中心距偏差減少，接觸齒印呈現逐漸往齒根方向分佈的趨勢，而接觸齒印之大小越往齒根方向其長軸變得較長。分別具有水平軸向裝配誤差以及具有垂直軸向裝配誤差之接觸齒印，其齒印位置隨著水平軸向裝配誤差以及垂直軸向裝配誤差之增減，呈現往齒寬之一側偏移的現象。其中，具有水平軸向裝配誤差之接觸齒印的偏移量較具有垂直軸向裝配誤差之接觸齒印的偏移量更為顯著。此外，亦可觀察出蝸桿蝸輪組之壓力角對於其接觸齒印變化幅度的影響並不大。

表 4.7 Case3 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.95	110.14	8.31	-55.94	-8.47	2.83
-50.00	-4.97	109.62	7.85	-46.68	-7.06	1.81
-40.00	-3.98	109.10	7.38	-37.44	-5.64	1.01
-30.00	-2.99	108.58	6.90	-28.23	-4.19	0.42
-20.00	-2.00	108.05	6.40	-19.05	-2.72	0.05
-10.00	-1.00	107.52	5.89	-9.90	-1.23	-0.09
0.00	0.00	106.98	5.36	-0.80	0.29	0.00
10.00	1.01	106.44	4.81	8.26	1.84	0.33
20.00	2.01	105.88	4.24	17.26	3.43	0.91
30.00	3.03	105.31	3.64	26.18	5.06	1.76
40.00	4.05	104.72	3.02	35.01	6.76	2.88
50.00	5.07	104.09	2.36	43.70	8.54	4.29
60.00	6.10	103.42	1.64	52.20	10.44	6.03

表 4.8 Case3 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -1.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	109.68	8.40	-56.52	-8.32	1.67
-50.00	-4.99	109.15	7.93	-47.29	-6.89	0.82
-40.00	-4.00	108.62	7.45	-38.09	-5.44	0.20
-30.00	-3.00	108.09	6.95	-28.93	-3.96	-0.21
-20.00	-2.01	107.54	6.44	-19.80	-2.47	-0.38
-10.00	-1.00	107.00	5.91	-10.71	-0.94	-0.31
0.00	0.00	106.44	5.36	-1.68	0.63	0.00
10.00	1.01	105.87	4.79	7.29	2.23	0.57
20.00	2.02	105.28	4.20	16.17	3.89	1.41
30.00	3.04	104.66	3.57	24.95	5.62	2.54
40.00	4.06	104.00	2.89	33.56	7.44	3.97
50.00	5.09	103.27	2.15	41.92	9.43	5.75
60.00	6.13	102.36	1.26	49.68	11.76	7.95

表 4.9 Case3 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.95	110.17	7.87	-45.48	-7.55	3.05
-40.00	-3.97	109.66	7.41	-36.19	-6.16	2.02
-30.00	-2.98	109.15	6.94	-26.92	-4.75	1.20
-20.00	-1.99	108.64	6.46	-17.67	-3.33	0.58
-10.00	-1.00	108.13	5.97	-8.45	-1.89	0.18
0.00	0.00	107.62	5.46	0.74	-0.43	0.00
10.00	1.00	107.11	4.94	9.90	1.06	0.04
20.00	2.01	106.59	4.40	19.03	2.57	0.31
30.00	3.01	106.06	3.85	28.10	4.11	0.81
40.00	4.03	105.52	3.27	37.13	5.68	1.56
50.00	5.04	104.98	2.68	46.09	7.29	2.56
60.00	6.06	104.41	2.05	54.97	8.96	3.82
70.00	7.09	103.83	1.39	63.74	10.69	5.37

表 4.10 Case3 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.94	110.26	7.96	-44.89	-7.88	3.34
-40.00	-3.96	109.76	7.51	-35.58	-6.50	2.26
-30.00	-2.98	109.25	7.05	-26.29	-5.11	1.38
-20.00	-1.99	108.75	6.57	-17.02	-3.70	0.71
-10.00	-0.99	108.25	6.09	-7.77	-2.28	0.25
0.00	0.00	107.74	5.59	1.45	-0.83	0.00
10.00	1.00	107.23	5.07	10.65	0.63	-0.03
20.00	2.00	106.72	4.55	19.81	2.12	0.16
30.00	3.01	106.21	4.00	28.93	3.63	0.58
40.00	4.02	105.69	3.44	38.01	5.17	1.24
50.00	5.04	105.16	2.86	47.04	6.74	2.14
60.00	6.05	104.62	2.26	56.00	8.35	3.29
70.00	7.08	104.06	1.62	64.88	10.02	4.71

表 4.11 Case3 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.93	110.61	8.23	-55.00	-8.82	4.28
-50.00	-4.95	110.10	7.78	-45.70	-7.44	3.04
-40.00	-3.97	109.59	7.32	-36.42	-6.04	2.01
-30.00	-2.98	109.07	6.85	-27.16	-4.62	1.19
-20.00	-1.99	108.56	6.37	-17.93	-3.19	0.57
-10.00	-1.00	108.05	5.88	-8.73	-1.73	0.18
0.00	0.00	107.53	5.37	0.44	-0.25	0.00
10.00	1.00	107.01	4.84	9.58	1.25	0.05
20.00	2.01	106.48	4.30	18.67	2.77	0.33
30.00	3.01	105.94	3.74	27.71	4.34	0.86
40.00	4.03	105.39	3.16	36.69	5.94	1.63
50.00	5.04	104.83	2.55	45.59	7.59	2.66
60.00	6.06	104.25	1.91	54.40	9.30	3.97

表 4.12 Case3 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 20.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.93	110.63	8.23	-54.60	-9.04	4.64
-50.00	-4.95	110.12	7.79	-45.30	-7.66	3.34
-40.00	-3.96	109.61	7.33	-36.01	-6.27	2.26
-30.00	-2.98	109.10	6.87	-26.75	-4.85	1.37
-20.00	-1.99	108.59	6.39	-17.51	-3.43	0.70
-10.00	-1.00	108.08	5.90	-8.30	-1.98	0.24
0.00	0.00	107.56	5.40	0.88	-0.51	0.00
10.00	1.00	107.04	4.88	10.03	0.99	-0.02
20.00	2.00	106.52	4.34	19.13	2.51	0.20
30.00	3.01	105.99	3.79	28.19	4.06	0.65
40.00	4.02	105.45	3.22	37.19	5.65	1.35
50.00	5.04	104.89	2.62	46.12	7.28	2.31
60.00	6.06	104.32	1.99	54.96	8.97	3.54

表 4.13 Case4 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.96	111.89	8.38	-46.56	-7.15	2.23
-40.00	-3.98	111.30	7.85	-37.33	-5.72	1.28
-30.00	-2.99	110.72	7.30	-28.12	-4.27	0.58
-20.00	-2.00	110.13	6.74	-18.94	-2.81	0.13
-10.00	-1.00	109.54	6.17	-9.79	-1.32	-0.07
0.00	0.00	108.95	5.58	-0.67	0.19	0.00
10.00	1.01	108.34	4.97	8.40	1.73	0.34
20.00	2.02	107.73	4.35	17.43	3.30	0.96
30.00	3.03	107.10	3.70	26.40	4.91	1.87
40.00	4.05	106.46	3.02	35.30	6.57	3.08
50.00	5.07	105.80	2.31	44.11	8.28	4.61
60.00	6.10	105.10	1.56	52.80	10.07	6.48
70.00	7.14	104.35	0.75	61.31	11.97	8.72

表 4.14 Case4 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -1.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-53.30	-5.30	111.63	8.65	-50.13	-7.52	1.60
-40.00	-3.99	110.84	7.93	-37.88	-5.60	0.51
-30.00	-3.00	110.25	7.38	-28.71	-4.14	-0.01
-20.00	-2.00	109.65	6.81	-19.56	-2.65	-0.28
-10.00	-1.00	109.04	6.22	-10.46	-1.13	-0.28
0.00	0.00	108.43	5.62	-1.39	0.41	0.00
10.00	1.01	107.80	4.99	7.62	1.99	0.56
20.00	2.02	107.17	4.35	16.57	3.61	1.42
30.00	3.04	106.51	3.67	25.45	5.28	2.58
40.00	4.06	105.83	2.96	34.23	7.01	4.08
50.00	5.09	105.11	2.21	42.88	8.82	5.92
64.90	6.64	103.90	0.96	55.34	11.78	9.40

表 4.15 Case4 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.95	112.43	8.38	-45.51	-7.53	3.44
-40.00	-3.96	111.86	7.86	-36.24	-6.13	2.27
-30.00	-2.98	111.29	7.33	-26.98	-4.72	1.34
-20.00	-1.99	110.72	6.79	-17.74	-3.29	0.65
-10.00	-1.00	110.15	6.23	-8.53	-1.84	0.20
0.00	0.00	109.57	5.66	0.66	-0.38	0.00
10.00	1.00	108.99	5.08	9.81	1.11	0.05
20.00	2.01	108.41	4.48	18.93	2.62	0.37
30.00	3.02	107.82	3.86	28.01	4.16	0.95
40.00	4.03	107.22	3.22	37.05	5.73	1.81
50.00	5.05	106.61	2.56	46.03	7.33	2.96
60.00	6.07	105.99	1.87	54.95	8.98	4.40
70.00	7.10	105.34	1.15	63.78	10.68	6.16

表 4.16 Case4 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.94	112.52	8.47	-44.98	-7.82	3.73
-40.00	-3.96	111.96	7.96	-35.69	-6.44	2.52
-30.00	-2.98	111.39	7.43	-26.41	-5.04	1.53
-20.00	-1.99	110.83	6.90	-17.16	-3.62	0.78
-10.00	-1.00	110.26	6.35	-7.92	-2.19	0.27
0.00	0.00	109.69	5.79	1.29	-0.74	0.00
10.00	1.00	109.12	5.21	10.47	0.73	-0.02
20.00	2.00	108.54	4.62	19.62	2.22	0.22
30.00	3.01	107.96	4.01	28.74	3.74	0.72
40.00	4.02	107.38	3.38	37.82	5.28	1.49
50.00	5.04	106.78	2.74	46.85	6.85	2.54
60.00	6.06	106.18	2.07	55.83	8.46	3.87
70.00	7.09	105.56	1.37	64.74	10.12	5.51

表 4.17 Case4 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.94	112.36	8.29	-45.66	-7.45	3.47
-40.00	-3.96	111.79	7.77	-36.39	-6.05	2.29
-30.00	-2.98	111.21	7.24	-27.14	-4.63	1.35
-20.00	-1.99	110.64	6.70	-17.92	-3.19	0.65
-10.00	-1.00	110.06	6.14	-8.73	-1.73	0.20
0.00	0.00	109.48	5.57	0.44	-0.25	0.00
10.00	1.00	108.90	4.98	9.58	1.25	0.06
20.00	2.01	108.31	4.38	18.67	2.77	0.38
30.00	3.02	107.71	3.76	27.73	4.33	0.97
40.00	4.03	107.10	3.11	36.73	5.92	1.85
50.00	5.05	106.48	2.44	45.68	7.55	3.02
60.00	6.07	105.84	1.75	54.54	9.23	4.49
70.00	7.10	105.18	1.01	63.31	10.97	6.29

表 4.18 Case4 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 22.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-50.00	-4.94	112.39	8.30	-45.25	-7.68	3.81
-40.00	-3.96	111.82	7.79	-35.98	-6.28	2.57
-30.00	-2.98	111.25	7.26	-26.73	-4.86	1.56
-20.00	-1.99	110.67	6.72	-17.50	-3.43	0.80
-10.00	-1.00	110.10	6.17	-8.29	-1.98	0.27
0.00	0.00	109.52	5.61	0.88	-0.51	0.00
10.00	1.00	108.94	5.03	10.03	0.99	-0.02
20.00	2.00	108.35	4.43	19.14	2.50	0.23
30.00	3.01	107.76	3.81	28.21	4.05	0.74
40.00	4.02	107.16	3.18	37.23	5.63	1.53
50.00	5.04	106.54	2.52	46.19	7.25	2.62
60.00	6.06	105.91	1.83	55.08	8.91	4.00
70.00	7.09	105.26	1.11	63.88	10.63	5.70

表 4.19 Case5 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.96	108.06	7.74	-56.09	-8.37	2.27
-50.00	-4.98	107.61	7.34	-46.81	-6.97	1.41
-40.00	-3.99	107.15	6.93	-37.57	-5.54	0.75
-30.00	-3.00	106.68	6.50	-28.36	-4.09	0.27
-20.00	-2.00	106.22	6.06	-19.18	-2.62	-0.02
-10.00	-1.00	105.75	5.61	-10.05	-1.12	-0.11
0.00	0.00	105.27	5.14	-0.96	0.41	0.00
10.00	1.01	104.78	4.65	8.07	1.97	0.33
20.00	2.01	104.28	4.14	17.01	3.59	0.88
30.00	3.03	103.76	3.60	25.86	5.27	1.66
40.00	4.04	103.21	3.02	34.56	7.04	2.70
50.00	5.06	102.60	2.38	43.01	8.96	4.01
60.00	6.09	101.86	1.63	50.92	11.19	5.67

表 4.20 Case5 配對在具有中心距誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形

法向壓力角： 17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -1.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.98	107.60	7.81	-56.77	-8.14	1.05
-50.00	-4.99	107.13	7.40	-47.55	-6.70	0.38
-40.00	-4.00	106.66	6.98	-38.35	-5.25	-0.11
-30.00	-3.01	106.18	6.54	-29.20	-3.76	-0.40
-20.00	-2.01	105.69	6.08	-20.09	-2.25	-0.48
-10.00	-1.01	105.20	5.61	-11.04	-0.70	-0.35
0.00	0.00	104.69	5.12	-2.07	0.90	0.00
10.00	1.01	104.17	4.60	6.82	2.55	0.58
20.00	2.02	103.62	4.04	15.57	4.29	1.42
30.00	3.04	103.01	3.44	24.12	6.15	2.53
40.00	4.06	102.31	2.75	32.27	8.24	3.95
50.00	5.09	101.01	1.63	38.30	11.59	5.89
60.00	6.15	100.82	1.26	48.15	12.64	9.23

表 4.21 Case5 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形

法向壓力角： 17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.94	108.60	7.75	-54.78	-8.95	3.74
-50.00	-4.96	108.16	7.36	-45.45	-7.58	2.67
-40.00	-3.97	107.71	6.97	-36.14	-6.20	1.78
-30.00	-2.98	107.27	6.56	-26.85	-4.80	1.06
-20.00	-1.99	106.82	6.14	-17.59	-3.38	0.52
-10.00	-1.00	106.38	5.71	-8.35	-1.95	0.17
0.00	0.00	105.93	5.27	0.85	-0.49	0.00
10.00	1.00	105.48	4.81	10.02	0.99	0.02
20.00	2.00	105.02	4.34	19.15	2.50	0.25
30.00	3.01	104.56	3.85	28.22	4.04	0.67
40.00	4.02	104.09	3.34	37.24	5.61	1.31
50.00	5.03	103.60	2.81	46.17	7.24	2.16
60.00	6.05	103.10	2.24	55.00	8.93	3.25

表 4.22 Case5 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形

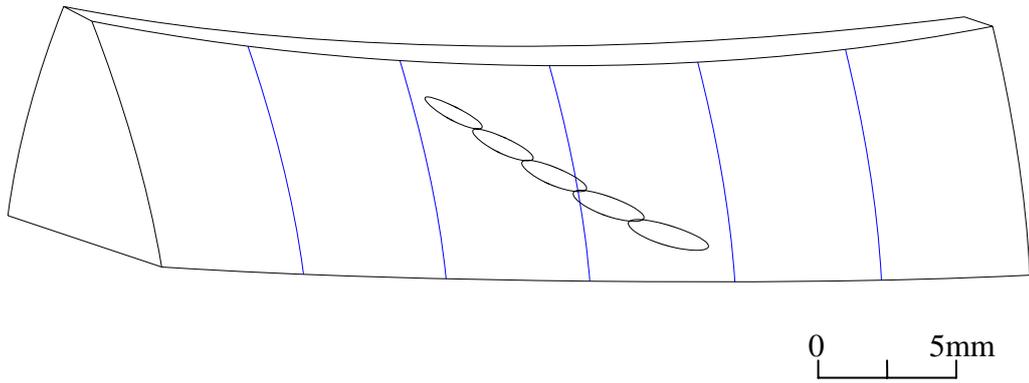
法向壓力角： 17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.94	108.69	7.84	-54.13	-9.31	4.06
-50.00	-4.95	108.25	7.46	-44.78	-7.95	2.95
-40.00	-3.97	107.81	7.07	-35.45	-6.58	2.01
-30.00	-2.98	107.37	6.66	-26.14	-5.20	1.24
-20.00	-1.99	106.93	6.25	-16.85	-3.80	0.64
-10.00	-1.00	106.49	5.83	-7.58	-2.38	0.23
0.00	0.00	106.05	5.40	1.66	-0.95	0.00
10.00	1.00	105.60	4.95	10.87	0.50	-0.04
20.00	2.00	105.16	4.49	20.04	1.98	0.10
30.00	3.01	104.71	4.01	29.17	3.48	0.45
40.00	4.02	104.25	3.51	38.26	5.02	0.99
50.00	5.03	103.79	3.00	47.28	6.59	1.75
60.00	6.04	103.31	2.46	56.23	8.21	2.72

表 4.23 Case5 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形

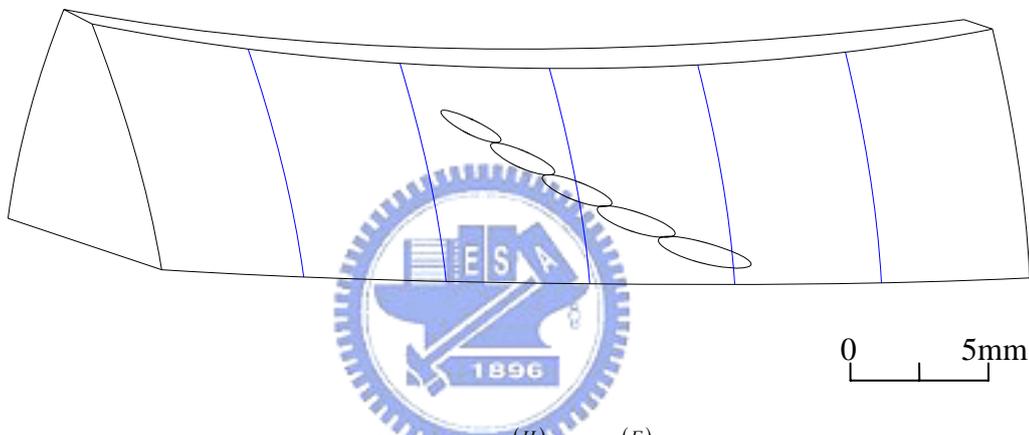
法向壓力角：17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.94	108.53	7.66	-55.06	-8.80	3.69
-50.00	-4.96	108.08	7.27	-45.74	-7.42	2.63
-40.00	-3.97	107.64	6.88	-36.45	-6.02	1.74
-30.00	-2.98	107.19	6.47	-27.18	-4.61	1.03
-20.00	-1.99	106.74	6.05	-17.94	-3.18	0.50
-10.00	-1.00	106.28	5.62	-8.73	-1.73	0.15
0.00	0.00	105.83	5.17	0.44	-0.25	0.00
10.00	1.00	105.37	4.71	9.57	1.25	0.04
20.00	2.00	104.90	4.23	18.66	2.78	0.29
30.00	3.01	104.43	3.73	27.68	4.35	0.74
40.00	4.02	103.94	3.21	36.63	5.97	1.42
50.00	5.04	103.44	2.66	45.48	7.65	2.32
60.00	6.06	102.91	2.07	54.18	9.42	3.48

表 4.24 Case5 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形

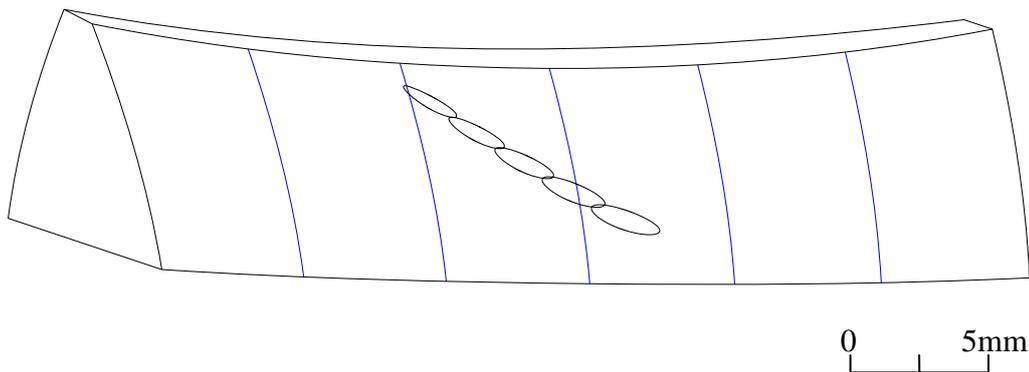
法向壓力角：17.5° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.94	108.55	7.66	-54.67	-9.02	4.00
-50.00	-4.95	108.11	7.28	-45.35	-7.64	2.89
-40.00	-3.97	107.66	6.88	-36.05	-6.25	1.95
-30.00	-2.98	107.21	6.48	-26.77	-4.84	1.19
-20.00	-1.99	106.76	6.07	-17.52	-3.42	0.61
-10.00	-1.00	106.31	5.64	-8.30	-1.97	0.21
0.00	0.00	105.86	5.20	0.88	-0.51	0.00
10.00	1.00	105.40	4.74	10.03	0.98	-0.01
20.00	2.00	104.94	4.27	19.13	2.51	0.17
30.00	3.01	104.47	3.78	28.17	4.07	0.57
40.00	4.02	103.99	3.27	37.14	5.67	1.18
50.00	5.03	103.50	2.73	46.02	7.33	2.01
60.00	6.05	102.98	2.15	54.78	9.07	3.09



(a) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta S = -0.5mm$

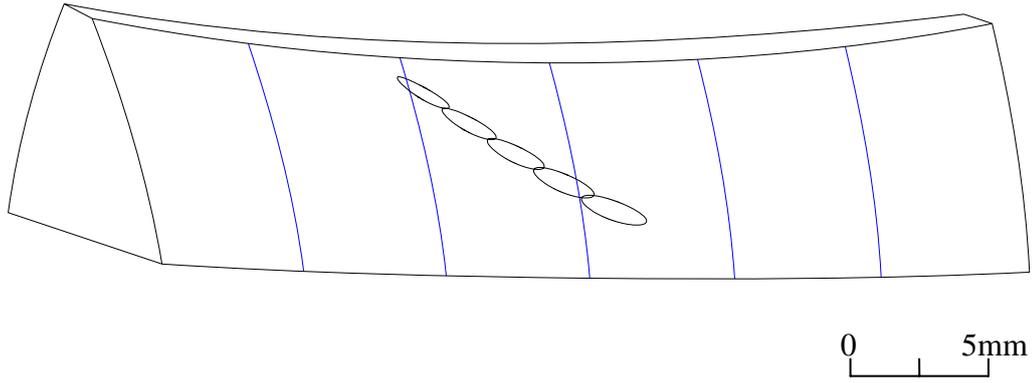


(b) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta S = -1.0mm$

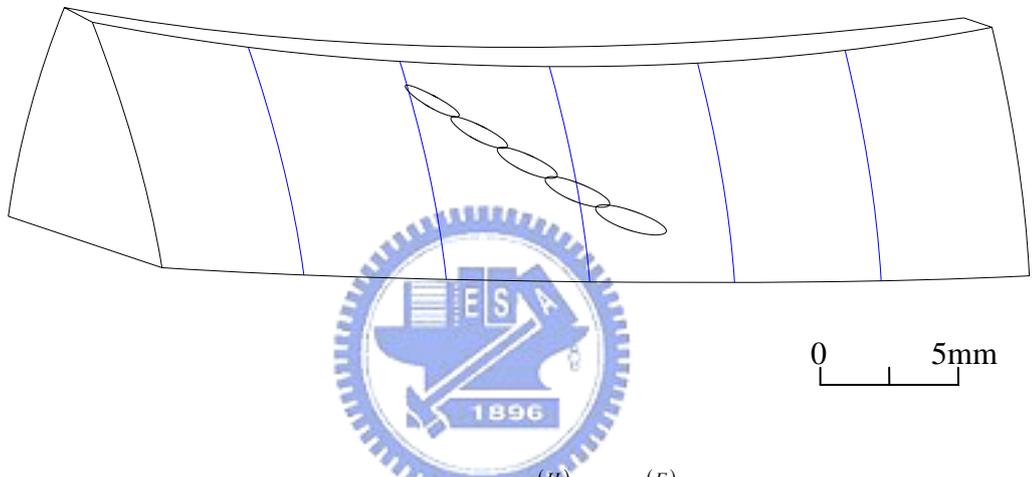


(c) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$

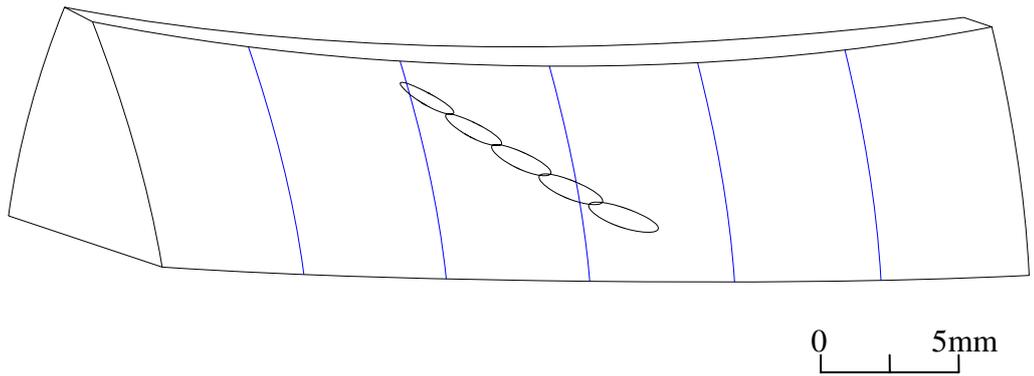
圖 4.6 Case3 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1)



(d) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$

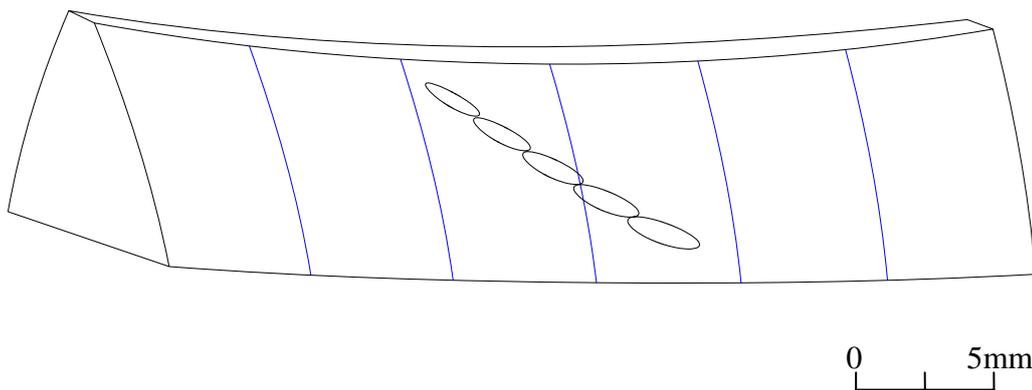


(e) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$

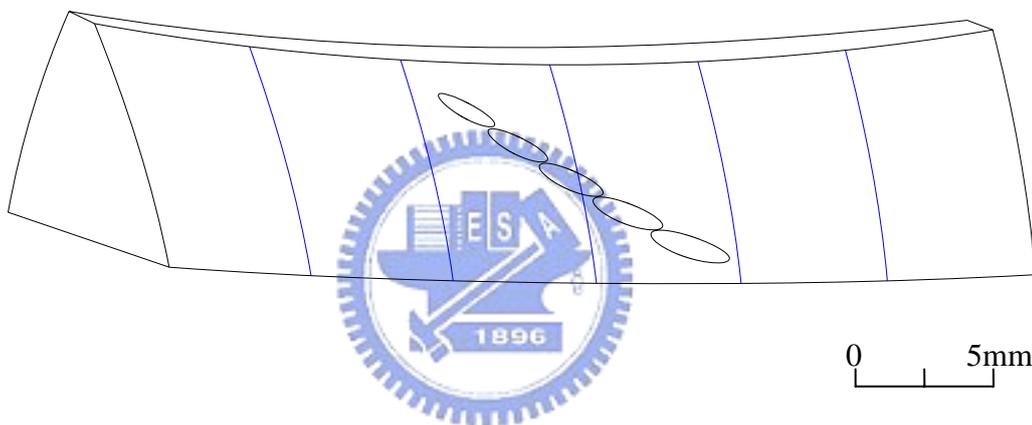


(f) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$

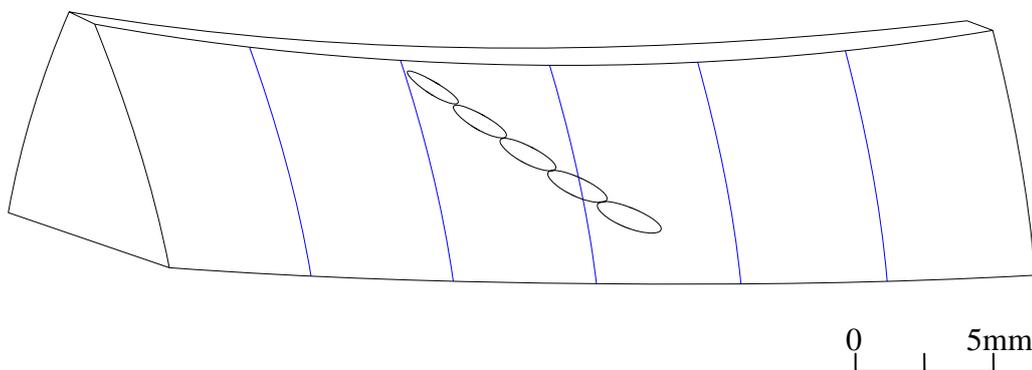
圖 4.6 Case3 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2)



(a) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta S = -0.5mm$

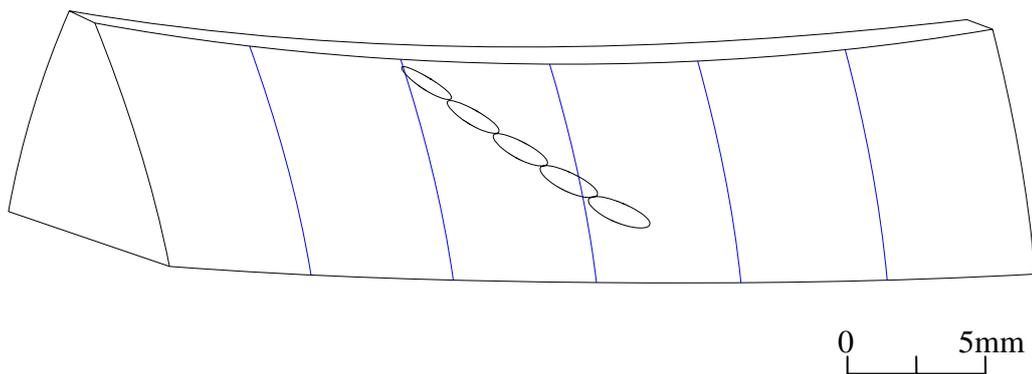


(b) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta S = -1.0mm$

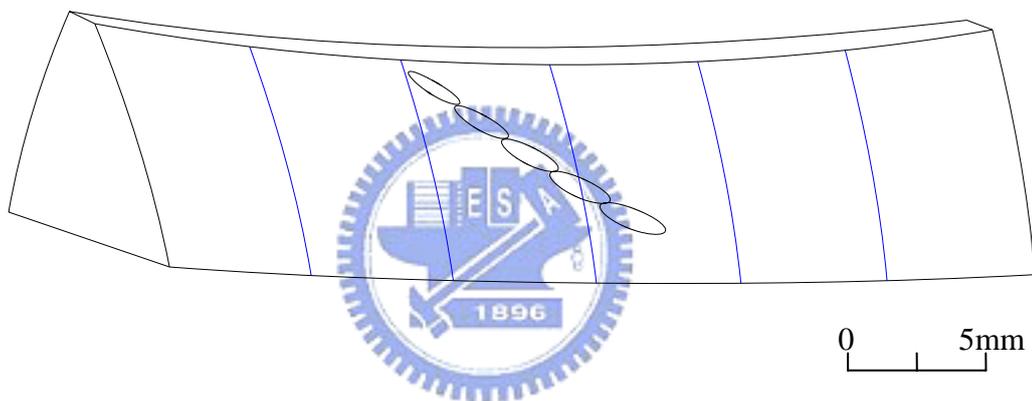


(c) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$

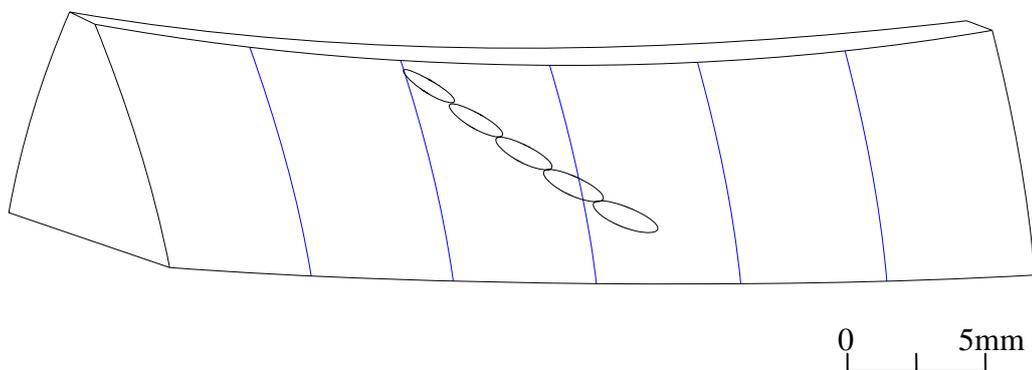
圖 4.7 Case4 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1)



(d) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$

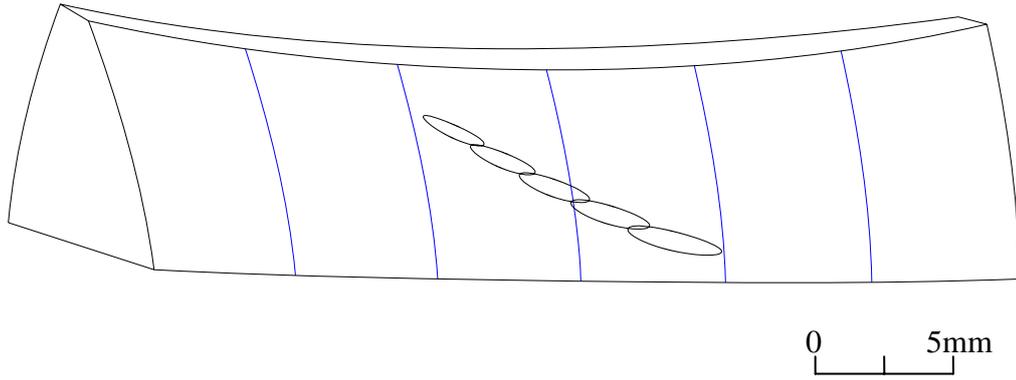


(e) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$

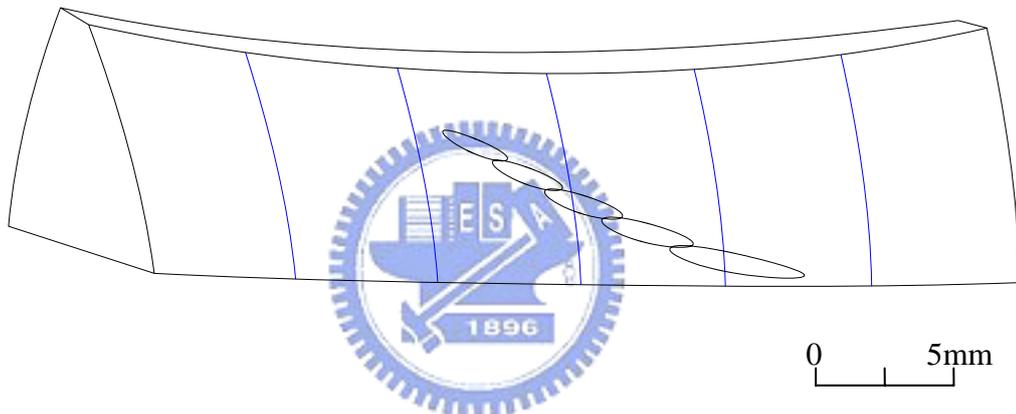


(f) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 22.5^\circ$, $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$

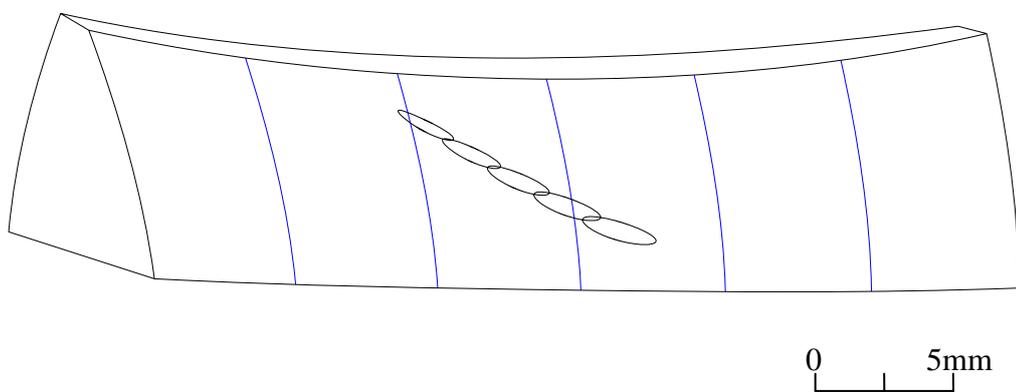
圖 4.7 Case4 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2)



(a) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$, $\Delta S = -0.5mm$

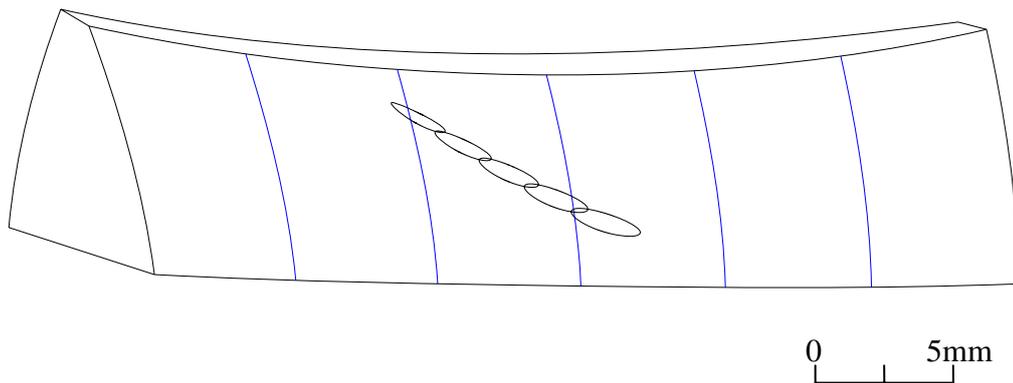


(b) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$, $\Delta S = -1.0mm$

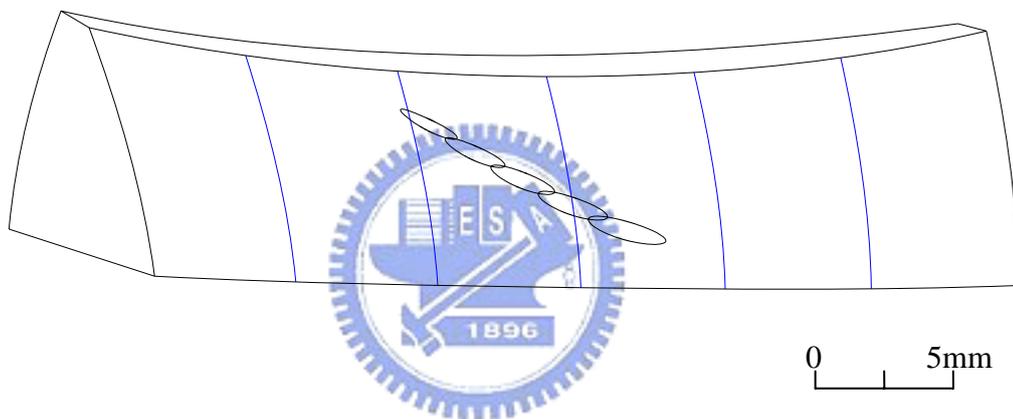


(c) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$, $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$

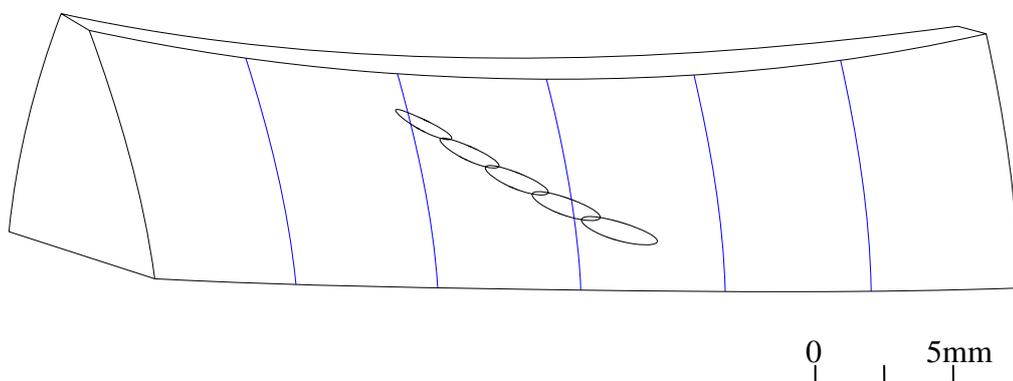
圖 4.8 Case5 裝配在具有裝配誤差下之接觸齒印(1)



(d) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$ ， $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$



(e) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$



(f) 交錯角 $\gamma = 90.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 17.5^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$

圖 4.8 Case5 裝配在具有裝配誤差下之接觸齒印(2)

例題 4.3 不同交錯角之蝸桿蝸輪組具有裝配誤差狀態下之接觸分析

本例題係探討交錯角為 30° 、 60° 和 90° 之蝸桿蝸輪組，在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h$ 、垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v$ 以及中心距裝配誤差 ΔS 的情況下，其運動誤差變化的情形及其接觸分析之結果如表 4.25 至表 4.36 所示。整體看來，不同交錯角之蝸桿蝸輪組在具有裝配誤差的情形下，其運動誤差會隨著裝配誤差的增減而有所增減，但並不會對某個裝配誤差產生特別敏感的反應。不同交錯角之蝸桿蝸輪組在具有裝配誤差時之接觸齒印分析結果如圖 4.9 和圖 4.10 所示，由圖中可以觀察到，隨交錯角變小其接觸齒印對裝配誤差的反應越敏感，接觸橢圓偏移的幅度隨交錯角減少而增加。同時，接觸橢圓的偏移量對中心距誤差的改變量最敏感，且越接近齒根方向其接觸齒印之長軸越長。水平軸向裝配誤差與垂直軸向裝配誤差對於接觸齒印的影響差異不大。

表 4.25 Case1 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形

交錯角： 30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-20.00	-2.00	109.88	8.20	-14.83	-5.17	0.05
-10.00	-1.00	109.26	7.60	-5.42	-3.83	-0.05
0.00	0.00	108.66	7.00	4.02	-2.50	0.00
10.00	1.00	108.08	6.42	13.48	-1.19	0.19
20.00	2.01	107.50	5.84	22.96	0.12	0.52
30.00	3.02	106.95	5.26	32.45	1.42	1.00
40.00	4.03	106.40	4.69	41.96	2.71	1.62
50.00	5.04	105.86	4.13	51.48	4.00	2.39
60.00	6.05	105.34	3.56	61.02	5.28	3.31
70.00	7.07	104.82	3.00	70.56	6.57	4.38
80.00	8.09	104.32	2.44	80.11	7.84	5.59
90.00	9.11	103.82	1.88	89.67	9.12	6.95
100.00	10.13	103.33	1.32	99.23	10.40	8.47

表 4.26 Case1 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形

交錯角：30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -1.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
10.00	1.01	109.76	8.51	18.67	-4.40	0.36
20.00	2.01	109.04	7.80	27.85	-2.91	0.85
30.00	3.02	108.37	7.11	37.09	-1.46	1.48
40.00	4.04	107.72	6.45	46.39	-0.05	2.25
50.00	5.05	107.10	5.81	55.73	1.35	3.16
60.00	6.07	106.50	5.17	65.11	2.73	4.21
70.00	7.09	105.91	4.55	74.51	4.09	5.41
80.00	8.11	105.35	3.93	83.94	5.44	6.75
90.00	9.13	104.79	3.32	93.39	6.79	8.23
100.00	10.16	104.25	2.71	102.86	8.12	9.86
110.00	11.19	103.73	2.11	112.34	9.45	11.64
120.00	12.22	103.21	1.52	121.83	10.77	13.57
130.00	13.25	102.70	0.92	131.34	12.09	15.65

表 4.27 Case1 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形

交錯角：30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.95	109.89	7.59	-59.28	-6.38	2.94
-50.00	-4.97	109.35	7.09	-49.69	-5.15	2.09
-40.00	-3.98	108.81	6.58	-40.10	-3.93	1.38
-30.00	-2.99	108.28	6.08	-30.50	-2.71	0.82
-20.00	-1.99	107.76	5.58	-20.89	-1.49	0.40
-10.00	-1.00	107.25	5.07	-11.28	-0.27	0.13
0.00	0.00	106.74	4.57	-1.66	0.95	0.00
10.00	1.00	106.24	4.07	7.96	2.17	0.02
20.00	2.00	105.75	3.56	17.59	3.39	0.19
30.00	3.01	105.26	3.06	27.22	4.61	0.51
40.00	4.02	104.78	2.56	36.85	5.83	0.97
50.00	5.03	104.31	2.05	46.49	7.05	1.59
60.00	6.04	103.84	1.54	56.13	8.27	2.35

表 4.28 Case1 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形

交錯角：30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.95	109.05	6.73	-61.07	-5.37	3.23
-50.00	-4.96	108.53	6.25	-51.43	-4.17	2.33
-40.00	-3.98	108.02	5.77	-41.79	-2.97	1.57
-30.00	-2.98	107.51	5.29	-32.15	-1.77	0.96
-20.00	-1.99	107.02	4.81	-22.50	-0.58	0.49
-10.00	-1.00	106.52	4.33	-12.85	0.62	0.17
0.00	0.00	106.04	3.85	-3.20	1.82	0.00
10.00	1.00	105.56	3.37	6.46	3.02	-0.02
20.00	2.00	105.08	2.88	16.11	4.22	0.10
30.00	3.01	104.61	2.40	25.77	5.42	0.37
40.00	4.01	104.15	1.91	35.43	6.63	0.79
50.00	5.02	103.69	1.42	45.10	7.83	1.36
60.00	6.03	103.24	0.93	54.76	9.04	2.08

表 4.29 Case1 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形

交錯角：30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.96	110.02	7.73	-59.18	-6.43	2.70
-50.00	-4.97	109.48	7.23	-49.58	-5.22	1.88
-40.00	-3.98	108.95	6.73	-39.97	-4.00	1.22
-30.00	-2.99	108.42	6.23	-30.35	-2.79	0.69
-20.00	-1.99	107.90	5.73	-20.73	-1.58	0.32
-10.00	-1.00	107.39	5.23	-11.10	-0.37	0.08
0.00	0.00	106.89	4.73	-1.47	0.85	0.00
10.00	1.00	106.39	4.23	8.17	2.06	0.06
20.00	2.00	105.90	3.73	17.80	3.27	0.28
30.00	3.01	105.42	3.23	27.45	4.48	0.64
40.00	4.02	104.94	2.73	37.09	5.70	1.15
50.00	5.03	104.47	2.22	46.74	6.91	1.80
60.00	6.04	104.00	1.72	56.38	8.13	2.61

表 4.30 Case1 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形

交錯角： 30.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.96	109.37	7.10	-60.66	-5.58	2.73
-50.00	-4.97	108.86	6.62	-51.01	-4.39	1.91
-40.00	-3.98	108.35	6.15	-41.35	-3.21	1.23
-30.00	-2.99	107.85	5.67	-31.69	-2.02	0.70
-20.00	-1.99	107.35	5.19	-22.02	-0.83	0.32
-10.00	-1.00	106.86	4.72	-12.35	0.36	0.09
0.00	0.00	106.38	4.24	-2.69	1.55	0.00
10.00	1.00	105.90	3.76	6.99	2.74	0.06
20.00	2.00	105.43	3.27	16.66	3.93	0.27
30.00	3.01	104.96	2.79	26.33	5.12	0.63
40.00	4.02	104.49	2.30	36.01	6.32	1.14
50.00	5.03	104.04	1.81	45.68	7.52	1.80
60.00	6.04	103.58	1.32	55.36	8.71	2.61

表 4.31 Case2 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -0.5mm$ 之接觸情形

交錯角： 60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.99	109.54	7.84	-58.31	-7.00	0.67
-50.00	-4.99	109.05	7.38	-48.88	-5.72	0.33
-40.00	-4.00	108.57	6.92	-39.47	-4.43	0.08
-30.00	-3.00	108.08	6.45	-30.08	-3.13	-0.08
-20.00	-2.00	107.60	5.97	-20.72	-1.81	-0.15
-10.00	-1.00	107.11	5.49	-11.39	-0.47	-0.12
0.00	0.00	106.61	5.00	-2.10	0.88	0.00
10.00	1.00	106.11	4.50	7.14	2.26	0.22
20.00	2.01	105.60	3.99	16.33	3.67	0.54
30.00	3.02	105.08	3.46	25.45	5.12	0.96
40.00	4.02	104.53	2.90	34.45	6.63	1.49
50.00	5.03	103.94	2.31	43.27	8.23	2.14
60.00	6.05	103.26	1.62	51.68	10.04	2.91

表 4.32 Case2 配對在具有中心距裝配誤差 $\Delta S = -1.0mm$ 之接觸情形

交錯角：60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = -0.5mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-6.01	108.67	7.55	-60.20	-6.24	-0.48
-50.00	-5.01	108.16	7.06	-50.89	-4.89	-0.66
-40.00	-4.01	107.64	6.56	-41.63	-3.53	-0.74
-30.00	-3.01	107.11	6.05	-32.42	-2.13	-0.71
-20.00	-2.01	106.56	5.52	-23.29	-0.69	-0.59
-10.00	-1.01	105.99	4.97	-14.26	0.80	-0.35
0.00	0.00	105.39	4.39	-5.39	2.37	0.00
10.00	1.01	104.69	3.73	3.15	4.11	0.48
20.00	2.02	103.60	2.73	10.25	6.58	1.17
30.00	3.04	103.29	2.37	20.07	7.65	2.40
40.00	4.06	102.98	1.99	30.05	8.73	3.50
50.00	5.08	102.69	1.63	39.77	9.80	4.95
60.00	6.09	102.32	1.19	49.68	11.03	5.92

表 4.33 Case2 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 之接觸情形

交錯角：60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	110.45	8.21	-55.78	-8.08	1.79
-50.00	-4.98	109.99	7.77	-46.25	-6.85	1.28
-40.00	-3.99	109.53	7.33	-36.74	-5.61	0.85
-30.00	-2.99	109.07	6.89	-27.23	-4.37	0.51
-20.00	-2.00	108.61	6.45	-17.74	-3.12	0.25
-10.00	-1.00	108.16	6.00	-8.25	-1.87	0.08
0.00	0.00	107.70	5.55	1.21	-0.60	0.00
10.00	1.00	107.25	5.09	10.67	0.67	0.00
20.00	2.00	106.80	4.63	20.11	1.95	0.09
30.00	3.00	106.35	4.17	29.53	3.24	0.27
40.00	4.01	105.90	3.70	38.93	4.55	0.54
50.00	5.01	105.44	3.23	48.30	5.86	0.90
60.00	6.02	104.99	2.75	57.65	7.19	1.34

表 4.34 Case2 配對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 之接觸情形

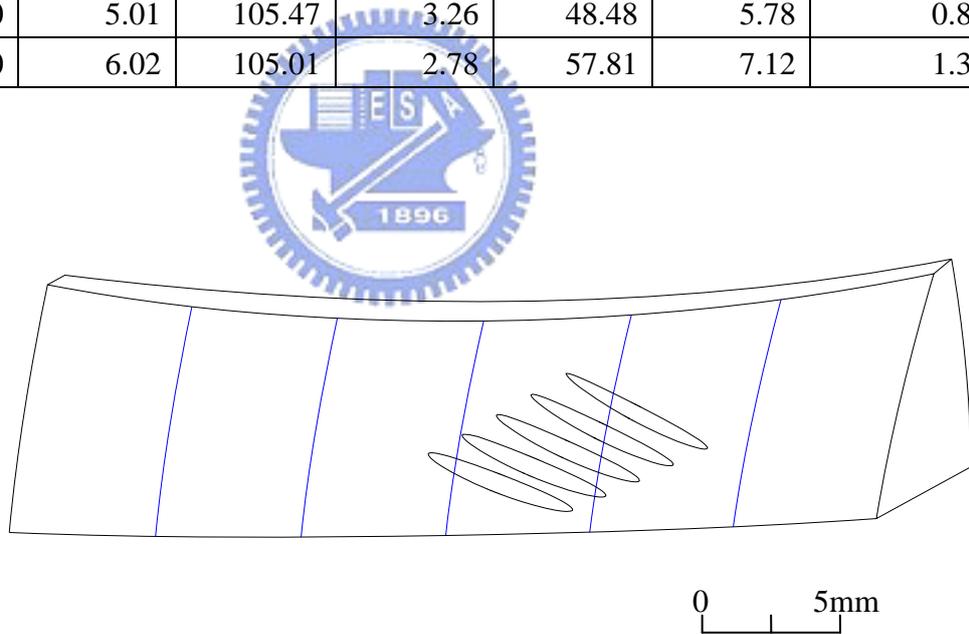
交錯角：60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	110.60	8.37	-54.84	-8.53	1.97
-50.00	-4.98	110.14	7.94	-45.29	-7.32	1.43
-40.00	-3.98	109.69	7.50	-35.75	-6.09	0.98
-30.00	-2.99	109.24	7.06	-26.22	-4.87	0.61
-20.00	-1.99	108.78	6.62	-16.70	-3.63	0.32
-10.00	-1.00	108.33	6.18	-7.19	-2.39	0.12
0.00	0.00	107.89	5.74	2.32	-1.15	0.00
10.00	1.00	107.44	5.29	11.81	0.11	-0.03
20.00	2.00	107.00	4.84	21.29	1.37	0.02
30.00	3.00	106.55	4.39	30.75	2.64	0.16
40.00	4.01	106.11	3.93	40.20	3.91	0.38
50.00	5.01	105.67	3.47	49.64	5.20	0.70
60.00	6.02	105.23	3.00	59.05	6.50	1.10

表 4.35 Case2 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 之接觸情形

交錯角：60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	110.40	8.15	-56.12	-7.91	1.71
-50.00	-4.98	109.93	7.71	-46.62	-6.67	1.21
-40.00	-3.99	109.47	7.27	-37.12	-5.43	0.80
-30.00	-2.99	109.01	6.82	-27.63	-4.18	0.47
-20.00	-2.00	108.55	6.37	-18.16	-2.92	0.23
-10.00	-1.00	108.09	5.92	-8.70	-1.65	0.07
0.00	0.00	107.63	5.46	0.74	-0.37	0.00
10.00	1.00	107.17	5.00	10.16	0.92	0.02
20.00	2.00	106.71	4.54	19.57	2.22	0.13
30.00	3.01	106.25	4.07	28.95	3.53	0.32
40.00	4.01	105.78	3.59	38.31	4.86	0.61
50.00	5.02	105.32	3.11	47.63	6.20	0.99
60.00	6.02	104.85	2.62	56.92	7.56	1.47

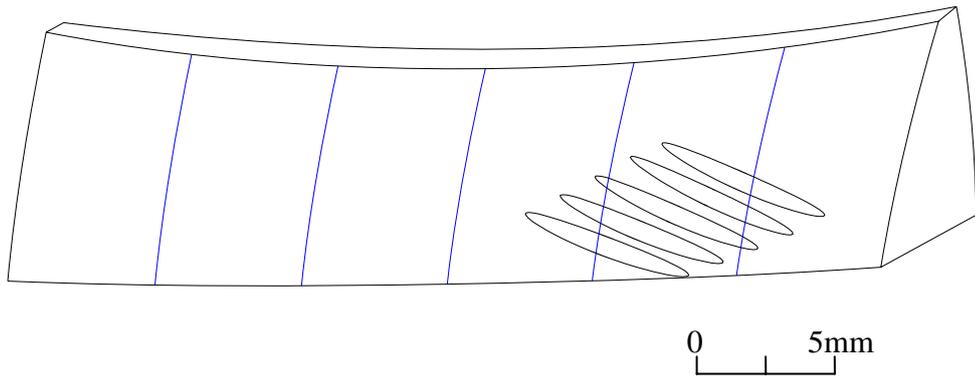
表 4.36 Case2 配對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 之接觸情形

交錯角： 60.0° 裝配狀況： $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$ 、 $\Delta S = 0.0mm$						
ϕ_1' (度)	ϕ_2' (度)	u_1 (mm)	u_2 (mm)	ϕ_1 (度)	ϕ_2 (度)	KE(arc-sec.)
-60.00	-5.97	110.52	8.26	-55.47	-8.23	1.85
-50.00	-4.98	110.05	7.82	-45.95	-7.00	1.33
-40.00	-3.99	109.59	7.38	-36.44	-5.76	0.89
-30.00	-2.99	109.13	6.94	-26.95	-4.52	0.54
-20.00	-2.00	108.67	6.49	-17.46	-3.26	0.27
-10.00	-1.00	108.21	6.04	-7.99	-2.00	0.09
0.00	0.00	107.76	5.59	1.47	-0.73	0.00
10.00	1.00	107.30	5.13	10.91	0.55	-0.01
20.00	2.00	106.84	4.67	20.34	1.84	0.07
30.00	3.00	106.39	4.21	29.74	3.14	0.24
40.00	4.01	105.93	3.74	39.12	4.45	0.50
50.00	5.01	105.47	3.26	48.48	5.78	0.85
60.00	6.02	105.01	2.78	57.81	7.12	1.30

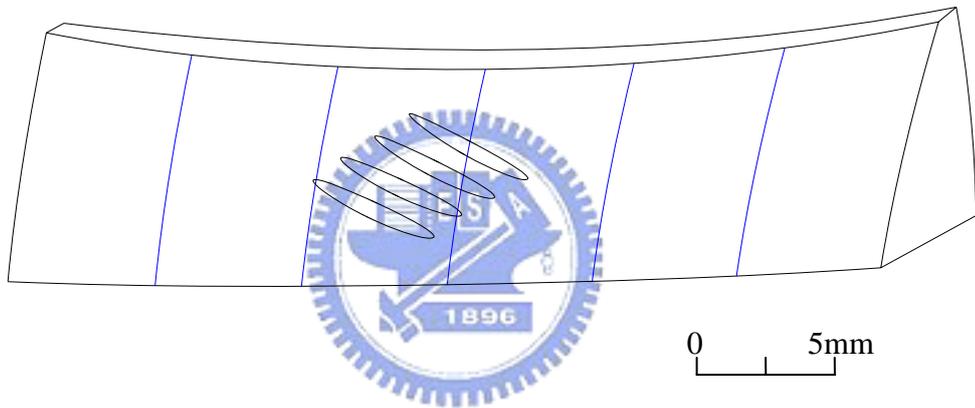


(a) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta S = -0.5mm$

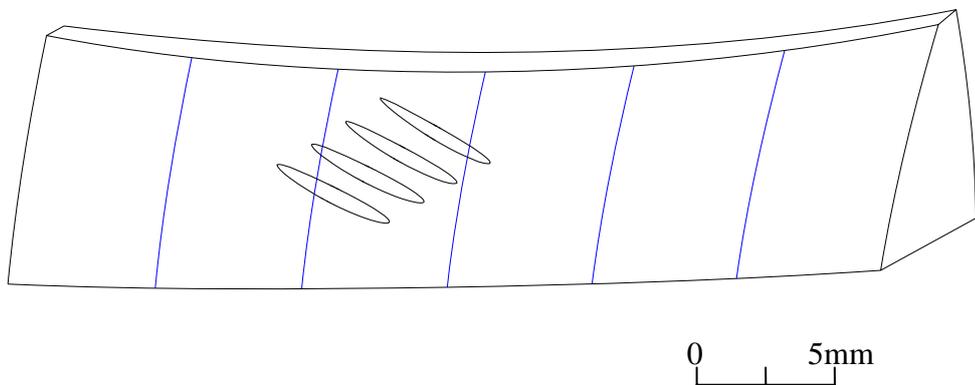
圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1)



(b) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta S = -1.0\text{mm}$

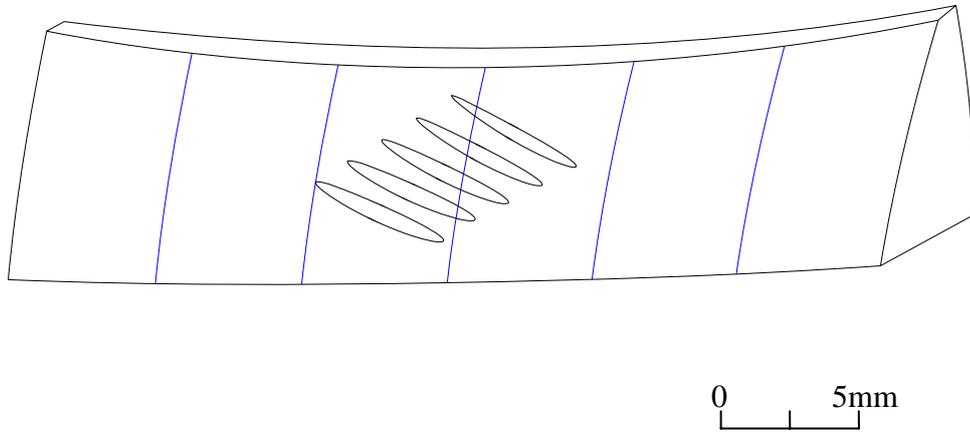


(c) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$

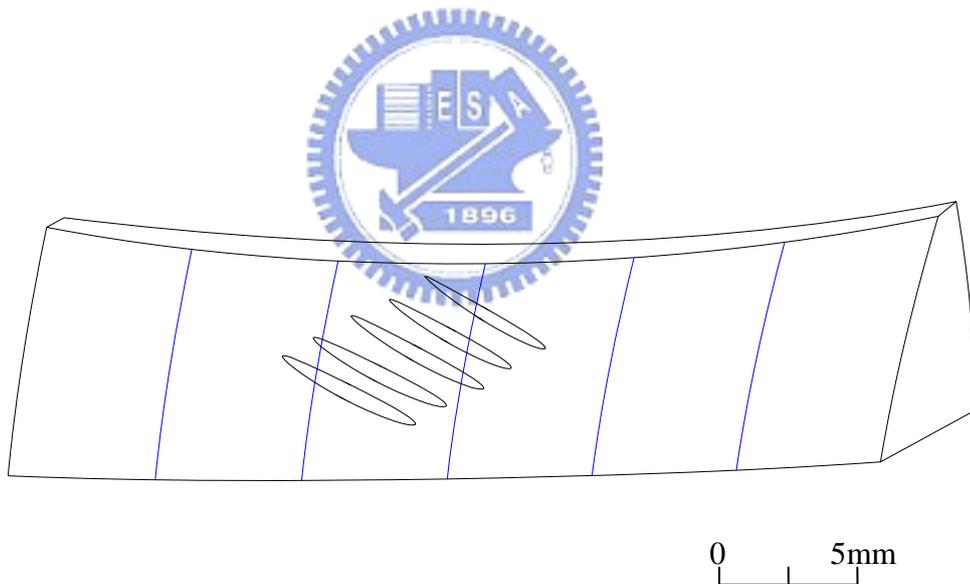


(d) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$

圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2)

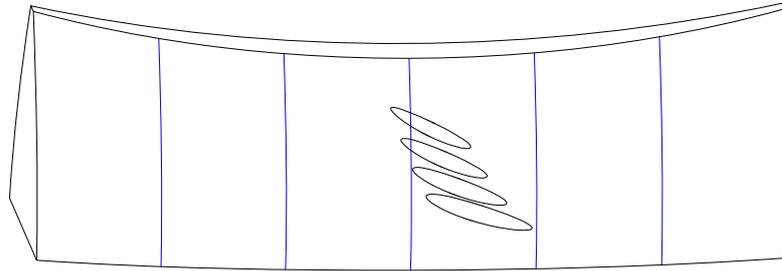


(e) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$

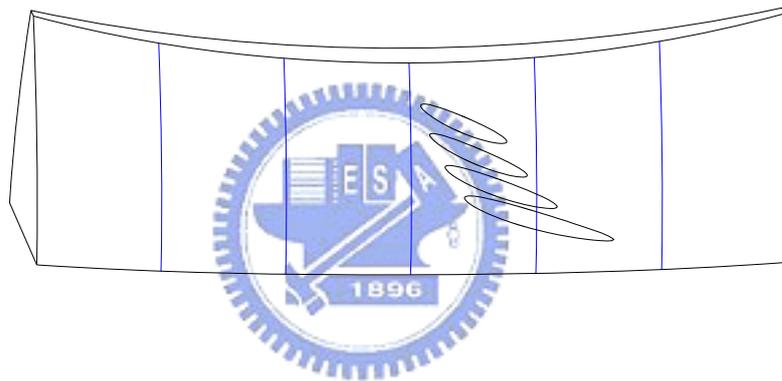


(f) 交錯角 $\gamma = 30.0^\circ$ ，壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$ ， $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$

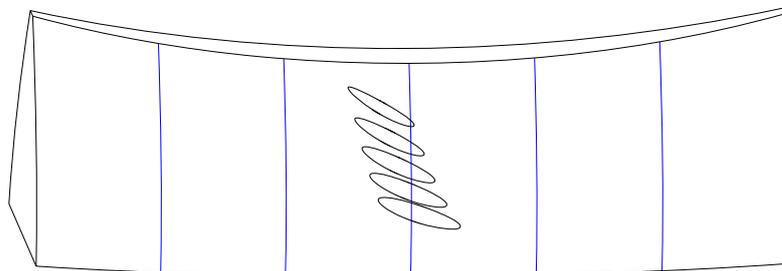
圖 4.9 Case1 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(3)



(a) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta S = -0.5mm$

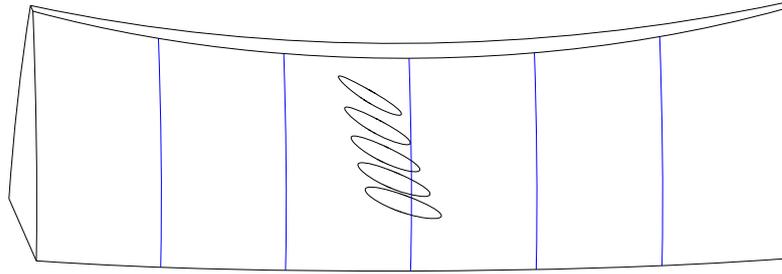


(b) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta S = -1.0mm$

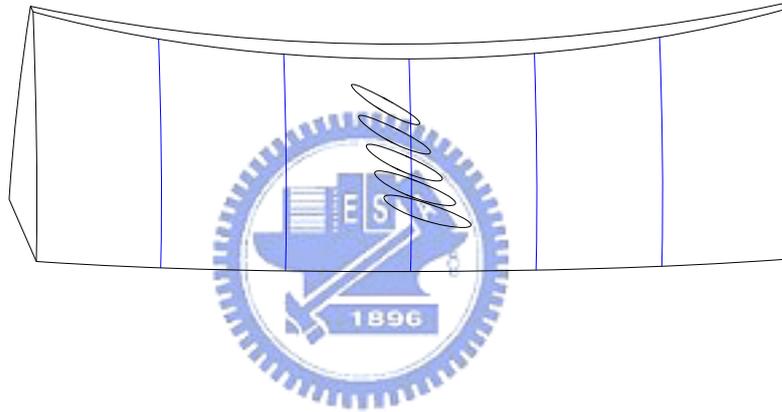


(c) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta\gamma_h = 0.2^\circ$

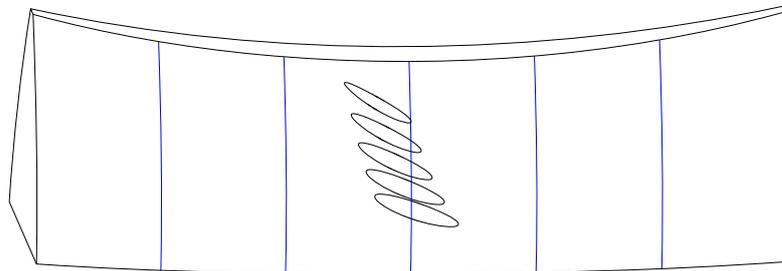
圖 4.10 Case2 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(1)



(d) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta\gamma_h = 0.4^\circ$



(e) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta\gamma_v = 0.2^\circ$



(f) 交錯角 $\gamma = 60.0^\circ$, 壓力角 $\alpha_n^{(H)} = \alpha_n^{(F)} = 20.0^\circ$, $\Delta\gamma_v = 0.4^\circ$

圖 4.10 Case2 配對在具有裝配誤差下之接觸齒印(2)

4.5 本章結論

根據本章 4.1 節至 4.4 節可得知，非共軛創成之蝸桿蝸輪組屬於點接觸之傳動機構，其在不具有裝配誤差時便有一運動誤差，此乃非共軛創成之蝸桿蝸輪組可能發生之情況，可視為合理之運動誤差。本章節中針對此一蝸桿蝸輪組，修改其法向壓力角與交錯角等設計參數，觀察其運動誤差以及接觸齒印之變化。茲將本章所得之結果整理如下：

- 一、針對不同法向壓力角以及不同交錯角之蝸桿蝸輪組，其運動誤差隨著法向壓力角以及交錯角之改變而有所增減，然而運動誤差相對於裝配誤差之敏感性，並不會因為法向壓力角以及交錯角之改變而呈現大幅度的改變，即此類蝸桿蝸輪組在不同法向壓力角以及不同交錯角的情況下，當分別具有各種裝配誤差時，其運動誤差係呈現些許成長的趨勢。
- 二、針對不同法向壓力角之蝸桿蝸輪組，其法向壓力角之增減對於其接觸橢圓之偏移幅度影響並不大。此外，中心距裝配誤差以及水平軸向裝配誤差對於接觸齒印其橢圓形狀的變化影響程度較垂直軸向裝配誤差之影響要來得大。相較於該法向壓力角在理想裝配狀態下之接觸橢圓，具中心距或水平軸向裝配誤差時之接觸橢圓，偏離理想裝配狀態時之接觸橢圓的幅度較具垂直軸向裝配誤差者要大。
- 三、針對不同交錯角之蝸桿蝸輪組，其接觸橢圓之偏移幅度隨著交錯角之減少變得更加劇烈，且中心距裝配誤差對於接觸齒印其橢圓形狀的變化影響程度較垂直軸向裝配誤差以及水平軸向裝配誤差之影響要大。
- 四、針對不同交錯角之蝸桿蝸輪組，其接觸橢圓之長軸會隨著交錯角之減小而變長，同時接觸齒印也隨之增大，因此，齒面接觸應力隨之降低。故具有較小交錯角之蝸桿蝸輪組但可以承受或傳動更大的扭力，這點對於蝸桿蝸輪組之設計與應用有很大的助益。

第五章 結論與未來展望

5.1 結論

本研究是以 Litvin[9,10,11]所發展之齒輪原理為基礎，利用創成法推導蝸桿蝸輪之齒面方程式，再配合電腦繪圖輔助工具，完成蝸桿蝸輪組之齒面數學模式推導以及模型之建立，並利用數值分析法求解此一蝸桿蝸輪組在各種不同裝配誤差下之運動誤差變化情形，最後利用齒面外形法建立接觸齒印之數學模式，並搭配電腦繪圖技術繪出在接觸點之接觸橢圓外形。依據先前各章節之研究以及分析所得之結果，茲彙整成以下數點結論：

- 一、此一蝸桿蝸輪組乃非共軛創成之蝸桿蝸輪組，因此在理想裝配狀態時可能會有運動誤差的存在。實際上在本研究中所得到的分析結果也確實驗證了此類蝸桿蝸輪組在理想裝配狀態時存在運動誤差，但此運動誤差極小，因此吾人認為此為可接受之合理誤差。
- 二、在本研究中探討了此一蝸桿蝸輪組，分別以不同交錯角及不同法向壓力角作為設計參數，觀察其運動誤差是否因設計參數之改變而變化得更為劇烈或者是趨於和緩。由分析所得到之結果研判，更改交錯角和壓力角這兩個設計參數對於運動誤差並不會有太大的影響。
- 三、在探討此一蝸桿蝸輪組之接觸橢圓變化情形時，以不同的交錯角以及不同的法向壓力角作為設計參數，由分析所得到之結果和圖形顯示，不同的法向壓力角對於接觸齒印其橢圓形狀的變化情形影響並不大，而不同的交錯角影響接觸橢圓的程度則較為明顯，隨著交錯角變小，接觸橢圓也變大且其偏移程度越大。
- 四、觀察此一蝸桿蝸輪組於不同裝配誤差下之接觸橢圓的形狀變化，可以發現此一蝸桿蝸輪組對於中心距裝配誤差之敏感程度較垂直軸向裝配誤差以及水平軸向裝配誤差之敏感程度要大，亦即具有中心距裝配誤

差之接觸橢圓其接觸橢圓的偏移程度較具有垂直軸向裝配誤差以及水平軸向裝配誤差之接觸橢圓要來得大。

五、給定不同的法向壓力角作為設計參數，對於此一蝸桿蝸輪組之接觸橢圓的形狀變化影響並不大；給定不同的交錯角作為設計參數，對於此一蝸桿蝸輪組之接觸橢圓的形狀和橢圓的大小影響較大，隨著交錯角變小，接觸橢圓之長軸會變得更長，接觸橢圓之面積亦會增大。

5.2 未來展望

本研究已發展出盤狀磨輪創成之蝸桿蝸輪組齒面數學模式，並進行此一蝸桿蝸輪組之接觸分析與接觸齒印分析，未來可利用此一數學模式建立3D模型，透過有限元素法進行齒面接觸應力分析，以作為驗證本研究接觸齒印分析結果之依據，更可進一步利用最佳化方式求得此一數學模式之最佳設計參數。



參考文獻

- [1] 蔡忠杓，「K 型蝸桿與蝸輪之切削模擬與磨輪設計」，國立交通大學機械製造與熱流研究中心，工業技術研究院委託學術機構研究總報告，民國八十二年六月。
- [2] Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., “A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 1 – the Generating Surface,” Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 143-147, March 1989.
- [3] Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., “A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 2 – the Mathematical Model of Worm Gear Manufacturing and Working Process,” Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 148-152, March 1989.
- [4] Jannink, W. L., “Contact Surface Topology of Worm Gear Teeth,” Gear Technology, 1988, pp. 31-47.
- [5] Bair, B. W. and Tsay, C. B., “ZK-type dual-lead worm and worm gear drives: Contact teeth, contact ratios and kinematic errors,” Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, v 120, n 3, Sep, 1998, pp. 422-428.
- [6] Fang, H. S. and Tsay, C. B., “Mathematical Model and Bearing Contacts of the ZN-Type Worm Gear Sets Cut by Oversize Hob Cutters,” Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, No. 12, 2000, pp.1689-1708.
- [7] 陳嘉宏，「飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國九十二年六月。
- [8] 廖健雄，「非 90° 交錯角之 ZN 型蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國九十三年六月。
- [9] Litvin, F. L. and Alfonso Fuentes, Gear Geometry and Applied Theory, 2nd edition, Cambridge University Press, 2004.
- [10] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [11] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C., 1989.

- [12] 曾瑞堂，「曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式與接觸分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國八十八年六月。
- [13] 蘇政豪，「具冠狀與齒型修整之螺旋齒輪的齒印分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國九十五年六月。
- [14] 趙立碁，「球形齒輪之數學模式及接觸分析」，國立交通大學機械工程研究所，碩士論文，民國九十四年六月。
- [15] 王如鈺，齒輪原理概要，再版，憬藝企業有限公司，民國八十四年九月。

