

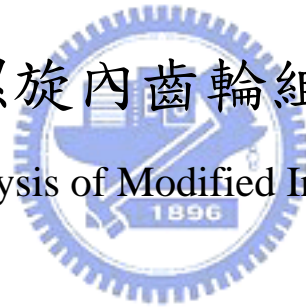
國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

修整型螺旋內齒輪組之特性分析

Characteristic Analysis of Modified Internal Helical Gear Pairs



研究生：魏家誠

指導教授：陳仁浩 教授

共同指導教授：蔡忠杓 教授

中華民國九十六年六月

修整型螺旋內齒輪組之特性分析

Characteristic Analysis of Modified Internal Helical Gear Pairs

研究生： 魏家誠

Student： Chia-Cheng Wei

指導教授： 陳仁浩
蔡忠杓

Advisor： Dr. Ren-Haw Chen
Dr. Chung-Biau Tasy

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Mechanical Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

修整型螺旋內齒輪組之特性分析

研究生：魏家誠

指導教授：陳仁浩 博士

共同指導教授：蔡忠杓 博士

國立交通大學 機械工程學系

摘要

齒輪為傳遞動力的重要機械元件，其中圓柱型螺旋齒輪由於具有高效率傳遞動力的特性，因此被工業界廣泛地應用在各種傳動機構中。螺旋內齒輪組與外齒輪相比之下由於具有更小之中心距的空間特性，因此內齒輪組為減速機中常見之齒輪機構，而且螺旋齒輪在嚙合時其應力也較小且運轉也較平順。然而由於螺旋內齒輪在實際製造及裝配上之誤差，使其失去原本理想的共軛嚙合條件，造成接觸狀況不佳的情況，所以業界一般會對齒輪齒面進行修整，以達到降低齒輪傳動誤差之目的。

本論文依據齒輪原理及創成機構之關係，在假設齒輪為剛體的前題下，推導出螺旋內齒輪組之齒面數學模式，並開發電腦輔助分析程式來進行該齒輪組之齒輪接觸模擬分析，探討齒輪組經由冠狀及轉位修整之螺旋小齒輪與漸開線螺旋環齒輪，當其齒輪傳動軸具有旋轉軸向之裝配誤差的情形時之嚙合狀態及運動誤差。

Characteristic Analysis of Modified Internal Helical Gear Pairs

Student: Chia-Cheng Wei

Advisor: Dr. Ren-Haw Chen
Dr. Chung-Biau Tasy

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

The gear is an important mechanical component for transmitting powers. Since the cylindrical helical gear has high efficiency to transmit power, therefore, it is widely used in reduction mechanisms by industry. The internal gear is a gear mechanism usually used for reduction gear box. Compared with the external gear, the center distance of the internal helical gear is smaller, the contact stress is lower and the gear meshing is also more smoother. However, due to the manufacture and assembly errors, the gear set may lose its conjugate meshing condition, which may cause the bad contact situation. Therefore, gear tooth modifications are widely used by the industry to reduce the transmission error of the gear pair.

In this thesis, according to the theory of gearing and gear generation mechanism, a mathematical model for internal helical gears with crowned and profile-shifted modification teeth has been developed under the assumption of gear wheel is a rigid body. Based on the gear meshing theory, mathematical model of tooth contact and bearing contact analysis are established.

誌謝

本論文能順利完成，首先要感謝指導教授 蔡忠杓博士平日細心與認真地指導學生，不論在論文寫作或是待人處事上皆給予學生莫大的幫助及啟示，令學生受益良多，故由衷地感謝老師對於學生的指導與付出。

同時感謝指導教授 陳仁浩博士與 劉家彰博士對學生論文的指正與建議，並提供許多寶貴的意見，令本論文得以更為完備。

此外則是感謝實驗室的瑞堂學長、冠宇學長、立碁學長、威良學長、偉旭學長、政豪學長、俊諭學長，以及宗賢同學、健育同學，當我在課業及研究上有困惑的時候，能給予我實質的協助與意見，在日常生活上也陪伴我渡過兩年來美好的時光，讓我可以調整心情面對課業上的壓力，我對於能待在這實驗室以及認識大家而感到高興。

接著要感謝的人就是我的家人，因為有父母親的栽培與家人的支持，我才能全心的在課業上衝刺，感激之情言謝不足全矣。

最後，感謝所有曾經給予我支持與幫助的人，因為你的援手讓我更能站穩自己的步伐，才能達到今天的成就，謝謝大家。

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
符號表	xii
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究內容	3
第二章 基礎理論	4
2.1 位置向量轉換	4
2.2 嚙合方程式	6
2.3 相對運動速度	8
第三章 齒面數學模式推導	12
3.1 前言	12
3.2 齒條刀之齒面數學模式及嚙合方程式	13
3.3 修整型螺旋齒輪之齒面數學模式	23
3.4 小齒輪狀型齒刀之數學模式及嚙合方程式	24
3.5 漸開線螺旋環齒輪之數學模式	27
3.6 本章結論	28

第四章 修整型螺旋內齒輪組之齒面接觸分析.....	32
4.1 前言	32
4.2 螺旋內齒輪對之接觸分析數學模式.....	32
4.3 齒輪對之運動誤差分析模式.....	35
4.4 接觸分析例題與討論.....	37
4.5 本章結論.....	67
第五章 結論與未來展望.....	69
5.1 結論	69
5.2 未來展望.....	71
參考文獻.....	72



圖目錄

圖 2.1 位置向量與座標系之關係示意圖	5
圖 2.2 空間中兩嚙合運動曲面之關係示意圖	7
圖 2.3 平行軸共軛運動關係示意圖	9
圖 2.4 空間物體之相對速度示意圖	10
圖 3.1 齒條刀 Σ_p 之法向剖面圖	14
圖 3.2(a) 齒條刀 Σ_p 之齒根導角法向剖面	15
圖 3.2(b) 齒條刀 Σ_p 之齒頂導角法向剖面	15
圖 3.3 假想齒條刀之刀面座標系關係示意圖	18
圖 3.4 齒條刀與被創成齒輪之相對運動關係	21
圖 3.5 小齒輪型齒刀與被創成環齒輪之相對運動關係	26
圖 3.6(a) 電腦輔助繪圖之修整型螺旋小齒輪	29
圖 3.6(b) 電腦輔助繪圖之漸開線螺旋環齒輪	30
圖 3.6(c) 中心距為 20mm 之螺旋內齒輪組裝配示意圖	31
圖 4.1 齒輪組具裝配誤差之座標系關係示意圖	33
圖 4.2 不同冠狀修整半徑之螺旋小齒輪齒型	39
圖 4.3 不同壓力角之螺旋小齒輪與壓力角 20° 螺旋內齒輪嚙合時之運動誤差曲線	46
圖 4.4 具水平與垂直軸向裝配誤差之漸開線螺旋內齒輪對之運動誤差曲線	49
圖 4.5 具水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 之冠狀修整螺旋內齒輪對之運動誤差曲線	56
圖 4.6 具垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$ 之冠狀修整螺旋內齒輪對之運動誤差曲線	56

圖 4.7 不同壓力角之冠狀修整螺旋內齒輪對在具有水平軸向裝配誤差
 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 時之運動誤差曲線..... 66

圖 4.8 不同壓力角之冠狀修整螺旋內齒輪對在具有垂直軸向裝配誤差
 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$ 時之運動誤差曲線..... 66



表目錄

表 3.1 修整型螺旋內齒輪對之主要設計參數.....	28
表 4.1 漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	38
表 4.2 具冠狀修整 $R=30\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	40
表 4.3 具冠狀修整 $R=50\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	40
表 4.4 具冠狀修整 $R=100\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	41
表 4.5 具冠狀修整 $R=1000\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	41
表 4.6 具冠狀修整與正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	43
表 4.7 具冠狀修整與負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差	43
表 4.8 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(1)	44
表 4.9 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(2)	44
表 4.10 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(3)	45
表 4.11 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(4)	45

表 4.12 具中心距之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(1)	47
表 4.13 具水平軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(2)	47
表 4.14 具垂直軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(3)	48
表 4.15 具垂直軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(4)	48
表 4.16 具冠狀修整 $R=30\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1)	50
表 4.17 具冠狀修整 $R=30\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2)	50
表 4.18 具冠狀修整 $R=30\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3)	51
表 4.19 具冠狀修整 $R=30\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向和垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(4)	51
表 4.20 具冠狀修整 $R=50\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1)	52
表 4.21 具冠狀修整 $R=50\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2)	52
表 4.22 具冠狀修整 $R=50\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3)	53
表 4.23 具冠狀修整 $R=50\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平和垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(4)	53
表 4.24 具冠狀修整 $R=1000\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具	

有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1).....	54
表 4.25 具冠狀修整 $R=1000\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2).....	54
表 4.26 具冠狀修整 $R=1000\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3).....	55
表 4.27 具冠狀修整 $R=1000\text{mm}$ 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平和垂直軸向之裝配下的運動誤差(4).....	55
表 4.28 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1).....	57
表 4.29 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2).....	58
表 4.30 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3).....	58
表 4.31 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4).....	59
表 4.32 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1).....	59
表 4.33 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2).....	60
表 4.34 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3).....	60
表 4.35 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4).....	61
表 4.36 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1).....	62

表 4.37 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2).....	62
表 4.38 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3).....	63
表 4.39 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時運動誤差(4).....	63
表 4.40 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1).....	64
表 4.41 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2).....	64
表 4.42 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3).....	65
表 4.43 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平及垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4).....	65

符號表

b	齒條刀設計參數(mm)
C	齒輪組理論中心距(mm)
C'	齒輪組實際嚙合中心距(mm)
ΔC	中心距誤差(mm)
E	冠狀修整之刀具轉位量(mm)
E_2	齒冠修整之刀具最大轉位量(mm)
f_i	齒頂與齒根導角設計參數($i = a, d$)(mm)
h_i	齒條刀設計參數($i = a, d$)(mm)
I	共軛運動對的瞬心
ℓ	齒條刀齒面設計參數(mm)
$\ell^{(s)}$	齒輪形齒刀設計參數(mm)
\mathbf{L}_{ij}	法向量轉換矩陣由 S_j 座標系轉換至 S_i 座標系
m_n	齒條刀法向模數(mm/齒)
$m_n^{(s)}$	齒輪形齒刀法向模數(mm/齒)
M	齒條刀刀面之動點
M_0	齒條刀刀面之固定點
\mathbf{M}_{ij}	齊次座標轉換矩陣由 S_j 座標系轉換至 S_i 座標系
\mathbf{n}_c	座標系 S_c 上齒條刀刀面之單位法線向量
$\mathbf{n}_f^{(i)}$	齒面單位法向量表示在固定座標系 S_f
\mathbf{N}	兩相切平面之共同法向量
\mathbf{N}_c	齒條刀刀面之法線向量表示於座標系 S_c
$\mathbf{N}_s^{(s)}$	齒輪形齒刀之法線向量表示於座標系 S_s
O_i	座標系 S_j 之原點
P	兩曲面之共同接觸點
r_i	齒輪節圓半徑($i = 1, 2$)(mm)

$r_1^{(s)}$	齒輪形齒刀之節圓半徑
R_B	冠狀修整之圓弧曲率半徑(mm)
\mathbf{R}_i	位置向量($i = 1, 2, c, f, r, s$)
$\mathbf{R}_f^{(i)}$	齒面軌跡表示於固定座標系 S_f 之位置向量($i = 1, 2$)
$S_i(X_i, Y_i, Z_i)$	座標系 S_i ($i = 1, 2, a, c, d, f, h, r, s, v$)
T_i	齒數($i = 1, 2$)
\mathbf{T}	曲面之共同切平面
u	齒條刀齒面設計參數(mm)
$\mathbf{V}^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之相對速度
$\mathbf{V}_f^{(i)}$	物體 i 在座標系 S_f 之速度
$\mathbf{V}_f^{(ij)}$	物體 i 相對於物體 j 之相對速度表示於座標系 S_f
W	齒寬(mm)
x_p	創成螺旋齒輪時之轉位係數
$x_p^{(s)}$	創成齒輪形齒刀時之轉位係數
α_n	齒條刀之法向壓力角(度)
β	螺旋角(度)
γ	靠模板參數(度)
γ_{\max}	靠模板參數之極限值(度)
$\gamma^{(s)}$	齒輪形齒刀之設計參數(度)
$\Delta\gamma_h$	水平軸向裝配誤差(mm)
$\Delta\gamma_v$	垂直軸向裝配誤差(mm)
θ_i	齒頂與齒根導角之設計參數($i = a, d$)(度)
λ	導程角(度)
ρ_a	齒頂導角之半徑(mm)
ρ_d	齒根導角之半徑(mm)
Σ_i	螺旋小齒輪與螺旋環齒輪之齒面($i = 1, 2$)
Σ_j	齒條刀與小齒輪形齒刀之刀面($j = p, s$)
ϕ_i	齒輪創成時之旋轉角($i = 1, 2$)(度)

ϕ_s	齒輪形齒刀之旋轉角(度)
ϕ'_i	齒輪嚙合時之旋轉角($i=1,2$) (度)
$\Delta\phi'_2$	齒輪組之運動誤差(弧度-秒; arc-second)
ψ	旋轉軸之交錯角(度)
ω_i	齒輪之旋轉角速度($i=1,2$)(弧度/秒; rpm)



第一章 緒論

1.1 前言

漸開線型螺旋內齒輪(Internal Helical Gear)是指齒筋為螺旋狀之圓筒型內齒輪，主要與螺旋齒輪搭配使用在減速齒輪箱中，因為它具有較高的齒輪比(Gear Ratio)及接觸比，齒輪嚙合時應力較小且運轉較平順，跟外齒輪相比具有更小中心距的空間特性；而漸開線齒形還具有製造簡單且縱使中心距有微幅變動，仍可維持共軛運動的優點，故為目前業界應用最廣泛的齒輪齒形。

螺旋齒輪的滾製過程，在理論分析上亦可加以簡化為由齒條刀與齒胚做相對運動加以模擬。在創成過程中，其每一瞬間齒條刀與被切製齒輪之齒面間為線接觸，而螺旋內齒輪組中的環齒輪(Ring Gear)由於其特殊幾何關係，並無法使用滾齒刀來切製環齒輪。目前一般齒輪製造商在產製環齒輪時，最常採用的製造方式為使用小齒輪齒形之型齒刀或拉刀，利用刨製法(Shaping)來製造環齒輪。

近年來由於齒輪之製造技術漸趨成熟，且在許多應用場合中，對齒輪傳動之精密度、噪音和振動的要求愈來愈嚴格，所以對於齒輪製造或裝配誤差所造成的運動不平順、噪音或振動等，都是工程師極欲解決的問題。由於漸開線型螺旋內齒輪對在理想的嚙合狀況下，其齒面接觸型態呈線接觸，因此只要有旋轉軸向之裝配偏差產生時，其接觸型態就會由線接觸變成點接觸，且接觸位置會落於齒面的前後齒緣上，亦即所謂的齒緣接觸(Edge Contact)，如此會使得齒輪運轉時之運動誤差增大而產生了較大的振動及噪音，同時也會造成齒輪之齒緣附近應力集中，將可能會導致齒面之崩壞而影響齒輪之使用壽命。所以齒輪在實際使用時經常對其齒面進行修整，目的是為了改變齒輪的接觸比、齒輪之強度及齒面接觸齒印等齒輪特質，亦可避免齒輪過切之問題。

1.2 文獻回顧

漸開線螺旋齒輪是一種廣為工業界所使用之齒輪，已有相當久的歷史，故不論在工業或學術上也有相當多的研究資料與技術經驗。一般漸開線螺旋齒輪之齒面修整主要有冠狀(Crowning)及齒形修整(Profile Modification)。冠狀修整乃是沿著漸開線螺旋齒輪之齒筋方向，亦即導程(Lead)方向，利用刀具將漸開線螺旋齒輪齒筋方向兩端之齒肉進行微量之刮除，使得齒輪在齒筋方向兩端之齒厚(Tooth Thickness)略微縮小。至於齒形修整則是針對漸開線螺旋齒輪之齒形(Profile)作改變，可調整齒輪壓力角(Pressure Angle)之角度及轉位量(Amount of Shift)，或對齒輪之齒冠(Addendum)或齒根(Dedendum)進行特殊之修整加工，使得齒輪之齒形產生變化。冠狀及齒形修整亦是工業界所普遍運用的技術，而這些作法在各齒輪規範都有相關的資料可供參考，但對於冠狀及齒形修整之漸開線螺旋內齒輪組的接觸狀況及運動誤差之探討與研究尚不多見。Litvin[1-3]探討有關齒輪運動誤差(Kinematical Error)之理論分析研究，對於齒輪組之運動誤差分析提供了理論與分析基礎。蔡等人[4-6]於 1986 年推導漸開線螺旋齒輪之數學模式，以及提出漸開線螺旋齒輪之電腦模擬、接觸分析與應力分析。白[7]於 1989 年探討漸開線形內齒輪之特性研究與分析，同年，陳[8]提出具冠狀小齒輪之內齒輪組的特性研究與分析。王[9]於齒輪原理概要中提及冠狀與轉位之理論與相關之齒輪方程式。王[10]於 1997 年研究修整型螺旋齒輪之接觸分析，張[11]於同年進行修整型螺旋齒輪之傳動誤差之測試與分析。蘇[12]於 2006 年探討具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒印分析。蔡等人[13-15]提出漸開線內齒輪組之理論分析以及正齒輪之冠狀修整齒型。

1.3 研究內容

本研究利用 Litvin[1-3]所提出之齒輪原理及蔡等人[4-6]所發展之齒輪數學模式推導流程，來建立具冠狀及轉位修整之螺旋小齒輪及漸開線環齒輪的數學模式。接著探討當齒輪組在具有製造及裝配誤差時，經修整之漸開線螺旋齒輪的接觸特性，同時藉由適當的選用齒輪之設計參數，亦可使得齒輪系統的運動誤差控制在可接受的範圍內。

茲將本論文各章之研究大綱概述如下：

第一章為緒論。主要為螺旋內齒輪組之概述及相關文獻之回顧，並介紹各章之研究內容。

第二章為基礎理論。介紹創成共軛運動對的基本理論，藉由此章節之理論探討與理解，可進一步做為後面章節在建立刀具及被創成齒輪之齒面數學模式以及齒輪創成原理之基礎。

第三章為齒面數學模式推導。本章利用第二章創成共軛運動對之基礎理論，建立具冠狀與轉位修整之螺旋齒輪及漸開線環齒輪的齒面數學模式。

第四章為修整型螺旋內齒輪組之接觸分析，主要是利用第三章所推導之齒輪數學模式，配合本研究自行開發之電腦輔助齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis,TCA)程式，模擬齒輪傳動的嚙合狀態及運動誤差。探討不同齒輪設計參數對齒輪運動誤差之影響。

第五章則為本論文之結論與未來展望。

第二章 基礎理論

2.1 位置向量轉換

假設空間中有兩個座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 與 $S_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ，兩座標系間之關係如圖 2.1 所示。若 S_f 與 S_i 兩座標系中有一共同點 P，其位置向量表示於 S_i 座標系為 \mathbf{R}_i ，若要把 P 點之位置向量 \mathbf{R}_i 由 S_i 座標系轉換至 S_f 座標系來表示其位置向量 \mathbf{R}_f ，則可利用齊次座標轉換矩陣(Homogeneous Coordinate Transformation Matrix)方程式來表示此兩座標系間之位置向量轉換：

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{M}_{fi} \mathbf{R}_i \quad (2.1)$$

其中

$$\mathbf{M}_{fi} = \begin{bmatrix} \cos(X_f, X_i) & \cos(X_f, Y_i) & \cos(X_f, Z_i) & X_f^{O_i} \\ \cos(Y_f, X_i) & \cos(Y_f, Y_i) & \cos(Y_f, Z_i) & Y_f^{O_i} \\ \cos(Z_f, X_i) & \cos(Z_f, Y_i) & \cos(Z_f, Z_i) & Z_f^{O_i} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(2.2)式中的 $\cos(X_f, X_i)$ 表示 X_f 軸與 X_i 軸間夾角之餘弦值，其餘依此類推；而 $X_f^{O_i}$ 、 $Y_f^{O_i}$ 及 $Z_f^{O_i}$ 為 S_i 座標系之原點 O_i 表示於 S_f 座標系之三個座標軸的分量， \mathbf{M}_{fi} 則為齊次座標轉換矩陣，可將位置向量 \mathbf{R}_i 由 S_i 座標系轉換至 S_f 座標系。

至於一般速度及法向量等之座標系間的轉換，因為與座標系之原點無關，所以此類向量的座標系間轉換矩陣 \mathbf{L}_{fi} 為(2.2)式之子矩陣，可由 \mathbf{M}_{fi} 矩陣刪去最後一行及最後一列而得，亦即如下列之表示式：

$$\mathbf{L}_{fi} = \begin{bmatrix} \cos(X_f, X_i) & \cos(X_f, Y_i) & \cos(X_f, Z_i) \\ \cos(Y_f, X_i) & \cos(Y_f, Y_i) & \cos(Y_f, Z_i) \\ \cos(Z_f, X_i) & \cos(Z_f, Y_i) & \cos(Z_f, Z_i) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

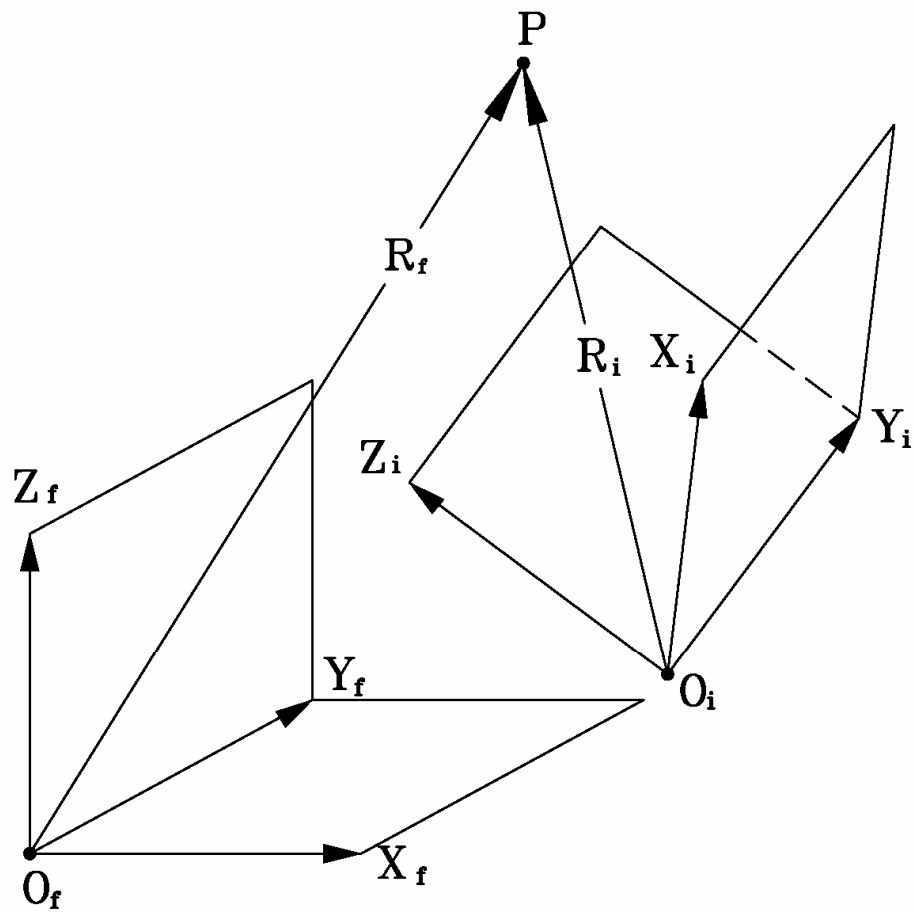


圖 2.1 位置向量與座標系之關係示意圖

2.2 嚙合方程式

當兩曲面嚙合保持連續接觸狀態時，可藉由嚙合方程式(Equation of Meshing)來表示兩齒面參數與運動參數之間的關係。如圖 2.2 所示，空間中有兩個互相嚙合運動的曲面 Σ_1 和 Σ_2 ， P 點則為這兩嚙合運動曲面相切(in Tangency)時之共切點(Common Tangent Point)，此點同時也是這兩個嚙合運動曲面的瞬時接觸點。兩個嚙合曲面在其共切點 P 點具有共同之曲面法向量 N ，而 $V^{(12)}$ 為兩曲面 Σ_1 和 Σ_2 在 P 點之相對速度。

由於兩曲面在嚙合運動時，其接觸過程中為連續之嚙合，不會產生一個曲面嵌入另一個曲面或兩嚙合曲面分離而產生不接觸，因此，這兩個共軛運動曲面在其共同法向量之方向上將不存在相對速度 $V^{(12)}$ ，亦即兩曲面之共同法向量的方向上其相對速度 $V^{(12)}$ 為零。然而在兩嚙合曲面之間實際上必有相對速度存在，其相對速度 $V^{(12)}$ 必落於兩嚙合曲面之共同切平面(Common Tangent Plane) T 上，因此，兩相切曲面之瞬時共同法向量 N 必與其共切面 T 互相垂直。從上述兩曲面 Σ_1 和 Σ_2 嚙合運動之現象可得到如下結論：兩嚙合運動曲面其相對速度 $V^{(12)}$ 和共同法向量 N ，在其共同接觸點 P 處必互相垂直，亦即兩者之內積(Dot Product)為零，所以下式亦必成立：

$$N \cdot V^{(12)} = 0 \quad (2.4)$$

方程式(2.4)即齒輪原理中探討共軛運動對之嚙合運動條件的嚙合方程式(Equation of Meshing)，此嚙合方程式對於二維(Two-Dimensional)及三維(Three-Dimensional)的共軛運動對均可適用。

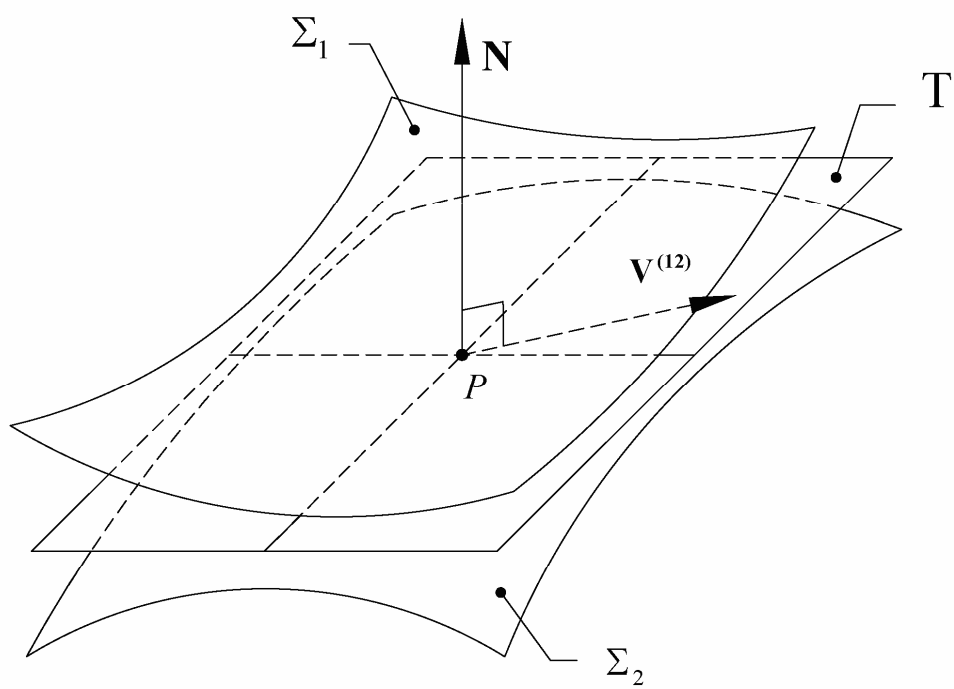


圖 2.2 空間中兩嚙合運動曲面之關係示意圖

在方程式(2.4)中，相對速度 $V^{(12)}$ 的計算較為複雜，當創成刀具和被創成齒輪間的運動屬於平行軸之共軛運動關係時，可以簡化成二維的情況來討論，如圖 2.3 所示， $V^{(12)}$ 可以表示為：

$$V^{(12)} = (\omega_1 - \omega_2) \times \overline{IP} = \omega^{(12)} \times \overline{IP} \quad (2.5)$$

其中 I 為滾齒刀與齒輪共軛運動時的瞬心 (Instantaneous Center of Rotation)。由方程式(2.5)得知相對速度 $V^{(12)}$ 與 \overline{IP} 垂直，因此可以確認其共同法向量 N 一定通過 I 點，所以可以推導出下式：

$$\frac{X(\phi) - x(\theta)}{N_x^{(\theta)}} = \frac{Y(\phi) - y(\theta)}{N_y^{(\theta)}} \quad (2.6)$$

其中 $X(\phi)$ 及 $Y(\phi)$ 為瞬心 I 點之座標， $x(\theta)$ 及 $y(\theta)$ 是 P 點的座標，而 $N_x^{(\theta)}$ 及 $N_y^{(\theta)}$ 則為其共同法向量在 X 軸及 Y 軸之分量。利用(2.6)式可以更容易地推導出二維共軛運動對之嚙合方程式。



2.3 相對運動速度

如圖 2.4 所示，假設空間中有兩個物體，物體 1 與物體 2 分別固聯於座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 。 Z_1 軸與 Z_2 軸分別為物體 1 與物體 2 之旋轉軸，其旋轉之角速度分別為 ω_1 與 ω_2 ， ψ 為兩旋轉軸之交錯角， C 為其最短距離， P 點為物體 1 與物體 2 之瞬時接觸點。因此，在物體 1 上之瞬時接觸點 P 的速度 $V^{(1)}$ 可由下式求得：

$$V^{(1)} = \omega_1 \times R_1 \quad (2.7)$$

其中 R_1 為物體 1 旋轉軸之座標原點指向瞬時接觸點 P 之位置向量。而在物體 2 上之瞬時接觸點 P 的速度 $V^{(2)}$ 則可由下式求得：

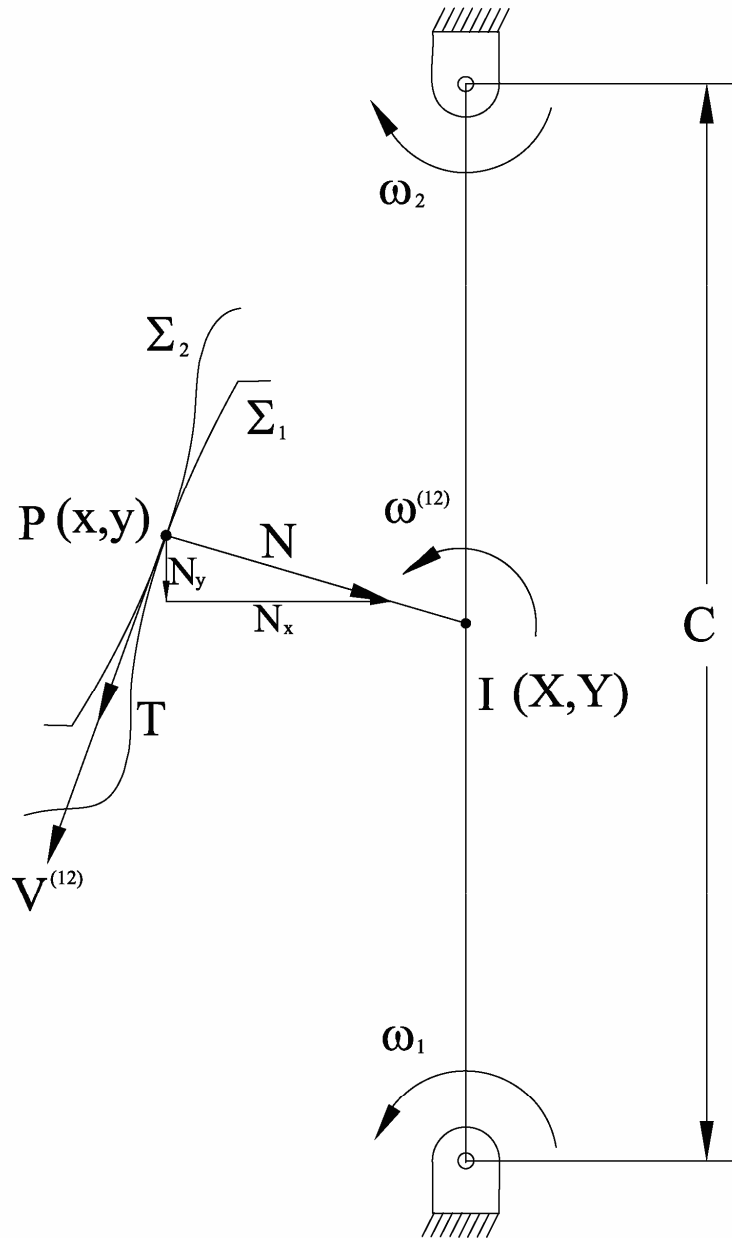


圖 2.3 平行軸共軛運動關係示意圖

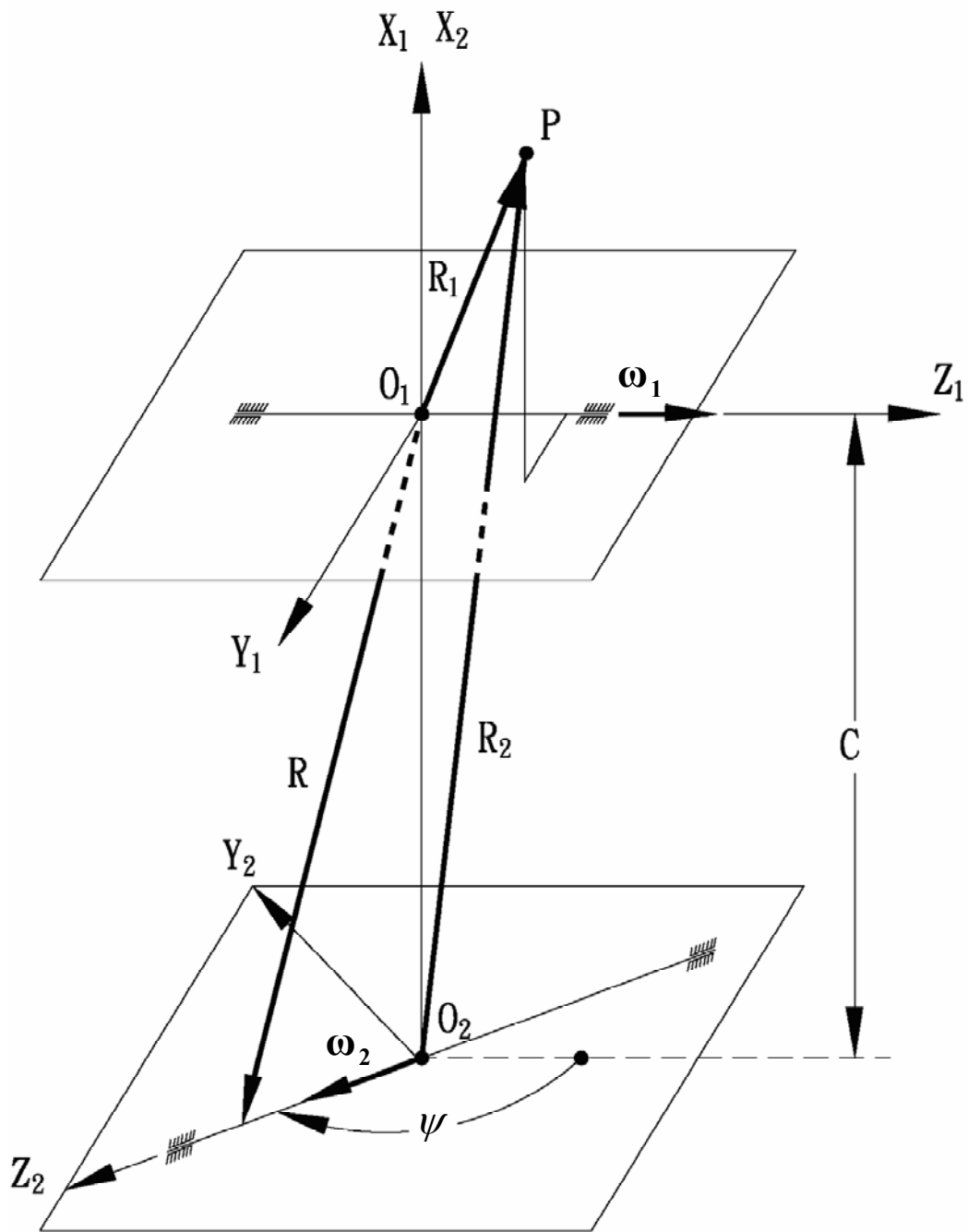


圖 2.4 空間物體之相對速度示意圖

$$\mathbf{V}^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_2 \quad (2.8)$$

其中 \mathbf{R}_2 乃是由物體 2 旋轉軸之座標原點指向瞬時接觸點 P 之位置向量。因此，物體 1 與物體 2 之相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 可求得如下：

$$\mathbf{V}^{(12)} = \mathbf{V}^{(1)} - \mathbf{V}^{(2)} \quad (2.9)$$

由於

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{O}_2\mathbf{O}_1 + \mathbf{R}_1 \quad (2.10)$$

經整理簡化後得下式：

$$\mathbf{V}^{(12)} = (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{R}_1 - \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \quad (2.11)$$

$$\text{或 } \mathbf{V}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{R}_1 - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}_2 \quad (2.12)$$

其中 \mathbf{R} 為自物體 1 之座標系原點 O_1 指向物體 2 之旋轉軸上任一動點之位置向量。相對速度方程式(2.11)或(2.12)主要適用於三維座標系，創成刀具和被創成齒輪的兩旋轉軸是屬於交錯軸旋轉之運動，亦即兩軸為不相交亦不平行之共軛運動關係。

第三章 齒面數學模式推導

3.1 前言

本章將依據 Litvin[1-3]發展之齒輪創成原理來推導出具有冠狀及轉位修整之螺旋小齒輪和漸開線形螺旋環齒輪的齒面數學模式。有了齒輪之齒面數學模式後便可利用電腦輔助繪圖技術繪出其齒輪輪廓，並在電腦上進行齒輪之齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)與模擬。在推導齒輪之齒面數學模式過程中，有兩項假設：

- (1) 溫度效應與動態負載的影響不予考慮。
- (2) 在齒形創成的過程中，僅考慮齒輪為剛體運動，彈性與塑性變形不予考慮。

本論文在探討螺旋齒輪齒面創成時，乃是將滾齒刀(Hob Cutter)之滾齒動作視為齒條刀(Rack Cutter)作平移運動及工件做旋轉運動所構成之相對運動，所以在建立齒輪的齒面數學模式之前，須先建立齒條刀的刀面外形數學模式，並利用齊次座標轉換矩陣方程式，根據齒條刀創成齒輪以及冠狀修整之刀具刀面的路徑進行座標轉換，以求得刀具刀面之軌跡。其次依微分幾何的原理找出接觸點或接觸線的位置及其在接觸面上的共同法向量，同時加入轉位之齒形修整，再配合齒輪運動之相互關係和嚙合方程式(Equation of Meshing)，即可推導出被創成之螺旋齒輪的齒面數學模式。再利用被創成之螺旋齒輪齒面數學模式當作假想齒刀，依齒輪創成原理則可推導出螺旋環齒輪之齒面數學模式。

3.2 齒條刀之齒面數學模式及嚙合方程式

一個漸開線形齒形的螺旋齒輪，可由一把具有直邊的齒條刀所創成，而本論文所探討之修整型螺旋內齒輪組，係以一假想齒條刀來模擬滾齒刀滾製齒輪，創成出具有冠狀及轉位修整之螺旋齒輪。如圖 3.1 所示之齒條刀 Σ_p ，其兩側呈左右對稱，而齒條刀之主體為其直邊刀刃，直邊刀刃的兩端分別接續齒條刀之齒根導角(Dedendum Fillet)與齒頂導角(Addendum Fillet)，亦即齒條刀之下圓弧導角與上圓弧導角。在齒條刀切製齒輪的過程中，齒條刀之直邊將創成齒輪之漸開線齒形部分，齒條刀之齒根導角將會創成出齒輪之齒頂導角，而齒條刀之齒頂導角將會創成出齒輪之齒根導角。

圖 3.1 表示齒條刀 Σ_p 之法向剖面圖，圖中之設計參數 ℓ 表示由固定點 M_0 沿著齒刀面到其直邊之任一動點 M 之距離，即 $\ell = |M_0M|$ ，其範圍定義為 $0 \leq \ell \leq |M_0M_1|$ ，而 α_n 係齒刀之法向壓力角(Normal Pressure Angle)。圖 3.2 則為圖 3.1 中齒條刀 Σ_p 之齒頂與齒根導角之放大圖，其中 ρ_a 係齒條刀之齒頂導角的半徑， ρ_d 則為齒條刀之齒根導角之半徑， θ_a 與 θ_d 分別是描述齒條刀之齒頂導角與齒根導角的參數，而 $\alpha_n \leq \theta_a \leq \pi/2$ 和 $\alpha_n \leq \theta_d \leq \pi/2$ 則為此兩參數之定義範圍。

由圖 3.1 及圖 3.2 所示，可得知齒條刀法向剖面之參數方程式表示在 $S_r(X_r, Y_r, Z_r)$ 座標系之通式為：

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

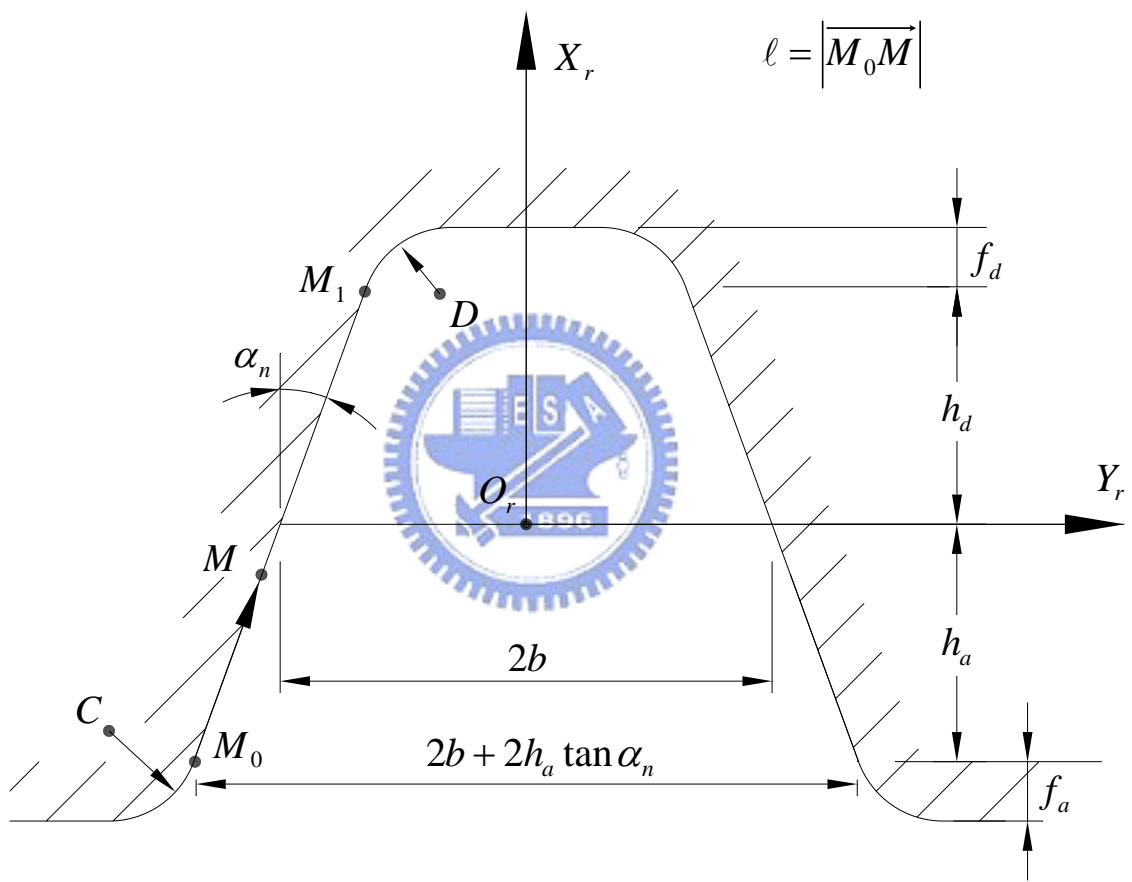


圖 3.1 齒條刀 Σ_p 之法向剖面圖

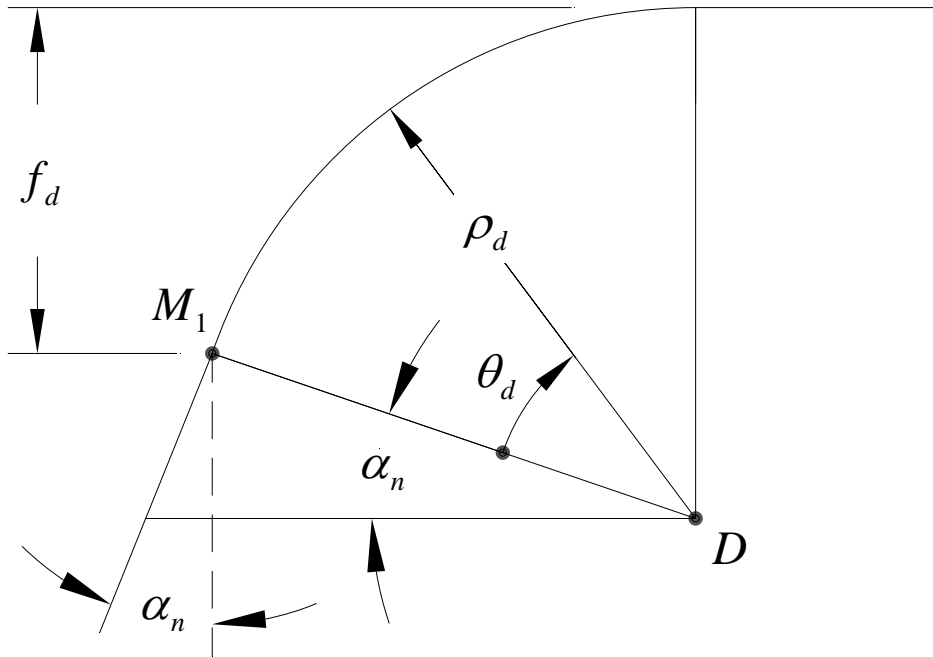


圖 3.2(a) 齒條刀 Σ_p 之齒根導角法向剖面

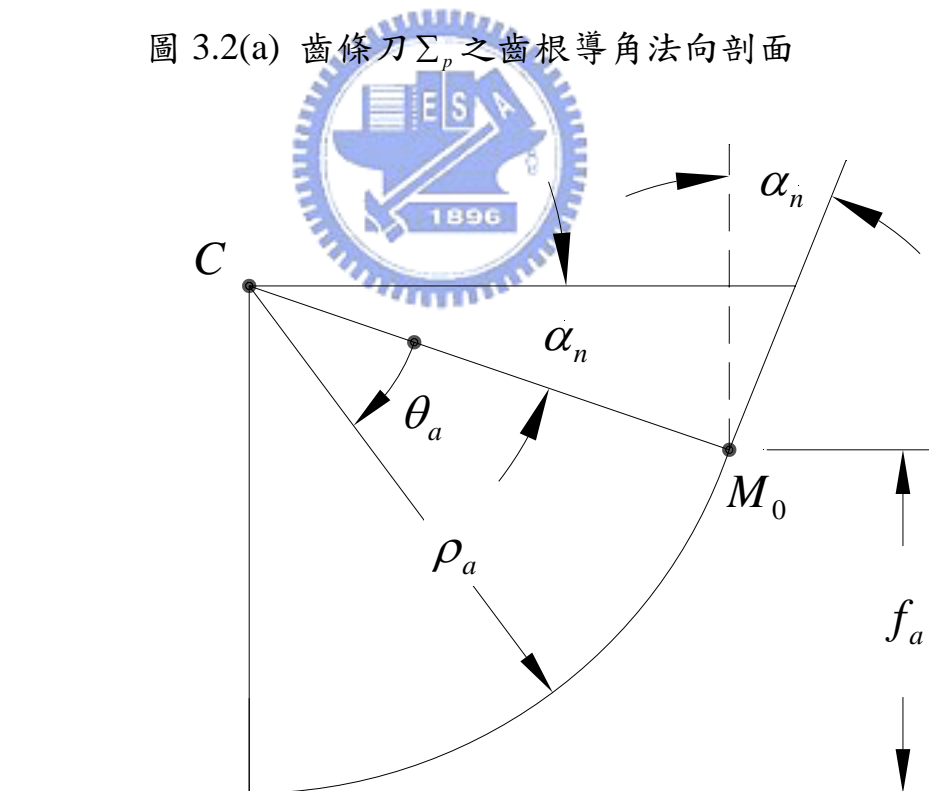


圖 3.2(b) 齒條刀 Σ_p 之齒頂導角法向剖面

齒條刀 Σ_p 之左半邊的直邊齒形方程式表示在 S_r 座標系為

$$\mathbf{R}_{lsr} = \begin{bmatrix} \ell \cos \alpha_n - h_a \\ \ell \sin \alpha_n - h_a \tan \alpha_n - b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

齒條刀 Σ_p 之左半邊齒根導角齒形方程式表示在 S_r 座標系為

$$\mathbf{R}_{ldr} = \begin{bmatrix} \rho_d \sin \theta_d - \rho_d \sin \alpha_n + h_d \\ -\rho_d \cos \theta_d + \rho_d \cos \alpha_n + h_d \tan \alpha_n - b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

齒條刀 Σ_p 之左半邊齒頂導角齒形方程式表示在 S_r 座標系則為

$$\mathbf{R}_{lar} = \begin{bmatrix} -\rho_a \sin \theta_a + \rho_a \sin \alpha_n - h_a \\ \rho_a \cos \theta_a - \rho_a \cos \alpha_n - h_a \tan \alpha_n - b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

齒條刀 Σ_p 之右半邊的直邊齒形方程式表示在 S_r 座標系為

$$\mathbf{R}_{rsr} = \begin{bmatrix} \ell \cos \alpha_n - h_a \\ -\ell \sin \alpha_n + h_a \tan \alpha_n + b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

齒條刀 Σ_p 之右半邊齒根導角齒形方程式表示在 S_r 座標系為

$$\mathbf{R}_{rdr} = \begin{bmatrix} \rho_d \sin \theta_d - \rho_d \sin \alpha_n + h_d \\ \rho_d \cos \theta_d - \rho_d \cos \alpha_n - h_d \tan \alpha_n + b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

齒條刀 Σ_p 之右半邊齒頂導角齒形方程式表示在 S_r 座標系則為

$$\mathbf{R}_{rar} = \begin{bmatrix} -\rho_a \sin \theta_a + \rho_a \sin \alpha_n - h_a \\ -\rho_a \cos \theta_a + \rho_a \cos \alpha_n + h_a \tan \alpha_n + b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其中齒條刀具相關之齒形設計參數(如圖 3.1 和圖 3.2)說明如下：

α_n 表法向壓力角；

h_d 表齒根高，於本研究中設定 $h_d = 1.0m_n$ ；

h_a 表齒冠高，於本研究中設定 $h_a = 1.0m_n$ ；

其中 m_n 表法向模數(Normal Pressure Angle)；

$2b$ 表齒條刀法向節距之一半，亦等同於齒厚，即 $2b = P_n / 2$ ；

其中 P_n 為周節(Circular Pitch)；

f_d 表齒條刀齒根導角起始點位置參數，於本研究中設定 $f_d = 0.1m_n$ ；

f_a 表齒條刀齒頂導角起始點位置參數，於本研究中設定 $f_a = 0.15m_n$ ；

在圖 3.3 中，座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 為齒條刀 Σ_p 之固定座標系，座標系 $S_a(X_a, Y_a, Z_a)$ 則為一輔助的移動座標系， Z_a 軸與 Y_c 軸之夾角即為被創成齒輪之螺旋導程角 λ ，而 Z_a 軸與 Z_c 軸之夾角則為被創成齒輪之螺旋角 β 。欲切製具螺旋導程角 λ 且又具有轉位修整之齒條刀外形時，可將齒條刀 Σ_p 之法向剖面放置於 $X_a - Y_a$ 平面，再依圖 3.3 所示之路徑運動即可，其中 u 為刀具面的另一個設計參數，表示由固定座標系的原點 O_c 到移動座標系的原點 O_a 之距離，亦即 $u = \overline{O_c O_a}$ ，也代表齒條刀 Σ_p 沿著 $\overline{O_c O_a}$ 路徑移動以切製齒輪。若要切製具有冠狀修整之漸開線螺旋齒輪時，則需令齒條刀 Σ_p 之法向剖面固聯於座標系 S_r ，且以 O_B 為原點 R_B 為半徑，使其與座標系 S_a 一同沿著 $\overline{O_c O_a}$ 的方向移動，座標系 S_r 與座標系 S_a 之距離是一個變動的參數 E ，表示齒條刀於某一位置之轉位量，亦即滾齒機在滾切齒輪時齒刀於某一位置之轉位量。 γ 則為靠模板曲線參數之一，用以決定刀具於靠模板曲線的位置，當 $\gamma = \gamma_{\max}$ 時，刀具的轉位量 E 達到其最大值 E_{\max} ，而當 $\gamma = 0^\circ$ 時，刀具的轉位量為零。在此設定靠模板曲線為一圓弧，其曲率半徑為 R_B 。

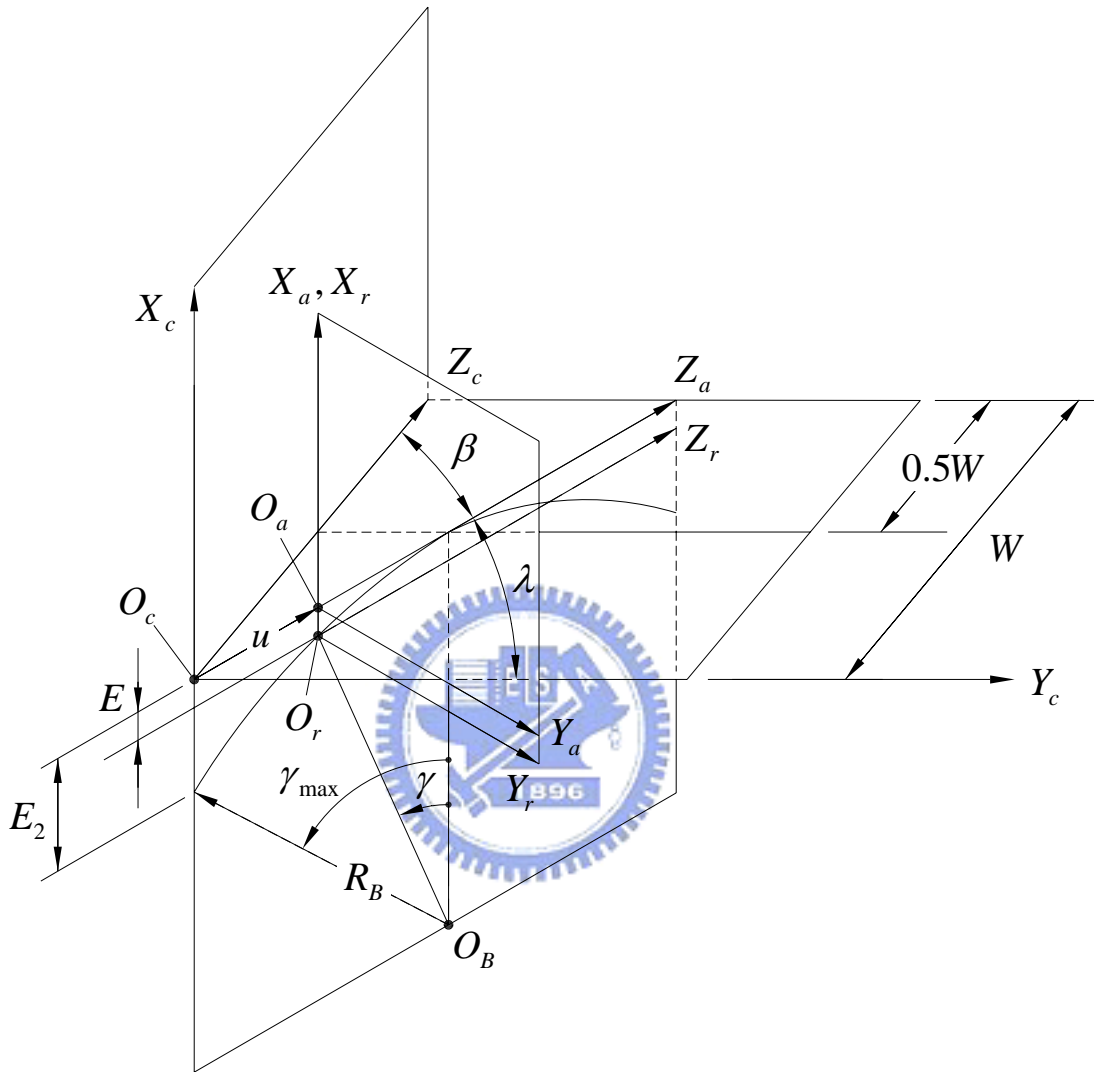


圖 3.3 假想齒條刀之刀面座標系關係示意圖

根據上述之關係，可求得以下之關係式：

$$u = R_B(\sin \gamma_{\max} - \sin \gamma) \quad (3.8)$$

$$E = R_B(1 - \cos \gamma) \quad (3.9)$$

$$E_{\max} = R_B(1 - \cos \gamma_{\max}) \quad (3.10)$$

其中 γ_{\max} 的範圍為： $-\sin^{-1} \frac{W}{2R_B \sin \lambda} \leq \gamma_{\max} \leq \sin^{-1} \frac{W}{2R_B \sin \lambda}$ ， W 表示齒寬。

依圖 3.3 所示之齒條刀 Σ_p 與各座標系間的關係，即可利用齊次座標轉換矩陣方程式，將齒條刀 Σ_p 之齒刀面數學模式表示於座標系 S_c 如下：

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{M}_{ca} \mathbf{M}_{ar} \mathbf{R}_r \quad (3.11)$$

其中

$$\mathbf{M}_{ca} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & u \cos \lambda \\ 0 & -\cos \lambda & \sin \lambda & u \sin \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_{ar} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

上式中 \mathbf{M}_{ar} 及 \mathbf{M}_{ca} 即為齊次座標轉換矩陣，分別表示將位置向量從座標系 S_r 轉換至座標系 S_a ，以及從座標系 S_a 轉換至座標系 S_c 。利用(3.11)式即可將齒條刀之齒刀面數學模式轉換至座標系 S_c ，亦即可求得創成具冠狀修整或轉位之螺旋齒條刀的齒刀面方程式如下：

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} x_r - R_B(1 - \cos \gamma) \\ y_r \sin \lambda + R_B(\sin \gamma_{\max} - \sin \gamma) \cos \lambda \\ -y_r \cos \lambda + R_B(\sin \gamma_{\max} - \sin \gamma) \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

因齒條刀與被創成之齒輪的齒面在創成過程中，其每一瞬間均有共同的接觸線，且兩者在此瞬間接觸線的法向量相同。依微分幾何原理，齒條刀面之法向量表示在 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系可由下式求得：

$$\mathbf{N}_c = \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \ell} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \gamma} \quad (3.15)$$

其單位法線向量(Unit Normal Vector)則可由下式求得：

$$\mathbf{n}_c = \frac{\mathbf{N}_c}{|\mathbf{N}_c|} \quad (3.16)$$

因此，齒條刀 Σ_p 之左邊直邊刀面的單位法線向量可求得如下：

$$\mathbf{n}_{lsc} = \frac{\mathbf{N}_{lsc}}{|\mathbf{N}_{lsc}|} = A \begin{bmatrix} -\sin \alpha_n \cos \gamma \\ \cos \alpha_n \cos \gamma \sin \lambda + \sin \alpha_n \sin \gamma \cos \lambda \\ -\sin \alpha_n \sin \gamma \cos \lambda + \cos \alpha_n \cos \gamma \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\text{其中 } A = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \gamma \cos^2 \alpha_n + \sin^2 \alpha_n}} \quad (3.18)$$

同理，齒條刀 Σ_p 之右邊直邊刀面的單位法線向量亦可求得如下：

$$\mathbf{n}_{rsc} = \frac{\mathbf{N}_{rsc}}{|\mathbf{N}_{rsc}|} = A \begin{bmatrix} \sin \alpha_n \cos \gamma \\ \cos \alpha_n \cos \gamma \sin \lambda - \sin \alpha_n \sin \gamma \cos \lambda \\ -\sin \alpha_n \sin \gamma \cos \lambda - \cos \alpha_n \cos \gamma \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

根據第二章所述之基本理論，嚙合方程式(2.4)係表示齒輪齒面參數與運動參數之間的關係，而兩曲面之嚙合方程式為：

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^{(12)} = 0 \quad (3.20)$$

茲再考慮如圖 3.4 所示之齒條刀 Σ_p 與被創成齒輪 Σ_1 之創成關係，若在齒輪之切製過程中未考慮轉位切削時，則齒條刀 Σ_p 所在的座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 會與參考座標系 $S_d(X_d, Y_d, Z_d)$ 重合。在切製過程中，齒條刀 Σ_p 在齒輪工件 Σ_1 之瞬軸面(即 Y_d-Z_d 平面)上方由右向左平移，而齒輪工作則依反時鐘方向旋轉，其旋轉角速度為 ω_1 。若在齒輪切製時考慮轉位切製且以

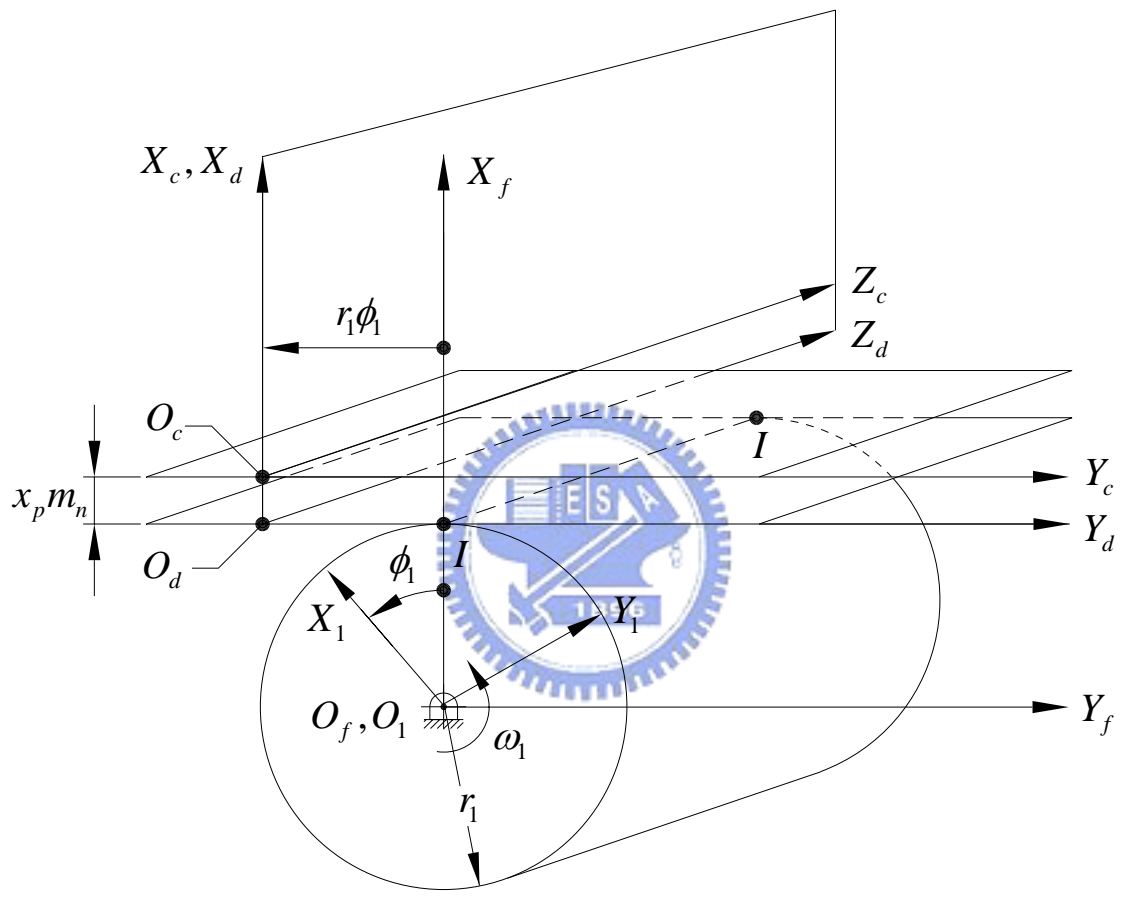


圖 3.4 齒條刀與被創成齒輪之相對運動關係

轉位係數 x_p 來進行轉位之齒形修整，則齒條刀座標系 S_c 會相對於參考座標系 S_d 沿著 X_d 軸向平移一轉位量 $x_p m_n$ ，而齒條刀 Σ_p 的速度表示在固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為：

$$\mathbf{V}_f^{(p)} = -\omega_1 r_1 \mathbf{j}_f \quad (3.21)$$

被切製之齒輪 Σ_1 的速度表示在固定座標系 S_f 則為：

$$\mathbf{V}_f^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\overline{O_1 O_c} + \mathbf{R}_c) \quad (3.22)$$

$$\text{其中 } \overline{O_1 O_c} = (r_1 + x_p m_n) \mathbf{i}_f - r_1 \phi_1 \mathbf{j}_f \quad (3.23)$$

$$\text{而齒條刀與被切製之齒輪的相對速度 } \mathbf{V}_f^{(p1)} = \mathbf{V}_f^{(p)} - \mathbf{V}_f^{(1)} \text{。} \quad (3.24)$$

若將(3.21)至(3.23)式代入(3.24)式後，即可得到齒條刀 Σ_p 與齒輪 Σ_1 在切製過程中之相對速度如下：

$$\mathbf{V}_f^{(p1)} = \begin{bmatrix} \omega_1 (-y_c + r_1 \phi_1) \\ \omega_1 (x_c + x_p m_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$



根據前述嚙合方程式之條件：

$$\mathbf{N}_f^{(p)} \cdot \mathbf{V}_f^{(p1)} = 0 \quad (3.26)$$

因座標系 S_f 與座標系 S_c 間並無相對之旋轉，故 $\mathbf{n}_f = \mathbf{n}_c$ 。將求得之法線向量與相對速度(3.25)代入(3.26)式，即可求得齒條刀 Σ_p 與齒輪 Σ_1 之嚙合方程式如下：

$$\mathbf{F}_1(\ell_p, \gamma_p, \phi_1) = n_{fx} (-y_c + r_1 \phi_1) + n_{fy} (x_c + x_p m_n) = 0 \quad (3.27)$$

經整理簡化後亦可表示成下列之關係式：

$$\phi_1 = \frac{y_c}{r_1} - \frac{n_{fy}}{n_{fx} r_1} (x_c + x_p m_n) \quad (3.28)$$

3.3 修整型螺旋齒輪之齒面數學模式

齒條刀與被創成齒輪之座標系間的關係如圖 3.4 所示，茲利用齊次座標轉換矩陣將齒條刀 Σ_p 之位置向量自 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系轉換至 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 座標系，即可求得齒條刀 Σ_p 表示在 S_1 座標系之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1f} \mathbf{M}_{fc} \mathbf{R}_c \quad (3.29)$$

其中

$$\mathbf{M}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{M}_{fc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_p m_n + r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -r_1 \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$



將(3.14)式代入(3.29)至(3.31)式可得齒條刀 Σ_p 表示於齒輪座標系 S_1 之軌跡方程式為：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} x_c \cos \phi_1 - y_c \sin \phi_1 + x_p m_n \cos \phi_1 + r_1 (\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ x_c \sin \phi_1 + y_c \cos \phi_1 + x_p m_n \sin \phi_1 + r_1 (\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ z_c \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

將齒條刀之軌跡方程式與齒條刀和齒輪工件兩者之嚙合方程式(即(3.27)或(3.28)式)聯立，即為齒輪 Σ_1 之齒面數學模式。

同理，齒輪之齒頂導角及齒根導角的部分亦可參照相同之方式，分別求其軌跡方程式與嚙合方程式，再將其聯立即可得齒條刀上下導角所創成之齒輪對應的齒頂與齒根導角之齒面數學模式。

3.4 小齒輪狀型齒刀之數學模式及嚙合方程式

由於內齒輪組中環齒輪之特殊幾何關係，要使用滾齒刀切製環齒輪是不可行的，在一般的齒輪製造工廠最常使用的環齒輪製造方式為使用小齒輪齒形之型齒刀或拉刀，利用刨製法(Shaping)來製造環齒輪。而小齒輪齒形之型齒刀數學模式與 3.3 節所推導之螺旋齒輪齒面數學模式相同，為了區別起見，特將具有小齒輪齒形的型齒刀之數學模式改寫如下：

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} x_c^{(s)} \cos \phi_1^{(s)} - y_c^{(s)} \sin \phi_1^{(s)} + x_p^{(s)} m_n^{(s)} \cos \phi_1^{(s)} + r_1^{(s)} (\cos \phi_1^{(s)} + \phi_1^{(s)} \sin \phi_1^{(s)}) \\ x_c^{(s)} \sin \phi_1^{(s)} + y_c^{(s)} \cos \phi_1^{(s)} + x_p^{(s)} m_n^{(s)} \sin \phi_1^{(s)} + r_1^{(s)} (\sin \phi_1^{(s)} - \phi_1^{(s)} \cos \phi_1^{(s)}) \\ z_c^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

本論文之環齒輪為標準漸開線形螺旋環齒輪，所以上述之小齒輪型齒刀需假設無冠狀及轉位修整，亦即冠狀修整之圓弧曲率半徑趨近於極大，且轉位係數為零，即 $x_p^{(s)} = 0$ 。

小齒輪型齒刀與被創成之螺旋環齒輪齒面在創成過程中小齒輪型齒刀之刀面的單位法向量是與齒條刀與被創成之螺旋齒輪齒面之單位法向量相同，茲將此單位法向量由齒條刀座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 轉換至齒輪座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ，並改寫如下：

$$\mathbf{n}_s = \mathbf{L}_{1f}^{(s)} \mathbf{L}_{fc}^{(s)} \mathbf{n}_c^{(s)} \quad (3.34)$$

其中

$$\mathbf{L}_{1f}^{(s)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1^{(s)} & -\sin \phi_1^{(s)} & 0 \\ \sin \phi_1^{(s)} & \cos \phi_1^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{L}_{fc}^{(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

因此，左齒面之單位法向量可表示於 S_c 座標系如下：

$$\mathbf{n}_{lsc}^{(s)} = A^{(s)} \begin{bmatrix} -\sin \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \\ \cos \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \sin \lambda^{(s)} + \sin \alpha_n^{(s)} \sin \gamma^{(s)} \cos \lambda^{(s)} \\ -\sin \alpha_n^{(s)} \sin \gamma^{(s)} \cos \lambda^{(s)} + \cos \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \sin \lambda^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\text{其中 } A^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \gamma^{(s)} \cos^2 \alpha_n^{(s)} + \sin^2 \alpha_n^{(s)}}} \quad (3.38)$$

同理，右齒面之單位法向量亦可表示於 S_c 座標系如下：

$$\mathbf{n}_{rsc}^{(s)} = A^{(s)} \begin{bmatrix} \sin \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \\ \cos \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \sin \lambda^{(s)} - \sin \alpha_n^{(s)} \sin \gamma^{(s)} \cos \lambda^{(s)} \\ -\sin \alpha_n^{(s)} \sin \gamma^{(s)} \cos \lambda^{(s)} - \cos \alpha_n^{(s)} \cos \gamma^{(s)} \sin \lambda^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

茲考慮如圖 3.5 所示之小齒輪型齒刀 Σ_s 與被創成齒輪 Σ_2 之創成關係，可得小齒輪型齒刀 Σ_s 與被創成之環齒輪 Σ_2 的相對速度表示在

$S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 座標系為：

$$\mathbf{V}_s^{(s2)} = (\boldsymbol{\omega}_s^{(s2)} \times \mathbf{R}_s) - (\overline{O_s O_2} \times \boldsymbol{\omega}_s^{(s)}) \quad (3.40)$$

經展開簡化後可得：

$$\mathbf{V}_s^{(s2)} = \begin{bmatrix} -y_s(\omega^{(2)} - \omega^{(s)}) - C\omega^{(2)} \sin \phi_s \\ x_s(\omega^{(2)} - \omega^{(s)}) + C\omega^{(2)} \cos \phi_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

其中 $C = |\overline{O_s O_2}|$

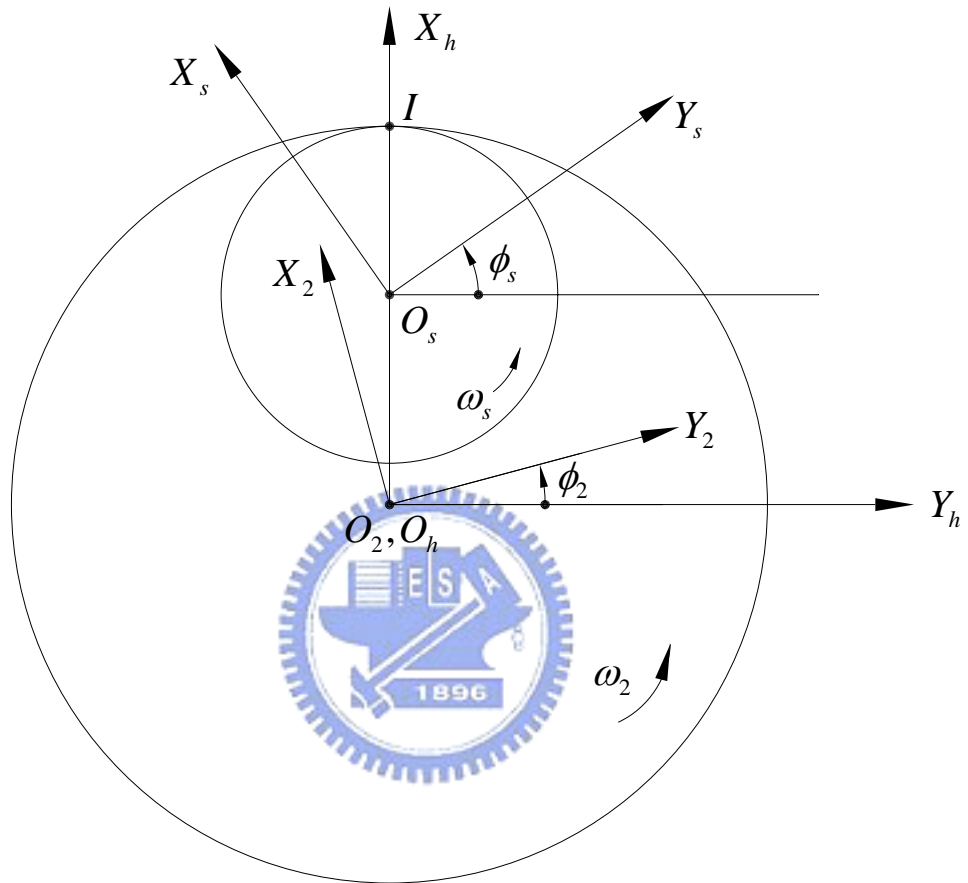


圖 3.5 小齒輪型齒刀與被創成環齒輪之相對運動關係

小齒輪型齒刀 Σ_s 與被創成之齒輪 Σ_2 的嚙合方程式為：

$$\mathbf{N}_s^{(s)} \cdot \mathbf{V}_s^{(s2)} = 0 \quad (3.42)$$

若將(3.37)及(3.39)式所求得之左、右齒面單位法線向量與相對速度(3.41)式代入(3.42)式，即可求得小齒輪型齒刀 Σ_s 與被創成環齒輪 Σ_2 之嚙合方程式。

3.5 漸開線螺旋環齒輪之數學模式

小齒輪型齒刀與被創成環齒輪之座標系間的關係如圖 3.5 所示，茲利用齊次座標轉換矩陣將小齒輪型齒刀 Σ_s 之位置向量自 $S_s(X_s, Y_s, Z_s)$ 座標系轉換至 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系，即可求得小齒輪型齒刀 Σ_s 表示在 S_2 座標系之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{2s} \mathbf{R}_s \quad (3.43)$$

其中

$$\mathbf{M}_{2s} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_s - \phi_2) & \sin(\phi_s - \phi_2) & 0 & C \cos \phi_2 \\ -\sin(\phi_s - \phi_2) & \cos(\phi_s - \phi_2) & 0 & C \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

將(3.33)式代入(3.43)及(3.44)式即可求得小齒輪型齒刀 Σ_s 表示於齒輪座標系 S_2 之軌跡方程式為：

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} x_s \cos(\phi_s - \phi_2) + y_s \sin(\phi_s - \phi_2) + C \cos \phi_2 \\ -x_s \sin(\phi_s - \phi_2) + y_s \cos(\phi_s - \phi_2) + C \sin \phi_2 \\ z_s \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

若將上式之小齒輪型齒刀之軌跡方程式與兩者之嚙合方程式(3.42)式聯立，即可得環齒輪 Σ_2 之齒面數學模式。

同理，小齒輪型齒刀之齒頂導角及齒根導角的部分亦參照相同之方式，分別求其軌跡方程式與嚙合方程式，再將其聯立即可得小齒輪型齒刀之齒根與齒頂導角所創成之對應環齒輪的齒頂與齒根導角的齒面數學模式。

3.6 本章結論

本章係依據齒輪創成原理，推導出具冠狀與轉位修整之漸開線螺旋齒輪及標準漸開線螺旋環齒輪之齒面數學模式，此數學模式包含了刀具及被創成齒輪的齒面數學模式。依據所推導出之修整型螺旋小齒輪及漸開線螺旋環齒輪齒面數學模式，可利用電腦輔助程式以運算及繪出齒輪之三維齒形，茲以表 3.1 所列設計參數之齒輪為例加以驗證。

表 3.1 修整型螺旋內齒輪對之主要設計參數

	修整型螺旋小齒輪	漸開線螺旋環齒輪
齒數(齒)	60	120
法向模數(mm/齒)	2	2
壓力角(度)	20°	20°
導程角(度)	75°(右旋)	75°(左旋)
齒寬(mm)	20	20
轉位係數	-0.1	無
隆齒修整半徑(mm)	30	無

依本章所建立之齒面數學模式及電腦輔助繪圖，即可繪出螺旋內齒輪組之外形，如圖 3.6 所示。本章所推導之內齒輪組數學模式亦有助於漸開線內齒輪組後續之分析及模擬工作。

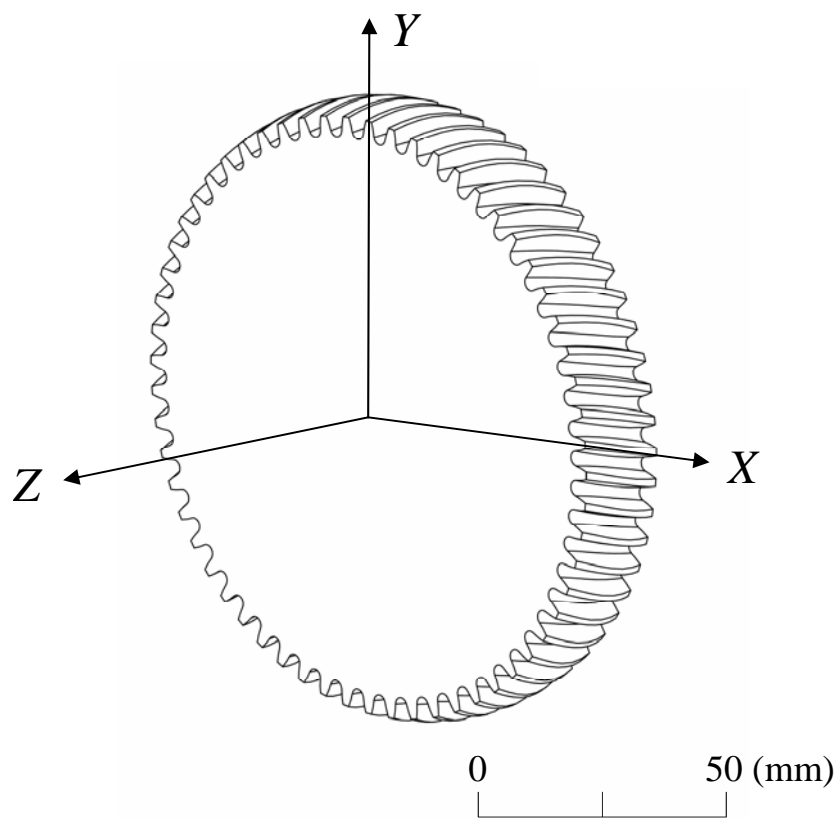


圖 3.6(a) 修整型螺旋小齒輪之電腦輔助繪圖

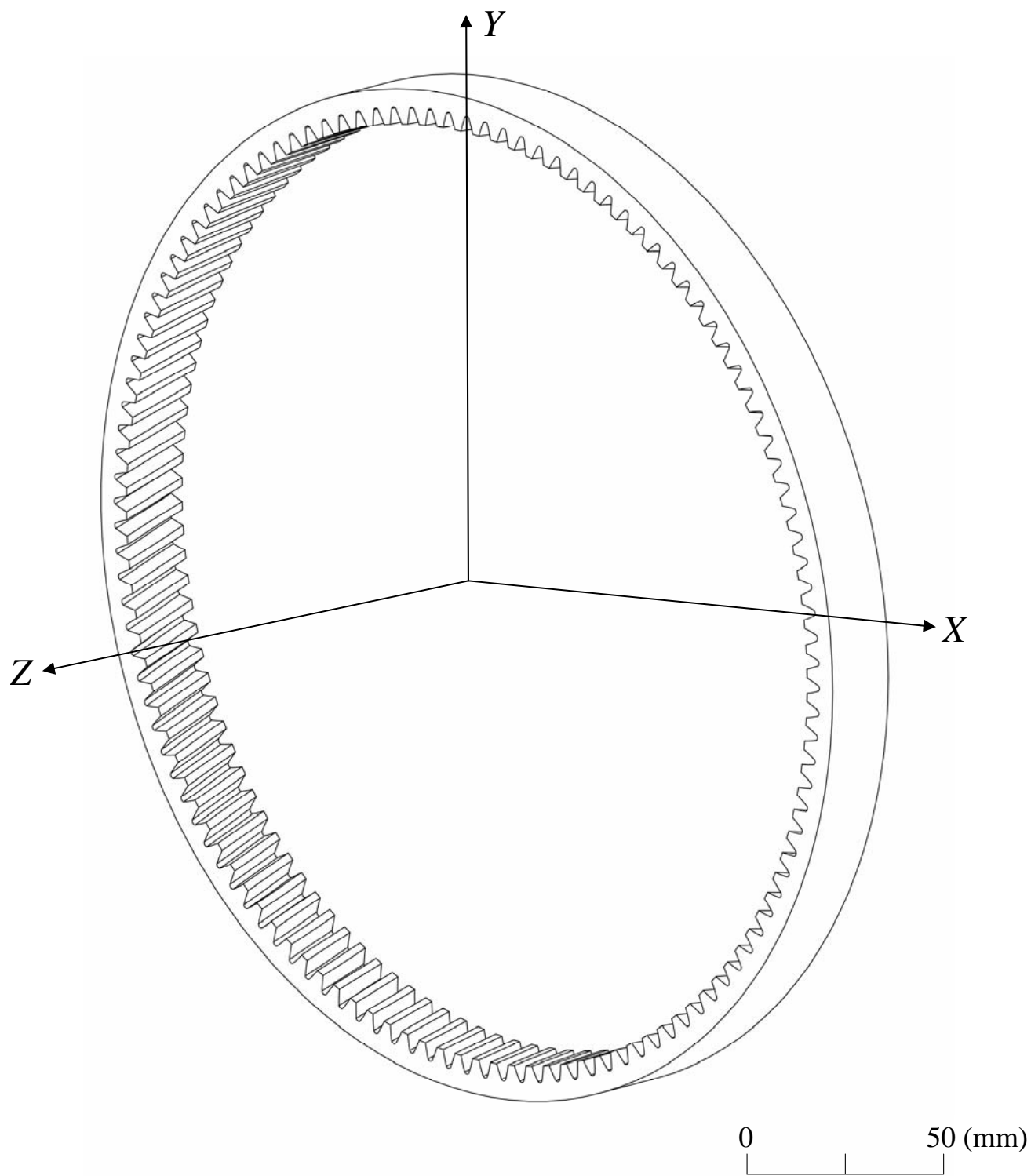


圖 3.6(b) 漸開線螺旋環齒輪之電腦輔助繪圖

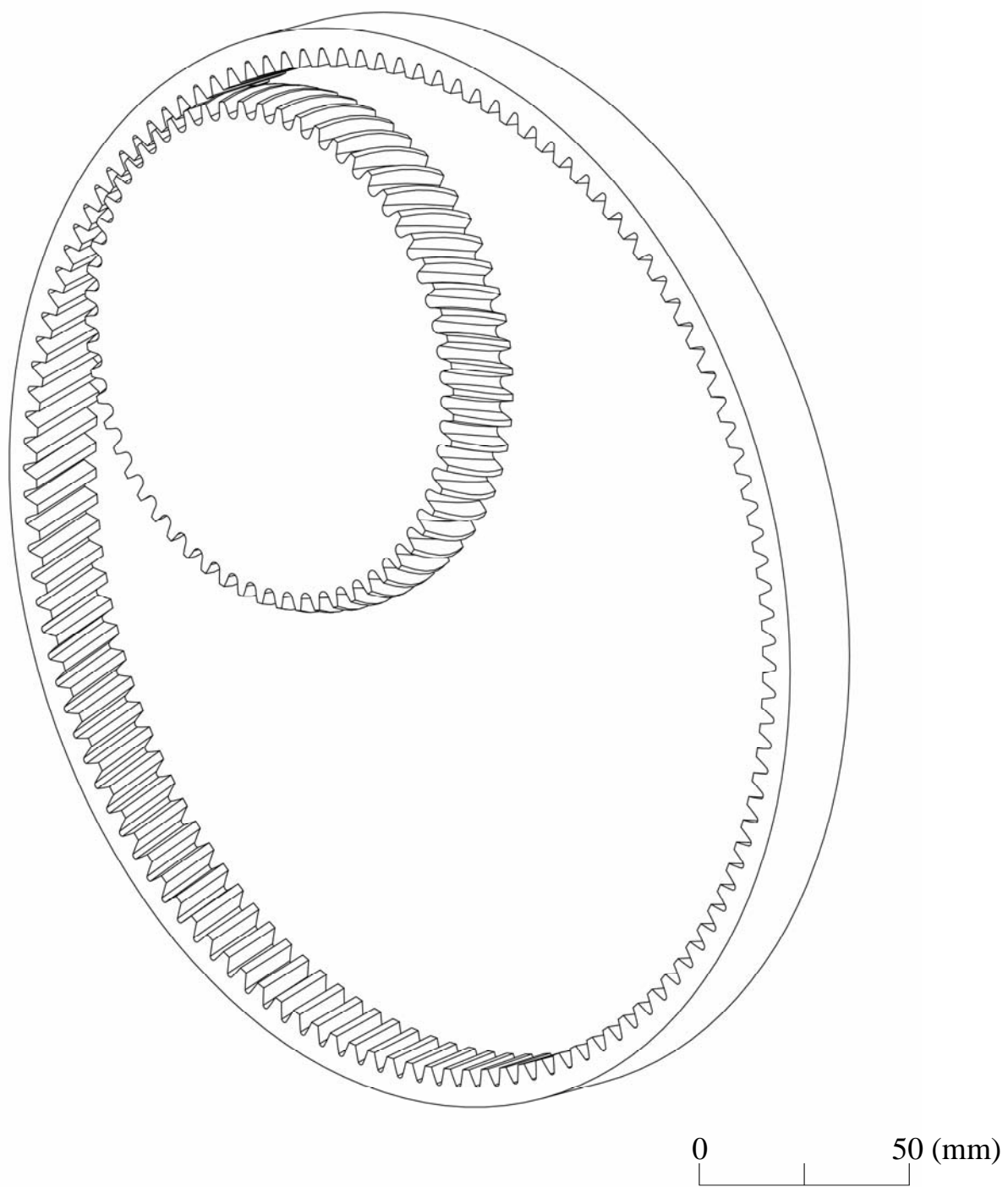


圖 3.6(c) 中心距為 60mm 之螺旋內齒輪組裝配示意圖

第四章 修整型螺旋內齒輪組之齒面接觸分析

4.1 前言

內齒輪組為工業界中常用的傳動機構，而齒輪傳動性能會因為齒輪本身的製造精度，或是齒輪系統的裝配誤差，如中心距誤差和旋轉軸向之裝配誤差，因而造成齒輪運動時的不平順，以致產生振動與噪音。本論文依據蔡等人[4-6]所建立之螺旋齒輪的齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)方法，將本論文第三章各節所推導得到的螺旋內齒輪組齒面數學模式，配合本章之齒輪組之裝配狀態與齒面接觸條件，便可模擬齒輪對之嚙合運動，並探討當齒輪對具有中心距、水平軸向與垂直軸向誤差時之內齒輪組運動誤差。

4.2 螺旋內齒輪對之接觸分析數學模式

在本節中，將建立具有組裝誤差之齒輪對的接觸分析模式，首先必須將各齒輪之齒面數學模式轉換至同一座標系後再加以分析。圖 4.1 所示為螺旋小齒輪 Σ_1 與螺旋內齒輪 Σ_2 之裝配關係示意圖，座標系 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 與 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 分別為螺旋小齒輪與螺旋內齒輪之座標系，其中 Z_1 為螺旋小齒輪之旋轉軸， ϕ'_1 為螺旋小齒輪實際嚙合時的旋轉角； Z_2 為螺旋內齒輪之旋轉軸， ϕ'_2 則為螺旋內齒輪實際嚙合時的旋轉角。 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 為固定座標系，座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 與 $S_v(X_v, Y_v, Z_v)$ 為輔助座標系，用以模擬齒輪旋轉軸交錯角的組裝誤差。若要分析水平軸向交錯角之組裝誤差，需將座標系 S_h 相對於固定座標系 S_f 繞著 X_h 軸旋轉 $\Delta\gamma_h$ 角度；若要分析垂直軸向交錯角之組裝誤差，則需將座標系 S_v 相對於固定座標系 S_f 繞著 Y_v 軸旋轉 $\Delta\gamma_v$ 角度。 C' 為螺旋小齒輪與螺旋內齒輪組裝之中心距 $C' = C + \Delta C$ ，其中 C 為標準中心距， ΔC 為中心距誤差。

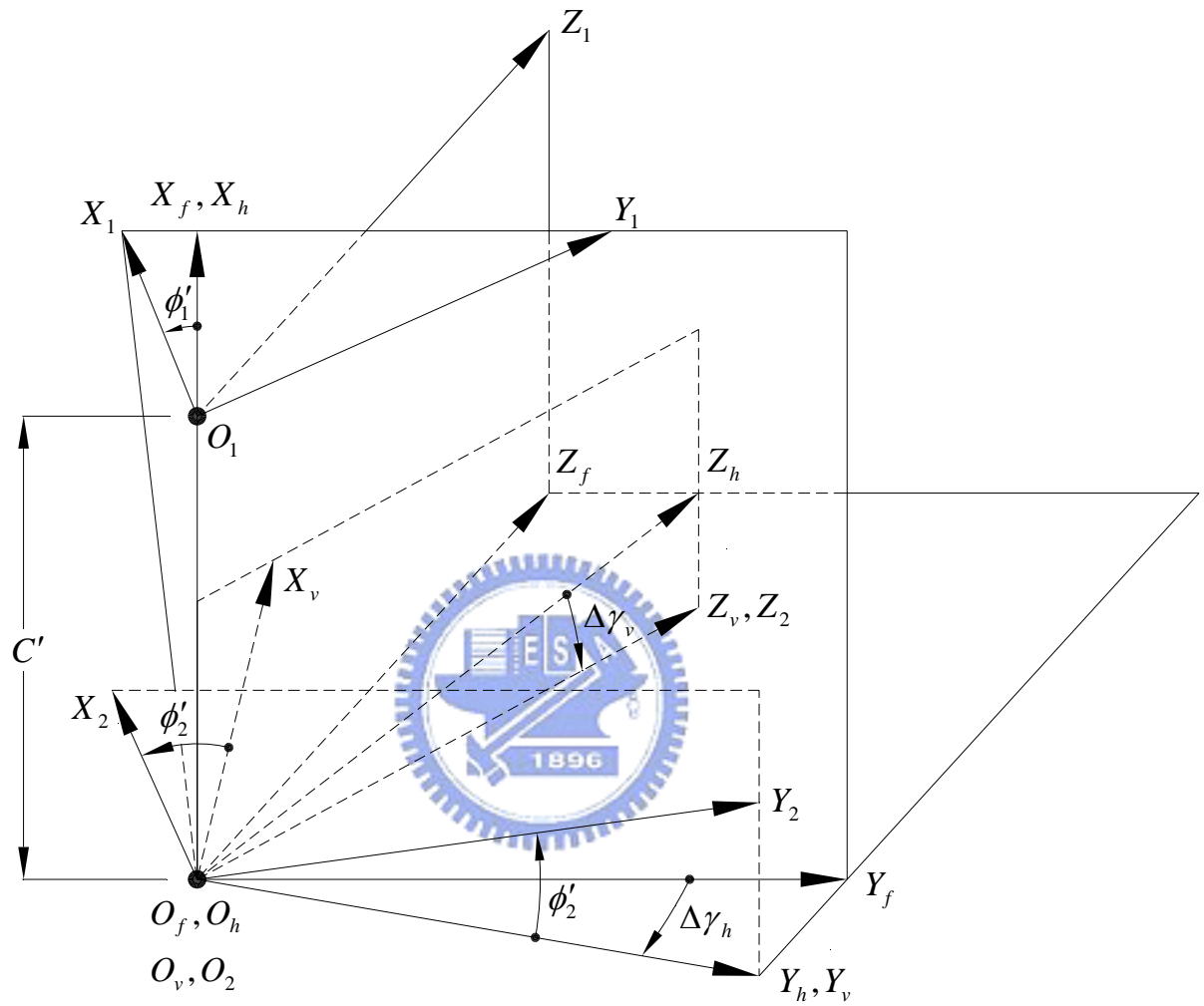


圖 4.1 齒輪組具裝配誤差之座標系關係示意圖

在進行螺旋內齒輪對之接觸分析時，首先須將啮合之螺旋小齒輪 Σ_1 和螺旋內齒輪 Σ_2 之齒面數學模式及其單位法向量表示在同一固定座標系 S_f 上。依據圖 4.1 所示之座標系間的關係，螺旋小齒輪 Σ_1 之齒面數學模式與單位法向量可利用齊次座標轉換至固定座標系 S_f 表示如下：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = \mathbf{M}_{f1} \mathbf{R}_1 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = \mathbf{L}_{f1} \mathbf{n}_1 \quad (4.2)$$

其中

$$\mathbf{M}_{f1} = \begin{bmatrix} \cos \phi'_1 & \sin \phi'_1 & 0 & C' \\ -\sin \phi'_1 & \cos \phi'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{L}_{f1} = \begin{bmatrix} \cos \phi' & \sin \phi' & 0 \\ -\sin \phi' & \cos \phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

同理，亦可將螺旋內齒輪 Σ_2 的齒面數學模式與單位法向量利用齊次座標轉換至固定座標系 S_f 表示如下：

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = \mathbf{M}_{f2} \mathbf{M}_{hv} \mathbf{M}_{v2} \mathbf{R}_2 \quad (4.5)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = \mathbf{L}_{f2} \mathbf{L}_{hv} \mathbf{L}_{v2} \mathbf{n}_2 \quad (4.6)$$

其中

$$\mathbf{M}_{f2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & -\sin \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{M}_{v2} = \begin{bmatrix} \cos \phi'_2 & \sin \phi'_2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi'_2 & \cos \phi'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}_{fh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{L}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & -\sin \Delta\gamma_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{L}_{v2} = \begin{bmatrix} \cos \phi'_2 & \sin \phi'_2 & 0 \\ -\sin \phi'_2 & \cos \phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.3 齒輪對之運動誤差分析模式

運動誤差(Kinematical Error, KE)係指齒輪對在進行動力傳遞時，傳動齒輪輸出軸之實際旋轉角度與理論旋轉角度之間的誤差。而此理論之分析過程包含以下之假設條件：

- 一、齒輪齒面不因受力而變形，即假設齒面為剛體(Rigid Body)。
- 二、齒輪齒面製造的誤差小到可忽略。
- 三、不考慮溫度變化所造成齒面的伸縮變形量。

利用第三章節所推導之齒輪的齒面數學模式，可分別得到一對螺旋小齒輪與螺旋內齒輪之齒面位置向量與單位法向量。當兩齒輪相互嚙合時，兩齒輪之齒面在空間中須滿足相切條件，所以在其瞬間接觸點或接觸線，螺旋小齒輪與螺旋內齒輪的位置向量必須相同，而且兩齒輪之齒面的單位法向量必須共線，因此，兩嚙合齒面接觸時必須滿足下列兩個方程式：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} - \mathbf{R}_f^{(2)} = 0 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (4.15)$$

方程式(4.14)表示兩嚙合齒輪在其齒面共同接觸點處的位置向量相等，而該式亦可表示為三個獨立的位置向量方程式：

$$x_f^{(1)} - x_f^{(2)} = 0 \quad (4.16)$$

$$y_f^{(1)} - y_f^{(2)} = 0 \quad (4.17)$$

$$z_f^{(1)} - z_f^{(2)} = 0 \quad (4.18)$$

方程式(4.15)則表示兩嚙合齒輪在其齒面共同接觸點處之齒面單位法向量共線，亦即兩單位法向量之外積為零，此方程式亦可表示成三個方程式，但其中卻僅有兩個獨立方程式：

$$n_{fy}^{(1)} n_{fz}^{(2)} - n_{fz}^{(2)} n_{fy}^{(1)} = 0 \quad (4.19)$$

$$-n_{fx}^{(1)} n_{fz}^{(2)} + n_{fz}^{(2)} n_{fx}^{(1)} = 0 \quad (4.20)$$

$$n_{fx}^{(1)} n_{fy}^{(2)} - n_{fy}^{(2)} n_{fx}^{(1)} = 0 \quad (4.21)$$

在創成螺旋小齒輪 Σ_1 及螺旋內齒輪 Σ_2 的過程中，因為有兩個獨立的嚙合方程式(3.25)及(3.41)，所以在進行齒面接觸分析時，共有七個獨立方程式來解八個未知數 l 、 $l^{(s)}$ 、 γ 、 $\gamma^{(s)}$ 、 ϕ_1 、 ϕ_1' 、 ϕ_2 和 ϕ_2' 。若以螺旋小齒輪輸入軸之旋轉角度 ϕ_1' 做為給定輸入值，藉此求解七個非線性聯立方程式，即可求得嚙合齒輪對的運動誤差。一對嚙合齒輪之運動誤差定義為：

$$KE = \Delta\phi_2 = \phi_2' - \frac{T_1}{T_2} \phi_1' \quad (4.22)$$

其中 T_1 和 T_2 分別表示螺旋小齒輪與螺旋內齒輪之齒數， ϕ_1' 為齒輪對嚙合運動時螺旋小齒輪的實際旋轉角度， ϕ_2' 為螺旋內齒輪之實際旋轉角度。在本研究中已依據(4.16)至(4.22)式開發出螺旋內齒輪組之齒面接觸分析電腦輔助模擬程式，可供各項模擬與分析。

4.4 接觸分析例題與討論

本節依據 4.2 節與 4.3 節所推導之螺旋內齒輪對的接觸分析數學模式，再加上自行發展之電腦分析程式來模擬齒輪組裝時的接觸狀況。由於在實際運用上，現代自動化組裝及人工組裝齒輪都難以達到理想的裝配狀況，所以在具有各種裝配誤差下的齒輪運動特性探討將顯得重要及必要。以下將經由幾個例題，分別討論具冠狀修整量、轉位修整量及不同壓力角之螺旋內齒輪對，在理想組裝狀況、具中心距裝配誤差、具水平軸向之旋轉軸交錯角之裝配誤差與垂直軸向之旋轉軸交錯角之裝配誤差等情形下的運動誤差及其運動誤差曲線，探討在有裝配誤差的情況下，不同的齒輪設計參數對齒輪嚙合時運動誤差的影響。

例題 4.1 漸開線螺旋內齒輪對在理想裝配狀態下的接觸分析

漸開線形螺旋齒輪，在旋轉軸截面的齒形為漸開線形曲線，本例中漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.1 所示，其冠狀修整半徑趨近無窮大即表示螺旋齒輪之齒形趨近於理想漸開線齒輪，轉位係數 $x=0$ ，壓力角均為 20° ，其齒輪組在理想的裝配情況下嚙合，即 $\Delta C=0\text{ mm}$ ， $\Delta\gamma_h=0.0^\circ$ 和 $\Delta\gamma_v=0.0^\circ$ 。

經本研究所開發之接觸模擬與分析程式，分析漸開線螺旋內齒輪對在理想裝配狀況下之運動誤差，其分析之結果如表 4.1 所示。由模擬與分析之結果可得知，漸開線螺旋內齒輪對在理想裝配狀況下，齒輪對嚙合時的運動誤差皆為零，此與理論相吻合。

表 4.1 漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	無冠狀	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	l (mm)	$l^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	10.000	5.000	2.987	2.987	0.000	
8.000	4.000	8.000	4.000	2.733	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.479	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.226	2.226	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.972	1.972	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.718	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.464	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.000	-2.000	1.211	1.211	0.000	
-6.000	-3.000	-6.000	-3.000	0.957	0.957	0.000	
-8.000	-4.000	-8.000	-4.000	0.703	0.703	0.000	
-10.000	-5.000	-10.000	-5.000	0.449	0.449	0.000	

例題 4.2 具冠狀修整之螺旋內齒輪對在理想裝配下的運動誤差分析

具冠狀修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.2 至 4.5 所示，其螺旋小齒輪的冠狀修整半徑分別為 30mm、50mm、100mm 和 1000mm，螺旋內齒輪則無冠狀修整，轉位係數 $x = 0$ ，壓力角均為 20° ，其齒輪組在理想的裝配情況下嚙合，即 $\Delta C = 0 \text{ mm}$ ， $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 和 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 。

經由接觸分析模擬後，具齒面冠狀修整的螺旋小齒輪與無冠狀修整的漸開線螺旋環齒輪在理想裝配狀況下，其分析結果如表 4.2 至 4.5 所示，由分析結果可得知，在理想裝配狀態下螺旋小齒輪的冠狀修整對該齒輪組之運動誤差均為零，而且齒輪組之接觸點位置(即齒面設計參數 l 和 $l^{(s)}$)變化不大，冠狀修整半徑越大影響越小。

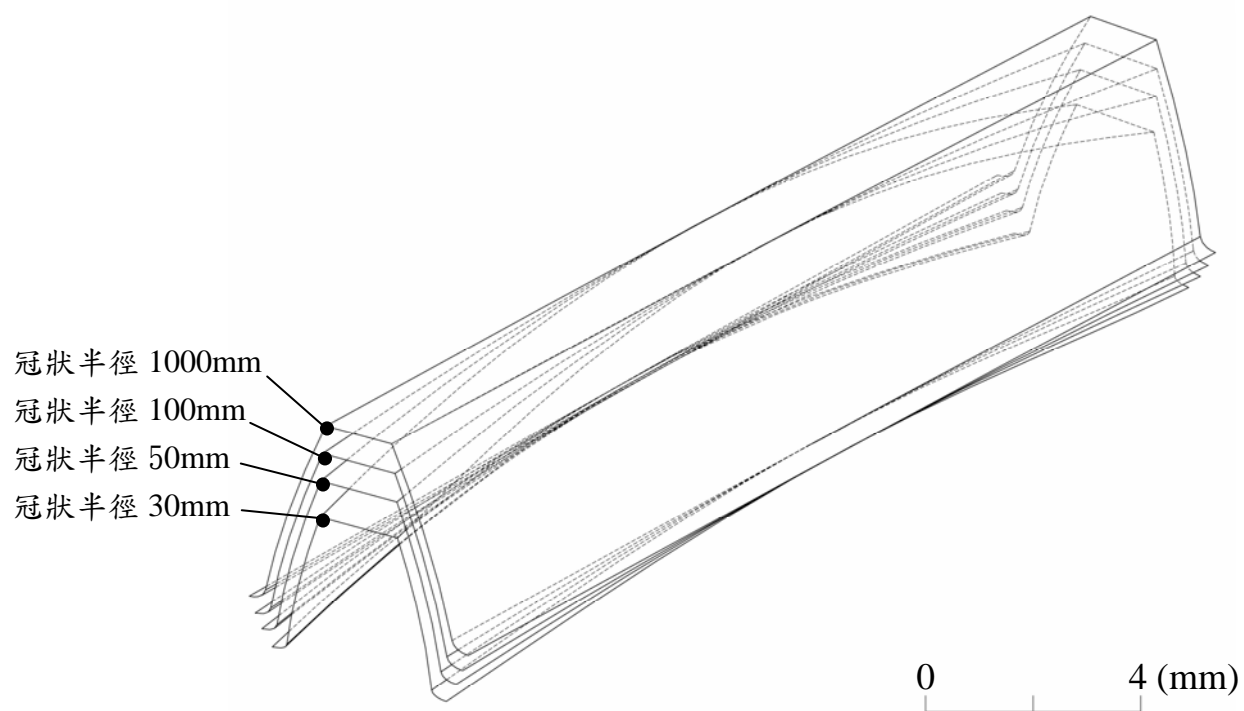


圖 4.2 不同冠狀修整半徑之螺旋小齒輪齒形

表 4.2 具冠狀修整 R=30mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	30	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.998	5.000	2.987	2.987	0.000	
8.000	4.000	7.999	4.000	2.733	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.480	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.226	2.226	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.972	1.972	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.718	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.001	-1.000	1.464	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.001	-2.000	1.211	1.211	0.000	
-6.000	-3.000	-6.002	-3.000	0.957	0.957	0.000	
-8.000	-4.000	-8.003	-4.000	0.703	0.703	0.000	
-10.000	-5.000	-10.005	-5.000	0.449	0.449	0.000	

表 4.3 具冠狀修整 R=50mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.999	5.000	2.987	2.987	0.000	
8.000	4.000	7.999	4.000	2.733	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.479	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.226	2.226	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.972	1.972	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.718	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.464	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.001	-2.000	1.211	1.211	0.000	
-6.000	-3.000	-6.001	-3.000	0.957	0.957	0.000	
-8.000	-4.000	-8.002	-4.000	0.703	0.703	0.000	
-10.000	-5.000	-10.003	-5.000	0.449	0.449	0.000	

表 4.4 具冠狀修整 R=100mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	100	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	10.000	5.000	2.987	2.987	0.000	
8.000	4.000	8.000	4.000	2.733	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.479	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.226	2.226	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.972	1.972	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.718	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.464	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.000	-2.000	1.211	1.211	0.000	
-6.000	-3.000	-6.001	-3.000	0.957	0.957	0.000	
-8.000	-4.000	-8.001	-4.000	0.703	0.703	0.000	
-10.000	-5.000	-10.001	-5.000	0.449	0.449	0.000	

表 4.5 具冠狀修整 R=1000mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	1000	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	10.000	5.000	2.987	2.987	0.000	
8.000	4.000	8.000	4.000	2.733	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.479	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.226	2.226	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.972	1.972	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.718	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.464	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.000	-2.000	1.211	1.211	0.000	
-6.000	-3.000	-6.000	-3.000	0.957	0.957	0.000	
-8.000	-4.000	-8.000	-4.000	0.703	0.703	0.000	
-10.000	-5.000	-10.000	-5.000	0.449	0.449	0.000	

例題 4.3 具冠狀修整與轉位修整之螺旋內齒輪對在理想裝配狀態下的接觸分析

具冠狀及轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.6 和 4.7 所示，螺旋小齒輪 Σ_1 的轉位係數分別為 $x = 0.2$ 之正轉位及 $x = -0.2$ 之負轉位，其兩者之冠狀修整隆齒半徑均為 50mm，螺旋環齒輪則為一般漸開線環齒輪，壓力角均為 20° ，內齒輪對在理想裝配狀況下嚙合，亦即 $\Delta C = 0\text{mm}$ ， $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 和 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 。

經由接觸分析模擬後，具冠狀修整與轉位修整的螺旋小齒輪與無冠狀修整的漸開線螺旋環齒輪在理想裝配狀況下，其分析結果如表 4.6 和 4.7 所示。此分析結果與螺旋小齒輪僅有冠狀修整之例題 4.2 相比較可得知，在理想裝配狀態下螺旋小齒輪的冠狀及轉位修整會導致齒輪組之接觸點位置有所改變，但並不影響該齒輪組之運動誤差。不同之齒輪轉位係數會導致齒輪組的接觸點改變，由表 4.6 和 4.7 中可以看出，負轉位的螺旋小齒輪的接觸點較正轉位時偏向齒形的上方。

例題 4.4 不同壓力角之冠狀修整螺旋內齒輪對在理想裝配狀況下的接觸分析

具冠狀修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.8 至 4.11 所示，其壓力角分別為 19° 與 21° ，冠狀修整隆齒半徑為 50mm，轉位係數 $x = 0$ ，螺旋環齒輪為一般漸開線環齒輪，內齒輪對在理想裝配狀況下嚙合，亦即 $\Delta C = 0\text{mm}$ ， $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 和 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$ 。

經由接觸分析模擬後，具不同壓力角(19° 與 21°)之冠狀螺旋內齒輪對在理想裝配狀況下，其運動誤差分析結果如表 4.8 至 4.9 所示。若僅改變螺旋小齒輪 Σ_1 之壓力角為 19° 及 21° ，而螺旋環齒輪 Σ_2 的壓力固定為 20° ，則其齒輪對的運動分析結果如表 4.10 及 4.11 所示。從上述四個表中可以看出，在兩個齒輪的壓力角不同時，則齒輪對在嚙合時，其接觸點離節圓處($\phi'_1 = 0^\circ$)越遠時，其運動誤差的值越大。由圖 4.3 中可以看出，當兩齒輪的壓力角不同時，其運動誤差曲線大致呈視為對稱於螺旋小齒輪旋轉角 $\phi'_1 = 0^\circ$ 之直線。

表 4.6 具冠狀修整與正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.583	4.792	2.561	2.987	0.000	
8.000	4.000	7.583	3.792	2.308	2.733	0.000	
6.000	3.000	5.583	2.792	2.054	2.479	0.000	
4.000	2.000	3.584	1.792	1.800	2.225	0.000	
2.000	1.000	1.583	0.792	1.546	1.971	0.000	
0.000	0.000	-0.417	-0.208	1.293	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-2.417	-1.208	1.039	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-4.418	-2.208	0.785	1.210	0.000	
-6.000	-3.000	-6.418	-3.208	0.531	0.956	0.000	
-8.000	-4.000	-8.419	-4.208	0.278	0.702	0.000	
-10.000	-5.000	-10.420	-5.208	0.024	0.449	0.000	

表 4.7 具冠狀修整與負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	-0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	10.416	5.209	3.413	2.987	0.000	
8.000	4.000	8.417	4.209	3.159	2.733	0.000	
6.000	3.000	6.417	3.209	2.905	2.479	0.000	
4.000	2.000	4.418	2.209	2.651	2.225	0.000	
2.000	1.000	2.418	1.209	2.398	1.971	0.000	
0.000	0.000	0.418	0.209	2.144	1.718	0.000	
-2.000	-1.000	-1.582	-0.791	1.890	1.464	0.000	
-4.000	-2.000	-3.583	-1.791	1.636	1.210	0.000	
-6.000	-3.000	-5.583	-2.791	1.383	0.956	0.000	
-8.000	-4.000	-7.584	-3.791	1.129	0.702	0.000	
-10.000	-5.000	-9.584	-4.791	0.875	0.449	0.000	

表 4.8 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	19	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	19	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.999	5.000	2.933	2.933	0.000	
8.000	4.000	8.000	4.000	2.692	2.691	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.450	2.450	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.208	2.208	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.966	1.966	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.724	1.724	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.483	1.483	0.000	
-4.000	-2.000	-4.001	-2.000	1.241	1.241	0.000	
-6.000	-3.000	-6.001	-3.000	0.999	0.999	0.000	
-8.000	-4.000	-8.002	-4.000	0.757	0.757	0.000	
-10.000	-5.000	-10.002	-5.000	0.516	0.516	0.000	

表 4.9 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	21	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	21	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.999	5.000	3.041	3.041	0.000	
8.000	4.000	7.999	4.000	2.776	2.776	0.000	
6.000	3.000	6.000	3.000	2.510	2.510	0.000	
4.000	2.000	4.000	2.000	2.244	2.244	0.000	
2.000	1.000	2.000	1.000	1.978	1.978	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	1.713	1.713	0.000	
-2.000	-1.000	-2.000	-1.000	1.447	1.447	0.000	
-4.000	-2.000	-4.001	-2.000	1.181	1.181	0.000	
-6.000	-3.000	-6.001	-3.000	0.916	0.916	0.000	
-8.000	-4.000	-8.002	-4.000	0.650	0.650	0.000	
-10.000	-5.000	-10.003	-5.000	0.384	0.384	0.000	

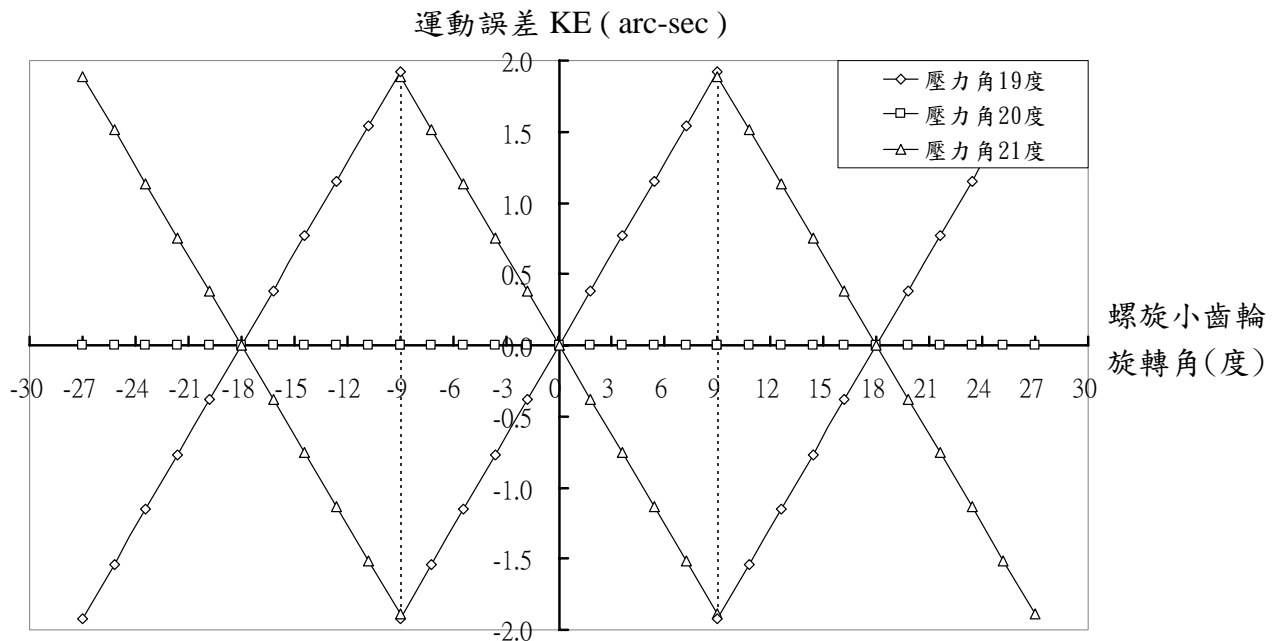
表 4.10 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	19	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.034	10.289	4.977	2.968	2.987	2.107	
8.000	4.027	8.204	3.984	2.716	2.733	1.685	
6.000	3.020	6.119	2.991	2.464	2.479	1.264	
4.000	2.013	4.033	1.997	2.212	2.226	0.842	
2.000	1.007	1.947	1.004	1.960	1.972	0.421	
0.000	0.000	-0.141	0.011	1.707	1.718	0.000	
-2.000	-1.007	-2.228	-0.983	1.455	1.464	-0.421	
-4.000	-2.013	-4.317	-1.976	1.203	1.210	-0.842	
-6.000	-3.020	-6.406	-2.969	0.950	0.956	-1.263	
-8.000	-4.027	-8.496	-3.962	0.698	0.702	-1.683	
-10.000	-5.034	-10.586	-4.956	0.445	0.448	-2.104	

表 4.11 不同壓力角之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在理想裝配下的運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	21	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.966	9.736	5.023	3.006	2.987	-2.136	
8.000	3.973	7.814	4.016	2.751	2.733	-1.709	
6.000	2.980	5.893	3.009	2.496	2.479	-1.282	
4.000	1.986	3.970	2.003	2.240	2.226	-0.855	
2.000	0.993	2.048	0.996	1.985	1.972	-0.428	
0.000	0.000	0.124	-0.011	1.729	1.718	0.000	
-2.000	-0.993	-1.800	-1.018	1.474	1.464	0.428	
-4.000	-1.986	-3.724	-2.025	1.218	1.210	0.856	
-6.000	-2.980	-5.649	-3.031	0.963	0.956	1.284	
-8.000	-3.973	-7.574	-4.038	0.707	0.702	1.712	
-10.000	-4.966	-9.500	-5.045	0.451	0.448	2.140	

圖 4.3 不同壓力角之螺旋小齒輪與壓力角 20° 螺旋內齒輪嚙合時之運動誤差曲線



例題 4.5 漸開線螺旋內齒輪對具裝配誤差時之接觸分析

漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.12 至 4.14 所示，其冠狀修整半徑趨近無窮大時亦即趨近於理想漸開線齒輪，轉位係數 $x=0$ ，即無轉位，壓力角均為 20°，其內齒輪對在具有中心距裝配誤差及旋轉軸向裝配誤差狀況下嚙合。

經接觸分析所得漸開線螺旋內齒輪對在具有中心距、水平軸向及垂直軸向等裝配誤差狀況下之運動誤差分析結果如表 4.12 至 4.15 所示。一般漸開線形螺旋齒輪，由於在旋轉軸截面其齒形為漸開線形曲線，因此，齒輪組在理想裝配狀態或僅具有中心距裝配誤差的條件下，齒輪組並沒有運動誤差。在圖 4.4 中，齒輪組在具有水平軸向與垂直軸向軸交錯角之裝配誤差時，其運動誤差曲線會隨著 ϕ' 角度之增大而增大，且水平軸向裝配誤差的影響明顯較垂直軸向裝配誤差來得大。

表 4.12 具中心距之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	無冠狀	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.009	4.504	2.861	3.922	0.000	
8.000	4.000	7.009	3.504	2.607	3.668	0.000	
6.000	3.000	5.009	2.504	2.354	3.414	0.000	
4.000	2.000	3.009	1.504	2.100	3.161	0.000	
2.000	1.000	1.009	0.504	1.846	2.907	0.000	
0.000	0.000	-0.992	-0.496	1.592	2.653	0.000	
-2.000	-1.000	-2.992	-1.496	1.339	2.399	0.000	
-4.000	-2.000	-4.992	-2.496	1.085	2.145	0.000	
-6.000	-3.000	-6.992	-3.496	0.831	1.892	0.000	
-8.000	-4.000	-8.992	-4.496	0.577	1.638	0.000	
-10.000	-5.000	-10.992	-5.496	0.323	1.384	0.000	

表 4.13 具水平軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	無冠狀	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.443	4.721	2.916	2.911	-0.657	
8.000	3.992	7.439	3.719	2.662	2.658	-0.525	
6.000	2.994	5.434	2.717	2.408	2.406	-0.394	
4.000	1.996	3.430	1.715	2.153	2.153	-0.263	
2.000	0.998	1.426	0.713	1.899	1.901	-0.131	
0.000	0.000	-0.578	-0.289	1.645	1.648	0.000	
-2.000	-0.998	-2.582	-1.291	1.390	1.396	0.131	
-4.000	-1.996	-4.586	-2.293	1.136	1.144	0.263	
-6.000	-2.994	-6.590	-3.295	0.882	0.891	0.394	
-8.000	-3.992	-8.594	-4.297	0.628	0.639	0.525	
-10.000	-4.990	-10.599	-5.299	0.373	0.386	0.657	

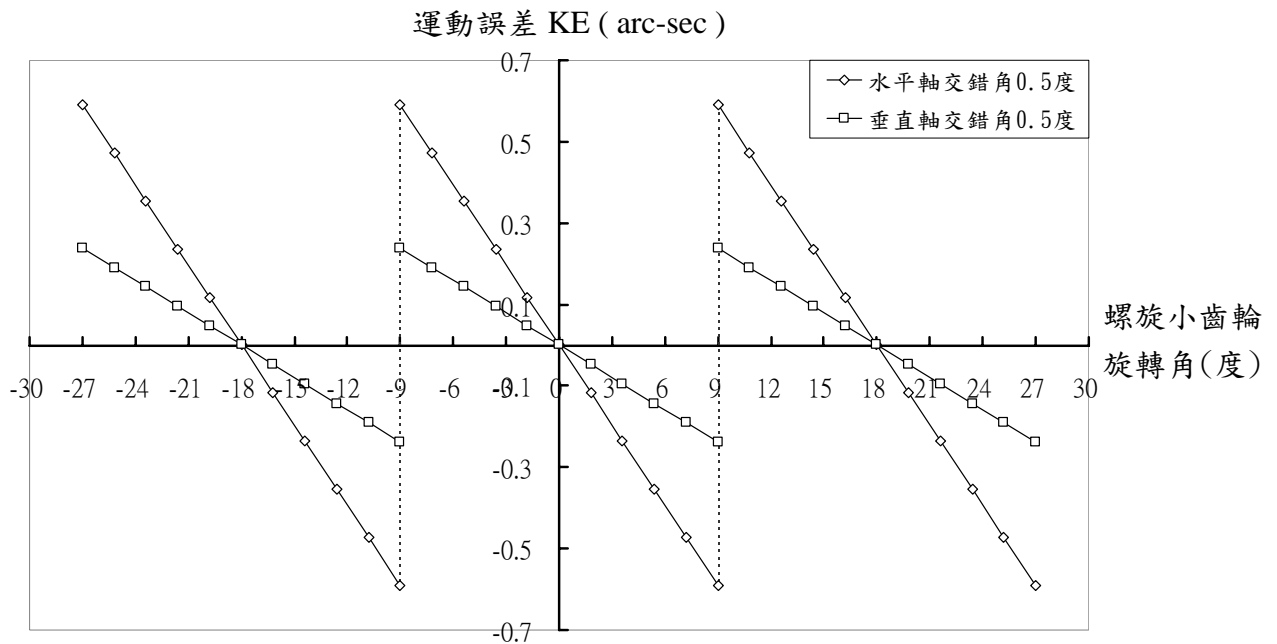
表 4.14 具垂直軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	無冠狀	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.996	11.049	5.524	3.120	3.233	-0.265	
8.000	3.997	9.047	4.524	2.866	2.974	-0.212	
6.000	2.998	7.045	3.523	2.612	2.715	-0.159	
4.000	1.998	5.044	2.522	2.358	2.456	-0.106	
2.000	0.999	3.042	1.521	2.104	2.197	-0.053	
0.000	0.000	1.040	0.520	1.850	1.938	0.000	
-2.000	-0.999	-0.961	-0.481	1.596	1.679	0.053	
-4.000	-1.998	-2.963	-1.482	1.342	1.420	0.106	
-6.000	-2.998	-4.965	-2.482	1.088	1.161	0.159	
-8.000	-3.997	-6.966	-3.483	0.834	0.902	0.212	
-10.000	-4.996	-8.968	-4.484	0.580	0.642	0.265	

表 4.15 具水平及垂直軸向之裝配誤差時，漸開線螺旋內齒輪對的主要設計參數及其運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	無冠狀	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.480	5.240	3.048	3.154	-0.912	
8.000	3.988	8.474	4.237	2.793	2.896	-0.729	
6.000	2.991	6.469	3.234	2.539	2.638	-0.547	
4.000	1.994	4.463	2.231	2.284	2.381	-0.365	
2.000	0.997	2.457	1.229	2.030	2.123	-0.182	
0.000	0.000	0.451	0.226	1.775	1.866	0.000	
-2.000	-0.997	-1.554	-0.777	1.521	1.608	0.182	
-4.000	-1.994	-3.560	-1.780	1.266	1.350	0.364	
-6.000	-2.991	-5.566	-2.783	1.012	1.093	0.547	
-8.000	-3.988	-7.571	-3.786	0.757	0.835	0.729	
-10.000	-4.986	-9.577	-4.789	0.503	0.578	0.911	

圖 4.4 具水平與垂直軸向裝配誤差之漸開線螺旋內齒輪對之運動誤差曲線



例題 4.6 冠狀修整螺旋內齒輪對具裝配誤差時之接觸分析

具冠狀修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.16 至 4.27 所示，其壓力角均為 20° ，冠狀修整隆齒半徑分別為 100mm、300mm 和 500mm，轉位係數 $x = 0$ ，螺旋環齒輪為一般漸開線環齒輪，其內齒輪對在具有中心距裝配誤差及旋轉軸向裝配誤差狀況下嚙合。

經由接觸分析模擬後，具冠狀修整之螺旋內齒輪對在具裝配誤差狀況下，其運動誤差分析結果如表 4.16 至 4.27 所示。由分析結果顯示，齒輪對在具有中心距裝配誤差 ΔC 時，並無運動誤差出現，只是接觸點位置有所改變；然而，當齒輪對具有水平及垂直軸向裝配誤差時，則會有運動誤差值的出現，且水平軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_h$ 所造成的運動誤差值會大於垂直軸向裝配誤差 $\Delta \gamma_v$ 所造成的運動誤差值。由圖 4.5 和 4.6 中可看出冠狀修整半徑越小，也就是冠狀量越大，其軸向裝配誤差所造成之運動誤差越小。

表 4.16 具冠狀修整 R=30mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	30	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.016	4.505	2.904	3.962	0.000	
8.000	4.000	7.015	3.505	2.650	3.709	0.000	
6.000	3.000	5.013	2.506	2.397	3.455	0.000	
4.000	2.000	3.012	1.506	2.143	3.201	0.000	
2.000	1.000	1.010	0.506	1.890	2.947	0.000	
0.000	0.000	-0.993	-0.494	1.637	2.693	0.000	
-2.000	-1.000	-2.995	-1.494	1.383	2.440	0.000	
-4.000	-2.000	-4.998	-2.493	1.130	2.186	0.000	
-6.000	-3.000	-7.001	-3.493	0.877	1.932	0.000	
-8.000	-4.000	-9.004	-4.493	0.623	1.678	0.000	
-10.000	-5.000	-11.008	-5.492	0.370	1.425	0.000	

表 4.17 具冠狀修整 R=30mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	30	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.462	4.728	2.960	2.952	-0.606	
8.000	3.992	7.456	3.726	2.706	2.700	-0.483	
6.000	2.994	5.451	2.724	2.452	2.447	-0.362	
4.000	1.996	3.445	1.722	2.198	2.195	-0.240	
2.000	0.998	1.439	0.720	1.944	1.942	-0.120	
0.000	0.000	-0.568	-0.282	1.690	1.690	0.000	
-2.000	-0.998	-2.575	-1.284	1.436	1.437	0.119	
-4.000	-1.996	-4.582	-2.285	1.183	1.185	0.238	
-6.000	-2.994	-6.589	-3.287	0.929	0.933	0.356	
-8.000	-3.993	-8.596	-4.289	0.675	0.680	0.474	
-10.000	-4.991	-10.604	-5.291	0.421	0.428	0.591	

表 4.18 具冠狀修整 R=30mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	30	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.997	11.062	5.527	3.163	3.271	-0.215	
8.000	3.997	9.060	4.527	2.909	3.012	-0.171	
6.000	2.998	7.056	3.526	2.656	2.753	-0.127	
4.000	1.999	5.053	2.525	2.402	2.494	-0.084	
2.000	0.999	3.050	1.525	2.148	2.235	-0.042	
0.000	0.000	1.046	0.524	1.895	1.976	0.000	
-2.000	-0.999	-0.958	-0.477	1.641	1.717	0.041	
-4.000	-1.999	-2.963	-1.477	1.387	1.457	0.082	
-6.000	-2.998	-4.967	-2.478	1.134	1.198	0.122	
-8.000	-3.997	-6.972	-3.479	0.880	0.939	0.161	
-10.000	-4.997	-8.977	-4.479	0.627	0.680	0.200	

表 4.19 具冠狀修整 R=30mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向和垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	30	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.504	5.248	3.092	3.192	-0.861	
8.000	3.989	8.497	4.246	2.838	2.935	-0.688	
6.000	2.992	6.490	3.243	2.584	2.677	-0.515	
4.000	1.995	4.482	2.240	2.330	2.420	-0.343	
2.000	0.997	2.475	1.238	2.075	2.162	-0.171	
0.000	0.000	0.467	0.235	1.821	1.904	0.000	
-2.000	-0.997	-1.541	-0.768	1.567	1.647	0.170	
-4.000	-1.995	-3.550	-1.770	1.313	1.389	0.340	
-6.000	-2.992	-5.558	-2.773	1.059	1.132	0.509	
-8.000	-3.989	-7.567	-3.776	0.805	0.874	0.677	
-10.000	-4.987	-9.576	-4.778	0.551	0.617	0.845	

表 4.20 具冠狀修整 R=50mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.013	4.505	2.903	3.962	0.000	
8.000	4.000	7.012	3.505	2.649	3.709	0.000	
6.000	3.000	5.011	2.505	2.396	3.455	0.000	
4.000	2.000	3.010	1.505	2.142	3.201	0.000	
2.000	1.000	1.009	0.505	1.889	2.947	0.000	
0.000	0.000	-0.992	-0.495	1.635	2.693	0.000	
-2.000	-1.000	-2.994	-1.494	1.382	2.440	0.000	
-4.000	-2.000	-4.995	-2.494	1.128	2.186	0.000	
-6.000	-3.000	-6.997	-3.494	0.874	1.932	0.000	
-8.000	-4.000	-8.999	-4.494	0.621	1.678	0.000	
-10.000	-5.000	-11.001	-5.494	0.367	1.425	0.000	

表 4.21 具冠狀修整 R=50mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.459	4.727	2.959	2.952	-0.626	
8.000	3.992	7.454	3.725	2.705	2.700	-0.500	
6.000	2.994	5.449	2.723	2.451	2.447	-0.375	
4.000	1.996	3.443	1.722	2.197	2.195	-0.249	
2.000	0.998	1.438	0.720	1.943	1.942	-0.125	
0.000	0.000	-0.568	-0.282	1.689	1.690	0.000	
-2.000	-0.998	-2.573	-1.284	1.435	1.437	0.124	
-4.000	-1.996	-4.579	-2.286	1.181	1.185	0.248	
-6.000	-2.994	-6.585	-3.288	0.927	0.933	0.371	
-8.000	-3.992	-8.591	-4.290	0.673	0.680	0.494	
-10.000	-4.990	-10.597	-5.292	0.419	0.428	0.617	

表 4.22 具冠狀修整 R=50mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.996	11.059	5.527	3.162	3.271	-0.235	
8.000	3.997	9.056	4.526	2.908	3.012	-0.187	
6.000	2.998	7.054	3.526	2.655	2.753	-0.140	
4.000	1.999	5.051	2.525	2.401	2.494	-0.093	
2.000	0.999	3.048	1.524	2.147	2.235	-0.046	
0.000	0.000	1.045	0.523	1.893	1.976	0.000	
-2.000	-0.999	-0.958	-0.477	1.639	1.717	0.046	
-4.000	-1.999	-2.961	-1.478	1.386	1.457	0.091	
-6.000	-2.998	-4.965	-2.479	1.132	1.198	0.137	
-8.000	-3.997	-6.968	-3.480	0.878	0.939	0.181	
-10.000	-4.996	-8.972	-4.480	0.624	0.680	0.226	

表 4.23 具冠狀修整 R=50mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平和垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.500	5.248	3.091	3.192	-0.882	
8.000	3.989	8.494	4.245	2.837	2.935	-0.704	
6.000	2.992	6.487	3.242	2.583	2.677	-0.528	
4.000	1.994	4.480	2.240	2.328	2.420	-0.351	
2.000	0.997	2.474	1.237	2.074	2.162	-0.176	
0.000	0.000	0.467	0.234	1.820	1.904	0.000	
-2.000	-0.997	-1.541	-0.769	1.566	1.647	0.175	
-4.000	-1.994	-3.548	-1.771	1.311	1.389	0.350	
-6.000	-2.992	-5.555	-2.774	1.057	1.132	0.524	
-8.000	-3.989	-7.563	-3.777	0.803	0.874	0.698	
-10.000	-4.986	-9.571	-4.779	0.549	0.616	0.872	

表 4.24 具冠狀修整 R=1000mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有中心距之裝配誤差下的運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	1000	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.009	4.504	2.902	3.962	0.000	
8.000	4.000	7.009	3.504	2.648	3.709	0.000	
6.000	3.000	5.009	2.504	2.394	3.455	0.000	
4.000	2.000	3.009	1.504	2.140	3.201	0.000	
2.000	1.000	1.009	0.504	1.887	2.947	0.000	
0.000	0.000	-0.992	-0.496	1.633	2.693	0.000	
-2.000	-1.000	-2.992	-1.496	1.379	2.440	0.000	
-4.000	-2.000	-4.992	-2.496	1.125	2.186	0.000	
-6.000	-3.000	-6.992	-3.496	0.872	1.932	0.000	
-8.000	-4.000	-8.992	-4.496	0.618	1.678	0.000	
-10.000	-5.000	-10.992	-5.496	0.364	1.425	0.000	

表 4.25 具冠狀修整 R=1000mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平軸向之裝配誤差下的運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	1000	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.454	4.727	2.958	2.952	-0.655	
8.000	3.992	7.450	3.725	2.704	2.700	-0.524	
6.000	2.994	5.446	2.723	2.450	2.447	-0.393	
4.000	1.996	3.441	1.721	2.195	2.195	-0.262	
2.000	0.998	1.437	0.719	1.941	1.942	-0.131	
0.000	0.000	-0.567	-0.284	1.687	1.690	0.000	
-2.000	-0.998	-2.571	-1.286	1.432	1.437	0.131	
-4.000	-1.996	-4.575	-2.288	1.178	1.185	0.262	
-6.000	-2.994	-6.580	-3.290	0.924	0.933	0.393	
-8.000	-3.992	-8.584	-4.292	0.670	0.680	0.524	
-10.000	-4.990	-10.588	-5.294	0.415	0.428	0.655	

表 4.26 具冠狀修整 R=1000mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有垂直軸向之裝配誤差下的運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	1000	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.996	11.053	5.527	3.161	3.271	-0.264	
8.000	3.997	9.052	4.526	2.907	3.012	-0.211	
6.000	2.998	7.050	3.525	2.653	2.753	-0.158	
4.000	1.998	5.048	2.524	2.399	2.494	-0.105	
2.000	0.999	3.046	1.523	2.145	2.235	-0.053	
0.000	0.000	1.045	0.522	1.891	1.976	0.000	
-2.000	-0.999	-0.957	-0.479	1.637	1.717	0.053	
-4.000	-1.998	-2.959	-1.479	1.383	1.458	0.105	
-6.000	-2.998	-4.961	-2.480	1.129	1.198	0.158	
-8.000	-3.997	-6.962	-3.481	0.875	0.939	0.210	
-10.000	-4.996	-8.964	-4.482	0.621	0.680	0.263	

表 4.27 具冠狀修整 R=1000mm 之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其在具有水平和垂直軸向之裝配下的運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	1000	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.495	5.247	3.090	3.192	-0.910	
8.000	3.988	8.489	4.245	2.836	2.935	-0.728	
6.000	2.991	6.484	3.242	2.581	2.677	-0.546	
4.000	1.994	4.478	2.239	2.327	2.420	-0.364	
2.000	0.997	2.472	1.236	2.072	2.162	-0.182	
0.000	0.000	0.466	0.233	1.818	1.904	0.000	
-2.000	-0.997	-1.539	-0.770	1.563	1.647	0.182	
-4.000	-1.994	-3.545	-1.772	1.309	1.389	0.364	
-6.000	-2.991	-5.551	-2.775	1.054	1.132	0.546	
-8.000	-3.988	-7.557	-3.778	0.800	0.874	0.727	
-10.000	-4.986	-9.563	-4.781	0.545	0.616	0.909	

圖 4.5 具水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 之冠狀修整螺旋內齒輪對之運動誤差曲線

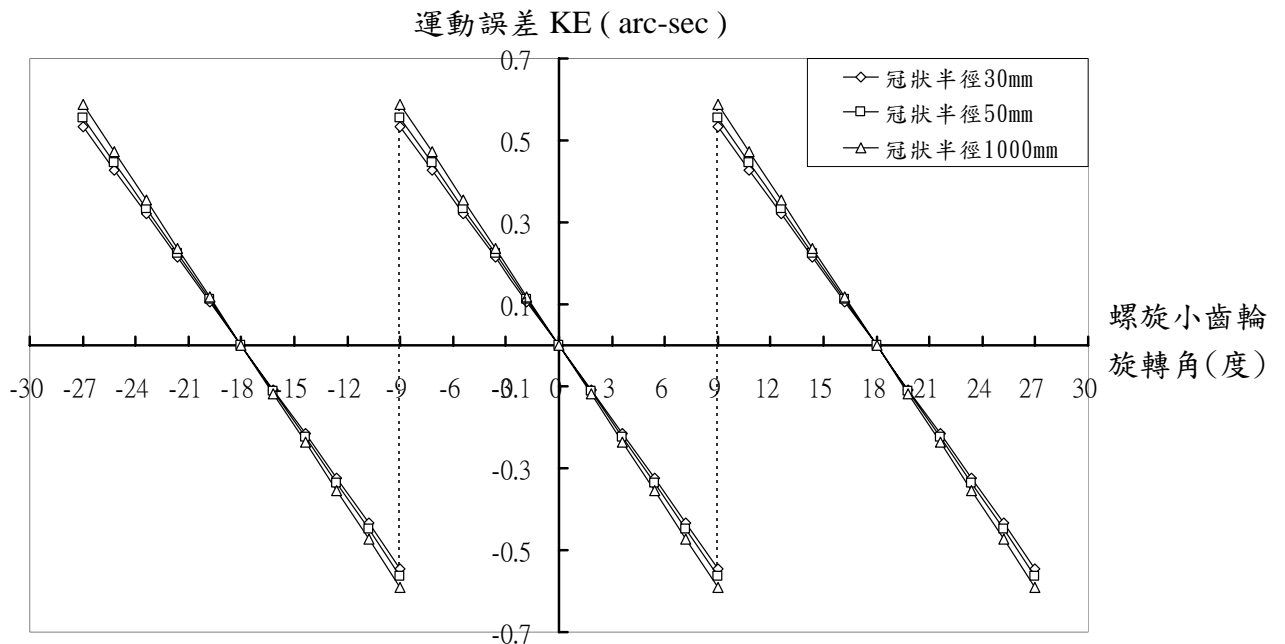
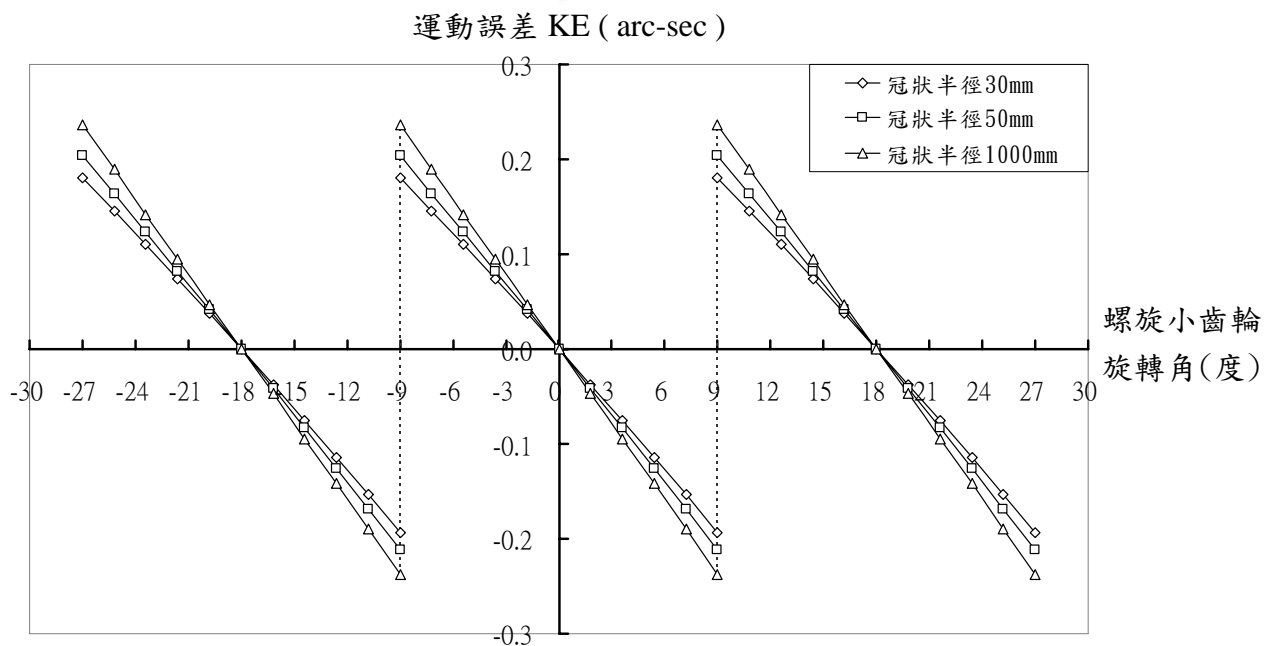


圖 4.6 具垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$ 之冠狀修整螺旋內齒輪對之運動誤差曲線



例題 4.7 冠狀及轉位修整之螺旋內齒輪對具裝配誤差時之接觸分析

具冠狀及轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.28 至 4.35 所示，螺旋小齒輪 Σ_1 的轉位係數分別為 $x = 0.2$ 之正轉位及 $x = -0.2$ 之負轉位，其兩者之冠狀修整隆齒半徑均為 50mm，螺旋環齒輪則為一般漸開線環齒輪，壓力角均為 20° ，內齒輪對在具有中心距裝配誤差、水平軸裝配誤差及垂直軸裝配狀況下嚙合。

經由接觸分析模擬後，具冠狀修整與轉位修整的螺旋小齒輪與漸開線螺旋環齒輪在裝配誤差狀況下，其分析結果如表 4.28 至 4.35 所示。在僅有中心距裝配誤差狀態下，其運動誤差與理想裝配狀況時差異甚小，亦即運動誤差不明顯。在有水平軸向及垂直軸向裝配誤差時與例題 4.6 僅有冠狀修整時之運動誤差趨勢差不多，可見轉位修整對裝配誤差之影響甚小。

表 4.28 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	l (mm)	$l^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	8.619	4.308	2.480	3.962	0.000	
8.000	4.000	6.618	3.308	2.227	3.708	0.000	
6.000	3.000	4.617	2.308	1.973	3.454	0.000	
4.000	2.000	2.616	1.308	1.720	3.201	0.000	
2.000	1.000	0.615	0.308	1.466	2.947	0.000	
0.000	0.000	-1.387	-0.692	1.213	2.693	0.000	
-2.000	-1.000	-3.389	-1.692	0.959	2.439	0.000	
-4.000	-2.000	-5.390	-2.692	0.706	2.185	0.000	
-6.000	-3.000	-7.392	-3.691	0.452	1.932	0.000	
-8.000	-4.000	-9.394	-4.691	0.199	1.678	0.000	
-10.000	-5.000	-11.397	-5.691	-0.055	1.424	0.000	

表 4.29 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.050	4.523	2.535	2.952	-0.622	
8.000	3.992	7.045	3.521	2.281	2.700	-0.497	
6.000	2.994	5.040	2.519	2.027	2.447	-0.372	
4.000	1.996	3.035	1.517	1.773	2.195	-0.248	
2.000	0.998	1.029	0.515	1.519	1.942	-0.124	
0.000	0.000	-0.976	-0.487	1.265	1.690	0.000	
-2.000	-0.998	-2.982	-1.489	1.011	1.437	0.123	
-4.000	-1.996	-4.988	-2.491	0.757	1.185	0.246	
-6.000	-2.994	-6.994	-3.492	0.503	0.932	0.369	
-8.000	-3.992	-9.000	-4.494	0.249	0.680	0.491	
-10.000	-4.990	-11.007	-5.496	-0.006	0.427	0.613	

表 4.30 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.996	10.645	5.320	2.737	3.273	-0.226	
8.000	3.997	8.643	4.319	2.483	3.014	-0.180	
6.000	2.998	6.640	3.319	2.230	2.754	-0.135	
4.000	1.999	4.638	2.318	1.976	2.495	-0.089	
2.000	0.999	2.635	1.317	1.722	2.236	-0.045	
0.000	0.000	0.632	0.317	1.468	1.977	0.000	
-2.000	-0.999	-1.372	-0.684	1.215	1.718	0.044	
-4.000	-1.999	-3.375	-1.685	0.961	1.459	0.088	
-6.000	-2.998	-5.378	-2.686	0.707	1.200	0.131	
-8.000	-3.997	-7.382	-3.686	0.453	0.941	0.174	
-10.000	-4.997	-9.386	-4.687	0.200	0.682	0.216	

表 4.31 冠狀及正轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.094	5.045	2.667	3.195	-0.873	
8.000	3.989	8.088	4.042	2.413	2.937	-0.697	
6.000	2.992	6.081	3.039	2.159	2.679	-0.522	
4.000	1.995	4.074	2.037	1.904	2.422	-0.348	
2.000	0.997	2.067	1.034	1.650	2.164	-0.174	
0.000	0.000	0.060	0.031	1.396	1.906	0.000	
-2.000	-0.997	-1.947	-0.972	1.142	1.649	0.173	
-4.000	-1.995	-3.954	-1.974	0.887	1.391	0.346	
-6.000	-2.992	-5.962	-2.977	0.633	1.133	0.519	
-8.000	-3.989	-7.969	-3.980	0.379	0.876	0.691	
-10.000	-4.986	-9.977	-4.982	0.125	0.618	0.862	

表 4.32 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	-0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.408	4.703	3.326	3.962	0.000	
8.000	4.000	7.408	3.703	3.072	3.708	0.000	
6.000	3.000	5.407	2.703	2.818	3.454	0.000	
4.000	2.000	3.406	1.703	2.565	3.201	0.000	
2.000	1.000	1.405	0.703	2.311	2.947	0.000	
0.000	0.000	-0.597	-0.297	2.058	2.693	0.000	
-2.000	-1.000	-2.598	-1.297	1.804	2.439	0.000	
-4.000	-2.000	-4.600	-2.297	1.551	2.185	0.000	
-6.000	-3.000	-6.601	-3.296	1.297	1.932	0.000	
-8.000	-4.000	-8.603	-4.296	1.044	1.678	0.000	
-10.000	-5.000	-10.605	-5.296	0.790	1.424	0.000	

表 4.33 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	-0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.868	4.932	3.384	2.951	-0.629	
8.000	3.992	7.863	3.930	3.130	2.698	-0.503	
6.000	2.994	5.858	2.928	2.876	2.446	-0.377	
4.000	1.996	3.853	1.926	2.621	2.194	-0.251	
2.000	0.998	1.848	0.924	2.367	1.941	-0.125	
0.000	0.000	-0.158	-0.078	2.113	1.689	0.000	
-2.000	-0.998	-2.163	-1.080	1.859	1.437	0.125	
-4.000	-1.996	-4.169	-2.082	1.605	1.184	0.249	
-6.000	-2.994	-6.175	-3.083	1.351	0.932	0.374	
-8.000	-3.992	-8.181	-4.085	1.097	0.679	0.497	
-10.000	-4.990	-10.187	-5.087	0.843	0.427	0.621	

表 4.34 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	-0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.996	11.473	5.735	3.587	3.268	-0.244	
8.000	3.997	9.471	4.734	3.334	3.009	-0.195	
6.000	2.998	7.468	3.733	3.080	2.750	-0.145	
4.000	1.999	5.466	2.732	2.826	2.491	-0.097	
2.000	0.999	3.463	1.732	2.572	2.232	-0.048	
0.000	0.000	1.460	0.731	2.318	1.973	0.000	
-2.000	-0.999	-0.543	-0.270	2.064	1.714	0.048	
-4.000	-1.999	-2.546	-1.271	1.811	1.455	0.095	
-6.000	-2.998	-4.549	-2.272	1.557	1.196	0.142	
-8.000	-3.997	-6.553	-3.272	1.303	0.937	0.189	
-10.000	-4.996	-8.557	-4.273	1.049	0.678	0.235	

表 4.35 冠狀及負轉位修整之螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	20	75(右旋)	20	50	-0.2
齒輪 Σ_2	2.0	40	20	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.907	5.452	3.516	3.189	-0.890	
8.000	3.989	8.901	4.449	3.261	2.932	-0.711	
6.000	2.992	6.894	3.446	3.007	2.674	-0.533	
4.000	1.994	4.888	2.443	2.753	2.417	-0.355	
2.000	0.997	2.881	1.441	2.498	2.159	-0.177	
0.000	0.000	0.874	0.438	2.244	1.902	0.000	
-2.000	-0.997	-1.133	-0.565	1.990	1.644	0.177	
-4.000	-1.994	-3.140	-1.568	1.735	1.386	0.353	
-6.000	-2.992	-5.148	-2.570	1.481	1.129	0.530	
-8.000	-3.989	-7.155	-3.573	1.227	0.871	0.705	
-10.000	-4.986	-9.163	-4.576	0.973	0.614	0.881	

例題 4.8 不同壓力角之冠狀螺旋內齒輪對具裝配誤差時之接觸分析

不同壓力角之冠狀螺旋內齒輪對的主要設計參數如表 4.36 至 4.43 所示，螺旋小齒輪 Σ_1 的壓力角分別為 14.5° 及 25° ，而其冠狀修整半徑均為 50mm ，螺旋環齒輪則為壓力角 20° 之一般漸開線環齒輪。本例題旨在探討此內齒輪對在具有中心距裝配誤差及旋轉軸向裝配誤差狀況下嚙合之情形。

具不同壓力角(14.5° 與 25°)之冠狀螺旋內齒輪對在具有不同裝配誤差狀況下，經由接觸分析模擬後其運動誤差如表 4.36 至 4.43 所示。分析結果顯示，不同壓力角對中心距裝配誤差的影響並不敏感，並無運動誤差之出現。在具有水平軸向裝配誤差時，如圖 4.7 所示，齒輪組的運動誤差值會隨著壓力角的角度增加而減小；在具有垂直軸向裝配誤差時，如圖 4.8 所示，齒輪組的運動誤差值會隨著壓力角的角度增加而增加，但兩者變化量都甚小。

表 4.36 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	14.5	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	14.5	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	9.294	4.647	2.631	3.662	0.000	
8.000	4.000	7.294	3.647	2.445	3.476	0.000	
6.000	3.000	5.294	2.647	2.258	3.289	0.000	
4.000	2.000	3.294	1.647	2.072	3.103	0.000	
2.000	1.000	1.294	0.647	1.885	2.916	0.000	
0.000	0.000	-0.706	-0.353	1.699	2.730	0.000	
-2.000	-1.000	-2.706	-1.353	1.512	2.543	0.000	
-4.000	-2.000	-4.706	-2.353	1.326	2.357	0.000	
-6.000	-3.000	-6.706	-3.353	1.139	2.170	0.000	
-8.000	-4.000	-8.706	-4.353	0.953	1.984	0.000	
-10.000	-5.000	-10.707	-5.353	0.766	1.797	0.000	

表 4.37 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	14.5	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	14.5	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.989	9.522	4.761	2.652	2.648	-0.699	
8.000	3.991	7.518	3.759	2.465	2.462	-0.559	
6.000	2.993	5.514	2.757	2.279	2.277	-0.419	
4.000	1.996	3.509	1.755	2.092	2.091	-0.280	
2.000	0.998	1.505	0.753	1.905	1.906	-0.140	
0.000	0.000	-0.499	-0.250	1.718	1.721	0.000	
-2.000	-0.998	-2.504	-1.252	1.531	1.535	0.140	
-4.000	-1.996	-4.508	-2.254	1.344	1.350	0.279	
-6.000	-2.993	-6.513	-3.256	1.157	1.164	0.419	
-8.000	-3.991	-8.518	-4.258	0.970	0.979	0.558	
-10.000	-4.989	-10.522	-5.261	0.783	0.793	0.698	

表 4.38 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	14.5	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	14.5	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.997	11.132	5.566	2.803	2.915	-0.209	
8.000	3.997	9.131	4.566	2.616	2.723	-0.167	
6.000	2.998	7.130	3.565	2.429	2.530	-0.125	
4.000	1.999	5.129	2.564	2.243	2.338	-0.084	
2.000	0.999	3.127	1.564	2.056	2.146	-0.042	
0.000	0.000	1.126	0.563	1.869	1.954	0.000	
-2.000	-0.999	-0.875	-0.438	1.683	1.761	0.042	
-4.000	-1.999	-2.877	-1.438	1.496	1.569	0.083	
-6.000	-2.998	-4.878	-2.439	1.309	1.377	0.125	
-8.000	-3.997	-6.880	-3.440	1.123	1.185	0.166	
-10.000	-4.997	-8.881	-4.440	0.936	0.992	0.207	

表 4.39 壓力角 14.5° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平和垂直軸向裝配誤差時運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	14.5	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	14.5	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.986	10.640	5.320	2.757	2.863	-0.898	
8.000	3.989	8.634	4.317	2.570	2.672	-0.718	
6.000	2.991	6.629	3.315	2.383	2.481	-0.538	
4.000	1.994	4.623	2.312	2.195	2.290	-0.359	
2.000	0.997	2.618	1.309	2.008	2.099	-0.179	
0.000	0.000	0.612	0.306	1.821	1.907	0.000	
-2.000	-0.997	-1.393	-0.697	1.634	1.716	0.179	
-4.000	-1.994	-3.399	-1.700	1.447	1.525	0.358	
-6.000	-2.991	-5.405	-2.702	1.260	1.334	0.538	
-8.000	-3.989	-7.411	-3.705	1.073	1.143	0.716	
-10.000	-4.986	-9.417	-4.708	0.886	0.952	0.895	

表 4.40 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有中心距裝配誤差時之運動誤差(1)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	25	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	25	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 1\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	5.000	8.731	4.366	3.065	4.163	0.000	
8.000	4.000	6.732	3.366	2.753	3.851	0.000	
6.000	3.000	4.732	2.366	2.441	3.538	0.000	
4.000	2.000	2.732	1.366	2.129	3.226	0.000	
2.000	1.000	0.732	0.366	1.816	2.914	0.000	
0.000	0.000	-1.268	-0.634	1.504	2.602	0.000	
-2.000	-1.000	-3.269	-1.634	1.192	2.289	0.000	
-4.000	-2.000	-5.270	-2.634	0.880	1.977	0.000	
-6.000	-3.000	-7.271	-3.634	0.568	1.665	0.000	
-8.000	-4.000	-9.272	-4.633	0.256	1.353	0.000	
-10.000	-5.000	-11.273	-5.633	-0.056	1.041	0.000	

表 4.41 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平軸向裝配誤差時之運動誤差(2)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	25	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	25	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0\text{mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.0^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.990	9.379	4.691	3.167	3.160	-0.616	
8.000	3.992	7.376	3.689	2.854	2.849	-0.491	
6.000	2.994	5.373	2.687	2.541	2.539	-0.366	
4.000	1.996	3.369	1.685	2.228	2.228	-0.243	
2.000	0.998	1.366	0.683	1.915	1.917	-0.121	
0.000	0.000	-0.639	-0.319	1.602	1.607	0.000	
-2.000	-0.998	-2.643	-1.321	1.290	1.296	0.120	
-4.000	-1.996	-4.648	-2.323	0.977	0.985	0.239	
-6.000	-2.994	-6.652	-3.325	0.664	0.674	0.357	
-8.000	-3.993	-8.658	-4.327	0.351	0.364	0.474	
-10.000	-4.991	-10.663	-5.328	0.039	0.053	0.590	

表 4.42 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(3)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	25	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	25	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.0^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.995	10.956	5.479	3.413	3.527	-0.319	
8.000	3.996	8.955	4.478	3.100	3.210	-0.253	
6.000	2.997	6.954	3.477	2.788	2.893	-0.188	
4.000	1.998	4.953	2.476	2.475	2.576	-0.124	
2.000	0.999	2.951	1.475	2.163	2.259	-0.062	
0.000	0.000	0.949	0.474	1.850	1.942	0.000	
-2.000	-0.999	-1.054	-0.527	1.538	1.625	0.061	
-4.000	-1.998	-3.056	-1.528	1.225	1.308	0.120	
-6.000	-2.997	-5.059	-2.528	0.913	0.991	0.178	
-8.000	-3.996	-7.062	-3.529	0.600	0.674	0.236	
-10.000	-4.995	-9.065	-4.530	0.288	0.357	0.292	

表 4.43 壓力角 25° 之冠狀修整螺旋內齒輪對的主要設計參數及其具有水平及垂直軸向裝配誤差時之運動誤差(4)

	模數 (mm/齒)	齒數	壓力角 (度)	導程角 (度)	齒寬 (mm)	隆齒修整 半徑 (mm)	轉位 係數
齒輪 Σ_1	2.0	20	25	75(右旋)	20	50	0
齒輪 Σ_2	2.0	40	25	75(左旋)	20	無冠狀	0
裝配狀況： $\Delta C = 0 \text{ mm}$ 、 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 、 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$							
ϕ'_1 (deg)	ϕ'_2 (deg)	ϕ_1 (deg)	ϕ_2 (deg)	ℓ (mm)	$\ell^{(s)}$ (mm)	KE (arc-sec)	
10.000	4.985	10.329	5.166	3.315	3.421	-0.917	
8.000	3.988	8.325	4.163	3.002	3.106	-0.731	
6.000	2.991	6.319	3.160	2.689	2.790	-0.547	
4.000	1.994	4.314	2.157	2.376	2.475	-0.364	
2.000	0.997	2.309	1.154	2.062	2.160	-0.181	
0.000	0.000	0.303	0.151	1.749	1.844	0.000	
-2.000	-0.997	-1.703	-0.851	1.436	1.529	0.180	
-4.000	-1.994	-3.710	-1.854	1.123	1.214	0.359	
-6.000	-2.992	-5.716	-2.857	0.810	0.898	0.537	
-8.000	-3.989	-7.723	-3.860	0.497	0.583	0.714	
-10.000	-4.986	-9.730	-4.862	0.184	0.267	0.889	

圖 4.7 不同壓力角之冠狀修整螺旋內齒輪對在具有水平軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_h = 0.5^\circ$ 時之運動誤差曲線

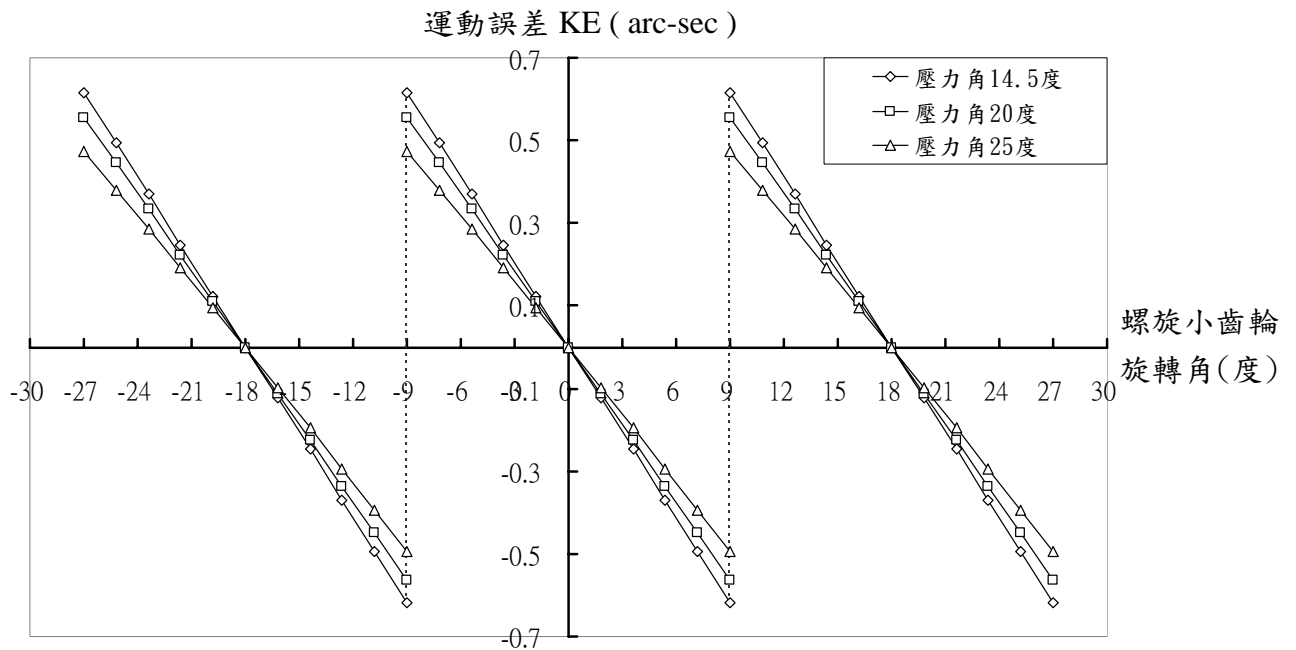
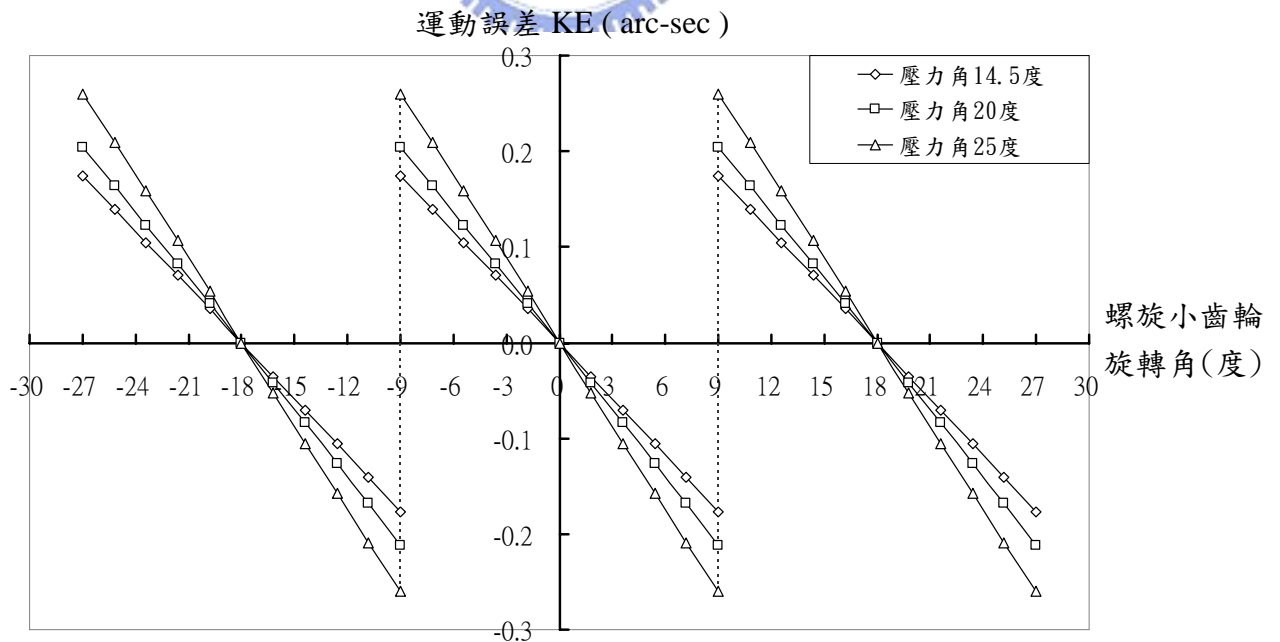


圖 4.8 不同壓力角之冠狀修整螺旋內齒輪對在具有垂直軸向裝配誤差 $\Delta\gamma_v = 0.5^\circ$ 時之運動誤差曲線



4.5 本章結論

本章依據第三章所推導出之螺旋內齒輪對的齒面數學模式，進而推導齒輪對之接觸模擬和分析模式，以及運動誤差分析模式。經由齒輪接觸分析模擬，可以得知在不同之齒輪設計參數下，包含冠狀修整、轉位修整及不同壓力角等，對於螺旋內齒輪對在理想裝配狀況與具裝配誤差狀況下之運動誤差及接觸情形的影響，茲依例題 4.1 至例題 4.8 之模擬與分析結果，可以整理出以下特性：

1. 由分析結果得知，在理想裝配狀況下，齒輪對之運動誤差曲線為零值之水平線，此與理論相符而可證明本研究所推導之螺旋內齒輪對為共軛運動對；當齒輪對在具有水平軸向及垂直軸向之裝配誤差條件時嚙合，其運動誤差曲線會發生偏移，且隨著組裝誤差量越大運動誤差也會越大，齒輪接觸點的位置也偏離理想組裝情形越多。
2. 無論以冠狀修整、轉位修整及不同壓力角等方式修整螺旋小齒輪，在僅具有中心距組裝誤差時，其運動誤差皆為零，僅接觸點的位置會隨著中心距裝配誤差而微量的上下移動。但齒輪對若具有軸向裝配誤差時，則有較明顯的運動誤差產生，而且水平軸向裝配誤差所導致之運動誤差曲線偏移量明顯較垂直軸向裝配誤差為大，亦即說明水平軸向裝配誤差的影響大於垂直軸向之裝配誤差。
3. 冠狀及轉位修整在本章例題中之分析結果顯示，冠狀修整會使得內齒輪對之運動誤差獲得改善，而轉位修整對於內齒輪對之運動誤差影響並不明顯，兩者皆會影響到齒輪的齒形及齒輪嚙合時其接觸點的位置改變。冠狀修整將使齒輪接觸狀況從線接觸變為點接觸，而具負轉位修整的螺旋小齒輪的接觸點較正轉位修整時更偏向漸開線齒形的上方，不同的接觸位置會影響到其齒根應力之大小。

4. 不同壓力角之螺旋內齒輪對在具有水平軸向裝配誤差時，齒輪組的運動誤差曲線斜率會隨壓力角度增加而減小，亦即運動誤差值會隨著壓力角的角度增加而減少；在具有垂直軸向裝配誤差時，齒輪組的運動誤差曲線斜率則會隨壓力角度增加而增加，齒輪組的運動誤差值也會隨著壓力角的角度增加而增加，但兩者變化量都很小。
5. 若僅改變齒輪對中的一個齒輪之壓力角，齒輪對將變成非共軛運動對，即使在理想裝配狀態下也會有運動誤差，而運動誤差值也會隨著兩齒輪之壓力角的角度差值增加而增加。



第五章 結論與未來展望

5.1 結論

本研究依據齒輪原理以及齒輪創成之運動關係，來建立具冠狀及轉位修整之螺旋小齒輪及漸開線螺旋環齒輪之齒面數學模式，並以此數學模式來分析齒輪對相互嚙合時之接觸分析及運動誤差。依據先前幾章之研究與分析結果，茲彙整提出幾項結論如下：

1. 齒輪之冠狀修整會使得其兩端之齒厚略為縮小，即中央齒面呈現略為凸出之狀態，因此使得齒輪接觸狀況從線接觸變為點接觸。此外，冠狀修整會使得齒輪運動誤差獲得改善，並且導致接觸點之位置會偏向齒面的中央，減少發生齒緣接觸的現象。
2. 齒輪之轉位修整會導致齒形改變，正轉位修整會使得齒輪之齒頂變尖、全齒深變短及齒根厚度增加；反之，負轉位修整會使得齒輪之齒頂變寬、全齒深變長及齒根厚度變小。轉位修整對齒輪運動誤差之影響甚小，正轉位時螺旋小齒輪的接觸點偏向漸開線齒形的下方；負轉位時螺旋小齒輪的接觸點偏向漸開線齒形的上方。
3. 漸開線型螺旋內齒輪組於具有中心距裝配誤差的情況下，其運動誤差為零，符合漸開線縱使中心距有微幅變動仍可維持共軛運動的特性。然而，螺旋內齒輪組對於旋轉軸向之裝配誤差則較敏感，若具有軸向裝配誤差時，則會有運動誤差產生，而水平軸向裝配誤差所導致之運動誤差曲線偏移量明顯較垂直軸向裝配誤差者為大，亦即說明水平軸向裝配誤差較之垂直軸向之裝配誤差要來得敏感，因此，齒輪對在組裝時要特別注意水平軸向之組裝精度。

4. 壓力角的角度大小也會影響螺旋內齒輪組在具有旋轉軸向裝配誤差時所導致之運動誤差。當具有水平軸向裝配誤差時，齒輪組的運動誤差曲線斜率會隨其齒輪壓力角度的增加而減小，亦即運動誤差值會隨著壓力角的角度之增加而減小；在具有垂直軸向裝配誤差時，齒輪組的運動誤差曲線斜率則會隨壓力角度之增加而增加，齒輪組的運動誤差值也會隨著壓力角的角度增加而增加，但兩者變化量都很小。
5. 若僅改變齒輪對中的一個齒輪之壓力角，齒輪的運動誤差會隨著小齒輪的旋轉角度之增加而增加，且運動誤差值會隨著兩齒輪壓力角角度差距之增大而增大。
6. 無論以冠狀修整、轉位修整及不同壓力角等方式來修整螺旋小齒輪，齒輪對在僅具有中心距之裝配誤差時，其運動誤差皆為零，僅接觸點的位置會隨中心距改變而微量的上下移動。

由於工業上對齒輪傳動的精密度、噪音及振動的要求越來越嚴格，所以降低運動誤差所造成的運動不平順的問題，變得越來越受到重視，是故對於漸開線螺旋內齒輪組進行齒形修整已必成趨勢，而在進行各種修整方式前，則需先瞭解並考慮不同修整方式之特性，再來決定各種可能的齒形修整之方式及修整量的大小，以達到最佳之修整效果。

5.2 未來展望

本論文已建立修整型螺旋內齒輪之齒面數學模式，並探討齒輪對在各種裝配狀態下之接觸點分析與運動誤差分析。未來可利用本研究所建立之齒面數學模式，進一步探討齒輪嚙合時的接觸齒印分析，及利用最佳化方法對各種修整方式做最佳的參數調整；或可利用有限元素法(Finite Element Method)，考慮齒輪在具有負載情形時之接觸齒印並進行應力分析，也可進一步的利用實驗設備及量測方法來驗證理論與模擬分析的結果。



參考文獻

- [1] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washinton D. C., 1989.
- [2] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [3] Litvin, F. L. and A. Fuentes, Gear Geometry and Applied Theory, Cambridge University Press, 2004.
- [4] 蔡忠杓，陳炤彰，陶恕，鄧武宗，馮展華，「漸開線螺旋齒輪數學模式之推導」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月22-23日。
- [5] 蔡忠杓，馮展華，鄧武宗，陳炤彰，陶恕，「漸開線形螺旋齒輪之電腦輔助模擬接觸分析」，中華民國力學學會第十屆全國力學會議，高雄市，1986年11月22-23日。
- [6] Tsay, C. B., “Helical Gears with Involute Shaped Teeth: Geometry, Computer Simulation, Tooth Contact Analysis and Stress Analysis”, Trans. ASME, J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.110, No.4, pp.482-491, 1988.
- [7] 白炳文，「漸開線形內齒輪之特性研究與分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1989年6月。
- [8] 陳正育，「具冠狀小齒輪之內齒輪組的特性研究與分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1989年6月。
- [9] 王如鈺，齒輪原理概要，再版，憬藝企業有限公司，民國八十四年九月。

- [10] 王志華，「修整型螺旋齒輪之接觸分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1997年6月。
- [11] 張永源，「修整型螺旋齒輪傳動誤差之測試與分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，1997年6月。
- [12] 蘇政豪，「具冠狀與齒形修整之螺旋齒輪的齒印分析」，國立交通大學機械工程學系，碩士論文，2006年6月。
- [13] Bair, B.W. and C.B. Tsay, “Computer Aided Tooth Contact Analysis of Internal Spur Gears”, J. of CSME, Vol.13, No.6, p.537-546,1992.
- [14] Tsay, C.B. and B.W. Bair, “Theoretical Analysis of Internal Involute Spur Gears”, The 5th IFToMM International Symposium on Linkage and Computer Design Methods, Bucharest, Romania, 1989.
- [15] Tsay, C.B., W.L. Sheu and C.H. Wu, “Spur Gears with Crowned Teeth”, J. of CSME, Vol.11, No.2, pp.121-133,1990.

