

# 國立交通大學

## 機械工程學系

### 碩士論文

#### 鞋氣墊吸震試驗之有限元素分析

The Finite Element Analysis

on Shock Absorption Test of Air-Cushion in Shoes

研 究 生：黃 詠

指導教授：洪景華 教授

中華民國九十八年六月

# 鞋氣墊吸震試驗之有限元素分析

The Finite Element Analysis on Shock Absorption Test of Air-Cushion in Shoes

研 究 生：黃 詠

Student：Yong Huang

指導教授：洪景華

Advisor：Ching-Hua Hung

國 立 交 通 大 學

機 械 工 程 學 系

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Mechanical Engineering

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

# 鞋氣墊吸震試驗之有限元素分析

研究生：黃 詠

指導教授：洪景華 教授

## 國立交通大學機械工程學系

### 摘要

鞋氣墊吸震試驗係根據英國 SATRA 技術研究中心之試驗標準 PM142 所進行，此試驗標準主要針對鞋樣或鞋中底之測試所制定，為鞋業主要判定鞋樣或鞋中底舒適度與能量回饋率之試驗法。如今雖然鞋氣墊製做技術突破，但是在開發時依然以經驗法則為主，並無相應的分析系統輔助，因此若能建立起一組以有限元素法為基礎之分析系統，對鞋氣墊吸震試驗進行模擬與並輸出其分析結果提供參考，則可使氣墊設計工作進行的更有效率。

本研究根據超彈體材料的理論設計並規劃簡易拉力、平面剪力與液壓膨脹三種不同之材料實驗，並以 MSC.Marc 為有限元素模擬分析軟體進行計算。分別取得三種實驗數據後代入五參數項之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式，計算出合適之材料參數以建立有限元素分析所需之超彈體材料模型。在此超彈體材料模型經過液壓膨脹實驗之有限元素模擬之驗證後，以 Single-Step Houbolt 為動態響應控制器，完成對鞋氣墊吸震試驗之動態有限元素分析模擬並與實際試驗比較驗證，最後對此模擬分析系統未來繼續發展的可能性作討論。

關鍵字：鞋氣墊、有限元素、超彈體、Mooney-Rivlin、Single-Step Houbolt、MSC.Marc、吸震試驗。

# **The Finite Element Analysis on Shock Absorption Test of Air-Cushion in Shoes**

Student : Yong Huang

Adviser : Dr. Chinghua Hung

**Department of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University**

## **Abstract**

The shock absorption test of air-cushion in shoes is conducted according to experimental standard PM142, which is defined by SATRA for determining the percentage energy return and comfort of shoes. Although manufacturing technique had been improved these years, “try and error” is still the working method for designing. With developing finite element analysis system, simulation of the shock absorption test of air-cushion in shoes could now help the designer to work more efficiently.

In this research, three experiments had been conducted according to the theory of hyperelasticity: simple tension test, planar shear test and bulging test. By importing the results of these experiments, a hyperelastic material model for the air-cushion is defined by Mooney-Rivlin function of third order with five constants. After the material model is validated with MSC.Marc and bulging tests, the simulation of the shock absorption test of air-cushion in shoes is carried out by Single-Step Houbolt method. The simulation results agrees with shock absorption test.

Keywords: air-cushion, shoe, FEA, hyperelasticity, Mooney, Single-Step Houbolt.

## 誌謝

過了這麼久的時間，終於打到誌謝的內容，我想，在精密工程與模擬實驗室的歷屆碩士成員中，我應該是最難產的一位，不只是碩士而且還是碩四。這邊我必須要特別感謝我的指導教授洪景華老師，本來我在父親公司幫忙完後回來繼續完成碩士學業，是預計半年內搞定。只是沒想到一坐下來就屁股黏著將近一年，但老師卻沒有放棄我這個碩四生，除了對我鼓勵打氣外，論文很多方向也都提供了關鍵的意見與指導，實在讓我非常感激，而老師對學問嚴謹的態度也讓人欽佩，期盼自己未來面對任何學問都能以老師為榜樣。此外也要感謝口試委員陳復國教授、徐瑞坤教授與陳申岳經理在研究論文上部份給予的意見與指導，除了讓我學習到更多東西外，也讓這篇論文的內容修正得更完整。

曾經有想過，因為我碩士生涯要寫進來感謝的人太多，所以應該可以謝天，不過這樣的做法實在跟我的風格差太遠，如果放過論文中唯一可以超級亂寫的部份，我想我可能就不叫黃詠了。對我來講，在交大的這段期間內，有緣待在精密工程與模擬實驗室與大家共處，著實是件非常幸運的事情，今天這篇論文能夠完成，我必須對每個人都表達我的感謝。

歷練豐富的榮崇學長，希望你桃李事業能順遂，以後我會很驕傲地對我小孩說：「這位教授以前曾坐在你爸旁邊看霹靂布袋戲」；常分我東西吃的宇中學長，因為有你我才能進這間實驗室，每次你分我東西吃時其實我都有說不出的感激，而且不管是學問或是人生道理也從你那學到很多；適合選省長的政成學長，雖然我隸屬於生醫部隊只有一段極短的時間，但你風趣的談笑方式讓我印象深刻；熱血 Rocker 煌基學長，我不會忘記你踢進球時的豪爽，跟你一樣身為南投男兒實在有幸；虎尾好老師正展學長，除了常在早上來實驗室時抓到我龜在電腦前一整晚，其實你的攝影技術真的很棒；低調沉穩的麒禎學長，感謝你在研究上常提供

我意見，在鄉民議題上也常可以跟你有所共鳴；愛看動漫的銘傑學長，你是我見過除了我哥之外最愛看動漫的人，對動漫熱情的執著讓人敬佩；同樣是元智機械出身的嘉偉學長，回想起來已經很久沒一起打球了，很感謝碩一時你的不少照顧；樂觀開朗的挫冰，你是我們這屆開心解憂的好伙伴，盼你能早日成為一家之主；我的室友宗駿，感謝你在課業上的火力支援，最佳化的同組報告我一直懷恩在心；坐我旁邊的小強，你魔法風雲會真的打得很神，我要特別感謝你造就我認識我女友的機會；書卷獎代表志嘉，你也常早上來實驗室時抓到我龜在電腦前一整晚，你對學業認真負責的態度讓我非常敬佩；電腦大內高手世璿，實驗室的公用電腦真是有勞你了，感謝你在電腦方面的專業協助；同樣明道中學畢業的運賢，感謝那次威秀看變形金剛，因為有你的卡所以用半價就看到了；聯誼達人俊昇，雖然你可能已經不記得，但我一直很感謝你有請我吃過烤地瓜；魔鬼筋肉人聖平，感謝有你在就能放心地說冷笑話，因為一定能得到回響；認份老實的時恆，每次跟你聊天都會變成探討人生大道理，你真的是太容易讓人掏心掏肺了；背影跟我一模一樣的建榮，有勞你一進實驗室就背負「黃詠弟」的稱號，不過你獨樹一格的拍掌喊水堪稱本實驗室之一絕；打鼓老師麒翔，只要有事情需要幫忙你常常會衝第一，身為學長的我實在覺得就甘心；頭光光的忠諭，你能夠把畢業時間控制在碩一暑期，讓我這碩四暑期畢業的真有些兒害羞；神奇的正一，常常會在夜半神奇的時間看到你開門走進實驗室，激起我按 Alt+Tab 繼續進行學術研究的鬥志；不囉嗦的立釗，跟你說話真的很有趣，希望你周遭的實驗設備可以跟你一起平安快樂地成長；與命運對抗的筱瑋，天將降大任於斯人也，但我相信到時你的畢業論文可以很順利的；坐我後方的宗鏗，每次我開始偷打小遊戲時轉頭就換看見你專業的分析軟體視窗，讓我不禁又會燃起按 Alt+Tab 繼續進行學術研究的鬥志。

本篇論文也要另外感謝最佳化實驗室的黃智宏學長，提供 Labview 方面的指導與意見；曾經在創應的黃春穎大哥與現任創應研發經理的蘇宏平先生，在 MSC.Marc 有限元素分析軟體上提供許多資訊與建議。此外在碩士這些年的生活

中，感謝好友宥均與家瀧的鼓勵打氣，雖然我們亂說話的比例比較大，但讓我更有氣力繼續奮戰；也謝謝在交大熱舞社相遇的伙伴們及 O.G.C 的各位，雖然我是個不務正業會跑去活動中心蠕動的碩班生，但這些跳舞的時光都成為我精神上動力的一部份。

然後我要特別感謝我的女友安婷，本身面對法研所課業與國家考試的壓力，但還是會南下新竹來探訪鼓勵我，全心全力地支持我將研究完成，雖然有時會突然很激動亂戳別人，但希望未來能一起生活並互相扶持。

最後，我要感謝我的父母，若沒有他們，今天也不會有我完成這樣一篇論文。



# 目錄

中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌謝 .....	iii
目錄 .....	vi
表目錄 .....	ix
圖目錄 .....	x
<b>第一章 緒論</b> .....	<b>1</b>
1.1 前言 .....	1
1.2 鞋氣墊發展簡介 .....	2
1.2.1 結構特性 .....	3
1.2.2 材料特性 .....	4
1.3 研究動機與目的 .....	5
1.4 研究規劃 .....	6
<b>第二章 實驗理論與實驗規劃</b> .....	<b>8</b>
2.1 超彈體材料模型 .....	8
2.1.1 超彈體基礎理論推導 .....	8
2.1.2 非線性材料模型之有限元素模擬軟體 .....	13
2.2 單軸向實驗理論 .....	13
2.3 雙軸向實驗理論 .....	15
2.3.1 雙軸拉力實驗理論 .....	16
2.3.2 液壓膨脹實驗理論 .....	17
2.4 簡易拉力實驗與平面剪力實驗 .....	19
2.4.1 實驗規劃 .....	19
2.4.2 實驗設備 .....	20
2.4.3 實驗結果 .....	21
2.5 液壓膨脹實驗 .....	22
2.5.1 實驗規劃 .....	24
2.5.2 實驗設備 .....	27
2.5.2.1 夾具系統 .....	28
2.5.2.2 液壓系統 .....	29
2.5.2.3 閉回路控制系統 .....	30
2.5.3 實驗結果 .....	33
2.5.3.1 液壓膨脹之實驗數據合理性 .....	33
2.5.3.2 不合理因素與推測之材料曲線 .....	35
<b>第三章 材料模型驗證</b> .....	<b>37</b>



3.1	Mooney-Rivlin 材料模型建立	37
3.1.1	絕對誤差與相對誤差計算	39
3.1.2	參數之調整與討論	41
3.2	液壓膨脹實驗模型建立	49
3.3	模擬分析結果與實際實驗比較	52
<b>第四章</b>	<b>鞋氣墊吸震試驗之模擬分析</b>	<b>54</b>
4.1	鞋氣墊吸震試驗	54
4.2	類似研究之文獻回顧	55
4.3	Single-Step Houbolt 動態響應理論	56
4.4	鞋氣墊吸震試驗之分析模型	57
4.4.1	CATIA 建立分析模型	59
4.4.2	Hypermesh 網格規劃	59
4.4.3	邊界條件與模擬參數	62
4.4.3.1	前處理階段	64
4.4.3.2	求解器階段	66
4.5	吸震試驗模擬結果	67
4.5.1	內部壓力變化	68
4.5.2	衝槌穿透距離	69
4.5.3	衝槌減加速度	69
4.5.4	能量回饋率	70
4.6	綜合討論	70
4.6.1	模擬與實際吸震試驗之差異	71
4.6.2	鞋氣墊網格模型厚度方向影響	73
4.6.3	時間步增量之影響與模擬之變形量	74
4.6.4	本章小結	75
<b>第五章</b>	<b>結論</b>	<b>76</b>
5.1	鞋氣墊動態有限元素分析系統繼續發展之可行性	76
5.2	改善與發展方向	77
5.2.1	實驗規畫改良	77
5.2.2	其他超彈體材料模型測試	79
5.2.3	逆向建模改良與模流分析	79
5.2.4	更多動態模擬分析之驗證樣本建立	80
	參考文獻	81
附錄 A	鞋體架構簡圖參考	83
附錄 B	Mooney-Rivlin 超彈體方程式推導	84
附錄 C	液壓膨脹應力應變式推導	87
附錄 D	夾具系統之設計規格圖	89
附錄 E	等效雙軸應力曲線推測	93

附錄 F	Herrmann 特性元素 .....	95
附錄 G	Single-Step Houbolt 動態響應方程式推導 .....	96
附錄 H	Newmark-beta 動態響應方程式與分析結果 .....	98
附錄 I	MSC. Marc 內建 Cavity 功能之計算原理 .....	99



## 表目錄

表 1.1	結構簡圖與特性比較.....	4
表 1.2	聚酯型與聚醚型 TPU 特性比較.....	5
表 2.1	簡易拉力與平面剪力主要之實驗參數.....	20
表 2.2	液壓膨脹主要之實驗參數.....	25
表 3.1	MSC.Marc 所計算之三階 Mooney-Rivlin 參數項.....	39
表 3.2	調整前參數項與調整後參數項數值表.....	48
表 3.3	決定之參數項數值表.....	53
表 4.1	實際吸震試驗與模擬分析結果比較.....	71



## 圖目錄

圖 1.1	1980 至 2005 年歐美氣墊專利數.....	3
圖 1.2	研究規劃流程圖.....	7
圖 2.1	簡易拉力與平面剪力實驗.....	14
圖 2.2	雙軸拉力實驗.....	16
圖 2.3	液壓膨脹實驗示意簡圖.....	18
圖 2.4	簡易拉力實驗試片.....	19
圖 2.5	平面剪力實驗試片.....	20
圖 2.6	簡易拉力與平面剪力實際實驗.....	21
圖 2.7	簡易拉力實驗結果與平面剪力實驗結果.....	22
圖 2.8	液壓膨脹實驗整體架構概念.....	23
圖 2.9	液壓膨脹實驗建立流程.....	24
圖 2.10	液壓膨脹實驗試片.....	24
圖 2.11	標準之實驗作業流程規劃.....	26
圖 2.12	液壓膨脹實驗設備實際實驗之膨脹狀況.....	27
圖 2.13	系統群彼此間作用示意.....	28
圖 2.14	夾具系統實際成品加上電阻尺與電路板.....	29
圖 2.15	油路設計示意圖.....	30
圖 2.16	閉迴路控制系統之前端控制面板.....	32
圖 2.17	閉迴路控制系統之功能圖塊.....	32
圖 2.18	液壓膨脹實驗結果.....	33
圖 2.19	本研究各項實驗數據之平均曲線.....	34
圖 2.20	MSC.Marc 所附之實驗數據與一般雙軸拉力實驗.....	34
圖 2.21	推測之材料曲線建立流程.....	36
圖 2.22	本研究原實驗數據與推測之材料曲線.....	36
圖 3.1	Mooney-Rivlin 材料模型建立流程.....	37
圖 3.2	絕對／相對誤差計算之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型.....	40
圖 3.3	超彈體模型 C10 項對應力應變曲線產生之影響.....	42
圖 3.4	超彈體模型 C01 項對應力應變曲線產生之影響.....	43
圖 3.5	超彈體模型 C11 項對應力應變曲線產生之影響.....	44
圖 3.6	超彈體模型 C20 項對應力應變曲線產生之影響.....	45
圖 3.7	超彈體模型 C30 項對應力應變曲線產生之影響.....	46
圖 3.8	單獨以簡易拉力之應力應變曲線為目標做趨近調整.....	47
圖 3.9	調整前／後參數項應力應變曲線與實際實驗數據.....	48
圖 3.10	液壓膨脹實驗之有限元素模擬.....	49
圖 3.11	液壓膨脹實驗之液壓邊界條件.....	51

圖 3.12	將實驗之膨脹液壓作為邊界條件之模擬分析結果.....	52
圖 3.13	調整前／決定之參數項應力應變曲線與實際實驗數據.....	53
圖 4.1	鞋中底吸震試驗示意簡圖.....	54
圖 4.2	第三代立體支撐鞋氣墊.....	58
圖 4.3	鞋氣墊所獨立出之部位.....	58
圖 4.4	完成之立體氣墊圖.....	59
圖 4.5	網格自動規劃生成之模型與整理功能.....	60
圖 4.6	調整前／後之網格.....	61
圖 4.7	網格幾何品質良好之鞋氣墊模型.....	62
圖 4.8	鞋氣墊模型定位拘束與鞋氣墊模型對稱面拘束.....	63
圖 4.9	鞋氣墊內部膨脹壓力邊界條件.....	63
圖 4.10	鞋氣墊吸震試驗模擬之完整模型.....	64
圖 4.11	鞋氣墊模型在吸震試驗模擬中最大變形狀況.....	68
圖 4.12	靜態階段膨脹／動態階段衝擊之壓力變化.....	68
圖 4.13	衝槌穿透距離與時間之關係曲線圖.....	69
圖 4.14	衝槌減加速度與時間之關係曲線圖.....	70
圖 4.16	鞋氣墊實際試驗示意.....	73
圖 4.15	鞋氣墊模型在靜態階段之體積變化.....	73
圖 5.1	在大變形時仍維持雙軸拉力應變狀態之範圍.....	78
圖 5.2	二測量點之量測方式.....	78
圖 C.1	試片膨脹高度 $h$ 小於初始平面圓半徑 $R_0$ .....	87
圖 C.2	試片膨脹高度 $h$ 大於初始平面圓半徑 $R_0$ .....	87
圖 D.1	支架部件：電阻尺支架組件.....	89
圖 D.2	支架部件：電路板支架組件與試片座支架組件.....	90
圖 D.3	總底座部件.....	91
圖 D.4	試片座部件.....	92
圖 E.1	數據比例矩陣 $A^{\text{original}}$ 之曲線圖與處理後之新曲線.....	93
圖 H.1	以 Newmark-beta 為動態響應控制器之分析結果.....	98

# 第一章 緒論

## 1.1 前言

對於各類型機具的避震系統，氣體避震皆屬於首選，尤其是以一般空氣填充為優先，其原因主要有二：氣體分子具有可壓縮的特性，以及一般空氣成本低廉且易取得填充來源。因為上述的特性，在現代科技中不論是大型民航機所用之空氣彈簧，或是一般車輛所使用的輪胎都是使用一般空氣之氣體避震為媒介。對目前的鞋業來說，採用氣體避震的鞋氣墊也是屬於避震系統首選，與其他機具之氣體避震系統不同，對人體運動方式而言鞋氣墊具有能量回饋的功能性。

自從氣體避震在 1979 年被引進運動鞋中底（鞋類結構簡圖請見附錄 A）成為氣墊後，現為鞋中底高階避震系統之設計主流。雖然，最早使用氣墊系統的鞋類是休閒鞋類，但從鞋業歷史與發展來看，運動鞋開始使用氣墊系統是發展關鍵，而現在市面上採用鞋氣墊的運動鞋亦屬於偏高單價定位。根據台灣區製鞋工業同業公會統計，台灣對外出口鞋類之中除未分類者外，運動鞋屬於最大宗，2006 年銷售額 2311 萬美元，2007 年成長到 2545 萬美元，雖然採用氣墊避震系統的運動鞋在數量上不到百分五，但是在銷售額卻超過運動鞋類的百分之十。

對於台灣鞋業而言，如果能對氣墊避震的設計與分析建立完整的系統，在採用氣墊系統時將可降低成本且確實提升功能性，進而使氣墊避震系統的運動鞋比例提升，對整體產業成長將有相當的助益。台灣早期是全球鞋類生產與開發重鎮，海島國家的背景讓產業精緻化及科技化變得相對重要，未來在鞋業上若要能有新的發展契機與方向，建立鞋氣墊避震的設計與分析系統將會是其中一個重點。

## 1.2 鞋氣墊發展簡介

最早具有氣墊避震概念的鞋類專利在 1882 年於 USPTO (United States Patent and Trademark Office) 登記[1]，當時的氣墊避震係在皮靴大底置入簡易氣囊以減震。在鞋業上最早將氣墊概念商業化的是 1960 年的 Dr. Martens 公司，當時氣墊技術是用於休閒鞋類的減震效用。直到 1979 年，Nike 推出了第一隻在中底採用氣墊避震系統的運動鞋「Tailwind」後，鞋氣墊良好之能量回饋率才逐漸被重視[2]，此刻鞋氣墊正式走入鞋產業在運動鞋上的應用，當時鞋氣墊的架構係為第一代平面支撐。

1980 到 2005 年美國與歐盟鞋氣墊專利的公告總數統計如圖 1.1 所示[3]，專利數量自 80 年起便有成長趨勢，1989 與 1990 年間達到一次高峰，當時鞋氣墊架構已步入第二代中空孔柱支撐。隨著主打氣墊系統的 Nike 公司在企業上的成長，在 1996 年起鞋氣墊專利數目開始急速提升，再加上 1997 年 Nike 大分子氣體氣墊專利到期後技術開放，使得 1998 至 1999 年間專利數達到第二次高峰，之後因大分子氣體氣墊在生產技術上受限，專利數目逐漸下滑。2003 至 2004 年間，Nike 在鞋氣墊生產技術上有新的進展，爾後的鞋氣墊專利數目便又再逐漸上昇。

2006 年初，Nike 以新的多層膜生產技術推出了「Air Max 360°」系列鞋款，此時鞋氣墊的架構雖然仍停留在第二代中空孔柱支撐，但相較於前幾年該公司所使用之鞋氣墊架構，此時的第二代中空孔柱支撐之設計已達到一個相當成熟的階段。2007 年，禾懋公司改變傳統生產鞋氣墊的技術，其創辦人黃英俊先生，用改良式自升高壓之技術成功地製造出第三代立體支撐的鞋氣墊架構。以擔任過 Nike 顧問的資深氣墊研發經驗為基礎，黃英俊先生將原本生產上受限對稱式形狀的架構，提升為可生產成立體延伸且非對稱式形狀。2008 年，禾懋公司將自有品牌 Dr. Air 引入市場，鞋氣墊在架構上已正式跨入第三代的立體支撐。



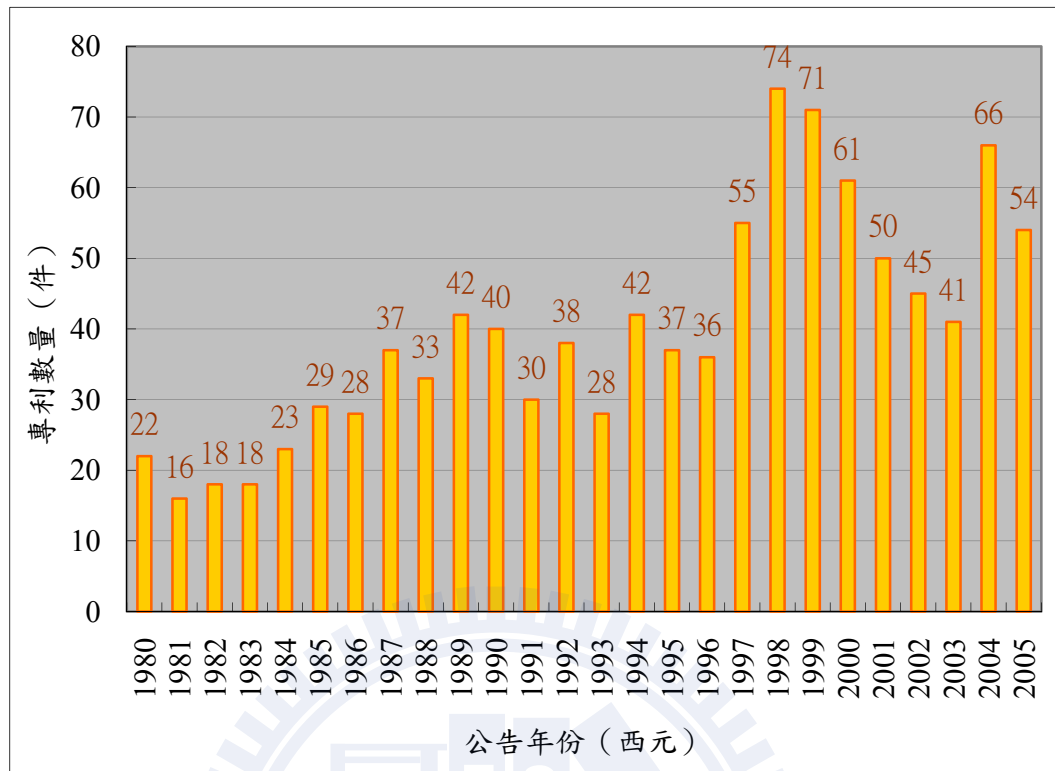


圖 1.1 1980 至 2005 年歐美氣墊專利數[3]

### 1.2.1 結構特性

氣墊避震系統除了前文所述之避震與良好之能量回饋率外，亦可應用於改變鞋內衛生環境與改變鞋襯架構等功能。因其採用空氣填充，具有較其他避震系統為輕之重量，而在受壓產生形變後氣墊內部之氣體壓力在空間中每點均等，因此用於足底均壓設計也有優異之表現。

鞋氣墊發展至今已有相當多不同類型之設計，根據氣墊構造可將鞋氣墊分為三種類型，以發展之時間先後順序依次歸類為第一代平面支撐、第二代中空孔柱支撐與第三代立體支撐，其構造簡圖及特性比較如表 1.1 所示（以足跟部位為範例）。



表 1.1 結構簡圖與特性比較

	後視簡圖	上視簡圖	特性比較
第一代 平面支撐			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 低成本</li> <li>• 生產速度快</li> <li>• 低耐用度</li> <li>• 低穩定性</li> </ul>
第二代 中空孔柱支撐			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 穩定性較佳</li> <li>• 產品成熟</li> <li>• 限制對稱形狀</li> </ul>
第三代 立體支撐			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 穩定性最佳</li> <li>• 能量回饋最佳</li> <li>• 採支撐肋架構</li> <li>• 目前成本較高</li> </ul>

## 1.2.2 材料特性

鞋氣墊目前以 TPU (Thermal-plastic Polyurethane, 熱塑性聚氨酯) 為主, 通常選用邵氏硬度範圍 80 至 90 間者為製造原料。這個範圍內的 TPU 之機械性質雖然與橡膠相似, 但在抗拉強度或是抗磨強度上的表現都比橡膠來得優異, 並且連續長時間的使用溫度可達 80°C 到 90°C, 同時也具備耐油與耐溶劑能力[4]。

TPU 係屬於 PU-Rubber (Polyurethane Rubber, 聚氨酯橡膠) 之一種, 在 1950 年代首次被文獻提及, 1960 年代早期便已應用於商業上。因為 TPU 有著近似 CPU (Cast Polyurethane, 澆鑄型聚氨酯) 與 MPU (Millable Polyurethane, 混煉型聚氨酯) 相同的物理性質, 但又可適用於一般之熱塑性加工技術, 因此廣泛地被應用在各種複雜結構之零件製品[5]。

TPU 屬於 $(AB)_n$ 型嵌段線性聚合物, A 代表縮聚反應式之長鏈部分, B 則代表短鏈

部分，其中根據 A 的成份可將其分為聚酯型 (Polyester) 與聚醚型 (Polyether) 兩大類。聚酯型 TPU 與聚醚型 TPU 特性之比較如表 1.2 所示[4][5][6]，若舉市面上鞋類產品之中底所使用的氣墊系統為例，Nike 公司所使用者屬於聚酯型 TPU，禾懋公司所使用者屬於聚醚型 TPU，本研究將以聚醚型 TPU 材料為主。

表 1.2 聚酯型與聚醚型 TPU 特性比較

	聚酯型 TPU	聚醚型 TPU
原料成本	較低	較高
原料比重	約 1.13 到 1.22 相同機械性質下較重	約 1.04 到 1.20 相同機械性質下較輕
抗水解能力	浸純水中 8 週完全分解	約為聚酯型之 5 到 10 倍
氣體保存能力	較佳	較弱
抗黃變	佳	紫外線照射後易黃變
抗菌解	極差，需添加抗菌劑	佳

### 1.3 研究動機與目的

鞋氣墊如今已發展到第三代立體支撐，而生產技術上也突破既往傳統之限制。然而，鞋氣墊製造技術不斷地變革，目前卻無相應的分析系統使產品有更高功能性之提升。就傳統而言，因為鞋氣墊在生產技術上受限過多，發展電腦模擬之分析系統來輔助設計並無太大實質意義。但現今傳統之生產技術限制現已被突破，鞋氣墊之設計所面臨的是更寬廣且更高要求的功能性提升，建立一個有參考價值之分析系統將是件重要的工作。

第三代立體支撐之鞋氣墊幾何架構複雜，屬薄膜與柱之綜合立體架構，在運動過程中會產生極大的變形量；同時因為有氣體壓縮特性，在模擬分析時也必須考慮氣墊內體積改變所造成的壓力變化。因此，除了其立體幾何模型與網格規劃有更高的複雜度外，在有限元素分析上也牽涉到大變形分析與變動之邊界條件。

針對第三代立體支撐之新型氣墊架構，本篇研究主要目的為建立此類氣墊之動態有限元素分析系統，包含最初取得材料性質的相關實驗理論與鞋氣墊模型建立等等，並且實現其動態之吸震試驗模擬，最後對其未來發展的可能性作討論。

## 1.4 研究規劃

本研究規劃主要分為三主體部份：第一部份為實驗理論與實驗規劃，第二部份為材料模型驗證，第三部份為鞋氣墊吸震試驗之模擬分析。此三主體部分的流程圖如圖 1.2 所示，圖中橫間格框為主體部分，實線框為細部工作，箭頭方向為工作流程進行之順序。

(1) 實驗理論與實驗規劃：此部分包含了材料實驗理論推導、材料實驗的規劃、建立以及數據的取得。對單軸向之簡易拉力與平面剪力實驗而言，可用一般拉微型拉伸機台完成實驗並取得材料數據；而雙軸向之雙軸拉力實驗所要求的機具規格特別且不易尋得，因此本研究規劃自行設計液壓膨脹實驗，取得等效之雙軸向實驗數據。

(2) 材料模型驗證：本研究主要使用的材料模型為超彈體 (Hyperelasticity) 模型，係根據實驗數據取得合適的參數後建立之材料模型。因為超彈體材料模型係屬於數值近似之材料模型，必存在相對之誤差，所以必須透過模擬來討論比較，再確定最適合之材料參數。在材料模型驗證這一部份中，包含了超彈體參數計算與超彈體材料模型建立，再以實驗之有限元素分析模擬比對實際實驗之結果，最後討論合理材料模型之參數項數值。

(3) 鞋氣墊吸震試驗之模擬分析：此部份包含了動態理論簡介、鞋氣墊經簡化過之立體幾何模型建立、其有限元素網格之規劃，與吸震試驗之有限元素模擬。本研究吸震試驗之有限元素模擬比較對象為財團法人鞋技中心進行之實際試驗，其試驗步驟之制定係根據於英國 SATRA 技術研究中心之試驗標準 PM142。

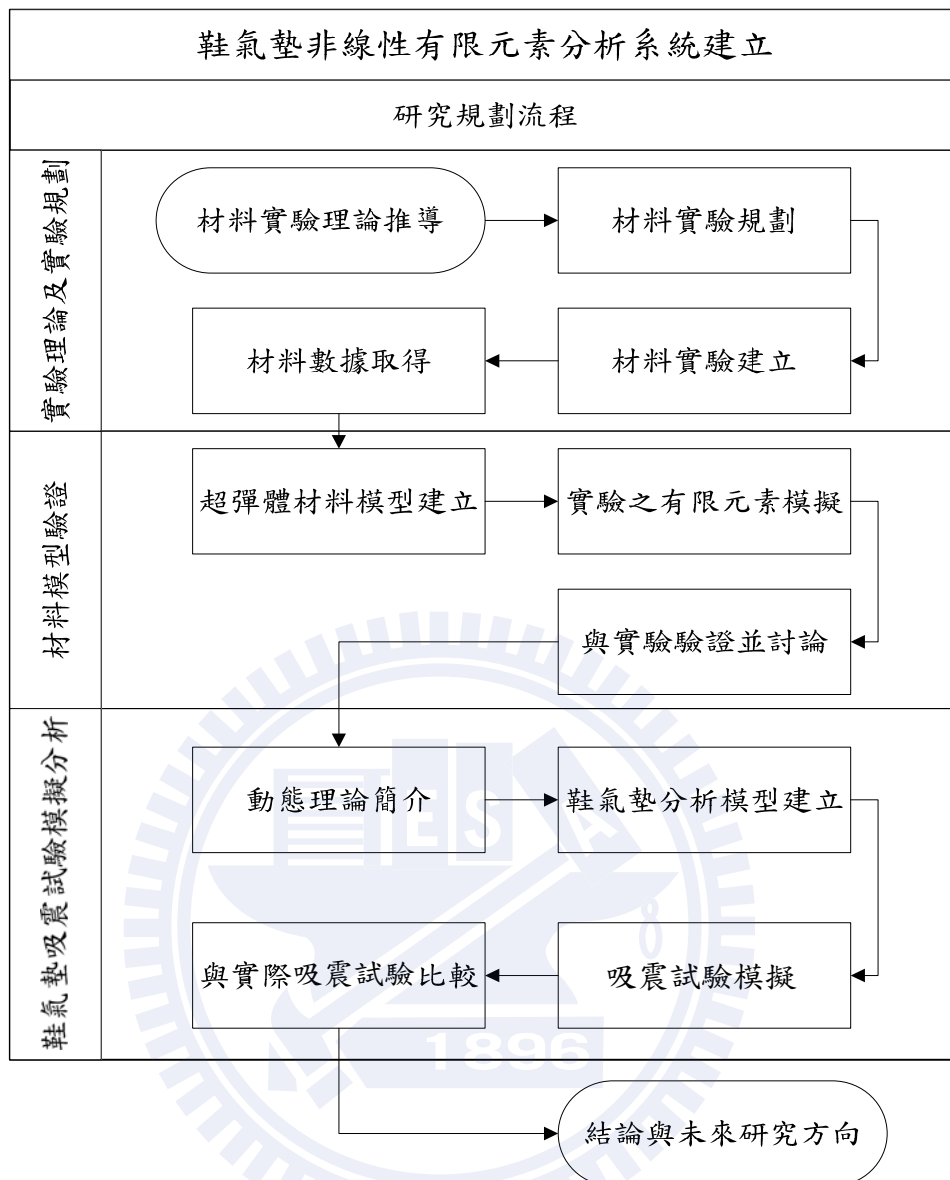


圖 1.2 研究規劃流程圖

## 第二章 實驗理論與實驗規劃

### 2.1 超彈體材料模型

本研究規劃之實驗，係根據有限元素分析中超彈體材料模型之需求所設計。超彈體（Hyperelasticity）即為以應變能密度（Strain Energy Density）敘述之材料模型，其為一種數值近似材料模型，可針對如橡膠類彈性範圍內材料曲線呈非線性者，在大變形狀況下以有限元素分析進行模擬。一般而言，超彈體方程需要有三項實驗數據為基礎來計算合理之材料參數，此三項實驗分別為簡易拉力實驗、平面剪力實驗（或純剪力）與雙軸拉力實驗。

超彈體材料模型主要分成三個領域[7]：現象邏輯型（Phenomenological），如 Mooney-Rivlin、Odgen、Yeoh、Polynomial 等；機械理論型（Mechanistic），如 Arruda-Boyce、Neo-Hookean 等；混合型（Hybrid），如 Gent 等。本研究超彈體材料模型選用邏輯型之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式為研究對象，以自行規劃建立之實驗來計算其合理之參數項數值。本節將對超彈體之基礎理論推導，以利後續章節實驗理論相關推導式之觀念銜接，三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式之深入推導請見附錄 B。

#### 2.1.1 超彈體基礎理論推導

超彈體材料模型係將材料假設為等向性（Isotropic），計算其應變能密度  $U$  之變化。對於現象邏輯型者而言，此應變能密度  $U$  係由拉伸或應變所構成之不變量（Invariant）敘述[8]，即  $U$  將會隨著變形量的不同而改變。應變能密度  $U$  由兩部份組成，分為不可壓縮敘述項  $U_{\text{incomp}}$  與可壓縮敘述項  $U_{\text{comp}}$ ：

$$U = U_{\text{incomp}} + U_{\text{comp}} \quad (2.1)$$

因為本研究使用之聚醚型 TPU 之蒲松比極接近 0.5，所以將材料假設為不可壓縮，只針對應變能密度不可壓縮敘述項  $U_{\text{incomp}}$  做討論。

$U_{\text{incomp}}$  可用 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$  來表示，如下列式子所示[9]：

$$U_{\text{incomp}} = \sum_n^r \left[ \frac{A_n}{2n} \text{tr}(\mathbf{C}^n - \mathbf{I}) + \frac{B_n}{2n} \text{tr}(\mathbf{C}^{-n} - \mathbf{I}) \right] \quad (2.2)$$

其中  $A_n$  與  $B_n$  為常數，即超彈體材料模型之參數項。而 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$  又可由變形梯度  $\mathbf{F}$  計算得出[10]。將某物體內變形後鄰近兩點之距離寫為  $d\mathbf{x} = dx_m \overline{\mathbf{n}}_m$ ，而未變形物體內此二點之距離寫為  $d\mathbf{X} = dX_m \overline{\mathbf{e}}_m$ ， $\overline{\mathbf{e}}_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) 為互相垂直之單位向量，則存在變形梯度  $\mathbf{F}$  可使此物體中兩點之變形寫為：

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.3)$$

變形梯度  $\mathbf{F}$  可由下列定義式(2.4) 算出 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$ ：

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.4)$$

今假設一長度向量  $d\mathbf{S}^{(1)} = dS_1 \overline{\mathbf{e}}_1$  位於  $d\mathbf{X}$  互相垂直的單位向量其中之一上，代入式(2.3)經過變形梯度轉換後計算可得：

$$d\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{F} d\mathbf{S}^{(1)} \quad (2.5)$$

其中  $d\mathbf{s}^{(1)} = ds_1 \overline{\mathbf{n}}_1$ ， $\overline{\mathbf{n}}_1$  為  $\overline{\mathbf{e}}_1$  被變形梯度  $\mathbf{F}$  轉換後之向量。將  $d\mathbf{s}^{(1)}$  與  $d\mathbf{s}^{(i)}$  做內積計算並把式(2.4)代入，可得以下式子：

$$\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(i)} = \mathbf{F} \mathbf{dS}^{(1)} \cdot \mathbf{F} \mathbf{dS}^{(i)} \quad (2.6)$$

根據張量之移項定理（Transpose）變換式(2.5)右側可得：

$$\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(i)} = \mathbf{dS}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{dS}^{(i)} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(i)} = \mathbf{dS}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \mathbf{dS}^{(i)} \quad (2.8)$$

當  $\mathbf{ds}^{(i)} = \mathbf{ds}^{(1)}$  時，式(2.7)可展開成為下式：

$$ds_1 \overrightarrow{n_1} \cdot ds_1 \overrightarrow{n_1} = dS_1 \overrightarrow{e_1} \cdot \mathbf{C} dS_1 \overrightarrow{e_1} \quad (2.9)$$

$$(ds_1)^2 = (dS_1)^2 \overrightarrow{e_1} \cdot \mathbf{C} \overrightarrow{e_1} \quad (2.10)$$

根據張量基本運算原理  $\mathbf{C}_{pq} = \overrightarrow{e_p} \cdot \mathbf{C} \overrightarrow{e_q}$ ，所以式(2.9)可改寫為：

$$\left(\frac{ds_1}{dS_1}\right)^2 = \mathbf{C}_{11} \quad (2.11)$$

同理，根據  $\mathbf{dX}$  另外二個互相垂直之單位向量，再次依式(2.4)到(2.8)之步驟計算，則可得 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$  另外二對角元素  $\mathbf{C}_{22}$  以及  $\mathbf{C}_{33}$ ：

$$\left(\frac{ds_2}{dS_2}\right)^2 = \mathbf{C}_{22}, \quad \left(\frac{ds_3}{dS_3}\right)^2 = \mathbf{C}_{33} \quad (2.12)$$

若將式(2.7)中的  $\mathbf{ds}^{(i)}$  代換為  $\mathbf{ds}^{(2)} = ds_2 \overrightarrow{n_2}$ ，再次依式(2.8)到式(2.9)之步驟計算，可解得非對角元素  $\mathbf{C}_{12}$ （同理可得  $\mathbf{C}_{23}$  與  $\mathbf{C}_{31}$ ）：



$$\left(\frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2}\right) \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = C_{12} \quad (2.13)$$

在上式中  $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  代表向量  $\vec{n}_1$  與向量  $\vec{n}_2$  夾角之餘弦值，而又因為變形梯度  $\mathbf{F}$  本身可視為剛體旋轉張量  $\mathbf{R}$  與純拉伸張量  $\mathbf{T}$  之組合：

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{T} \quad (2.14)$$

其中剛體旋轉張量  $\mathbf{R}$  屬正交張量（意即正轉後再逆轉則物體空間位置不變），所以若將式(2.14)帶入式(2.3)則得 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$  由純拉伸張量  $\mathbf{T}$  所組成，因此在變形後之三向量  $\vec{n}_m$  ( $m=1,2,3$ ) 仍互相垂直之條件下，則式(2.10)到式(2.12)所推導計算之總和即為各主軸拉伸  $\lambda$  (Principle Stretch) 平方之總和，其與  $\mathbf{C}$  之關係亦可以下式表示：

$$\text{tr}(\mathbf{C}) = (\lambda_{mm})^2 = (\lambda_{11})^2 + (\lambda_{22})^2 + (\lambda_{33})^2 \quad (2.15)$$

因為  $\mathbf{C}$  為正定且對稱 (Positive Definite and Symmetric) 且變形方式為主軸拉伸，即代表不發生剪切拉伸 (Shear Stretch)，變形後三主軸仍互相垂直使得向量  $\vec{n}_m$  與向量  $\vec{n}_w$  ( $m \neq w$ ) 夾角之餘弦值  $\cos(\vec{n}_m, \vec{n}_w)$  為零，所以 Right Cauchy-Green 變形張量  $\mathbf{C}$  成為對角張量，非對角之元素皆為零，此時式(2.15)可擴展寫為：

$$Q_n = \text{tr}(\mathbf{C}^n) = (\lambda_{mm})^{2n} = (\lambda_{11})^{2n} + (\lambda_{22})^{2n} + (\lambda_{33})^{2n} \quad (2.16)$$

$$Q_{-n} = \text{tr}(\mathbf{C}^{-n}) = (\lambda_{mm})^{-2n} = (\lambda_{11})^{-2n} + (\lambda_{22})^{-2n} + (\lambda_{33})^{-2n} \quad (2.17)$$

$Q_n$  與  $Q_{-n}$  即為主軸拉伸所構成之不變量，可用來描述應變能密度。將上述二不變量代回式(2.1)之中，即可將應變能密度不可壓縮項  $U_{\text{incomp}}$  寫為下式：



$$U_{\text{incomp}} = \sum_n \left\{ \frac{A_n}{2n} [(\lambda_{\text{mm}})^{2n} - 3] + \frac{B_n}{2n} [(\lambda_{\text{mm}})^{-2n} - 3] \right\} \quad (2.18)$$

由式(2.18)之架構來看，對於只考慮不可壓縮項之等向性材料而言，其應變能密度之方程式滿足 Valanis-Landel 假說[7]，意即能夠用三組分別獨立之主軸拉伸  $\lambda_{(ii)}$  以各別區分但相同架構之加總來呈現 ( $\lambda_{(ii)}$  右下角被括號之標號為單純做 Free Index 而非 Dummy Index)。

應變能密度  $U$  之變化量在物理上可用來描述體積變化為  $dV$  之物體，其內部功  $W$  之變化量，如下列式子所示：

$$\delta(U)dV = \delta W \quad (2.19)$$

而物體內之應力與體積變化項  $dV$  同時亦可用來描述物體內部功  $W$  之變化量，所以根據虛功原理的推導計算[9]，應變能密度  $U$  對於主軸拉伸  $\lambda_{(ii)}$  做偏微分可得 Lagrangian 主軸應力項  $\sigma_{(ii)}$ ，即實驗中之工程應力 (Engineering Stress)。對於本研究之材料假設為不可壓縮之條件下，應變能密度  $U$  即可用不可壓縮項  $U_{\text{incomp}}$  來代表，如下式所示：

$$\sigma_{(ii)} = \frac{\partial U}{\partial \lambda_{(ii)}} = \frac{\partial U_{\text{incomp}}}{\partial \lambda_{(ii)}} \quad (2.20)$$

所以，式(2.20)對應變能密度不可壓縮敘述項  $U_{\text{incomp}}$  偏微分後，可由原本式 (2.2) 中之參數項  $A_n$  與  $B_n$  決定超彈體模型中之應力應變曲線。與簡易拉力實驗、平面剪力實驗與雙軸拉力實驗所量得之應力應變數據比對，則可計算參數項  $A_n$  與  $B_n$  之數值以產生最近似之應力應變曲線，一般以最小平方誤差法比對與實際實驗數據之誤差以計算最合適之參數項  $A_n$  與  $B_n$ 。

### 2.1.2 非線性材料模型之有限元素模擬軟體

現今大部份商用之有限元素分析軟體都具有計算超彈體非線性材料模型的功能，然而，為了在非線性材料模型、變動之邊界條件與大變形的情況下能夠有良好的計算結果，本研究選擇 MSC.Software 公司針對橡膠類非線性材料所開發的非線性有限元素分析軟體 MSC.Marc，版本為 2007 r1。

MSC.Marc 於 1971 年正式釋出到市面上，是世界上第一款針對非線性問題之商用有限元素模擬軟體[11]，其求解器能進行眾多類型模擬並具備極強的結構分析能力，除了可以處理非線性材料模型外，亦可處理非線性大變形與包含接觸在內之非線性邊界條件。其軟體內部主要分為 MENTAT 與 Marc 兩大部份，MENTAT 係屬前／後處理器，為圖形對話界面；後者 Marc 係屬求解器，具有高度數值穩定性、高精度與快速收斂之求解技術。

本研究選用的 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型，在 MSC.Marc 中至少需要以下三項材料實驗數據才可算出足夠合理之材料參數：簡易拉力實驗、平面剪力實驗與雙軸拉力實驗。本研究即以此三項實驗數據需求為準則，進行後續章節之實驗規劃建立工作；而在完成材料模型建立之後，再以非線性靜態分析與動態響應分析為主，進行材料實驗與氣墊吸震試驗之有限元素模擬。

## 2.2 單軸向實驗理論

簡易拉力實驗與平面剪力實驗都屬於單軸向實驗，其差異處在於簡易拉力實驗所使用之試片規格長寬比例要求在 10:1 以上，平面剪力實驗所使用之試片規格長寬比例要求在 1:10 以上。簡易拉力實驗與平面剪力實驗示意簡圖如圖 2.1， $\lambda_x$ 、 $\lambda_y$  與  $\lambda_z$  分別為三互相垂直方向之拉伸。

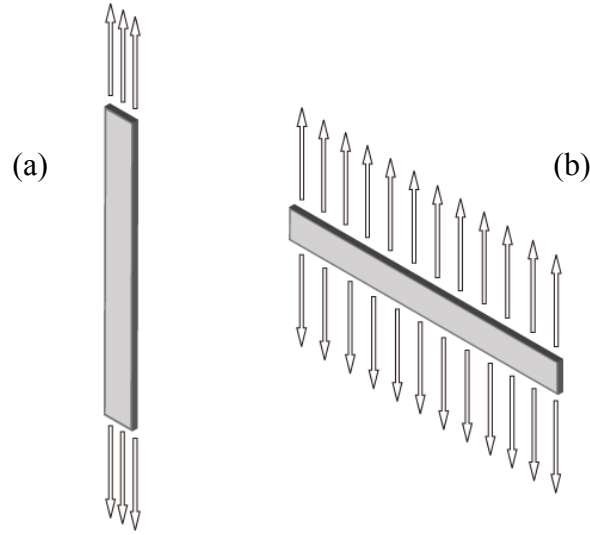


圖 2.1 (a)簡易拉力實驗(b)平面剪力實驗

令  $\lambda_y$  之方向為實驗拉伸方向，簡易拉力實驗之應力  $\sigma$  如式(2.21)所示：

$$\sigma_x = \sigma_z = 0, \sigma_y = \frac{P}{A_0} \quad (2.21)$$

$P$  為軸向拉伸力， $A_0$  為變形前之試片截面積。又假設所實驗之材料為等向性與不可壓縮，即  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ ，又簡易拉力實驗在試片變形後之拉伸方向不改變，可將其視為主軸拉伸，則簡易拉力實驗之拉伸狀態可用下列式子表示：

$$\lambda_x = \lambda_{11} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_T}} \quad (2.22)$$

$$\lambda_y = \lambda_{22} = \lambda_T \quad (2.23)$$

$$\lambda_z = \lambda_{33} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_T}} \quad (2.24)$$

$\lambda_T$  為簡易拉力實驗之等效拉伸，將式(2.22)到式(2.24)中之計算結果代回式(2.18)，使應變能密度不可壓縮項  $U_{\text{incomp}}$  由簡易拉力實驗之等效拉伸  $\lambda_T$  表示，再經式(2.20)之計算對等效拉伸  $\lambda_T$  偏微分，便得到與簡易拉力實驗相對應之等效應力式，可與實際簡易拉伸

實驗之應力應變數據做比對以決定參數項  $A_n$  與  $B_n$ 。

令  $\lambda_y$  之方向為實驗拉伸方向， $\lambda_x$  之方向為試片寬度方向，平面剪力實驗之應力  $\sigma$  如式 (2.25) 所示：

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \frac{P}{A_0}, \sigma_z = 0 \quad (2.25)$$

$P$  為軸向拉伸力， $A_0$  為變形前之試片截面積。又假設所實驗之材料為等向性與不可壓縮，即  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ ，且平面剪力實驗在  $x$  軸上之應變值極小可將拉伸視為 1，又試片變形後之拉伸方向不變可視為主軸拉伸，因此平面剪力實驗之拉伸狀態可用下列式子表示：

$$\lambda_x = \lambda_{11} = 1 \quad (2.26)$$

$$\lambda_y = \lambda_{22} = \lambda_p \quad (2.27)$$

$$\lambda_z = \lambda_{33} = \frac{1}{\lambda_p} \quad (2.28)$$

$\lambda_p$  為平面剪力實驗之等效拉伸，將式(2.26)到式(2.28)中之計算結果代回式(2.18)，使應變能密度不可壓縮項  $U_{\text{incomp}}$  由平面剪力實驗之等效拉伸  $\lambda_p$  表示，再經式(2.20)之計算對等效拉伸  $\lambda_p$  偏微分，便得到與平面剪力實驗相對應之等效應力式，可與實際平面剪力實驗之應力應變數據做比對以決定參數項  $A_n$  與  $B_n$ 。

### 2.3 雙軸向實驗理論

雙軸向實驗與單軸向實驗最大的差異處，在於其受力平面上主軸應力有無限多組，意即在雙軸向實驗中受力平面上不存在剪應力，由 Mohr Stress Circle 的圖形來看該平面

之受力狀況在主應力軸上縮為一點。正式雙軸拉力實驗需求的夾具設備特殊，製作不易且很難尋得可借用之對象。針對這個情況，本研究設計一液壓膨脹實驗取得等效之雙軸向實驗應力與應變，因此本節除了對一般雙軸拉力實驗理論做敘述外，也對液壓膨脹實驗理論做簡便的介紹，液壓膨脹實驗應力應變式之詳細推導請見附錄 C。

### 2.3.1 雙軸拉力實驗理論

一般而言，雙軸拉力實驗所用的試片有圓形與正方形兩種，雖然試片外型不同，但除了截面積之算法外，所使用之應力與應變計算式皆相同[11]。本小節說明對象以原始之直徑、厚度與變形前周緣截面積分別為  $D_0$ 、 $t_0$  與  $A_0$  的圓形試片為敘述對象，其示意簡圖如圖 2.2 所示。

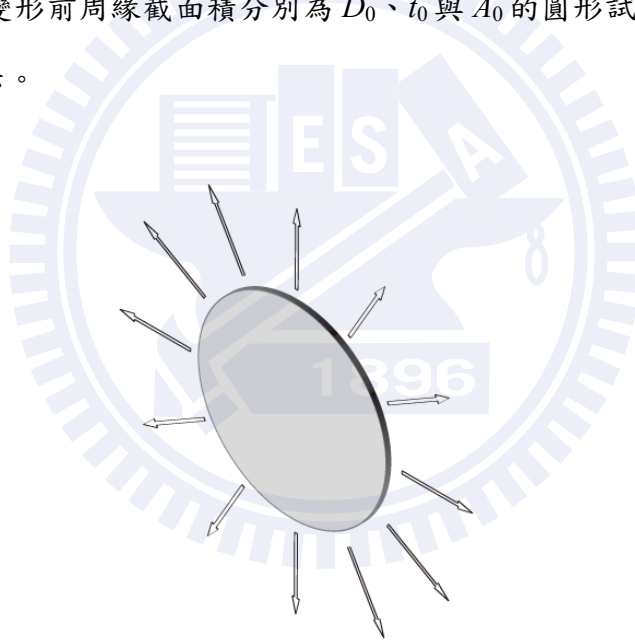


圖 2.2 雙軸拉力實驗

令  $\lambda_y$  與  $\lambda_x$  之方向構成受力平面，雙軸拉力實驗之應力狀態如式(2.29)所示：

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{P}{A_0}, A_0 = \pi D_0 t_0, \sigma_z = 0 \quad (2.29)$$

$P$  為施在試片周圍之拉伸總力，又假設所實驗之材料為不可壓縮，即  $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ ，且雙軸拉

力實驗在受力平面上各軸向受力相同而有無限多組主軸應力，此平面上任意方向拉伸可視為主軸拉伸，其拉伸狀態可用下列式子表示：

$$\lambda_x = \lambda_{11} = \lambda_B \quad (2.30)$$

$$\lambda_y = \lambda_{22} = \lambda_B \quad (2.31)$$

$$\lambda_z = \lambda_{33} = \frac{1}{(\lambda_B)^2} \quad (2.32)$$

$\lambda_B$  為雙軸拉力實驗之等效拉伸，將式(2.26)到式(2.28)中之計算結果代回式(2.18)，使應變能密度不可壓縮項  $U_{incomp}$  由雙軸拉力實驗之等效拉伸  $\lambda_p$  表示，再經式(2.20)之計算對等效拉伸  $\lambda_B$  偏微分，便得到與雙軸拉力實驗相對應之等效應力式，可與實際雙軸拉力實驗之應力應變數據做比對以決定參數項  $A_n$  與  $B_n$ 。

### 2.3.2 液壓膨脹實驗理論

液壓膨脹實驗係為採用油體液壓進行之膨脹實驗（Bulging Test），經由對薄膜施加均勻液壓，量得液體壓力值與薄膜膨脹高度，以方程式將原本數據由壓力單位與長度單位轉換成應力與應變。此種實驗方法於 1959 年首度由 J. W. Beams 提出[12]，其可用來測定薄膜之彈／塑性與時間依存性（Time Dependency）等機械性質，被廣泛地應用在薄膜之材料性質檢測。

液壓膨脹實驗基礎理論係建立在當薄膜承受一均勻分布之側向液壓時，其變形狀況近似於球體，故可將其視為一球殼並用數學式將液體壓力與薄膜膨脹高度換算為應力與應變。其示意簡圖如圖 2.3 所示，P 為內部液壓，R 為薄膜近似球體膨脹之半徑。

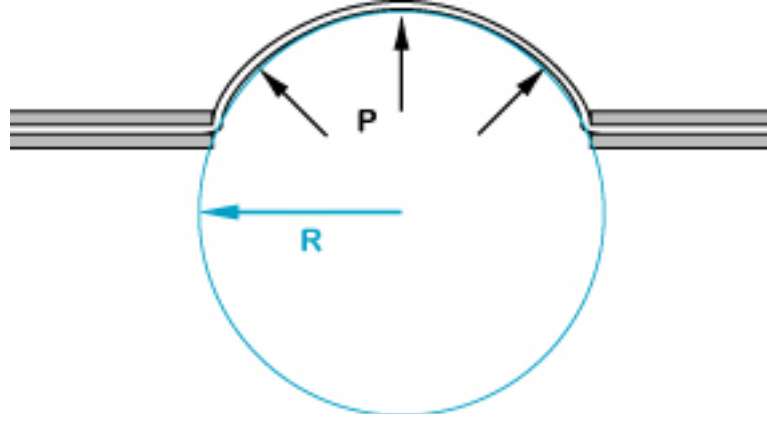


圖 2.3 液壓膨脹實驗示意簡圖

液壓膨脹實驗之應力  $\sigma_b$  如式(2.33)所示，但應變須分為兩個階段計算：第一階段為薄膜膨脹高度  $h$  小於初始平面圓半徑  $R_0$ ，第二階段為薄膜膨脹高度  $h$  大於初始平面圓半徑  $R_0$ ，上述兩個階段之應變分別以  $\varepsilon_{b1}$  與  $\varepsilon_{b2}$  表示，假設在實驗過程中皆以近似球體之狀態進行膨脹，則可寫為式(2.34)與式(2.35)：

$$\sigma_b = \frac{P(h^2 + R_0^2)}{4ht_0} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{b1} = \frac{\left\{ \left[ \frac{(h^2 + R_0^2)}{2h} \right] \left[ \sin^{-1} \left( \frac{2hR_0}{h^2 + R_0^2} \right) \right] - R_0 \right\}}{R_0} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{b2} = \frac{\left\{ \left[ \frac{\pi(h^2 + R_0^2)}{4h} \right] + \left[ \frac{(h^2 + R_0^2)}{2h} \cdot \cos^{-1} \left( \frac{2hR_0}{h^2 + R_0^2} \right) \right] - R_0 \right\}}{R_0} \quad (2.35)$$

$P$  為液壓膨脹壓力， $R_0$  為初始平面圓半徑， $t_0$  為試片初始厚度， $h$  為試片膨脹高度，以上算式為假設試片在膨脹高度大時其變形狀況仍近似球體，詳細推導請見附錄 C。



## 2.4 簡易拉力實驗與平面剪力實驗

簡易拉力實驗與平面剪力實驗都屬於單軸向實驗，在實驗設備與規劃上皆有很高之相似性，因此本研究將兩個實驗歸在同一節做介紹。在材料實驗中，以簡易拉力實驗最為普及，同時也有正式之實驗規範，本研究之簡易拉力實驗係參考 ASTM (American Society for Testing Material, 美國材料與試驗協會) 實驗規範 D638 所建立，ASTM 實驗規範 D638 係針對塑膠材料所建立之標準實驗規範。而平面剪力雖無正式規範，但與簡易拉力實驗有很高之相似性，因此同樣係參考 ASTM 實驗規範 D638 建立。

### 2.4.1 實驗規劃

簡易拉力實驗與平面剪力實驗之試片規格如圖 2.4 與圖 2.5 所示，簡易拉力實驗之試片規格係參考 ASTM 實驗規範 D638 中第四型非剛性體 (Type IV, Nonrigid Plastic) 之試片規格，平面剪力實驗因夾具尺寸限制故設計為簡單之矩形試片。高分子材料因為屬低強度之材料，正式實驗時應使用非接觸式測量系統如光學測位儀，量測試片之量規區段 (Gage Length) 變化情況。但因此類器材成本偏高並且準備不易，而本研究之重點主要目的為建立整體性之流程，在考慮到成本問題與研究目的之情況下，本研究在簡易拉力實驗與平面剪力實驗中之拉伸位移數據以夾鉗間距 (Grip Length) 為依據。

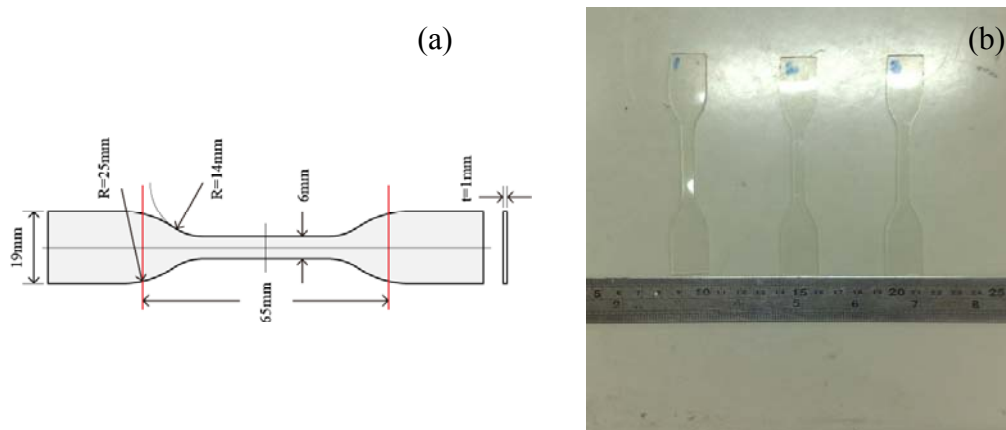


圖 2.4 (a)簡易拉力試片規格(b)簡易拉力實際試片



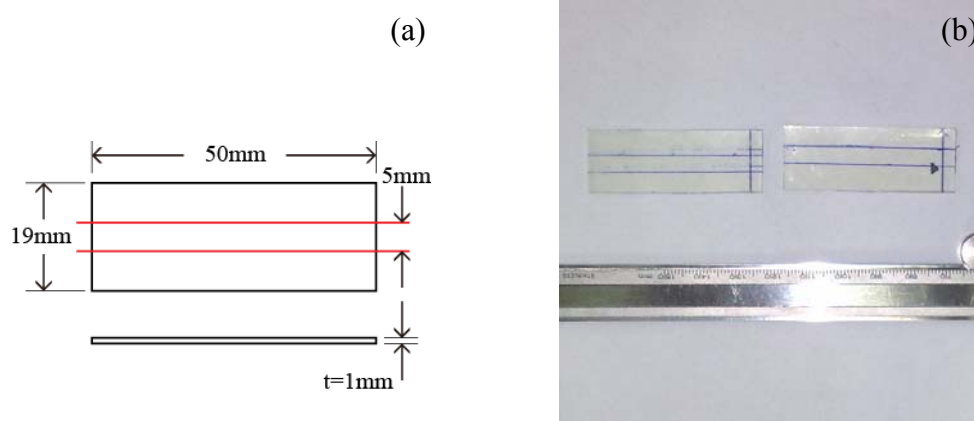


圖 2.5 (a)平面剪力試片規格(b)平面剪力實際試片

簡易拉力與平面剪力之實驗邊界條件皆採用等應變率拉，實驗所設定之主要參數有施力精度、位移精度、拉伸應變率、總應變量與操作環境，如表 2.1 所示。

表 2.1 簡易拉力與平面剪力主要之實驗參數

	簡易拉力實驗	平面剪力實驗
施力精度	解析度 0.2 N	解析度 1.5 N
位移精度	最小解析度 0.01 mm	最小解析度 0.01 mm
拉伸應變率	每分鐘增加 1.0	每分鐘增加 1.0
總應變量	達 3.0 時停止實驗	達 3.0 時停止實驗
操作環境	$23\pm 3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ， $50\pm 5\%$ 相對溼度	$23\pm 3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ， $50\pm 5\%$ 相對溼度

#### 2.4.2 實驗設備

實驗設備之實際實驗情況如圖 2.6 所示，其中平面剪力實驗在夾具另外內置墊片，以提升夾具鎖附力減輕試片滑移問題。此微拉伸實驗機台為台灣弘達儀器公司所設計整合，型號 HT-9102，使用之荷重元(Load Cell)為日本 NMB 所生產，分為型號 U3B1-20K-B 之 20 kg 荷重元，與本研究使用型號 U3B1-20K-B 之 200 kg 荷重元。

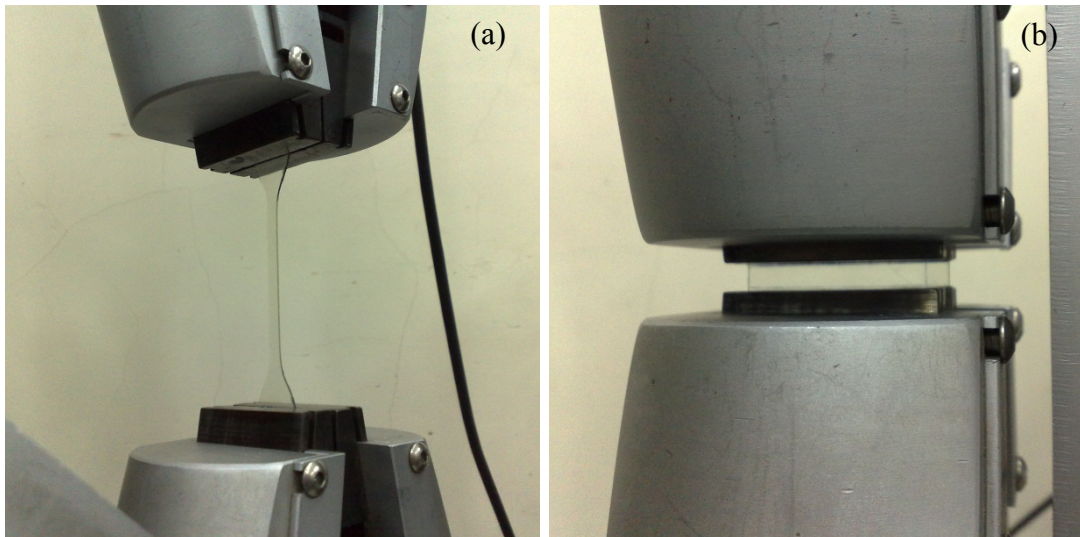


圖 2.6 (a)簡易拉力實驗(b)平面剪力實驗

### 2.4.3 實驗結果

在 MSC.Marc 軟體中，針對建立超彈體模型所需要輸入之實驗數據為工程應力（Engineering Stress）與工程應變（Engineering Strain）的材料曲線，因此本研究實驗結果以應力與應變曲線表示之。根據鞋氣墊實際在進行吸震試驗時所估計之變形量，輸入有限元素分析材料模型之數據以前段應變值小於 1.5 之區段為主。簡易拉力與平面剪力之實驗結果如圖 2.7 所示，為從五次實驗數據取出三次差異最小者，圖中包含簡易拉力與平面剪力差異最小之三次實驗數據。

然而需要注意的是，簡易拉力與平面剪力實驗進行時，在試片與夾鉗間會發生些許滑移之現象，滑移情況又以平面剪力較為明顯，因此所測出之實驗結果之材料強度應略低於實際之材料強度。

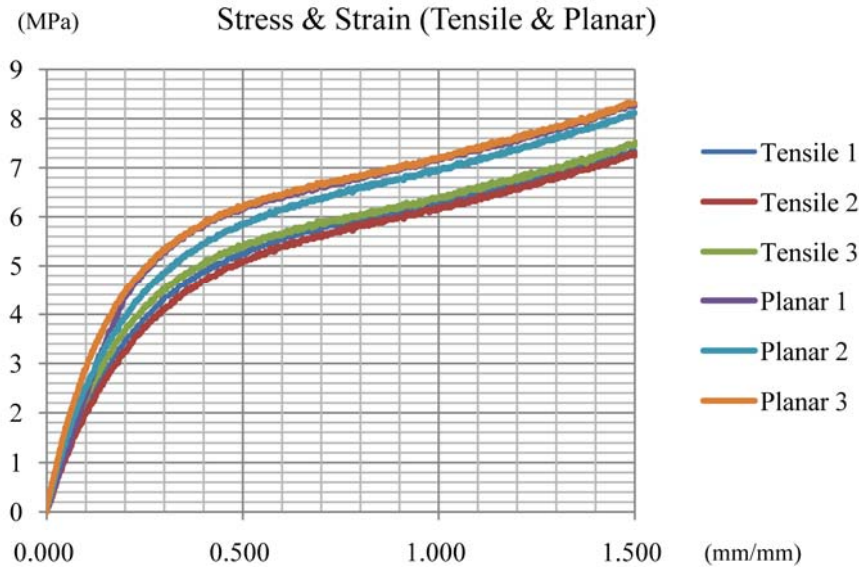


圖 2.7 簡易拉力實驗結果與平面剪力實驗結果

## 2.5 液壓膨脹實驗

與一般之雙軸拉力實驗比起來，液壓膨脹實驗有兩項優勢：較低之整體建立成本，同時所使用之機具結構亦較為簡便，各種操作如對心校準等皆較易進行；以及實驗中摩擦力的影響極小，取得之材料性質將會更準確。因此，本研究選擇自行設計建立液壓膨脹實驗取得等效雙軸應力應變數據。雖然目前液壓膨脹實驗並無可參考之實驗規範，但本研究仍以 ASTM 實驗規範 D638 為基礎，對液壓膨脹實驗參數做合理之設定。

液壓膨脹實驗之整體架構概念如圖 2.8 所示，包含了夾具系統、液壓系統與閉迴路控制系統之設計。夾具系統為實驗所使用之支架座，除試片座可固定試片與構成壓力腔外，亦有支架組件固定試片座與位移量測系統，可對位移量測系統之中心點定位做微調整以修正準確性。液壓系統包含了動力源油壓馬達與比例洩壓閥之設置等，主要係針對實驗所需之油路概念做設計，如油路系統所需之配管規格或油路壓力限制之設定等。閉迴路控制系統分為硬體與軟體部份，硬體部份係用於量測並產生類比訊號轉換為數位訊號或是用以控制油路動作；軟體部份則為將轉換後的數位訊號重新整理成合理的資料，

並透過即時應變式換算，決定控制油路動作該有輸出電壓值。

本研究簡略之液壓膨脹實驗建立流程介紹如圖 2.9 所示，步驟依箭頭方向順序進行。在動作概念確定之部份中，分別針對實驗之支架座各部件之相對位置、液壓系統油路需求與閉迴路控制系統的運算邏輯做討論；接著將實驗會使用到的各種數值做計算以求得所需之規格列表，如支架座合適的尺寸、液壓系統配管最高壓限或是閉迴路控制系統輸出電流訊號所需串接之電阻等；規格列表建立完後，根據其所記載的限制，分別對各系統作正式之設計，如夾具系統之正式三視圖，液壓系統之管線配接與閉迴路控制系統之軟體編寫等；再將各設計完成之系統群作整合，進行實驗測試與各系統細節修正；最後液壓膨脹實驗系統建立完成，進行正式液壓膨脹實驗取得材料數據。

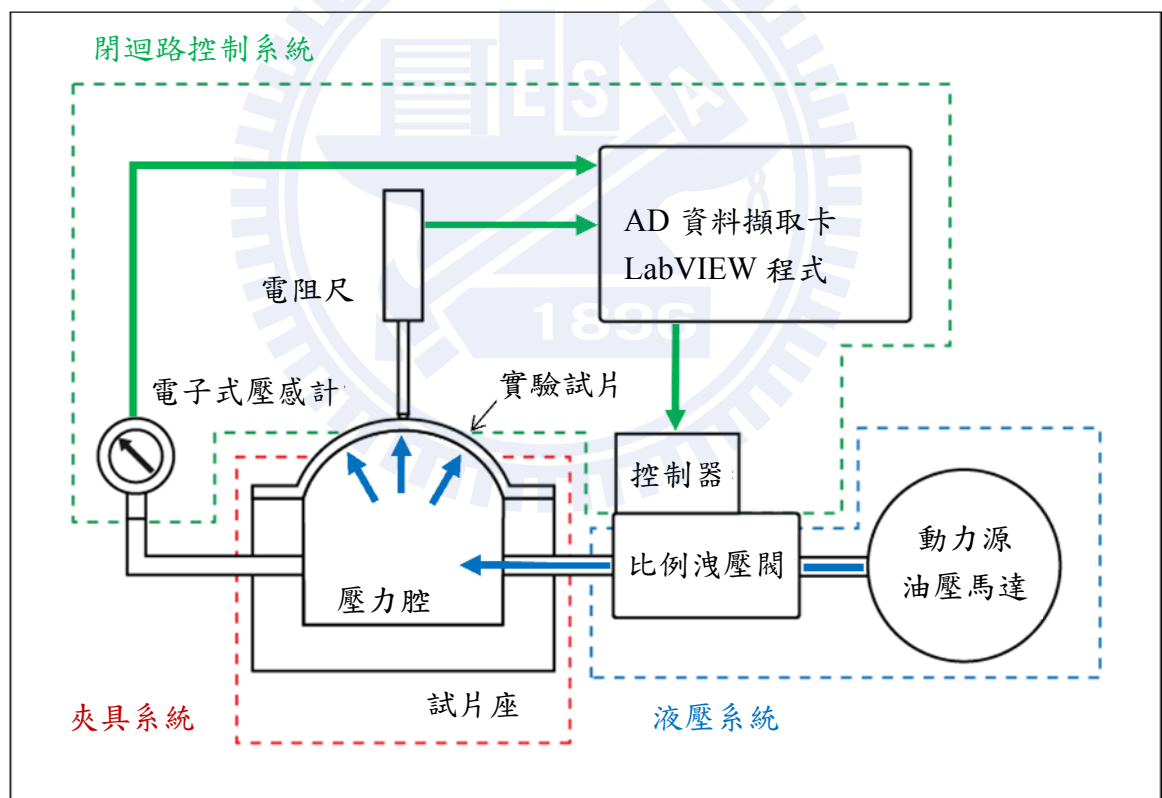


圖 2.8 液壓膨脹實驗整體架構概念

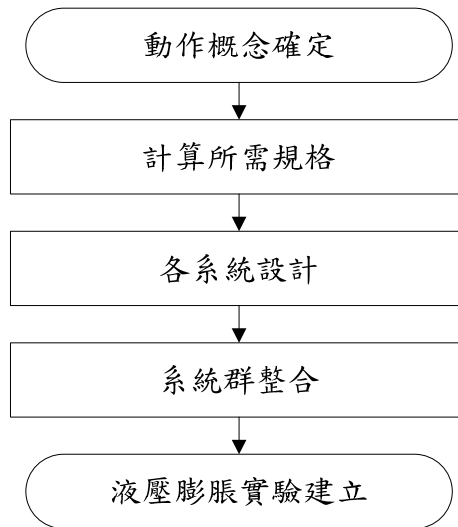


圖 2.9 液壓膨脹實驗建立流程

### 2.5.1 實驗規劃

液壓膨脹實驗試片規格如圖 2.10(a)所示，紅色圈為作用範圍，圖 2.10(b)中實際試片上所劃之線為標記中心用，以利位移測量設備之定位微調修正準確性。液壓膨脹實驗與前節之實驗相同，因材料性質之原因，最好採用非接觸式之測量設備，然而在同樣的成本與研究目的考量下，液壓膨脹實驗便選擇電阻尺作為位移量測設備。

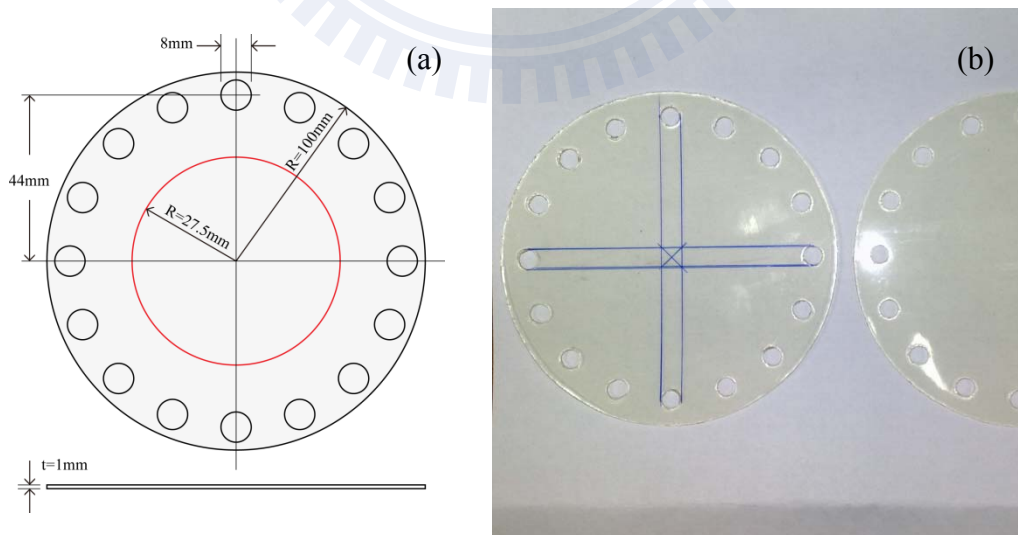


圖 2.10 (a)液壓膨脹試片規格(b)液壓膨脹實際試片



液壓膨脹實驗之各項實驗參數包含了壓力精度、位移精度、拉伸應變率、總應變量與操作環境。與參照 ASTM 實驗規範 D638 的簡易拉力及平面剪力不同，液壓膨脹採用壓力精度量測，係因對應其施力端為油體液壓；參數中之位移精度係指電阻尺所量得之膨脹高度，而應變之比照對象為採用式(2.34)與式(2.35)由原始試片半徑與膨脹高度所換算出之等效應變，實驗參數如表 2.2 所示：

表 2.2 液壓膨脹主要之實驗參數

	液壓膨脹實驗
壓力精度	解析度 0.002MPa
位移精度	最小解析度 0.01mm
拉伸應變率	每分鐘增加 1.0
總應變量	達 3.0 時停止實驗
操作環境	23±3°C，50±5%相對溼度

液壓膨脹實驗建立完後，標準之實驗作業流程分成三階段，即為初始階段、動作階段與結束階段，流程規劃如圖 2.11 所示：

- (1) 在實驗初始階段，以夾具系統固定試片，校準電阻尺指向試片中心點。
- (2) 啟動油壓馬達使液壓系統開始空轉。
- (3) 開啟可程控電源供應器重設比例洩壓閥控制器，使比例洩壓閥關閉。
- (4) 切換油壓馬達三向閥使液壓系統之油體開始流動。
- (5) 實驗進入動作階段，啟動閉迴路控制系統。
- (6) 電子式壓感計與電阻尺透過放大器傳送類比訊號至 AD 資料擷取卡。
- (7) AD 資料擷取卡將類比資料轉換為數位資料。
- (8) 透過程式內部已編寫好之方程式，計算壓力與應變式。
- (9) 判斷是否超過膨脹高度限制，同時將量測所得資料寫入數據列檔案。

- (10) 未超過膨脹高度限制，則繼續判斷應變率是否超過標準。
- (11) 根據上述判斷結果，透過可程控電源供應器調整比例洩壓閥控制器電壓。
- (12) 當試片膨脹達到閉迴路控制系統設定之最大高度時動作階段結束。
- (13) 實驗進入結束階段，提升比例洩壓閥控制器之電壓以關閉比例洩壓閥。
- (14) 切換三向閥使油壓馬達恢復空轉狀態後關閉油壓馬達運作。
- (15) 開啟油管末端之停止閥使油體回流油槽。
- (16) 關閉可程控電源供應器，使其內部記憶體資料清除重設。
- (17) 待已成球體之試片洩壓完畢，移除試片後實驗完成。



圖 2.11 標準之實驗作業流程規劃

## 2.5.2 實驗設備

實驗設備之實際實驗情況如圖 2.12 所示，實驗之主要部件位於圖(a)中右下方，圖(a)中左側則為電腦控制端與 LabVIEW 軟體之前端控制板面 (Front Panel)，而圖(b)為實際實驗之膨脹狀況，膨脹高度約 30mm，圖(c)與圖(d)為膨脹高度之對照圖。

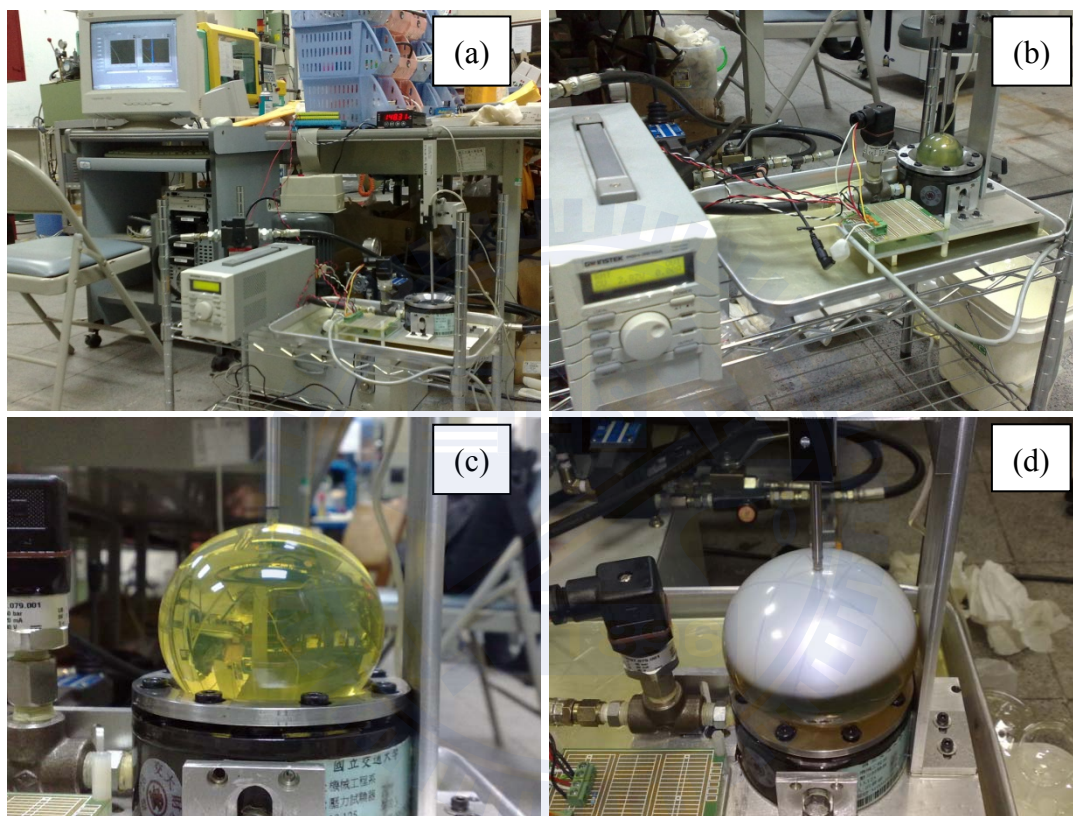


圖 2.12 (a)液壓膨脹實驗設備(b)實際實驗之膨脹狀況  
(c)膨脹高度約 50 公厘(d)膨脹高度達 70 公厘

液壓膨脹實驗由夾具系統、液壓系統與閉迴路控制系統構成，此三組系統中各部件彼此間作用關係如圖 2.13 所示，圖中關係線之起點端連接作用者，箭頭端連接被作用者，又關係線根據種類不同分空間幾何關係、油路關係與電系關係。實際在進行實驗各系統設計階段中，依順序對夾具系統、液壓系統與閉迴路控制系統做設計；當三組系統主幹完成後將其整合，再針對整合後的系統群作修正。本小節後續將分三個部份，依照實際實驗設計建立的順序介紹夾具系統、液壓系統與閉迴路控制系統之設備相關資訊。



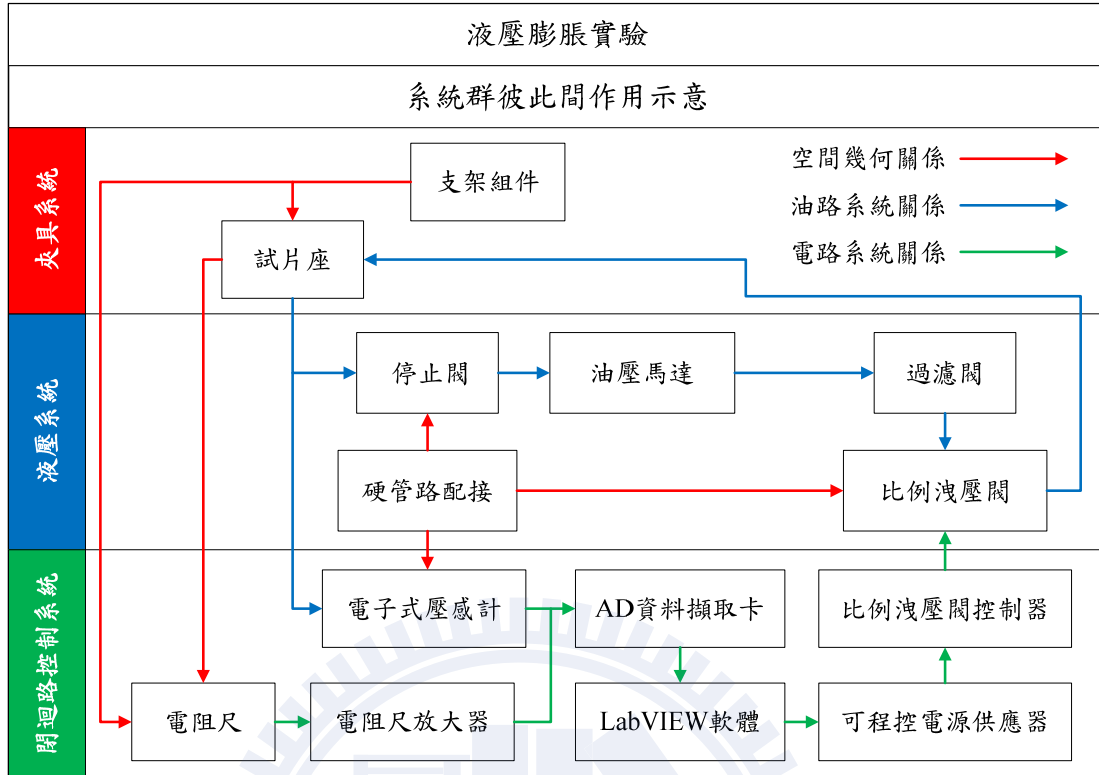


圖 2.13 系統群彼此間作用示意

### 2.5.2.1 夾具系統

夾具系統為用來固定液壓膨脹實驗中各部件之空間幾何關係，夾具系統主要分為三部分，支架部件、總底座部件與試片座部件。支架部件可分為三組，即電阻尺支架組件、試片座支架組件與電路板支架組件，其中電路板支架組件為固定配電用之簡易電路板；總底座部件為固定所有組件相關位置之基座；試片座部件係用來固定試片，並使試片與油體接觸面之周緣密封，進而建構出液壓膨脹實驗進行時可提供均勻液壓之壓力腔。試片之固定方式係為先以試片上八個位置對稱之孔洞來定位試片，再由八根位置對稱之螺絲穿過剩餘之孔洞，均勻施力鎖附使試片底下油體密封產生壓力腔。夾具系統實際成品如圖 2.14 所示，詳細尺寸規格請見附錄 D。

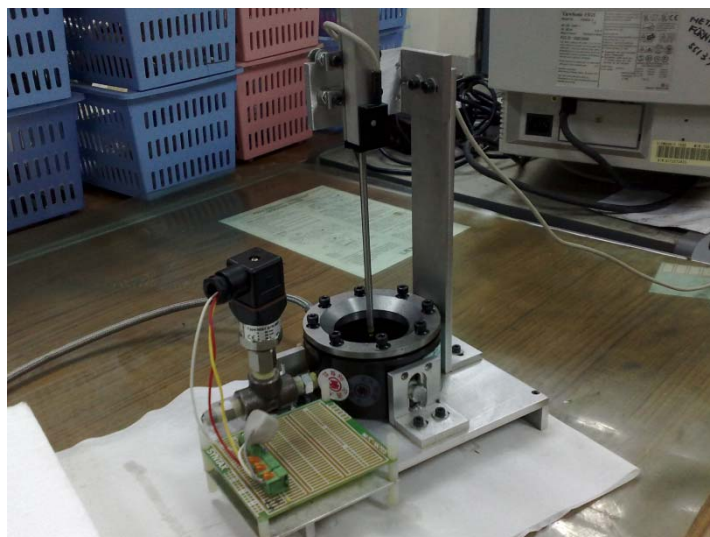


圖 2.14 夾具系統實際成品加上電阻尺與電路板

#### 2.5.2.2 液壓系統

液壓系統為液壓膨脹實驗之動力源，通過油壓馬達組件輸出壓力完成使試片膨脹之目的。液壓系統總共分為六部件，為油壓馬達、比例洩壓閥、可變節流閥、停止閥、過濾器與配接之硬／軟管，油路設計示意如圖 2.15 所示。

本研究液壓系統所使用之油壓馬達為所生產組件分成四部份，電動馬達、油壓幫浦、儲油槽與手動式三向閥開關，而輸出液壓之流體媒介為中國石油公司出品的特級循環機油 CPC-R68；比例洩壓閥為美國 HydraForce 製造，最大輸入壓力為 34.5 bar，控制電壓為 0 到 12 V，其高頻脈動頻率達 250Hz，本研究用來控制油路流量；可變節流閥為配合比例洩壓閥使用，施加一油路流通負載，使比例洩壓閥具備控制流量之能力；停止閥為配接於管路最末端，在實驗初始階段為關閉狀態，當實驗進入結束階段時將其開啟以洩掉膨脹試片內之流體；過濾器為用於濾清雜質，確保油體及油路之品質；整體油壓系統的流體主要靠配接軟管接通，而部份與油路相關又必須固定之部件則以配接硬管接通，如比例洩壓閥或電子式壓感計。

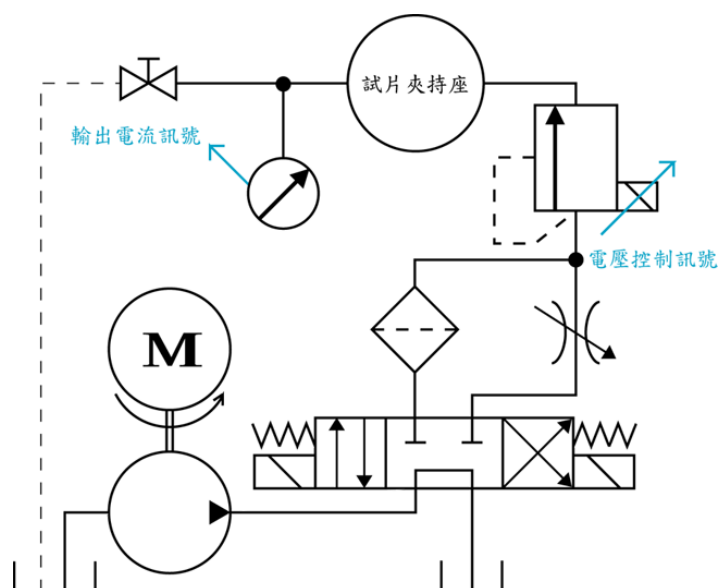


圖 2.15 油路設計示意圖

### 2.5.2.3 閉回路控制系統

閉迴路控制系統為控制液壓膨脹實驗進行與記錄數據之主幹，閉迴路控制系統分為硬體部份與軟體部份。硬體部份包含 AD 資料擷取卡、電阻尺、電阻尺放大器、電子式壓感計、可程控電源供應器與比例洩壓閥控制器；軟體的部分則以 LabVIEW 規劃實驗程式，自行編寫之液壓膨脹實驗程式可為 AD 端輸入、異常峰值過濾、應力與應變式換算、判斷控制、DA 端輸出與數據文件編列等模組。

閉迴路控制系統硬體部份中，AD 資料擷取卡為美國 NI 公司所生產，型號 6024E，可識別之類比訊號為電壓訊號，範圍為 0 到 10 V，取樣速率達 200 kS/s。電阻尺為台灣 MyTech 公司製造，型號 RP-TR-100，有效行程 100 mm，精度達 0.01 mm，並透過電阻尺放大器產生可識別之電壓訊號。電子式壓感為德國 TECSIS 所生產，型號 3296，壓力容許範圍為 0 到 40 bar，精度達 0.002 MPa，透過壓力量測產生 4 到 20 mA 之電流訊號，本研究將其跨過一顆 490  $\Omega$  之精密電阻產生可識別之電壓訊號。可程控電源供應器為台灣固緯電子所生產，型號 PSH-3610A，與電腦間通訊介面為 RS232，輸出電壓範圍 0 到

36 V，精度可達 0.005 V。比例洩壓閥控制器為瑞士 WANDFLUH 所生產，型號 P02A012410，輸入電壓範圍 0 到 10 V，高頻脈動頻率調整範圍 60 到 250 Hz。

閉迴路控系統軟體部份中，以 LabVIEW 為基礎系統規劃實驗程式，用視覺化之線路圖介面來進程式設計，閉迴路控制系統之前端控制板面（Front Panel）如圖 2.16 所示，閉迴路控制系統之功能塊圖（Block Diagram）如圖 2.17 所示，其中所編寫之各模組可分為以下部份簡介：

- （1）AD 端輸入模組：啟動 AD 資料擷取卡之軟體媒介，將外界之類比訊號轉讀入後換為數位訊號，可設定每秒讀取資料數速率。
- （2）異常峰值過濾模組：可設定數值容許震盪範圍，以除去讀入資料中範圍震盪過大的數據，同時也具備將過濾完成之資料重新分組平均的能力（如處理後每秒兩百組數據分組平均為每秒十組數據）。
- （3）應力與應變式換算模組：主要由方程式功能塊組成，可將整理完後之電壓數據換算成壓力與高度，當算出高度超過限制值時停止實驗，再根據膨脹原理式(2.33)到式(2.35)換算出等效雙軸應力與雙軸應變值。
- （4）判斷控制模組：所使用之控制原理為微分控制，依據所量得並換算後之數據資料，判斷所控制之液壓系統中比例洩壓閥是否升或降流量，再將可程控電源供應器應調整的電壓值傳送到 DA 端輸出模組。
- （5）DA 端輸出模組：啟動可程控電源供應器之軟體媒介，透過 RS232 傳輸介面改變可程控電源供應器之輸出電壓，而被輸入電壓端之比例洩壓閥控制器，便根據輸入電壓大小來調整比例洩壓閥之流量。
- （6）數據文件編列模組：將資料寫入文件檔案之用，本研究預設輸出之檔案類型為純文字（.txt）之數據列檔案。

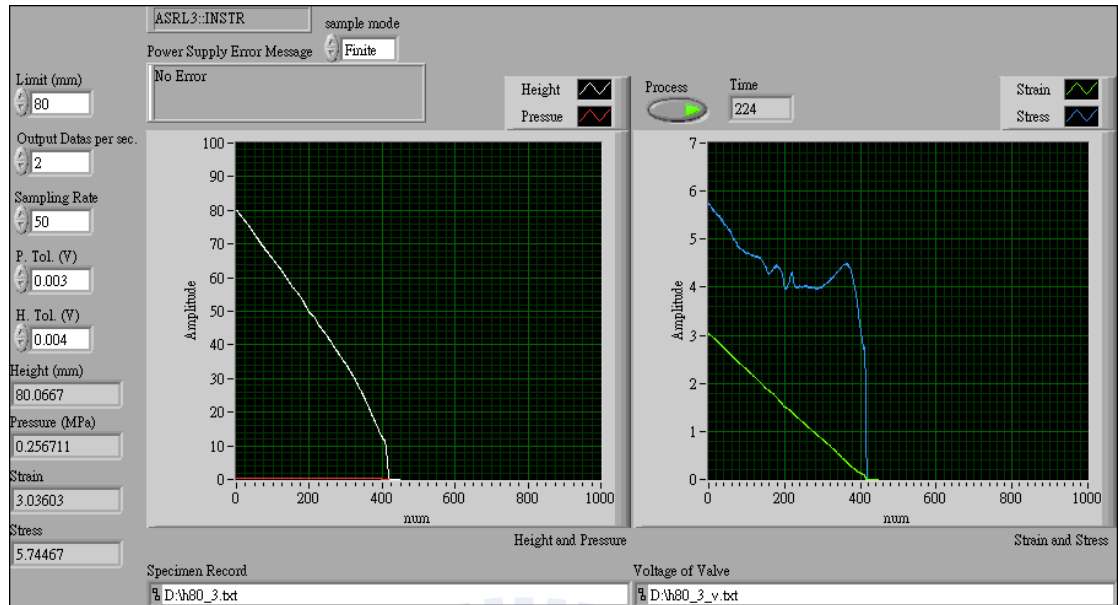


圖 2.16 閉迴路控制系統之前端控制面板

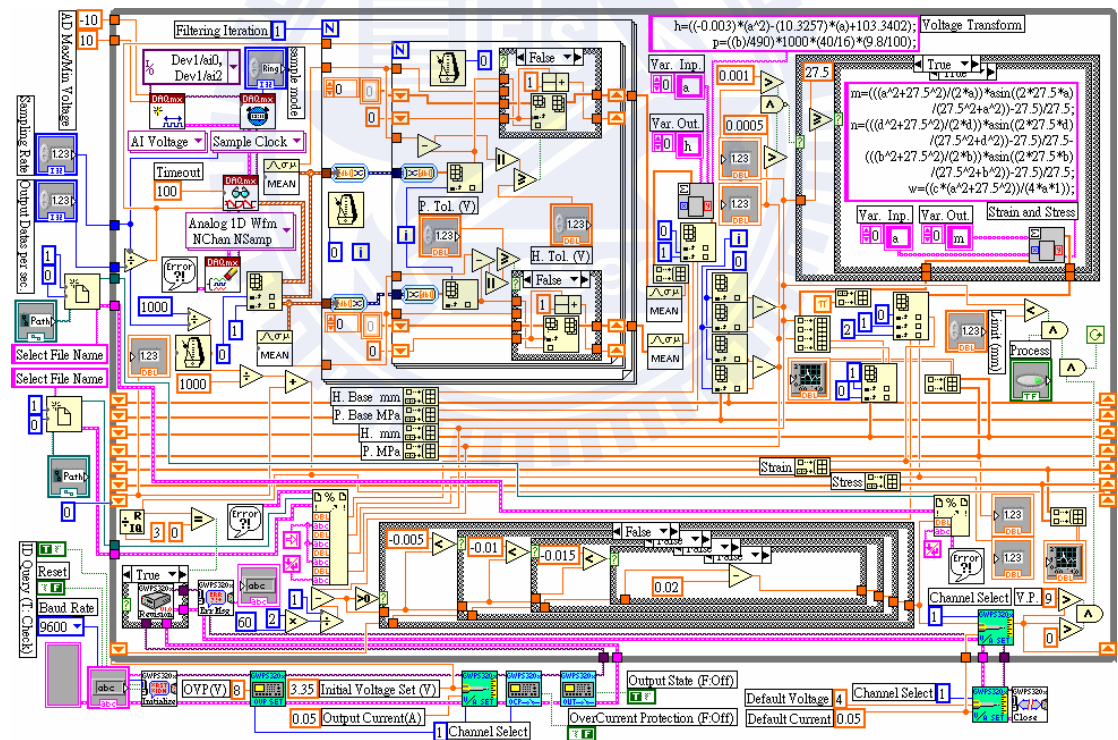


圖 2.17 閉迴路控制系統之功能圖塊



### 2.5.3 實驗結果

液壓膨脹實驗之結果如圖 2.18 所示，為從五次實驗數據取出三次差異最小者，圖中包含差異最小之三次實驗數據，而數據曲線震盪係因油壓馬達出力不穩所致。從圖中很明顯可以看出，列出之三次實驗數據雖然數據曲線震盪，但都有相同之趨勢，在應變值超過約 0.3 後，應力應變曲線出現下降的趨勢，此種應力應變曲線趨勢與正常之趨勢並不吻合，針對此種情況本研究於下列二個小節討論實驗數據之合理性及數據上之修正方式。

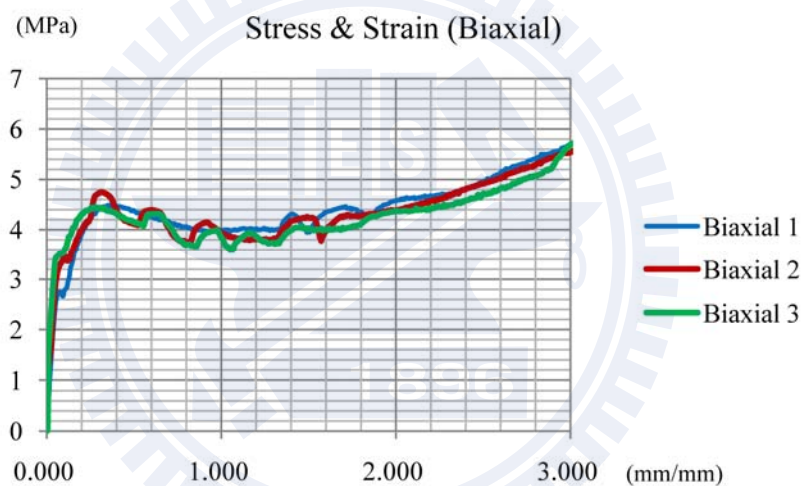


圖 2.18 液壓膨脹實驗結果

#### 2.5.3.1 液壓膨脹之實驗數據合理性

圖 2.19 中三條材料曲線分別為簡易拉力、平面剪力與液壓膨脹三種實驗所量得數據之平均值，液壓膨脹之材料曲線在應變值到達約 0.3 後與簡易拉力之材料曲線交錯。以一般的物理論點來看有違常理，因為超彈體所需之三種實驗數據其應力應變曲線強度順序應當為雙軸拉力 > 平面剪力 > 簡易拉力[11]，如圖 2.20(a)所示。

圖 2.20(a)為 MSC.Marc 在大部分模擬分析範例中，超彈體材料模型所採用之三種實驗數據。根據其技術文件與圖形曲線趨勢來看，MSC.Marc 所使用實驗之材質為橡膠，機械性質近似本研究使用之聚醚型 TPU，而其進行實驗之方式為採用一般雙軸拉力實驗如圖 2.20(b)所示。相較於 MSC.Marc 所附之實驗數據範本，本研究液壓膨脹實驗所取得之等效雙軸應力應變，在應變值超過 0.1 之趨勢來看已違背一般物理觀點，發生材料曲線交錯之情況則更不合理。

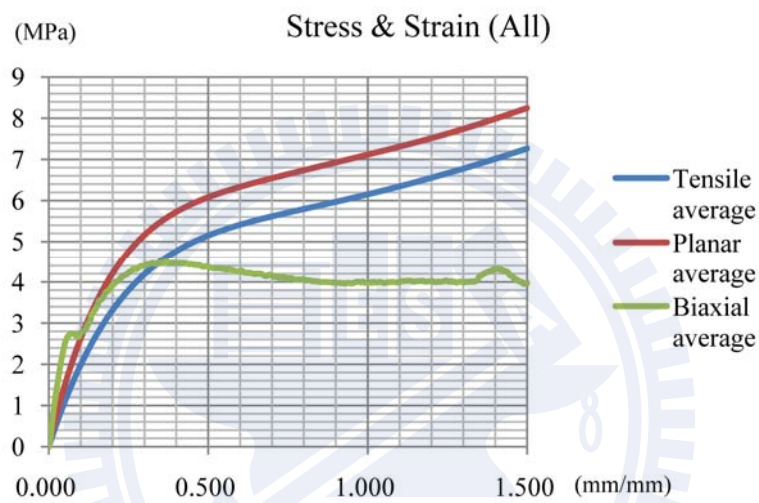


圖 2.19 本研究各項實驗數據之平均曲線

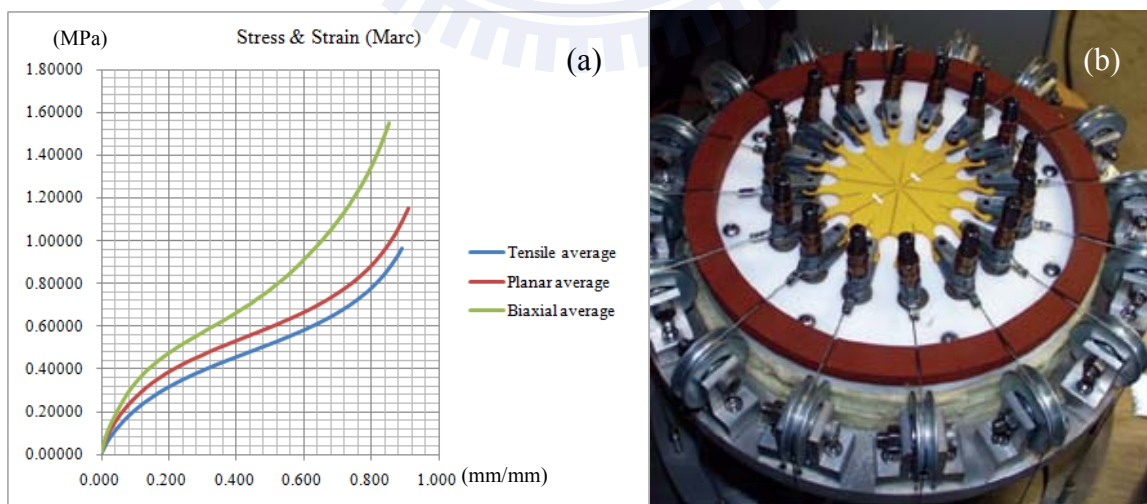


圖 2.20 (a)MSC.Marc 所附之實驗數據(b)一般雙軸拉力實驗[13]



### 2.5.3.2 不合理因素與推測之材料曲線

本研究液壓膨脹實驗所量得之等效雙軸應力應變數據，會違背一般物理的觀點係推論為兩大因素：第一個因素為所推定之球體假設膨脹無法適用大變形之情況，本研究推導之液壓膨應力應變式推導，係在整體試片變形接近似於球體之條件下才成立，而從實驗量得之數據可以推斷，等效應變超過 0.1 後液壓膨脹實驗之變形就已經不能適用近似於球體之條件；第二個因素則即為材料鬆弛特性（Relaxation）影響[14]，因為液壓膨脹實驗在等效應變超過 0.1 後不適用所推導之應變換算式，每單位時間所產生的應變無法滿足原本設定之應變率條件，材料鬆弛特性便使液壓膨脹實驗之應力應變曲線提早趨緩，甚至出現反折。

考量到修整實驗成本問題與研究之目的，原本液壓膨脹實驗數據將取膨脹高度與壓力數據，用在實驗之有限元素模擬中作為邊界條件以驗證材料模型正確性；而因為 MSC.Marc 所附橡膠材料之機械性質近似於本研究使用之聚醚型 TPU，所以參考其材料範例如圖 2.20(a)，以該範例簡易拉力實驗數據與雙軸拉力實驗數據之比例值為根據，再用數值計算軟體 MATLAB 對本研究之簡易拉力實驗之應力數據做換算，建立雙軸拉力實驗推測之材料曲線，其建立流程如圖 2.21 所示，詳細推導請見附錄 E。

取本研究液壓膨脹實驗數據應變值小於 0.1 為初始趨勢，以 MSC.Marc 所附材料範利算出之數據比例值將本研究簡易拉力實驗數據做計算，可得到如圖 2.22 所示雙軸拉力實驗推測之曲線（虛線者），其初始趨勢與本研究液壓膨脹實驗數據吻合。而使用此材料應力應變曲線之超彈體模型，將透過液壓膨脹實驗之有限元素模擬來驗證其準確性與合理性。

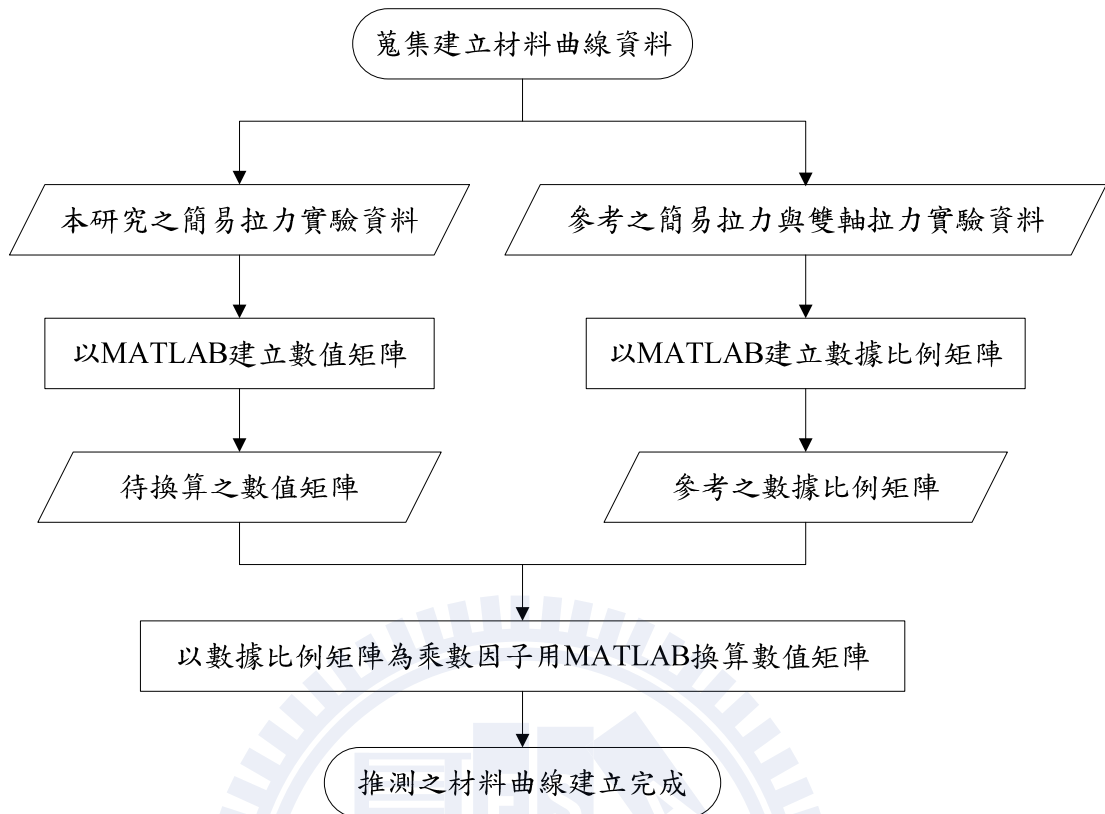


圖 2.21 推測之材料曲線建立流程

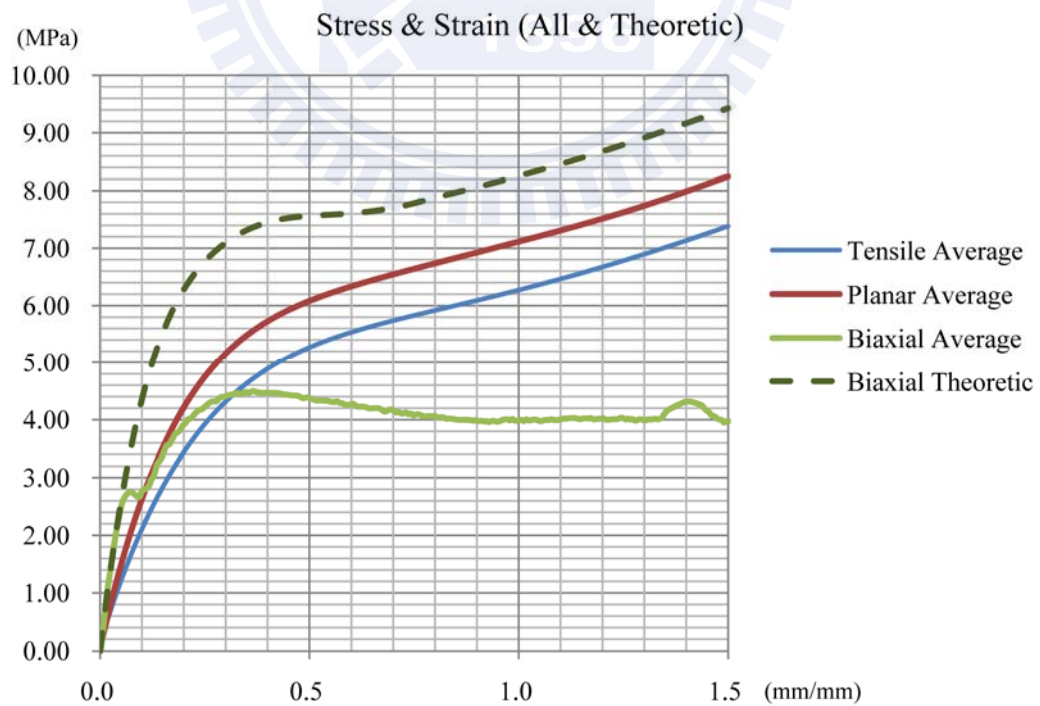


圖 2.22 本研究原實驗數據與推測之材料曲線

### 第三章 材料模型驗證

#### 3.1 Mooney-Rivlin 材料模型建立

本章將對五參數項之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式進行計算並討論，以建立有限元素分析之超彈體材料模型。將各項實驗數據輸入 MSC.Marc 後利用資料擬合 (Data Fit) 功能，計算出三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式之五參數項數值；以自行編寫之 MATLAB 程式對各參數項做不同調整後，列出其對超彈體模型之簡易拉力、平面剪力與雙軸拉力應力應變曲線所產生之影響趨勢進行討論；最後分別以調整前與調整後的參數項為材料模型參數，進行液壓膨脹實驗之有限元素模擬，根據模擬結果決定合適之參數項數值。Mooney-Rivlin 材料模型建立流程如圖 3.1 所示：

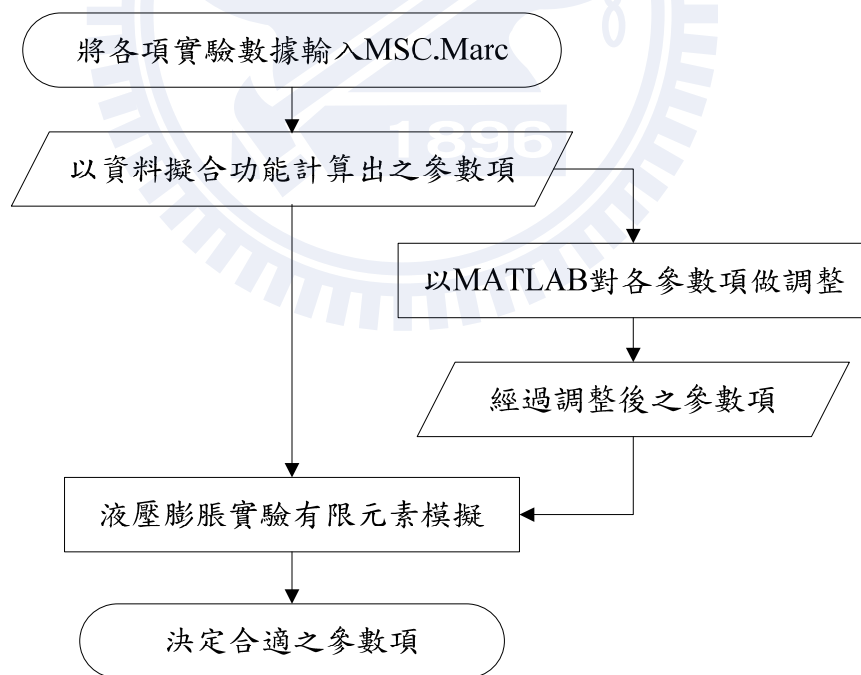


圖 3.1 Mooney-Rivlin 材料模型建立流程

參照附錄B之算式推導，三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程式經過不同之等效拉伸  $\lambda_T$ 、

$\lambda_P$  與  $\lambda_B$  偏微分後，分別得到等效應力  $\sigma_T$ 、 $\sigma_P$  與  $\sigma_B$ ，可寫為下列式：

$$\begin{aligned}
 \sigma_T &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_T} \\
 &= C10 \left[ 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right] + C01 \left[ 2 - \frac{2}{\lambda_T^3} \right] \\
 &\quad + C11 \left[ \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \left( \frac{1}{\lambda_T^2} + 2\lambda_T - 3 \right) + \left( \frac{2}{\lambda_T} + \lambda_T^2 - 3 \right) \left( 2 - \frac{2}{\lambda_T^3} \right) \right] \\
 &\quad + C20 \left[ \left( \frac{4}{\lambda_T} + 2\lambda_T^2 - 6 \right) \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{2}{\lambda_T} + \lambda_T^2 - 3 \right)^2 \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_P &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_P} \\
 &= C10 \left[ 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right] + C01 \left[ 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right] + C11 \left[ \left( \frac{2}{\lambda_P^2} + 2\lambda_P^2 - 4 \right) \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right] \\
 &\quad + C20 \left[ \left( \frac{2}{\lambda_P^2} + 2\lambda_P^2 - 4 \right) \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda_P} + \lambda_P^2 - 2 \right)^2 \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_B &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_B} \\
 &= C10 \left[ 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right] + C01 \left[ 2\lambda_B^3 - \frac{2}{\lambda_B^3} \right] \\
 &\quad + C11 \left[ \left( 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right) \left( \frac{2}{\lambda_B^2} + \lambda_B^4 - 3 \right) + \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right) \left( 2\lambda_B^3 - \frac{2}{\lambda_B^3} \right) \right] \\
 &\quad + C20 \left[ \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right) \left( 4\lambda_B - \frac{4}{\lambda_B^5} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right)^2 \left( 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

上述式(3.1)到式(3.3)中之 C10、C01、C11、C20 與 C30 即為三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程之五參數項，可由這些參數項決定 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型承受簡易拉力、平面剪力與雙軸拉力時之應力應變曲線。

### 3.1.1 絕對誤差與相對誤差計算

在 MSC.Marc 中，用來處理實驗數據之資料擬合功能係以最小平方誤差來計算，其計算方式分為兩種：根據絕對誤差  $\eta_{\text{abs}}$  (Absolute Error) 作為判斷來進行計算，絕對誤差之算法如式(3.4)所示；根據相對誤差  $\eta_{\text{rel}}$  (Relative Error) 作為判斷來進行計算，絕對誤差之算法如式(3.5)所示。

$$\eta_{\text{abs}} = \sum_i^n \left( 1 - \frac{\xi_i}{\zeta_i} \right)^2 \quad (3.4)$$

$$\eta_{\text{abs}} = \sum_i^n (\zeta_i - \xi_i)^2 \quad (3.5)$$

$n$  為數據之資料數， $\zeta_i$  為計算出之等效應力， $\xi_i$  為實驗之等效應力，兩者具有對應且相等之等效應變值。本研究之實驗數據輸入 MSC.Marc，經由資料擬合功能計算出兩種參數值組合，參數組合數值如表 3.1 所示，其所對應之超彈體材料模型承受簡易拉力、平面剪力與雙軸拉力之應力應變曲線如圖 3.2 所示。

表 3.1 MSC.Marc 所計算之三階 Mooney-Rivlin 參數項

	根據絕對誤差判斷	根據相對誤差判斷
C10	2.26309	2.38845
C01	0.937832	0.723934
C11	-0.113397	-0.082037
C20	-0.308564	-0.318723
C30	0.0396949	0.0379148

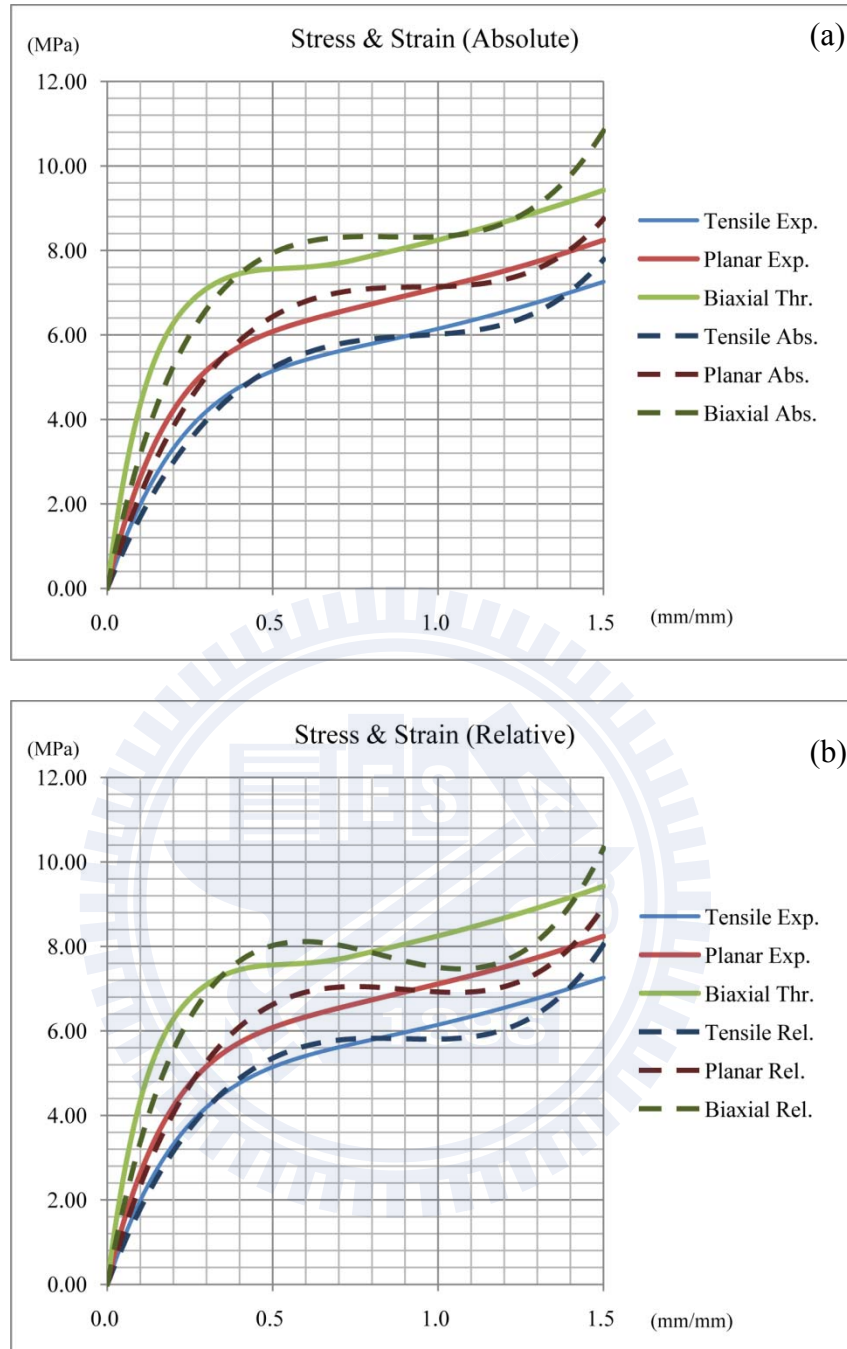


圖 3.2 (a)根據絕對誤差計算之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型  
(b)根據相對誤差計算之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型

當超彈體材料模型之三種應力應變曲線中任一條發生切線斜率小於零之情況，即應力應變曲線有反折，則此超彈體材料模型在進行有限元素模擬時，易有過度變形之情況而導致模擬不穩定。比對圖 3.2 中兩組超彈體材料模型之應力應變曲線，本研究決定選擇根據絕對誤差所計算出之參數值為調整對象。

### 3.1.2 參數之調整與討論

從圖 3.2(a)之曲線可看出，MSC.Marc 以絕對誤差計算之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型，其應力應變曲線與實際實驗數據之應力應變曲線還是有一段落差。然而，本研究希望提高此超彈體模型其應力應變曲線初始強度，使應力應變曲線段初始之切線曲率可與實際實驗數據更接近，因此本小節將針對參數調整進行討論。

因為三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型係決定於五個參數項之數值，即為式(3.1)到式(3.3)之中各項等效拉伸多次式(被中括號所標記者)之線性組合，所以這邊將  $C_{10}$ 、 $C_{01}$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{20}$  與  $C_{30}$  此五個參數項數值變動對應力應變曲線的趨勢影響提出討論。

$C_{10}$ 、 $C_{01}$ 、 $C_{11}$ 、 $C_{20}$  與  $C_{30}$  對本研究各實驗數據以絕對誤差判斷換算出之超彈體材料模型之各應力應變曲線產生之影響分別如圖 3.3(a)、圖 3.4(a)、圖 3.5(a)、圖 3.6(a)與圖 3.7(a)所示，在數值上的變動對原本絕對誤差算出之應力應變曲線產生之趨勢影響分別如圖 3.3(b)、圖 3.4(b)、圖 3.5(b)、圖 3.6(b)與圖 3.7(b)所示。



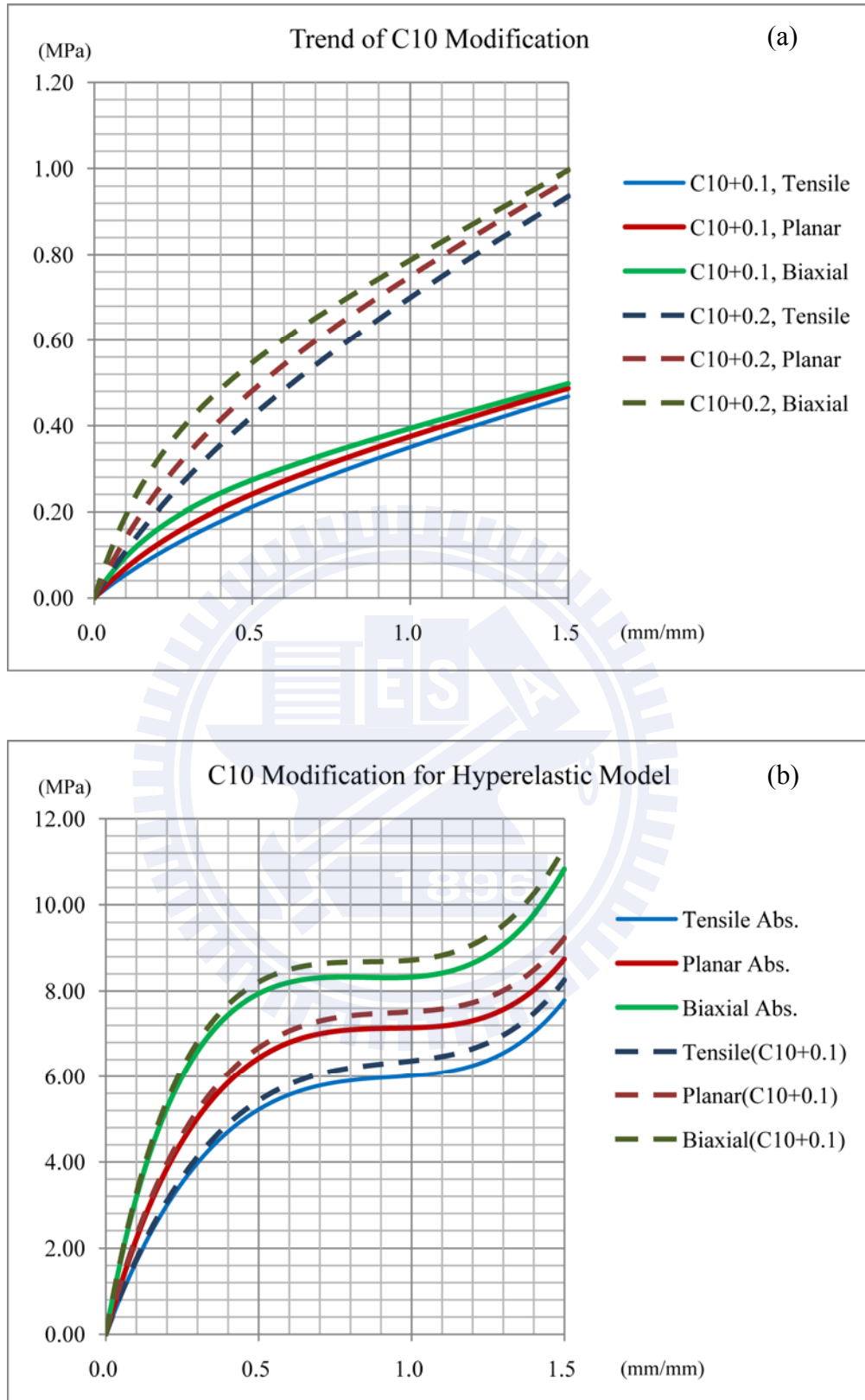


圖 3.3 (a)本研究已計算之超彈體模型 C10 項對應力應變曲線產生之影響  
(b)調整 C10 項對各應力應變曲線產生之趨勢影響

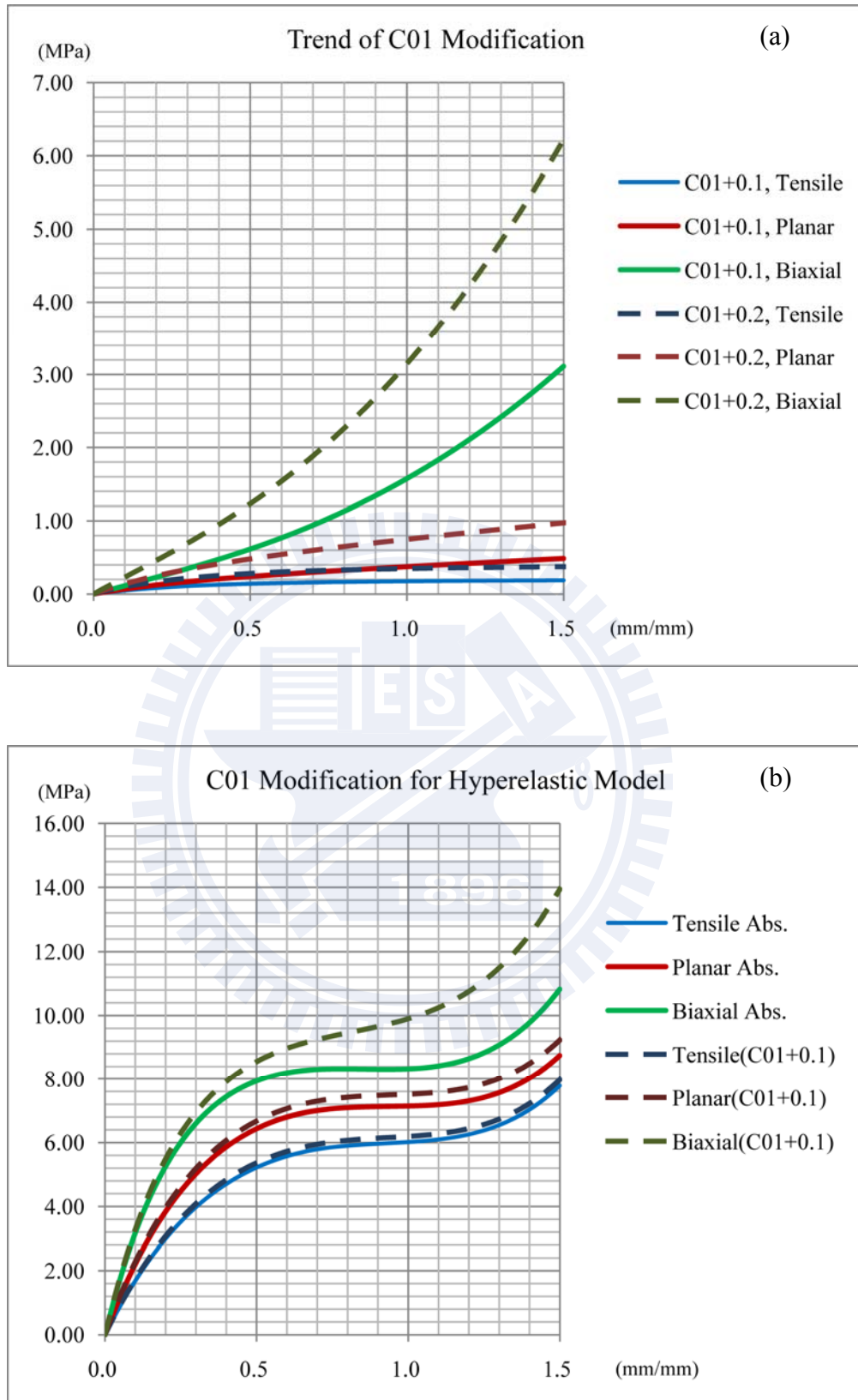


圖 3.4 (a)本研究已計算之超彈體模型 C01 項對應力應變曲線產生之影響  
(b)調整 C01 項對各應力應變曲線產生之趨勢影響

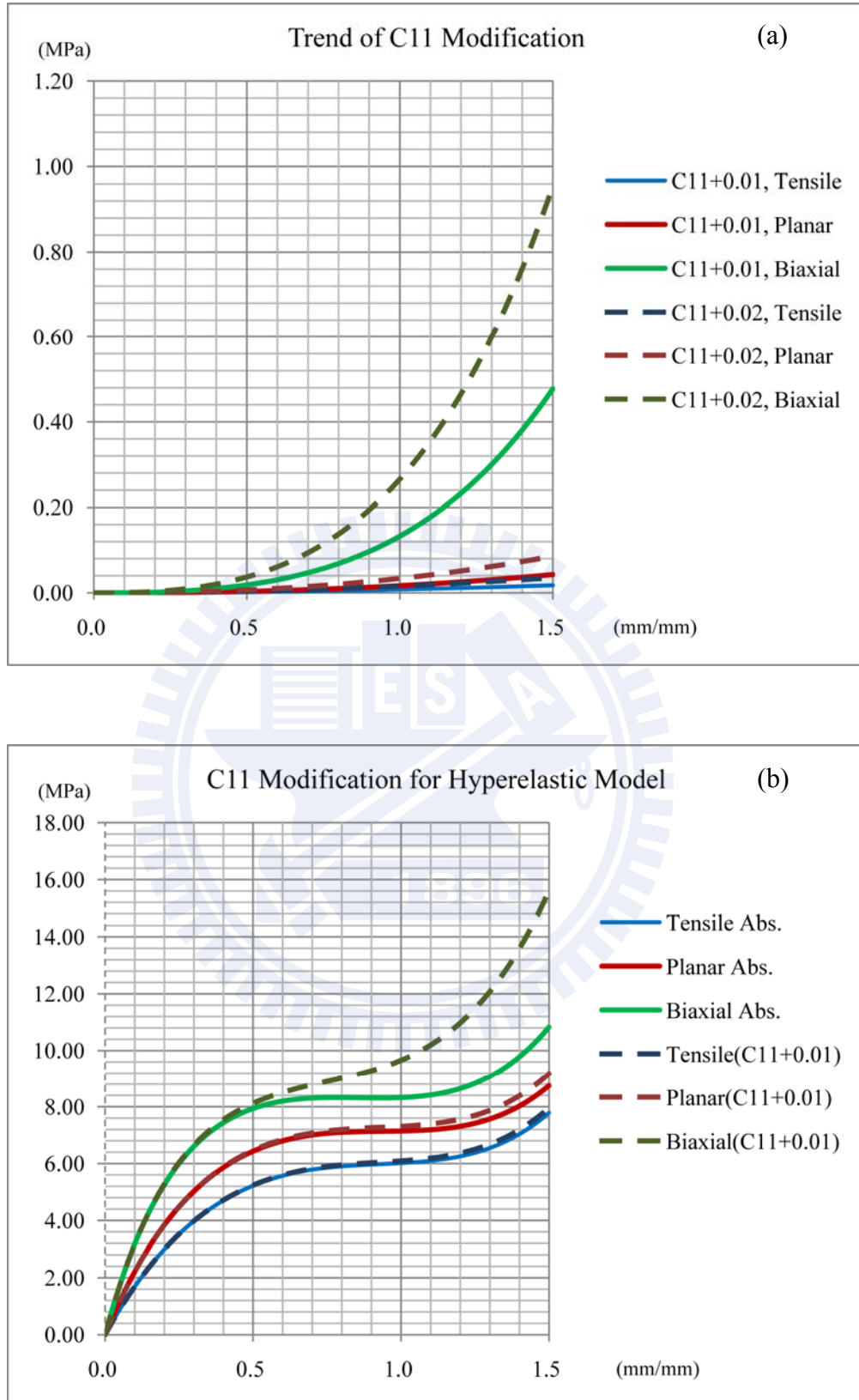


圖 3.5 (a)本研究已計算之超彈體模型 C11 項對應力應變曲線產生之影響  
(b)調整 C11 項對各應力應變曲線產生之趨勢影響

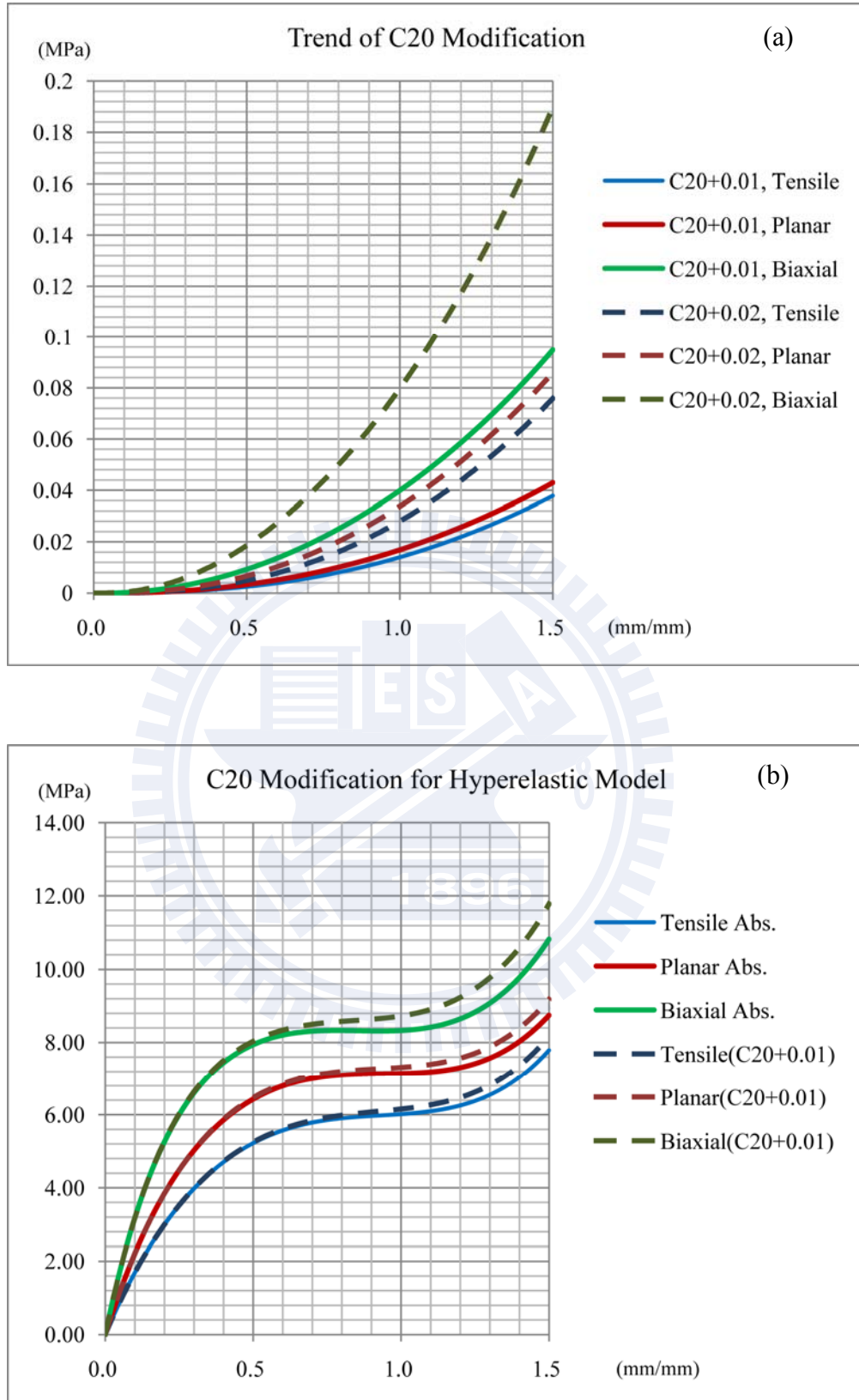


圖 3.6 (a)本研究已計算之超彈體模型 C20 項對應力應變曲線產生之影響  
(b)調整 C20 項對各應力應變曲線產生之趨勢影響

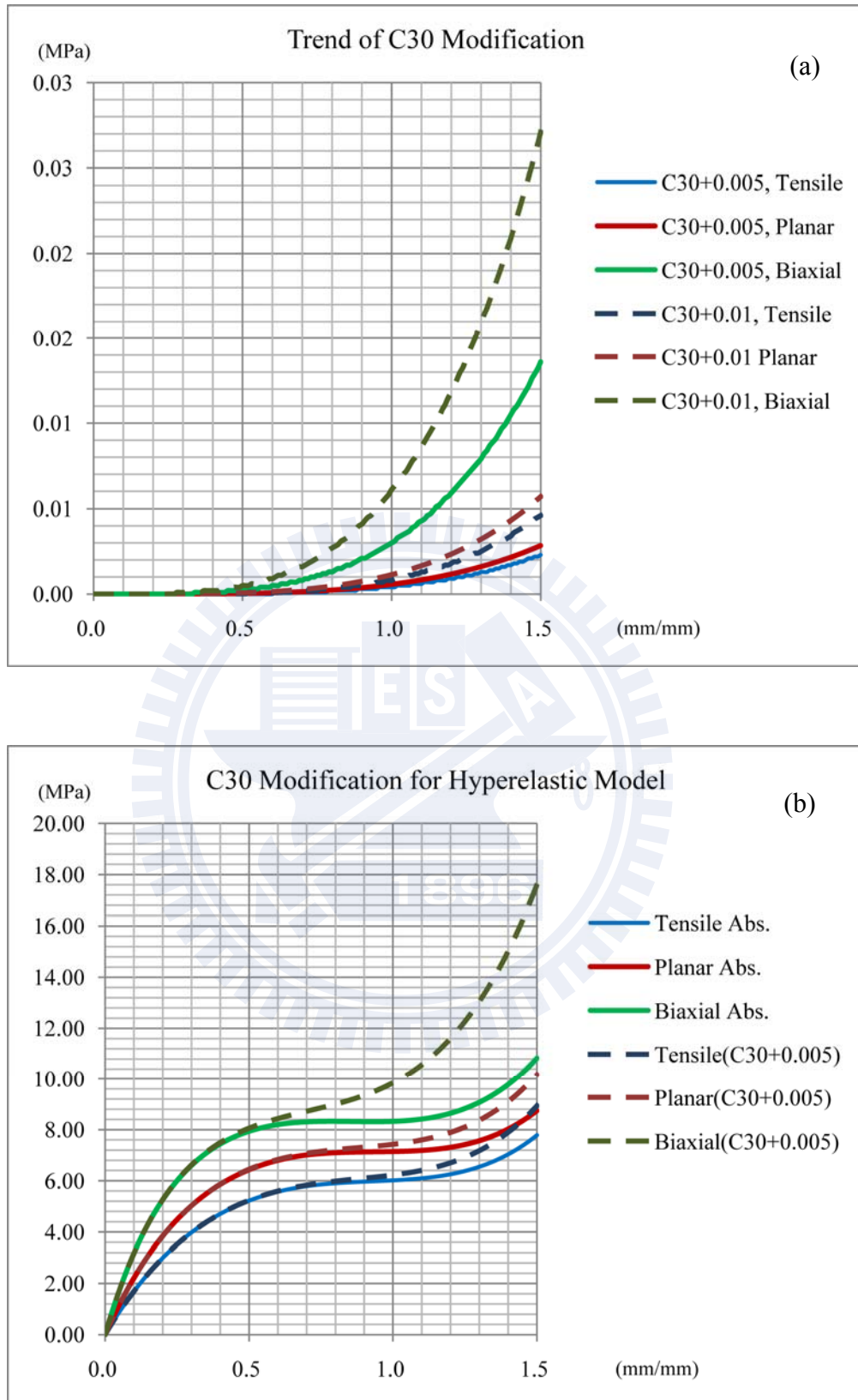


圖 3.7 (a)本研究已計算之超彈體模型 C30 項對應力應變曲線產生之影響  
(b)調整 C30 項對各應力應變曲線產生之趨勢影響

從上列圖可做出以下歸納：有較高等效拉伸冪次項之雙軸應力對於應變值改變有較敏感之變動，而五個參數項中與較高等效拉伸冪次項相乘之 C30，同樣也對應力應變曲線產生比較大的影響。因此，調整參數項數值將造成各應力式之變動趨勢互相牽制，舉例像是單獨以簡易拉力之應力應變曲線為目標做趨近調整，雖可使其誤差值降到極低，但會導致其他應力應變曲線趨勢發散或甚至出現反折，如圖 3.8 所示。

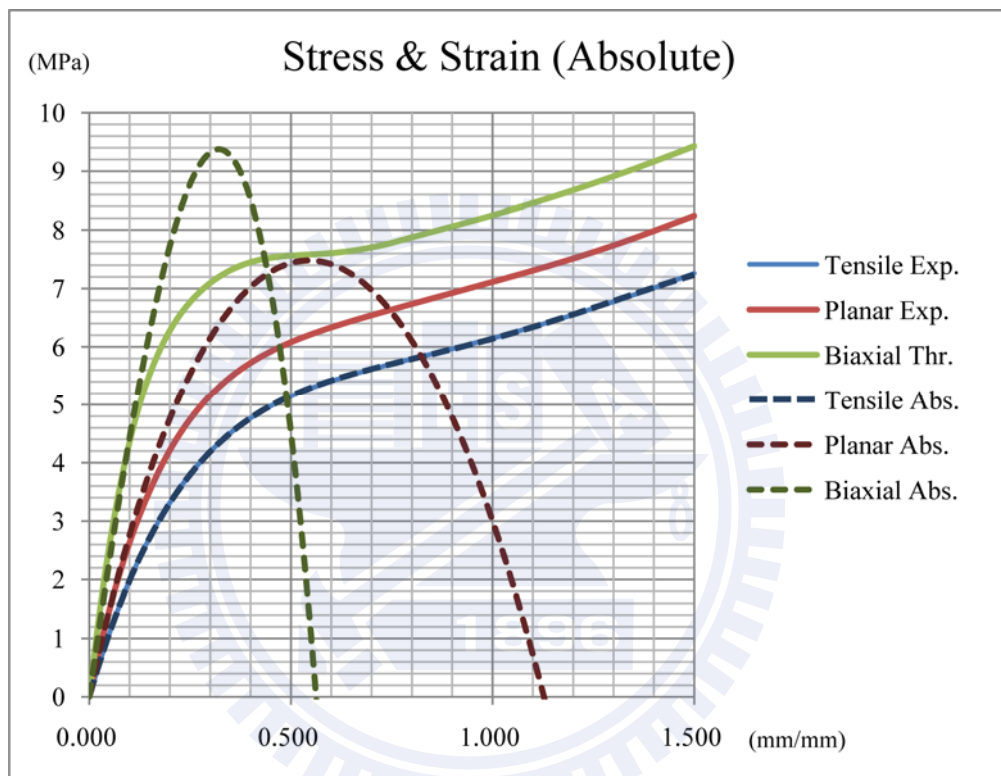


圖 3.8 單獨以簡易拉力之應力應變曲線為目標做趨近調整

根據圖 3.3(b)到圖 3.7(b)各個參數項對應力應變之影響，以提升初始應力應變曲線強度為目標且不使曲線趨勢出現反折之前提下，對五個參數項各別做調整，數值如表 3.2 所示。調整後參數項與調整前參數項所決定之簡易拉力、平面剪力與雙軸拉力之應力應變曲線，同對應之三項實驗數據曲線繪於圖 3.9。本研究將把調整後參數項與調整前參數項輸入有限元素模擬中，建立兩組不同之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型，透過液壓膨脹實驗之靜態模擬，把兩組超彈體材料模型之分析結果與實驗做比較，最後決定合適之參數項數值。



	調整前參數項	調整後參數項
C10	2.26309	2.96309
C01	0.937832	0.937832
C11	-0.113397	-0.112397
C20	-0.308564	-0.316564
C30	0.0396949	0.0396949

表 3.2 調整前參數項與調整後參數項數值表

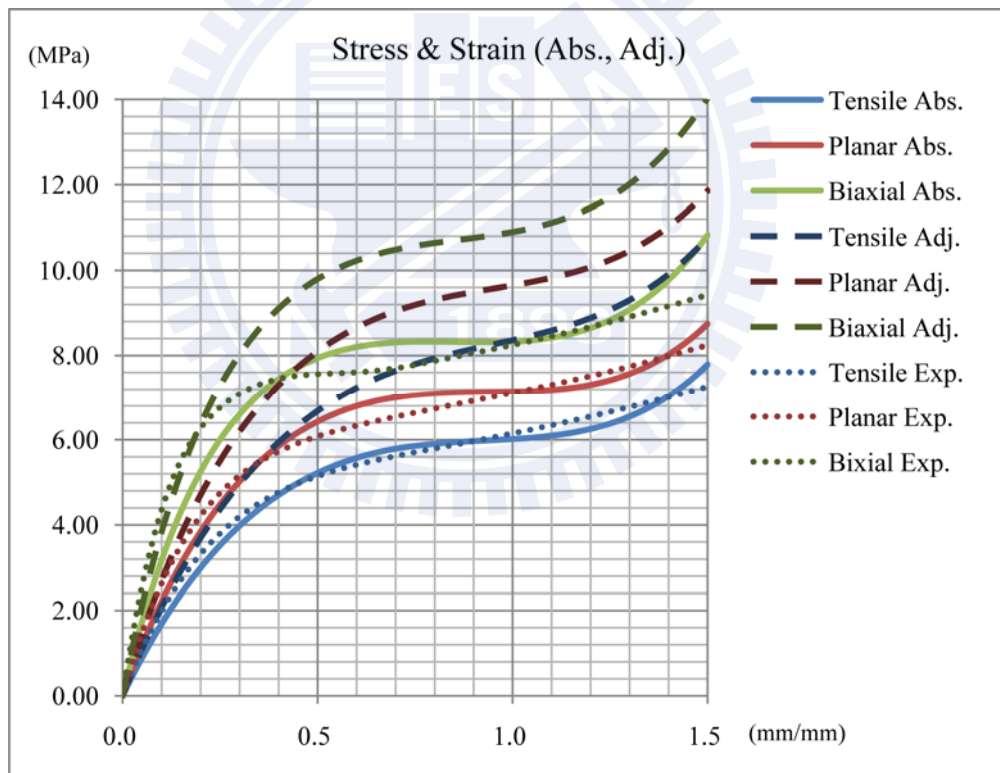


圖 3.9 調整前／後參數項應力應變曲線與實際實驗數據

### 3.2 液壓膨脹實驗模型建立

液壓膨脹實驗以 2D 軸對稱之方式進行有限元素模擬分析，模擬實驗試片之網格模型及模擬實驗夾具之剛體線段如圖 3.10，圖中為厚度方向分為四層之試片網格模型，而 MSC.Marc 之軸對稱分析限制需以  $x$  軸為對稱軸。考慮到模擬進行時與夾具接觸之轉折處會使網格產生極大之變形，實驗試片之網格模型在該處加密規劃，並且將夾具與試片接觸之轉折角做圓角化，以避免有不正常之接觸分析狀況發生。

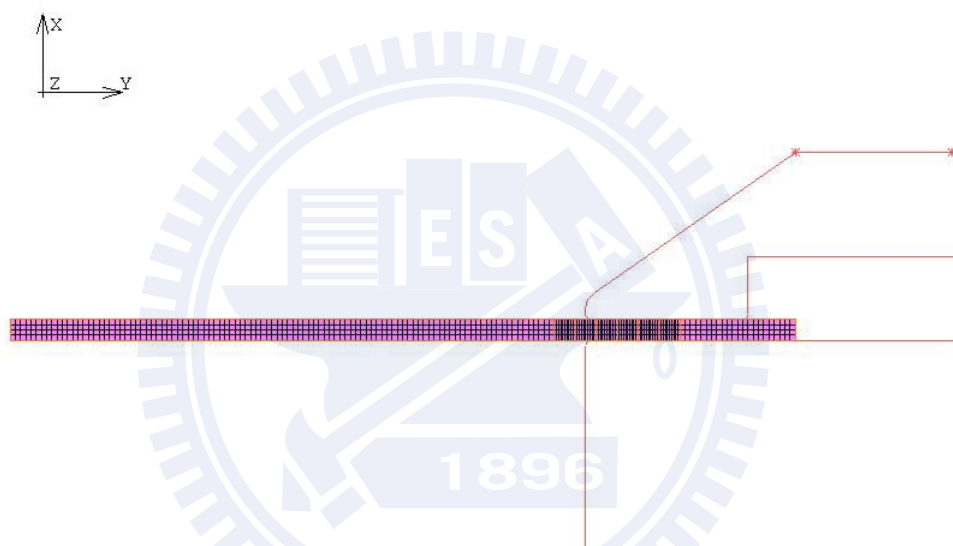


圖 3.10 液壓膨脹實驗之有限元素模擬

本研究之液壓膨脹實驗在 MSC.Marc 中進行有限元素模擬依序可分為前處理器階段之網格規劃 (Mesh Generation)，幾何性質設定 (Geometric Properties)，材料性質設定 (Material Properties)，接觸條件設定 (Contact)，邊界條件設定 (Boundary Conditions)；求解器階段之負載條件設定 (Loadcases)，工作設定 (Jobs)；後處理階段之模擬結果提取 (Results) 之步驟進行，分別在下列部份介紹：

- (1) 網格規劃：此步驟主要用來建立有限元素模擬所需之幾何規劃，包括網格規劃以及元素類型設定等。本研究液壓膨脹實驗模擬之試片網格所採用的元素類型為具有 Herrmann (請見附錄 F) 特性之軸對稱四邊形減積分元素，元素

編號為 119。

- (2) 幾何性質設定：主要用來設定元素之幾何狀態，在此設定實驗試片之網格為機械力學元素之軸對稱固體 (Axisymmetric, Solid)。
- (3) 材料性質設定：依模擬對象選擇合適之材料，本研究選擇五參數項之三階 Mooney-Rivlin，把調整前參數項與調整後參數項輸入，建立兩組超彈體材料模型，分兩次模擬各別套用到實驗試片之網格元素上。
- (4) 接觸條件設定：分成接觸體設定 (Contact Bodies) 與接觸關係 (Contact Table)，接觸體設定包含剛體設定變形體設定。液壓膨脹實驗模擬之試片網格設為變形體，夾具之下模線段設為靜止不動之剛體，夾具上模線段為施力控制之剛體。在接觸關係設定中，試片網格與夾具剛體線段間設為觸碰 (Touching)，摩擦係數設為 0.3。
- (5) 邊界條件設定：此部分用來模擬實際情況之受力或拘束等。將實際液壓膨脹實驗量得之壓力數據輸入邊緣施力中 (Edge Load)，因為為軸對稱分析所以設為 Force/Unit Area 形式；在軸對稱上之試片網格節點設拘束，限制對稱軸上之節點在 y 方向的移動；另外設一集中力，施於該剛體線段之力控制節點，用以模擬夾具剛體線段之向下施力。
- (6) 負載條件設定：根據各種不同類型之模擬決定不同之負載參數設定，一個模擬分析案件可以包含數個負載條件依次進行分析。不同的負載條件除了可個別選取作用之邊界條件與接觸條件，亦可個別設定收斂控制、模擬之時間長短與時間步增量之計算方式。液壓膨脹實驗模擬之負載設定為靜態分析型 (Static)，為了與實際實驗之模擬結果方便比對，此處採用固定時間步增量之計算方式，總時間單位 35，分為 70 步，每步 0.5 時間單位。
- (7) 工作設定：包含了指定初始作用力 (Initial Loads)、接觸控制設定 (Contact

Control)、輸出結果項目、分析選項設定 (Analysis Options)、工作參數與分析維度設定 (Analysis Dimension)。液壓膨脹實驗模擬之初始作用力有對稱軸拘束，以確保模擬初始階段的穩定性；在接觸控制設定中，將摩擦模式設為庫倫摩擦，並啟動初始接觸之設定；在分析選項中分析類型設定為大應變 (Large Strain) 模擬，並啟動隨從力 (Follower Force) 設定；工作參數中求解器之類形使用預設之 Multifrontal Sparse 為求解法；分析維度則設定為軸對稱。

- (8) 模擬結果提取：為後處理階段，本研究主要透過歷史繪製 (History) 功能，將試片網格元素在對稱軸上之指定節點其  $x$  軸之位移量畫為曲線圖，並轉成列資料輸出與實際實驗數據做比對。

然而，因實際實驗進行時有材料鬆弛特性影響，膨脹液壓由升轉降時其膨脹高度仍持續增加；但在靜態分析之模擬中，膨脹液壓一旦下降膨脹高度也會下降。所以取實際實驗膨脹液壓由升轉降前之數據作為壓力之邊界條件，如圖 3.11 紅框者所示。在對超彈體材料模型調整前／調整後之參數項做比較前，給予厚度方向上不同分層數之試片網格模型進行模擬做比對，發現在試片網格元素分層數達到四層後，分層數目對膨脹高度的影響便越來越小。因此本研究決定以四層之試片網格模型為主，進行後續之液壓膨脹實驗有限元素模擬。

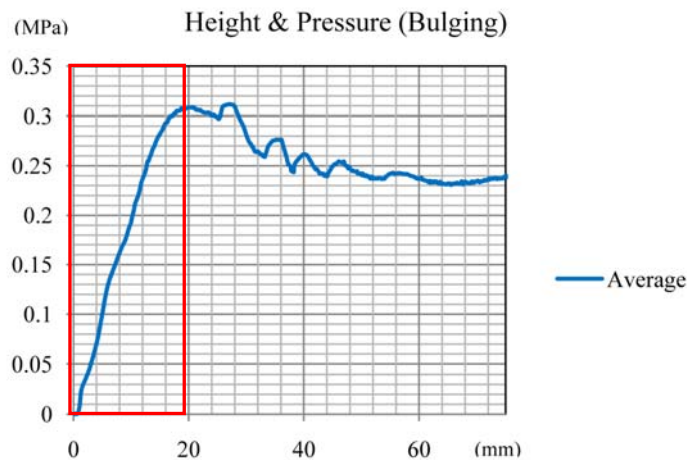


圖 3.11 液壓膨脹實驗之液壓邊界條件

### 3.3 模擬分析結果與實際實驗比較

液壓膨脹實驗模擬分析之壓力／膨脹高度圖如圖 3.13 所示。從圖中可以看出採用調整前／後之參數項所建立起之兩組超彈體材料模型，與實際實驗比對都有一定之誤差，但採用調整前參數項之超彈體材料模型之液壓膨脹實驗有限元素模擬在壓力／膨脹高度曲線趨勢轉折後，其膨脹高度增加之切線斜率與實際實驗極為相似。

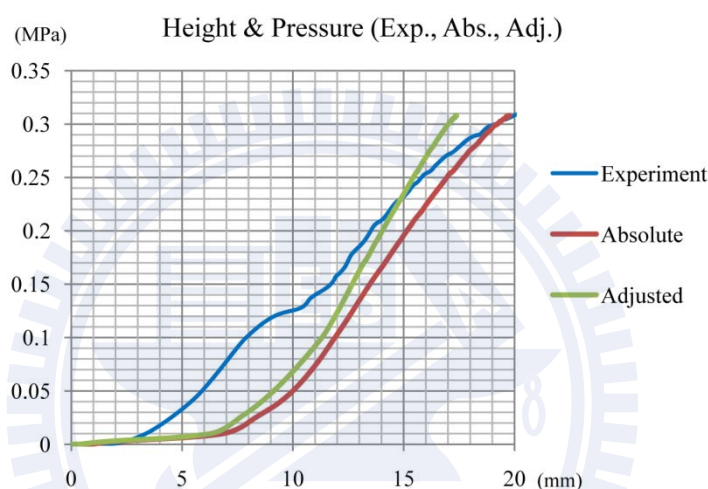


圖 3.12 將實驗之膨脹液壓作為邊界條件之模擬分析結果

由上述情況可以推論，採用調整前參數項之超彈體材料模型，其應力應變曲線經過第一次轉折後之趨勢與實際實驗相似。因此針對模擬前半段膨脹高度過大之情況改善，可透過改變參數項使超彈體材料模型之應力應變曲線在第一次轉折前之強度提高，即應力應變曲線有較高之初始切線斜率。

但根據 3.1.2 節中 C10、C01、C11、C20 與 C30 此五個參數項對應力應變曲線的趨勢影響，在調整參數項的情況下要維持第一次轉折後的應力應變曲線趨勢且提高初始切線斜率，是一件難以達成的工作，因為高冪次項與低冪次項對於參數項變動的反應落差大，使得調整之應力應變曲線趨勢容易在雙軸拉力上出現向上發散或向下反折之情況，如圖 3.8 即為向下反折之情況。

而因為考慮到實際實驗有材料鬆弛特性影響，使用無材料鬆弛特性影響之超彈體材料模型的模擬分析結果在膨脹高度上應要較實際實驗來得略低，調整後參數項之超彈體材料模型之表現較為合理，同時也有較高之應力應變曲線初始切線斜率。在考量到實驗數據擬合上誤差值之判斷與分析結果的合理性，本研究決定將調整前之參數項與調整後之參數項作平均，最後產生之 C10、C01、C11、C20 與 C30 如表 3.3 所示，其建立之超彈體材料模型應力應變曲線如圖 3.14 所示。

	決定使用之參數項
C10	2.61309
C01	0.937832
C11	-0.112897
C20	-0.312564
C30	0.0396949

表 3.3 決定之參數項數值表

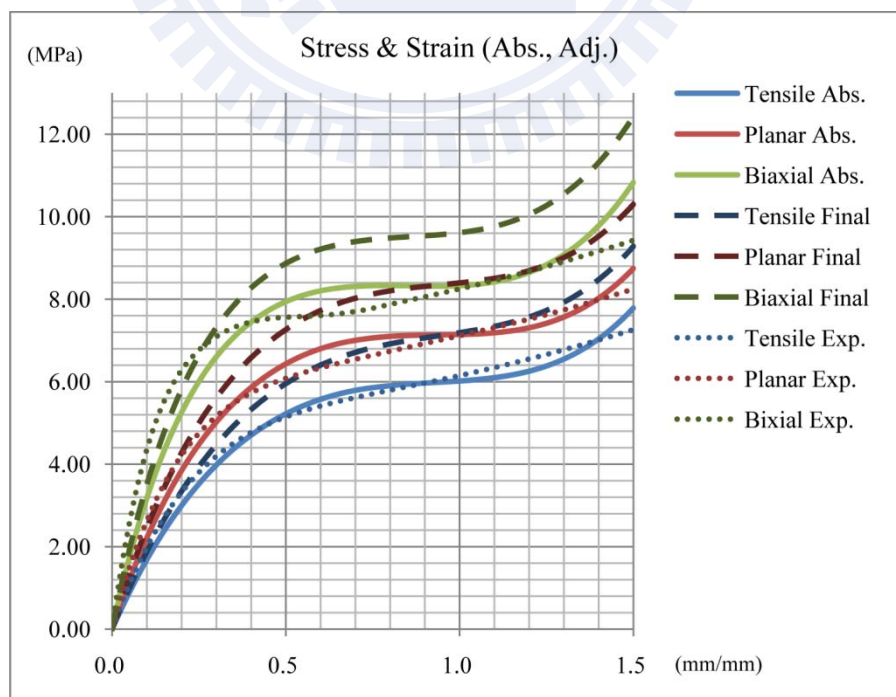


圖 3.13 調整前／決定之參數項應力應變曲線與實際實驗數據



## 第四章 鞋氣墊吸震試驗之模擬分析

### 4.1 鞋氣墊吸震試驗

鞋氣墊吸震試驗為根據鞋中底吸震試驗之試驗規範所進行，此鞋中底吸震試驗係由英國 SATRA 技術研究中心制定標準，其試驗設備示意簡圖如圖 4.1 所示，可用鞋中底試片測試或以鞋樣本體進行測試，試驗規範編號 PM142。

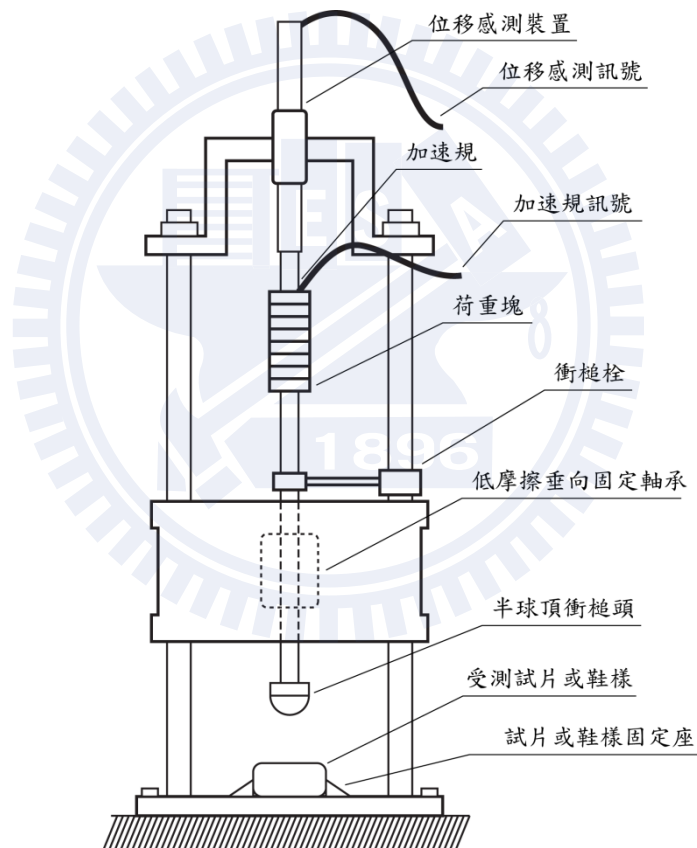


圖 4.1 鞋中底吸震試驗示意簡圖

鞋中底吸震試驗之試驗步驟分為以下部份簡述：

- (1) 衝槌質量 8.5 kg，校準受測試片或鞋樣角度，使其與受衝擊平面呈水平狀態。
- (2) 將衝槌輕緩降至受測物品表面，對位移感測裝置進行歸零工作，若受測物品為鞋

樣時則另外確定鞋身是否會阻礙試驗進行，撞擊點為後踵往前 1/4 全腳長之處。

(3) 重新將衝槌拉升至距受測物品表面  $50 \pm 0.5$  mm 之高度，以衝槌栓固定之。

(4) 確認加速規狀態，開啟記錄系統後釋放衝槌。

(5) 當衝槌撞擊到受測物表面彈起後，在再次回升的最高點以衝槌栓將衝槌固定。

(6) 待二到三秒後再次釋放衝槌，後續重複 (5) 之步驟四次。

(7) 暫停記錄系統檢查試驗數據，若暫停前最後三次衝擊之各項數據誤差小於  $5 \text{ m/s}^2$  或是小於 0.5 mm 則終止試驗，反之繼續進行試驗直到暫停前最後三次衝擊各項數據誤差符合標準。

(8) 將衝槌拉升並移除受測物品，最後將衝槌緩降至機台平面，試驗結束。

鞋中底吸震試驗主要量測的試驗數據有三項：衝槌穿透距離 (Penetration)、衝槌減加速度 (Deceleration) 與能量回饋率 (Energy Return)。本研究針對上述三項之數據，將鞋氣墊吸震試驗模擬結果與實際試驗第一輪衝擊之試驗結果做比較並進行討論。

## 4.2 類似研究之文獻回顧

目前鞋氣墊使用有限元素分析主要係用於預測其膨脹情況，如美國 NIKE 建立 Air Technology Lab 對鞋氣墊膨脹後之幾何分析，以利後續鞋上部設計與量產製造順利。目前文獻裡很少與鞋氣墊有限元素分析相關，但同樣是採用氣體避震系統之空氣彈簧在某些特性與鞋氣墊相似，本節將對這些空氣彈簧作簡略之文獻回顧。

空氣彈簧與鞋氣墊相同，採用可壓縮的空氣為內填充物，而包覆材質通常選用聚氨酯或是硫化橡膠；但是在幾何上因為做動方式簡單與考量降低生產成本，所以幾何形狀通常為對稱形式，同時為因應其大荷載量之需求，包覆材質會加入鋼絲圍繞組成簾線層以提高強度。H. W. Lee 等人[15]、莊德軍[16]與馬永明等人[17]分別對不同形狀之膜式空氣彈簧以靜態有限元素模擬，分析不同簾角之簾線層對空氣彈簧的影響。H. W. Lee 等人單純針對彈簧內部為固定均壓之狀態進行靜態分析。莊德軍以 ABAQUS 為有限元

素模擬之求解軟體，將彈簧內部填充可計算容積之氣體單元，對彈簧充氣後給予上下夾板固定位移產生拉伸與壓縮以分析其變形狀況。馬永明等人則以 MSC.Marc 為有限元素模擬之求解軟體，以 Cavity 之功能計算彈簧內部體積變化改變壓力，對充氣後之彈簧進行垂直向之拉伸與壓縮以分析其變形狀況。

雖然空氣彈簧的文獻中已經有針對氣體內部容積改變造成的壓力變化進行有限元素分析，但是卻沒有文獻針對動態衝擊之問題做討論。主要原因歸論為空氣彈簧主要用於機具之緩衝作用，因此討論目標主要放在因氣體壓力改變後彈簧本體產生之應力應變狀態，而並沒有對於衝擊後反彈特性進行分析。鞋中底所扮演之角色與一般機具所使用之避震系統不同，除了緩衝功能外亦需考量衝擊後之反彈特性，即能量回饋的特性。考量到鞋氣墊用於鞋中底作為避震系統，若只進行靜態分析對設計工作所帶來的效益有限，所以本研究即以英國 SATRA 技術研究中心制定之試驗標準 PM142 為範本，建立鞋氣墊吸震試驗之有限元素模型進行動態模擬分析，再將模擬結果與財團法人鞋技中心所進行之實際試驗做比較與討論。

#### 4.3 Single-Step Houbolt 動態響應理論

吸震試驗在 MSC.Marc 之負載類型為動態響應 (Dynamic Transient)，因為牽涉到計算氣墊內氣體體積變化量，因此本研究選定隱式 (Implicit) 動態分析的 Single-Step Houbolt 為動態響應控制器 (Dynamic Transient Operator)，本節主要對其原理及特性簡介，詳細之動態響應方程式推導請見附錄 G。

原始之 Houbolt 模型為三步之線性多重步型式 (3-Step of Linear Multistep Form) [18]，具有無條件穩定性與數值減幅性 (Numerical Damping)，與同為隱式動態響應控制器之 Newmark-beta 比較起來，其對於非線性問題之分析更為穩定 (註：本研究以 Newmark-beta 進行模擬會有不正常之發散結果，請見附錄 H) 且穩定性隨著時間步之增加而提高，然而其數值減幅性對高頻率之分析卻有特別明顯的影響，對大量之時間步有可能造成數值

上的不正確性。因為上述的特性，使用 Houbolt 模型所得到的動態響應模擬分析會有平順的數值結果，但通常並不具有高精確性，所以 Houbolt 模型多被應用在解得動態分析問題約略範圍之解。

在應用於有限元素分析時，因為其數學模型的影響，原始之 Houbolt 模型有兩個缺陷[19]：第一，Houbolt 模型在計算時除了正在計算之該時間步位移項外，需再向前推二時間步之位移項來進行計算，與該時間步之位移項組成三步之線性多重步式，因此其在分析初始階段必須做特殊之處理；第二，使用原始之 Houbolt 模型進行有限元素模擬時，限制必須使用固定之時間步，無法使用自動調整之時間步增加模擬效率。

為了改善上述問題，Jintai Chung 與 G. M. Hulbert 提出了 Single-Step Houbolt 模型[20]，將原本需要額外三個時間步之線性多重步式，改為只需該時間步之位移項，做不同階段時間偏微以線性方式組成即可進行計算下一時間步之位移項。Single-Step Houbolt 有效地改善了原始 Houbolt 模型的缺點，亦為 MSC.Marc 中進行動態接觸分析時預設之隱式動態響應控制器建議選項，然而其與原始 Houbolt 模型一樣具有數值減幅性，在選擇時間步數量時必須特別注意。

#### 4.4 鞋氣墊吸震試驗之分析模型

本研究分析之第三代立體支撐鞋氣墊如圖 4.2 所示，為一全腳掌系統氣墊。因為人體實際在進行運動時腳底接受衝擊部位以後跟部為主，同時考量到前腳掌容積小，與後腳部掌之容積相比之下在壓力上產生的影響可以忽略，所以本研究將鞋氣墊後跟部獨立出來；而鞋氣墊後跟部在左右形狀上近乎對稱，在考量到降低電腦計算負擔的前提下，本研究根據左右對稱線將鞋氣墊分為一半，在截面上設置對稱面之拘束條件進行後續之有限元素模擬，所選取獨立出之部位如圖 4.3 黃框者所示。



圖 4.2 第三代立體支撐鞋氣墊

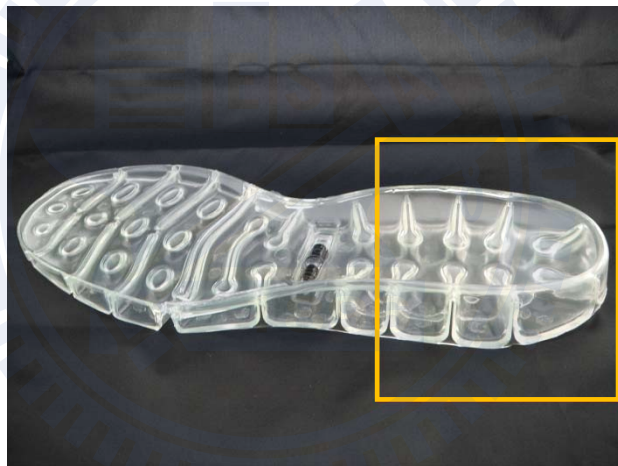


圖 4.3 鞋氣墊所獨立出之部位

本研究對鞋氣墊之建模軟體使用 CATIA，以游標卡尺與剖開之氣墊截面進行逆向建模。因為第三代立體支撐鞋氣墊為薄膜與柱之綜合立體架構，幾何上比起一般問題相對複雜，除了網格規劃工作不易進行外，如氣墊內部壓力之邊界條件選取困難度也提高，針對上述問題，另外選用 Hypermesh 做為網格規劃與邊界條件設置軟體。



#### 4.4.1 CATIA 建立分析模型

CATIA 為法國 Dassault System 公司所開發之 CAD/CAE/CAM 一體化軟體，被廣泛地應用在航空產業、汽車業、製造業、電子產業等，除了整合功能強大外，其 CAD 介面直覺而功能完備，可進行曲率連續 (G2) 之高品質曲面設計工作。本研究使用的版本為 V5R10，利用其零件設計模組功能 (Part Design) 將鞋氣墊模擬用之幾何模型建出。以游標卡尺測量鞋氣墊獨立出之部位，根據其所記錄之尺寸數據，再以軟體中之擠伸成型 (Extrude)、擠伸切割 (Pocket)、圓角特徵 (Fillet)、旋轉成型 (Shaft)、疊層拉伸 (Multi-Section Solid)、薄殼特徵 (Shell) 建立鞋氣墊之幾何模型，完成之模型如圖 4.4 所示。

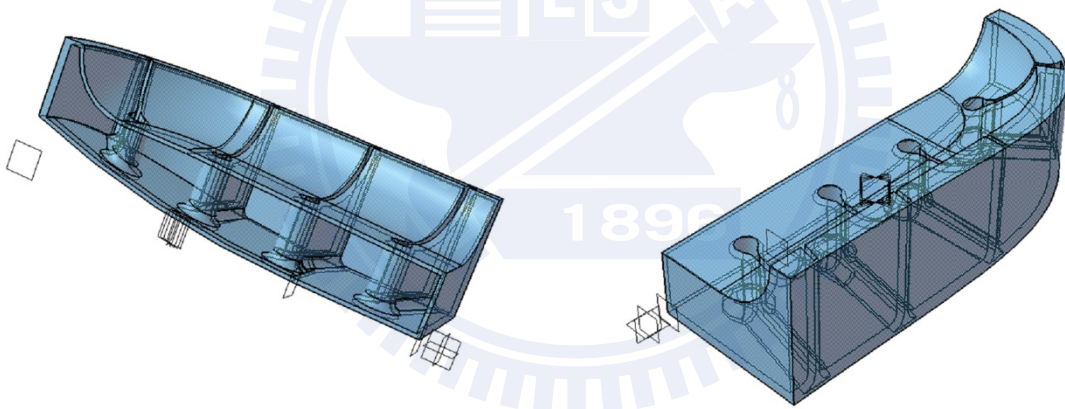


圖 4.4 完成之立體氣墊圖

#### 4.4.2 Hypermesh 網格規劃

本研究以 Hypermesh 對幾何構造複雜之分析對向進行網格規劃與邊界條件設定，Hypermesh 具有優秀之網格自動規劃能力 (Automesh)，能極有效率地完成網格模型規畫工作。然而，因本研究在進行模擬時網格元素將會經歷大變形，若網格元素幾何狀況



不佳，則容易因過度變形或扭曲使模擬中斷。因此，本研究亦將利用 Hypermesh 之網格編輯工具與網格元素品質評斷功能，對已自動生成之模型再進行調整，以使建立之網格元素有更良好之幾何表現，在進行大變形之模擬分析時不易產生幾何問題。

首先使用 Hypermesh 平面工具中之網格自動規劃，以幾何模型曲面為基礎自動生成平面網格，再根據已生成之平面網格以立體工具進行四面體網格規劃 (Tetramesh)。本研究網格使用自動規劃中 QI Optimize 之方式，主要之調整參數分別為平均目標尺寸 (Mesh Size)、指定元素幾何 (Mesh Type) 與規劃準則 (Criteria)。經過參數調整以網格自動規劃生成之平面元素組成之鞋氣墊模型，厚度上網格密度為單層，其外觀如圖 4.5(a)所示。

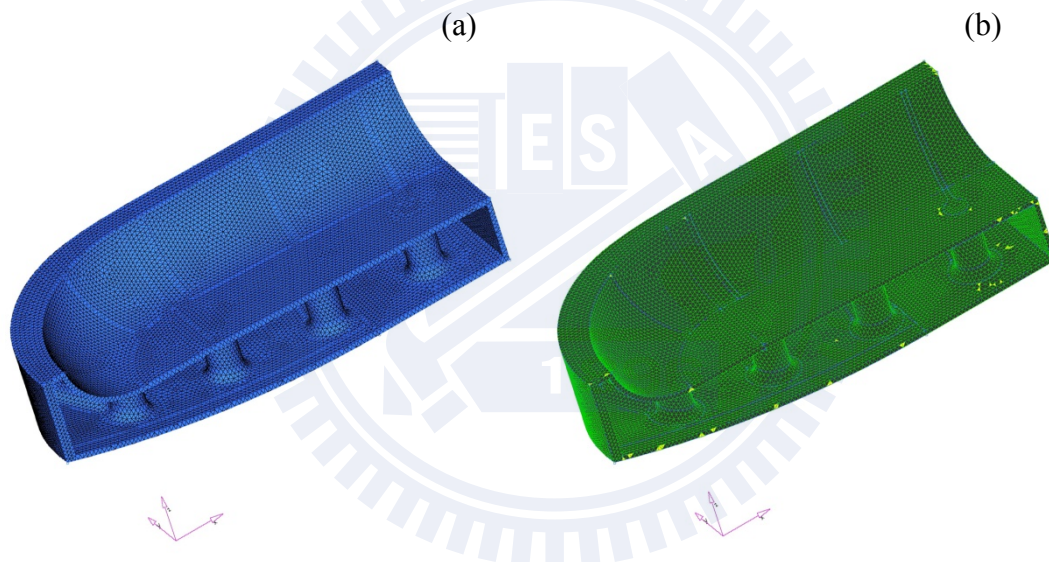


圖 4.5 (a)網格自動規劃生成之模型(b)以整理功能進行調整

但為了使後續建立之四面體網格能有更好之品質，利用 Hypermesh 的網格編輯功能以及邊緣等效功能 (Equivalent)，對部分網格區域進行調整。Hypermesh 網格編輯功能包含了製作 (Create)、合併 (Combine)、劈開 (Split) 與整理 (Clean Up)。其中整理係作為網格之即時編輯與綜合判斷，可以拖曳節點方式改善元素品質，依設定之判斷範圍將網格分成良好、警告與失敗三種等級，如圖 4.5(b)之黃色塊為根據預設之判斷範圍顯示網格缺陷超過警告標準者。

單純以整理之拖曳節點方式調整元素品質，所能達到之改善效果有限，因此需另外配合製作、合併、劈開以及邊緣等效功能使元素品質得到相當程度之改善，如圖 4.6(a) 與圖 4.6(b)所示，圖中可以看出元素在幾何品質上有明顯。以同樣的手法將模型整體的網格元素進行調整後，以立體工具進行四面體網格規劃，可得網格幾何品質良好之鞋氣墊立體網格模型，厚度方向為單層之網格密度，如圖 4.7 所示。

以 Hypermesh 中之網格元素品質評斷工具對元素幾何缺陷進行分析，主要判斷準則有翹曲 (Warpage)、長寬比 (Aspect Ratio) 與歪曲 (Skew)。Hypermesh 中翹曲係定義為元素面偏離平坦形狀之情況，以幾何構成而言三角形或四面體並不會有此缺陷，翹曲缺陷預設在五級以下可以接受；長寬比係定義為元素之最長邊緣與最短邊緣之比例，長寬比缺陷預設在 5:1 以下可以接受；歪曲係定義為各角與其對邊中點之連線群彼此間之交角，歪曲缺陷預設在小於  $60^\circ$  以下可以接受。以 Hypermesh 之網格元素品質工具，對已建立之鞋氣墊立體網格模型共 109,083 個元素進行分析，確認該模型元素全部符合預設長寬比之要求，元素中最大之比例為 3.08；亦確認該模型元素全部低於預設歪曲缺陷之警戒標準，元素中最大之角度為  $56.86^\circ$ 。

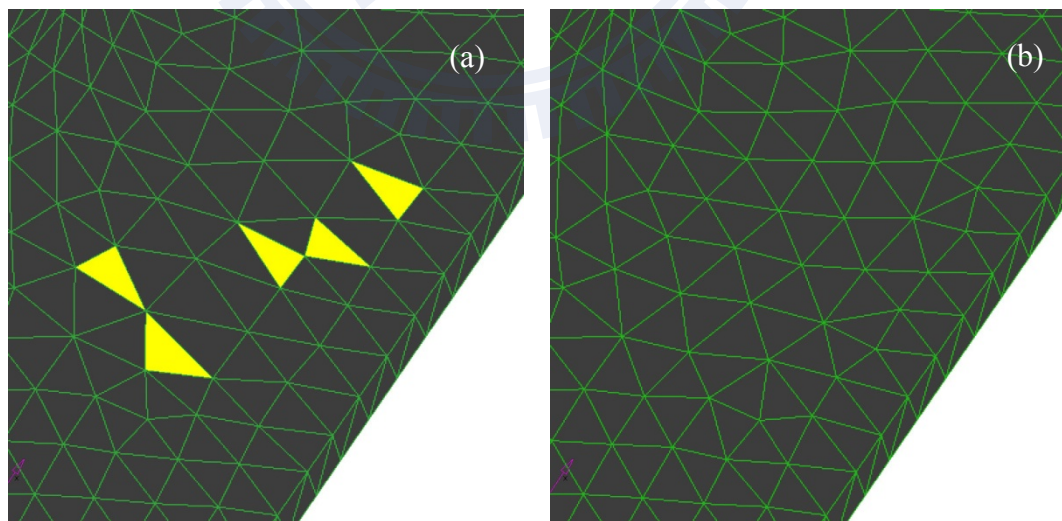


圖 4.6 (a)調整前之網格(b)調整後之網格

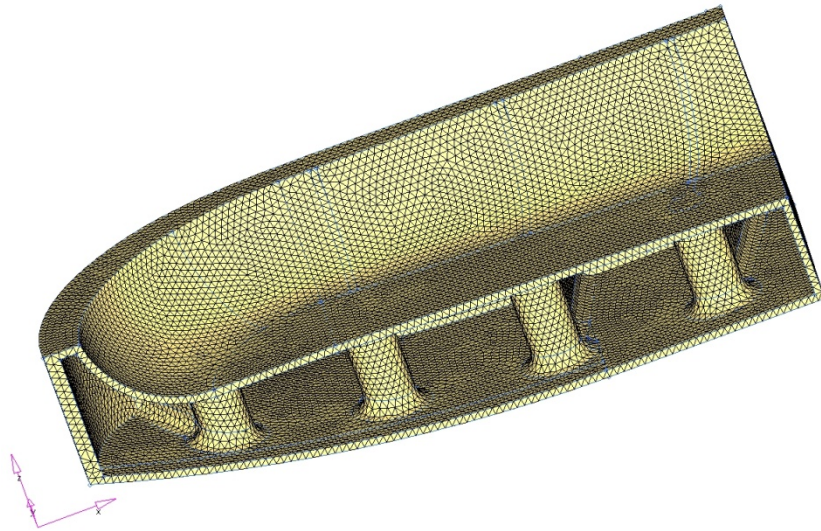


圖 4.7 網格幾何品質良好之鞋氣墊模型

#### 4.4.3 邊界條件與模擬參數

鞋氣墊吸震試驗有限元素模擬之邊界條件主要有四項，分別為鞋氣墊定位拘束、對稱面拘束、內部膨脹壓力與衝槌之衝擊邊界條件。前面三項拘束與壓力之邊界條件因選取之複雜操作需求，皆在 Hypermesh 中完成設定；第四項衝槌之衝擊邊界條件因與接觸條件設定相關，故在 MSC.Marc 中完成設定。

鞋氣墊的定位拘束與對稱面拘束分別如圖 4.8(a)與圖 4.8(b)所示，其中定位拘束因牽涉到鞋氣墊模型底部為不規則曲面，需以 Hypermesh 依幾何定義選擇的功能完成。鞋氣墊內部膨脹壓力如圖 4.8 所示，主要透過 Hypermesh 設定壓力邊界條件時之中止角(Break Angle) 限定選取在鞋氣墊體內部氣室之元素群表面。

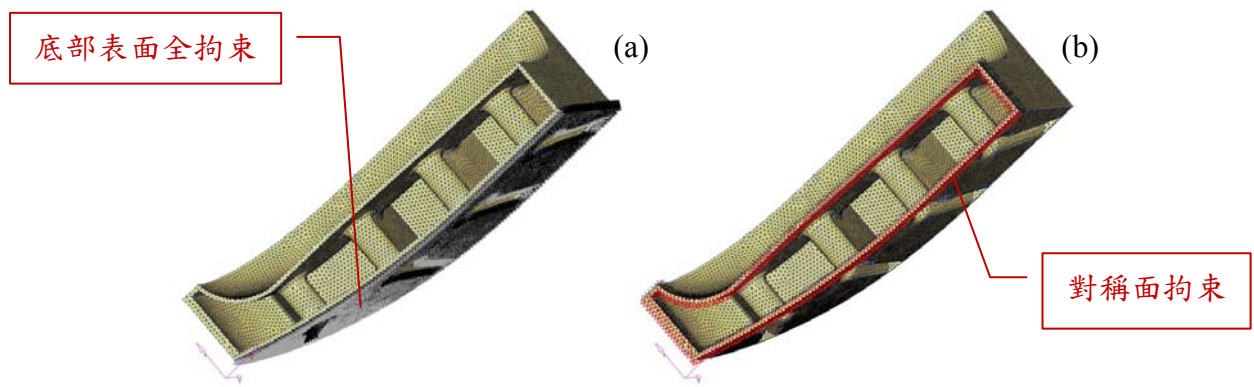


圖 4.8 (a)鞋氣墊模型定位拘束(b)鞋氣墊模型對稱面拘束



圖 4.9 鞋氣墊內部膨脹壓力邊界條件

將 HyperMesh 有限元素模型匯入 MSC.Marc，同時將衝槌併入，建立鞋氣墊吸震試驗模擬之完整模型如圖 4.10 所示，衝槌的尺寸及外型皆以 SATRA 規範 PM142 為基準。為了節省運算資源，衝槌係建立為剛體曲面，但因在 MSC.Marc 中剛體不能設置質量與重力加速度之邊條件，所以在衝槌頂另外貼合一單位體積元素，將其與衝槌之接觸關係設為黏合 (Glued)。在衝槌之衝擊邊界條件方面，為使運算效率提升，衝槌位置一開始即預設與鞋氣墊接觸，其經重力加速度作用產生之接觸前掉落速度另行計算，設為速度邊界條件施於衝槌頂黏合之單位體積元素。



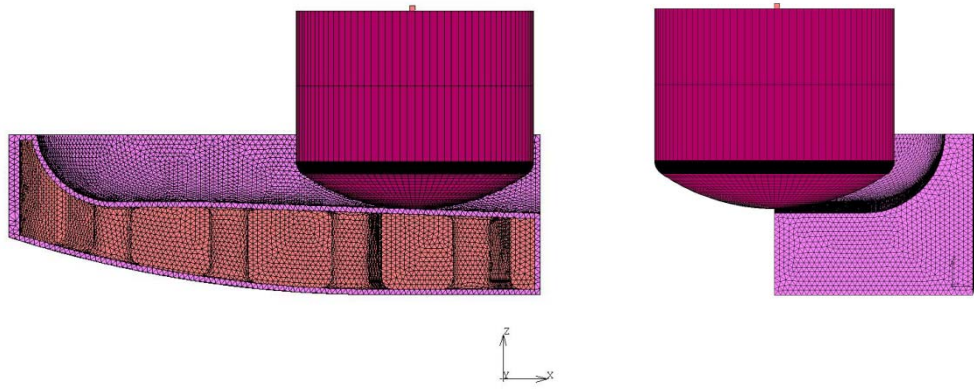


圖 4.10 鞋氣墊吸震試驗模擬之完整模型

鞋氣墊吸震試驗模擬在 MSC.Marc 中大致設定的順序與液壓膨脹實驗模擬相同，對網格規劃、幾何性質設定、材料性質設定、接觸條件設定、邊界條件設定、負載條件設定、工作設定與啟動模擬依次進行設置。

但與液壓膨脹實驗模擬不同，除了因應衝槌動作需設速度之初始條件外（Initial Conditions），鞋氣墊吸震試驗模擬也因為牽涉到計算氣體內部體積計算使用 Cavity 功能，所以必須另外設置建模工具項（Modeling Tools），而其負載條件也因 Cavity 之運算特性需分立為靜態負載與動態負載。本研究在以下分為前處理階段與求解器階段兩個部份，對鞋氣墊吸震試驗模擬之設定做講解。

#### 4.4.3.1 前處理階段

鞋氣墊吸震試驗模擬之前處理器階段設定步驟包含網格規劃、幾何性質設定、材料性質設定、建模工具項、接觸條件設定、初始條件設定與邊界條件設定。

- （1）網格規劃：除了元素類型定義，主要的網格規劃工作均已在 Hypermesh 中完成。鞋氣墊吸震試驗模擬使用元素編號 157 具有 Hermann 特性之全積分四面體，黏貼於衝槌上之單位體積網格使用元素類型編號 117 之減積分六面體。

- (2) 幾何性質設定：鞋氣墊吸震試驗模擬之所有網格幾何性質皆設定為機械力學元素之立體固體 (3-D, Solid)。
- (3) 材料性質設定：將 3.3 節中決定之五參數值輸入鞋氣墊吸震試驗模擬之三階 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型中，並套用到鞋氣墊之主體網格；建立一等向性高強度之材料模型楊式係數為  $10^8$ ，蒲松比 0.3，套用於衝槌頂之單位體積網格，並根據 SATRA 規範 PM142 的數據給予其一質量密度 0.00425。(註：原本試驗使用之質量為 8.5 kg，因為模擬中所有長度單位都使用 mm，包括重力加速度 g 值，加上為對稱模擬，故其質量密度為  $8.5 \times 10^{-3} / 2 = 0.00425$ )
- (4) 建模工具項：用於建立 Cavity 可作用之區域，Cavity 之計算原理如附錄 I 所示。此處所建立之類型為立體的元素面 (3-D, Face)，建立方法為透過 MSC.Marc 之群組選擇 (Select, Set) 功能，選定由 Hypermesh 所建立鞋氣墊內部膨脹壓力邊界條件作用之元素群表面。建立後將其參照壓力 (Reference Pressure) 設為一大氣壓，約 0.101 MPa。
- (5) 接觸條件設定：在接觸體設定中，鞋氣墊之主體網格與衝槌頂之單位體積網格設為變形體，衝槌之構成曲面設為力控制之剛體。在接觸關係的設定中，鞋氣墊本體因為膨脹與受衝擊後之大變形，位於支撐肋區域之元素會發生互相接觸的情形，因此需設自體觸碰，摩擦係數為 0.3；鞋氣墊之主體網格與衝槌之構成曲面設為觸碰，因實際試驗之衝槌表面光滑，故摩擦係數設為 0.2；衝槌頂之單位體積網格與衝槌之構成曲面設為黏貼。
- (6) 初始條件設定：因為衝槌之預設位置即為與鞋氣墊本體網格接觸，所以必須給予衝槌一初始速度值，以模擬實際試驗經重力加速度作用後與鞋氣墊網格接觸前之速度。此處將初始速度值設為 -990.253 mm/s，作用於衝槌頂單位體積網格之各節點上，同時為配合 Cavity 功能將負載分兩部份之情況，需加上一延遲作用時間以使模擬過程正確。



- (7) 邊界條件設定：鞋氣墊網格之邊界條件除了有定位拘束與對稱面拘束，保留 Hypermesh 所匯入的設定，此外還包含 Cavity 之相關邊界條件。因 Cavity 計算方式為先膨脹完畢再計算壓縮後體積變化，邊界條件需另外設定 Cavity 壓力施力 (Pressur Load，用於膨脹) 與 Cavity 質量施力 (Mass Load，用於受壓縮)。Cavity 壓力施力之壓力值設為模擬實際充氣之 15psi，即 0.103421MPa；Cavity 質量施力設為常數質量且為封閉區域 (Constant Mass, Closed Cavity)。衝槌之衝擊邊界條件皆施於衝槌頂單位體積網格，包含重力加速度，設為  $-9806 \text{ mm/s}^2$ ，設於網格元素上；模擬實際試驗衝槌只有垂直向動作之拘束條件，只留  $z$  方向可動，設於網格各節點上。

#### 4.4.3.2 求解器階段

求解器階段中，包含負載條件設定與工作設定，其中負載條件設定因 Cavity 功能採用先膨脹完畢再計算壓縮量之方式，負載條件必須分為靜態負載條件與動態負載條件。

靜態負載條件與動態負載條件使用相同之接觸關係設定，而為了方便觀察模擬結果，皆採用固定時間步增量之計算方式，其他設定如以下說明。

- (1) 靜態負載條件：靜態負載條件為靜態分析型 (Static)，總值進行時間單位為 1，分為 10 步，每步 0.1 時間單位。作用之邊界條件有鞋氣墊網格之 Cavity 壓力施力、定位拘束與對稱面拘束；以及衝槌頂單位體積網格之方向拘束，以使衝槌在靜態階段與膨脹之鞋氣墊網格接觸仍保持垂直向位移。
- (2) 動態負載條件：靜態負載條件為動態響應分析型 (Dynamic Transient)，總值進行時間單位為 0.2，分為 0.001 時間步增量，與 0.0005 時間步增量，以上述兩組不同動態負載時間步設定對時間步之影響做討論。作用之邊界條件有鞋氣墊網格之 Cavity 質量施力、定位拘束與對稱面拘束；以及衝槌頂單位體

積網格之方向拘束與重力加速度。

鞋氣墊吸震試驗模擬之工作設定分為以下部份說明：

- (1) 初始作用力除了作為初始條件之衝槌初速度外，亦包含鞋氣墊網格之定位拘束、對稱面拘束與衝擊邊界條件之方向拘束，以確保模擬初始階段之穩定性；鞋氣墊網格的 Cavity 質量施力亦必須在初始作用力中開啟，以確保 Cavity 質量施力可順接 Cavity 壓力施力膨脹完後之體積數據，使後續之動態響應分析可正確進行。
- (2) 接觸控制設定中，將摩擦模式設為庫倫摩擦，並啟用初始接觸之設定；在分析選項裡，分析類型設為大應變分析，選用 Single-Step Houbolt 做為隱式動態響應控制器。
- (3) 工作參數除了選擇 Multifrontal Sparse 做為求解法，為避免運算超出記憶體負荷，開啟外核元素儲存 (Out-of-Core Element Storage) 將進行模擬超過容量之部分寫入硬碟內以取代快取記憶體之存讀運算。

#### 4.5 吸震試驗模擬結果

在本研究之吸震試驗模擬中，0.001 時間步增量與 0.0005 時間步增量進行所需時間分別為 238670 秒與 291571 秒，因此若將 0.001 時間步增量減半為 0.0005 時間步增量增加約 22.16 %之運算時間。

本研究進行模擬之鞋氣墊模型在厚度方向密度以單層為主，而整個吸震試驗模擬過程中經歷極大之變形量，最大之等效總應變量達 0.723，變形狀況如圖 4.11 所示。模擬主要分析之目標為衝槌穿透距離、衝槌減加速度與能量回饋率，同時也列出內部封閉空間之壓力與體積數據以檢視 MSC.Marc 中 Cavity 之計算功能是否合理。

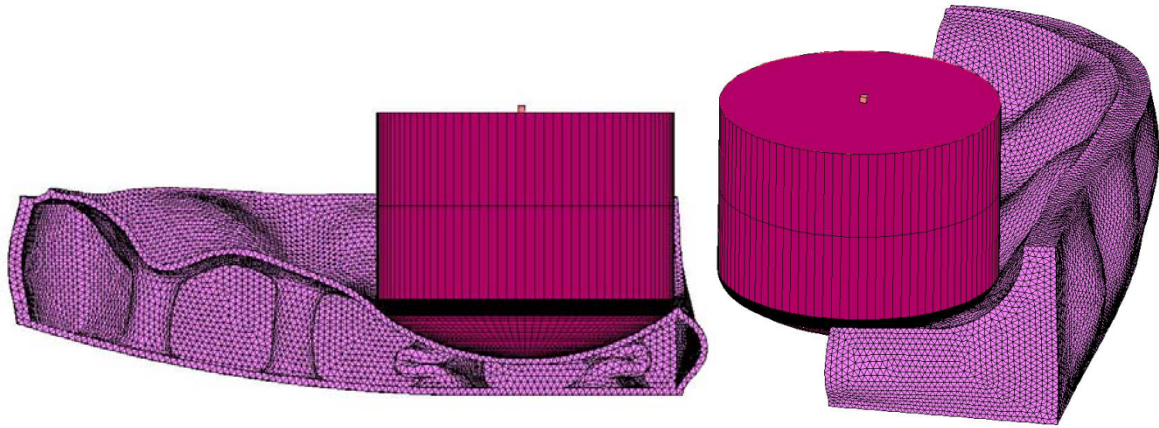


圖 4.11 鞋氣墊模型在吸震試驗模擬中最大變形狀況

#### 4.5.1 內部壓力變化

鞋氣墊在靜態階段膨脹之壓力變化狀況如圖 4.12(a)所示，鞋氣墊在動態階段衝擊之壓力變化狀況如圖 4.12(b)所示，圖中紅黃線為內部容積，藍綠線圍內部壓力。此壓力狀況數據係用來檢測 Cavity 之計算功能是否合理，曲線圖之橫軸為時間，單位為 sec；左縱軸為氣墊內部壓力狀況，單位為 MPa；右縱軸為鞋氣內部之容積，單位為  $\text{mm}^3$ 。

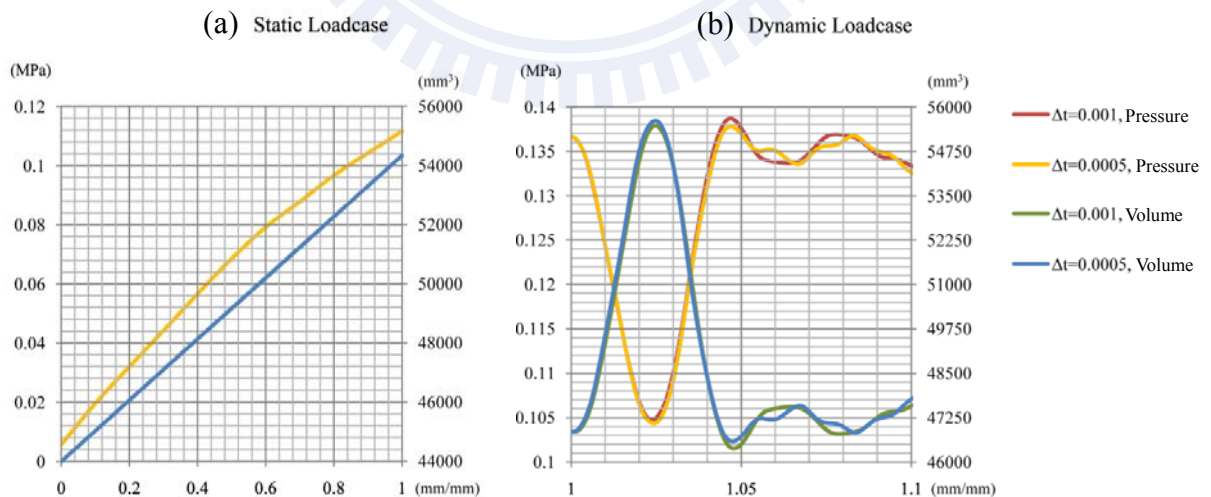


圖 4.12 (a)靜態階段膨脹之壓力變化(b)動態階段衝擊之壓力變化

### 4.5.2 衝槌穿透距離

根據 SATRA 試驗規範 PM142，衝槌對鞋氣墊之穿透距離係定義為衝槌在接觸氣墊後下沉之距離，達到開始反彈之最低點時有最大穿透距離。因為進行分析之模型中，衝槌一開始就與氣墊接觸，因此在進入動態負載階段時，衝槌之下降距離即為其穿透距離。鞋氣墊吸震試驗模擬中衝槌穿透距離之曲線圖如圖 4.12 所示，橫軸係單位之時間，單位為 sec；縱軸為穿透之距離，單位為 mm；圖面中 0.001 時間步增量與 0.0005 時間步增量之總穿透距離分別為 13.76mm 與 13.80mm。

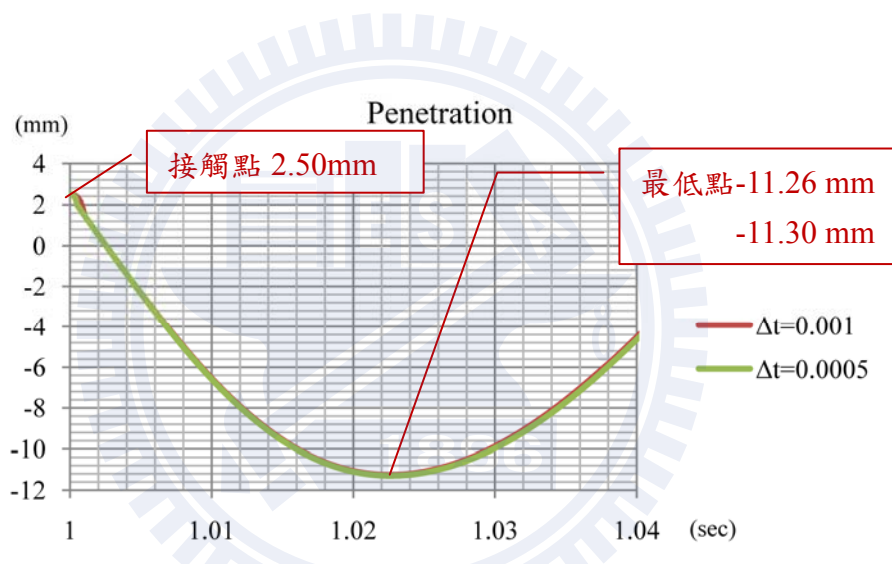


圖 4.13 衝槌穿透距離與時間之關係曲線圖

### 4.5.3 衝槌減加速度

鞋氣墊吸震試驗模擬中衝槌之減速度曲線圖如圖 4.13 所示，橫軸為時間，單位為秒 sec；縱軸為減加速度值（正值，重力加速度為負值），單位為  $\text{mm/s}^2$ ，對於各類型的鞋中底避震系統，在接受衝擊時產生越低之最大減加速度，代表有越好的吸震性。

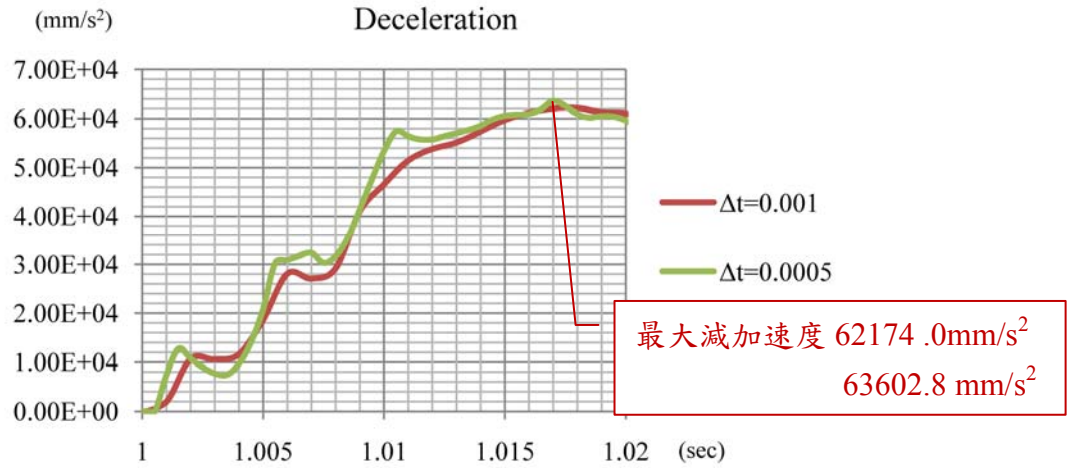


圖 4.14 衝槌減加速度與時間之關係曲線圖

#### 4.5.4 能量回饋率

鞋中底避震系統之能量回饋率係以回彈後之高度計算，鞋中底避震系統能量回饋效率越好，代表其能量耗損越少，運動產生之疲累越低。根據 SATRA 試驗規範 PM142，鞋中底之能量回饋率  $E$  可直接寫為下式：

$$E = \frac{H_{re}}{H_{og}} \quad (4.1)$$

式中之  $H_{og}$  為衝槌掉落前之原始高度，即為 50 mm， $H_{re}$  則為衝槌最大回彈高度。

在鞋氣墊吸震試驗模擬中，0.001 時間步增量的動態負載階段可算得能量回饋率  $E$  為 52.78 %；0.005 時間步增量的動態負載階段可算得能量回饋率  $E$  為 53.25 %。

#### 4.6 綜合討論

從鞋氣墊吸震試驗模擬之結果可以看出，從圖 4.12 來看，鞋氣墊吸震試驗模擬內部體積與壓力之關係呈現反比狀態，與實際之物理現象相同，所以 MSC.Marc 中 Cavity 計



算功能之運算結果為合理。然而若單看鞋氣墊網格模型在靜態負載階段之膨脹情況，與真實充滿 0.101 MPa 之鞋氣墊相較，變形情況較為明顯，即模擬所得到的分析結果呈現材料模型過軟的現象，此部份將在後續綜合討論中將模擬與實際吸震試驗之差異提出作比較，另外也將對鞋氣墊網格模型厚度方向密度影響、時間步增量之影響與模擬之變形量進行討論。

#### 4.6.1 模擬與實際吸震試驗之差異

實際之鞋氣墊吸震試驗由財團法人鞋技中心根據 SATRA 試驗標準 PM142 進行，期與本研究之模擬分析結果之比較如表 4.1 所示。對最大衝槌穿透距離而言，模擬分析結果比實際試驗多大約 2.3 mm，下陷深度多出約 20 個百分點；最大衝槌減加速度比實際試驗少約 23000 mm/s<sup>2</sup>，減少幅度約 27 個百分點；能量回饋率比實際試驗少約 8.5 %，減少幅度約 14 個百分點。從這些結果可以看出，本研究衝擊試驗使用之鞋氣墊模型呈現較實際材質「軟」之狀態。

表 4.1 實際吸震試驗與模擬分析結果比較

	實際吸震試驗	0.001 時間步增量	0.0005 時間步增量
最大衝槌穿透距離	11.5 mm	13.76 mm	13.80 mm
最大衝槌減加速度	85000 mm/s <sup>2</sup>	62174.0 mm/s <sup>2</sup>	63602.8 mm/s <sup>2</sup>
能量回饋率	61%	52.78 %	53.25 %

會造成上述情況推論主要由材料因素造成，從液壓膨脹試驗模擬之分析結果於實際試驗比較可知，本研究使用之超彈體材料模型在相同應變下有較實際材料低之應力值，使得後續鞋氣墊在進行吸震試驗模擬產生較實際鞋氣墊大之變形，而因此反應出較低之衝槌減加速度與能量回饋率。

除了在材料性質上所造成的影響，鞋氣墊之模型與邊界條件之設定此處也提出討論。



本研究使用之鞋氣墊模型為簡化之立體幾何模型，以後腳跟部位簡化並採用對稱面拘束簡化，使其內部空氣容積較實際全掌之鞋氣墊低；而鞋氣墊模型在厚度上採用粗估之平均值，假設外圍壁為 2.0 mm，其餘各處為 1.2 mm，實際鞋氣墊各處厚度並非相同。

雖然較少之內部空氣容積會使鞋氣墊模型在受到壓縮時，內部壓力改變較實際鞋氣墊快，可是因鞋氣墊後腳跟部位容積較前掌高出許多，推論判斷對於模擬的影響並不大。而厚度與實際鞋氣墊相異所造成的影響難以估計，但若要考慮厚度不一之逆向建模困難度極高，以一般 CAD 繪圖並無法建立。

鞋氣墊吸震試驗模擬之衝槌邊界條件與實際試驗相仿，衝擊位置亦同樣設在後踵往前 1/4 全腳長之處，但鞋氣墊模型採用底部表面全拘束的邊界條件，與實際鞋氣墊在進行試驗時在周遭佈置固定物避免產生滑移的情況並不相同，如圖 4.15 所示。實際鞋氣墊因底部無固定，在試驗時會以衝擊處為中心些微向上翹曲，鞋氣墊模型因底部拘束固定而無此現象，使其模擬分析結果與實際試驗產生些許差異。可是，若在鞋氣墊模型周圍與底部設置剛體與接觸條件進行模擬，雖然可與實際試驗狀態較為接近，但以現行之電腦運算設備而言將會增加相當可觀之計算時間。

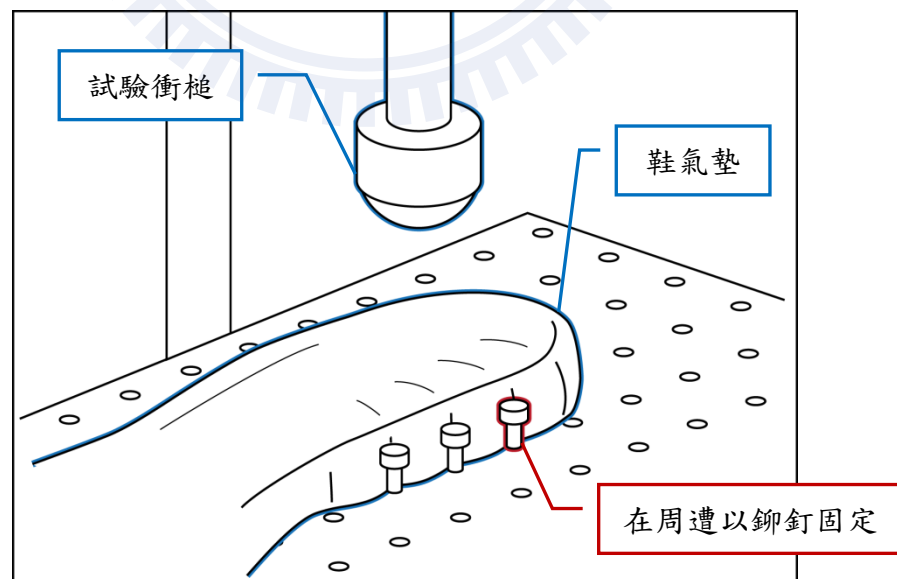


圖 4.15 鞋氣墊實際試驗示意

#### 4.6.2 鞋氣墊網格模型厚度方向影響

鞋氣墊吸震試驗模擬之主要分析模型，在厚度方向之網格密度以單層為主。然而，以膜狀結構之有限元素分析而言，通常會要求厚度方向之網格密度在三層以上，以確保模擬結果之正確性與可信度。但因為第三代立體支撐鞋氣墊係屬薄膜與柱之綜合立體架構，以厚度方向之網格密度為單層之對稱簡化模型就有 109,083 個元素，而本研究另外建立厚度方向之網格密度為雙層之對稱簡化模型之元素數目達 423,529 個元素。

因為厚度方向網格密度為雙層之鞋氣墊對稱簡化模型，其元素數目過於龐大造成電腦快取記憶體容量無法負荷，除了需開啟和外元素儲存之功能外，也必須將核外運算組合功能（Out-of-Core Assembly）開啟，將分析檔案拆成多部份，以硬碟之儲存空間輔助運算，如此情況使得模擬計算耗時大幅度提高。以動態負載條件中時間步增量為 0.001 之設定來看，厚度方向網格密度為單層之鞋氣墊模型動態負載階段共需 64 個小時完成，但厚度方向網格密度為雙層者在動態負載階段中每一步就需 30 到 50 個小時。所以，根據上述因素，本研究模擬結果取厚度方向之網格密度為單層者作主要討論對象。

圖 4.13 為厚度方向網格密度雙層者與單層者在靜態負載階段之內部封閉空間膨脹狀況比對，雖然單層之膨脹只比雙層少約 3 個百分點，但此其分析結果之收斂性還是有討論空間，未來可用更多組在厚度方向上不同之網格密度的鞋氣墊模型來進行比對。

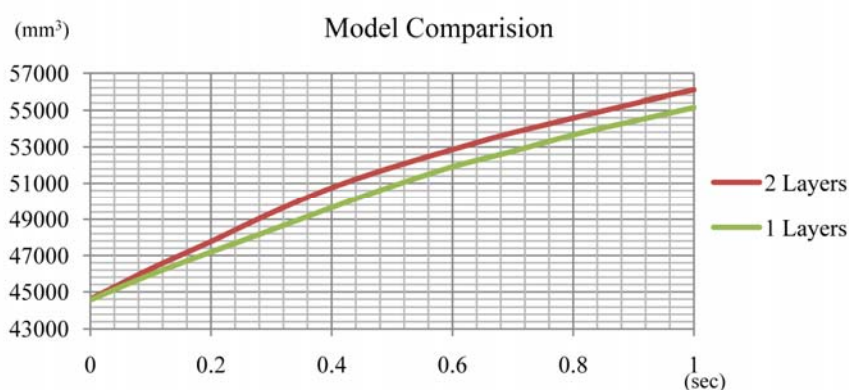


圖 4.16 鞋氣墊模型在靜態階段之體積變化

#### 4.6.3 時間步增量之影響與模擬之變形量

從 0.001 時間步增量與 0.0005 時間步增量兩組不同設定的分析結果來看，可發現選擇以 SSH 為動態響應控制器，雖然時間步增量的增加會對模擬產生影響，但在同樣一段極短的時間內增加後對模擬影響並不大。

在圖 4.12 中可看出除了衝擊後產生的震盪外，兩組時間步增量設定不同之模擬分析結果其數值與趨勢幾乎相同，相同的情況也出現在圖 4.13 中。而圖 4.14 中雖然有些許落差，但是兩者之最大值與數值改變趨勢仍然有很高之相似度。在表 4.1 中，將 0.001 時間步增量與 0.0005 時間步增量作比較，前者最大衝槌穿透距離較後者少 0.04 mm，約低 0.3 個百分點；前者最大衝槌減加速度較後者少  $1428.8 \text{ mm/s}^2$ ，約低 2 個百分點；前者能量回饋率較後者少 0.47%，約低 0.8 個百分點，以上的數據結果都顯示兩者的差異相當小。

所以在考慮到極短時間之內時間步增量影響小與模擬之運算效率，若於動態響應分析中使用 SSH 時，時間步增量之設定應選擇可完成模擬之最大步增量（若時間步增量過大有可能使動態響應模擬之不穩定性提高，進而使分析結果發散無法收斂），以減少總時間步之數量，如此使分析所需時間降到最低而提高模擬之運算效率。

鞋氣墊吸震試驗模擬過程中變形量極大，最大之等效應變量會達到 0.723，最大變形如圖 4.11 所示。本研究最早期建模時，並未考慮以 Hypermesh 做調整，而鞋氣墊之網格元素在膨脹分析時就容易產生網格過度扭曲或者變形過大，進而導致模擬中斷。

後來經過 Hypermesh 以調整後之平面三角元素生成立體四面體，在吸震試驗動態階段變形量極大的情況下，仍可穩定地進行模擬而沒有發生過度變形或扭曲。由此可知對於鞋氣墊此類變形量極大之物件，在建模階段建立良好幾何品質之網格元素是不可或缺的重點工作。

#### 4.6.4 本章小結

在本章中，完成了對鞋氣墊吸震試驗之有限元素模擬，對鞋氣墊在動態響應分析的各項設置進行確認，建立出鞋氣墊進行動態有限元素模擬系統的基礎架構。由分析結果數值與實際試驗數值之比較來看，兩者在數值之趨勢上有很高的相似性，雖然就實際的數值而言模擬與試驗有所落差，但是根據液壓膨脹實驗模擬對材料模型驗證的討論結果來看，若能改善材料模型，則將可有效降低分析結果數值與實際試驗數值的差異。

所以，未來鞋氣墊若要繼續發展動態之有限元素模擬分析系統，可以本研究之內容所建立之動態有限元素模擬系統的基礎架構可作為參考，使研究工作進行更順利。



## 第五章 結論

### 5.1 鞋氣墊動態有限元素分析系統繼續發展之可行性

在早期鞋業中，CAE（Computer-Aided Engineering，電腦輔助分析）主要用於量產鞋樣而非用於輔助設計，原因係為鞋體的運動過程牽涉到太多不同因素，每個人擁有不同的腳型，甚至是不同的走路習慣使得足部的受力狀態不盡相同，在如此前提下要對鞋樣進行任何特別改良設計都很困難，所以傳統鞋業在設計鞋樣都以「最大公約數」為準則，在關鍵受力結構部分使用簡單且對稱的設計，使生產之鞋子能迎合最多人的需求。

但近年來 CAE 已經逐漸廣泛應用，其中又以有限元素為大宗，在鞋中底避震系統或鞋大底系統之結構設計上扮演很重要的角色，如 Adidas 公司所生產之「BOUNCE」系列鞋款的鞋中底簍空結構，或是 Nike 公司所生產之「Free」系列鞋款之大底結構，都是以有限元素分析來輔佐設計工作而完成的產品。

但對鞋氣墊而言，有限元素分析的應用特別不容易，因為除了 TPU 本身之材料模型特性與實品之材料性質特性需驗證外，墊體內封閉的空氣之可壓縮性也是模擬的一項難題。不過，近年來由 Nike 公司所推出「AirMax 360°」系列鞋款的鞋氣墊中底也可以看到導入有限元素分析的痕跡，在該鞋款氣墊上所分佈之中空支撐孔柱不論位置或大小都呈現出有些微差異的非規則分佈。

本研究所規劃之吸震試驗有限元素模擬分析雖然與實際試驗結果有所落差，但是在此一已建立之系統制度下，包括了適用之材料實驗理論、材料實驗規劃、超彈體模型理論及調整、鞋氣墊有限元素網格規劃建立、有限元素軟體設置與應用、適用之動態模擬理論等都有相當的論述與參考資料，鞋氣墊應用於動態之有限元素模擬分析可謂已有完備之雛型。



本研究之動態模擬是以吸震試驗為主要之模擬對象，但在驗證樣本數足夠以提升可信度的條件下，延伸發展其他各種運動狀態之動態有限元素模擬是可行的，意即將可在不同之運動狀態模擬中，取得其受力後之壓縮與反彈數據做為設計工作之參考資訊。因此，若後續 5.2 節所提及之改善與發展方向能繼續進行，則本研究建立之鞋氣墊動態有限元素分析在未來將有很大的發展價值存在。

## 5.2 改善與發展方向

本研究僅建立鞋氣墊動態有限元素分析系統之雛型，事實上在很多細節以及與實體驗證之精確度都還有相當之改善空間。本節對未來研究改善與發展方向做討論，共分成四個部份，依序分別為實驗規劃的改良、其他超彈體材料模型測試、逆向建模改良與模流分析、以及更多動態模擬分析之驗證樣本建立。

### 5.2.1 實驗規畫改良

本研究之單軸向實驗所使用的測量方式因考量到成本，所以使用機具內夾具上下端光學尺所量得之數據資料作為應變狀態，但實際上因 TPU 屬於偏軟之高分子材料，應當使用非接觸式之測量儀器，除了能取得較精確之實驗應變量數據，最主要可將實驗過程中夾具滑移造成的影響降到最低，因為當單軸向實驗進行時，試片兩端事實上可以觀測出有些許滑移現象。而雖然平面剪力實驗有另外設計夾具墊片改善夾持狀態，但因實驗過程中承受較簡易拉力實驗大之總拉力，其夾具滑移現象亦來得較為明顯，因此，平面剪力實驗之夾具需再另行設計，試片規格亦需重新再作修正與調整。

在本研究中，液壓膨脹實驗雖然最終測量換算的實驗數據呈現不合理的狀態，但是液壓膨脹實驗有其建立之必要性存在，因為鞋氣墊在受到壓縮內部壓力提升時，其受力狀態與液壓膨脹之受力狀態極為相似，都是承受一均勻分佈之側向壓力而變形，而以本



研究進行實驗後剖開的試片觀察發現，其在原本作用區域半徑之  $1/2$  範圍內在大變形量的情況下仍屬雙軸拉伸，如圖 5.1 虛線所示。因此若能有效地改善液壓膨脹實驗的設備與換算式，則建議優先選擇液壓膨脹實驗以取代一般雙軸拉力實驗。

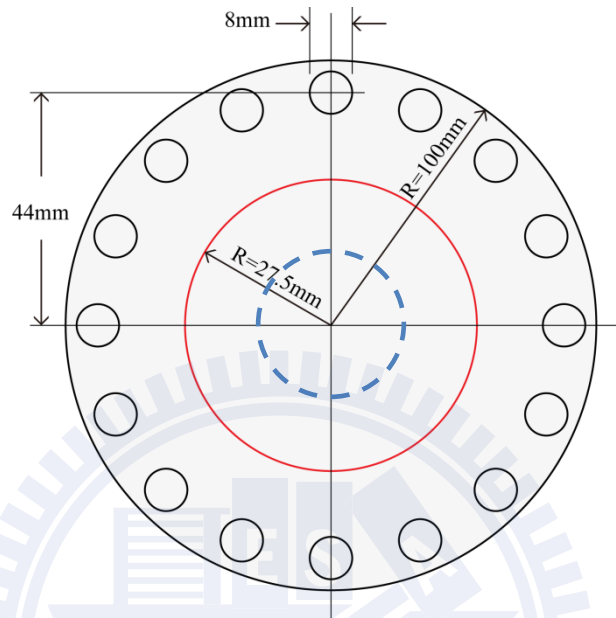


圖 5.1 在大變形時仍維持雙軸拉力應變狀態之範圍

所以本研究之液壓膨脹實驗的實驗設備中，除了需另增加一穩壓閥以穩定壓力，測量的部分應使用非接觸式測量設備，並將原本剖面上單一測量點增加為二個測量點，並測量這兩個測量點水平距離的變化，如圖 5.2 所示，量得水平距離  $D$  與兩點各別之膨脹高度，便可將測量的範圍縮小到原本作用區域半徑之  $1/2$  範圍以內，並有利於修正其非球狀之大變形應變換算式。

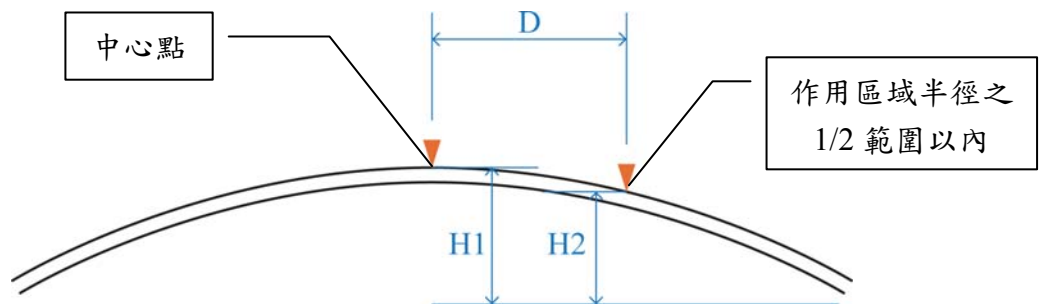


圖 5.2 二測量點之量測方式

### 5.2.2 其他超彈體材料模型測試

本研究所使用的超彈體模型係以五參數項之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程建立，然而，根據 3.1.2 小節調整參數之討論結果我們可以推論得知，雖然五參數項之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程對於橡膠類之材料特性描述可以有很好的表現，但並不適合用來描述材料應力應變曲線斜率變化過大之材料，本研究使用之 TPU 材料便屬於此範疇。在 3.3 節中，模擬的結果僅列出所設定之兩組參數項群之分析結果，實際上本研究亦另行設定其他參數組對不同數值影響之變形進行比較，而分析結果的變化趨勢如圖 3.12 一樣，只要模擬對象在膨脹高度 10 mm 到 15 mm 前的圖形與實際實驗越接近，就會在後段曲線高出實際實驗越多。

上述情況意即所建立的超彈體材料模型若在變形初期應力應變特性與實際材料相近，但是在變形後期同樣的應變下其應力比實際材料還要高。也就是說使用五參數項之三階 Mooney-Rivlin 超彈體方程建立的超彈體模型，沒有辦法很完善的描述 TPU 材料「突然變軟」的特性。事實上，現在對各套商用軟體來說，超彈體材料模型依然是處於不斷發展更新的階段以尋求更完善之材料特性描述。因此，對於本研究使用之 TPU 材料，建議未來再使用更多其他型態之超彈體材料模型進行模擬比較，以選出最適用之超彈體材料模型。

### 5.2.3 逆向建模改良與模流分析

本研究建立之鞋氣墊立體幾何模型係為經過簡化的版本，實際上未來要進行更完整的模擬，應當要使用更完備的鞋氣墊立體幾何模型為網格建立規畫的基礎。除了必須將鞋氣墊建立全腳掌的立體幾何模型外，鞋氣墊的厚薄也必須考量，因為本研究在建立鞋氣墊立體幾何模型時，假設外圍壁的厚度均為 2.0 mm，其餘各處之厚度皆為 1.2 mm，但第三代立體支撐鞋氣墊係以自升高壓之中空成形製程生產，在鞋氣墊本體各處之厚薄

實際上皆不盡相同。

未來除了繼續發展鞋氣墊之動態有限元素模擬分析外，亦需要發展鞋氣墊之模流分析來加以配合。因為現階段雖然第三代立體鞋氣墊在製程技術上有所突破，但是對生產時鞋氣墊於模具內部成形狀態之掌控仍然有限，必須透過不斷地調整測試並修改模具才能將成形品質控制在一定的標準。透過模流分析，除了能對鞋氣墊的成形狀態有更好的預測外，若能將模流分析後的結果輸出成立體幾何模型，便可以此模型做網格規劃，再進行動／靜態有限元素分析，則輔助鞋氣墊設計工作的有限元素分析系統即建立起完整的運作體系。

#### 5.2.4 更多動態模擬分析之驗證樣本建立

本研究動態響應分析控制器選用 SSH，雖然在各種非限性有限元素分析中依然非常穩定，但因為此種動態分析計算法帶有數值減幅性，其模擬分析結果之精確性還有討論空間，必須要有更多的試驗驗證樣本來確定其模擬分析結果之合理性。所以除了進行衝槌質量為 8.5 kg 之試驗外，亦必須規劃不同衝槌質量的試驗進行驗證，建立更多樣本數來確認以 SSH 為動態響應控制器是否有足夠的合理性。

此外，由財團法人鞋技中心所取得之試驗結果，在衝槌穿透距離與衝槌減加速度兩項數據上只有單一最大値之數據，但因為 TPU 這類之高分子材料在彈性範圍時其應力應變即呈現非線性之趨勢，在整個運動過程中受力產生變形的狀況乃非單純的比例關係，所以未來在進行試驗時，應當將整體過程之數據紀錄做為列資料並製成圖表，與模擬分析結果作更完整的比較。

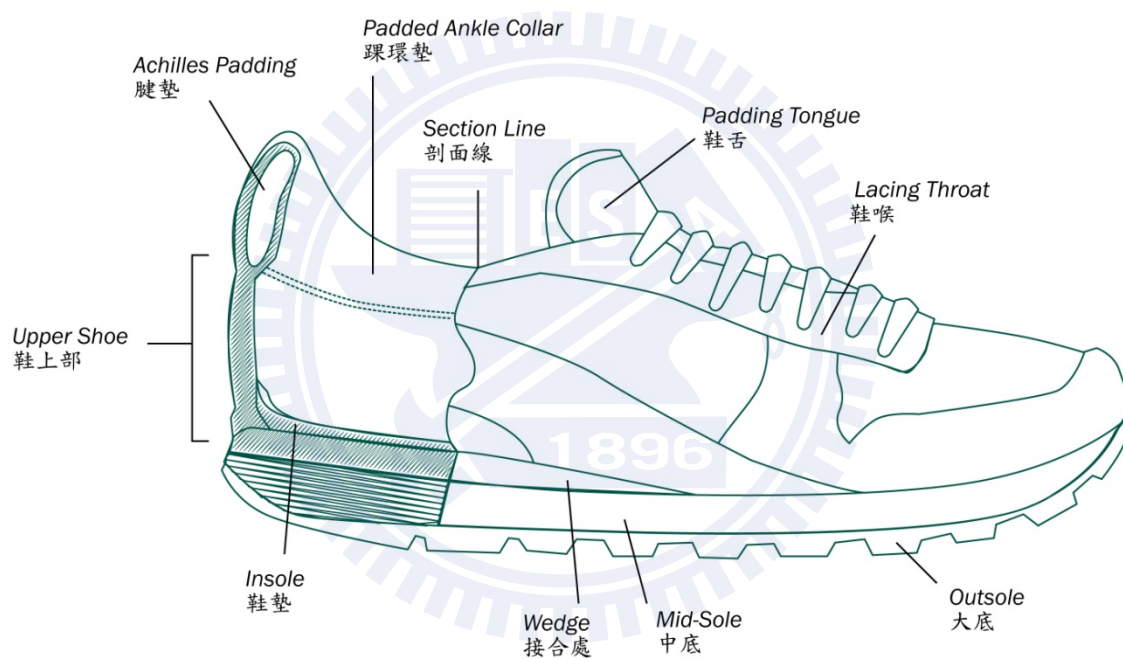
## 參考文獻

1. George F. Butterfield, "Air Cushion for Boot and Shoe Soles," U. S. Patent No. 259,092 (1882)
2. Donald Katz, Just Do It: The Nike Spirit in the Corporate World, Adams Media Corporation, USA, 1995
3. 亞太智財科技服務股份有限公司 (禾懋企業股份有限公司授權引用), 可自動充氣之氣墊技術鑑價報告, 台北, 2006 年 2 月
4. 朱呂民, 聚氨酯合成材料, 江蘇科學技術出版社, 南京, 2002 年 2 月
5. Günter Oertel, Polyurethane Handbook, 2<sup>nd</sup>, Hanser, New York, 1993
6. T. Jablonowski, J. Ahnemiller, "Stabilization of Millable Polyurethane Rubber," Rubber World -AKRON-, 28, No.5, pp.26 – 33, Rubber World, February 2008
7. R. W. Ogden, Non-Linear Elastic Deformations, Dover, New York, 1997
8. M. Mooney, "A Theory of Large Elastic Deformation," Journal of Applied Physics, 11, pp.582 – 592, September 1940
9. Attard, M.M., "Finite Strain Isotropic Hyperelasticity," International Journal of Solids and Structures, 40, pp.4353 – 4378, August 2003
10. W. Michael Lai, David Rubin, Erhard Krempf, Introduction to Continuum Mechanics, 3<sup>rd</sup>, Butterworth-Heinemann, USA, 1999
11. MSC.Marc, "Nonlinear Finite Element Analysis of Elastomers: Technical Paper," MSC.Software Corporation, USA, 2000
12. J. W. Beams, "Mechanical Properties of Thin Films of Gold and Silver," in: Structure and Properties of Thin Films, ed. By C. A. Neugebauer, et al., p.p.183 – 192, Wiley, New York, 1959
13. Jim Day, GM Powertrain, Kurt Miller, "Equibiaxial Stretching of Elastomeric Sheet, An Analytical Verification of Experimental Technique," Axel Product, Inc., USA, July 2000
14. G. Kumar, Mr. Arindam, N. R. Neelakantan, N.Subramanian, "Stress Relaxation Behavior of Polyacetal-Thermoplastic Polyurethane Elastomer Blends," Journal of Applied Polymer Science, 50, pp.2216 – 4378, 1993
15. H. W. Lee, S. H. Kim, H. Huh, J. Y. Kim, S. G. Jeong, "Finite Element Analysis of Diaphragm-type Air Springs with Fiber-Reinforced Rubber Composites," Journal of Composite Materials, 37, pp.1261 – 1274, 2003
16. 莊德軍, 「膜式空氣彈簧非線性彈性特性有限元分析」, 中國吉林大學, 碩士, 2003 年 1 月
17. 馬永明, 冀相安, 傅順軍, 易小冬, 「利用 MSC.Marc 分析氣囊結構參數對空氣彈簧垂向特性的影響, Analysis of the Effect of Air Bag Structure Parameters on Air Spring Vertical Characteristics」, 船舶工程 Ship Engineering, 第 30 期, z1 期, 2008 年

18. J. C. Houbolt, "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft," Journal of the Aeronautical Sciences, 17, pp.540 – 550, 1950
19. MSC.Marc, "Marc® 2007 r1, Volume A: Theory and User Information" MSC.Software Corporation, USA, 2007
20. Jintai Chung, G. M. Hulbert, "A Family of Single-Step Houbolt Time Integration Algorithms for Structural Dynamics," Comput. Methods Appl. Mech. Engrng., 118, pp.1 – 11, 1994



## 附錄 A 鞋體架構簡圖參考





## 附錄 B Mooney-Rivlin 超彈體方程式推導

本研究所使用五參數項之 Mooney-Rivlin 超彈體模型，在假設其為不可壓縮之條件下，其超彈體能量密度方程式可寫為下式：

$$U_{\text{incomp}} = C_{10}[Q_1 - 3] + C_{01}[Q_2 - 3] + C_{11}[Q_1 - 3][Q_2 - 3] + C_{20}[Q_1 - 3]^2 + C_{30}[Q_2 - 3]^3 \quad (\text{B.1})$$

$Q_1$  與  $Q_2$  為主軸拉伸所構成之不變量，分別可寫為下列式：

$$Q_1 = (\lambda_{\text{mm}})^2 = (\lambda_{11})^2 + (\lambda_{22})^2 + (\lambda_{33})^2 \quad (\text{B.2})$$

$$Q_2 = (\lambda_{\text{mm}})^{-2} = (\lambda_{11})^{-2} + (\lambda_{22})^{-2} + (\lambda_{33})^{-2} \quad (\text{B.3})$$

上式中之  $\lambda$  為三個互相垂直方向之主軸拉伸，而根據虛功原理推導計算，應變能密度方程式對主軸拉伸作偏微分後可得到主軸應力，若將主軸拉伸以等效拉伸取代並對等效拉伸作偏微分，則可得到等效應力。

將簡易拉力實驗等效拉伸式(2.22)到式(2.24)、平面剪力實驗等效拉伸式(2.26)到式(2.28)與雙軸拉力實驗等效拉伸式(2.30)到式(2.32)分別代入式(B.1)中之  $Q_1$  與  $Q_2$  主軸拉伸項後，則可將具不可壓縮特性之能量密度式  $U_{\text{incomp}}$  以三組等效拉伸  $\lambda_T$ 、 $\lambda_P$  與  $\lambda_B$  各別表示，如下列式(B.4)到式(B.6)所示：

$$\begin{aligned}
U_{\text{incomp}} &= C10 \left[ \lambda_T^2 + \frac{2}{\lambda_T} - 3 \right] + C01 \left[ 2\lambda_T + \frac{1}{\lambda_T^2} - 3 \right] \\
&+ C11 \left[ \lambda_T^2 + \frac{2}{\lambda_T} - 3 \right] \left[ 2\lambda_T + \frac{1}{\lambda_T^2} - 3 \right] \\
&+ C20 \left[ \lambda_T^2 + \frac{2}{\lambda_T} - 3 \right]^2 + C30 \left[ \lambda_T^2 + \frac{2}{\lambda_T} - 3 \right]^3
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{incomp}} &= C10 \left[ \lambda_P^2 + \frac{1}{\lambda_P^2} - 2 \right] + C01 \left[ \lambda_P^2 + \frac{1}{\lambda_P^2} - 2 \right] \\
&+ C11 \left[ \lambda_P^2 + \frac{1}{\lambda_P^2} - 2 \right]^2 \\
&+ C20 \left[ \lambda_P^2 + \frac{1}{\lambda_P^2} - 2 \right]^2 + C30 \left[ \lambda_P^2 + \frac{1}{\lambda_P^2} - 2 \right]^3
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{incomp}} &= C10 \left[ 2\lambda_B^2 + \frac{1}{\lambda_B^4} - 3 \right] + C01 \left[ \lambda_B^4 + \frac{2}{\lambda_B^2} - 3 \right] \\
&+ C11 \left[ 2\lambda_B^2 + \frac{1}{\lambda_B^4} - 3 \right] \left[ \lambda_B^4 + \frac{2}{\lambda_B^2} - 3 \right] \\
&+ C20 \left[ 2\lambda_B^2 + \frac{1}{\lambda_B^4} - 3 \right]^2 + C30 \left[ 2\lambda_B^2 + \frac{1}{\lambda_B^4} - 3 \right]^3
\end{aligned} \tag{B.6}$$

將上述式(B.4)到式(B.6)分別對其所相應之等效拉伸  $\lambda_T$ 、 $\lambda_P$  與  $\lambda_B$  作偏微分，則可得到等效應力  $\sigma_T$ 、 $\sigma_P$  與  $\sigma_B$ ，以下列式(B.7)到式(B.9)表示：

$$\begin{aligned}
\sigma_T &= \frac{\partial U_{\text{incomp}}}{\partial \lambda_T} \\
&= C10 \left[ 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right] + C01 \left[ 2 - \frac{2}{\lambda_T^3} \right] \\
&+ C11 \left[ \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \left( \frac{1}{\lambda_T^2} + 2\lambda_T - 3 \right) + \left( \frac{2}{\lambda_T} + \lambda_T^2 - 3 \right) \left( 2 - \frac{2}{\lambda_T^3} \right) \right] \\
&+ C20 \left[ \left( \frac{4}{\lambda_T} + 2\lambda_T^2 - 6 \right) \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{2}{\lambda_T} + \lambda_T^2 - 3 \right)^2 \left( 2\lambda_T - \frac{2}{\lambda_T^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_P &= \frac{\partial U_{\text{incomp}}}{\partial \lambda_P} \\
&= C10 \left[ 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right] + C01 \left[ 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right] + C11 \left[ \left( \frac{2}{\lambda_P^2} + 2\lambda_P^2 - 4 \right) \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right] \\
&+ C20 \left[ \left( \frac{2}{\lambda_P^2} + 2\lambda_P^2 - 4 \right) \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda_P} + \lambda_P^2 - 2 \right)^2 \left( 2\lambda_P - \frac{2}{\lambda_P^3} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_B &= \frac{\partial U_{\text{incomp}}}{\partial \lambda_B} \\
&= C10 \left[ 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right] + C01 \left[ 2\lambda_B^3 - \frac{2}{\lambda_B^3} \right] \\
&+ C11 \left[ \left( 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right) \left( \frac{2}{\lambda_B^2} + \lambda_B^4 - 3 \right) + \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right) \left( 2\lambda_B^3 - \frac{2}{\lambda_B^3} \right) \right] \\
&+ C20 \left[ \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right) \left( 4\lambda_B - \frac{4}{\lambda_B^5} \right) \right] + C30 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda_B^4} + 2\lambda_B^2 - 3 \right)^2 \left( 2\lambda_B - \frac{2}{\lambda_B^5} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

由式(B.7)到式(B.9)可以看出，在超彈體模型中等效應力  $\sigma_T$ 、 $\sigma_P$  與  $\sigma_B$  是分別由各等效拉伸  $\lambda_T$ 、 $\lambda_P$  與  $\lambda_B$  之多次項以線性組成，意即滿足 Valanis-Landel 假說，決定常數項 C10、C01、C11、C20 與 C30 之數值後，便可決定 Mooney-Rivlin 超彈體材料模型其簡易拉力、平面剪力與雙軸拉力之應力應變特性。

## 附錄 C 液壓膨脹應力應變式推導

若液壓膨脹實驗試片半徑尺寸遠大於厚度尺寸，且在實驗過程中皆以近似球體之狀態進行膨脹，則其受力狀態與內部受均勻施壓之中空球殼相同，應力  $\sigma_b$  可寫為：

$$\sigma_b = \frac{PR}{2t_0} \quad (C.1)$$

上式(C.1)中  $P$  為液壓膨脹壓力， $R$  為膨脹時近似球體之半徑尺寸， $t_0$  為原始試片厚度尺寸。液壓膨脹實驗在實驗過程中，試片的變形狀況可分為兩個階段：第一個階段為試片膨脹高度  $h$  小於初始平面圓半徑  $R_0$  時，第二個階段為試片膨脹高度  $h$  大於初始平面圓半徑  $R_0$  時，此二階段之變形示意如圖 C.1 與 C.2 所示。

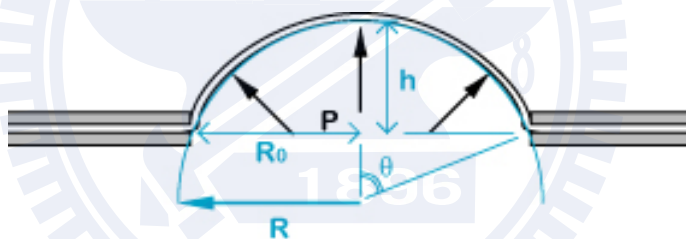


圖 C.1 試片膨脹高度  $h$  小於初始平面圓半徑  $R_0$

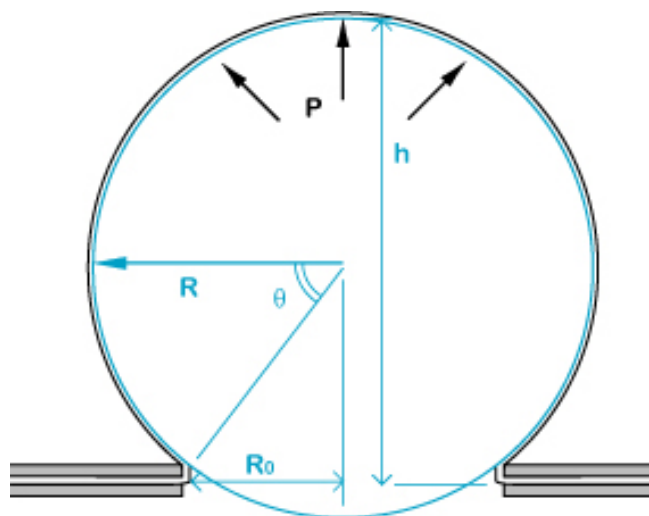


圖 C.2 試片膨脹高度  $h$  大於初始平面圓半徑  $R_0$

試片膨脹時近似球體之半徑尺寸  $R$  可用初始平面圓半徑  $R_0$  與試片膨脹高度  $h$  表示，且在上述圖示的兩個階段中關係式不變，如下式(C.2)所示：

$$R = \frac{h^2 + R_0^2}{2h} \quad (C.2)$$

將式(C.2)代回式(C.1)可將應力式重新改寫為式(C.3)：

$$\sigma_b = \frac{P(h^2 + R_0^2)}{4ht_0} \quad (C.3)$$

在試片膨脹高度  $h$  小於初始平面圓半徑  $R_0$  與試片膨脹高度  $h$  大於初始平面圓半徑  $R_0$  兩個階段中，其應變式可分別寫為  $\varepsilon_{b1}$  與  $\varepsilon_{b2}$ ，以下列式(C.4)與式(C.5)表示：

$$\varepsilon_{b1} = \frac{\left\{ R \sin^{-1}\left(\frac{R_0}{R}\right) - R_0 \right\}}{R_0} \quad (C.4)$$

$$\varepsilon_{b2} = \frac{\left\{ \frac{\pi R}{2} + R \cdot \cos^{-1}\left(\frac{R_0}{R}\right) - R_0 \right\}}{R_0} \quad (C.5)$$

將式(C.2)代入式(C.4)與式(C.5)，則可將應變以試片膨脹高度  $h$  與初始平面圓半徑  $R_0$  表示，如下列式(C.6)與(C.7)：

$$\varepsilon_{b1} = \frac{\left\{ \left[ \frac{(h^2 + R_0^2)}{2h} \right] \left[ \sin^{-1}\left(\frac{2hR_0}{h^2 + R_0^2}\right) \right] - R_0 \right\}}{R_0} \quad (C.6)$$

$$\varepsilon_{b2} = \frac{\left\{ \left[ \frac{\pi(h^2 + R_0^2)}{4h} \right] + \left[ \frac{(h^2 + R_0^2)}{2h} \right] \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2hR_0}{h^2 + R_0^2}\right) - R_0 \right\}}{R_0} \quad (C.7)$$

## 附錄 D 夾具系統之設計規格圖

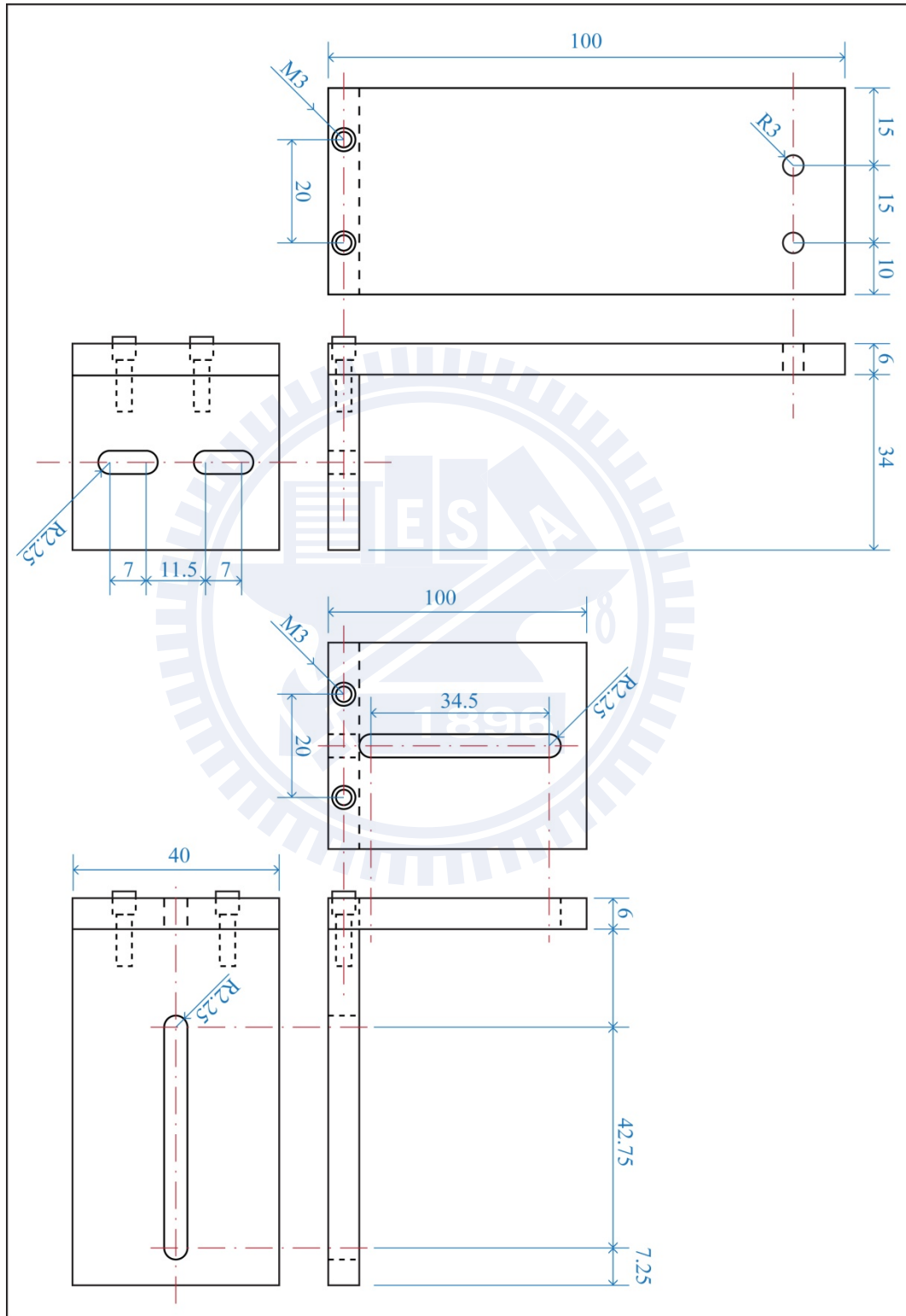


圖 D.1 支架部件：電阻尺支架組件



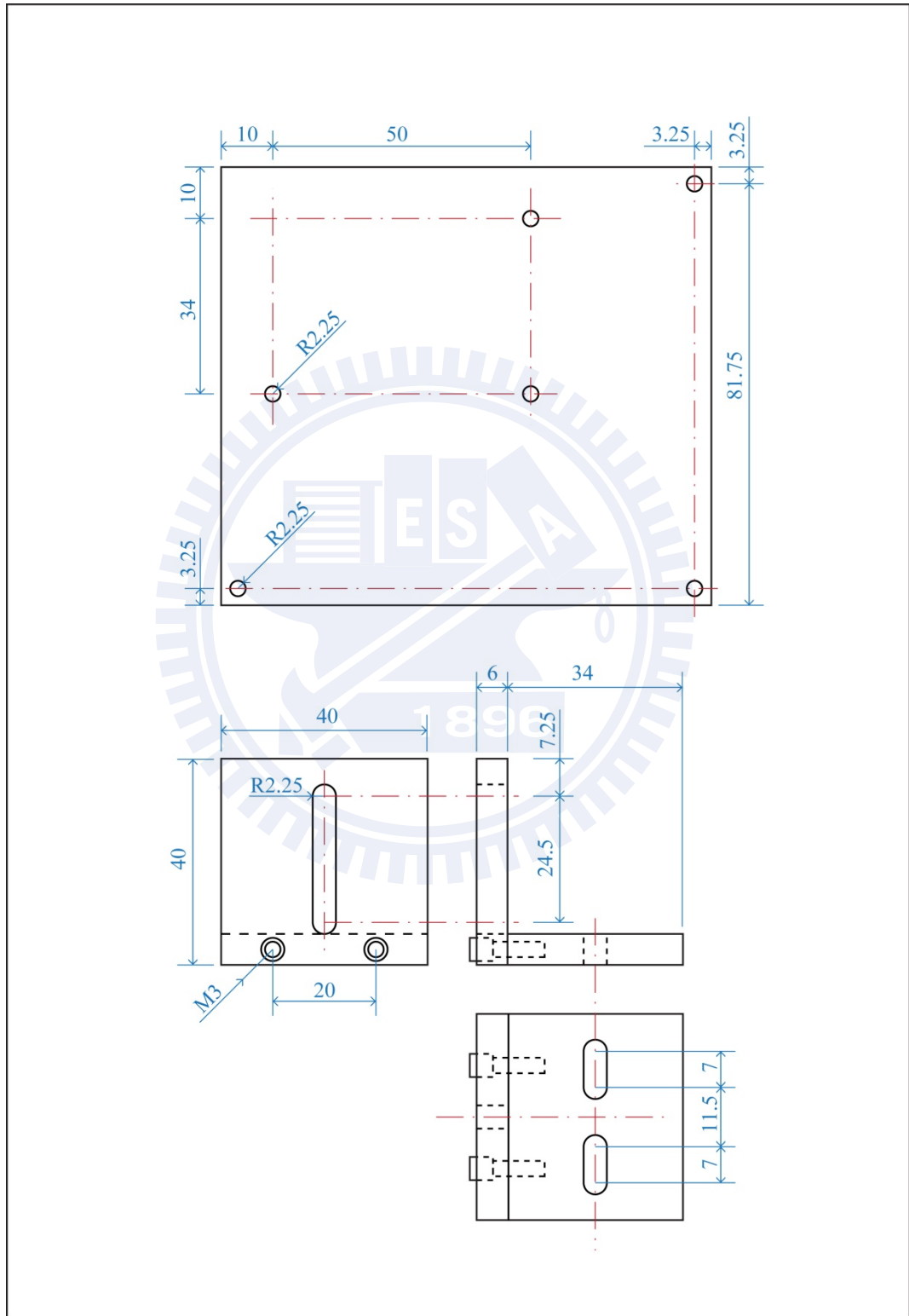


圖 D.2 支架部件：電路板支架組件與試片座支架組件

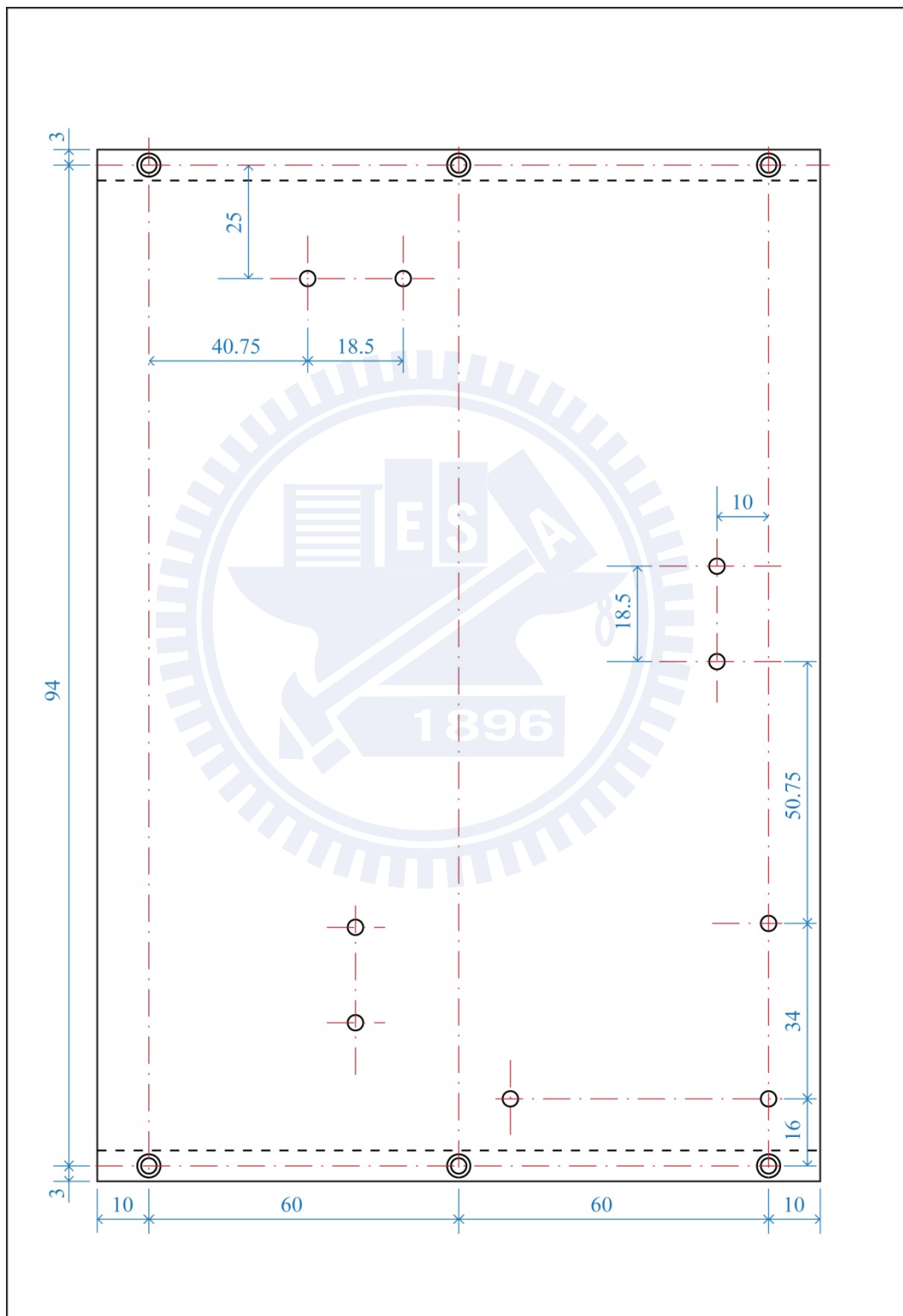


圖 D.3 總底座部件

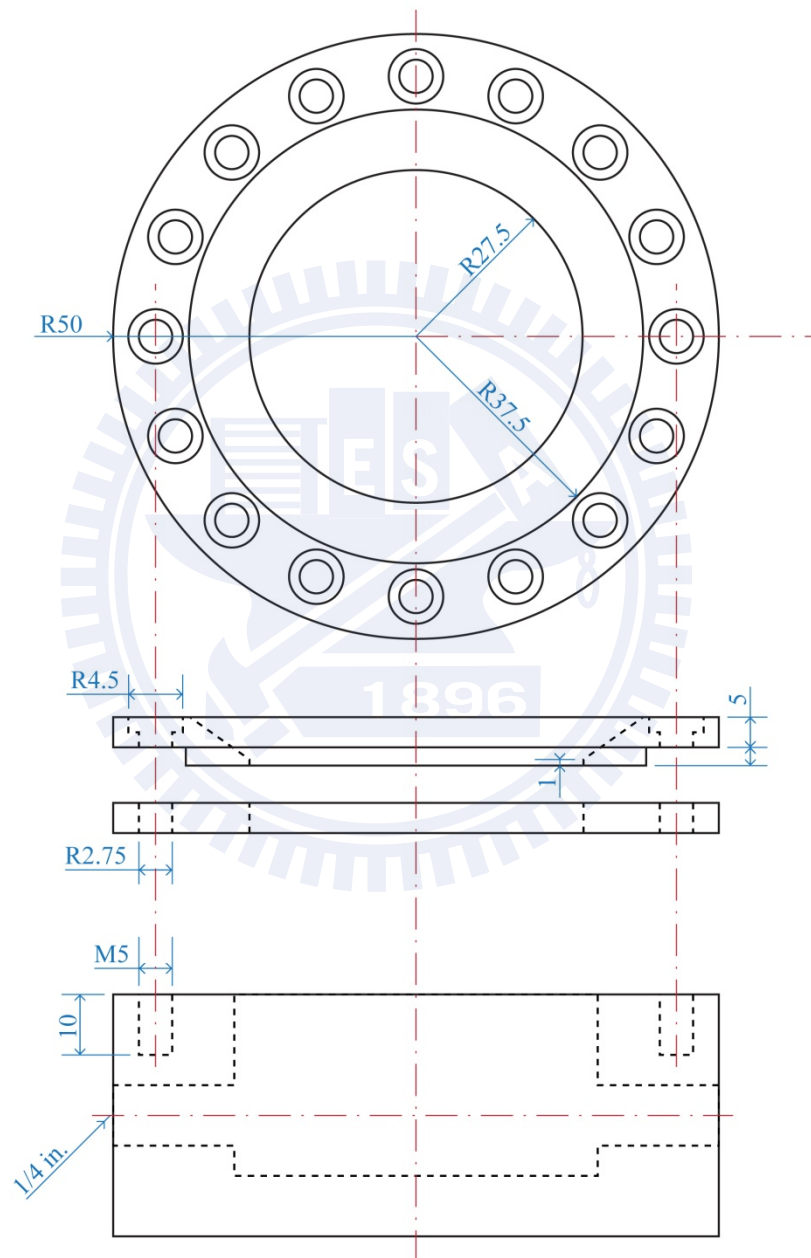


圖 D.4 試片座部件

## 附錄 E 等效雙軸應力曲線推測

根據圖 2.20(a)中 MSC.Marc 所附之實驗數據，將其簡易拉力實驗與雙軸拉力實驗數據編為數據比例矩陣，經過計算並加入內插數據後得出數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$ ，再參考本研究液壓膨脹實驗與本研究簡易拉力實驗在應變小於 0.1 之應變值與應力值比例，調整數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  之整體數值。數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  具有 a 組行向量，每組行向量之第一列為具有固定步增量之應變值，第二列為對應之應力比例值。以數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  第一列應變值元素群為 x 值，第二列應力比例值元素群為 y 值，繪製曲線如圖 E.1(a) 所示。

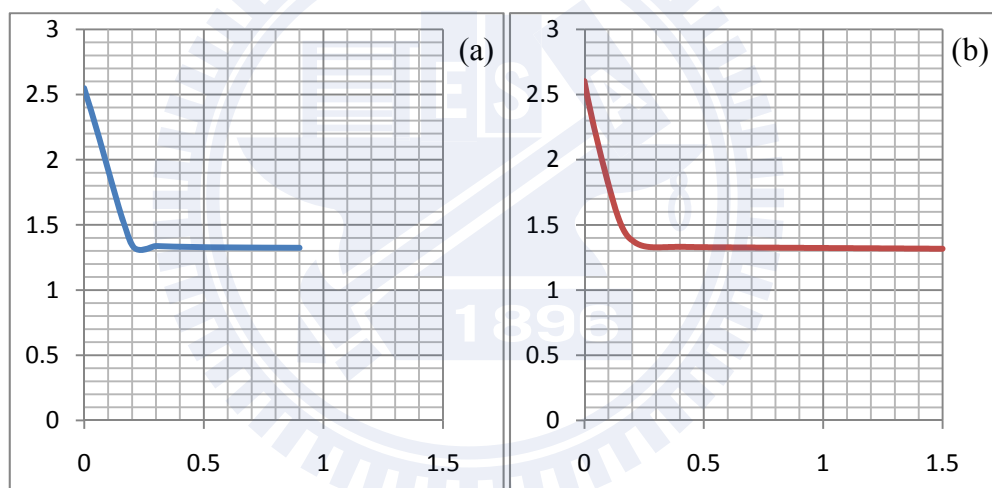


圖 E.1 (a)數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  之曲線圖(b)平順處理與延伸後之新曲線

但從圖 E.1(a)可看出，MSC.Marc 所附橡膠材料之應變值範圍只到 0.9，而對照本研究採用之簡易拉力實驗數據，輸入有限元素分析材料模型之實驗數據最大應變值需達 1.5，因此需要將數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  擴展，使擴展之第一列應變值元素與第二列應力比例值元素可互相對應，且最大之應變值達 1.5。又同時須考慮後續建立超彈體材料模型之穩定性，換算後之應力應變曲線之上升趨勢不可發生反折，意即參考之數據比例矩陣其曲線必須平順且其延伸曲線亦不可發生反折。

根據上述需求，利用 MATLAB 中之多項式趨近功能與自行計算延伸曲線之預測結束點數據，將數據比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  之曲線前段做平順處理與延伸。將在比例矩陣  $\mathbf{A}^{\text{original}}$  之曲線前段曲線應變值小於 0.4 之部分，以二次式趨近重新取一平順之數據比例矩陣  $\mathbf{A}$ ，並在數據比例矩陣  $\mathbf{A}$  曲線右端取得一段應力值達 1.5 之延伸二次曲線段，其與矩陣  $\mathbf{A}$  曲線有部分區域重疊，且在應變值達 1.5 前曲線不發生反折。此二次曲線段寫可為數據比例矩陣  $\mathbf{B}$ ，與數據比例矩陣  $\mathbf{A}$  具有相同之應變值步增量，行向量數目為  $b$ ，又其與數據比例矩陣  $\mathbf{A}$  在重疊區域中之行向量數目為  $c$ 。

將數據比例矩陣  $\mathbf{A}$  向右擴展  $(b - c)$  行之零向量，數據比例矩陣  $\mathbf{B}$  向左擴展  $(a - c)$  行之零向量，使數據比例矩陣  $\mathbf{A}$  及  $\mathbf{B}$  之維度皆為  $2 \times (a + b - c)$ 。並把兩矩陣在重疊區域中有相同應變值之部份分離，成為矩陣  $\alpha$  與矩陣  $\beta$ ，被分離之數據比例矩陣成為  $\mathbf{A}^S = (\mathbf{A} - \alpha)$  與  $\mathbf{B}^S = (\mathbf{B} - \beta)$ ，上述矩陣維度皆為  $2 \times (a + b - c)$ 。用線性混合方式使矩陣  $\alpha$  曲線與矩陣  $\beta$  曲線平順接合，重疊區域混合後產生矩陣  $\gamma$  之元素  $\gamma_{ij}$  可用式(E.1)表示：

$$\gamma_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij} \cdot (c - i) + \mathbf{B}_{ij} \cdot (i)}{c} \quad (\text{E.1})$$

以數據比例矩陣  $\mathbf{N} = (\mathbf{A}^S + \gamma + \mathbf{B}^S)$  之第一列應變值元素群為  $x$  值，第二列應力比例值元素群為  $y$  值，可繪製成延伸後之新曲線如圖 E.1(b)所示。

取本研究簡易拉力之實驗數據應變值小於 1.5 之部份，經過計算並加入內插數據後得到數值矩陣  $\mathbf{V}$ ，第一列為具有固定步增量之應變值元素群，第二列為對應之應力值元素群，數值矩陣  $\mathbf{V}$  與數據比例矩陣  $\mathbf{N}$  之維度皆為  $2 \times (a + b - c)$  並且有相同之應變值步增量。取數據比例矩陣  $\mathbf{N}$  第二列應力比例值元素群為乘數因子並編為一行向量  $\mathbf{M}$ ，再利用 MATLAB 中點運算 (Dot-Operators) 功能，將數值矩陣  $\mathbf{V}$  第二列應力值元素群與行向量  $\mathbf{M}$  做點乘 (Dot-Multiplication) 運算，得到最後推測之數值矩陣  $\mathbf{W}$ ，此數值矩陣  $\mathbf{W}$  第一列應變值元素群與第二列應力值元素群可繪成應力應變圖上推測之材料曲線，如圖 2.22 所示，本研究此數值矩陣之應力應變值代替原有之液壓膨脹實驗數據。

## 附錄 F Herrmann 特性元素

本研究在 MSC.Marc 之模擬分析中，所選用的元素類型皆具有 Herrmann 特性，包含了編號 119 之軸對稱四邊形減積分元素及編號 157 之立體四面體全積分元素。

在 Herrmann 元素中，較普通元素多出對壓力自由度（Pressure Degree of Freedom）之控制，以進行近似不可壓縮或是不可壓縮之應用計算。如編號 119 之軸對稱四邊形減積分元素中除了原本四個積分點之外，再額外加入一個只具有壓力自由度之積分點，編號 157 之立體四面體全積分元素則在四個角落上之積分點各再加上一壓力自由度。

Herrmann 元素在位移方程上根據 Herrmann Variation Principle 作修正，Herrmann Variation Principle 可用下列式(F.1)敘述：

$$\delta \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \left( \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 \right) + 2 \left( \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 \right) \right] \\ & \mu \left[ +2\nu H \left( \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) - \nu (1-2\nu) H^2 \right. \\ & \left. -6\nu e_T H - 2 \left( \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) e_T \right. \\ & \left. - \left( f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z \right) \right] \end{aligned} \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left( t_x u_x + t_y u_y + t_z u_z \right) d\partial\Omega = 0 \quad (F.1)$$

式(F.1)中之 H 為平均應力函數，其構成如式(F.2)所示：

$$H = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{2\mu(1+\nu)} \quad (F.2)$$

對一般情況而言，計算時會將式(F.1)中之熱膨脹係數  $e_T$  假設為 0，而材料具有不可壓縮特性時將蒲松比  $\nu$  定為 0.5。



## 附錄 G Single-Step Houbolt 動態響應方程式推導

本研究在動態響應的模擬中，選擇使用 Single-Step Houbolt 計算法（簡稱 SSH）為動態響應控制器，SSH 係由原始之 Three-Steps Houbolt 計算法（簡稱 TSH）推導而來，因為具有數值減幅特性（Numerical Damping），使得其在進行非線性問題分析時有相當程度之穩定。

根據牛頓第二運動定律，在時間範圍  $T$  內時間為  $t$  時，任一物體在空間中之運動特性可用下列式表示：

$$[\mathbf{M}][u''(t)] + [f_{\text{int}}(t)] = [f(t)], \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{G.1})$$

在式(G.1)中， $[\mathbf{M}]$  為質量矩陣， $[u'']$  為加速度向量， $[f_{\text{int}}(t)]$  與  $[f(t)]$  為內力向量與外力向量。其初始條件可用下列式(G.2)到式(G.4)表示，其中式(G.4)係針對非線性問題所加入之初始條件：

$$[u(t=0)] = [u_0] \quad (\text{G.2})$$

$$[u'(t=0)] = [u'_0] \quad (\text{G.3})$$

$$[f_{\text{int}}(t=0)] = [f_{\text{int}0}] \quad (\text{G.4})$$

上式中  $[u]$  與  $[u']$  分別代表位移向量與速度向量，根據式(G.1)到式(G.4)，以時間積分法計算的 TSH 可用下列式表示：

$$[u'_{n+1}(t)] = \frac{1}{6\Delta t} \{11[u_{n+1}] - 18[u_n] + 9[u_{n-1}] - 2[u_{n-2}]\} \quad (\text{G.5})$$

$$[u''_{n+1}(t)] = \frac{1}{\Delta t^2} \{2[u_{n+1}] - 5[u_n] + 4[u_{n-1}] - [u_{n-2}]\} \quad (\text{G.6})$$

由式(G.5)與式(G.6)可看出若以 TSH 計算，則需要再另外求得原時間步位移向量  $[u]$  之前

兩項 $[u_{n-1}]$ 與 $[u_{n-2}]$ 以計算後一項 $[u_{n+1}]$ ，此特性使得 TSH 在應用上並不方便，因為當計算步位於 $t=0$ 之起始點時必須再作特殊計算處理。因此，SSH 將原本需要額外三個時間步之線性多重步式，改為只需原時間步之位移項，做不同階時間偏微以線性方式組成即可進行計算下一時間步之位移項，如下列式所示：

$$[u_{n+1}(t)] = [u_n(t)] + \Delta t [u'_n(t)] + \frac{\Delta t^2}{2} [u''_n(t)] + \frac{\Delta t^3}{6} [u'''_n(t)] + \Delta t^3 [u'''_n(\Delta t)] \quad (G.7)$$

$$[u'_{n+1}(t)] = [u'_n(t)] + \Delta t [u''_n(t)] + \frac{\Delta t^2}{2} [u'''_n(t)] + \frac{11\Delta t^2}{6} [u'''_n(\Delta t)] \quad (G.8)$$

$$[u''_{n+1}(t)] = [u''_n(t)] + \Delta t [u'''_n(t)] + 2\Delta t [u'''_n(\Delta t)] \quad (G.9)$$

$$[u'''_{n+1}(t)] = [u'''_n(t)] + [u'''_n(\Delta t)] \quad (G.10)$$

透過式(G.7)到式(G.10)的計算，SSH 有效地改善了 TSH 的缺點。然而，SSH 與 TSH 一樣具有數值減幅性，雖然在有限元素模擬中採用此二者為動態響應控制器會有平順的分析結果，但通常並不具有高精確性，同時也必須特別注意時間步之數量，以避免數值減幅性對分析結果過度影響。

## 附錄 H Newmark-beta 動態響應方程式與分析結果

Newmark-beta 係以擴張均值理論（Extended Mean Value Theorem）為基礎，俱有無條件穩定性與無數值減幅性之優點，進行線性有限元素模擬之動態響應分析時通常以 Newmark-beta 為動態響應控制器之首選，其方程式如下列式所示：

$$[u_{n+1}] = [u_n] + \Delta t[u'_n] + \frac{(1-2\beta)\Delta t^2}{2}[u''_n] + \beta\Delta t^2[u''_{n+1}] \quad (H.1)$$

$$[u'_{n+1}] = [u'_n] + \frac{\Delta t}{2}[u''_n + u''_{n+1}] \quad (H.2)$$

然而對於非線性有限元素模擬之動態響應分析而言，Newmark-beta 會產生相對的不穩定性，如本研究之動態吸震試驗模擬若以 Newmark-beta 為動態響應控制器進行計算，則會在鞋氣墊接觸衝槌處發生不合理之發散現象，如圖 H.1 所示，因此本研究在進行動態響應分析時主要使用 SSH 為動態響應控制器。

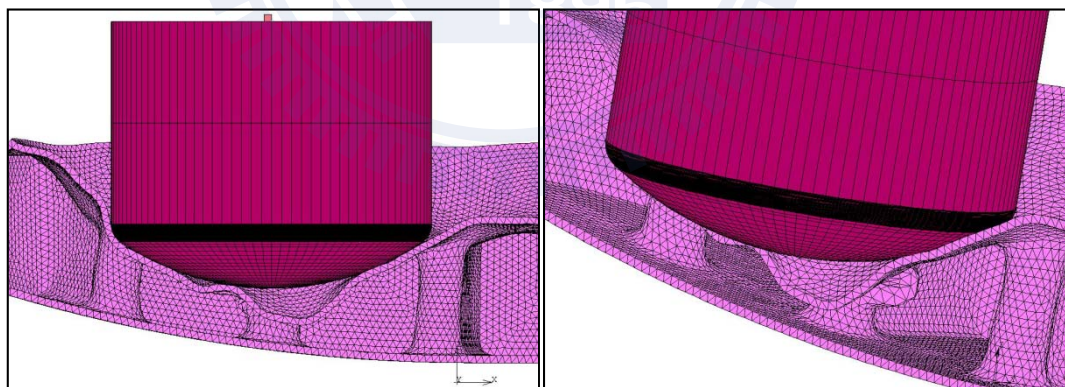


圖 H.1 以 Newmark-beta 為動態響應控制器之分析結果

## 附錄 I MSC. Marc 內建 Cavity 功能之計算原理

在 MSC.Marc 中，Cavity 功能係以所設定之元素表面鎖圍起來的空間為根據，計算此空間之容積變化量以改變空間中之壓力大小，以模擬氣體之壓縮特性，容積與壓力之關係可用下列式表示：

$$pV = nR_0T \quad (I.1)$$

上式(I.1)之  $p$  代表空間中之總壓力， $V$  為此空間總容積， $n$  為空間中分子數目， $T$  為空間中氣體之絕對溫度， $R_0$  為空氣常數。空氣總質量為  $M$  時，其分子質量  $\omega$  可寫為下式：

$$\omega = \frac{M}{n} \quad (I.2)$$

將式(I.2)代入式(I.1)中，可寫為下列式(I.3)：

$$pV = MRT \quad (I.3)$$

其中  $R = (R_0/\omega)$ ，令密度  $\rho = (M/V)$ ，式(I.3)可寫成理想氣體方程式：

$$p = \rho RT \quad (I.4)$$

式(I.4)中之  $R$  可用下式計算：

$$R = \frac{p_r}{\rho_r} T_r \quad (I.5)$$

$p_r$  為基準氣體壓力， $\rho_r$  為基準氣體密度， $T_r$  為基準氣體絕對溫度。在 MSC.Marc 中，Cavity 之壓力定義是以環境壓力  $p_a$  與 Cavity 中表量壓力  $p_g$  相加，如下式所示：

$$p = p_a + p_g \quad (I.6)$$

在本研究中，因為所模擬的區域為封閉空間，因此在 MSC.Marc 之 Cavity 設定中使用封閉孔洞設定，即此空間中之氣體總質量為一固定常數。同時因為不考慮溫度變化所帶來之影響，所以變形前後總壓力可簡寫為以下關係式：

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (I.7)$$

其中  $p_1$  與  $p_2$  皆為環境壓力與表量壓力之總和：

$$p_1 = p_{1a} + p_{1g} \quad (I.8)$$

$$p_2 = p_{2a} + p_{2g} \quad (I.9)$$

透過 Cavity 功能之設定，在 MSC.Marc 中可以簡易並很有效率地對氣體壓縮特性進行模擬，不需要額外建立其他內填充之流體網格元素。Cavity 在進行模擬時必須分兩個階段進行，第一個階段為膨脹階段，第二個階段為變形階段，因為 MSC.Marc 之 Cavity 功能必須計算因初始之內部壓力而膨脹的空間大小，再根據此大小的變化來改變空間內部力之數值。