

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

利用振動增加濾材之捕捉效率之理論研究

A study of enhancement of collection efficiency

with vibrational filter

研究生：陳鴻儀

指導教授：傅武雄 教授

中華民國九十六年六月

利用振動增加濾材之捕捉效率之理論研究

**A study of enhancement of collection efficiency with
vibrational filter**

研究生：陳鴻儀

Student : Hung-Yi Chen

指導教授：傅武雄

Advisor : Wu-Shung Fu

國立交通大學
機械工程學系
碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 機械工程 學系碩士班 陳鴻儀 君

所提論文(中文) 利用振動增加濾材捕捉
效率之理論研究

(英文) A study of enhancement of collection
efficiency with vibrational filter

合於碩士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員： _____

符孝進

黃秉孝

曾慶祺

指導教授： 傅洲如 _____

系主任： 周山壽 教授

中華民國 96 年 6 月 29 日

利用振動增加濾材之捕捉效率之理論研究

研究生：陳鴻儀

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

摘要

本文之目的為探討同時考慮對流場分佈與過濾材收集效率的理論方法，使研發人員能在設計過濾器時同時考慮對流場之影響，有效地提高無塵室之潔淨度。本文將利用多孔性介質模擬過濾材，並利用葛拉金有限元素法(Galerkin FEM)計算過濾管道內部之流場分佈，且利用軌跡理論(Trajectory Theory)模擬污染顆粒在流場中之行徑過程，以及利用分子碰撞理論(Molecular collision theory)結合前人所推導出的單一吸附粒子收集效率，模擬污染物質在過濾系統中的捕集過程以及收集效率之計算並利用有限元素法與 Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE)方法計算移動邊界的流場分佈與過濾材收集效率理論結合，計算微粒子在振動過濾材流場的捕捉情形，並對照 Kim[20]等人對振動流場所作的微粒子實驗值，比較數值模擬流場的準確性。

A study of enhancement of collection efficiency with vibrational filter

Student: Hung-Yi Chen

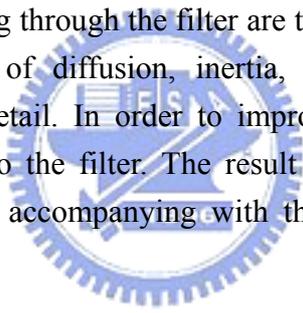
Advisor: Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

The aim of this study is investigate effect of filter structure and fluid velocity on collection efficiency of filter numerically. A finite element method is adopted to solve the above problem. Parameters of porosity, equivalent diameter and thickness of the filter and fluid velocity flowing through the filter are taken into consideration, and the contributions of the factors of diffusion, inertia, and interception to collection efficiency are examined in detail. In order to improve the collection efficiency, a vibrational motion is added to the filter. The result show that the enhancement of collection efficiency increase accompanying with the increment of the vibrational velocity.



誌 謝

衷心的感謝指導老師傅武雄教授兩年來給予課業上以及論文上的指導，以及在生活各方面上的關心與教誨，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也感謝機械系諸師長在課業方面的指導，以及同門的學長連信宏及同學黃玠超、林偉峰、陳沅佑在數值模擬上的協助，使本研究可以順利完成。

更要感謝父母含辛茹苦的養育之恩，與家人、親友的支持與關懷，今日方能順利完成學業。最後謹將此喜悅與所有關心我的人共同分享。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號說明	ix
第一章 緒論	1
第二章 ALE 座標描述方法之運動學理論與數學模式	10
2.1 網格描述與座標系統	10
2.2 ALE 中的統馭方程式	13
2.3 格點速度	14
第三章 物理模式	16
3.1 流場統御方程式	16
3.1.1 內流場之統御方程式	16
3.1.2 外流場之統御方程式	17
3.1.3 無因次化	18
3.1.4 內流場無因次化	18
3.1.5 外流場因次化	19
3.2 粒子運動之統御方程式	20
3.3 懸浮粒子被收集統御方程式	21
3.3.1 單一纖維收集效率	21
3.3.2 懸浮粒子被收集效率	23

第四章 數值方法.....	29
4.1 流場數值計算.....	29
4.2 粒子運動軌跡與捕捉機率計算.....	37
第五章 結果與討論.....	43
5.1 過濾各參數對過濾效率的影響.....	43
5.2 過濾各參數對過濾材產生的壓力影響.....	45
5.3 振動過濾材對收集效率的影響.....	46
第六章 結論.....	68
參考文獻.....	69
附錄.....	73



表目錄

表 3-1 不同 R_{er} 值下, C_0 、 C_1 、 C_2 之值.....	25
表 5.1 研究參數表.....	50



圖目錄

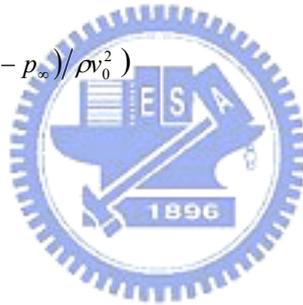
圖 1-1 單一纖維收集作用力示意圖	8
圖 1-2 單一纖維收集效率對粒徑分布圖	9
圖 2-1 ALE 運動學示意圖	15
圖 3-1 物理模式	26
圖 3-2 單一纖維收集效率定義圖	27
圖 3-3 半徑為 d_{12} 速度 v_r 、單位時間 dt 碰撞體積示意圖	28
圖 4-1 元素節點排列方式示意圖	40
圖 4-2 程式架構圖	41
圖 4-3 粒子運動軌跡與捕捉機率計算的流程圖	42
圖 5-1 進口速度與收集效率關係圖	51
圖 5-2 孔隙率與收集效率關係圖	52
圖 5-3 纖維直徑與收集效率關係圖	53
圖 5-4 過濾材厚度與收集效率關係圖	54
圖 5-5 懸浮粒子粒徑與收集效率關係圖	55
圖 5-6 進口速度與多孔性介質壓力差關係圖	56
圖 5-7 孔隙率與多孔性介質壓力差關係圖	57
圖 5-8 纖維直徑與多孔性介質壓力差關係圖	58
圖 5-9 過濾材厚度與多孔性介質壓力差關係圖	59
圖 5-10 週期初始流場向量圖	60
圖 5-11 四分之一週期流場向量圖	61
圖 5-12 二分之一週期流場向量圖	62
圖 5-13 四分之三週期流場向量圖	63
圖 5-14 Kim[20]震動過濾器收集效率實驗設備圖	64

圖 5-15 進口速度等於 10cm/s 之收集效率圖..... 65
圖 5-16 進口速度等於 5cm/s 之收集效率圖..... 66
圖 5-17 進口速度等於 3cm/s 之收集效率圖..... 67



NOMENCLATURE

A	表面積	[m ²]
C_D	摩擦係數	
Cn	Cunningham slip correction factor	
Da	Darcy 數($Da = K/w_1^2$)	
d_p	多孔性介質顆粒直徑	[m]
F	慣性參數($F = 1.75/(\sqrt{150}\varepsilon^{1.5})$)	
f	振動頻率	[Hz]
H	管道高度	[m]
K	滲透率($K = \varepsilon^3 d_p^2 / (150(1-\varepsilon)^2)$)	
m	質量	[kg]
p	壓力	[N m ⁻²]
p_∞	參考壓力	[N m ⁻²]
P	無因次壓力($P = (p - p_\infty) / \rho v_0^2$)	
Pe	Peclet number	
Re	雷諾數	
St	Stokes number	
t	時間	[s]
u, v	x 和 y 方向速度	[m s ⁻¹]
U, V	X 和 Y 方向之無因次速度	
v_0	進口流體速度	[m s ⁻¹]
v_b	活塞振盪速度	[m s ⁻¹]
\hat{u}, \hat{v}	x 和 y 方向之網格移動速度	[m s ⁻¹]
\hat{U}, \hat{V}	無因次之 X 和 Y 方向網格移動速度	
X, Y	無因次卡式座標	



Greek Symbols

ε	孔隙率	
λ	處罰函數	
ν	動黏滯係數	[m ² s ⁻¹]
μ	黏滯係數	[kg s ⁻¹ m ⁻¹]
ρ	密度	[kg m ⁻³]

τ 無因次時間
 ω 角速度
 Φ 計算變數
 η 收集效率

[Rad. S⁻¹]

Superscripts

m 疊代次數

Subscripts

D 擴散項
 DR 擴散與攔截修正項
 f 工作流體
 I 慣性項
 r 攔截項
 s 懸浮微塵粒子
 T 總和

Others

$||$ 絕對值
 $[]$ 矩陣



第一章 緒論

近幾年來，由於技術之創新發展，對於產品的高精密度化，微小型化之需求更為迫切，如超大型積體電路(Very Large Scale Integrated Circuit, VLSI)及極大型積體電路(Ultra Large Scale Integrated Circuit, ULSI)之研究製造，已成為世界各國在科技發展上極為重視之項目，我國亦不例外。然積體電路與精密軸承(Bearing)、太空航空儀器、光學機械...等之精密機械產業，對於空氣中的浮游粒子、粉塵等污染極為敏感，且對於產品之品質、可靠性及良率高低有極大之影響。由於以上之產品必須在良好之無塵室內進行生產製造，故工業用之無塵室在各種產業上已被廣泛採用。另一方面在醫學上及醫療技術方面，對於手術室，新生兒室，重症加護病房(Intensive Care Unit, ICU)、燙傷病房及冠狀動脈加護病房(Coronary Care Unit, CCU)等場所為達成高度醫療效果，亦需有去除空氣中浮游細菌之無菌環境，以維人員生命安全。其次在製藥工作、食品製造業及醫療儀器製造業、生化及細菌培養...等為提高產品品質及安全衛生，以去除空氣中浮游細菌或微生物與外界異物之干擾侵犯之無菌無塵室亦應運而生。針對積體電路(半導體行業)而言，無塵室最主要之作用在於控制產品(如矽晶片等)所接觸之大氣的潔淨度及溫溼度，使產品能在一個良好之環境空間中生產、製造。換言之，無塵室之定義為將一定空間範圍內之空氣中的微塵粒子、有害空氣、細菌等之污染物排除，並將室內之溫溼度、潔淨度、室內壓力、氣流速度與氣流分布、噪音振動及照明、靜電控制在某一需求範圍內，而所給予特別設計之房間。亦即是不論外界之空氣條件如何變化，其室內均能具有維持原先所設定要求之潔淨度、溫溼度及壓力等性能之特性。

在空氣中浮游之微塵粒子有細小之纖維渣和砂粒、金屬粉以及人體脫落之皮膚表層、煙霧...等種類繁多，除此之外，尚且含有一部份之微生物，如原生動物、酵母菌、細菌、濾過性病毒...等。無塵室之所欲去除之微塵粒子，是眼睛無

法看得見，且不易下落之塵埃或細菌。空氣中之粒子，有如下幾種名詞分類：

1. 微粒子(Corpuscle 或 Micron Particle)：一般浮游於空氣中或液體中，為不太容易沈降的 $10\mu\text{m}$ 以下的粒子。
2. 極微粒子(Submicron Particle)：一般漂浮於空氣中或液體中，為幾乎不可能沈降的 $1\mu\text{m}$ 以下的粒子。
3. 生物粒子(Viable Particle)：有生命的粒子，如藻、花粉、孢子、細菌及病毒。
4. 纖維狀粒子(Fiber Particle)：粒子長度為寬度 10 倍以上者。
5. 浮游微粒子(Suspended Particle)：浮游於氣體或液體中的生物粒子。
6. 離子微粒子(Ion Particle)：具有正或負的電荷之分子或微粒子。

至於空氣中的煙塵霧(Aerosol)則是在氣體中漂浮的固體或液體的粒子。其包含了粒子及使粒子漂浮的氣體。煙塵霧有如下之分類：

1. 煙塵霧：粒子及使粒子漂浮的氣體。粒徑大小由 $0.001\mu\text{m}$ ~ $100\mu\text{m}$ 。
2. 粉塵(Dust)：壓碎的固體粒子煙塵霧。粒徑由 $1.0\mu\text{m}$ 以下到可見範圍。
3. 煙(Smoke)：不完全燃燒而產生的煙塵霧。粒徑為 $1.0\mu\text{m}$ 以下
4. 霧氣(Mist)：由冷凝或噴霧產生的液體粒子。粒徑為 $1.0\mu\text{m}$ 到 $20\mu\text{m}$
5. 薰煙(Fume)：由蒸氣或氣體狀的燃燒生成物凝固而成。粒徑為 $1.0\mu\text{m}$ 以下。
6. 不揮發性殘留物：將過濾的揮發性液體，以一定溫度蒸發後所殘留的不溶性粒狀物質。
7. 瓦斯狀污染物：空氣中含有的氣體污染物，通常有 CO ， SO_2 ， NO_2 及 O_3 等。

微塵粒子是構成半導體製品發生缺陷，降低產品的良率的主要原因之一。半導體元件製程是一極複雜的高科技製造技術，為利用許多精密機器設備，將各種物理、化學、電機、電子、機械等技術融合為一致的製程，在此製造過程中均

需在無塵室中進行，以避免環境中微塵粒子污染。舉例來說 IC 元件上之微粒，作用就可能像一個不透光的圖案，而此微塵是否會影響元件之功能失效，是依微塵之大小、位置及元件之圖案尺寸和使用何種光阻劑等而定。假使使用正光阻，則等於在矽晶片上多出一個小島，會造成像離子植入或雜質擴散的阻擋；假使使用負光阻，則微塵可能造成針孔的出現。針孔通常有害於元件的功效，尤其是發生在金屬氧化半導體的閘氧化層(Gate Oxide)或場氧化層(Field Oxide)等隔離層上。假如微塵是導致金屬線的縮小時，則會有電子遷移(Electron Emigration)現象；若微塵室在擴散區域，則可能造成電阻的增加。光罩上之隨機缺陷通常有一半是類似上述的情況，為導致晶片製造良率降低的主要原因。假如微塵粒子直接沾在矽晶片上，雖然有程度上之不同，但所造成之損傷是一樣的，尤其在磊晶之成長，不管多少顆粒，都會造成影響單晶的成長。

大氣中含有固體、液體、氣體之各種污染物質，供給至無塵室的空氣，必須除去這些污染物質方能獲得欲利用之乾淨空氣，而欲獲得此些乾淨空氣則須藉助空氣過濾器之使用方能達成，一直到1980年代初期，使用高效率空過濾網(High Efficiency Particulate Air filter, HEPA filter)來過濾空氣，使獲致的良好潔淨度。HEPA 濾網其最小收集效率應是對空氣中約 0.3 μm 粒徑粒子具有 99.97%移除效率，時至今日，HEPA 濾網仍然廣泛地使用在無塵室中，作為移除送風空氣中的污染物質之用。

現今，由於積體電路(IC)生產製造之發展，已達到需要較 HEPA 濾網更高移除效率之濾網，以確保更少且更小粒徑的污染物質不會進入無塵室中，而這些更高移除效率的濾網稱之為超高效率濾網(Ultra Low Penetration Air filter, ULPA filter)。而 ULPA 濾網其最小收集效率應是對空氣中約 0.1~0.2 μm 粒徑粒子具有 99.999%移除效率，其構造方法及操作方式則與 HEPA 濾網相同。

一般濾網的分級如下：

- ISO Class 6 (Class 1000)及更低階之無塵室，一般使用 HEPA 濾網來滿足亂流型無塵室之潔淨要求等級。

- ISO Class 5 (Class 100)，一般需使用 HEPA 濾網完全覆蓋天花板，以便無塵室之氣流為單一方向性之層流。
- ISO Class 4 (Class 10)或更高階之無塵室，應使用 ULPA 濾網來達到單一方向流動之層流無塵室。

高效率過濾網的構造一般由兩種方式所構成：一為深層摺疊(deep-pleated)式，另一為迷你摺疊(mini-pleated)式。深層摺疊式濾網是較為傳統製造方法，其摺疊濾材(filter media)方式是由邊對邊的方式前後來回摺疊成波浪狀，為了使空氣通過濾材並提供濾網的強度，通常會在濾材摺痕間加入鋁片以作為分離版(separator)，然後再將濾材和分離板的組件黏合到塑膠、木頭或金屬的框架中。

現今較為普遍使用的是迷你摺疊式高效率過濾網，此類濾網之構造並不使用鋁板分離板，而是使用黏著劑在摺疊濾材間黏上絲帶或增加濾材間之皺摺，在將濾材裝配於框架上，依此法組裝時可較深層摺疊式的皺摺高出 2.5 到 3 倍左右，因此其構造能夠更為緊密且不佔空間。

迷你摺疊式構造是目前最廣泛使用於層流式無塵室，為其具有較大之濾材面積及較低之壓降損失。

高效率濾材是使用直徑約 0.1 到 10 μm 的玻璃纖維所製造，利用在空間內交錯的纖維來捕獲微塵粒子，而 ULPA 濾網則將使用較 HEPA 濾網更高比例面積之細纖維所組成，這些纖維任意地交錯貫穿在形成的濾材間，當空氣中的微塵粒子移動經過濾材時，因碰到纖維或其他的粒子將會被纖維所捕獲。

目前過濾材效率之理論研究，多以微觀方式研究顆粒隨流體經過濾材表面時之各種行為，稱為軌跡理論(Trajectory Theory)。至今已被提出之模式大致可分為兩大類：一為外部流模式(External Flow Model)，另一為內部流模式(Internal Flow Model)。外部流模式之重點在於過濾材表面之流體流動現象，內部流模式則是強調孔隙內之流體流動及顆粒附著現象，對於過濾材內之流體流動，大多以線性化 Navier-Stokes 方程式進行解析。然而不管是哪一種模式，皆符合下列特質：在多孔性過濾材中，污染物顆粒所走的路徑是隨著流線而走，當污染物顆粒

接近過濾材表面時，會因為一些作用力而使顆粒離開流線，沈降在過濾材表面，其中傳送階段需考慮重力沈降、攔截、布朗擴散、流體作用力...等；而附著階段則考慮重力、凡得瓦爾力、電雙層斥力...等。

目前已有許多研究在討論軌跡理論，對於軌跡理論可歸納出以下幾個要點 [1]：

1. 遠離過濾材的區域，污染物顆粒的路徑是隨著流線移動。
2. 當污染物顆粒很接近過濾材表面時，其路徑會因一些作用力而離開流線。
3. 污染物顆粒很接近過濾材表面時，會發生流體動力學之遲滯現象 (hysteresis)。
4. 在分析軌跡理論時，不同的作用力及其他會影響污染顆粒移動的因子，皆可轉換成無因次群以利分析。
5. 軌跡方程式的解，稱為單一纖維收集效率(η_T)，是由一些無因次群表示。

結合軌跡理論與無因次分析，其最大的貢獻在於可將收集作用予以公式化，單一纖維收集效率大致如圖 1.1 單一纖維收集作用力示意圖所示，可分為為擴散作用(Diffusion)、靜電吸引(Electrostatics)、重力沈降(Gravitation)、慣性衝擊(Inertial impaction)、攔截作用(Interception)...等所加總所得，如圖 1.2 單一纖維收集效率對粒徑分布圖所示，可了解各收集效率對粒徑的分布情形，在不同狀情形下，為簡化問題，有些作用力的效應可被省略掉，如低速流時，可省略慣性衝擊，電中性物質可省略靜電吸引。其中各種作用力的單一纖維收集效率，因研究人員研究時所假設的條件或所考慮的作用力不同，所推導出的公式就會有所不同，如 Yao 等人[2]的研究考慮了擴散、攔截及重力沈降等作用力影響得到單一纖維收集效率，在 Rajagopalan 和 Tien[3]研究中則考慮流體遲滯影響、凡得瓦爾吸引力、布朗擴散力、攔截及重力沈降等作用力影響單一纖維收集效率。目前大部分的研究人員是將濾材形狀假設為纖維狀(fibrous)或球狀(Granular)以得出各

種作用力的單一纖維收集效率，像 Lee and Liu[4]、Liu and Rubow[5]考慮纖維狀得出擴散項及攔截項；Rao and Faghri[6]、Loeffler[7]假設纖維狀得出擴散項；Sinkar[8]及 Tan 等人[9]則考慮球狀得出擴散項及攔截項；電磁項的研究則由 Zhao 等人[10]考慮纖維狀和 Tien[11]考慮球狀得出；慣性力的研究則在 Friedlander[12]、Suneja and Lee[13]、Ilias and Douglas[14]等人考慮纖維狀和 Pendse and Tien[15]、Gal 等人[16]考慮球狀得出；Tardos and Pfeffer[17]則利用兩種假設得出重力項。Bejan 等人[18]依不同的假設條件以及適用範圍將所需要的單一纖維收集效率公式歸納。

在之後的研究幾乎是利用上述得出的單一纖維收集效率代入經驗公式所得出的整體收集效率來做應用分析，如 Huang and Tsai[19]則利用 Nozzle 將粒子噴入慣性衝擊器來研究，這個研究利用過濾材的單一纖維收集效率代入經驗公式並計算粒子在流場中的行徑軌跡，研究粒子在不同的大小及速度下，濾材的整體收集效率的變化情形。以往的研究幾乎以討論粒子本身的行為或過濾系統的結構來分析過濾材，但現在有些研究人員為提升收集效率開始研究過濾系統在移動的情況下的收集效率，Kim[20]等人力用實驗方法將過濾材前後振動以有效地提升過濾材的效率，在其研究中更將其過濾材經由實驗方式推出振動的單一纖維收集效率。

利用過濾材的單一纖維收集效率代入經驗公式，所計算出的整體收集效率，只能計算在三維方管或二維平板管道中的收集效率，以及利用振動或旋轉增加收集效率的情況，利用經驗公式雖可快速算出收集效率的結果，卻無法了解流場分佈因過濾材的影響所造成的變化，如過濾材中可能因流場的分佈造成不均勻地收集效率，進而導致無塵室中流場產生變化，對無塵室的潔淨度是有極大的影響。利用之前經驗公式計算雖然快速，但過濾器對流場所造成影響或是流場對過濾器效率所造成的影響，將會造成收集效率的誤差，且因其經驗公式的限制條件下，將無法設計出更具效率的過濾系統。

因此本篇論文之目的，即是設法找出同時考慮對流場分佈與收集效率的理

論方法，使研發人員能在設計過濾器時同時考慮對流場之影響，有效地提高無塵室之潔淨度。本文將利用多孔性介質模擬過濾材，並利用有限元素法(FEM)計算過濾管道內部之流場分佈，且利用軌跡理論模擬污染顆粒在流場中之行徑過程，以及利用分子碰撞理論(Molecular collision theory)結合前人所推導出的單一纖維收集效率，模擬污染物質在過濾系統中的捕集過程以及收集效率之計算，並計算微粒子在振動流場的捕捉情形，並對照 Kim[20]等人對振動流場所作的微粒子實驗值，比較數值模擬流場的準確性。換言之，將能較以往更精準地模擬流場與攔截效率與過程，且做更複雜地過濾系統模擬。進而利用 FEM 中的 ALE 方法計算移動邊界的流場分佈，以了解更複雜的過濾系統。之後的研究人員將可利此過濾系統之理論計算並結合流場分佈一起設計過濾系統，有效減少過濾系統與流場分開計算所造成的設計誤差。



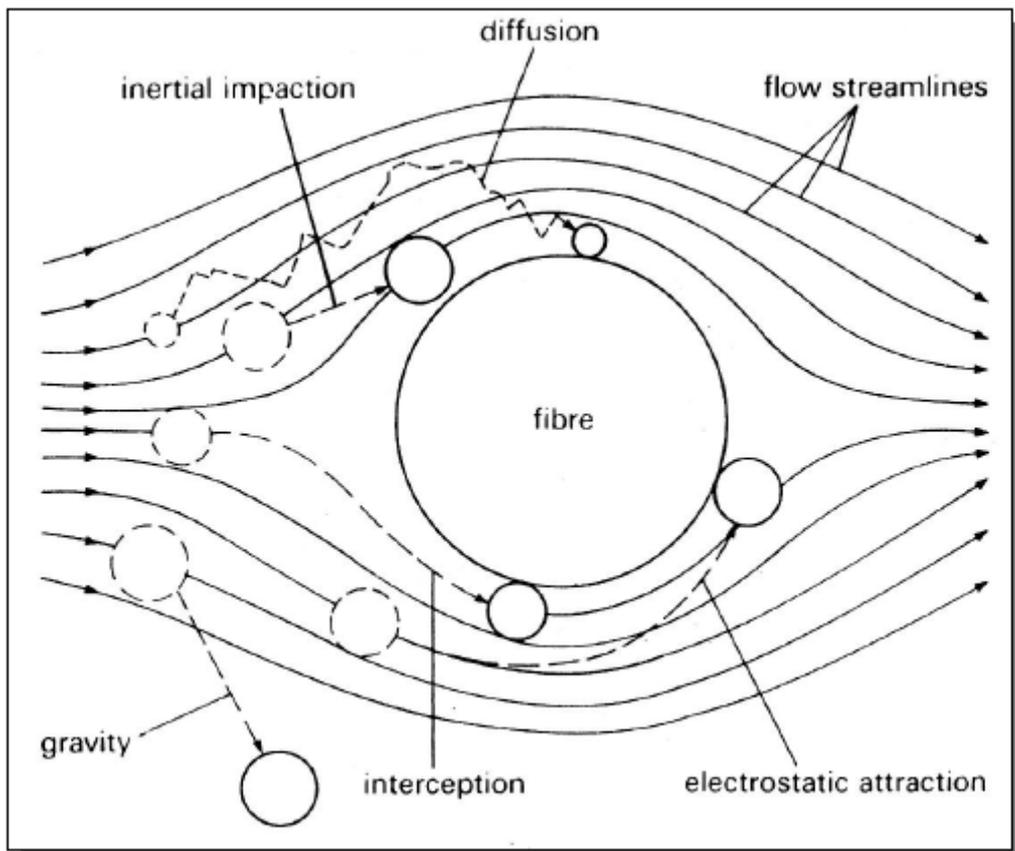


圖 1.1 單一纖維收集作用力示意圖

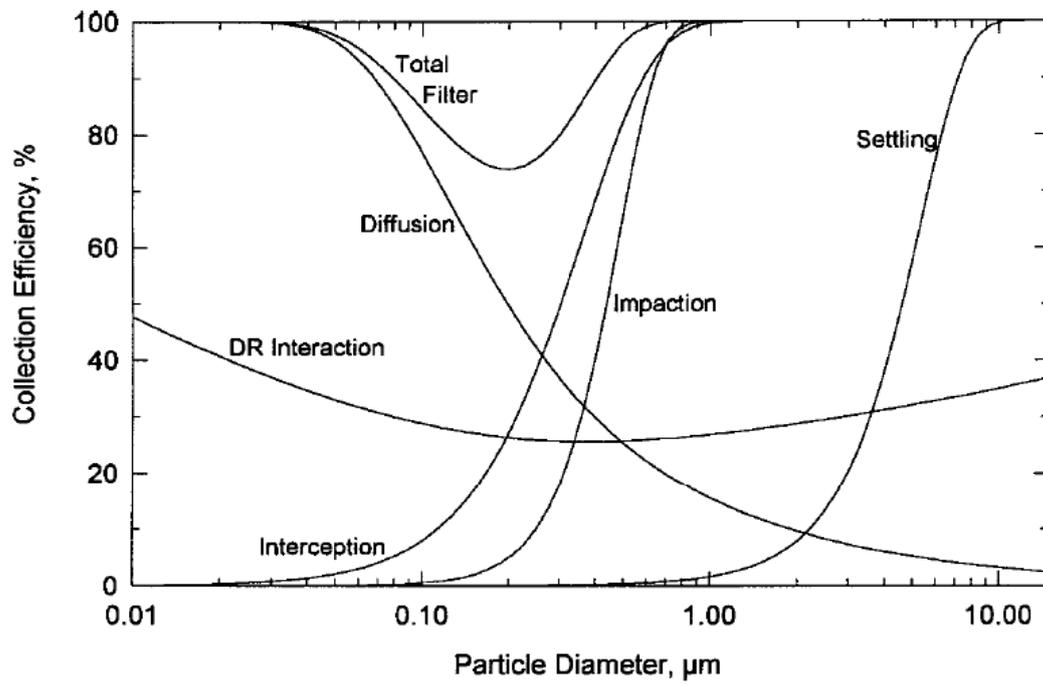


圖 1.2 單一纖維收集效率對粒徑分布圖

第二章 ALE 座標描述方法之運動學理論

現今，不論利用有限差分法(finite difference method)或有限元素法(finite element method)離散計算區域，其描述流體運動問題的座標系統分為兩種，一為拉格朗日(Lagrangian)座標系統，另一為尤拉(Eulerian)座標系統。利用拉格朗日座標系統描述流場時，觀察流場的焦點集中在各個流體質點上；在數值計算的過程中，計算網格將隨流體質點的運動而移動。反之，尤拉座標系統觀測流場的焦點固定在空間中，計算網格也固定在計算區域的空間中，不隨流體質點運動。

2.1 網格描述與座標系統

在使用 ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法計算移動邊界的問題中，有三種座標定義域的關係存在，分別敘述如後，或參考圖 2-1 之描繪[20,21]：

1、空間定義域 (Spatial Domain, Ω_y):

代表一般流力問題所陳述的定義域，在探討移動邊界問題的領域中，此定義域會移動，而在數值方法的格點劃分上，此定義域即為節點座標，因此又稱為「Eulerian」座標系統。

2、物質定義域 (Material Domain, Ω_z):

代表流體粒子所佔有的定義域且亦會移動，而在數值方法的計算中，此定義域即為流體本身，其座標系統稱之為「Lagrangian」座標系統。

若是存在某物質定義域座標點 z_i ，則其與空間定義域之座標點 y_i 的關係可由函數 f_1 轉換如下：

$$y_i = f_1(z_i, t) = f_{1t}(z_i) \quad (2-1a)$$

3、參考定義域 (Referential Domain, Ω_x):

代表固定不動的定義域，因此在數值方法中為絕對的座標系統，通常稱之為「Referential」座標系統。

若是存在某座參考定義域標點 x_i ，則其與空間定義域之座標 y_i 的關係可

由函數 f_2 轉換如下：

$$y_i = f_2(x_i, t) = f_{2t}(x_i) \quad (2-1b)$$

而任一物質座標點 z_i 與參考座標點 x_i 的關係可由函數 f_3 轉換為：

$$x_i = f_3(z_i, t) = f_{3t}(z_i) \quad (2-1c)$$

且

$$f_{3t} = f_{2t}^{-1} \cdot f_{1t} \quad (2-2)$$

根據上列所述的三種座標系統，ALE 法因此產生了三種速度的存在：

1、流體速度 (Material Velocity, u)

$$u = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-3a)$$

2、節點速度 (Mesh Velocity, \hat{u})

$$\hat{u} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} \quad (2-3b)$$

3、對流速度 (Convective Velocity, \hat{c})

$$\hat{c} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-3c)$$

且

$$\hat{c} = u - \hat{u} \quad (2-4)$$

另外，由三種不同的座標定義域可以獲得如下的座標轉換關係[24]：

1、Referential 座標與 Lagrangian 座標之轉換

根據微分定理可知

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-5)$$

若是把函數 Φ 以座標函數 y 代入，可得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i}$$

也就是

$$u = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i}$$

則

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} = (u - \hat{u}) \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$$

再將上述的式子代入原式 (2-5) 即可得到最後之座標轉換式

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} + (u - \hat{u}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2-6)$$

2、Eulerian 座標與 Lagrangian 座標之轉換

同理，根據微分定理可知

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} \bigg|_{z_i} \quad (2-7)$$

而最後之時間微分項由前面之流體速度定義式 (2-3a) 可知其恰好為

u ，故可直接獲得轉換關係式如下

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y_i} + u \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (2-8)$$

3、Referential 座標與 Eulerian 座標之轉換

同理，根據微分定理可知

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \bigg|_{y_i} \quad (2-9)$$

把函數 Φ 以座標函數 y 代入，可得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \bigg|_{y_i}$$

也就是

$$0 = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \bigg|_{y_i}$$

則

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{y_i} = -\hat{u} \frac{\partial x_i}{\partial y_i}$$

將上式代入式 (2-9) 即可獲得 Referential 座標與 Eulerian 座標之轉換

關係式

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{x_i} - \hat{u} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (2-10)$$

2.2 ALE 中的統御方程式

在流場中，多孔性介質以外的區域使用的統馭方程式為：

連續方程式：

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 \quad (2-11)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) \quad (2-12)$$

y 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) \quad (2-13)$$

根據轉換公式 (2-10)，將 Eulerian 座標之統御方程式 (2-11) ~ (2-13) 轉換為 ALE 形式之統御方程式，即可得到：

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 \quad (2-14)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial u_f}{\partial t} + (u_f - \hat{u}) \frac{\partial u_f}{\partial x} + (v_f - \hat{v}) \frac{\partial u_f}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) \quad (2-15)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + (u_f - \hat{u}) \frac{\partial v_f}{\partial x} + (v_f - \hat{v}) \frac{\partial v_f}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) \quad (2-16)$$

另一方面在多孔性介質中流動之統馭方程式為：

連續方程式

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 \quad (2-17)$$

動量方程式

x 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) + v_f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |v| u_f \quad (2-18)$$

y 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) + v_f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |v| v_f \quad (2-19)$$

根據轉換公式 (2-10)，將 Eulerian 座標之統御方程式轉換為 ALE 形式之統御方程式，即可得到：

$$\frac{\partial u_{fp}}{\partial x} + \frac{\partial v_{fp}}{\partial y} = 0 \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial u_f}{\partial t} + (u_f - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) + (v_f - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} u_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| u_f \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{\partial v_{fp}}{\partial t} + (u_f - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) + (v_f - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) \right] \\ = -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| v_f + \rho g \varepsilon \end{aligned} \quad (2-22)$$

2.3 格點速度

Hughes [20,21]等對於 ALE 的運動學理論有詳細的探討，並定義了三種座標定義域：在 ALE 法中，參考座標系統的移動速度是可以任意給定的，因此計算網格的移動速度與流體速度間彼此獨立，可以根據計算的需要給定適當的網格速度。本研究依據不同的物理邊界條件，將網格速度分為三種區域：

1. 固定邊界上，網格速度為 0。
2. 移動邊界上，網格速度等於壁面速度，亦與移動邊界上的流體等速。
3. 在固定邊界與移動邊界間，網格速度可以依需求設定，以避免網格過度扭曲導致計算發散。此網格速度可以是定值，也可以是隨時間而變化的變數。在本研究中則根據格點與壁面間的距離，使網格速度成線性分佈。

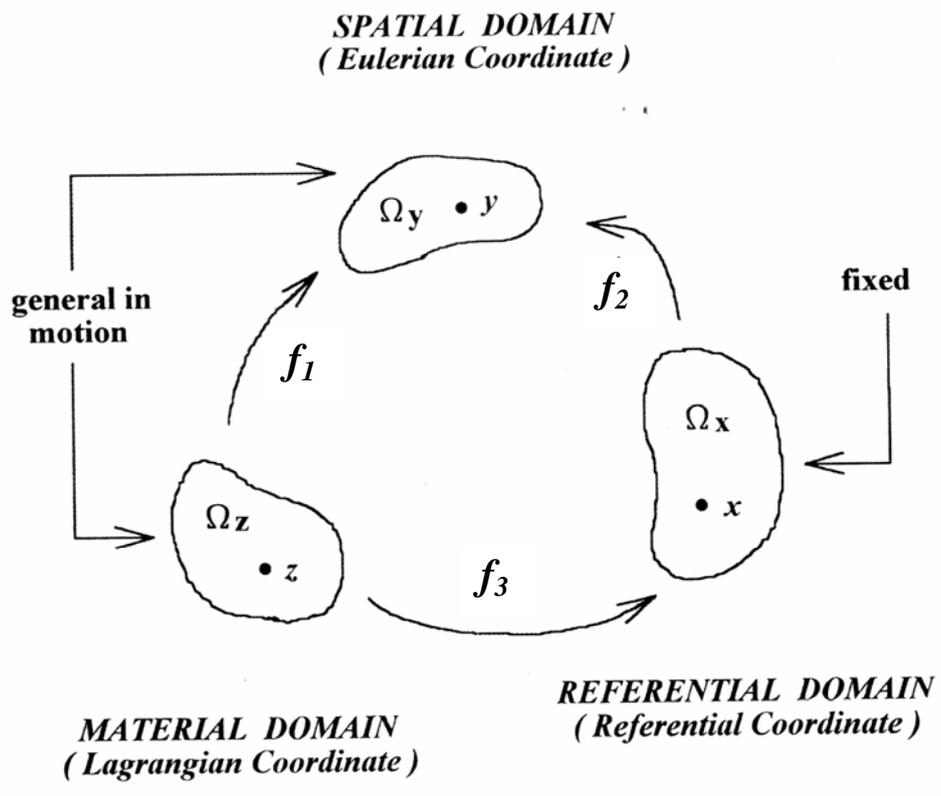


圖 2-1 ALE 運動學示意圖

第三章 物理模式

本研究將利用研究振動對過濾效率的影響，物理模型如圖 3-1，其中 CDIJ 為過濾材，本研究中濾材假設為多孔性介質中的纖維狀假設，BCJK 與 DEHI 為韌性體，可使過濾材適當地移動，利用前章所述的 ALE 法計算震動濾材的流場計算，並利用粒子受到流場的影響下，計算粒子在流場中位置與速度，在利用分子碰撞理論及單一纖維收集效率，計算粒子在濾材中的收集機率分佈與濾材的收集效率。

3.1 流場統御方程式

為了簡化分析，本研究做了以下的假設：

- (1) workflow 為水平流場，不考慮重力方向。
- (2) workflow 為二維不可壓縮流場。
- (3) workflow 各項性質皆為常數。
- (4) 流體與物體之界面滿足無滑動條件 (no-slip condition)，亦即移動面之流體速度等於管道壁面之運動速度。
- (5) 多孔性介質為纖維狀不可變形，且與流體不起化學作用。
- (6) 多孔性介質具有等向性。
- (7) 流場為二為穩定流場，不因粒子的加入而有所改變。

基於以上的假設，整個流場可以區分為多孔性介質內部之流場（簡稱內流場），多孔性介質以外的流場（簡稱外流場）。

3.1.1 內流場之統御方程式

連續方程式：

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 \quad (3-1a)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) + v_f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_f}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} v_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |v| u_f \quad (3-1b)$$

y 方向

$$\rho_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) + v_f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_f}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu \varepsilon}{K} u_f - \frac{\rho_f \varepsilon F}{\sqrt{K}} |u| v_f \quad (3-1c)$$

$$\text{其中 } |v| = \sqrt{u_f^2 + v_f^2}$$

式 (3-3) 及 (3-4) 等號右邊第二項為擴散項，此乃為了符合壁面上之不滑移條件。右邊第三項為達西阻力，其代表因多孔介質存在而造成的壓力損失，右邊第四項為慣性阻力，此項為在高流速時孔隙間流體混合所造成的額外阻力。孔隙率 ε (無因次)、滲透率 K ($[m^2]$)、慣性參數 F (無因次) 之經驗式如下列所示，此為 Adrian [18] 所建議的 Davies 模式。

$$K = \frac{d_p^2}{64(1-\varepsilon)^{1.5}(1+56(1-\varepsilon)^3)} \quad (3-2)$$

$$F = 0.043(1-\text{por})^{-2.13} \quad (3-3)$$

其中：

d_p ：多孔性介質顆粒直徑

3.1.2 外流場之統御方程式

連續方程式：

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} = 0 \quad (3-4a)$$

動量方程式：

x 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial t} + u \frac{\partial u_f}{\partial x} + v \frac{\partial u_f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} \right) \quad (3-4b)$$

y 方向

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} + u \frac{\partial v_f}{\partial x} + v \frac{\partial v_f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} \right) \quad (3-4c)$$

3.1.3 無因次化：

無因次參數群可表示如下：

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U_f = \frac{u_f}{v_0}, \quad V_f = \frac{v_f}{v_0}, \quad V_b = \frac{v_b}{v_0} \\ P_f &= \frac{p_f - p_\infty}{\rho v_0^2}, \quad \tau = \frac{t v_0}{H}, \quad \text{Re}_f = \frac{v_0 H}{\nu_f}, \quad F_c = \frac{f H}{v_0} \\ Da &= \frac{K}{H^2}, \quad |V| = \sqrt{U_f^2 + V_f^2} \end{aligned} \quad (3-5)$$

其中 V_b 是代表濾材瞬間移動速度，因此寫成：

$$\begin{aligned} V_b(\tau) &= \frac{v_b(t)}{v_0} = \frac{v_b}{v_0} \cdot \cos(\omega t) \\ &= V_b \cdot \cos\left(2\pi f_c \frac{H}{v_0} \tau\right) = V_b \cdot \cos(2\pi F_c \tau) \end{aligned} \quad (3-6)$$

表 3-1 為各項參數無因次化後的數值列表。

根據上述的假設和無因次化之參數，經整理後可得無因次化之 ALE 型式的流場統御方程式，表示如下：

3.1.4 內流場無因次化：

連續方程式：

$$\frac{\partial U_f}{\partial X} + \frac{\partial V_f}{\partial Y} = 0 \quad (3-7a)$$

動量方程式：

X 方向：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_f}{\partial \tau} + (U_f - \varepsilon \hat{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_f}{\varepsilon} \right) + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_f}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_f}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} U_f - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} |V| U_f \end{aligned} \quad (3-7b)$$

Y 方向：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_f}{\partial \tau} + (U_f - \varepsilon \hat{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_f}{\varepsilon} \right) + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_f}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_f}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} V_f - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} |V| V_f \end{aligned} \quad (3-7c)$$

3.1.5 外流場因次化：

連續方程式：

$$\frac{\partial U_f}{\partial X} + \frac{\partial V_f}{\partial Y} = 0 \quad (3-8a)$$

動量方程式：

X 方向：

$$\frac{\partial U_f}{\partial \tau} + (U_f - \hat{U}) \frac{\partial U_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial U_f}{\partial Y} = -\frac{\partial P_f}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}_f} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) \quad (3-8b)$$

Y 方向：

$$\frac{\partial V_f}{\partial \tau} + (U_f - \hat{U}) \frac{\partial V_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial V_f}{\partial Y} = -\frac{\partial P_f}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}_f} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) \quad (3-8c)$$

其中 \hat{U} ($\hat{U} = \frac{\hat{u}}{v_0}$) 和 \hat{V} ($\hat{V} = \frac{\hat{v}}{v_0}$) 分別為計算網格在 x 方向和 y 方向之移

動速度。



3.2 粒子運動之統御方程式

在本研究中，必須了解粒子在流場中的位置與速度，才能計算通過濾材時，粒子在不同位置被捕捉的機率。由於微小粒子的運動極為複雜，為了便於簡化分析，下列基本假設視為成立：

- (1) 粒子為球體剛體，群體中個體運動仍視為單一球體剛體運動，運動中相互間不發生碰撞。
- (2) 流體的物理性質為定值。
- (3) 不考慮溫度、濃度的影響。
- (4) 不考慮粒子撞擊壁面後所產生之影響。

基於上述假設，粒子的運動方程式[24][25]可用下列各式表示粒子運動方程式：

X 方向：

$$m_s \frac{du_s}{dt} = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho_f \cdot A \cdot |v_r| \cdot (u_f - u_s) \quad (3-9a)$$

Y 方向：

$$m_s \frac{dv_s}{dt} = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho_f \cdot A \cdot |v_r| \cdot (v_f - v_s) \quad (3-9b)$$

其中

$$A = \frac{\pi}{4} d_s^2$$

$$m_s = \frac{4}{3} \frac{\rho_s \pi d_s^3}{8}$$

$$|v_r| = \sqrt{(u_f - u_p)^2 + (v_f - v_p)^2}$$

為了數值計算的方便，導入下列無因次變數，其定義如下：

$$U_s = \frac{u_s}{v_0}, \quad V_s = \frac{v_s}{v_0}, \quad U_f = \frac{u_f}{v_0}, \quad V_f = \frac{v_f}{v_0}, \quad \tau = \frac{tv_0}{H}$$

經無因次化的粒子運動方程式為：

X 方向：

$$\frac{dU_s}{d\tau} = \frac{3}{4} C_D \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \cdot \left(\frac{H}{d_s} \right) \cdot |V_r| \cdot (U_f - U_s) \quad (3-10a)$$

Y 方向：

$$\frac{dV_s}{d\tau} = \frac{3}{4} C_D \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \cdot \left(\frac{H}{d_s} \right) \cdot |V_r| \cdot (V_f - V_s) \quad (3-10b)$$

流場可預先算得各點的速度，再經由線性內差法求得 U_f 、 V_f 的值，之後再由(3-10a)、(3-10b)求得 U_s 、 V_s 。

摩擦係數(Drag force Coefficient) C_D 與相對速度、粒子大小有關，可由下式表示：

$$C_D = C_0 + \frac{C_1}{R_{er}} + \frac{C_2}{R_{er}^2} \quad (3-11)$$

其中

$$R_{er} = \frac{|\bar{v}_r| \cdot d_s}{v_f}$$

C_0 、 C_1 、 C_2 為 R_{er} 的函數，Morsi[26]整理如表 3-1 所示



3.3 懸浮粒子被收集統御方程式

計算懸浮粒子被收集效率主要分為兩部份，第一部份利用單一纖維收集效率(single-collector efficiency)，計算接近過濾材的懸浮粒子被捕捉的機率，另一部份計算懸浮粒子有多少機率會接近過濾材，本研究將兩者結合，計算懸浮粒子在行進過程被捕捉的機率，其中接近過濾材的懸浮粒子的範圍如圖 3-2 所示。

3.3.1 單一纖維收集效率

研究中為了簡化分析，將對此部份做以下假設：

1. 工作流場為水平流場，忽略重力影響。
2. 懸浮粒子為球體剛體。
3. 懸浮粒子與過濾材為電中性。
4. 懸浮粒子與過濾材碰撞後，將不會分離或彈開。

因此研究中，將利用 Zhu[34]所提出的擴散項、攔截項與慣性單一纖維收集效率，作為本研究中的所須考慮的收集效率項。

擴散項(Diffusion)單一纖維收集效率

$$\eta_D = 2.9 \left(\frac{\varepsilon}{Ku} \right)^{1/3} Pe^{-2/3} \quad \text{Re}_p < 1; \varepsilon > 0.33; Pe > 1000 \quad (3-12a)$$

攔截項(Interception)單一纖維收集效率

$$\eta_r = \frac{\varepsilon}{Ku} \left(\frac{d_s}{d_p} \right)^2 \quad \text{Re}_p < 1; \varepsilon > 0.33; Pe > 1000 \quad (3-12b)$$

慣性項(Inertia)單一纖維收集效率

$$\eta_I = \frac{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon}}{Ku} St \left(\frac{d_s}{d_p} \right) + \frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{Ku} St^2 \quad (3-12c)$$

由於擴散項與慣性項不可能獨立出現，因此研究中利用 Hinds[35]所提出擴散項與攔截項單一纖維收集效率的修正項

$$\eta_{DR} = 1.24 \frac{1}{\sqrt{KuPe}} \frac{d_s}{d_p} \quad (3-12d)$$

其中

$$Pe = \frac{3\pi\mu d_p d_s |v_r|}{Cn k_B T}, \quad k_B = \text{Boltzmann constant, JK}^{-1}$$

$$St = \frac{Cn\rho_p |v_r| d_p^2}{9\mu d_s}, \quad |v_r| = \sqrt{(u_s - u_p)^2 + (v_s - v_p)^2} \quad (3-13)$$

$$Cn = 1 + 1.246 \frac{\lambda}{d_p} + 0.84 \frac{\lambda}{d_p} \exp(-0.435 \frac{\lambda}{d_p})$$

λ 為工作流體的平均自由路徑(mean free path)，空氣在 NTP 時為 0.065 μm 。

最後，懸浮粒子接近單一纖維的總單一纖維效率將計算為

$$\eta_T = 1 - (1 - \eta_D)(1 - \eta_r)(1 - \eta_I)(1 - \eta_{DR}) \quad (3-14)$$

3.3.2 懸浮粒子被收集效率

本節將利用分子碰撞理論[27]計算懸浮粒子有多少機率會接近過濾材，並利用 3.3.1 節所計算的結果，計算懸浮粒子在行進過程中，所被過濾材捕捉到的機率，即是由單一纖維收集效率轉換成單一懸浮粒子被收集的機率。

在分子碰撞理論中，定義在距離 ξ 到 $\xi + d\xi$ 區間內，發生粒子發生碰撞的機率為 $\beta d\xi$ ，其中 β 為 ξ 到 $\xi + d\xi$ 區間內的碰撞機率密度函數(probability density function)，基於此定義將可知，從原點行進到 $\xi + d\xi$ 距離時，分子不被碰撞的機率(F)可寫為

$$F(\xi + d\xi) = F(\xi)(1 - \beta d\xi) \quad (3-15)$$

對左式做 Taylor 展開

$$F(\xi) + \frac{dF(\xi)}{d\xi} d\xi = F(\xi) - \beta F(\xi) d\xi \quad (3-16)$$

簡化後

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = -\beta F(\xi) \quad (3-17)$$

此解必須滿足初始條件 $F(0) = 1$ ，因此可得

$$F(\xi) = e^{-\beta\xi} \quad (3-18)$$

定義 $f(\xi)$ 為 0 到 ξ 區間不發生碰撞，但在 ξ 時間點上發生碰撞的機率，因此計算行進 0 到 ξ 區間不發生碰撞，但在 ξ 到 $\xi + d\xi$ 區間發生碰撞的機率，可寫為

$$f(\xi) d\xi = F(\xi) \beta d\xi$$

因此可得

$$f(\xi) = \beta e^{-\beta\xi} \quad (3-19)$$

因此利用(3-19)計算懸浮粒子發生碰撞為止所行進的平均距離 $\langle \xi \rangle$

$$\langle \xi \rangle = \int_0^{\infty} \xi \cdot f(\xi) d\xi = \frac{1}{\beta} \quad (3-20)$$

如圖 3-3 碰撞體積示意圖可知，其中 d_{l2} 為懸浮粒子的有效碰撞直徑，懸浮

粒子在行進 dt 過程中，被捕捉的總粒子數，亦可視為所受到的碰撞次數，而碰撞次數等於碰撞體積乘與單位體積纖維數(n)與總單一纖維收集效率(η_T)，下式表示

$$n\pi d_{12}^2 \bar{v}_r dt \times \eta_T \quad (3-21)$$

因此在行進過程中，分子的碰撞頻率 ν 為

$$\nu = n\pi d_{12}^2 \bar{v}_r \eta_T \quad (3-22)$$

由碰撞頻率 ν 與平均行進距離 $\langle \xi \rangle$ 的關係式為 $\frac{\langle \xi \rangle}{\nu} = \bar{v}_s$ 懸浮粒子平均行進速度，可得

$$\langle \xi \rangle = \frac{\bar{v}_s}{n\pi d_{12}^2 \bar{v}_r \eta_T} = \frac{1}{\beta} \quad (3-23)$$

在本研究中

$$\bar{v}_s = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}, \quad d_{12} = \frac{(d_p + d_s)}{2}$$

$$\bar{v}_r = \sqrt{(u_s - u_p)^2 + (v_s - v_p)^2} \quad (3-24)$$

將(3-23)帶入(3-19)可得懸浮粒子在行進過程被收集的機率密度函數 $f(\xi)$

表 3-1 不同 R_{er} 值下， C_0 、 C_1 、 C_2 之值

R_{er}	C_0	C_1	C_2
<0.1	0	24	0
0.1~1	3.69	22.73	0.0903
1~10	1.222	29.1667	-3.889
10~10 ²	0.6167	46.5	-116.67
10 ² ~10 ³	0.3644	98.33	-2778
10 ³ ~5×10 ³	0.357	148.62	-4.75×10 ⁴
5×10 ³ ~10 ⁴	0.46	-490.546	-5.79×10 ⁵

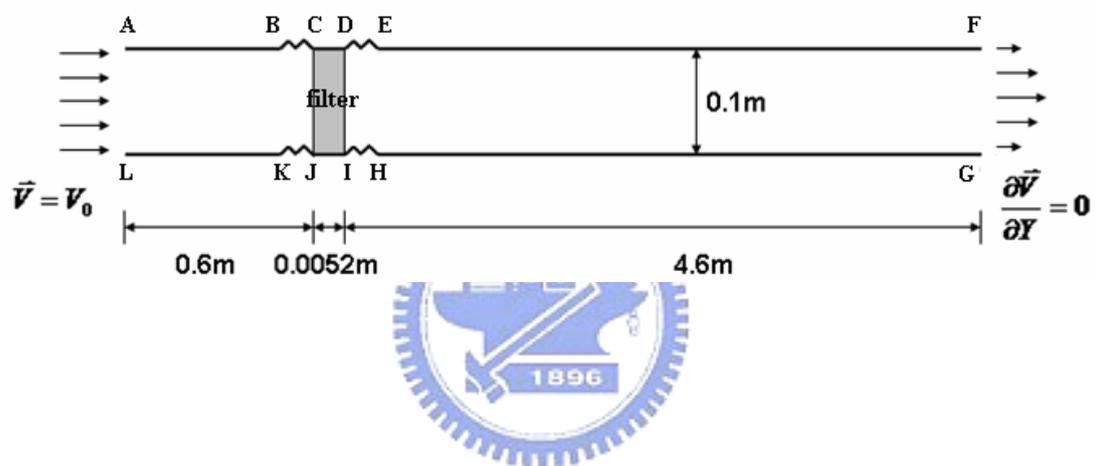


圖 3-1 物理模式

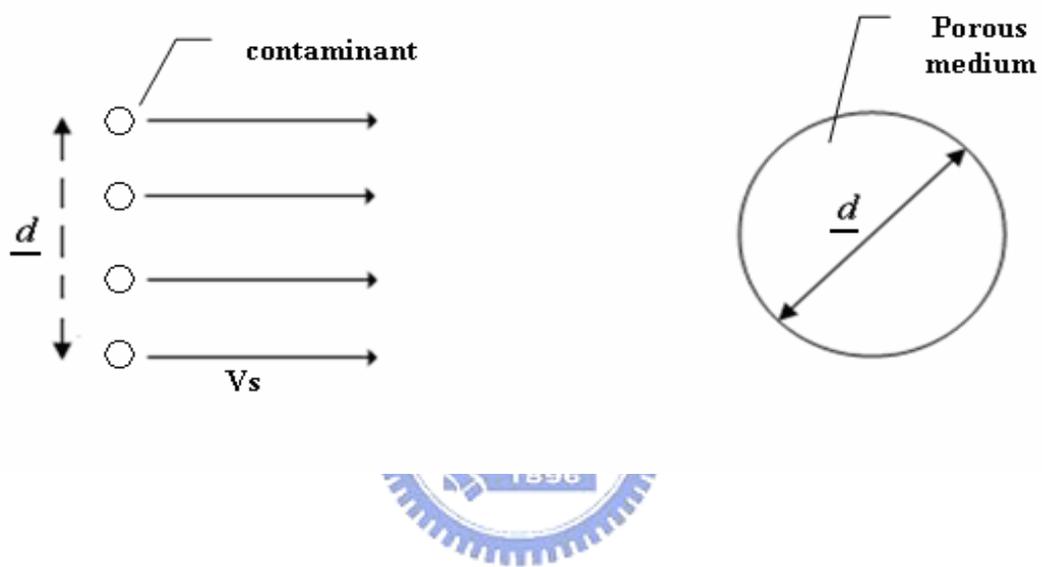


圖 3-2 單一纖維收集效率定義圖

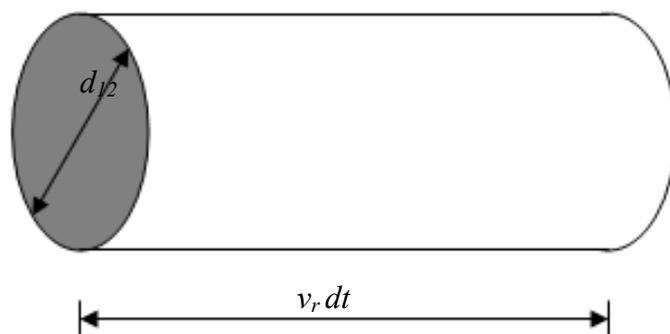


圖 3-3 直徑為 d_{12} 速度 v_r 、單位時間 dt 碰撞體積示意圖

第四章 數值方法

本研究的數值方法將分為兩部份，第一部份將計算速度場，採用葛拉金有限元素法 (Galerkin finite element method)。所有元素均為八節點二次等參元素，並引入處罰函數 (penalty function) [28]處理壓力項和連續方程式，使所需計算的變數僅為 U 、 V ，對於時間項則採用後向差分隱式法 (backward different implicit method)。此外，應用牛頓拉斐遜 (Newton-Raphson) 迭代法[29]處理動量方程式中的非線性項。速度和溫度均採用四邊形八節點二次等參元素，其節點排列方式如圖 4-1 所示；第二部份將計算完的流場用來計算懸浮粒子的位置與速度，並計算在經過濾材時被捕捉的機率。

4.1 流場數值計算

統御方程式為

內流場：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_f}{\partial \tau} + U_f \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_f}{\varepsilon} \right) + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_f}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_f}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} U_f - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} |\bar{U}_f| U_f \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_f}{\partial \tau} + U_f \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_f}{\varepsilon} \right) + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_f}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{\partial P_f}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Re Da}} V_f - \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} |\bar{U}_f| V_f \end{aligned} \quad (4-2)$$

外流場：

$$\frac{\partial U_f}{\partial \tau} + (U_f - \bar{U}) \frac{\partial U_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial U_f}{\partial Y} = -\frac{\partial P_f}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial \tau} + (U_f - \bar{U}) \frac{\partial V_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial V_f}{\partial Y} = -\frac{\partial P_f}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) \quad (4-4)$$

採用葛拉金有限元素法，並使用形狀函數 N_i 為加權函數，則原統御方程式可以轉換成如下之積分形式：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial U_{fp}}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_f}{\partial X} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} U_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} U_f \right] d\Omega = 0 \quad (4-5)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial V_{fp}}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial V_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_f}{\partial Y} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} V_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} V_f \right] d\Omega = 0 \quad (4-6)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial U_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_f}{\partial X} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4-7)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial V_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial V_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P_f}{\partial Y} - \frac{N_i}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4-8)$$

再將二次項及壓力項利用高斯積分定理加以化簡，

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P_f}{\partial X} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} P_f \frac{\partial N_i}{\partial X} d\Omega \quad (4-9a)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P_f}{\partial Y} d\Omega = \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} P_f \frac{\partial N_i}{\partial Y} d\Omega \quad (4-9b)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U_f}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_f}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U_f}{\partial X} d\Omega \quad (4-9c)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U_f}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_f}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U_f}{\partial Y} d\Omega \quad (4-9d)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V_f}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_f}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V_f}{\partial X} d\Omega \quad (4-9e)$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V_f}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_f}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V_f}{\partial Y} d\Omega \quad (4-9f)$$

則原積分式可以改寫如下：

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) - P_f \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} U_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} U_f \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma \quad (4-10a)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) - P_f \frac{\partial N_i}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} V_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} V_f \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma \quad (4-10b)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) - P_f \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma \quad (4-10c)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \hat{U}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) - P_f \frac{\partial N_i}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma \quad (4-10d)$$

利用處罰函數可將壓力項以速度關係式代入：

$$P_f = -\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) \quad (4-11)$$

則 (4-10a) 與 (4-10b) 式變為：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \bar{U}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$+ N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} U_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} U_f$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma$$

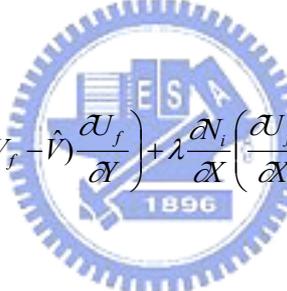
(4-12a)

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \bar{U}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + (V_f - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$+ N_i \frac{\varepsilon}{\text{ReDa}} V_f + N_i \frac{F\varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{U_f^2 + V_f^2} V_f$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_{fp} N_i n_y d\Gamma$$

(4-12b)



$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \bar{U}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma$$

(4-12c)

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial \tau} + N_i \left((U_f - \bar{U}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + (V_f - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}_f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma$$

(4-12d)

為了計算處理上的方便，可以把原本非線性積分方程式加以線性化，

其中 $\Phi^{m+1} = \Phi^m + \delta\Phi$ 則

$$\begin{aligned}\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial S} &= \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} \approx \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \delta\Phi \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} \\ &= \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} - \Phi^m \frac{\partial \Phi^m}{\partial S}\end{aligned}\quad (4-13)$$

上式中省略了 $\delta\Phi \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial S}$ 項，其中 Φ 可表為 U_f 、 V_f ， S 可表為 X 或 Y ，

若是將上述之推導加上格點速度（mesh velocity）一項，則線性化結果變為

$$\begin{aligned}(U_f - \hat{U}) \frac{\partial U_f}{\partial Y} &= (U_f^{m+1} - \hat{U}) \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} = U_f^{m+1} \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} - \hat{U} \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} \\ &= \left(U_f^m \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} + U_f^{m+1} \frac{\partial U_f^m}{\partial Y} - U_f^m \frac{\partial U_f^m}{\partial Y} \right) - \hat{U} \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} \\ &= (U_f^m - \hat{U}) \frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial Y} + U_f^{m+1} \frac{\partial U_f^m}{\partial Y} - U_f^m \frac{\partial U_f^m}{\partial Y}\end{aligned}\quad (4-14a)$$

$$\begin{aligned}(V_f - \hat{V}) \frac{\partial V_f}{\partial Y} &= (V_f^{m+1} - \hat{V}) \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} = V_f^{m+1} \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} - \hat{V} \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} \\ &= \left(V_f^m \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} + V_f^{m+1} \frac{\partial V_f^m}{\partial Y} - V_f^m \frac{\partial V_f^m}{\partial Y} \right) - \hat{V} \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} \\ &= (V_f^m - \hat{V}) \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} + V_f^{m+1} \frac{\partial V_f^m}{\partial Y} - V_f^m \frac{\partial V_f^m}{\partial Y}\end{aligned}\quad (4-14b)$$

同理， Y 方向之線性化亦可推導而得：

$$(U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} = (U^m - \hat{U}) \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + U^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial X} - U^m \frac{\partial V^m}{\partial X}\quad (4-14c)$$

$$(V - \hat{V}) \frac{\partial V}{\partial X} = (V^m - \hat{V}) \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial X} - V^m \frac{\partial V^m}{\partial X}\quad (4-14d)$$

同時，(4-12a)、(4-12b) 中的慣性阻力可以表示成：

$$\begin{aligned}\sqrt{U_f^2 + V_f^2} U_f &= \sqrt{(U_f^m)^2 + (V_f^m)^2} U_f^{m+1} \\ \sqrt{U_f^2 + V_f^2} V_f &= \sqrt{(U_f^m)^2 + (V_f^m)^2} V_f^{m+1}\end{aligned}\quad (4-15)$$

另外，對於時間項 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 的處理方式，則採用上述之後向差分隱式法，其微分式可以表示成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\Phi_{\tau+\Delta\tau} - \Phi_{\tau}}{\Delta\tau} \quad (4-16)$$

由上述之推導，最終即可獲得線性化之有限元素方程式，如下所示：

內流場：

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_f^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U_f^m - \varepsilon \bar{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_f^{m+1}}{\varepsilon} \right) + (V_f^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_f^{m+1}}{\varepsilon} \right) + U_f^{m+1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{U_f^m}{\varepsilon} \right) + V_f^{m+1} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{U_f^m}{\varepsilon} \right) \right) \right. \\ & \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{N_i \varepsilon}{\text{ReDa}} U_f^{m+1} + \frac{N_i F \varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{(U_f^m)^2 + (V_f^m)^2} U_f^{m+1} \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_{f,\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U_f^m \frac{\mathcal{A}_f^m}{\partial X} + V_f^m \frac{\mathcal{A}_f^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{A}_f^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma \quad (4-17a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_f^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U_f^m - \varepsilon \bar{U}) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_f^{m+1}}{\varepsilon} \right) + (V_f^m - \varepsilon \hat{V}) \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_f^{m+1}}{\varepsilon} \right) + U_f^{m+1} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{V_f^m}{\varepsilon} \right) + V_f^{m+1} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{V_f^m}{\varepsilon} \right) \right) \right. \\ & \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{N_i \varepsilon}{\text{ReDa}} V_f^{m+1} + \frac{N_i F \varepsilon}{\sqrt{\text{Da}}} \sqrt{(U_f^m)^2 + (V_f^m)^2} V_f^{m+1} \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_{f,\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U_f^m \frac{\mathcal{A}_f^m}{\partial X} + V_f^m \frac{\mathcal{A}_f^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{A}_f^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma \quad (4-17b)\end{aligned}$$

外流場：

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_f^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U_f^m - \bar{U}) \frac{\partial \mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + (V_f^m - \hat{V}) \frac{\partial \mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} + U_f^{m+1} \frac{\partial \mathcal{A}_f^m}{\partial X} + V_f^{m+1} \frac{\partial \mathcal{A}_f^m}{\partial Y} \right) \right. \\ & \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\mathcal{A}_f^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_{f,\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial U_f^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial U_f^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U_f^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_x d\Gamma$$

(4-18a)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_{f,\Delta\tau+\tau}^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U_f^m - \hat{U}) \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial X} + (V_f^m - \hat{V}) \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} + U_f^{m+1} \frac{\partial V_f^m}{\partial X} + V_f^{m+1} \frac{\partial V_f^m}{\partial Y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V_f^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_\tau}{\Delta\tau} + N_i \left(U_f^m \frac{\partial V_f^m}{\partial X} + V_f^m \frac{\partial V_f^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V_f^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_f N_i n_y d\Gamma \end{aligned}$$

(4-18a)

上式中含上標「m」或「m+1」之各項，其下標均為「 $\tau + \Delta\tau$ 」。

將上述步驟所得之兩個方程式利用矩陣形式表示，且

$$U^{(e)} = [N] \{U\}^{(e)} \tag{4-19a}$$

$$V^{(e)} = [N] \{V\}^{(e)} \tag{4-19b}$$

$$[N]_{1 \times 8} = [N_1, N_2, \dots, N_8] \tag{4-20}$$

$$\{U\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{Bmatrix} \tag{4-21a}$$

$$\{V\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{Bmatrix} \tag{4-21b}$$

而其中的形狀函數 (shape function) 採用八節點二次等參元素，其函數則如下所述：

$$N_1 = \frac{-1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \tag{4-22a}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (4-22b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \quad (4-22c)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (4-22d)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \quad (4-22e)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (4-22f)$$

$$N_7 = \frac{-1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \quad (4-22g)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (4-22h)$$

如此即可獲得單一元素之矩陣方程式

$$([C]^{(e)} + [K]^{(e)} + \lambda [L]^{(e)}) \{q\}^{(e)} = \{f\}^{(e)} \quad (4-23)$$

其中 $\{q\}^{(e)} = [U_1, U_2, \dots, U_8, V_1, V_2, \dots, V_8]$

$[C]^{(e)}$ 表非線性迭代 U 與 V 所組成之矩陣，

$[K]^{(e)}$ 表純由幾何形狀函數與時間項所組成之矩陣，

$[L]^{(e)}$ 表帶有處罰函數 λ 項所組成之矩陣，

$\{f\}^{(e)}$ 表右半部已知向量之矩陣。

若是將計算區域內的所有元素結合成單一矩陣方程式，則上式變為

$$([C] + [K] + \lambda [L]) \{q\} = \{f\} \quad (4-24)$$

至於各矩陣的詳細內容可以參考附錄 A 所示。

由於 (4-24) 式為一組非常龐大的聯立方程組，為減小計算所需的記憶體空間，本研究採用鋒面法 (frontal method) [30-32] 並配合高斯喬登消去法來求解。

另外，程式的收斂條件則定為

$$\text{MAX} \left| \frac{\{q\}^{m+1} - \{q\}^m}{\{q\}^{m+1}} \right| < 10^{-3} \quad (4-24)$$

而為避免數值計算中所造成的發散現象，求解高雷諾數的流場時，是利用所求得的低雷諾數之流場作為初始值，再用此穩態流場之計算結果，當作求解暫態流場之初始值。

數值計算流程圖如圖 4-2 所示。詳細的步驟如下：

1. 在穩態流場下，經由網格測試決定最佳的計算網格分佈和元素數量。
2. 求得穩定流場下之流場，作為暫態解的初始值
3. 計算各網格點的網格速度，並檢查初始條件與邊界條件有無錯誤。
4. 求得所需的各項參數（矩陣、形狀函數等）。
5. 反覆解聯立方程組求速度場，直到每一格點的速度及溫度值滿足下列收斂條件。

$$\left| \frac{\phi^{m+1} - \phi^m}{\phi^{m+1}} \right| < 10^{-3}, \text{ 式中 } \phi \text{ 表示 } U_f, V_f. \quad (4-26)$$

7. 繼續下一個時間的運算，直到達到預設的時間。

4.2 粒子運動軌跡與捕捉機率計算

利用上述方法求得流場分佈，代入式(3-10a)、(3-10b)則可計算粒子運動軌跡。用數值方法聯立解(3-10a)、(3-10b)時，本文採用有限差分法(finite difference)，以反覆計算求得粒子軌跡各位置速度 U_s 、 V_s 的收斂解。

$$U_{s,X+DX,Y+DY}^{m+1} = U_{s,X,Y} + \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{H}{d_s} |V_r| d\tau \cdot (U_{f,X+DX,Y+DY} - U_{s,X+DX,Y+DY}^m) \quad (4-27a)$$

$$V_{s,X+DX,Y+DY}^{m+1} = V_{s,X,Y} + \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{H}{d_s} |V_r| d\tau \cdot (V_{f,X+DX,Y+DY} - V_{s,X+DX,Y+DY}^m) \quad (4-27b)$$

其中

$$|V_r| = \left\{ \left(\frac{U_{f,X,Y} + U_{f,X+DX,Y+DY}}{2} - \frac{U_{s,X,Y} + U_{s,X+DX,Y+DY}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{f,X,Y} + V_{f,X+DX,Y+DY}}{2} - \frac{V_{s,X,Y} + V_{s,X+DX,Y+DY}}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4-28)$$

位置 $(X + DX, Y + DY)$ 利用前點位置 (X, Y) 之速度乘以無因次時間間隔 $d\tau$ 決定之。

$$DX = U_{s,X,Y} \cdot d\tau \quad (4-29a)$$

$$DY = V_{s,X,Y} \cdot d\tau \quad (4-29b)$$

反覆計算過程中，假設各粒子速度第一次之預測值與前一點的收斂值相等

$$U_{s,X+DX,Y+DY}^1 = U_{s,X,Y} \quad (4-30a)$$

$$V_{s,X+DX,Y+DY}^1 = V_{s,X,Y} \quad (4-30b)$$

粒子運動位置由 (X, Y) ，運動至 $(X + DX, Y + DY)$ ，當其速度的相對誤差同時滿足(4-31)時，則此階段的計算則結束。以上計算重複到懸浮粒子離開濾材或撞擊壁面為止。

$$\left| \frac{\phi^{m+1} - \phi^m}{\phi^{m+1}} \right| < 10^{-3} \quad , \text{ 式中 } \phi \text{ 表示 } U_s、V_s \quad (4-31)$$

將利用 U_s 、 V_s 計算懸浮粒子在行進濾材時，所被捕捉的機率，過程如下：

1. 代入(3-12a)、(3-12b)、(3-12c)與(3-12d) 計算得到的 η_D 、 η_r 、 η_I 與 η_{DR} 。
2. 再將計算得到的 η_D 、 η_r 、 η_I 與 η_{DR} 代入(3-14)可得總單一吸附效率 η_T 。
3. 將 η_T 代入(3-19)，可得在 (X, Y) 點上收集效率的 f 值。
4. 並對 f 做 (X, Y) 與 $(X + DX, Y + DY)$ 區間積分，可得粒子在行經 (X, Y) 、 $(X + DX, Y + DY)$ 區間時，所被捕捉的機率 F_T 。
5. 計算從初始點到 $(X + DX, Y + DY)$ 點上，所被捕捉的機率

$$P(X + DX, Y + DY) = P(X, Y) + (1 - P(X, Y)) \times F_T \circ$$

6. 判斷是否碰壁或離開過濾材。
7. 如果無將既序計算下一點速度位置，並重複計算下一點捕捉情形，反之則停止。

總計算懸浮粒子運動軌跡與捕捉機率計算的流程圖如圖 4-3



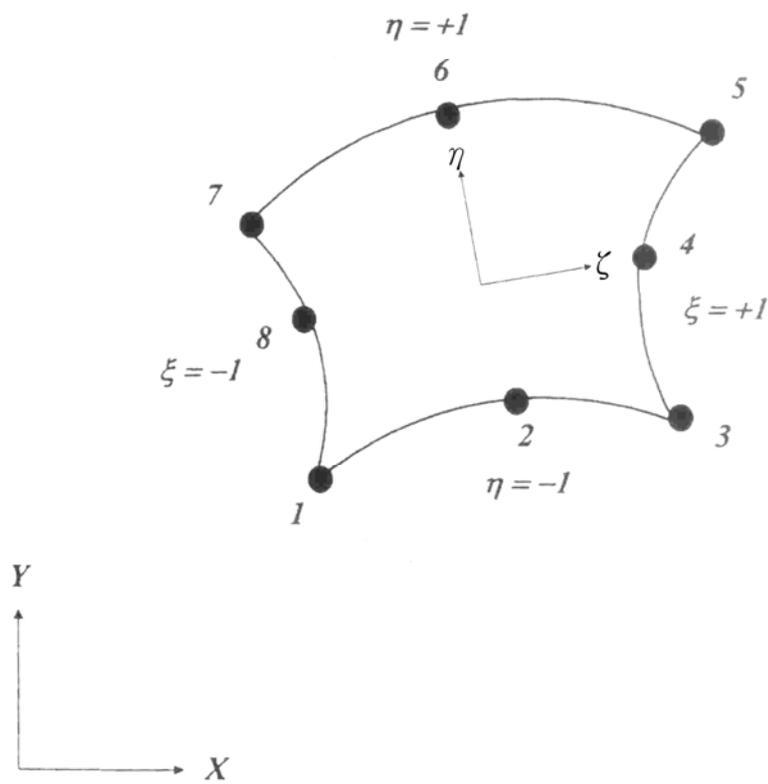


圖 4-1 元素節點排列方式示意圖

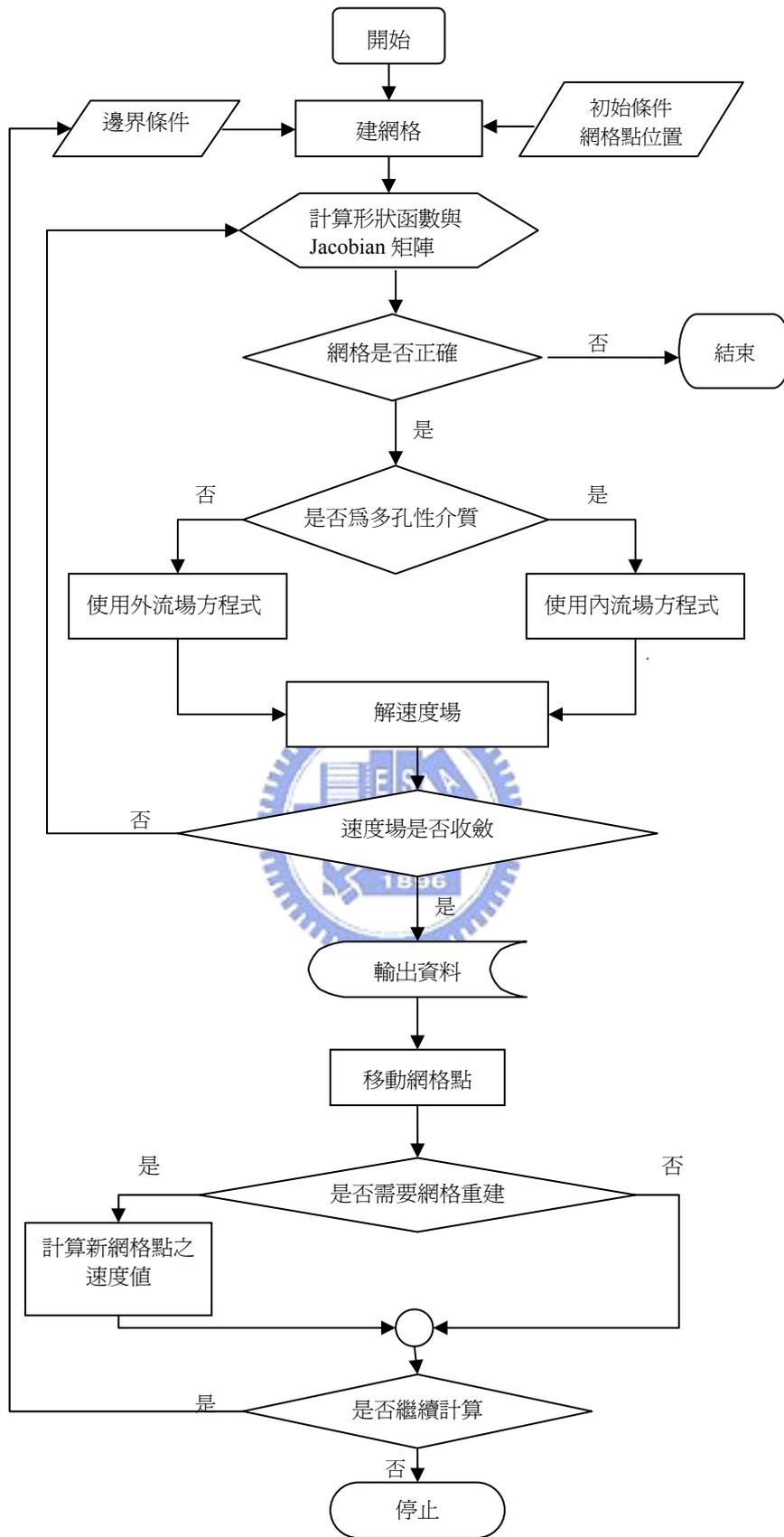


圖 4-2 程式架構圖

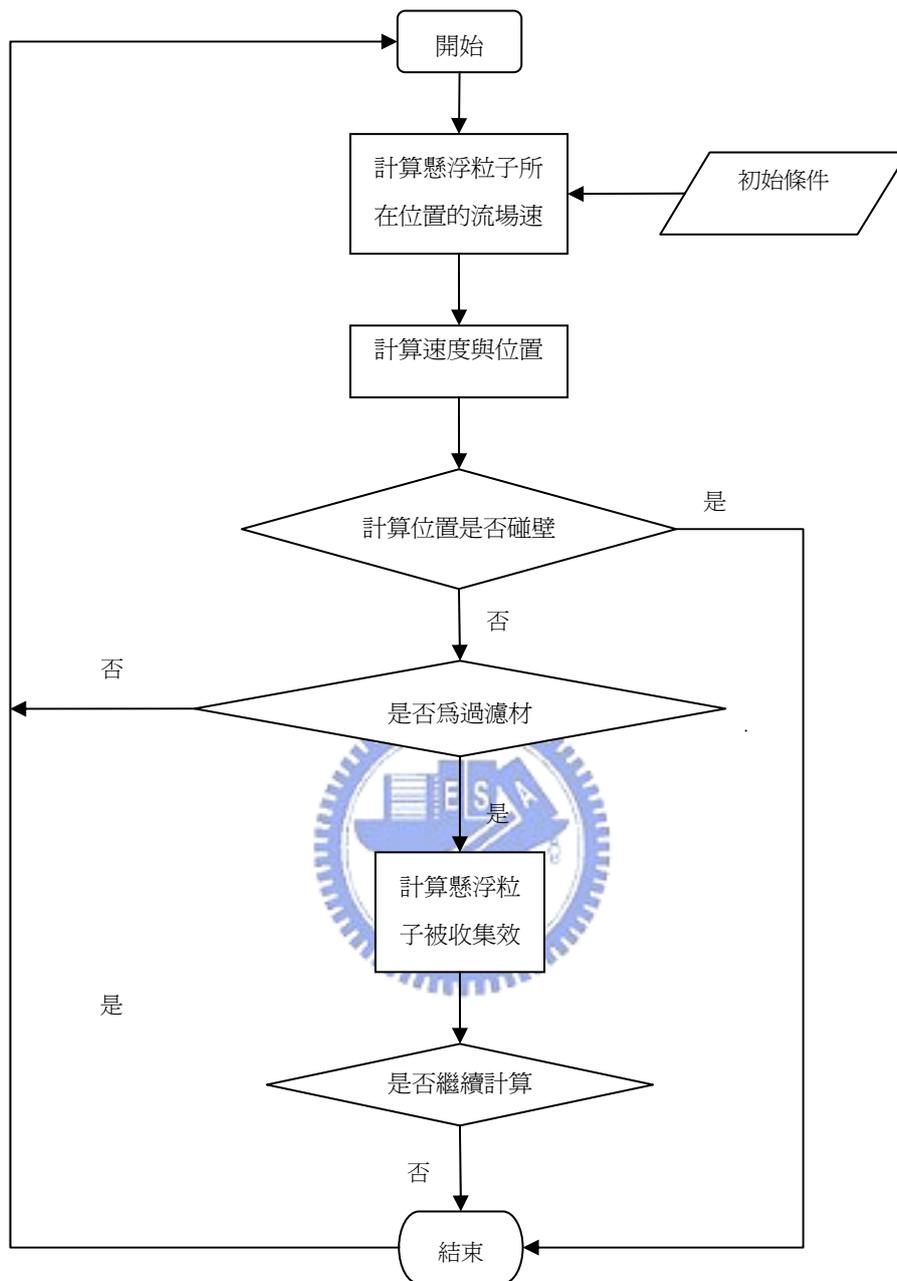


圖 4-3 粒子運動軌跡與捕捉機率計算的流程圖

第五章 結果與討論

本研究為了使過濾器設計人員更了解過濾器的原理，因此在本章第一節將利用以上章節所推導出的公式，進行說明過濾各參數對過濾效率的影響。由於在過濾器的設計中過濾器所產生的壓力差對設計風機時會有所影響，尤其是壓差過大時，會使得風機設計的過於大，佔去過多廠房空間，因此壓差越小過濾效率越高是過濾器的主要目的，因此本章第二節也會說明各參數對壓力的影響。在本章第三節中將說明增加振動對過濾器的影響，並與 Kim[20]的實驗值做比較，進行討論。

5.1 過濾各參數對過濾效率的影響

對各參數的設計於表 5.1 列出，研究中將對進口速度、孔隙率、纖維直徑、懸浮粒子粒徑與過濾材厚度五項參數，作為影響對過濾效率的主要因素作為討論，其中表 5-1 所使用的參數值，為了與 Kim[20]所使用的參數值所計算出的結果相呼應，因此使用與 Kim[20]相同的參數值。

由圖 5.1 進口速度與收集效率關係圖中，可看出速度對總過濾效率(Total efficiency、solid line)、擴散項(Diffusion efficiency、dash-dash line)、攔截項(Interception efficiency、dash-dot line)、慣性項(Inertial efficiency、dot line)、擴散與攔截修正項(DR Interaction efficiency、gray line)的關係，其中圖中的各作用項是利用各項”單獨存在”作用力時所造成的收集效率，總過濾效率以實線表示，擴散項以破折號組合表示，攔截項以破折號與點號交互組合表示，慣性項以點號組合表示，擴散與攔截修正項以破折號與兩點號交互組合表示，此時實驗參數是對應表 5-1，對此進口速度研究時，是將其它四項參數固定不變，並將進口速度由 0.001 到 1m/s 進行變動計算其值，以下的結果皆是以此方法計算得出，由圖中看出，進口速度小於 0.01m/s 時，擴散項對過濾效率的影響為主要因素，擴散與攔

截修正項為次要因素，且擴散項速度越小時作用力越強，因此速度越小收集效率會上升；在速度大於 0.3m/s 時，慣性項變為主要因素，且對速度越大時收集效率越高，主要因為速度越大時，懸浮粒子因流線接近多孔粒子變化過大，使懸浮粒子變化不及碰撞到多孔粒子，這種情形會隨著速度增加時發生的情形越高；在速度在 0.01 到 0.3m/s 時，因擴散項的下降，慣性項的上升兩者互補不足，此時攔截項為主要因素，在中間產生谷底的情形。

由圖 5.2 孔隙率與收集效率關係圖可知，所有的作用項所造成的收集效率都會因為孔隙率的增加而減少，由於孔隙率越大代表流體所佔的比例大，表示纖維所佔的體積較少，因此不管對任何一種作用力而言，懸浮粒子都會較不容易碰撞到纖維直徑，當孔隙率越小時，尤其是攔截項與慣性項對多孔隙的增加影響更大，且由圖可看出，對於過濾材的孔隙率都是相當接近 1 的，且減少一點孔隙率的值，就可得到增加相當多的收集效率，增加孔隙率所造成的壓力也是會相當可觀的，在 5-2 節中會有較詳細的討論。

通常在考慮過濾材時，不能只看孔隙率，還必須參考纖維直徑大小，當孔隙率接近 1 時，並不表示過濾效率差，要是纖維直徑越小，表示過濾材的表面積越大，因此過濾效率反而會因而提升，由圖 5-3 纖維直徑與收集效率關係圖可知，所有的作用項所造成的收集效率都會因為纖維直徑的增加而減少，由之前的解釋可了解，纖維直徑可以代表為過濾材的表面積，纖維直徑越大表面積會越小，粒徑越小則越大，這是因為當孔隙率固定時，纖維直徑越小，將使得纖維數越多，使得過濾材的表面積反而增加，當表面積增加時，過濾材的收集效率就會因此而增加了，反之，纖維直徑越大時，表面積減少，過濾材的收集效率就會減少，且由圖可看出，對於本研究的參數下，過濾材的纖維直徑在小於 10 μ m 時，收集效率會發生急速增加的情形，且減少一點纖維直徑的值，就可得到增加相當多的收集效率，但增加孔隙率所造成的壓力也是會相當可觀的。

當在考慮過濾材的過濾效率時，最常改的參數通常是過濾材厚度，由圖 5-4 過濾材厚度與收集效率關係圖可知，增加過濾材厚度對所有作用力的收集效率，

幾乎會是呈指數增加，因微塵粒子在過濾材的時間增加，在過濾材中行走的距離增加，使得微塵粒子的碰撞機率增加許多，進而增加過濾材的收集效率，只要尺寸要求不是很小時通常將過濾材做厚較好，因為增加厚度對收集效率是以指數增加，對壓力的增加是屬於線性增加，在下一節中會在更進一步討論，指數增加會比線性增加來的快，因此過濾材厚度的考量也是不可少的。

在考慮完過濾材結構的各種參數與流場參數之外，微塵粒子本身的粒徑大小也會對過濾材的收集效率造成影響，且微塵粒子的粒徑大小幾乎對所有作用力造成影響，由圖 5-5 懸浮粒子粒徑與收集效率關係圖可看出，懸浮粒子粒徑的大小對收集效率的影響幾乎與纖維直徑所影響相似，在懸浮粒子粒徑小於 $0.5\mu\text{m}$ 時，由於擴散力強，對擴散項的收集效率較高；在懸浮粒子粒徑大於 $0.5\mu\text{m}$ 時，慣性項與攔截項的收集效率會越好，也因此會在中間會產生谷底，在尤其在 $0.3\mu\text{m}$ 時幾乎為最低，在苯二甲酸二辛酯(DOP)微粒測試(又稱計數法或光散亂法 Light scattering method)與 Eulerin test[36]就是以粒徑為 $0.3\mu\text{m}$ 的微塵粒子作為檢測，原理就在與此，利用本研究中的公式就可以清楚了解此一關係。

5.2 過濾各參數對過濾材產生的壓力影響

對造成壓力的參數的設計也於表 5.1 所列出的參數進行討論，由於假設微塵粒子的粒徑對流場不會產生影響，因此在本階段不予考慮，研究中將對進口速度、孔隙率、纖維直徑與過濾材厚度四項參數，作為影響對過濾材產生壓力的主要因素作為討論，例如目前要檢測進口速度的變化，就改變進口速度的值，並固定其他五項參數，計算所得的壓力，與 5-1 節的方法相同。

由圖 5-6 進口速度與過濾材壓力差關係圖可知，進口速度對壓力的影響幾乎是以線性增加，進口速度越高對過濾材的黏滯力越高，在本研究中進口速度與壓力的斜率約 420。

由圖 5-7 孔隙率與過濾材壓力差關係圖可知，孔隙率越大，壓差越小，大致呈現線性遞減關係，有指數上升的可能，表示設計孔隙率時須特別考量壓力的產

生，孔隙率代表過濾材流體所佔的比率越高，因此孔隙率高對流體所產生的黏滯力越低，在本研究中孔隙率與壓力的斜率約 5500。

與過濾材的內部結構有關的參數，除了孔隙率以外，還有纖維直徑的大小，參考如圖 5-8 纖維直徑與過濾材壓力差關係圖，這裡是先假設孔隙率不變，纖維直徑越大時，表示纖維數越少，因此過濾材的表面積變少，換句話說，過濾材是利用較粗的玻璃纖維所製作成的，因此對於纖維直徑大時，由於表面積減少，使得流體所產生的黏滯力越差，壓降越小，在本研究中纖維直徑 $1\mu\text{m}$ 以下的壓力增相當快速，因此對此參數設計時也必須謹慎。

由圖 5-9 過濾材厚度與過濾材壓力差關係圖，濾材厚度對於壓力的分布為線性增加，且在本研究中濾材厚度與壓力的斜率約 7600，壓力雖然看起來上升的相當快，且對過濾效率是呈指數增加，壓力是呈線性增加，因此增加厚度還是相當不錯的方法，且只要知道某一厚度所對應的收集效率與壓力，就可輕易的以指數與線性方程，分別快速計算收集效率與壓力，是相當好評估的參數。

5.3 振動過濾材對收集效率的影響

為了增加過濾材收集效率，近年來研究人員開始研究振動過濾材的對過濾效率的影響，如 Kim[20]開始提出振動過濾材的實驗研究，此研究中確實增加收集效率，由於振動過濾材時，使得微塵粒子經過過濾材時，微塵粒子與過濾材所造成的相對速度，相對過濾材靜止時有效提升，尤其像 Kim[20]所作的實驗，振動速度都是比進口速度大 3~13 倍左右，因此相對速度的絕對值在絕大部份時都是比靜止時的相對速度高上許多，因此對慣性項有相當大的幫助，且單位時間內微塵粒子所可能碰撞的纖維數也會因此而增加，換句話說，由過濾材的觀點看，微塵粒子被過濾材單位時間內掃過的量也因此增加，因此不管對所有的作用力而言，都有可能因振動過濾材而有效上升收集效率，因此在本節將利用前面幾章所推導的公式對振動過濾材做數值模擬，並與 Kim[20]的實驗結果作為比較。

本研究為模擬振動過濾材在管道中時的影響，因此利用葛拉金有限元素法

與 Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE)方法計算移動邊界的流場分佈，其結果將振動流場週期以四分之一週期截取出，其中圖 5-10 為振動過濾材的初始週期流場向量圖，圖 5-11 為四分之一週期流場向量圖，圖 5-12 為二分之一週期流場向量圖，圖 5-13 為四分之三週期流場向量圖，接著以週期輪回圖 5-10，圖中黑色框框中代表過濾材在流場中的位置。

由圖 5-10 Kim[20] 振動過濾器收集效率實驗設備圖可知，其所使用的實驗設備有兩個 pump，在圖中的編號分別為 Pump 1 與 Pump2，其中 Pump 2 是與過濾材接通，因此從 pump 2 離開的微塵粒子必定為流經過過濾材，但 pump 1 則與過濾材分開，表示從此 pump 1 離開的微塵粒子必不經過過濾材，這樣的實驗設計在 Kim[20]並未清楚說明，在本研究觀察下，Kim[20]在慣性項的處理上，只對過濾材與進口速度為正值才納入進行計算，因此對此實驗設計研判，進口速度與過濾材的振動速度正向，即圖 5-10 中的過濾材往左移時，可能因振動過濾材所產生的壓差過大，使得 Pump 2 無法讓流場產生穩定的流場，使得進口速度無法維持固定，且對 Pump 2 負荷太過於大，因此必需設備設計上進行改良，因此才做出兩個 Pump 且不同管道的設計，但如此會使得造成進口速度與過濾材的振動速度反相時的微塵粒子未經過過濾材而跑掉，因此此實驗設備與本研究中之模型有所差別，因為本研究中的模型是將過濾材封住整個管道，強制使得所有的微塵粒子經過過濾材，在振動速度遠大於進口速度幾倍時，進口速度對於振動速度所產的相對速度幾乎可以忽略，因此不管振動速度與進口速度正向或反向，對收集效率而言只考慮絕對值，且振動速度為弦波，正向與反向只是正負號的差別，因此對增加收集效率所佔的比例都是相同大小的，這對慣性項所造成的過濾效率必定有影響，因此本研究中所作出的結果和 Kim[20]所作出的結果有所出入，只是目前做振動過濾材的文章相當稀少，只能以 Kim[20]之內容了解振動對收集效率的影響。

圖 5-11 為進口速度等於 10cm/s 之收集效率圖，圖中以實線代表靜止時本研究的過濾效率，Kim[20]的實驗數據是以方型(□)代表靜止過濾材的收效率、以圓

形(○)代表 30cm/s、10Hz 的振動過濾材的收集效率、以三角形(△)代表 50cm/s、10Hz 的振動過濾材的收集效率，可看出不管在微塵粒徑任何範圍都可以看出比靜止時收集效率高，由於過濾材靜止時，由於 Kim[20]對兩個 pump 調節相當好的緣故，過濾材靜止時，本研究所計算出的數值都與 Kim[20]所做出的實驗值相差無幾，Pump 1 所造成幾乎沒有影響，但當進口速度與過濾材振動速度差越多時，Pump 1 的調節使得進口速度與過濾材的振動速度正相時，微塵粒子有部分跑向 Pump 1，在本理論的模型中，不管進口速度與過濾材的振動速度正向或反向，都會納入計算，因此會有所出入，尤其在微塵粒子粒徑大於 0.5 μm 時，慣性項對收集效率上的影響上是與微塵粒子與振動過濾材的相對速度絕對值成正比如式(3-12c)，因此所計算出的值當進口速度與過濾材振動速度差越多時，所計算出的值幾乎比實驗值高，其餘部分也因微塵粒子單位時間內與纖維碰撞可能增加，使得在進口速度為 10cm/s 與振動速度為 30cm/s、50cm/s 振動頻率 10Hz 時，都比靜止過濾材的收集效率增加，甚至比 Kim[20]所做的實驗值為高，尤其是在微塵粒子粒徑大於 0.5 μm 。

圖 5-12 為進口速度等於 5cm/s 之收集效率圖，可看出不管在微塵粒徑任何範圍都可以看出比靜止時收集效率高，由於過濾材靜止時，由於 Kim[20]對兩個 pump 1 調節相當好的緣故，過濾材靜止時也都 Kim[20]所做出的實驗值相差無幾，Pump 1 所造成幾乎沒有影響，但當進口速度與過濾材振動速度差越多時，Pump 1 的調節使得進口速度與過濾材的振動速度正相時，微塵粒子有部分跑向 Pump 1，在本理論的模型中，不管進口速度與過濾材的振動速度正向或反向，都會納入計算，因此會有所出入，尤其在微塵粒子粒徑大於 0.3 μm 時，慣性項對收集效率上的影響上是與微塵粒子與振動過濾材的相對速度絕對值成正比如式(3-12c)，因此所計算出的值當進口速度與過濾材振動速度差越多時，所計算出的值幾乎比實驗值高，其餘部分也因微塵粒子單位時間內與纖維碰撞可能增加，與圖 5-11 相比，在進口速度與振動速度相差越多時，因 Kim[20]省略的反向的收集效率，會使得本研究所計算出的值差越多，尤其在大於 0.3 μm 時，慣性項的上

升比例更為明顯，使得在進口速度為 5cm/s 與振動速度為 30cm/s、50cm/s 振動頻率 10Hz 時，都比靜止過濾材的收集效率增加，甚至比 Kim[20]所做的實驗值為高，尤其是在微塵粒子粒徑大於 0.5 μm 。

圖 5-12 為進口速度等於 5cm/s 之收集效率圖可知，由於在進口速度與振動速度相差越多時，因 Kim[20]省略的反向的收集效率，會使得本研究所計算出的值差越多，尤其在大於 0.3 μm 時，慣性項的上升比例更為明顯，因此理論值應較實驗值，在進口速度在 3cm/s 時微塵顆粒徑小於 0.3 μm 時，由式(3-12a)可看出擴散項對於微塵粒子與過濾材的相對速度有直接的關係且呈反比，使得兩者相對速度越大時影響的收集效率越低，此原因使得在進口速度為 3cm/s、微塵粒子粒徑小於 0.3 μm 時，本研究計算的值會因振動速度的增加而減少，且 Kim[20]省略的反向的收集效率，因此本研究計算的收集效率會降低也必須比實驗值高，但利用本研究計算在進口速度為 3cm/s、微塵粒子粒徑小於 0.3 μm 時卻會較實驗值低，可能是因振動會使得流場過於不穩定，使得微塵粒子的擴散作用力因而增加，這點在 Kim[20]文章中也有此論點，但由於目前文章稀少，實驗數據難以取得，使得難以對擴散項進行調整與修正。

表 5-1 研究參數表

進口速度	0.1 m/s
孔隙率	0.9823
纖維直徑	6 μm
過濾材厚度	5.2 mm
懸浮粒子粒徑	1 μm

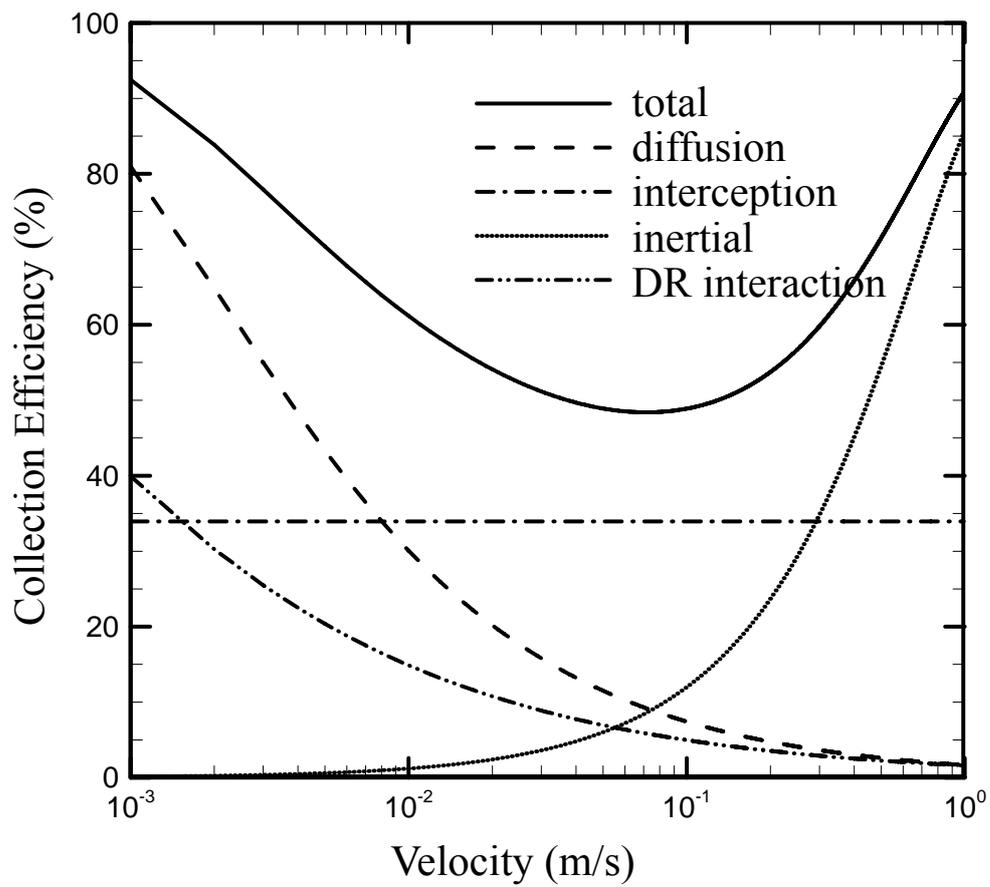


圖 5-1 進口速度與收集效率關係圖

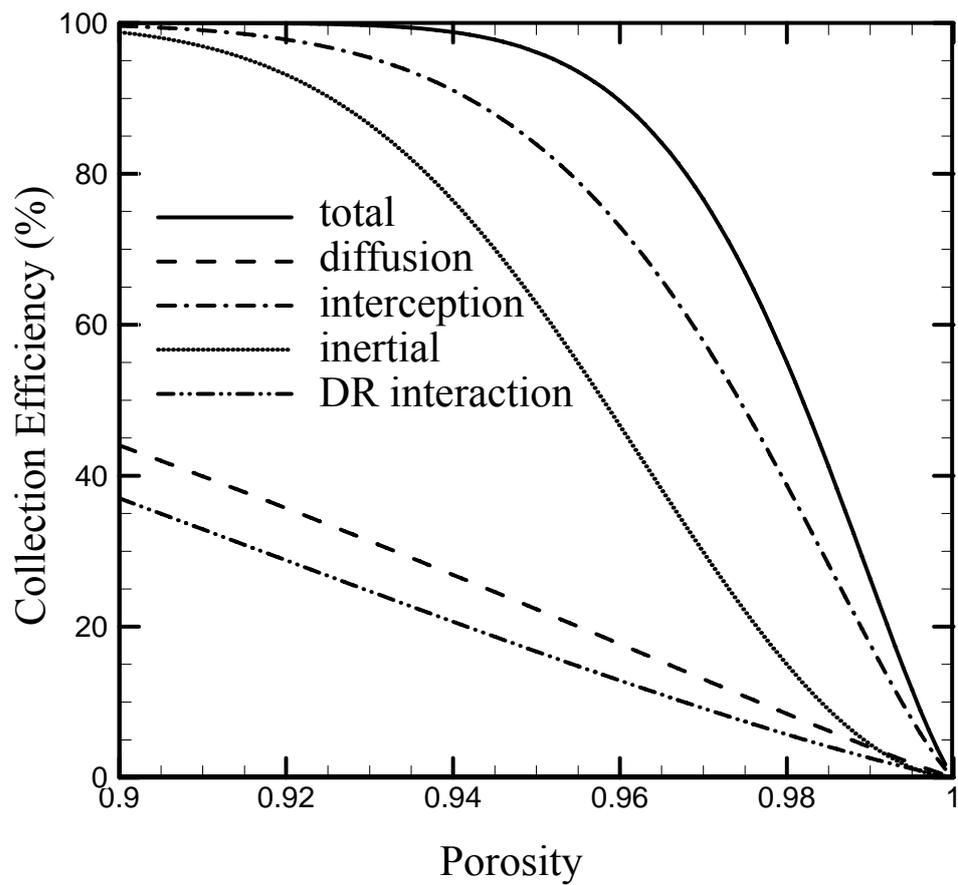


圖 5-2 孔隙率與收集效率關係圖

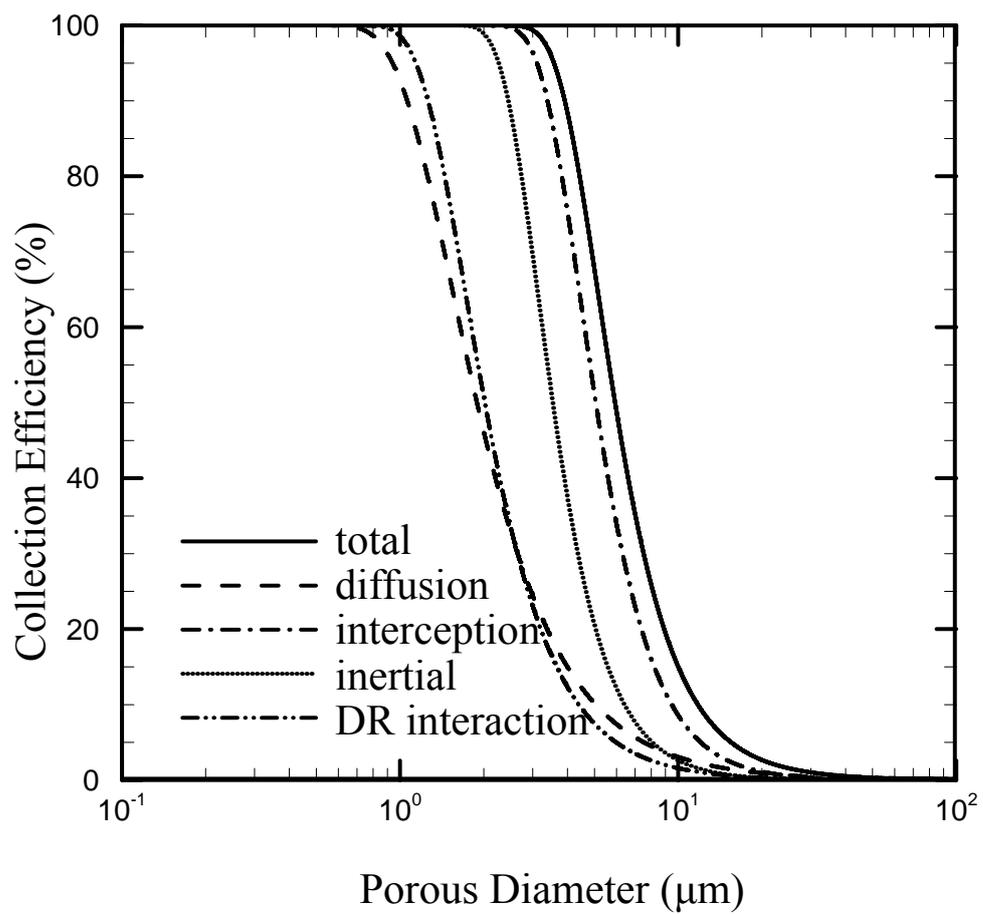


圖 5-3 纖維直徑與收集效率關係圖

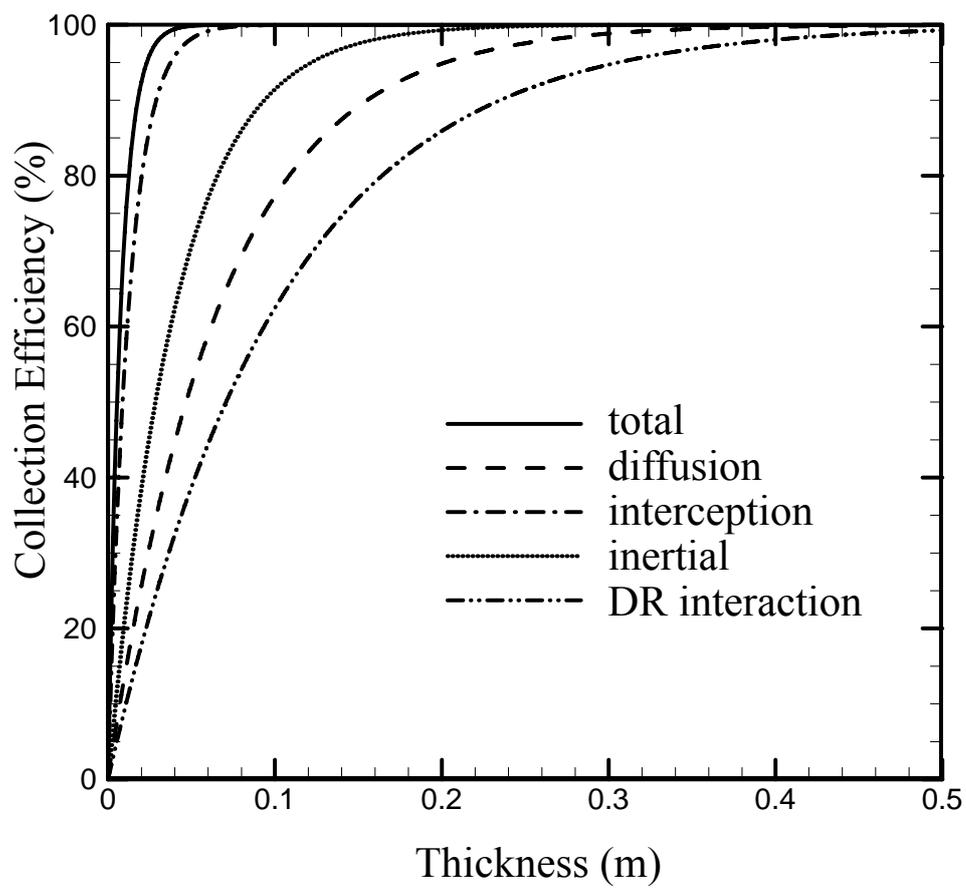


圖 5-4 過濾材厚度與收集效率關係圖

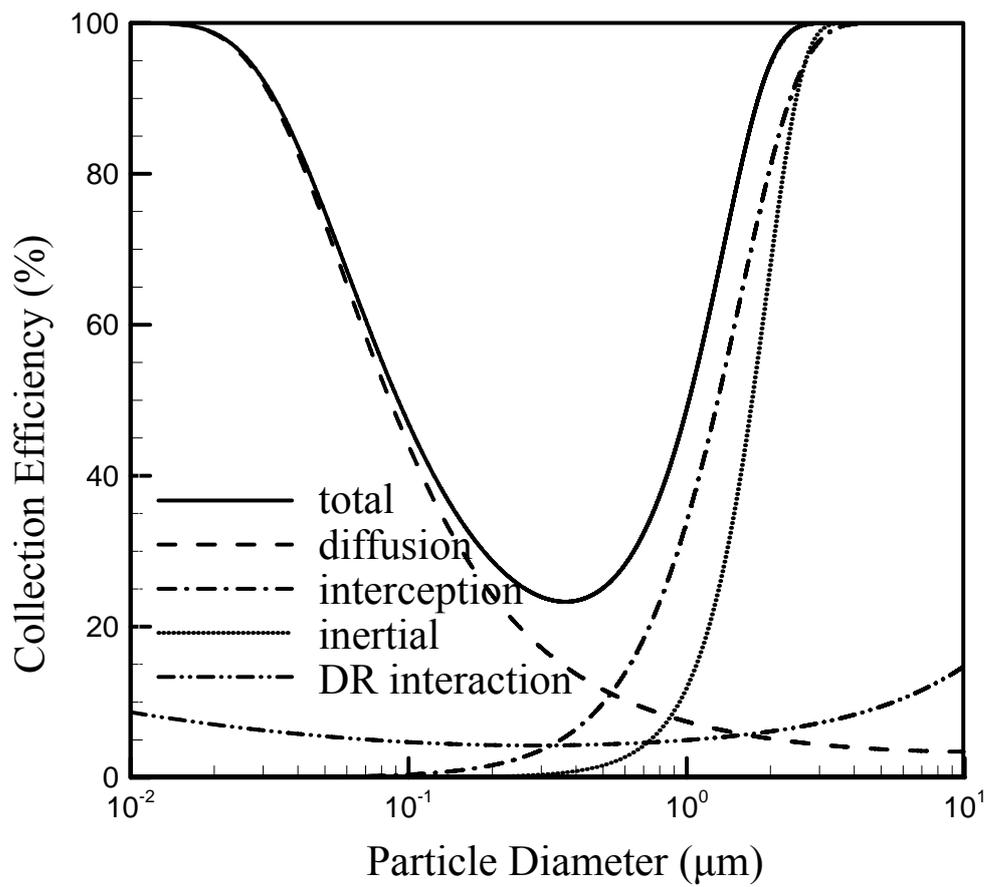


圖 5-5 懸浮粒子粒徑與收集效率關係圖

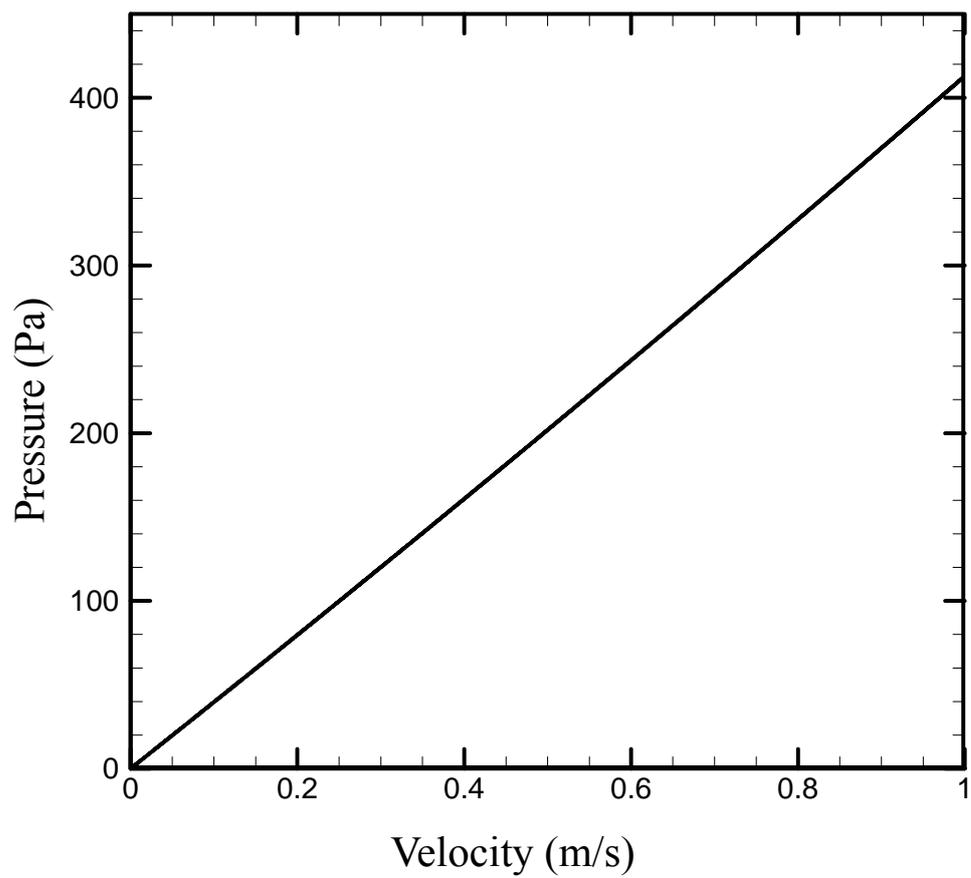


圖 5-6 進口速度與過濾材壓力差關係圖

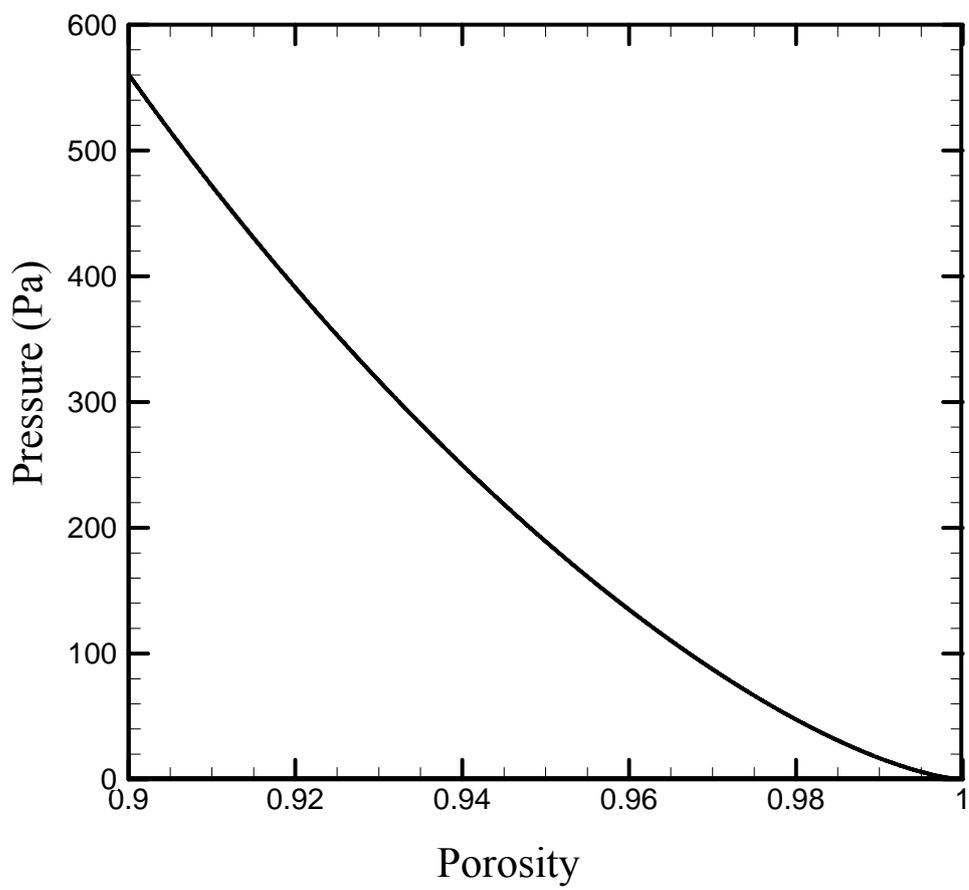


圖 5-7 孔隙率與過濾材壓力差關係圖

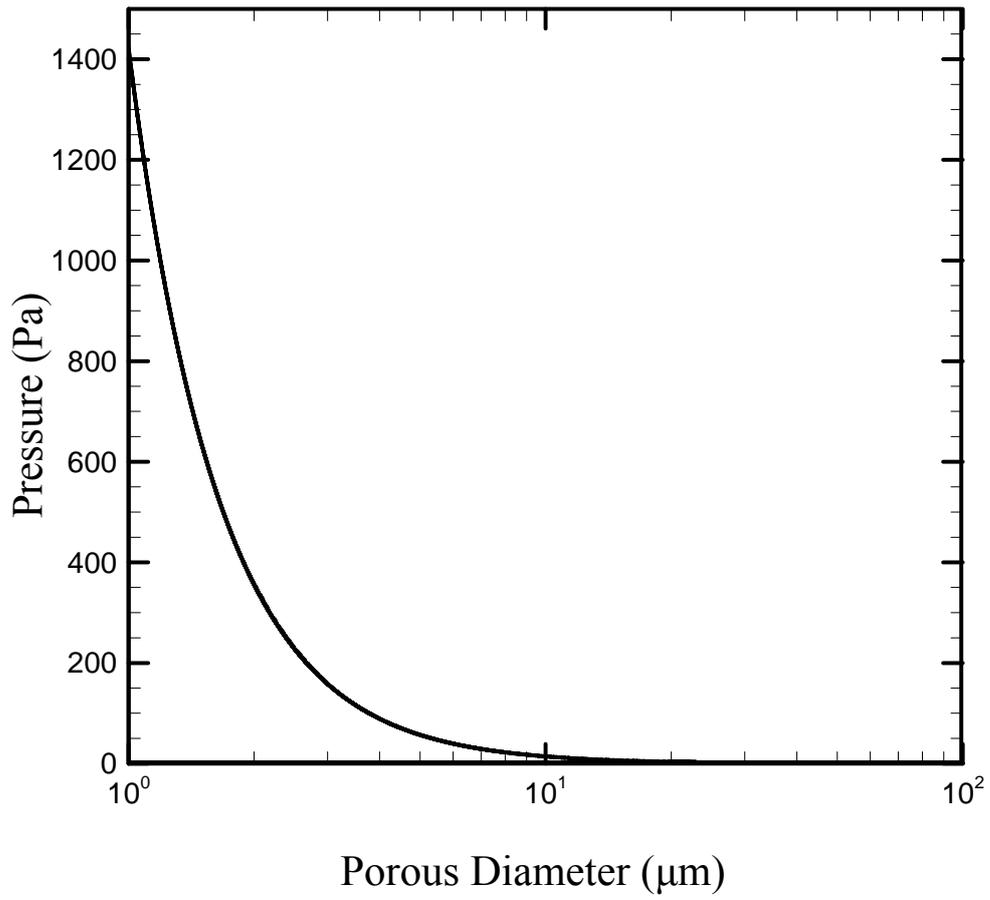


圖 5-8 纖維直徑與過濾材壓力差關係圖

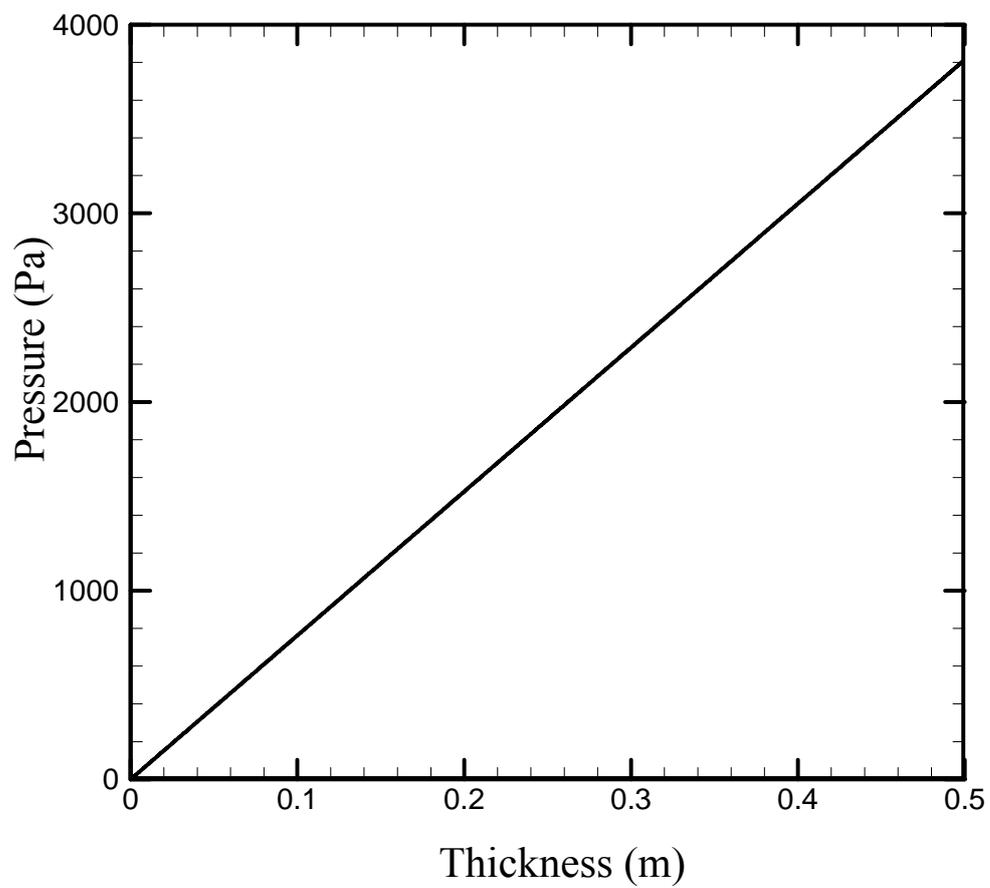


圖 5-9 過濾材厚度與過濾材壓力差關係圖

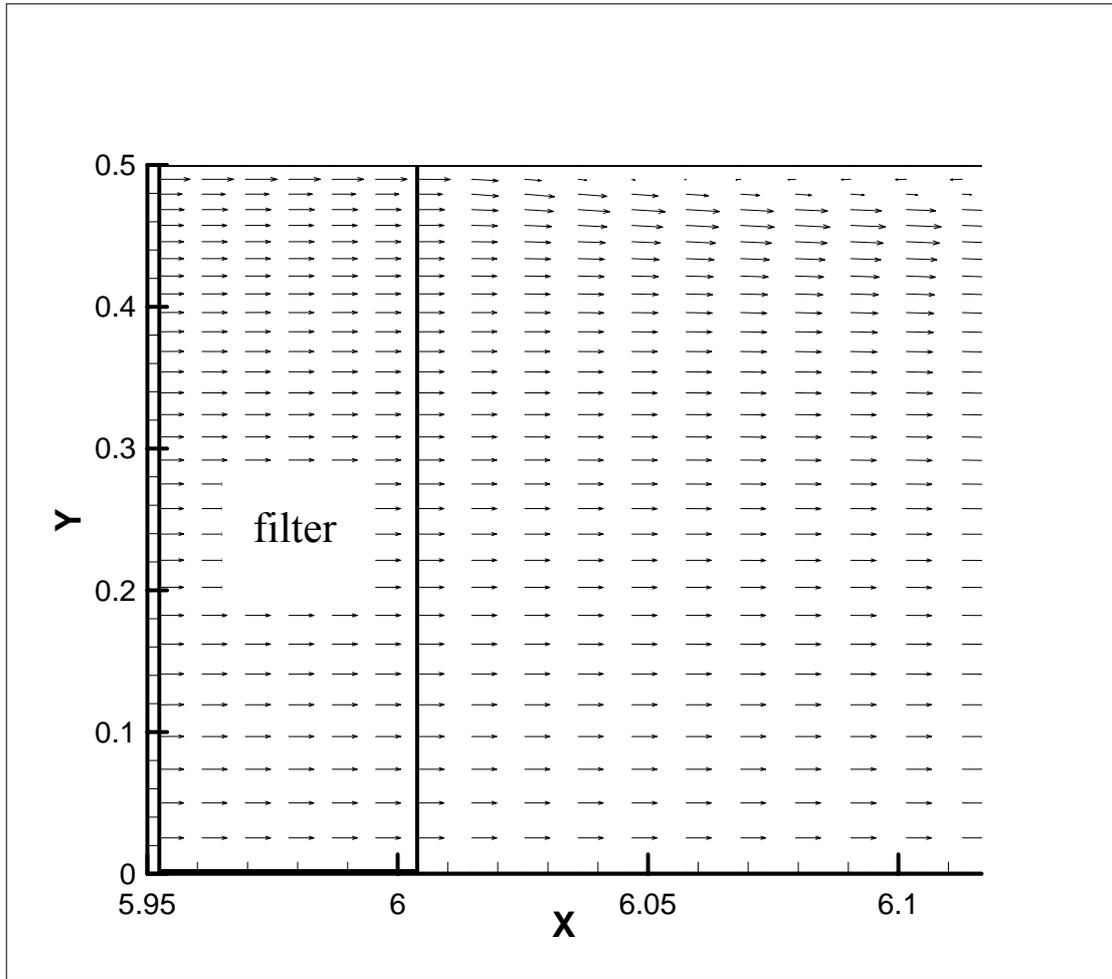


圖 5-10 週期初始流場向量圖

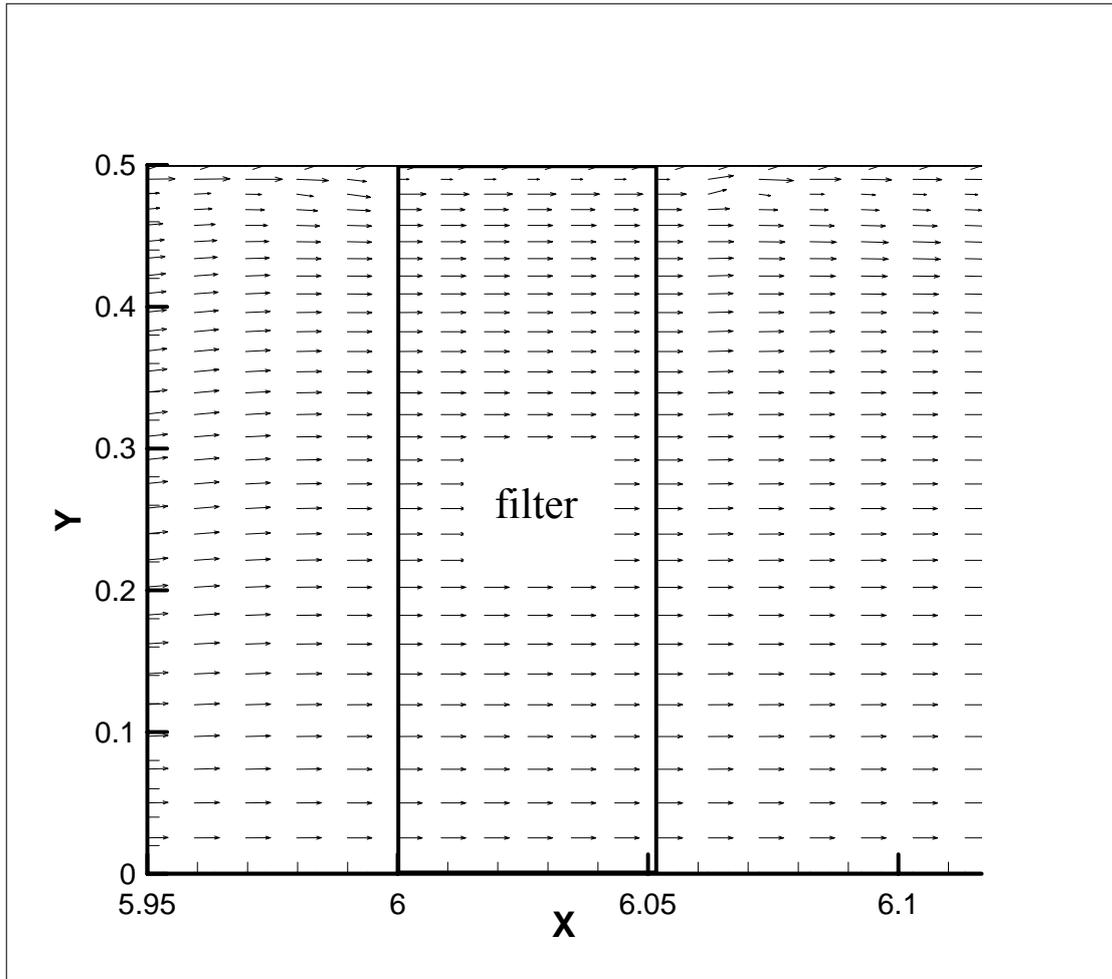


圖 5-11 四分之一週期流場向量圖

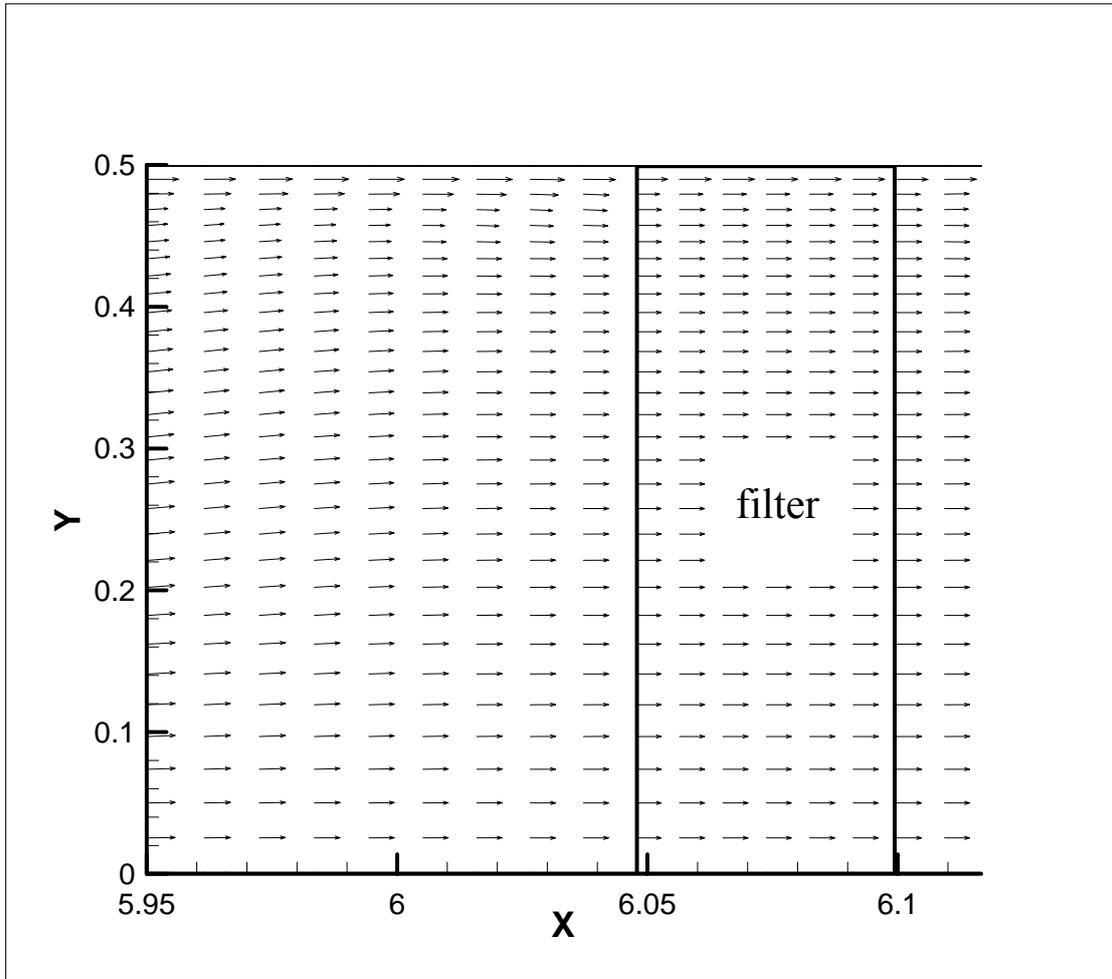


圖 5-12 二分之一週期流場向量圖

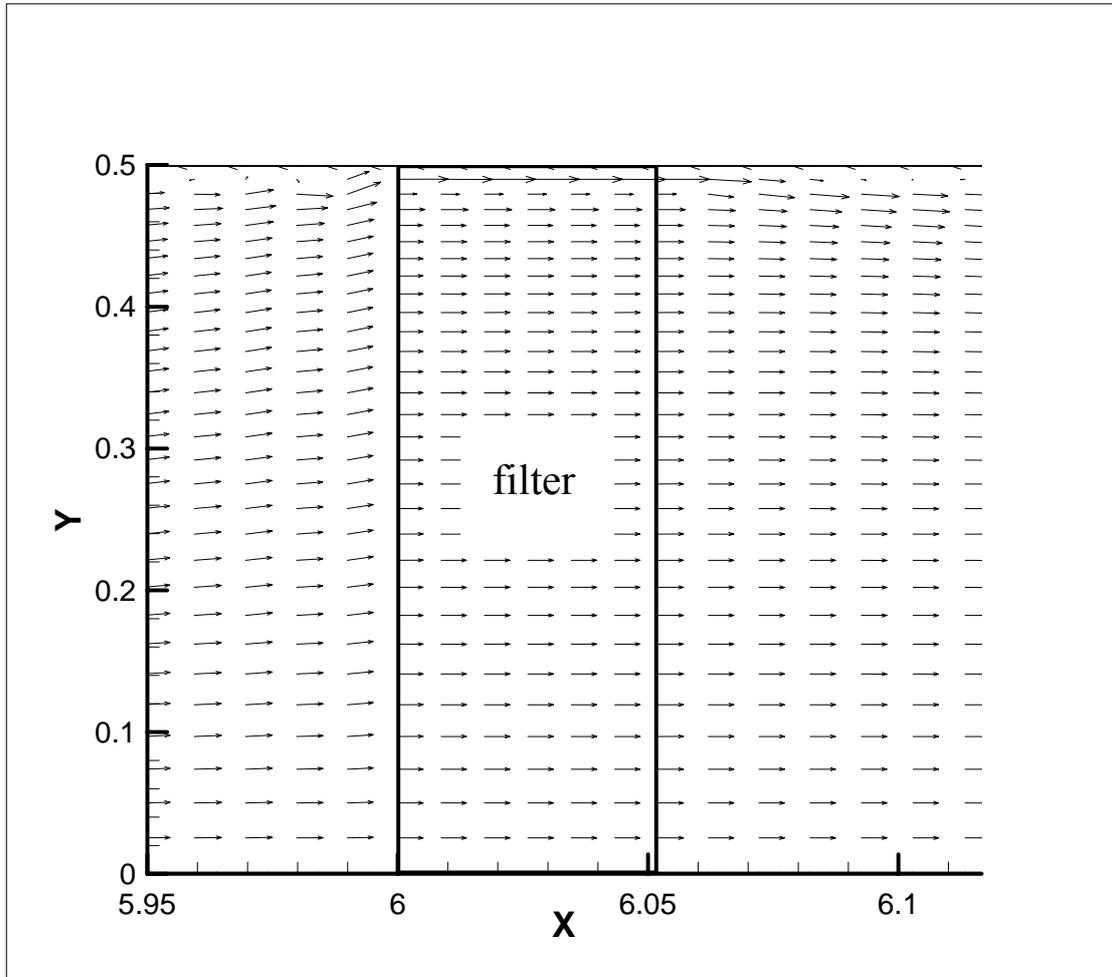


圖 5-13 四分之三週期流場向量圖

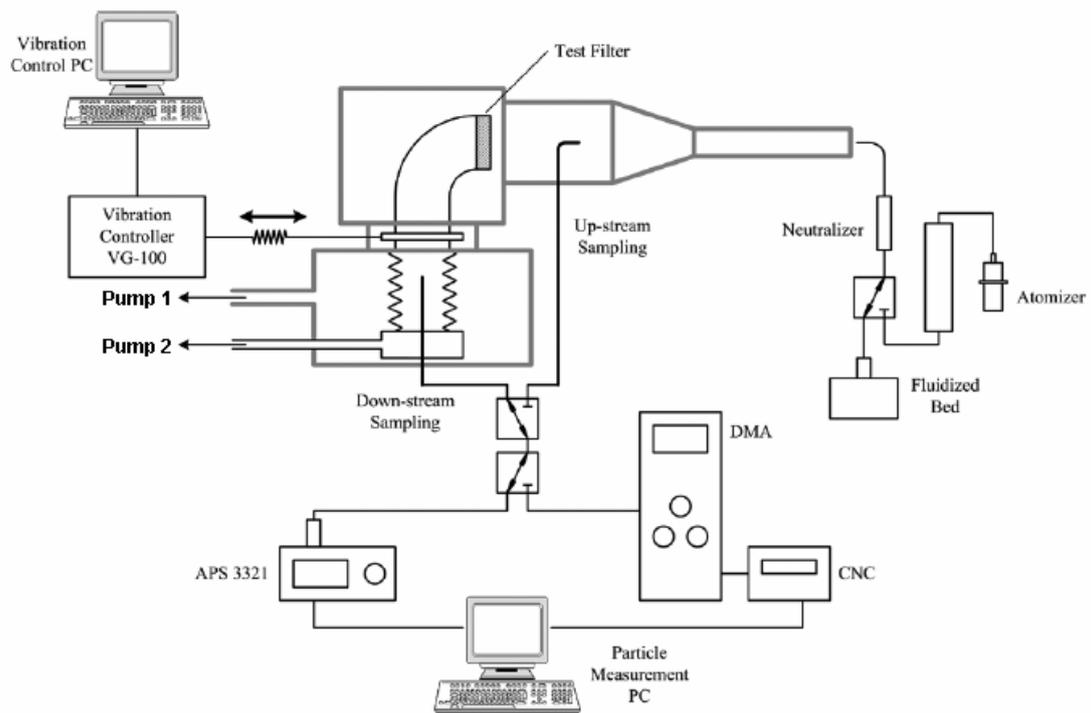


圖 5-14 Kim[20]震動過濾器收集效率實驗設備圖

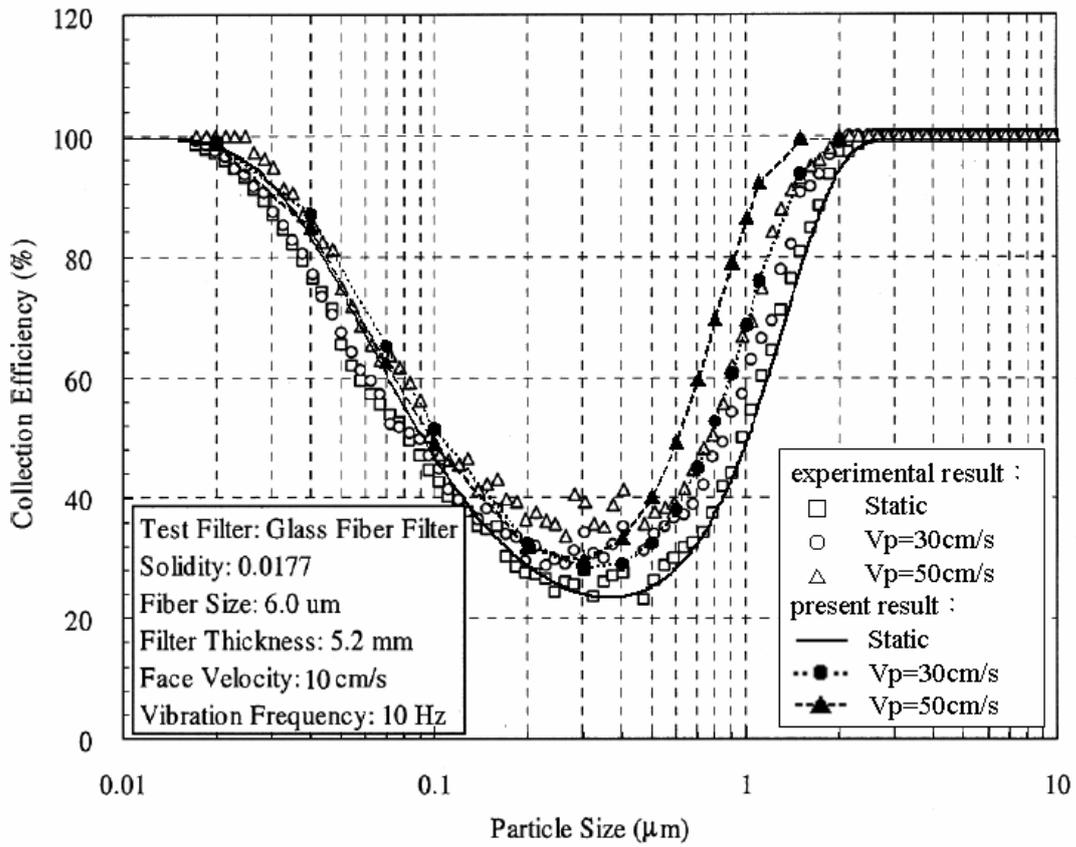


圖 5-15 進口速度等於 10cm/s 之收集效率圖

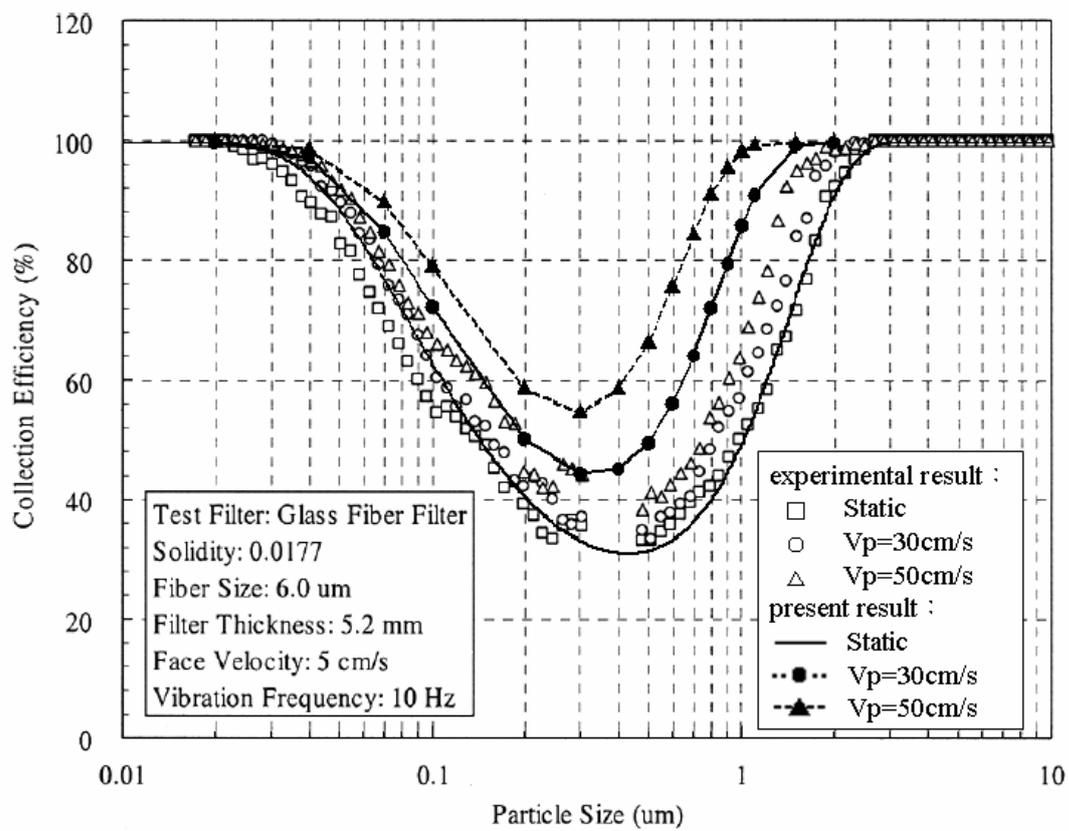


圖 5-16 進口速度等於 5cm/s 之收集效率圖

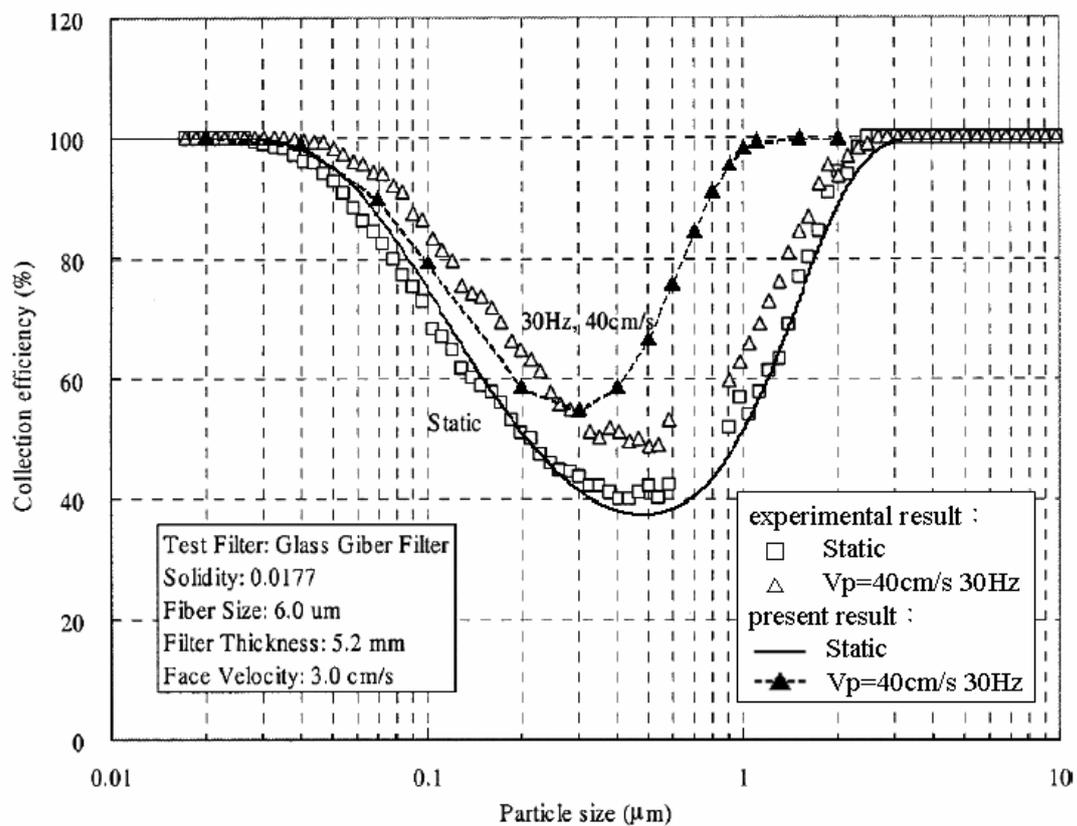


圖 5-17 進口速度等於 3cm/s 之收集效率圖

第六章 結論

本文將利用多孔性介質模擬過濾材，並利用葛拉金有限元素法(Galerkin FEM)計算過濾管道內部之流場分佈，且利用軌跡理論(Trajectory Theory)模擬污染顆粒在流場中之行徑過程，以及利用分子碰撞理論(Molecular collision theory)結合前人所推導出的單一吸附粒子收集效率，模擬污染物質在過濾系統中的捕集過程以及收集效率之計算，此理論不只可研究過濾材的捕集過程與收集效率，更可在大型過濾系統中使用，如計算無塵室流場，即可利用本理論進行無塵室的潔淨度分析。

在研究中利用本理論，對各過濾材參數變化進行研究，了解進口速度與微塵粒子粒徑皆會在一特定值出現收集效率最低值，其餘參數與收集效率產生一定趨勢，最後以振動過濾材進行研究，利用本研究理論計算與 Kim[20]的實驗量測，發現過濾材振動確實可提升收集效率，且過濾材振動對擴散效率應有所提升，但以目前文獻難以對其因素做修正。

參考文獻

1. R. E. Mau, "Particle transport in flow through porous media : Advection, longitudinal dispersion and filtration", Ph. D. Dissertation, California Institute of Technology, 1992.
2. K. M. Yao, T. H. Mohammad, and C. R. O'Melia, "Water and waste water filtration : concepts and applications", Environ. Sci. Technol., Vol.5, pp.1105-1112, 1971.
3. R. Rajagopalan, C. Tien, "Trajectory Analysis of Deep-Bed Filtration with the Sphere-in-cell Porous Media Model", AIChE Journal, Vol.22, pp.523-533, 1976.
4. K. W. Lee and B. Y. H. Liu, "Theoretical study of aerosol filtration by fibrous filters", Aerosol Sci. Technol. Vol.1, pp.147-161, 1982.
5. B. Y. H. Liu and K. K. Rubow, "Efficiency, pressure drop and figure of merit of high efficiency fibrous and membrane filter media" Fifth World Filtration Congress, Nice, 1990.
6. N. Rao and M. Faghri, "Computer modeling of aerosol filtration by fibrous filters" Aerosol Sci. Technol. Vol.8, pp113-156, 1988.
7. R. Loeffler, "Collection of particles by fiber filters" Air Pollution Control, W. Strauss, ed., Academic, New York, pp223-285, 1971.
8. K. K. Sinkar, "Transport in packed beds at intermediate Reynolds number" Ind. Eng. Chem. Funda. Vol.14, pp73-81, 1975.
9. A. Y. Tan, B.D. Prasher, and J. A. Guin, "Mass transfer in non-uniform packing" AIChE J. Vol.21, pp396-701, 1975
10. Z. M. Zhao, G. Tardos, and R. Pfeffer, "Separation of airborne dust in electrostatically enhanced fibrous filters" Chem. Eng. Commun. Vol.108,

- pp307-332, 1991.
11. C. Tien, "Fundamentals of Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols" Butterworths, Boston, 1989.
 12. S. K. Friedlander, "Smoke, Dust and Haze : Fundamentals of Aerosol Behavior" Wiley, New York, 1977.
 13. S. K. Suneja and C. H. Lee, "Aerosol filtration by fibrous filters at intermediate Reynolds numbers(≤ 100)" *Atmos. Environ.* Vol.8, pp1081-1094, 1975.
 14. S. Illias and P. L. Douglas, "Inertial impaction of aerosol particles on cylinders at intermediate and high Reynolds numbers" *Chem. Eng. Sci.* Vol.44, pp81-99, 1989.
 15. H. Pendse and C. Tien, "General correlation of the initial collection efficiency of granular filter bed" *AIChE J.* Vol.28, pp667-686, 1982.
 16. E. Gal, G. I. Tardos, and R. Pfeffer, "A study of inertial effects in granular bed filtration" *AIChE J.* Vol.31, pp.1093-1104, 1985.
 17. G. I. Tardos and R. Pfeffer, "Interceptional and gravitational deposition of inertialess particles on a single sphere in a granular bed" *AIChE J.* Vol.26 pp698-701, 1980.
 18. B. Adrian, D. Ibrahim, L. Sylvie, F. M. Antonio, and R. Heitor. "Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies" Springer-Verlag New York, LCC, 2004.
 19. C. H. Huang and C. J. Tsai "Mechanism of particle Impaction and Filtration by the Dry Porous Metal Substrates of an Inertial Impactor" *Aerosol Sci. and Technol.* Vol.37 pp486-493, 2003.
 20. S. C. Kim, H. Wang, I. Masayuki, D. R. Chen "Experimental and Modeling Studies of the Stream-Wise Filter Vibration Effect on the Filtration Efficiency" *Aerosol Sci. and Technol.* Vol.40, pp389-395,2006.

21. T. J. R. Hughes, W. K. Liu, and T. K. Zimmermann, "Lagrangian- Eulerian Finite Element Formulation For Incompressible Viscous Flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, pp. 329-349, 1981.
22. T. Nomura and T. J. R. Hughes, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method For Interaction Of Fluid And A Rigid Body," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, pp. 115-138, 1992.
23. K. Vafai, 1984, "Convection Flow and Heat Transfer in Variable-Porosity Media", *J. Fluid Mech.*, Vol. 147, pp.233-259.
24. W. S. Fu and G. J. Tsay, "Theoretical Study of Trajectories of Particles Surrounding a Wedge", The Ninth National Conference on Mechanics, Taipei, December, 1985.
25. Y. Endo, S. Miyamae and Y. Ando, "Numerical Analysis of Three-Dimensional Flow Fields with Combustion and Heat Transfer in Pulverized Coal Firing Boilers," 石川島播磨技術, 第 34 卷, 第 2 號, pp.93-100, 1994.
26. S. A. Morsi and A. J. Alexander, "An Investigation of Particle Trajectory in Two-Phase Flow System," *J. Fluid Mech.*, Vol. 55, No. 2, pp.193-208, 1972.
27. T. I. Gombosi, "Gaskinetic Theory," Cambridge University Press, 1994.
28. R. Teman, "Navier Stokes Equations", 3rd Edition, North Holland Amsterdam, 1984.
29. K. H. Huebner, E. A. Thornton and T. G. Byrom, "The Finite Element Method for Engineers", 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1995.
30. C. Taylor and T. G. Hughes, "Finite Element Programming of The Navier-Stokes Equations", *Pineridge Press Swansea*, 1981.
31. B. M. Irons, "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis",

International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.2, pp.5-32, 1970.

32. P. Hood, “Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, pp.379-399, 1976.
33. I. E. Agranovski, R. D. Braddock, and T. Myojo, “Removal of Aerosols by Bubbling Through Porous Media,” *Aerosol Sci. and Tech.*, Vol.31, pp.249-257, 1999.
34. C. Zhu, C. Lin, and, C. S. Cheung, “Inertial Impaction-Dominated Fibrous Filtration with Rectangular or Cylindrical Fibers”, *Powder Technol.* 112:149–162,2000.
35. W. C. Hinds, “Aerosol technology :properties, behavior, and measurement of airborne particles.” John Wiley & Sons, New York.
36. 顏登通，”潔淨室設計與管理”，全華科技圖書，1997。



附 錄

有限元素法矩陣方程式，解速度場：

$$([A] + [K] + \lambda [L])\{q\} = \{f\}$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] \\ [0] & [K_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \end{bmatrix}$$



在內流場中，上列矩陣中的子矩陣分別為：

$$[A_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left(\begin{array}{c} [N]\{U_f\}^m \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + [N]\{V_f\}^m \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{U_f\}^m [N] + \\ \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{([N]\{U_f\}^m)^2 + ([N]\{V_f\}^m)^2} [N] \end{array} \right) d\Omega \right]$$

$$[A_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{U_f\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{V_f\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left(\begin{array}{c} [N]\{U_f\}^m \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + [N]\{V_f\}^m \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{N}{\varepsilon} \right) \right] \{V_f\}^m [N] + \\ \frac{F\varepsilon}{\sqrt{Da}} \sqrt{([N]\{U_f\}^m)^2 + ([N]\{V_f\}^m)^2} [N] \end{array} \right) d\Omega \right]$$

$$[K_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\}[N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} \left(\{N\}[N] \varepsilon \hat{\nu} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \left(\{N\} \frac{\varepsilon}{\text{Re} Da} [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[L_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned} \{f_u\} = & \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U_f\}^m d\Omega \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{U_f\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{U_f\}^m \right) d\Gamma \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_v\} = & \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V_f\}^m d\Omega \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{V_f\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{V_f\}^m \right) d\Gamma \right] \end{aligned}$$

對於外流場，矩陣中的子矩陣分別為：

$$[A_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{U_f\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[A_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{U_f\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{V_f\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[A_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{V_f\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$\begin{aligned} [K_{11}] = & \sum_1^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N]) d\Omega - \int_{\Omega_e} \left(\{N\} [N] \left\{ \hat{V} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right. \\ & \left. + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right] \end{aligned}$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[L_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega \right]$$

$$\{f_u\} = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U_f\}^m d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{U_f\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{U_f\}^m \right) d\Gamma \right]$$

$$\{f_v\} = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V_f\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V_f\}^m d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Omega_e} (\{N\} [N] \{V_f\}_\tau) d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Gamma_e} \left(\{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{V_f\}^m \right) d\Gamma \right]$$

