

國立交通大學

機械工程研究所

碩士論文

噴嘴/擴散器式微幫浦之數值模擬及理

論分析

Numerical Simulation and Theoretical
Analysis of Nozzle/Diffuser
Micropumps

研究生：呂學霖

指導教授：崔燕勇

中華民國九十六年七月

噴嘴/擴散器式微幫浦之數值模擬及理論分析

**Numerical Simulation and Theoretical Analysis of
Nozzle/Diffuser Micropumps**

研究生：呂學霖

Student：Shiue-Lin Lu

指導教授：崔燕勇

Advisor：Yeng-Yung Tsui

國立交通大學

機械工程研究所

碩士論文



A Thesis
Submitted to Institute of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of science
in
Mechanical Engineering
July 2007
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 機械工程 學系碩士班 呂學霖 君

所提論文(中文) 噴嘴 / 擴散器式微幫浦數值模擬
與理論分析

(英文) Numerical Simulation and Theoretical
analysis of Nozzle / Diffuser Micropump

合於碩士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員：

黃吉田

陳俊良

傅武雄

崔燕亭

指導教授：

崔燕亭

系主任：

周學

教授

中華民國 96 年 7 月 16 日

噴嘴/擴散器式微幫浦之數值模擬及理論分析

研究生： 呂學霖

指導教授： 崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程研究所

摘 要

本文是以計算流體力學的方法在分析噴嘴/擴散器式微幫浦內的流場與效率。計算時使用非結構性和非交錯式網格；對於速度與壓力的偶合則採取 PISO 演算法則並以有限體積法將統御方程式離散化。而模擬此流場時是採用不同出口壓力為邊界條件，並計算幫浦之淨流量。

本文針對 Ollson【5】的單腔式微幫浦進行分析，主要是探討不同背壓下幫浦的性能。在研究中測試了不同的壓電薄膜的近似曲線對於流量的影響，結果顯示較佳的近似曲線會使得模擬與實驗結果較為穩合，不同近似曲線會影響微幫浦的淨流量。而當增加出口背壓時，流量與效率會隨之減少。

此外，本文採用了兩數學種模式來分析噴嘴/擴散器元件，找出了噴嘴/擴散器元件的壓力係數 K_n, K_d 與流量的關係，並且將其應用在 lumped mass 理論。透過此簡易的理論，便可分析微幫浦不同背壓下的流量、效率及腔體中心壓力、。本研究中比較了模擬和理論的結果，發現此理論估算的結果與模擬稍有差異，為了解決此問題，本文發展出了不同的方式估算效率，以使得此理論在效率的估算的準確性提高，而具有較高的可用度。

Numerical Simulation and Theoretical analysis of Nozzle/Diffuser Micropumps

Student : Shiue-Lin Lu

Adviser : Dr. Yeng-Yung Tsui

Institute of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

In this thesis, CFD is used to analyze viscous flow and efficiency of micropumps . Unstructured and nonstaggered meshes are adopted in computations. The PISO algorithm is used to take the velocity-pressure coupling and the governing equations are discretized by the finite volume method. Pressure boundary condition was apply in our simulation.

In this thesis, a single chamber Micropump pump [5] is analyzed and we explore the pumping performance. The PZT is approximated by different mathematical curves. Testing indicates that the approximated curve need to be optimized to achieve better results. Different approximated curves will affect the pumping flow. When the back pressure is increased , the flow rate and pump efficiency get lower.

In order to find the pressure coefficient K_n & K_d of the Nozzle/Diffuser, we analysis the Nozzle/Diffuser element by using two different models. Furthermore, we use the lumped mass model to analyze the net flow and umping efficiency of the micorpump in different back pressures. We compare the results of the 3D simulation and the lump model. It was shown that there exits a little difference certain degree of difference between the two models. To solve this problem , we develop a different method to calculated the pump efficiency. This method improve the accuracy of the theoretical solution and make Lumped Mass Model more useful .

誌謝

在交大這兩年來的日子，覺得成長了許多，其中最感謝崔燕勇教授在課業上的指導與栽培，讓我除了對於知識成長之外，也學到了解決問題的方法與觀念，在此特地對老師的教導獻上感激。

另外也感謝育昌學長和 George 在研究過程中的教導，以及同學飛鴉，彼此相依為命與鼓勵，在平常互相嘴炮的過程中，無形地在課業中也成長了許多。也感謝實驗室學弟欣恩、仕文、俊岩平常在生活的相處與幫助。

此外，感謝 TAMAGOYA 的伙伴們，感謝你們陪我渡過在新竹這兩年，大家一起努力一起歡笑，讓我的生活更加豐富，沒有你們也許我也撐不過這兩年。最後感謝我的父母與妹妹，在求學過程中一路支持，給我自主的空間，真的謝謝大家。



符號表

符號：

定義：

α	不同近似曲線的混合比
β	流量比
β_1	排水模式下流量比的均值
β_2	吸水模式下流量比的均值
r_0	壓電薄膜的半徑
r_1	振動腔體半徑
d_{MAX}	壓電薄膜中心點最大位移量
f	壓電薄膜的振動頻率
$\eta \eta_1 \eta_2 \eta_3$	幫浦效率
P_{pump}	背壓
P_i	左端入口壓力
P_o	右端出口壓力
P_c	腔體中心點壓力
F	通量
\dot{m}	質量流率
P	壓力項
Re	雷諾數
u	X 方向之速度項
v	Y 方向之速度項
w	Z 方向之速度項
\vec{V}	速度向量
ρ	密度
μ	分子黏滯係數
Φ	相關變數
ϕ	流量比
θ	Nozzle/Diffuser 流道夾角



W	Nozzle/Diffuser 喉部寬度
L	Nozzle/Diffuser 長度
H	微幫浦、Nozzle/Diffuser 深度
D_H	Nozzle/Diffuser 水力直徑



目錄

第一章、微幫浦簡介.....	1
1.1 微流體系統簡介：.....	1
1.2 現存微幫浦的簡介.....	1
1.3 無閥式微幫浦的原理簡介.....	3
1.4 文獻回顧.....	3
1.5 研究內容.....	6
第二章、數值方法.....	8
2.1 基本假設.....	8
2.2 統御方程式.....	8
2.3 壓電薄膜振動的近似.....	8
2.4 邊界條件(Boundary Condition).....	9
2.4.1 壓電薄膜的邊界條件.....	9
2.4.2 出口的邊界條件.....	10
2.4.3 固定牆的邊界條件.....	10
第三章、動量方程式的離散.....	11
3.1 有限體積法 (Finite Volume Method).....	11
3.2 有限體積法的離散.....	11
3.3 離散化.....	12
3.3.1 非穩態項 (Unsteady Term).....	12
3.3.2 對流項 (Convection Term).....	12
3.3.3 擴散項 (Diffusion Term).....	13
3.3.4 源項 (Source Term).....	14
3.4 線性代數式的整理.....	14
3.4.1 代數方程式.....	14
3.4.2 矩陣的求解.....	15
第四章、PISO演算法.....	16
4.1 PISO演算法的簡介.....	16
4.2 速度與壓力之間的偶合.....	16
4.2.1 預測步驟(Predictor Step).....	16
4.2.2 第 1 次修正步驟 (1st Corrector Step).....	17

4.2.3 第 2 次修正步驟 (2nd Corrector Step).....	19
4.2.4 壓力修正方程式的整理.....	20
4.3 進出口邊界條件的給定.....	20
4.3.1 出口壓力邊界的流量計算.....	21
4.3.2 出口壓力邊界的速度計算.....	21
4.4 固定牆邊界條件.....	22
4.5 PISO演算流程.....	22
第五章、無閥型微幫浦簡易理論.....	24
5.1 壓電式幫浦的薄膜振動模擬.....	24
5.2 壓電式微幫浦的效率計算.....	26
5.2.1 真實效率 η_{real} 的計算：.....	26
5.2.2 效率 η_1 的計算：.....	28
5.2.3 效率 η_2 的計算：.....	29
5.2.4 效率 η_3 的計算：.....	29
5.2.5 效率計算的比較：.....	30
5.3 Nozzle/Diffuser 元件的探討.....	30
5.3.1 穩態方形截面Nozzle/Diffuser探討.....	30
5.3.2 Region 2 的計算-Model A：.....	31
5.3.3 Region 2 的計算-Model B：.....	32
5.4 無閥型微幫浦的簡易理論(Lump Model).....	33
第六章、結果分析與討論.....	36
6.1 壓力邊界的驗證.....	36
6.1.1 T型管的測試.....	36
6.1.2 Y型管的測試.....	36
6.2 不同背壓下的 3D模擬結果.....	37
6.2.1 網格測試.....	37
6.2.2 考慮不同薄膜振動假設的流量結果.....	37
6.2.3 流場結構分析.....	38
6.2.4 幫浦效率探討.....	39
6.3 單腔微幫浦Lump-Model的理論分析：.....	40
6.3.1 Model A - 透過CFD的計算.....	40
6.3.2 Model B - Yang的數學模式.....	40

6.3.3 Lump Model的結果分析與比較	41
第七章、結論	43
<i>Reference</i>	45
附錄A - Lump Model的振動腔體壓力值 P_c 解析解：	48



圖目錄

《圖 1.1》微幫浦在工程上的應用.....	49
《圖 1.2》微幫浦的致動來源【1】.....	49
《圖 1.3》壓電式微幫浦的運作方式.....	50
《圖 1.4》無閥型壓電式微幫浦的發展史.....	50
《圖 1.5》Ullman【6】所提的六種串聯方式.....	51
《圖 1.6》前人對於微幫浦的模擬.....	51
《圖 1.7》K-S Yang【14】所模擬多腔體方形微幫浦.....	52
《圖 1.8》1998 年Ollson【5】所製微幫浦構造示意圖.....	52
《圖 1.9》1998 年Ollson【5】所製微幫浦之Nozzle/Diffuser元件尺寸.....	52
《圖 1.10》1998 年Ollson【5】所製微幫浦尺寸.....	53
《圖 2.1》本文所欲分析的微幫浦的幾外形。圖為 1998 年，Ollson【5】所製單腔體圓形微幫浦示意圖.....	54
《圖 2.2》薄膜中心點位移和速度隨時間的變化.....	54
《圖 2.3》圓形壓電薄膜於不同半徑下的位移量(在上死點時).....	55
《圖 2.4》圓形壓電薄膜於不同半徑下的位移量(在下死點時).....	55
《圖 2.5》採用混合曲線下，在不同背壓下的壓電薄膜形狀.....	56
《圖 2.6》本文模擬之幾何與邊界條件 (A)3D網格 (B) 邊界條件.....	56
《圖 3.1》非結構性網格(Unstructured Grid).....	57
《圖 3.2》Over-Relax Approach.....	57
《圖 4.1》出口壓力邊界示意圖.....	58
《圖 4.2》出口壓力邊界流量的計算.....	58
《圖 4.3》邊界剪應力的計算示意圖.....	59
《圖 4.4》PISO演算法流程圖.....	60
《圖 5.1》壓電薄膜和幫浦內部的作用.....	61
《圖 5.2》比較三種不同近似曲線於壓電薄膜的振動.....	61
《圖 5.3》兩出口端流量隨時間的變化 (背壓=0).....	62
《圖 5.4》方程式(5.18)式的積分範圍.....	62
《圖 5.5》Diffuser-Element 示意圖，將Nozzle/Diffuser元件的壓力係數分成三個區間探討：Region 1-入口區間，Region 2-漸縮/漸擴區間，Region 3-出口區間。 ...	63
《圖 5.6》不同進口導角對於入口K值的影響【14】.....	63

《圖 5.7》(A)方管摩擦係數 <i>f</i> 與不同深寬比的關係 (B)以文獻【18】方式所求得管道內部的壓力損失.....	63
《圖 5.8》以文獻【18】方式計算 <i>K_n</i> , <i>K_d</i> 隨不同雷諾數(<i>Re</i>)的變化.....	64
《圖 5.9》以文獻【18】方式計算於不同雷諾數(<i>Re</i>)下的 η_{nd}	64
《圖 5.10》Diffuser流向與Nozzle流向示意圖.....	65
《圖 6.1》壓力邊界測試(1) - T型分歧管的幾何與網格.....	66
《圖 6.2》壓力邊界測試(1)的結果 - 流量比($Fi = \dot{m}_1 / \dot{m}_{in}$)隨雷諾數的變化。.....	66
《圖 6.3》壓力邊界測試(1)的結果 - 雷諾數為 10、200、400 的流場流線圖.....	67
《圖 6.4》壓力邊界測試(2) - Y型分歧管幾何.....	68
《圖 6.5》壓力邊界測試(2) - Y型分歧管網格.....	69
《圖 6.6》壓力邊界測試(2)的結果 - 流量比($Fi = \dot{m}_2 / \dot{m}_{in}$)隨出口壓力差 <i>dp</i> 的變化。.....	69
《圖 6.7》壓力邊界測試(2)的結果-不同壓差下的流.....	70
《圖 6.8》本文欲模擬的網格示意圖.....	71
《圖 6.9》本文欲模擬的網格上視圖.....	72
《圖 6.10》本文欲模擬的網格側視圖.....	72
《圖 6.11》背壓 = 0 Pa，兩端出口流量 <i>Q₂</i> , <i>Q₁</i> 隨時間變化.....	73
《圖 6.12》背壓 = 2950 Pa，兩端出口流量 <i>Q₂</i> , <i>Q₁</i> 隨時間變化.....	73
《圖 6.13》背壓 = 5310 Pa，兩端出口流量 <i>Q₂</i> , <i>Q₁</i> 隨時間變化.....	74
《圖 6.14》背壓 = 0 Pa，每個週期下的淨流量(<i>mL/min</i>).....	74
《圖 6.15》採用不同振動假設(2.3)、(2.4)式模擬所得淨流量與背壓關係圖.....	75
《圖 6.16》比較不同振動假設(2.3)、(2.4)、(2.8)式模擬所得淨流量與背壓關係圖.....	75
《圖 6.17》比較不同網格數量下(65288、117232、210258)，淨流量與背壓關係.....	76
《圖 6.18》所取流場截面示意圖.....	76
《圖 6.19》背壓=2950 Pa， $t = 0.25T$ ，壓力場分佈圖.....	77
《圖 6.20》背壓=2950 Pa， $t = 0.75T$ ，壓力場分佈圖.....	77
《圖 6.21》背壓=0，排水模式($t = 0.25T$)，截面圖($z=0.0001$ mm).....	78
《圖 6.22》背壓=0，排水模式($t = 0.25T$)，流場與壓力場截面圖($z=0.0001$ mm).....	78
《圖 6.23》背壓=0，吸水模式($t = 0.75T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm).....	79
《圖 6.24》背壓=0，吸水模式($t = 0.75T$)，壓力場截面圖($z=0.0001$ mm).....	79

《圖 6.25》背壓=5310 Pa，排水模式($t = 0.25T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm)	80
《圖 6.26》背壓=5310 Pa，吸水模式($t = 0.75T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm).....	80
《圖 6.27》背壓=0 Pa，排水模式，不同時間下Nozzle/Diffuser流場圖($z=0.0001$ mm)	81
《圖 6.28》背壓=0 Pa，吸水模式，不同時間下Nozzle/Diffuser流場圖($z=0.0001$ mm)	82
《圖 6.29》比較不同網格下，真實效率 η_r 與背壓的關係.....	83
《圖 6.30》 β (Q_2/Q_1)於一個週期內的變化.....	83
《圖 6.31》Pump Model下，流量比 β_1 (Q_2/Q_1)與背壓的關係(網格 = 117232)..	84
《圖 6.32》Supply Model下，流量比 β_2 (Q_2/Q_1)與背壓的關係(網格 = 117232)	84
《圖 6.33》(5.19)式計算的效率 η_2 與真實效率(η)在不同背壓下的關係	85
(網格 = 117232).....	85
《圖 6.34》(5.23)式計算的效率 η_3 與真實效率(η_r)在不同背壓下的關係	85
(網格 = 117232).....	85
《圖 6.35》 K_n, K_d 隨流量的變化 (Model B).....	86
《圖 6.36》欲研究的Nozzle/Diffuser幾何尺寸	86
《圖 6.37》Nozzle/Diffuser CFD模擬的網格上視圖與與測視圖.....	87
《圖 6.38》Nozzle/Diffuser 模擬的邊界條件給定.....	87
《圖 6.39》Nozzle/Diffuser模擬結果 I - 於不同進口流量(Q)下，Diffuser Direction 之壓力分佈圖	88
《圖 6.40》Nozzle/Diffuser模擬結果 II - 於不同進口流量下(Q)，Nozzle Direction 之壓力分佈圖	89
《圖 6.41》壓降係數 C_p 隨不同流量下的變化.....	90
《圖 6.42》 K_n, K_d 隨流量的變化 (Model A)	90
《圖 6.43》不同背壓下，腔體中心壓力 P_c 隨時間變化(一個週期內)	91
《圖 6.44》腔體中心點最大壓力 P_c ($T^* = 0.25$)與不同背壓下的關係	92
《圖 6.45》腔體中心點最小壓力 P_c ($T^* = 0.75$)與不同背壓下的關係	92
《圖 6.46》背壓= 0 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)	93
《圖 6.47》背壓=2950 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)	93
《圖 6.48》背壓=5310 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)	94
《圖 6.49》比較實驗、模擬、理論，來分析淨流量在不同背壓下的變化。	94
《圖 6.50》以模擬、理論的流量結果，比較在不同背壓下的真實效率。	95

《圖 6.51》背壓 = 0 Pa，比較Model A、Model B與真實模擬結果中，一個週期內 $\beta(Q2/Q1)$ 隨時間變化.....	95
《圖 6.52》背壓 = 2950 Pa，比較Model A、Model B與真實模擬結果中，一個週期內 $\beta(Q2/Q1)$ 隨時間變化.....	96
《圖 6.53》背壓 = 5310 Pa，比較Model A、Model B與真實模擬結果中，一個週期內 $\beta(Q2/Q1)$ 隨時間變化.....	96
《圖 6.54》比較Model A、Model B與 3D 模擬結果中， $\beta_1(Q2/Q1)$ 與背壓的關係。	97
《圖 6.55》比較Model A、Model B與真 3D 擬結果中， $\beta_2(Q2/Q1)$ 與背壓的關係。	97
《圖 6.56》比較Model A、Model B與 3D 模擬結果中，效率 η_2 與背壓的關係。	.98
《圖 6.57》比較Model A、Model B與 3D 模擬結果中，效率 η_3 與背壓的關係。	.98



第一章、微幫浦簡介

1.1 微流體系統簡介：

微流體元件及系統技術主要發展控制、感測、反應及分析微量流體。其元件包括微閥、微幫浦、微流量計、微噴嘴微流道、微混合器等，並可整合為不同功能之智慧化微型流體系統晶片。

在微流體系統，微幫浦為最關鍵的元件之一。在這幾年內發展出了多種型式的微幫浦，而其也廣泛的應用在各個不同的領域，如圖 1.1 所示：

- ✚ **燃料電池的應用：**閥式壓電微幫浦可應用在直接甲醇燃料電池(DMFC)裝置燃料的傳遞上。燃料傳遞系統必須提供足夠的燃料，且又必須能排除同時產生的二氧化碳。此系統可透過無閥式壓電微幫浦交換燃料和二氧化碳。
- ✚ **生物晶片上的應用：**生物晶片是指在玻璃片、塑膠晶片等載體上，利用微機電加工技術，放上特定的生物性材料，例如蛋白質或核酸，再經由一連串的偵測反應，便可得到想要獲得的一些資訊以用來進行計算、比對等檢驗分析。而其中推動流體的技術便需要用到微幫浦。先利用微機電技術在微流道上放置樣本，在以微幫浦驅動，使液體在管道上進行混合等化學反應。
- ✚ **在支持冠狀動脈繞道移植上的應用：**微幫浦技術可應用再心臟手術上，經由實驗得知，由微幫浦支持可使在連續冠狀動脈阻塞時，維持在較好的血液動力學狀態和心肌收縮性。
- ✚ **在藥物傳輸系統上的應用：**藥物傳輸系統 Drug Delivery System (DDS)是結合微電子系統將藥物直接植入體內。將藥物帶入體內循環系統，到達病變產生的地方，再將藥物釋放出來。而壓電材料貼附在矽薄片上，便形成幫浦結構，而微幫浦的流量控制再由頻率與控制信號來達成。
- ✚ **在熱傳上的應用---用於冷卻：**微幫浦可應用在微縮實驗室晶片當晶片作用溫度上升時，冷卻液走的是一條小循環路線，閥門式壓電微幫浦將冷卻液導入熱交換區以達到冷卻效果。通過熱交換區溫度較高的液體再經由微幫浦送到液態冷卻器冷卻，使得進入熱交換區的液體維持在低溫，完成一個循環，達到冷卻效果。

1.2 現存微幫浦的簡介

在微機電的領域中，微幫浦被應用來當做為流體的輸送和控制。因此，如何提高機械的驅動效率和精確的控制流體仍然是微流體系統中主要的研究目標。根據微幫浦驅動方式，一般將其分為機械式和非機械式此兩類。機械式微幫浦的分

類如表 1.1 所示，以其作動方式可分好幾種型，如蠕動型(peristaltic pump)、轉軸型幫浦(rotary pump)、擴散型幫浦(diffuser pump)和位移型幫浦 (displacement pump) 數種。機械式微幫浦原理是透過振動薄膜或者是其它可動元件週期性的運動以造成流體輸送。因此機械式微幫浦包含可動式的元件(moving part)和微閥門系統 (micro-valve system)。

機械式微幫浦的分類		
致動來源	腔室	閥門
Piezoelectric	single chamber	check valves
electrostatic	moving volumes	valveless
electromagnetic	peristaltic	
pneumatic		
thermopneumatic		
Thermomechanic		

表 1.1 機械式微幫浦的分類【1】

而由上表的分類，可知根據其可動元件的動力來源，較常見的數種如圖 1.2 所示：

- 靜電式微幫浦(Electrostatic miropump)：

一般的機械式微幫浦的運作可分為兩個模式(mode)，對於靜電式微幫浦，在吸水模式(supply mode)時，會在振動薄膜上施加電壓訊號，此時會造成靜電吸引力而使薄膜向上移動，在此模式時，會將出口閥門關閉而進口閥門打開，會造成流體會由進口流進腔室裡頭；在排水模式(pump mode)時，則不在振動薄膜上通電，因此薄膜會恢復原狀而向下移動，在此模式時，會將進口閥門關閉而出口閥門打開，因此流體會由出口流出去。
- 熱氣式微幫浦(thermopneumatic)：

其原理是透過加熱驅動腔室內體積增大，而冷卻後，腔室內體積又回到原來的大小，如此反覆運作達到驅動流體的效果。
- 壓電式微幫浦(PZT)：

壓電式微幫浦是利用材料的壓電效應。壓電效應最早是在1880年由法國居禮(Curie)兄弟於石英中發現。所謂的壓電效應簡單的說，就是在材料某兩端施以壓力產生變形，則在材料的某特定兩端會產生正負電荷的分布，此效應為正電壓效應。同樣的，在材料某兩端施以正負電場，則在材料的某特定兩端將會產生變形，此即為負電壓效應。因此當我們在振動薄膜中使用壓電

材料，便可利用負電壓效應，施加電場使其上下振動，進而達到推動流體的效果。本文所要討的微幫浦就是屬於此種類型。

令外一大類為非機械式微幫浦，這類的微幫浦運用感應電場來驅動液體，其特色是是以固定的電極構造，藉由施加電壓產生電場來推動液體，而不需要任何之可動元件。常見的有：電液體力學驅動幫浦(EHD)、電磁式微幫浦(MHD)、電滲式幫浦(electro-osmotic pump)、電泳式幫浦(electrophoretic pump)與電濕式幫浦(electro-wetting pump)等數種。

一般而言，機械式微幫浦具有構造簡單和容易驅動多數流體等特色。但傳統的機械式微幫浦都需要止回閥系統，當微幫浦的振動薄膜做週期性振動時，微閥門也必須相對應的開關以相互配合，因此在很高頻率的作動下，容易造成微閥門的磨損和疲勞，而使得整個微幫浦系統損壞。因此，這幾年便發展出無閥式微幫浦(valve-less Micropump)，利用噴嘴/擴散器來取代原有閥門。

1.3 無閥式微幫浦的原理簡介

無閥式微幫浦與傳統的幫浦不同點在於利用漸縮/漸擴管(Nozzle/Diffuser)來取代原本需要使用的微閥門。常見的無閥式微幫浦使用一上下振動的壓電薄膜，而根據其運作方式，在一個週期內可分為兩個模式討論，如圖 1.3 所示：

- 吸水模式(Supply Mode)：

如圖 1.3A，在此模式時，壓電薄膜向上移動，此時腔內的體積增大，流體會經由兩端的 Nozzle/Diffuser 元件流進腔體，進口端的流體經由 Diffuser 方向流進，壓力損失較小；而出口端是經由 Nozzle 方向流進，壓力損失(Pressure Loss)大，因此從進口端進入的流量會大於出口端。

- 排水模式(Pump Mode)：

如圖 1.3B，在此模式下，壓電薄膜向下移動，此時腔體內被壓縮而體積變小，便將流體往兩端同時排出，此時進口端是走 Nozzle 方向流出，壓力損失大；而出口端則反之。因此在此模式下，從出口端排出的流量會大於進口端。因此，如此反覆作動，便可達到輸送流體之功能。

1.4 文獻回顧

在本文中，文獻回顧主要分為無閥型微幫浦的製造實驗與幫浦理論的建立、模擬與 Nozzle/Diffuser 的研究。

1989 年，荷蘭人 Van de pol【1】最早提出無閥門的構想。其主要概念為在出口端和入口端可利用噴嘴/擴散器，可造成不同的壓降，便可取代傳統止回閥，達成無需閥門便可控制流體流向的構想。

1993 年，Stemme et al. 【2】以黃銅加工出了第一個無閥型微幫浦。幫浦腔直徑為 19mm，而進出口均 Diffuser 來取代閥門，而 diffuser 角度均不超 20 度，振動薄膜則是用圓形的薄膜片(圖 1.4A)。當時做出的流量最大可達 16ml/min。

1995 年，Gerlach et al. 【3】以半導體製程的方式，在矽板蝕刻出大角度的漸縮管。其作動方式都先前的一樣，不同點在流體的流動方向恰和先前的相反，是以 nozzle 為正流動方向而不是以 Diffuser 為流動方向(圖 1.4B)。他們也發現當大角度時會有回流，且在 $Re > 100$ 時，亦會產生。

1995 年，Ollson et al. 【4】首度嘗試製造出平面式圓型腔體無閥微幫浦，並且將兩個不同腔室並聯，其腔體直徑均為 6mm，而在兩個腔體上面均有壓電薄膜振動。在此篇研究中也針對無閥型微幫浦的效率與流量做分析。

1997 年，Ollson et al. 【5】以熱壓法製造圓形單一腔體的微幫浦，並且以 7 度張角的 Diffuser 元件連接腔體與進出口(圖 1.4C)。其結果顯示壓電薄膜在頻率 2200Hz 時最大流量可達 1ml/min，而最大背壓則有 5900kpa。令外，其實驗中也並聯了兩個相同腔體比較(圖 1.4D)，且最大流量可高達 1.9ml/min。

而在 Ollson 提出一系列微幫浦的製作之後，關於無閥型微幫浦製造與實驗的相關文獻研究如雨後春筍般的發展。然而更進一步，提出對於微型幫浦數學模式。

1998 年，Ullmann 【6】建立了微幫浦數學模式，他將微幫浦腔內的振動，在一個週期之內切成三個區間來探討，在這三個區間內，透過壓力係數 K 來估算其流量。令外，此篇研究中也提出了微幫浦可能的六種串接方式(圖 1.5)：

1997 年，Ollson et al. 【7】提出了塊狀模式來分析 Nozzle/diffuser 效果。在其研究中針對壓電形的無閥式微幫浦，應用流體力學中的連續方程式和伯努力方程式方式及整合出了三個方程組，並以 MATLAB 求解此方程組得到出入口流量、入口流量和振動腔的壓力值。

2001 年，Pan et al. 【8】提出了微幫浦內振動薄膜與振動腔內壓力之間的耦合關係式。並在三種不同的壓力差的情況下，估算出微幫浦的流量的解析解。

而關於微幫浦的模擬研究的相關文獻則較少。最早起步是在 1997 年開始：

1997 年，Athavale et al. 【9】針對 1993 年 Stemme 【2】所製做的微幫浦幾何做流場的模擬(圖 1.6A)，在壓電薄膜振動的模擬上利用 CFD-ACE 中的 Fluid-Thermo-Structure (FSI) 模組，此模組是用來處理液固界面的問題。其模擬出的最大流量與實驗相當穩合，但最大背壓則差了一點。

2000 年，新加坡 et al. 【10】等人以 CFD-ACE 模擬圓型腔體無閥式微幫浦(圖 1.6B)，其幾何類似於 1997 年 Ollson 【5】所製的單腔幫浦。其壓電薄膜的位

移曲線模擬採用 Timoshenko 的圓板振動假設，並以方波訊號的 FOURIER 級數做為振動函數的假設。

2004 年，羅卓錚【11】以 CFD-ACE 針對 1997 年 Ollson【5】的單腔幫浦做模擬，其論文中壓電薄膜位移以兩種不同曲線假設，並以三角函數做來回振動，模擬出的最大流量與實驗約有 30% 的誤差。

2005 年，Fan et al.【12】利用有限體積法軟體 CFDRC 針對壓電無閥微幫浦做分析(圖 1.6C)，其包含了流場分析、壓電薄膜振動和電流這三個元素，並整合此三者關係的統御方程式：Navier-Stoke 方程式、質量守恆方程式及薄膜振動方程式【8】。而結果顯示出薄膜的振動頻率在 7500Hz 之內，流量會隨著頻率而上升；而超過此頻率後，則流量反而會隨著頻率上升而下降。

2005 年，曾裕博【13】以 Fluent 模擬方形腔體的微幫浦，其論文建立了關於 Nozzle/Diffuser 效率與幫浦效率之間的數學關係，並對不同張角的分析其效能。

2006 年，Yang et al.【14】以 CFD-ACE 分別模擬單一腔體、雙腔體串聯與單腔體並聯的微幫浦(圖 1.7)，並分析多腔體微幫浦在不同相位角下的流量結果。其結果顯示，串聯式的微幫浦在兩個腔體振動的相位差達 100 度時，有較佳的流量。

2007 年，韓國 Jeong et al.【15】等人比較 FSI model 與 Timoshenko 假設，在低頻的情況下以此兩種不同壓電薄膜的位移的方式的差異，而幫浦的幾何形狀則類似於 1993 年 Stemme 所製微幫浦。其結果可知此兩種假設位移形狀不太類似，所得出的流量也不盡相同。

儘管針對微幫浦全幾何的流場模擬上，可透過 CFD 的計算以得到估計的淨流量，但在計算上則需耗費大量時間。因此根據 Stemme【1】所提出的幫浦理論中可知，影響幫浦效率的主要關鍵在於 Nozzle/Diffuser 元件，因此亦有文獻針對於 Nozzle/Diffuser 元件效率的探討：

1995 年，Ollson et al.【16】針對 Nozzle/Diffuser 元件提出了壓力係數的計算方式。其原理是將此元件分為三個區間：

- 入口區：因流體流進 Nozzle/Diffuser 元件的壓力損失
- 漸縮/漸擴區：因流過 Nozzle/Diffuser 而造成的壓力損失
- 出口區：當流體流出 Nozzle/Diffuser 元件的壓力損失

並利用壓降係數進而求出其工作效率，而結果顯示出採用漸縮管為通道的效果較佳。

2000 年，Ollson et al.【17】以有限元素法的軟體 ANSYS，以數值模擬的方式 (CFD) 計算 Diffuser 的流場，並比較先前實驗的結果。他們先前實驗的結果是在

Diffuser 以不同的角度：7、9.8、13，其效率會隨著其角度的增加，或者是長度的拉長而有較佳的表現。在模擬中，分別以層流模式和紊流模式方式去模擬，但結果與先前實驗有著一定的誤差。

2003 年，Yang et al. 【18】針對不同張角的 Nozzle/Diffuser 實驗，比較在不同雷諾數下的 Diffuser Efficiency，並以方管的摩擦力損失的數學計算來預測 Nozzle/Diffuser 的效率，其結果顯示在 5 度張角的時後，實驗結果與其預測相當穩合，但 20 度張角的結果卻有相當的誤差。

2004 年，Singhal et al. 【19】於低雷諾數情況下，以套裝軟體 fluent 對 nozzle/diffuser 進行分析。其所做的幾何外型為平板式漸擴管和圓錐式的漸擴管。並在入口邊界給定 Fully Develop 條件，其結果顯示出在低雷諾數下，壓力係數和 Re 數有很大關係，尤其在小角度時。令外也發現圓錐式和平板式的漸擴管結果相似。

1.5 研究內容

本文研究中，主要是以 1997 年 Ollson et al. 【5】所實驗的微幫浦為參考幾何，如圖 1.8，利用計算流體力學的方式來分析此型微幫浦的效果。其幾何幾形狀為一個深度 0.2mm 的單一圓形腔體的微幫浦，腔體直徑為 3mm。腔體上放置直徑 2mm 的壓電振動薄膜片。在腔體與進出口間以兩個 Nozzle/Diffuser 元件連結，Nozzld/Diffuser 元件的張角為 7 度，長度為 1mm，而喉部的寬度為 0.1mm，如圖 1.9 所示。

本研究主要是以不同的曲線來模擬幫浦作動時的流場現象，並探討流量與幫浦背壓之間的關係，其中兩端背壓的壓差變化從 0~5900Pa，振動頻率 $f=2200\text{Hz}$ 並且更進一步找出最佳的近似曲線來模擬幫浦的流場。

而為了簡化時間時，本文模擬中採用對稱邊界條件，僅模擬一半的微幫浦，其幾何尺寸如圖 1.10 所示。令外，本文研究中以三種不同數量網格的來探討網格對於流量結果的影響。

而透過對流量的分析，便可更進一步分析幫浦的效率。本文研究中亦探討在不同背壓下，幫浦效率的變化。本文中以流量比參數 β 取代前人的 η_{nd} ，並參考前人的方式，建立了數種不的效率的估算方式，以期能透過對 Nozzle/Diffuser 的分析便可得知幫浦的效能。

令外，我們也就 Nozzle/Diffuser 元件做探討，本文中採用兩種不同的數學模式來分析 Nozzle/Diffuser 元件，並建立壓力係數 K_n, K_d 和流量之間的關係。

最後，我們透過 Ullmann 【6】所提的數學模式，並整合先前所建立

Nozzle/Diffuser 數學模式，建立起一套微幫浦理論 Lump Model，以理論解求得 β 值，並將其代入先前建立的效率估算式子中，更進一步得到幫浦效率，並以此與模擬的結果相比較來驗證其準確性。



第二章、數值方法

本章的內容主要敘述我們求解流場所使用的數學模式。在 2.1 節我們先說明對於本次模擬的基本假設。在 2.2 裡敘述我們求解流場所使用的統御方程式。2.3 節裡頭敘述對於壓電材料薄膜的振動位移所採用的近似曲線函數。最後，對於邊界條件的給定則會在 2.4 節內敘述

2.1 基本假設

本研究中，我們模擬的壓電幫浦的幾何形狀如圖 2.1，其所使用的工作流體為水，故我們可假設流體為：

- 不可壓縮流(Incompressible Flow)：我們假設水的密度為常數。
- 忽略重力項 (Neglect body force)
- 非穩態流場 (Unsteady)：

在本次模擬中，腔體底部的壓電材料的振動會隨時間變化，因此流場的變化亦隨時間而改變，當壓電薄膜向上振動時時，流體會經由水管向外流出；而當往下時，流場的方向則反之。固我們假設流場為非穩態的情況。

2.2 統御方程式

- 連續方程式(Continuity Equation)：

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

- 動量方程式(Momentum Equation)：

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \mu \nabla (\nabla \vec{V}) \quad (2.2)$$

其中 μ ：黏滯係數， ρ ：流體密度， ∇P ：壓力梯度。

2.3 壓電薄膜振動的近似

在本文研究中，對於壓電薄膜的振動位移是採用兩種不同的曲線【11】，分別以梯形與二次曲線來近似，而薄膜隨時間的來回振動，則以 Euler Beam 的假設為三角函數(圖 2.2)：

- 二次曲線(Parabolic Curve)：

$$Z_1(r, t) = -\left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right] \cdot d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) \quad (2.3)$$

圖 2.3，圖 2.4 所示的分別為壓電薄膜在上死點與下死點時的位移。

- 梯形曲線(Trapezoid Curve)：

$$Z_2(r,t) = \begin{cases} -d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) & , IF r < r_1 \\ -\frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) & , IF r_1 < r < r_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 r_0 為腔體半徑， r_1 為壓電薄膜的半徑。 d_{MAX} 為中心點由水平至上死點的最大位移量，本文假設 $d_{MAX} = 1.0 \mu\text{m}$ 。 f 為振動頻率，依其實驗設定為 $f = 2200\text{Hz}$ 。

另外在模擬中，我們也考慮兩個曲線做線性混合，以期能在不同背壓的情況下都能得到較佳的結果。在不同背壓下，以 α 值來線性混合兩種曲線，其中 α 值為 0~1 之間，而位移變化如圖 2.5 所示。

- 混合曲線(Blending Curve)：

$$Z_3(r,t) = \alpha \cdot Z_1(r,t) + (1 - \alpha) \cdot Z_2(r,t) \quad (2.5)$$

當 $\alpha = 0, \text{Trapezoid}$ (梯形)
 $\alpha = 1, \text{Parabolic Curve}$ (二次曲線)

而幫浦背壓則為 $P_{pump} = \alpha \cdot P_{MAX}$ 。

2.4 邊界條件(Boundary Condition)

在本文模擬中，採用對稱邊界條件，因此僅模擬真實微幫浦幾何的一半，其網格如圖 2.6A 所示。而邊界條件如圖 2.6B，圖中 Inlet 與 Outlet 的部份均採用壓力邊界條件，壓電薄膜邊界條件的給定在接下來下一節中說明。

2.4.1 壓電薄膜的邊界條件

由於在邊界上有壓電薄膜的振動，因此必需將其邊界設為移動邊界，而流體的計算上也必需藉由移動網格的計算。在文獻中【13】中，曾等人對於壓電薄膜的振動模擬，是以進口速度取代。而其結果顯示當振幅小於 1000nm 且振動頻率低於 3000Hz 之下，以進口速度來取代薄膜振動其與採用移動邊界做動態網格的計算相比，誤差在可接受範圍之內。故在本文研究中對於壓電薄膜的振動是以一進口速度來取代。

給定的進口速度即為壓電薄膜的振動速度，因此將方程式(2.3)-(2.5)式對時間微分後可得到進口壓電薄膜的振動速度：

- 二次曲線(Parabolic Curve)：

$$V_1(r,t) = \frac{\partial Z_1(r,t)}{\partial t} = 2\pi f \cdot \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right] \cdot d_{MAX} \cdot \text{Sin}(2\pi f \cdot t) \quad (2.6)$$

- 梯形曲線(Trapezoid Curve)：

$$V_2(r,t) = \begin{cases} 2\pi f \cdot d_{MAX} \cdot \text{Sin}(2\pi f \cdot t) & , IF r < r_1 \\ 2\pi f \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot \text{Sin}(2\pi f \cdot t) & , IF r_1 < r < r_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

■ 混合曲線(Blending Curve) :

$$V_3(r,t) = \alpha \cdot V_1(r,t) + (1 - \alpha) \cdot V_2(r,t) \quad (2.8)$$

2.4.2 出口的邊界條件

出口邊界設定我們採用的是壓力邊界，本文所研究的幾何共有兩個出口，並考慮兩端出口在不同壓力差下流量的變化。壓力邊界的數學式子和流量的計算會在稍後的 4.3 節中介紹。

2.4.3 固定牆的邊界條件

固定牆的物理意義為 No-Slip Condition，因此邊界為固定牆鄰近網格需考慮剪應力的影響。其中詳細的數學式子在稍後的 4.4 節中介紹。



第三章、動量方程式的離散

在本章裡，我們會離散前一章所提到的統御方程式及採用非結構性網格所使用的數值方法。3.1 節會先介紹有限體積法的概念，3.2 節裡應用有限體積法來處理我們所使用的動量方程式。3.3 節會進一步詳細的描述每一個項的離散化。最後在 3.4 節裡，動量方程式將被離散成代數方程式，面對此線性代數的問題，我們以 BICG 方法來求解此矩陣。

3.1 有限體積法 (Finite Volume Method)

過去 30 年來，隨著電腦的發展，越來越多人應用數值方法來求解工程問題。而一些求解偏微分方程式的方法也被發展出來，如有限元素法(FEM)、有限體積法(FVM)、有限差分法(FDM)……等。現今，有限元素法是最廣泛應用在求解偏微分方程式的方法。但面對特定的工程問題，尤其是在對於需要處理通量的問題，有限體積法仍是目前較為可靠的方法。在本文研究中，將採用有限體積法。對於計算流體力學而言，以有限體積法來解 Navier-Stokes 方程式比其他數值方法來說，更較有物理的意義，而其亦可應用於非結構性網格(圖 3.1)。在接下來的文章中，將敘述如何將有限體積法應用於非結構性網格上。

3.2 有限體積法的離散

在前一章裡已敘述所使用的統御方程式(2.2 式)，我們可將其寫成下列通式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}\phi) = \nabla \cdot (\mu\nabla\phi) + q \quad (3.1)$$

將其積分後，其積分式可表示如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho\phi d\forall + \iiint_{\forall} \nabla \cdot (\rho\vec{V}\phi) d\forall = \iiint_{\forall} \nabla \cdot (\mu\nabla\phi) d\forall + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (3.2)$$

【非穩態項】 【對流項】 【擴散項】 【源項】

其中 ϕ 為我們所要計算的速度向量，而 q 為源項，其來源為壓力項 $-\nabla_1 P$ 。透過高斯散度定理的轉換後，對流項和擴散項將由體積分轉換為面積分，方程式將被整理如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho\phi d\forall + \iint_S \rho\vec{V}\phi \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu\nabla\phi \cdot d\vec{S} + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (3.3)$$

其中 q 為源項其來源包含壓力項 $-\nabla P$ ，故 $q = -\nabla P$ ， μ 為流體黏滯係數。

在本文的求解中，我們將壓力梯度視為已知數，故將其放入源項。在下一節

裡，將會進一步的敘述每一個項的離散方法。

3.3 離散化

3.3.1 非穩態項 (Unsteady Term)

對於有移動邊界的不可壓縮流，其網格的體積會隨著時間而改變。因此非穩態項將被離散成如下式：

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall = \frac{\rho \cdot \Delta\forall}{\Delta t} (\phi - \phi^o) \quad (3.4)$$

其中 ϕ, ϕ^o 分別為我們要求解的變數其在這一個時間和前一個時間的當下值。因此右手邊的第二項即為前一個時間的值，即為已知數，故在計算上可將其移進源項。

3.3.2 對流項 (Convection Term)

經由高斯散度定理的轉換後，原本對流項從體積分轉為面積分，而對流項可被離散為下式：

$$\iint_S \rho \vec{V} \phi \cdot d\vec{S}_f = \sum_f (\rho_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f) \phi_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (3.5)$$

其中 \vec{S}_f ：面之法向量。 \dot{m}_f 代表流經面上的質量流率。

而下標 f，代表的是 ρ, \vec{V}, ϕ 在面上的值。對於其在面上的值，我們可透過其相鄰網格以線性內差的方式求之。

在本文的研究中，求解對流項所採用的方式為一階上風法和中央差分法的混合式。因此，對流項可整如下：

$$F_f^C = (F_f^{UD}) + \gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \quad (3.6)$$

【New】 【Old time level】

其中 γ 的值介於 0~1 之間，其表示之意義為：

$$\begin{cases} \gamma = 0, & \text{upwind scheme} \\ \gamma = 1, & \text{central difference scheme} \end{cases}$$

在本文研究中採用的 $\gamma = 0.9$ 。而右手邊的第二項我們將以前一個時間項的值，故將其移至源項中計算。

- 在一階上風法裡， ϕ_f 的值取決於其上游：

$$\begin{cases} \dot{m}_f \text{由主格點流向外} (\dot{m}_f > 0), & \phi_f = \phi_p \\ \dot{m}_f \text{由外流向主格點} (\dot{m}_f < 0), & \phi_f = \phi_c \end{cases}$$

- 在中央差分方式裡， ϕ_f 的值則為其相鄰網格的內差，其表示如下：

$$\phi_f = (1-w)\phi_p + w\phi_c \quad (3.7)$$

其中 w 為權重係數， w 值在 0~1 之間。

因此，最後(3.6)式可寫成如下列式的型式：

$$F_f^c = \left[\max(\dot{m}_f, 0)\phi_p + \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_c \right] + r \left[\dot{m}_f \left[(1-w)\phi_p + w\phi_c \right] - \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p - \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_c \right] \quad (3.8)$$

3.3.3 擴散項 (Diffusion Term)

經由高斯散度定理的轉換，擴散項由體積分轉為面積分，將其離散後可得下列式：

$$F^D = \iint_s \mu \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \sum_f \mu_f (\nabla \phi_f) \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (3.9)$$

其中 μ_f 為於此面上的黏滯係數，計算上是以其所相鄰的網格做線性內插。

針對非結構性網格而言，對於擴散項的處理，我們利用 Over-Relax 的方法來近似其原來的面法向量。因此，首先我們將原來的面法向量 \vec{S} 分成兩部份，其表示如下：

$$\vec{S}_f = \vec{d} + (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (3.10)$$

上式右手邊的第一項我們稱其為正交向量，而第二項為非正交向量。而正交向量 \vec{d} 的訂義如下：

$$\vec{d} = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta} \quad (3.11)$$

其中 $\vec{\delta}$ 定義如圖 3.2 所示。將 (3.10) 代入(3.9)，擴散項可整理成下式：

$$F_f^D = \underbrace{\frac{\mu_f |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} (\phi_c - \phi_p)}_{\text{【New time level】}} + \underbrace{\Gamma_f \nabla \phi_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})}_{\text{【Old time level】}} \quad (3.12)$$

在上式中，右手邊的第二項為非正交項，在計算上， $\nabla \phi_f$ 以前一個時間項所計算的值近似，因此可將其放至源項。

3.3.4 源項 (Source Term)

在計算中，我們將壓力梯度視為已知的值，因此可將放至源項。因此源項的來源即為壓力梯度 $-\nabla P$ 。對於非結性網格而言，在求解壓力梯度項時，會需要利用邊界上的壓力值，為了得到邊界上的壓力，我們可做以下的推導：

$$P_b - P_p = \nabla P \cdot \vec{\delta} \quad (3.13)$$

其中， b 表示壁面上的中點；而 $\vec{\delta}$ 代表 P 到 b 之距離向量。

如前述所示，壓力梯度可由下方的式子去近似之，

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta \nabla} \sum_f P_f \vec{S}_f = \frac{1}{\Delta \nabla} \left(P_b \vec{S}_b + \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \right) \quad (3.14)$$

此處下標 f 表示除了 b 之外的其餘各面。

因此我們得到了邊界上之壓力為：

$$P_b = \frac{\left(P_p + \frac{1}{\Delta \nabla} \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\Delta \nabla} \vec{S}_b \cdot \vec{\delta} \right)} \quad (3.15)$$

3.4 線性代數式的整理

3.4.1 代數方程式

透過先前幾小節的敘述，我們將非穩態項、擴散項、對流項及壓力項合併之後，可表示成下列的線性代數式：

$$A_p \phi_p^n = \sum A_c \phi_c + Q \quad (3.16)$$

$$A_p = \sum A_c + \frac{\rho \phi \cdot \Delta \nabla}{\Delta t} \quad (3.17)$$

其中 ϕ_p, ϕ_c 為此線性代數式的變數，而 A_c, Q 為：

$$A_c = \frac{\mu_f |\vec{S}_f|^2}{\delta r \cdot \vec{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.18)$$

$$Q = \gamma \left[\dot{m}_f [(1-w)\phi_p + w\phi_c] - \max(\dot{m}_f, 0)\phi_p - \max(-\dot{m}_f, 0)\phi_c \right] - \sum_f \mu \nabla \Phi_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) + \nabla P \cdot \Delta \nabla + \frac{\rho \cdot \Delta \nabla \phi^o}{\Delta t} \quad (3.19)$$

其中 A_c 項的值僅來自於對流項和擴散項。而源項 Q 則包含從非穩態項、對流項、擴散項和壓力項貢獻得來。

3.4.2 矩陣的求解

透過(3.15)式的表示，動量方程式被表示成求解線性代數的問題。在工程上，對於求解矩陣的方式，大致可分為直接方式和疊代方式這兩種類型的方法。直接方式來求解矩陣需要較大的記憶體空間來儲存矩陣。而對於非結性網格系統，其產生的係數矩陣為稀疏矩陣(Sparse Matrix)，而網格數量的大小會決定矩陣行列數，當網格數量到達好幾萬時，電腦記憶體便無法負荷這麼龐大的矩陣。而疊代式的求解則不需要如此大的記憶體空間。因此，在本文研究中對於求解矩陣，採用疊代方式的 BICG 和 ICCG 來求解。



第四章、PISO 演算法

在前面一個章節裡，敘述了動量方程式的求解方式。但在物理上，其並未滿連續方程式。為滿足質量守恆，可以從離散過後的動量方程式裡頭找出速度與壓力的關係式，並藉此修正壓力和速度值。在今日，已發展出幾種壓力和速度的偶合方式，如 SIMPLE、SIMPLEC、PISO 等。在本文的研究中，我們採用 PISO 此種方式。本章節主要是簡介 PISO 及壓力修正方程式的離散。在 4.1 節我們會簡介 PISO 的特性。4.2 節會進一步敘述其離散過後的方程式。4.3 節中會敘述本文所使用的定壓邊界條件。4.4 節則會描述對固定牆邊界的數學式子。最後，整個 PISO 演算的流程將會整理在 4.5 節。

4.1 PISO 演算法的簡介

在本文中，採用 PISO 演算法使我們能得到流場的至暫態解。PISO 的優點在於此演算法對於壓力和速度之間的偶合關係，不需經由反覆的疊代。因此對於流場的暫態解，採用 PISO 可節省許多時間。

PISO 演算法最早是由 Issa 【24】於 1986 年提出。PISO 四個字代表意思為 (Pressure Implicit with Splitting of Operator)，其求解流程包含兩個步驟，我們會在接下來的文章中敘述其如何使用於非結構性網格的運算上。

4.2 速度與壓力之間的偶合

4.2.1 預測步驟(Predictor Step)

在前一個章節裡，透過求解動量方程式而得出了速度場 \vec{V}^* ，而在求解過程中其壓力是採用一個現有(guessed)的壓力值 p^* ，但其並未滿足連續方程式，因此我們必須透過修正壓力值以使其滿足。為了滿足連續方程式，首先必需計算面上速度。我們可以先將動量方程式中壓力項自源項提出，表示如下列型式：

$$\vec{V}_p^* = \vec{H}_p^*(\vec{V}_c^*) - \left(\frac{\Delta V}{A_p} \right)_p \nabla P_p^* \quad (4.1)$$

$$\text{其中 } \vec{H}_p^*(\vec{V}_c^*) = \frac{\sum A_c \vec{V}_c^* + Q}{A_p} \quad (4.2)$$

同樣地，控容面上之速度與壓力關係式可透過(4.1)式的近似表示為：

$$\vec{V}_f^* = \vec{H}_f^*(\vec{V}^*) - \left(\frac{\Delta V}{A_p} \right)_f \nabla P_f^* \quad (4.3)$$

其中 $\vec{H}_f^* = \vec{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_f$ ，故將其代入上式可得：

$$\vec{V}_f = \vec{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_f^* \quad (4.4)$$

而在(4.4)式中 $\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f$ 的計算，是以主控面上相鄰的兩網格取平均值，即：

$$\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_p + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_c \right] \quad (4.5)$$

因此面上的質量流率可由下面的方式改寫為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^* &= \rho_f \cdot \vec{V}_f^* \cdot \vec{S}_f = \rho_f \cdot \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f (\nabla P_f^* - \nabla P_f) \cdot \vec{S}_f \\ &\approx \rho_f \cdot \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f (\nabla P_f^* - \nabla P_f) \cdot \vec{d} \\ &= \rho_f \cdot \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \frac{|\vec{S}|^2}{\delta r \cdot \vec{S}}\right)_f \left[(P_c - P_p) - \nabla P_f \cdot \vec{\delta r} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2.2 第 1 次修正步驟 (1st Corrector Step)

在前一個步驟中已得到的速度 \vec{V}^* 和壓力 P^* 在接下來的文章裡我們會敘述如何計算這些修正量。於 PISO 演算法中，第一次修正步驟中主格點與相鄰格點速度與壓力關係式可表示為：

$$\vec{V}_p^{**} = \vec{H}_p^* (\vec{V}_c^*) - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_p \nabla P_p^{**} \quad (4.7)$$

其中 $\vec{V}^{**} = \vec{V}^* + \vec{V}'$ ， $P^{**} = P^* + P'$ 。其中的上標**和*表示的即為修正後與修正前的值，上標*的值是由求解動量方程式得到，而上標'即為我們所要修正的修正量。

將方程式(4.7)與(4.1)相減後，主格點中修正速度 \vec{V}_p' 和修正壓力梯度 $\nabla P'$ 可表示為下列的關係式：

$$\vec{V}_p' = -\left(\frac{\nabla}{a_p}\right)_p \nabla P_{pf}' \quad (4.8)$$

其中的 $\nabla P_p' = \nabla P_p^{**} - \nabla P_p^*$ ，上述的方程式是在網格主格點上的推出，其亦可使用在每個主控面上。因此在每個主控面上的新流量的修正值可表示如下：

$$\dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^* + \dot{m}_f' \quad (4.9)$$

其中 \dot{m}_f^* :未修正前的流量，其計算上是透過方程式(4.9)式。

\dot{m}_f' :要修正的流量值。即 $\dot{m}_f' = -\rho_f \vec{V}_p' \cdot \vec{S}_f$ 。流量修正量可表示成下列式：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f' &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot \vec{S}_f \\ &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $\vec{d} = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f}$ ，其定義在前一章節中我們已敘述過。將(4.10)式代入(4.9)

式中，方程式可改寫為：

$$\dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (4.11)$$

在網格主格點 P 上，我們可將方程式(4.11)式用於在網格的每個控制面上 (Control Surface)。為了滿足質量守恆，因此對於網格的控制面上，其修正過後總合流量為應為 0，固可表示為：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = \sum_f \dot{m}_f^* + \sum_f \dot{m}_f' = 0 \quad (4.12)$$

最後，將方程式(4.11)代入(4.12)中，方程式可整理成下列的線性代數式：

$$A_p P_p' = \sum_f A_c P_c' + \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p}\right)_f \nabla P_{f'}' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) - \sum_f \dot{m}_f^* \quad (4.13)$$

$$A_p = \sum_f A_c \quad (4.14)$$

其中 $A_c = \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\overline{S_f}|^2}{\vec{\delta} \cdot \overline{S_f}}$ 。

4.2.3 第 2 次修正步驟 (2nd Corrector Step)

在修正步驟 1 時，我們透過求解第一次壓力修正方程式(4.13)，而得到了第一次修正過後速度和壓力值。在《第 2 次修正步驟》裡。類似於《第 1 次修正步驟》先前的方法，在此次修正中，於主格點速度與壓力的關係如下式：

$$\vec{V}_P^{***} = H_P^{**}(\vec{V}_P^{**}) - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_P \nabla P_p^{***} \quad (4.15)$$

因此，我們將(4.15)式與(4.7)式相減後，可得速度修正量與壓力修正量的關係式如下：

$$\vec{V}_P^{''} = H_P(\vec{V}^{''}) - \left(\frac{\nabla}{a_p} \right)_P \nabla P_P^{''} \quad (4.16)$$

接下來，在面上的流量即可表示為：

$$\dot{m}_f^{***} = \dot{m}_f^{**} + \dot{m}_f^{''} \quad (4.17)$$

其中 \dot{m}_f^{**} 在《第 1 次修正步驟》中已求得。而流量修正量 $\dot{m}_f^{''}$ 可表示為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^{''} &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^{''} \cdot \vec{S}_f + \rho_f \frac{\sum_f A_c \vec{V}_c^{''}}{A_p} \cdot \vec{S}_f \\ &= -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^{''} \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^{''} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) + \rho_f \frac{\sum_f A_c \vec{V}_c^{''}}{A_p} \cdot \vec{S}_f \end{aligned} \quad (4.18)$$

將 (4.18)式代入(4.17)式可得下列式：

$$\dot{m}_f^{''} = \dot{m}_f^{**} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^{''} \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^{''} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) + \rho_f \frac{\sum_f A_c \vec{V}_c^{''}}{A_p} \cdot \vec{S}_f \quad (4.19)$$

同等於先前的方法，其必需滿足連續方程式，因此可表示成：

$$\sum_f \dot{m}_f^{***} = \sum_f \dot{m}_f^{''} = 0 \quad (4.20)$$

最後，將(4.19)式代入(4.20)式中，方程式可表示成下線性代數式：

$$A_p P_p'' = \sum_f A_c P_c'' + \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) - \rho_f \frac{\sum_f A_c \vec{V}_c''}{A_p} \cdot \vec{S}_f \quad (4.21)$$

$$A_p = \sum_f A_c \quad (4.22)$$

$$\text{其中 } a_c = \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f}$$

4.2.4 壓力修正方程式的整理

在前兩節裡，在兩次的修正步驟中分別導出了兩個壓力修正方程式，我們可將其整理成一個通式，如下表所示(表 4-1)：

$A_p P_p' = \sum_f A_c P_c' + S_{p1} + S_{p2}$		
	《修正步驟 1》	《修正步驟 2》
S_{p1}	$-\sum_f \dot{m}_f^*$	$\rho_f \frac{\sum_f A_c \vec{V}_c''}{A_p} \cdot \vec{S}_f$
S_{p2}	$\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right) \nabla P_f' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})$	$\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right) \nabla P_f'' \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})$

表 4.1 兩次壓力修正方程式的源項

其中 S_{p2} 為非正交的源項，對於正交的網格中， S_{p2} 為 0。

在求解過程，為了使結果更為可靠，因此對於非結構網格系統中，於每個修正步驟(Correct Step)中，在求解壓力修正方程式的過程裡，我們再將其分成兩部份運算：第一部份只源項僅包含 S_{p1} ，而第二部份則源項只包含 S_{p2}

- 正交修正(non-orthogonal corrector) : $A_p P_p' = \sum_f A_c P_c' + S_{p1}$
- 非正交修正(non-orthogonal corrector) : $A_p P_p' = \sum_f A_c P_c' + S_{p2}$

對於幾何外形較為複雜的網格，可重覆比較多次的非正交修正。

4.3 進出口邊界條件的給定

4.3.1 出口壓力邊界的流量計算

在本文研究中出口以壓力邊界為出口條件，其給定方式為在出口面設定一壓力值，利用此壓力以修正出口部份的流量。定壓力邊界條件的作法如下：

1. 首先，先在壓力邊界相鄰的網格壓力值設定為欲給定的壓力值。
2. 在求解兩次壓力修正方程式之時，需設法將邊界相鄰網格的壓力修正值設為 0，如圖 4.1 所示，必需在求解矩陣的之前將矩陣調整以滿足 $p' = 0$ 。因此，需將壓力修正方程式的係數和源項做調整，即：

$$A_p P_p' = \sum_f A_c P_c' + S_{p1} + S_{p2}$$

$$\text{且 } S_{p1} = S_{p2} = 0, \quad A_c = 0$$

3. 在求解完壓力修正之後，需讓邊界相鄰的網格滿足質量守恆定理：

$$\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \sum_f \dot{m}_f = 0$$

如圖 4.2 所示，便可透過上式求得邊界上流量為：

$$\dot{m}_{f,4} = -(\dot{m}_{f,1} + \dot{m}_{f,2} + \dot{m}_{f,3})$$

4.3.2 出口壓力邊界的速度計算

令外，在壓力邊界出口上的速度，則是透過對流邊界條件(Convective Boundary Condition)得來【20】，其數學式子為：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_c \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.23)$$

經離散後可得下列式：

$$\frac{\phi_B^n - \phi_B^o}{\Delta t} + u_c \frac{\phi_B^n - \phi_C^o}{\Delta z} = 0 \quad (4.24)$$

上式中的上標 n, o 分別表示新與舊的值，而下標 B, C 則代表的是邊界與其相鄰的網格，故可將方程式整理成下式：

$$\phi_B^o = \frac{\phi_B^o + Cr \phi_C^n}{1 + Cr} \quad (4.25)$$

其中的 Cr 為 Courant Number，定義為 $Cr = \frac{u_c \Delta t}{\Delta z}$ 。

透過 4.25 的外差式便可得到邊界上的外插速度： $u_b \vec{i} + v_b \vec{j} + w_b \vec{k}$

接著，透過前一節計算得到的壓力邊界上的流量來修正邊界上的速度：

$$\vec{V}_b = \frac{\dot{m}_{f,4}}{\rho(u_b S_x + v_b S_y + w_b S_z)} (u_b \vec{i} + v_b \vec{j} + w_b \vec{k}) \quad (4.26)$$

4.4 固定牆邊界條件

在牆的部份，其物理條件為無滑移邊界條件(No Slip condition)。為了計算在邊界旁邊網格的剪應力，我們必需先計算出平行於壁面上的速度 \vec{V}'' 。但在此首先，我們需先找出平行壁面的向量 \vec{S}'' 和相對速度 \vec{V} 。(圖 4.3)

(1) 平行壁面的向量 \vec{S}'' ：我們在計算時，垂直壁面的法向量我們定義為：

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j}。因此平行壁面向量可表示為 $\vec{S}'' = -S_y \vec{i} + S_x \vec{j}$$$

(2) 相對速度 \vec{V} ：相鄰邊界網格其速度向量和邊界上速度向量的差值，即

$$\vec{V} = \vec{V}_p - \vec{V}_b = (u_p - u_b) \vec{i} + (v_p - v_b) \vec{j} = (\Delta u) \vec{i} + (\Delta v) \vec{j}$$

其中 \vec{V}_p ：相鄰壁面網格的速度
 \vec{V}_b ：壁面速度, 在靜止的牆則 $\vec{V}_b = 0$

而平行於壁面的速度 \vec{V}'' 即為 \vec{V} 在 \vec{S}'' 上的投影，其可表示如下：

$$\vec{V}'' = \frac{\vec{V} \cdot \vec{S}''}{|\vec{S}''|^2} \vec{S}'' \quad (4.27)$$

透過上式，我們可將其整理為如下式：

$$\vec{V}'' = (\Delta u S_y S_y - \Delta v S_x S_y) \vec{i} + (\Delta v S_x S_x - \Delta u S_x S_y) \vec{j} \quad (4.28)$$

4.5 PISO 演算流程

對於本文中所採用的整個 PISO 演算流程，其表述如下：

步驟 1：給定初始邊界值。

步驟 2：修正進口邊界上速度、流量。

步驟 3：求解動量方程式，得到速度 \vec{V}^* 。

步驟 4：求解第一次壓力修正方程以得到 p' ，並進而求出第一次修正過後的

速度、壓力和流量 $\vec{V}^{**}, P^{**}, \dot{m}_f^{**}$ 。

步驟 5：求解第一次壓力修正方程以得到 p'' ，並進而求出第一次修正過後的

速度、壓力和流量 $\vec{V}^{***}, P^{***}, \dot{m}_f^{***}$ 。

步驟 6：計算壓力邊界上的流量。

步驟 7：上述的步驟 2 至步驟 6 為一個完整的 Time step 的流程，因此重複步驟 2 至 6 直到達到所求解的時間，最後將結果輸出，整個 PISO 流程在圖 4.4 中描述。



第五章、無閥型微幫浦簡易理論

本章的內容主要是簡介無閥型微幫浦理論。在 5.1 節我們先簡介關於壓電薄膜位移的計算方式。在 5.2 節裡我們提出了三種方式針對本文所模擬的無閥式微幫浦的效率估算方式。在 5.3 節裡則是探討 Nozzle/Diffuser 元件的壓力係數估算方式。最後，關於單腔微幫浦的數學理論則在 5.4 節裡描述。

5.1 壓電式幫浦的薄膜振動模擬

Fan 【8】將流體與結構力學整合 fluid-membrane Coupling 並提出了解析解，其研究中指出壓電型微幫浦的壓電薄膜振動的數學模式是一個複雜的偏微分方程式，其包含了腔體壓力、壓電材料造成的週期性作用力和腔體(Diaphragm)本身的振動(圖 5.1)，如下所示：

$$D\nabla^4 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f_e - P \quad (5.1)$$

其中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 為腔體(Diaphragm)的材料係數。

E	Diaphragm 基材的楊式係數(Elastic modulus)
V	Diaphragm 壓電片基材浦松比(Poisson ratio)
H	Diaphragm 壓電片基材的厚度(Thickness of membrane)
ρ	Diaphragm 壓電片基材的密度(Density of membrane)

而等號右手邊的 f_e 為一週期性的作用力，其計算需透過壓電材料的壓電係數和電場以求之。而右手邊第二項的 P 為壓力，壓力的計算必須在每個時間點(Time Step)下，透過求解流場得到。但求解(5.1)式太過複雜，因此一般在模擬中，對於壓電薄膜的位移近似提出了不同的方式：

➤ fluid-membrane Coupling

Fan 【12】等人以 CFD-ACE 模擬方形壓電型微幫浦，將(5.1)式簡化為一維的問題，將電場、壓電片的振動和流體力學做整合，所使用數學模式包含了壓電薄膜振動方程式、Navier-Stokes 方程式和連續方程式，並依此求解計算出了在不同頻率下的薄膜振動曲線。儘管如此，在求解圓形壓電薄膜的位移仍是一個難題。

➤ FSI Module(Fluid-Thermo-Structure Module)

FSI 模組是一個應用來處理液固界面的問題，1997 年 Athavale 【9】以及 2007 年 Jeong 【15】均曾使用 CFD-ACE 的 FSI 模組模擬 Stemme 型的微幫浦。FSI 的原理是求解完流場之後，接著求解固體振動方程式並算出位移量，接著重建網格，

直到流場求解出的速度和固體振動方程式求解出的速度在液固的交界面上相同，才繼續往下一個 Time Step 計算。因此模組在流場的計算上需要透過移動網格的模組。

上述的方式計算上都需要其解流場和固體振動，然而在模擬中為了簡化問題僅為流場的問題，因此亦有前人採用不同的假設曲線來近似為壓電薄膜的振動，如圖 5.2 所示：

➤ Timoshenko 假設：

Timoshenko 【25】在 1959 年曾提出圓形平板的振動可近似於一個四次曲線，

其數學式可表示如下：
$$Z(r) = d_{MAX} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)^2 \quad (5.2)$$

➤ 二次曲線(Parabolic Curve)：

而對於圓形壓電薄膜，於文獻【15】中假設在極座標軸對稱條件之下，位移量為一隨半徑變化的二次多項式： $Z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2$

在中心點有最大位移量 d_{MAX} ；而在薄膜最外圍位移量則為 0；且在中心點上需滿足軸對稱邊界條件，故其一階微分為 0。因此可得條件為：

$$\begin{cases} r = 0, & z = 1 \\ r = r_0, & z = 0 \\ r = 0, & \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

代入邊界條件後故可得圓形薄膜的位移量：
$$z(r) = d_{MAX} \cdot \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right] \quad (5.3)$$

➤ 梯形曲線(Trapezoid Curve)：

文獻【15】中亦有採用梯形的假設曲線，以增加壓電薄膜所掃過的體積：

$$Z_2(r,t) = \begin{cases} d_{MAX} & , IF r < r_1 \\ d_{max} \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} & , IF r_1 < r < r_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

其中 r_0 為圓形腔的半徑， r_1 為壓電薄膜的半徑。

	採用的曲線近似	文獻
Fluid & Structure	fluid-membrane Coupling	Fan 【12】，
	FSI	Athavale 【9】，Jeong 【15】
Fluid	Timoshenko	Nguyen 【10】，Jeong 【15】

	Parabolic Curve	羅卓錚【11】，Luo【21】
	Trapezoid	羅卓錚【11】

表 5.1 前人對於壓電薄膜振動不同的近似方式

5.2 壓電式微幫浦的效率計算

一般而言，幫浦效率 η_p 的定義為淨流量與可動件掃過體積的比值，因此

$$\eta_p = \frac{Q_{net}}{2V_{MAX}} = \frac{\text{一個週期內的淨流量}}{2 \times \text{壓電薄膜由水平至上死點所掃過的最大體積}} \quad (5.5)$$

1993 年，Stemme et. al.【3】針對此無閥型微幫浦推導出計算效率的關係。首先，其假設在相同背壓的情況下，由於壓電薄膜的週期性振動，因此腔體內的體積變化亦會隨時間而變化：

$$V(t) = V_{MAX} \sin(2\pi ft) \quad (5.6)$$

其中 V_{MAX} 為薄膜於水平位置向上至上死點時，所掃過的體積。而 f 為振動頻率。因此經過一個週期的作動之後，便可得出流體的淨流量值【3】：

$$V_0 = 2V_x \left[\frac{(\eta_{nd})^{1/2} - 1}{(\eta_{nd})^{1/2} + 1} \right] \quad (5.7)$$

其中 $\eta_{nd} = \frac{\zeta_d}{\zeta_n}$ ， η_{nd} 所代表意義為分別經由 Diffuser 方向和 Nozzle 方向之壓力係數的比值。

因此，可得到在相同背壓條件下，幫浦效率僅跟 η_{nd} 有關：

$$\eta_p = \frac{V_0}{2V_x} = \frac{(\eta_{nd})^{1/2} - 1}{(\eta_{nd})^{1/2} + 1} \quad (5.8)$$

在其假設下，幫浦效率僅跟一常數 η_{nd} 有關。然而在非穩態的流場下， η_{nd} 並不為一個常數，因此如何僅透過 Nozzle/Diffuser 的幾何分析計可得到一個常數 η_{nd} 是為一個課題。而在文獻【13】，曾等人亦針對於微幫浦的效率計算提出了一個積分式，其積分式考慮整個週期的 η_{nd} 值，將其整理後可表示成如下：

$$\eta = \frac{f}{4} \int_0^T [\eta_{nd}^{1/2} - 1] \cdot \sin(2\pi ft) dt \quad (5.9)$$

其中 T 即為一個週期， $T = \frac{1}{f}$ 。

5.2.1 真實效率 η_{real} 的計算：

在本文模擬中，亦假設振動腔的週期運動為三角函數，因此便可估算以不同

壓電薄膜的振動曲線近似下，幫浦的真實效率。

■ 二次曲線(Parabolic Curve)：

$$Z_1(t) = -d_{MAX} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \cdot \cos(2\pi ft) \quad (2.3)$$

薄膜由水平向上掃過的最大體積為：

$$\begin{aligned} \nabla_{MAX} &= \iint d_{MAX} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} d_{MAX} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \cdot r dr d\theta \\ \nabla_{MAX} &= \frac{1}{2} \pi \cdot d_{MAX} \cdot r_0^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

■ 梯形曲線(Trapezoid Curve)

$$Z_2(t) = \begin{cases} -d_{MAX} \cdot \cos(2\pi ft) & , IF r < r_1 \\ \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot \cos(2\pi ft) & , IF r_1 < r < r_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

薄膜由水平向上掃過的最大體積為：

$$\begin{aligned} \nabla_{MAX} &= \int_0^{r_1} d_{MAX} \cdot dA + \int_{r_1}^{r_0} \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} d_{MAX} \cdot r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_0} \frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot r dr d\theta \\ \nabla_{MAX} &= \pi d_{MAX} \cdot r_1^2 + \frac{2\pi \cdot d_{MAX}}{r_0 - r_1} \left(\frac{1}{6} r_0^3 - \frac{1}{2} r_0 r_1^2 + \frac{1}{3} r_1^3 \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

■ 混合曲線(Blending Curve)：

在本中亦採用以 α 值來混合兩種曲線，其中 α 值為 0~1 之間。因此混合曲線掃過的最大體積為：

$$\nabla_{MAX} = \alpha \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot d_{MAX} \cdot r_0^2 + (1 - \alpha) \cdot \left[\pi d_{MAX} \cdot r_1^2 + \frac{2\pi \cdot d_{MAX}}{r_0 - r_1} \left(\frac{1}{6} r_0^3 - \frac{1}{2} r_0 r_1^2 + \frac{1}{3} r_1^3 \right) \right] \quad (5.12)$$

因此本文研究中計算真實效率 η_1 可表示成下列式子：

$$\eta_{real} = \frac{Q_{net}}{\alpha \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot d_{MAX} \cdot r_0^2 + (1 - \alpha) \cdot \left[\pi d_{MAX} \cdot r_1^2 + \frac{2\pi \cdot d_{MAX}}{r_0 - r_1} \left(\frac{1}{6} r_0^3 - \frac{1}{2} r_0 r_1^2 + \frac{1}{3} r_1^3 \right) \right]} \quad (5.13)$$

其中 Q_{net} 為在模擬所得到的一個週期內的淨流量。

5.2.2 效率 η_1 的計算：

由圖 5.3 可知，幫浦左端(Q1)和右端(Q2)的流量前半個週期(排水模式)，可近似為一個 Sin 的函數，因此我們假設幫浦在左右兩端的流量為：

$$Q_1(t) = Q_{1,MAX} \sin(2\pi ft) = A_1 V_{1,MAX} \sin(2\pi ft) \quad (5.14-A)$$

$$Q_2(t) = Q_{2,MAX} \sin(2\pi ft) = A_2 V_{2,MAX} \sin(2\pi ft) \quad (5.14-B)$$

因此我們定義幫浦流量 Q_{PUMP} 右端(出口)流量扣掉左端(入口)流量

$$\begin{aligned} Q_{PUMP} &= Q_2(t) - Q_1(t) \\ &= [A_2 V_{2,MAX} - A_1 V_{1,MAX}] \cdot \sin(2\pi ft) = A_1 V_{1,MAX} \left[\frac{A_2 V_{2,MAX}}{A_1 V_{1,MAX}} \right] \cdot \sin(2\pi ft) \\ &= A_1 V_{1,MAX} \left[\frac{Q_{2,MAX}}{Q_{1,MAX}} \right] \cdot \sin(2\pi ft) \end{aligned}$$

在此我們定義流量比例為：
$$\frac{Q_{2,MAX}}{Q_{1,MAX}} \approx \frac{Q_2(t)}{Q_1(t)} = \beta(t)$$

將 $\beta(t)$ 其代入上式後可得 $\Rightarrow Q_{PUMP} = A_1 V_{1,MAX} [\beta(t) - 1] \cdot \sin(2\pi ft) \quad (5.15)$

而一個週期內的淨流量即為幫浦流量 Q_{PUMP} 於排水模式下，半個週期的積分，可表示如下式：

$$Q_{NET} = \frac{1}{2} \int_0^T Q_{PUMP} dt = \frac{1}{2} \int_0^T A_1 V_{1,MAX} [\beta(t) - 1] \cdot \sin(2\pi ft) dt \quad (5.16)$$

壓電薄膜掃過的體積流率 $\frac{\partial V}{\partial t}$ ，大略可近似為兩倍入口流量：

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = Q_1(t) + Q_2(t) \approx 2Q_1(t)$$

因此薄膜由水平位置掃至上死點的體積 V_{MAX} 即可表示為：

$$V_{MAX} = \frac{Q_{1,MAX} + Q_{2,MAX}}{2\pi f} \approx \frac{(2V_{1,MAX} A_1)}{2\pi f} = \frac{V_{1,MAX} A_1}{\pi f} \quad (5.17)$$

因此幫浦效率 η_1 可表示為：

$$\eta_1 = \eta_{PUMP} = \frac{Q_{NET}}{2V_{MAX}} = \frac{\int_0^T V_{1,MAX} A_1 [\beta(t) - 1] \cdot \sin(2\pi ft) dt}{2 \cdot \frac{V_{1,MAX} A_1}{\pi f}}$$

最後可得效率為，即圖 5.4 中的積分範圍：

$$\eta_1 = \frac{\pi f}{4} \int_0^T [\beta(t) - 1] \cdot \sin(2\pi f t) dt \quad (5.18)$$

其中 β : 每一瞬時下的流量比值

5.2.3 效率 η_2 的計算：

圖 6.28 所表示的為流量比例 $\beta(t)$ 在一個週期內隨時間變化，由圖可知， $\beta(t)$ 在排水模式時，大部份時間均為某個值，因此我們取平均後可得到一個固定的 β 值，稱其為 β_1 。同理可得，在吸水模式亦可得到一個固定的 β 值，稱其為 β_2 。

而 β 值計算則由我們分別取吸水模式與排水模式的平均值。因此，我們將常數 β_1 和 β_2 代入先前所推導的式子後得：

$$\eta_2 = \eta_1 = \frac{\pi f}{4} \int_0^{T/2} [\beta_1 - 1] \cdot \sin(2\pi f t) dt + \frac{\pi f}{4} \int_{T/2}^T [\beta_2 - 1] \cdot \sin(2\pi f t) dt$$

積分後，效率可表示為：

$$\eta_2 = \frac{1}{4} (\beta_1 - \beta_2) \quad (5.19)$$

5.2.4 效率 η_3 的計算：

幫浦左端(Q1)和右端(Q2)的流量前半個週期(排水模式)，可近似為一個 SIN 的函數，而在吸水模式則為剛好相反的 SIN 函數，因此假設：

$$Q_1(t) = \begin{cases} A_1 \sin(2\pi f t) & , 0 < t < T/2 \\ A_2 \sin(2\pi f t) & , T/2 < t < T \end{cases} \quad (5.20-A)$$

$$Q_2(t) = \begin{cases} A_2 \sin(2\pi f t) & , 0 < t < T/2 \\ A_1 \sin(2\pi f t) & , T/2 < t < T \end{cases} \quad (5.20-B)$$

因此一個週期內的淨流量可表示為：

$$\begin{aligned} Q_{NET} &= \int_0^{T/2} Q_1(t) - Q_2(t) dt = \int_0^{T/2} (A_1 - A_2) \cdot \sin(2\pi f t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi f} (A_1 - A_2) = \frac{1}{\pi f} (A_1 - A_2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\text{而壓電薄膜所掃過的體積可表示為：} \quad \nabla_{MAX} = \frac{A_1 + A_2}{2\pi f} \quad (5.22)$$

因此效率可表示為：

$$\eta_3 = \frac{Q_{NET}}{2\nabla_{MAX}} = \frac{\frac{1}{\pi f} (A_1 - A_2)}{2 \cdot \frac{A_1 + A_2}{2\pi f}} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{A_1}{A_2} - 1}{\frac{A_1}{A_2} + 1}$$

經推導後，可知效率僅跟我們假設曲線的振幅有關，其為 $\beta_3 = \frac{A_1}{A_2}$ 代入上式後得

$$\eta_3 = \frac{\beta_3 - 1}{\beta_3 + 1} \quad (5.23)$$

5.2.5 效率計算的比較：

在 Stemme 所提的效率計算式，其估算公式只能用於相同背壓情況下，且其所導出的式子中，發現影響無閥式微幫浦效能的關鍵在於 Nozzle/Diffuser 元件的壓力損失比，即 Diffuser Efficiency： η_{np} 。

然而上幾節所提的效率計算 $\eta_{real}, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ 等的計算，都是可以在不同背壓下都可使用的公式，且估算公式與前人所推導的式子極為類似，唯一的不同點在於我們所使用的並非是 Diffuser Efficiency，而是流量比 β 。而目前我們已知的是在相同背壓下：

$$\beta = (\eta_{nd})^{1/2} \quad (5.24)$$

然而在不同背壓的情況下，流量比 β 與 η_{np} 呈現怎樣的關係是我們想要了解的。

相同背壓下所使用的 η_{nd}	Stemme 【3】 (1993)	曾 【13】 等人(2003)
	$\eta_p = \frac{(\eta_{nd})^{1/2} - 1}{(\eta_{nd})^{1/2} + 1}$	$\eta_1 = \frac{\pi \cdot f}{4} \int_0^T [\eta_{nd}^{1/2} - 1] \cdot \text{Sin}(2\pi ft) dt$
本文研究 β	$\eta_3 = \frac{\beta_3 - 1}{\beta_3 + 1}$	$\eta_1 = \frac{\pi \cdot f}{4} \int_0^T [\beta(t) - 1] \cdot \text{Sin}(2\pi ft) dt$

表 5.2 比較不同計算效率的方式

5.3 Nozzle/Diffuser 元件的探討

5.3.1 穩態方形截面 Nozzle/Diffuser 探討

在本文研究所使用的 Nozzle/Diffuser 元件為方形截面，因此對於方形截面的 Nozzle/Diffuser 元件的分析，我們參考採用下列的方式來分析【18】。

首先，以 Ollson 所使用 Diffuser-Element 的理論，可將 Nozzle/Diffuser 元件分為三個區間，如圖 5.5 所示：

而在 Diffuser 與 Nozzle 元件之間的壓力損失可表示為：

$$\text{Diffuser : } \Delta P_{diff} = \Delta P_{d,1} + \Delta P_{d,2} + \Delta P_{d,3} \quad (5.25-A)$$

$$\text{Nozzle} : \Delta P_{nozzle} = \Delta P_{n,1} + \Delta P_{n,2} + \Delta P_{n,3} \quad (5.25-B)$$

又壓力降(pressure loss)可表示為： $\Delta P = K \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$

其中 K 為壓降係數， ρ 為密度， \bar{U} 為上游速度。故將上式代入(5.25)式中得

$$\text{Diffuser-Direction} : \Delta P_{diff} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}_1^2 K_{d,1} + \Delta P_{d,2} + \frac{1}{2} \rho \bar{U}_2^2 K_{d,3} \quad (5.26-A)$$

$$\text{Nozzle-Direction} : \Delta P_{nozzle} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}_2^2 K_{n,1} + \Delta P_{n,1} + \frac{1}{2} \rho \bar{U}_1^2 K_{n,3} \quad (5.26-B)$$

在此，我們定義的壓力係數均以喉部速度，即 $K = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}_1^2}$

又根據流量守衡， $\bar{U}_1 A_1 = \bar{U}_2 A_2$ ，故將其代入(5.26)式可整理成：

$$K_d = \frac{\Delta P_{diff}}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}_1^2} = K_{d,1} + K_{d,2} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 K_{d,3} \quad (5.27-A)$$

$$K_n = \frac{\Delta P_{nozzle}}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}_1^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3} \quad (5.27-B)$$

由上式，我們便可就三個區間分別去探討其壓力係數。而在入口區間，當入口區段為直角時，有較大的壓力損失，大約為 0.4。然而入口區段若有導圓角，壓力損失則較小。圖 5.6 所顯示的即為有無導角對壓力係數的影響。

而在出口區間，則以 Free Jet 假設，因此 K 值為 1。而 Region 2 的計算則較為複雜，在本文將採用兩種不同的數學模式來估算 Region 2，在下節會做完整的計算。

Region 1 (Entrance)	Region 2 (Nozzle/Diffuser)	Region 3 (Exit)
$K_{d,1}, K_{n,1}$	$K_{d,2}, K_{n,2}$	$K_{d,3}, K_{n,3}$
0.4 (直角)	Model A、Model B	1

表 5.3 Nozzle/Diffuser Element 中三個區間的 K 值

5.3.2 Region 2 的計算-Model A：

Region 2 的計算可透過 White 【22】提出的方式來求之：

如圖 5.10 所示，由伯努力定理可知，當在 Diffuser 流向時：

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + Loss \quad (5.28)$$

因此管道損失可表示成 $Loss = P_1 - P_2 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 - \frac{1}{2} \rho V_2^2$

故 Region 2 的壓力係數可表示為

$$K = \frac{Loss}{\frac{1}{2} \rho V_1^2} = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2} \rho V_1^2} + 1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}$$

由 $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ， $\frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2}$ ，故 $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$

在此定義， $C_p = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho V_1^2}$ 且代入上式

得 Diffuser 的損失係數為

$$K_d = 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - C_p \quad (5.29-A)$$

同理，Nozzle 方向的損失係數：

$$K_n = \frac{Loss}{\frac{1}{2} \rho V_2^2} = C_p + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 \quad (5.29-B)$$

故只需知道所採用 Nozzle/Diffuser 的幾何，並透過查表便可得到其 C_p 值。但可惜的是，一般管道摩擦係數的表僅提供一個常數值 C_p ，而在不同流量下的 C_p 值是會隨之改變的。故在本文中，我們也實地去做一個 Nozzle/Diffuser 的模擬，透過模擬所得 C_p 值進而求得壓力損失係數 K_n, K_d 。本文將在稍後的章節內描述詳細的模擬幾何與結果。

5.3.3 Region 2 的計算-Model B：

令一種的計算則是可透過 Yang 【18】提出的方式來求之：

$$\Delta P_2 = \int_0^L 2f(x) \frac{1}{D_h(x)} \rho V^2(x) dx \quad (5.30)$$

其中， $f(x)$:管道摩擦係數， $D_h(x)$ 為水力直徑， $V(x)$:為平均速度

上式中，方管水力直徑為四倍的面積除上週長，即：

$$D_h(x) = \frac{4 \times \text{截面積}}{\text{週長}} = \frac{4H \cdot W(x)}{2(H + W(x))} \quad (5.31)$$

其中 H :為深度， $W(x)$ 為寬度，在不同位置下寬度會改變，因此會有不同的水力

直徑。

$V(x)$ 的定義為： $V(x) = \frac{Q_{in}}{W(x) \cdot h}$ 其中 Q_{in} 則為流量。

而 $f(x)$ 計算則較為複雜，在【18】中所採用的方管管道摩擦係數的估算為(圖 5.7A)：

$$f = 24(1 - 1.3553\alpha + 1.9467\alpha^2 - 1.7012\alpha^3 + 0.9564\alpha^4 - 0.2537\alpha^4) / \text{Re} \quad (5.32)$$

其中上式所使用的 $\alpha = \frac{H}{W(x)}$ ，而 $\text{Re} = \frac{\rho \cdot V(x) \cdot D_h(x)}{\mu}$ 。

因此我們將其全部代入(5.30)式計算積分，便可得到 Region 2 的壓力損失，如圖 5.7B 所示。我們採用上述的方式且將其應用在本文研究所使用的 Nozzle/Diffuser 元件。本文研究中的 Nozzle/Diffuser 幾何張角 7 度，喉部寬度為 100 μm ，長度為 1000 μm ，深度為 200 μm 。透過(5.27)式的計算，便可得到 K_n, K_d 值。圖 5.8 所表示的是 K_n, K_d 與雷諾數 Re 的關係。其中雷諾數的參考速度以喉部的速度，而參考長度為喉部的水力直徑。

有了上式的資訊，便可計算得到所欲知道的 Nozzle/Diffuser Efficiency，其表示為：

$$\eta_{nd} = \frac{K_n}{K_d} = \frac{K_{d,1} + K_{d,2} + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 K_{d,3}}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3}} \quad (5.33)$$

Nozzle/Diffuser Efficiency 與雷諾數的關係表示在圖 5.9 中。

5.4 無閥型微幫浦的簡易理論(Lump Model)

1998，Ullmann【6】首度針對無閥型微幫浦提出了數學模式，其構想利用透過腔體壓力的變化，而將單腔微幫浦分成三個區間。如圖 5.11 所示：

- 排水模式($P_c > P_o > P_i$)：腔體中心壓力大於兩端出口
- 吸水模式($P_o > P_i > P_c$)：腔體中心壓力小於兩端出口
- 過渡區($P_o > P_c > P_i$)：腔體中中心壓力介於兩端出口之間

在此三個區間內，均須滿足連續方程式，便可求得腔體中心點壓力，進而求得兩端出口流量。

$$Q_1 + Q_2 = \nabla_{\max} w \cdot \text{Sin}(wt) \quad (5.34)$$

【兩端出口流量】 【振動腔體掃過的流量】

振動腔體掃過的流量可透過我們先前對於壓電薄膜的假設來求得，其中， w

為振動腔體內頻率， ∇_{\max} 為振動腔掃過的最大體積。

兩端出口流量則和 Nozzle/Diffuser 的壓力差有關，即

$$Q = C\sqrt{\Delta p} \quad (5.35)$$

其中上述的 $C = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}K\rho}}$ ， A_n 為 Nozzle/Diffuser 的喉部面積， ρ 為流體密度，

K 則為壓力係數。因此，如果流向為 Nozzle Direction，則 $K = K_n$ ；如果流向為 Diffuser Direction， $K = K_d$ 。故可得：

$$\text{Nozzle Direction} : C_L = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}K_n\rho}}, Q_n = C_L\sqrt{\Delta p} \quad (5.36-A)$$

$$\text{Diffuser Direction} : C_H = \frac{A_n}{\sqrt{\frac{1}{2}K_d\rho}}, Q_d = C_H\sqrt{\Delta p} \quad (5.36-B)$$

因此便可求得三個區間內的連續方程式和流量的關係式【6】：

■ 排水模式($P_c > P_o > P_i$)：

如圖 5.11A 所示，左端出口為 Nozzle Direction，右端出口為 Diffuser Direction，因此連續方程式可表示為：

$$C_L\sqrt{P - P_{in}} + C_H\sqrt{P - P_{out}} = \nabla_{\max} \cdot w \cdot \text{Sin}(wt) \quad (5.37)$$

透過上式便可求解出左右端出口流量：

$$Q_1 = \frac{-C_L^2 \nabla_{\max} w \text{Sin}(wt) + C_H C_L \sqrt{(C_H^2 - C_L^2) \Delta P + (\nabla_{\max} w \text{Sin}(wt))^2}}{C_H^2 - C_L^2}$$

$$Q_2 = \frac{C_H^2 \nabla_{\max} w \text{Sin}(wt) - C_H C_L \sqrt{(C_H^2 - C_L^2) \Delta P + (\nabla_{\max} w \text{Sin}(wt))^2}}{C_H^2 - C_L^2} \quad (5.38-A, 5.38-B)$$

■ 吸水模式($P_o > P_i > P_c$)：

如圖 5.11B 所示，左端出口為 Diffuser Direction，右端出口為 Nozzle Direction，因此連續方程式可表示為：

$$-C_H\sqrt{P_{in} - P} - C_L\sqrt{P_{out} - P} = \nabla_{\max} \cdot w \cdot \text{Sin}(wt) \quad (5.39)$$

左右兩端出口流量分別為為：

$$Q_1 = \frac{C_H^2 \nabla_{\max} w \sin(\omega t) + C_H C_L \sqrt{(C_H^2 - C_L^2) \Delta P + (-\nabla_{\max} w \sin(\omega t))^2}}{C_H^2 - C_L^2}$$

$$Q_2 = \frac{-C_L^2 \nabla_{\max} w \sin(\omega t) - C_H C_L \sqrt{(C_H^2 - C_L^2) \Delta P + (-\nabla_{\max} w \sin(\omega t))^2}}{C_H^2 - C_L^2}$$

(5.40-A, 5.40-B)

■ 過渡區($P_o > P_c > P_i$) :

如圖 5.11C，左端出口為 Nozzle Direction，右端出口為 Nozzle Direction，因此連續方程式可表示為：

$$C_L \sqrt{P - P_{in}} - C_L \sqrt{P_{out} - P} = \nabla_{\max} \cdot w \cdot \sin(\omega t) \quad (5.41)$$

左右兩端出口流量分別為：

$$Q_1 = \frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t) + \sqrt{\frac{1}{2} C_L^2 \Delta P - \frac{1}{4} (\nabla_{\max} w \sin(\omega t))^2} \quad (5.42-A)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{1}{2} C_L^2 \Delta P - \frac{1}{4} (\nabla_{\max} w \sin(\omega t))^2} \quad (5.42-B)$$

其中在(5.38)、(5.40)、(5.42)式中的 $\Delta P = P_{out} - P_{in}$ ，即背壓。

應用此數學模式下計算流量 Q_1, Q_2 ，在求解連續方程式(5.37)、(5.39)、(5.41)需先知道壓力係數 K_n, K_d 值。而在前一節裡頭可知， K_n, K_d 值卻又與計算得出的流量有關。因此為了簡化此問題，本文研究中， K_n, K_d 值均假設為振動腔體掃過流量的 1/2，即

$$K_n = f(Q_n) \approx f\left(\frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t)\right)$$

$$K_d = f(Q_d) \approx f\left(\frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t)\right)$$

第六章、結果分析與討論

本章的內容主要是結果與討論。6.1 節會先對本文所使用的壓力邊界條件做驗證。6.2 節則為本文研究之微幫浦的模擬結果，包含流量與效率的分析。而關於微幫浦的理論分析則在最後 6.3 節中描述

6.1 壓力邊界的驗證

在本文研究中，出口兩端需用到定壓邊界條件。為了驗證在 4.3 節內所提到的壓力邊界條件，因此我們先以簡單的 2 維分岐管做測試【23】。其測試為分為兩個，第一個測試先以 T 形管來測試不同雷諾數下流場的變化，第二測試則是 Y 型管來觀察在不同出口壓差下的流量差異。詳細內容會接下來文中描述。

6.1.1 T 型管的測試

首先的測試是比較 2000 年 Kelkar【23】所做 T 型管的數值分析結果，其幾何與邊界如圖 6.1A 所示，進口位於下端，而出口則分別在上端與右端。進口的邊界條件是給定速度為全展流(Fully Develop)；而兩個出口則給定相同的壓力為邊界條件。在此測試中分別給定不同的雷諾數(10~400)來觀察出口流量比例 F_i 的變化，而 F_i 的定義為：

$$F_i = \frac{\text{上端出口的流量}}{\text{進口流量}} = \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_m}$$

而雷諾數的定義為 $Re = \rho V_c w / \mu$ 。 ρ 為流體密度， μ 為流體黏滯係數， w 為入口寬度，而 V_c 則為進口中心點的速度，即全展流的最大速度。

本測試的網格在主流道的部份為 20*120 格，而側流道的部份為 20*60，總網格數為 3600 格，如圖 6.1B 所示。模擬的結果如圖 6.2 所示，結果顯示當雷諾數增大時， F_i 亦會隨之增加，本文所使用的壓力邊界的結果和文獻【23】的結果極為穩合。

而在不同雷諾數下，其流場結構亦不相同，觀察圖 6.3 可發現當雷諾數較小時，並未產生任何回流；而當雷諾數較大時，則在測流道的部份有較大的回流。此結果亦與文獻【23】極為類似。

6.1.2 Y 型管的測試

再者，我們做了第二個測試，其幾何形狀為 Y 形管，如圖 6.4 所示，進口位於圖中左端，而兩個出口則在右端，分岐管的角度為 45 度。進口邊界仍以全展流為邊界條件，出口邊界則是壓力邊界。在此測試中，主要是觀察在不同出口壓力差下流場的變化。因此保持雷諾數為定值($Re=500$)，而給定兩端出口不同的壓力，並觀察在不同壓力差下 F_i 的變化，而在此測試中定義：

$$F_i = \frac{\text{右側上端出口流量}}{\text{進口流量}} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_m}$$

而壓力差的定義則為： $dp = (P_1 - P_2) / (0.5 \rho \bar{U}^2)$ ，其中 P_1 為右上端出口壓力，而 P_2 為右下端出口壓力， \bar{U} 為進口端的平均速度。而在本文的雷諾數則定義為 $Re = \rho \bar{U} w / \mu$ ，其參考速度 \bar{U} 為進口端的平均速度。

本測試的 Y 型管網格如圖 6.5 所示，上下半部對稱，網格數均為 20*138 格，總網格數 5520 格。本文測試分別在不同壓力差下 $dp = 0、0.5、1.0$ 和 2.0 中，流量比 F_i 的差異。而結果如圖 6.6 所示，由圖中可知道當壓力差越大，流量的差異越大，結果與文獻【23】還算符合。

而流場結構可從圖 6.7 中得知，在背壓相同壓力差下，並未產生回流；但當壓差 $dp = 2.0$ 時，則在下半部有明顯的回流產生，與物理現象穩合。

透過上述兩個測試的驗證，可知本文所採用的壓力邊界具有一定的準確性。

6.2 不同背壓下的 3D 模擬結果

本文研究的模擬幾何主要是以 1997 年 Ollson【6】所實驗的微幫浦，其尺寸完全按照當年實體，其實驗的幾何形狀如圖 6.8 所示，左右端為兩個出口，兩端出口管徑為直徑 1.5mm，中間則為圓形的振動腔體，其直徑為 6mm，深度 0.2mm，在振動腔體上放置一圓形壓電薄膜，其直徑為 4mm。兩端出口與振動腔體透過 Nozzle/Diffuser 元件來連結，其長度為 1mm，角度為 7 度，喉部寬度為 0.1mm。網格建立如圖 6.8-6.10 所示。

在本文模擬中，為了減少計算的時間，因此模擬幾何為真實的一半，而令一半則以對稱邊界條件，其幾何形狀如圖 6.8 所示。而對於中央壓電薄膜的振動則採用進口速度來取代移動邊界，兩端出口則設為定壓邊界條件。

6.2.1 網格測試

本文研究中網格數目分別測試 65288、117232、210258 三種數量的網格。而壓電薄膜考慮其為週期性運動，在網格數量為 65288、117232 模擬上將一個週期分為 400 Time Step，而在網格數量較多的 210258，則將週期分為 800 Time Step，因此在模擬中的真實時間 Δt 為：

$$\Delta t = \frac{1}{400f}, \text{ Mesh} = 65288、117232$$

$$\Delta t = \frac{1}{800f}, \text{ Mesh} = 210258$$

其中 f 為壓電片的頻率，本文模擬中所採用壓電頻率為 2200Hz。

在本文研究中，會針對不同的出口背壓 (P_{PUMP}) 分析其流量的變化，背壓的定義為兩端出口的壓力差：

$$P_{PUMP} = P_o - P_i$$

其中 P_i 為左端出口壓力， P_o 為右端出口壓力。本文研究中考慮兩端不同出口背壓為 $P_{PUMP} = 1180、2360、2950、3540、4720、5310$ Pa。而每個案例上均計算 5 個週期。

6.2.2 考慮不同薄膜振動假設的流量結果

本文對於壓電薄膜的週期性運動，是以三角函數來假設，因此兩端出口的流量變化亦會類似三角函數的曲線，如圖 6.11-6.13 所示。而一個週期內出口淨流量

即為一個週期內 Q_2 的積分：

$$Q_{net} = \int_0^T Q_2 dt$$

其中 T 定義為一個週期所需的時間。

圖 6.14 為每個週期分別積分所得的一個週期內淨流量，由圖中可知，前幾個週期的淨量尚未達到一個準確的值，大約第 3 個週期以後的淨流量才會達到穩定的結果，因此本文中淨流量均是採用第五個週期的淨流量值。

由於對於壓電薄膜的振動是以假設的函數，因此本文首先參考文獻【11】中的方式，假設振動曲線為梯形和二次曲線，即方程式(2.3)、(2.4)式：

- 二次曲線(Parabolic Curve)：

$$Z_1(r, t) = -\left[1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right] \cdot d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) \quad (2.3)$$

- 梯形曲線(Trapezoid Curve)：

$$Z_2(r, t) = \begin{cases} -d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) & , IF r < r_1 \\ -\frac{r_0 - r}{r_0 - r_1} \cdot d_{MAX} \cdot \text{Cos}(2\pi f \cdot t) & , IF r_1 < r < r_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

圖 6.15 所表示的為淨流量與背壓之間的關係，圖中計算的結果和文獻【11】與實驗【6】有一段誤差。其原因則是因為假設的曲線也許和真實的振動並不是那麼相似，故造成此誤差。

為了解決先前的問題，因此本文考慮以梯形曲線和二次曲線的混合來近似，亦即方程式(2.5)式：

$$Z_3(r, t) = \alpha \cdot Z_1(r, t) + (1 - \alpha) \cdot Z_2(r, t) \quad (2.5)$$

結果如圖 6.16 所示，淨流量與背壓的關係和實驗較為接近，但在最大背壓則比實驗小了一點，約 10%的誤差。

令外，本文亦考慮不同網格於不同背壓下對流量的影響，結果如圖 6.17 所示，當網格數越多時，所得的淨流量越小。

6.2.3 流場結構分析

圖 6.19 與圖 6.20 顯示為在不同時間下，即 $t = 0.25T$ 與 $t = 0.75T$ 下，微幫浦的 3D 壓力場分佈圖。由圖中可大致了解微幫浦內壓力的分佈，當在 $t=0.25T$ 為排水模式，因此振動腔壓力大於兩端出口壓力；而當 $t=0.75T$ 時為吸水模式，故兩端壓力大於振動腔體壓力，與物理現象相符。

為了觀察 Nozzle/Diffuser 在不同情況下的流場結構，因此我們如圖 6.18 所示，取 $Z=0.0001\text{mm}$ 此截面來觀查流場的變化。

首先我們比較在不同模式下的流場變化。圖 6.21 即為我們所取截面在排水模式下的流場，從圖中可知在排水模式下，流體往外流出 Nozzle/Diffuser，因此會在靠近兩出口端的部份產生回流。而圖 6.23 則為吸水模式下的流場，可發現迴流則發生在振動腔體的部份。

圖 6.22 與圖 6.24 分別為當在排水模式下($t = 0.25T$)和吸水模式($t = 0.75T$)下的壓力分佈。從中可知，當在排水模式下，振動腔體有較大的壓力；而在吸水模式下，振動腔體的壓力則小於兩端出口，此也印證了我們在 5.4 節中所假設的理論，圖 6.27 與圖 6.28 為在相同背壓，一個週期的 Nozzle/Diffuser 流場變化，可知回流發生的位置即大小會隨著時間變化而改變。

接著，我們亦想知道在不同出口背壓下，流場是否有其它變化。由圖 6.25 為當背壓 5310Pa 時，排水模式下的流場。與圖 6.21 相比較可發現，在背壓為 0 情況下，腔體內靠近左側出口的部份產生一個回流區，如圖 6.21-B 所示；而當背壓 5310 時，則在腔體內靠近右側出口的部份產生一個回流，如圖 6.25-C 所示。圖 6.26 則為吸水模式下，背壓為 5310Pa 的流場圖。比較圖 6.23 可知，當排在排水模式下，不同背壓下的流場則無明顯的差異。

6.2.4 幫浦效率探討

- 真實效率的估算(η_{real})

在實驗中，微幫浦的真實效率較難得到，其原因在於缺乏壓電薄膜的振動所掃過的體積。而在模擬中，我們可以透過假設的壓電薄膜振動曲線以及模擬所得的淨流量來計算出微幫浦的真實效率，即方程式(5.13)式所示。圖 6.29 所顯示的是真實效率與背壓的關係，透過圖中可知真實效率會隨著背壓的增加而減少。

- 估計效率 η_2, η_3 估算

在早期前人對於幫浦效率的計算，是透過 Nozzle/Diffuser efficiency 的量測，求得常數 η_{nd} ，代入方程式(5.8)式估算，但此只能用在相同背壓的情況。在上一章中，本文推導出數種不同估算效率的方式，以流量比例 β (即 Q_2/Q_1)的結果來取代 η_{nd} ，便可計算在不同背壓下的效率，因此必須得到不同背壓下的常數 β 。

首先由模擬結果可得兩端出口的流量 Q_1, Q_2 ，圖 6.30 所示為一個週期內 β 隨壓電薄膜振動變化。可從圖中得知 β 為時間的函數。而從圖中觀察可知，在吸水模式下及排水模式下的 β 會大致趨近某個值，因此定義排水模式下的流量比常數為 β_1 ；吸水模式下的流量比常數為 β_2 ，其定義如下：

$$\text{排水模式} \quad : \quad \beta_1 = \frac{5}{2T} \int_{T/20}^{9T/20} \beta(t) \cdot dt$$

$$\text{吸水模式} \quad : \quad \beta_2 = \frac{5}{2T} \int_{11T/20}^{19T/20} \beta(t) \cdot dt$$

在不同背壓下均以上式運算，便可得到流量比常數(β_1, β_2)與背壓之間的關係，如圖 6.31 及圖 6.32 所示。

最後，將其代入(5.19)式和(5.23)式中，便得到估算的幫浦效率 η_2, η_3 (圖 6.33, 圖 6.34)。而所得的效率與真實相比極為類似，因此結果顯示 β_1, β_2 和幫浦效率有一定關係。因此我們期望能發展出一個數學模式來預測在不同背壓下的 β_1, β_2 ，便可透過此數學模式來估計效率，而不需再做整個微幫浦的模擬。

6.3 單腔微幫浦 Lump-Model 的理論分析：

本文中，欲建立單腔微幫浦理論以期能透過此理論預測 β_1, β_2 ，進而求得幫浦效能。因此參考前人針對單腔微幫浦提出的理論解【6】，將一個週期分成了三個不同的情況，透過壓力差來分析不同情況下的幫浦流量。而在本文所用的 Lump Model 中，也需用到 Nozzle/Diffuser 元件中壓力係數 K_n, K_d 值與流量的關係，因此求得準確的 K_n, K_d 值為重要的課題。本文中，採用了兩種數學模式來分析 Nozzle/Diffuser 元件。

6.3.1 Model A - 透過 CFD 的計算

爲了得到我們欲知的 Nozzle/Diffuser 參數，因此我們亦針對本文模擬的微幫浦的 Nozzle/Diffuser 元件，以 CFD 的方式實地去模擬計算 Nozzle/Diffuser 的摩擦力係數 C_p ，並透過(5.29)式來計算 K_n, K_d 。本文研究的 Nozzle/Diffuser 幾何尺寸如下表所示：

張開角(open angle)	$2\theta = 7^\circ$
喉部寬度(Throat Width)	$W = 100 \mu\text{m}$
長度	$L = 1000 \mu\text{m}$
深度(Depth)	$H = 200 \mu\text{m}$

表 6.1 本文研究之 Nozzle/Diffuser 幾何尺寸

而模擬的幾何尺寸如圖 6.36 所示，網格的建立則如圖 6.37，網格爲 14*120*20 格，總網格數爲 33600 格。邊界條件給定如圖 6.38 所示，在進口邊界上給定平均速度，所給定的速度則由流量來求之；而出口則給定壓邊界條件；令外，爲了簡少計算時間，採用對稱邊界條件。

模擬的結果可見圖 6.39 與 6.40，在不同的進口流量下，壓力場分佈亦不相同。而我們透過前一章 5.3 所述的方式，求得經過 Nozzle/Diffuser 的摩擦係數 C_p 值(圖 6.41 所示)，將 C_p 代入(5.29)式的計算便可得欲知的 K_n, K_d 。

圖 6.42 的結果顯示 K_n, K_d 與流量之間的關係，透過 Curve Fitting 的方式求出 K_n, K_d 與流量的關係式：

$$Kd(q) = 1.315 \times 10^{-8} \cdot q^{-0.921} + 0.5981$$

$$Kn(q) = 1.173 \times 10^{-8} \cdot q^{-0.8112} + 1.204$$

6.3.2 Model B - Yang 的數學模式

前一章，透過 Yang 等人【18】的數學模式中已求得 K_n, K_d 值與雷諾數的關係。而在此透過 Curve fitting 方式找出近似曲線，而其擬合的方程式表示在下表：

	函數	R-Square
Kd	$Kd = 121.6 \cdot \text{Re}^{-0.9995} + 0.602$	0.999999373
Kn	$Kn = 121.6 \cdot \text{Re}^{-0.998} + 1.081$	0.999999687

表 6.2 曲線擬合結果的近似函數與誤差分析

上表中的 R-Square 代表點數據與擬合曲線的之間的相似程度，當 R-Square 趨

近 1，表示透過 Curve Fitting 所得的函數越佳。而雷諾數與流量有著下列的關係：

$$\text{Re} = \frac{\rho D_H V_1}{\mu} = \frac{\rho D_H}{\mu \cdot h \cdot w_1} Q$$

上式中的參考長度 D_H 為水利直徑。將上式代入表 6.1 中替換便可找出 K_n, K_d 與流量的關係為(圖 6.35)：

$$Kd(q) = 1.5838 \times 10^{-8} \cdot q^{-0.9995} + 0.602$$

$$Kn(q) = 1.5838 \times 10^{-8} \cdot q^{-0.998} + 1.081$$

6.3.3 Lump Model 的結果分析與比較

● 結果 I - 振動腔體中心的壓力 (P_c)變化

透過上述的兩個 Model，便可做簡易的微幫浦數學理論分析。首先，需計算出微幫浦中心點壓力。圖 6.43 所示的即為一個週期內振動腔體中心點壓力 P_c 隨時間的變化。圖中橫座標為無因次的時間 T^* ，其定義為：

$$t^* = \frac{t}{T}$$

其中 t 為真實時間，而 T 代表的是一個週期所花的時間。 t^* 的範圍介於 0~1 之間。由此圖中可知，透過 Model A 和 Model B 所求出的中心點壓力雖略有些差別，但大致上腔體中心壓力亦會隨著壓電薄膜的週期運動呈現三角函數變化。

圖 6.43 分別為在三種不同背壓 $P_{pump} = 0、2950、5310$ Pa 下，振動腔體中心點壓力 P_c 隨時間的變化(一個週期)。觀察 P_c 在一個週期內變化，當 $t^* = 0.25$ 時，振動腔體中心點到達最大壓力($P_{c,MAX}$)；而當 $t^* = 0.75$ ，振動腔體中心點則為最小壓力($P_{c,MIN}$)。而比較三張圖可知，背壓亦會影響幫浦中心點壓力 P_c 。圖 6.44 與圖 6.45 分別為 $P_{c,MAX}$ 與 $P_{c,MIN}$ 在不同背壓下的變化，當背壓增大時， $P_{c,MAX}$ 則越小，但 $P_{c,MIN}$ 的壓力反而隨之越大。

● 結果 II - 比較實驗、模擬與理論的流量結果

中心壓力求出後，便可求得兩端出口的流量。圖 6.46-6.48 為在不同背壓下 ($P_{pump} = 0、2950、5310$ Pa)，一個週期內右端出口流量隨時間的變化。首先觀察圖 6.46，在背壓為 0 的情況下，出口流量 Q_2 隨時間變化大致類似；但當背壓越大時，如圖 6.48 所示，當背壓達 5310 Pa 時，以 Model A 與 Model B 所求得的理論解和本文透過 3D 模擬所得的結果有著一小段差距，而其中結果差異較大的部份是在靠近 Transition Mode。

透過 Lump Model 所得到的為一個週期下出口流量隨時間變化，我們對流量積分便可得到一個週期下的淨流量。圖 6.49 所示為積分所得的淨流與背壓的關係圖，圖中包含實驗、模擬、理論三者所得的結果，比較起來，由 Lump Model 理論所計算的結果相較於實驗與模擬結果略微差了點。因此，比較模擬與理論下的真實效率(η_r)，由圖 6.50 所示，其亦產生一小段誤差。

- 結果Ⅲ - 比較模擬與理論的效率(η_2 、 η_3)

圖 6.51-6.53 分別為在三種不同背壓 $P_{pump}=0、2950、5310$ Pa 下，一個週期的 β 隨時間變化。從圖中可發現透過 Lump Model 理論所得出來的曲線與模擬所得的曲線相差甚多，不過在中段部份大致仍是為一定值，因此我們仍取中間 80% 來比較。結果如圖 6.54 與圖 6.55 所示。而將所得的 $\beta_1 \beta_2$ 代入求效率 η_2, η_3 ，如圖 6.56、6.57 所示，而其結果顯示當採用 Model B 時與本文模擬的結果僅有一小段誤差，因此可知透過 Lump Model 理論以估算效率仍有一定的參考價值。



第七章、結論

由前一章對於無閥型微幫浦測試的結果，我們可得以下結論：

- 本文對於壓電薄膜的振動採用三種不同近似曲線來假設，三種不同近似取線亦會造成模擬結果淨流量的差異，因此選擇適當的近似曲線方能得到較佳的結果。
- 當微幫浦的背壓增加時，出口流量亦會隨之減少。而背壓的增加亦會降低幫浦的真實效率。令外，本文所採用的流量比 β_1, β_2 亦會受到背壓的影響，而影響到幫浦效率。
- 當採以不同數量的網格模擬，其結果有略微的差異。其主要影響的原因在於無閥型微幫浦的原理是透過 Nozzle/Diffuser 元件造成不同的壓阻，以造成流體輸送，故壓力變化較劇烈的部份集中在 Nozzle/Diffuser 元件的部份。因此在 Nozzle/Diffuser 元件中的網格數量會對結果流量造成一定影響，因此在做相關模擬，應在建立網格時，對網格做適當的安排，盡可能集中在 Nozzle/Diffuser 元件，以降誤差。
- 觀察本文所模擬的無閥型微幫浦流場可發現，在靠近 Nozzle/Diffuser 附近會產生回流，因此在幫浦設計上，若在 Nozzle/Diffuser 元件中加入導圓角應可提升幫浦性能。
- 本文針對 Nozzle/Diffuser 採用了兩種 Model，而 Model B 比起 Model A 有較大誤差。其原因在於，當我們透過對 Nozzle/Diffuser 元件做 CFD 模擬，可發現 Nozzle 流向的壓力損失應較 Diffuser 流向的壓力損失大。而在 Model B 的假設中忽略此點，因此有比起 Model A 有著較大的誤差。
- 本文建立了一套微幫浦理論 Lump Model 以分析幫浦，然而在流量結果的分析上有著一定的誤差。當背壓越大，可明顯看出誤差集中在 Transition 區間，原因在於我們對於 Lump Model 中所需 K_n, K_d 值均假設為振動腔體掃過流量的 1/2，即：

$$K_n = f(Q_n) \approx f\left(\frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t)\right)$$

$$K_d = f(Q_d) \approx f\left(\frac{1}{2} \nabla_{\max} w \sin(\omega t)\right)$$

而在 Transition 區間時，右端出口壓力較大，流體均是往左端流，因此，在 Transition 區間內仍假設 K_n, K_d 為振動腔體掃過流量的 1/2，便會造成相當的誤差。

- Lump Model 在真實流量的估算上儘管有著一定誤差，然而透過流量比 β_1, β_2 來估算不同背壓下的幫浦效率時，便可得到一定準確的效率。因此，可知 Lump Model 理論仍具有相當的可用性。Lump Model 可提供吾人找不同背壓下的流量比 β_1, β_2 ，進而估算出幫浦效率。



Reference

- 【1】 D.J Laser and , J. G Santiago, " A review of micropump" , *Journal of Micromechanics and Microengineering*.
- 【2】 E.Stemme, G.Stemme, " A valve-less diffuser/nozzle-based fluid pump" , *Sensors and Actuators A* , 39 , pp.159-167 , 1993
- 【3】 T.Gerlach, H.Wurmus, " Working principle and performance of the dynamic micropump" *Sensors and Actuators A* , 50 , pp.135-140 , 1995
- 【4】 A.Ollson, G.Stemme, E.Stemme, " A valve-less planar fluid pump with two pump chambers" , *Sensors and Actuators A* , 46-47 , pp.549-556 , 1995
- 【5】 A.Ollson, O.Larsson, J.Holm, L.Lundbladh, O.Ohman, G.Stemme, " Valve-less diffuser Micropump fabricated using thermoplastic replication," *Sensors and Actuator A.*, Vol.64,pp.63-68,1998
- 【6】 A.Ullman, " The piezoelectric valve-less pump-performance enhancement analysis" , *Sensors and Actuators A* , 69 , pp.97-105 , 1998
- 【7】 A.Ollson, G.Stemme, E.Stemme, " A numerical design study of the valveless diffuser pump using a lumped-mass model" *Journal of Micromechanics and Microengineering* , Vol.9 , pp.34-44 , 1999
- 【8】 Pan,L.S., Ng,T.Y., Liu,G.R., Lam,K.Y. and Jiang,T.Y. "Analytical solutions for the dynamic analysis of a valveless micropump — a fluid - membrane coupling study" , *Sensors and Actuators, A: Physical*, v 93, n 2, Sep 30, 2001, p 173-181
- 【9】 M.M. Athavale , H.Q.Yang , and A.J. Przekwas "Coupled Fluid-Thermo-Structures Simulation Methodology for MEMS Applications" , 1997 international Conference on Solid-state Sensors and Actuators Chicago, June 16-19, 1997
- 【10】 N.T.Nguyen,X. Hunag,2003,"Numerical Simulation of Pulse-Width-Modulated Micropump with Diffuser/Nozzle Elements,"Nanyang Technological University , School of Mechanical and Production Engineering.
- 【11】 羅卓錚, " 擋體式無閥門微幫浦之數值模擬" ,國立台灣大學應用力學所碩士論文, 2004 年。
- 【12】 B.Fan, G.Song, F.Hussain, "Simulation of a piezoelectrically actuated valveless micropump" *Smart Materials and Structures*, v 14, n 2, April, 2005, p 400-405
- 【13】 曾裕博, " 無閥式微型幫浦數值模擬與效率分析" ,國立台灣大學機械

工程所碩士論文，2005 年

- 【14】 Yang, Kai-Shing ; Chen, Ing-Young ; Chien, Kuo-Hsiang ; Wang, Chi-Chuan , ”
*A numerical simulation on diffuser-nozzle based piezoelectric micropumps with two
different numerical models,*” *2004 International Conference on MEMS, NANO and
Smart Systems, ICMENS 2004, 2004, p 104-109*
- 【15】 Jeong Jin Kim, Chang Nyung, ” *A numerical simulation on diffuser-nozzle
based piezoelectric micropumps with two different numerical models,*” *International
Journal for Numerical Methods in Fluids, v 53, n 4, Feb 10, 2007, p 561-571*
- 【16】 A.Ollson, G.Stemme, E.Stemme, ” *Diffuser-element design investigation for
valve-less pumps*” , *Sensors and Actuators A* , 57 , pp.137-143 , 1996
- 【17】 A.Ollson, G.Stemme, E.Stemme, ” *Numerical and experimental studies of
flat-walled diffuser element for valve-less micropumps*” , *Sensors and Actuators
A* , 84 , pp.165-175 , 2000
- 【18】 Kai-Shing Yang , Ing-Young Chen , Bor-Yuan Shew and Chi-Chuan Wang ,
” *Investigation of the flow characteristics within a micronozzle/diffuser*” , *Journal
of Micromechanics and Microengineering* , 14 , 2003
- 【19】 Singhal, Vishal ; Garimella, Suresh V. ; Murthy, Jayathi Y. , ” *Low Reynolds
number flow through nozzle-diffuser elements in valveless micropumps,*” *Source:
Sensors and Actuators, A: Physical, v 113, n 2, Jul 5, 2004, p 226-235*
- 【20】 柯伯翰 , ” *剪力流流經正方阻塊之數值分析*” ,國立交通大學機械工程
所碩士論文，2006 年。
- 【21】 Luo, Zhen-Bing ; Xia, Zhi-Xun , “*A novel valve-less synthetic-jet-based
micro-pump,*” *Sensors and Actuators, A: Physical, v 122, n 1 SPEC. ISS., Jul 29,
2005, p 131-140*
- 【22】 F.M. White, *Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1986.*
- 【23】 Kanchan M. Kelkar and Dipankar Choudhury, *Numerical method for the
prediction of incompressible flow and heat transfer in domains with specified
pressure boundary conditions, Numerical heat transfer, Part B.,vol.38, pp.15-36,
2000.*
- 【24】 Issa,R. I. “*Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equation by
Operator-Splitting,*” *J. Computational Physics, Vol.62,pp.40-65,1985*
- 【25】 Timoshenko, Woinosky-Krieger, “*Theory of plates and shells*” , McGraw-Hill,

3. Edition, 1959.



附錄 A - Lump Model 的振動腔體壓力值 Pc 解析解：

以排水模式為例，其連續方程式可表示為：

$$C_L \sqrt{P - P_{in}} + C_H \sqrt{P - P_{out}} = \nabla_{MAX} \cdot w \cdot \text{Sin}(wt) \quad (5.37)$$

首先令 $P_{in} = 0$ ， $\Delta p = P_{OUT} - P_{IN} = P_{OUT}$ ， $F = V_0 w \text{Sin}(wt)$ 代入上式可得：

$$C_L \sqrt{P} + C_H \sqrt{P - \Delta P} = F \quad (A-1)$$

將上式開平方後，即可表示為：

$$C_L^2 P + C_H^2 (P - \Delta P) + 2C_L C_H \sqrt{P(P - \Delta P)} = F^2 \quad (A-2)$$

將方程式整理後可得：

$$2C_L C_H \sqrt{P(P - \Delta P)} = F^2 - C_L^2 P - C_H^2 (P - \Delta P) \quad (A-3)$$

此時，再將式上開方後展開後可表如下：

$$\begin{aligned} 4C_L^2 C_H^2 (P^2 - P \cdot \Delta P) &= (F^2 - C_L^2 P - C_H^2 (P - \Delta P))^2 \\ &= F^4 + C_L^4 P^2 + C_H^4 (P^2 - 2P \cdot \Delta P + \Delta P^2) - 2F^2 C_L^2 \cdot P - 2F^2 C_H^2 (P - \Delta P) + 2C_L^2 C_H^2 (P^2 - P \cdot \Delta P) \end{aligned} \quad (A-4)$$

整理後可得一個壓力 p 為二次多項式

$$\begin{aligned} (-C_L^4 - C_H^4 + 2C_L^2 C_H^2) \cdot P^2 + (2C_H^4 \Delta P + 2F^2 (C_L^2 + C_H^2) - 2C_L^2 C_H^2 \cdot \Delta P) \cdot P \\ - C_H^4 \Delta P^2 - 2F^2 C_H^2 \cdot \Delta P - F^4 = 0 \end{aligned} \quad (A-5)$$

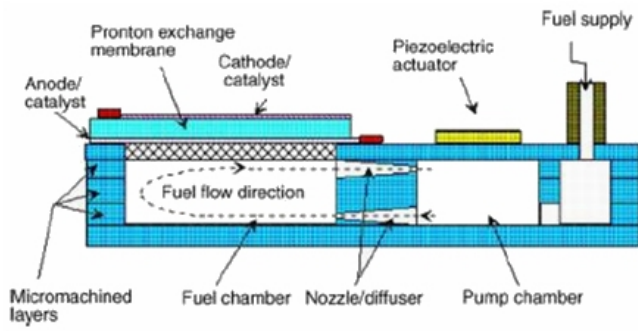
而二次多項式解為：

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

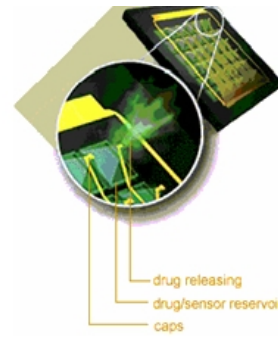
$$\text{取正號即可得壓力解析解為： } p = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= -C_L^4 - C_H^4 + 2C_L^2 C_H^2 = -(C_H^2 - C_L^2)^2 \\ b &= (2C_H^4 \Delta P + 2F^2 (C_L^2 + C_H^2) - 2C_L^2 C_H^2 \cdot \Delta P) = 2 \cdot (C_H^2 + C_L^2) \cdot F^2 + 2 \cdot (C_H^2 - C_L^2) \cdot (C_H^2 \Delta P) \\ c &= C_H^4 \Delta P^2 - 2F^2 C_H^2 \cdot \Delta P + F^4 = -(F^2 + C_H^2 \Delta p)^2 \end{aligned}$$



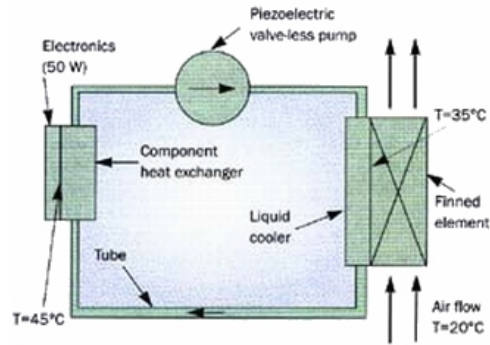
(a) 燃料電池的應用



(b) 藥物傳輸上的應用

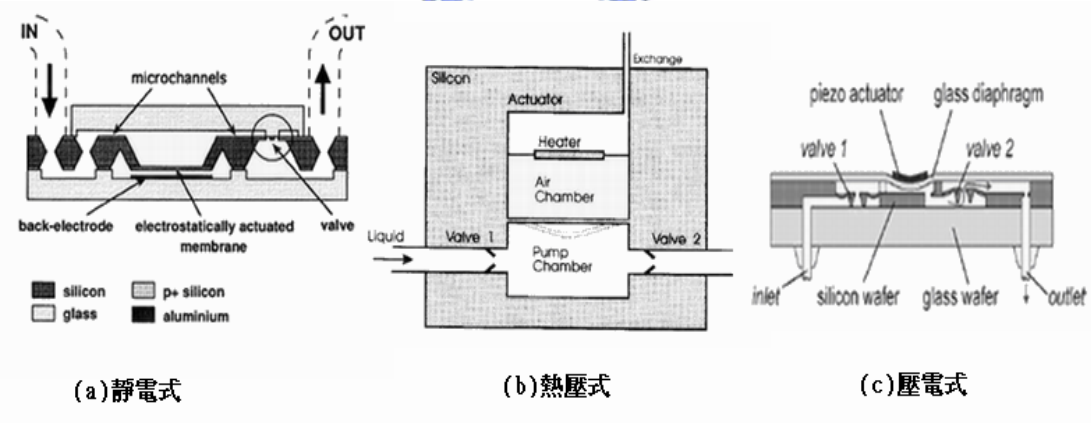


(c) 冠狀動脈上的應用



(d) 熱傳上的應用

《圖 1.1》微幫浦在工程上的應用

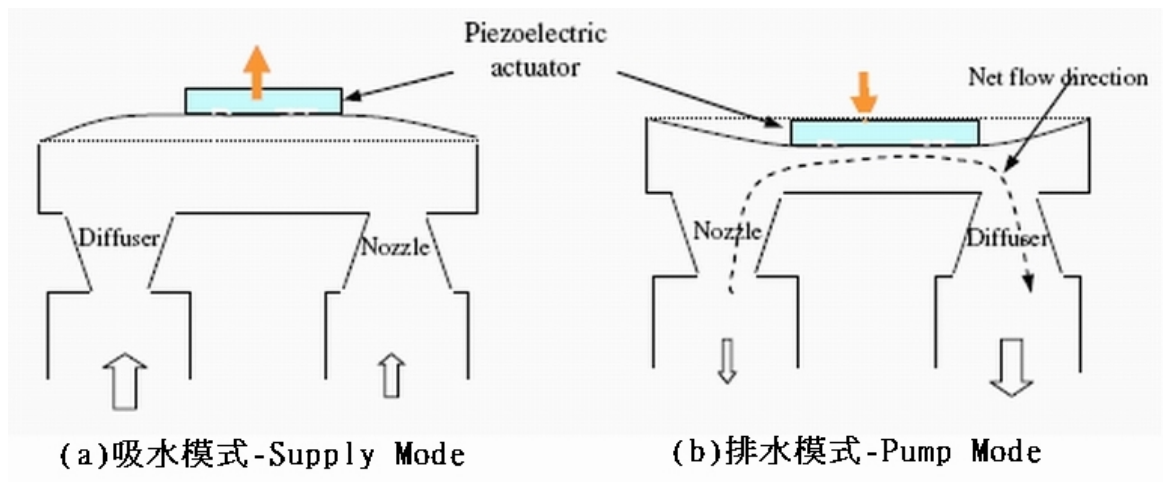


(a) 靜電式

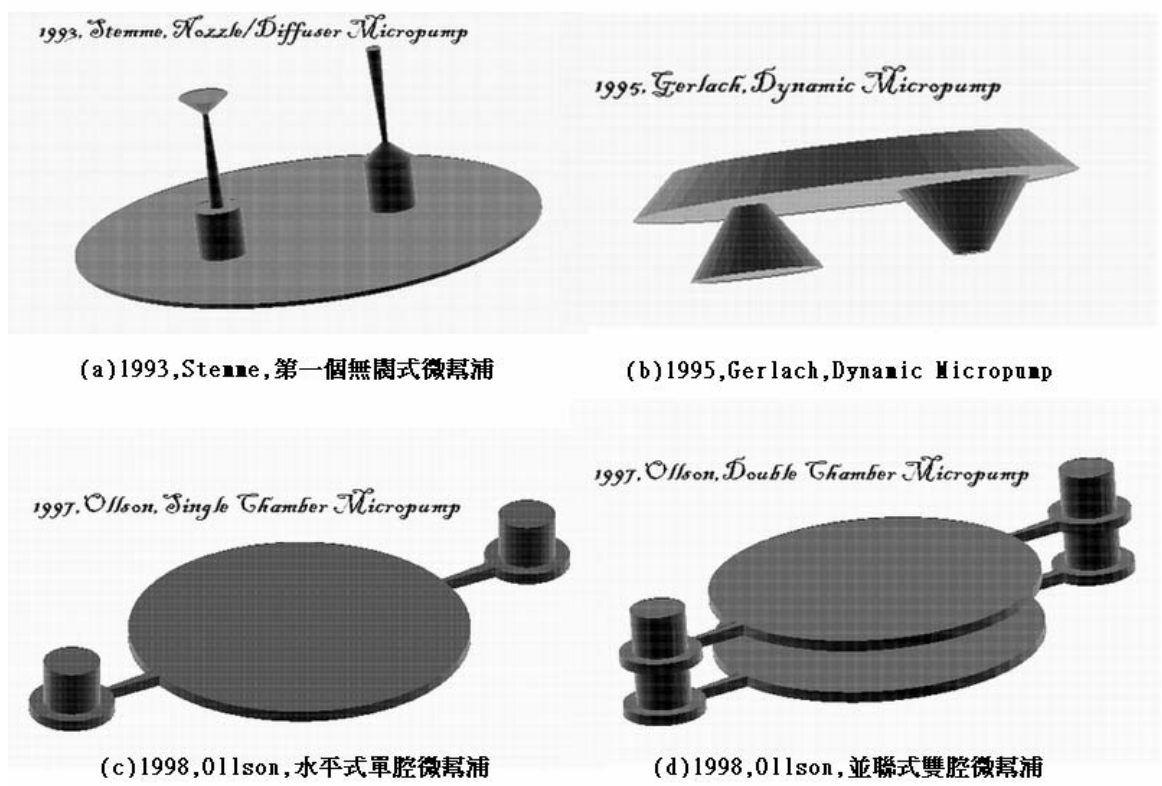
(b) 熱壓式

(c) 壓電式

《圖 1.2》微幫浦的致動來源【1】



《圖 1.3》壓電式微幫浦的運作方式



《圖 1.4》無閥型壓電式微幫浦的發展史

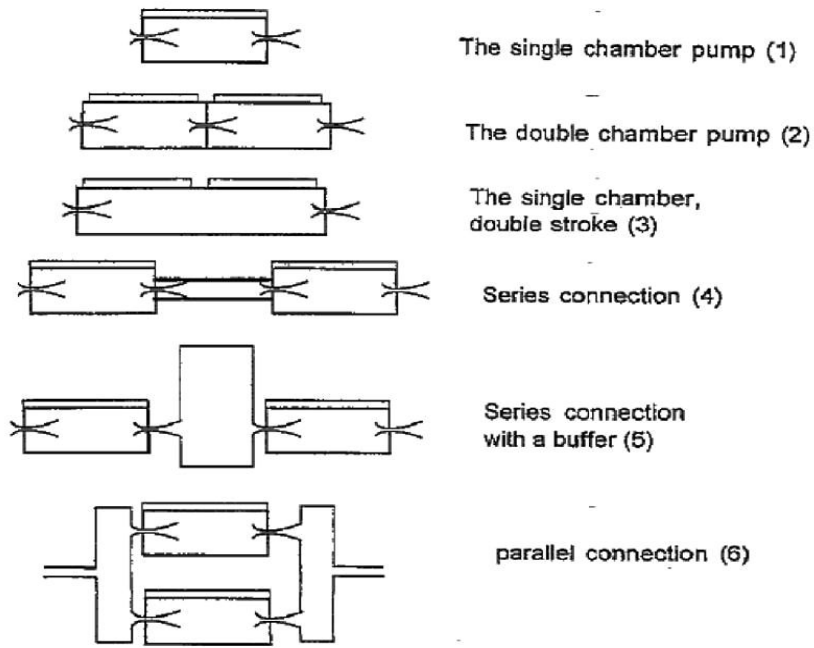
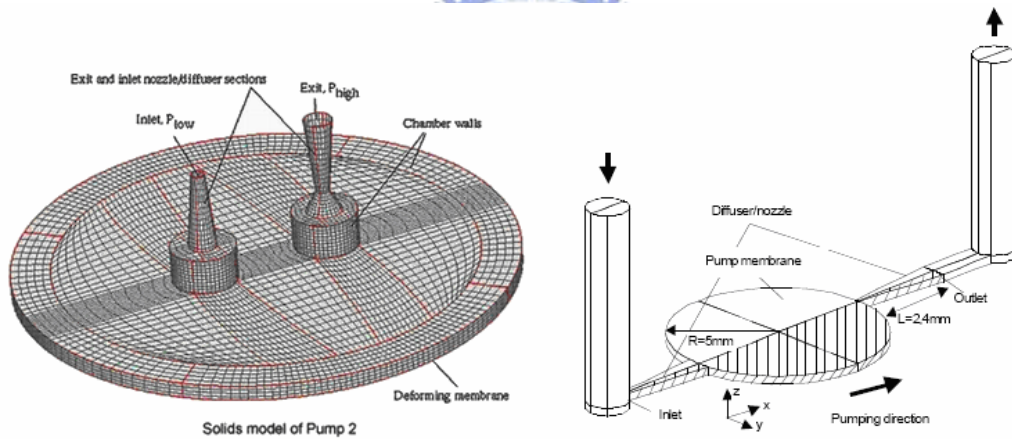


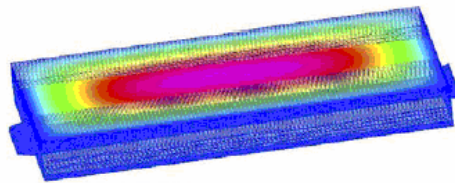
Fig. 6. Various configurations of the piezoelectric pump.

《圖 1.5》Ullman【6】所提的六種串聯方式



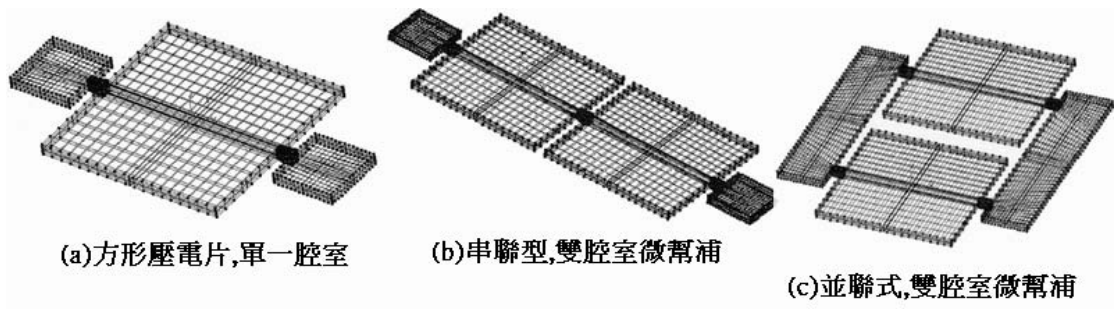
(a)1997年,M.M. Athavale等人模擬
1993年Stemme所製的微幫浦幾何

(b)2000年,N.T. Nguyen模擬的幾何

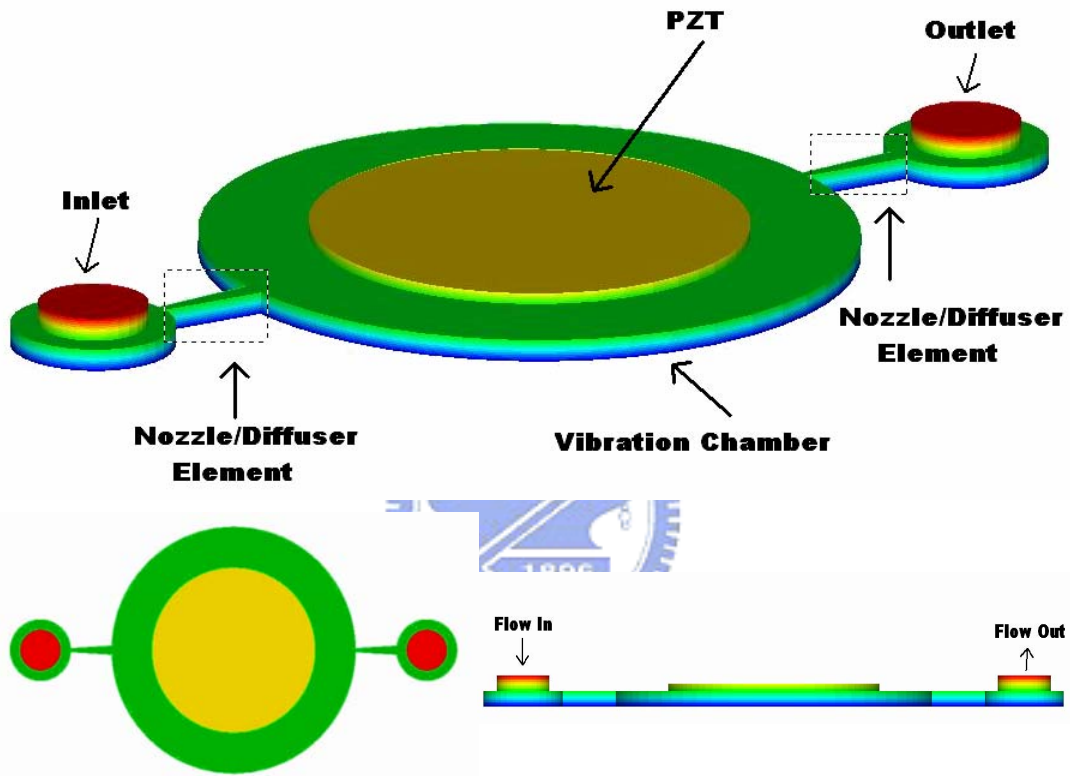


(c)2005年,Fan模擬的方型壓電微幫浦

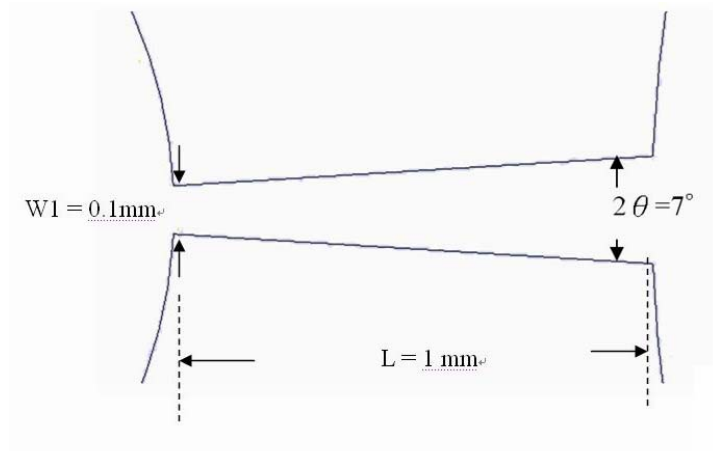
《圖 1.6》前人對於微幫浦的模擬



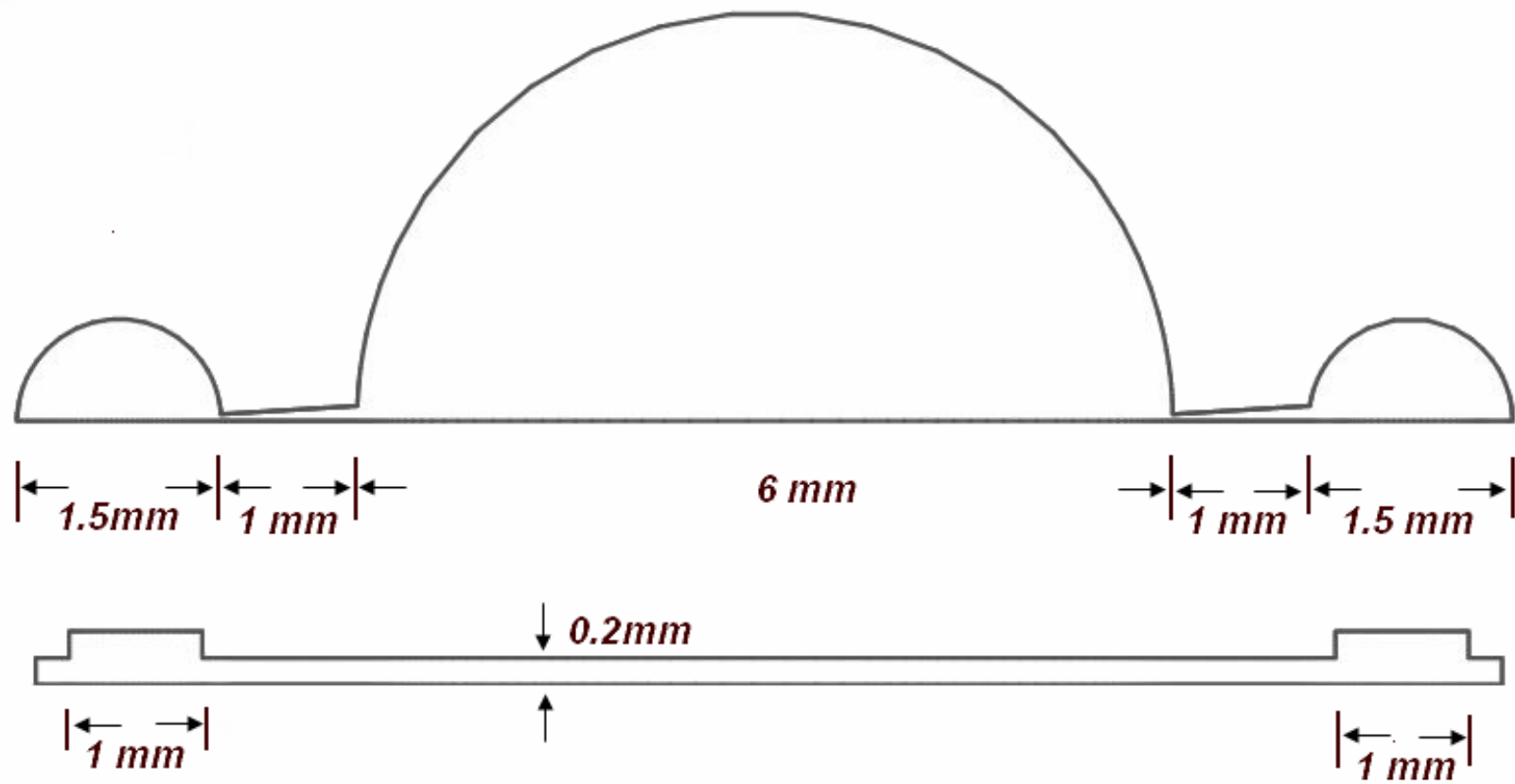
《圖 1.7》K-S Yang 【14】所模擬多腔體方形微幫浦



《圖 1.8》1998 年 Ollson 【5】所製微幫浦構造示意圖



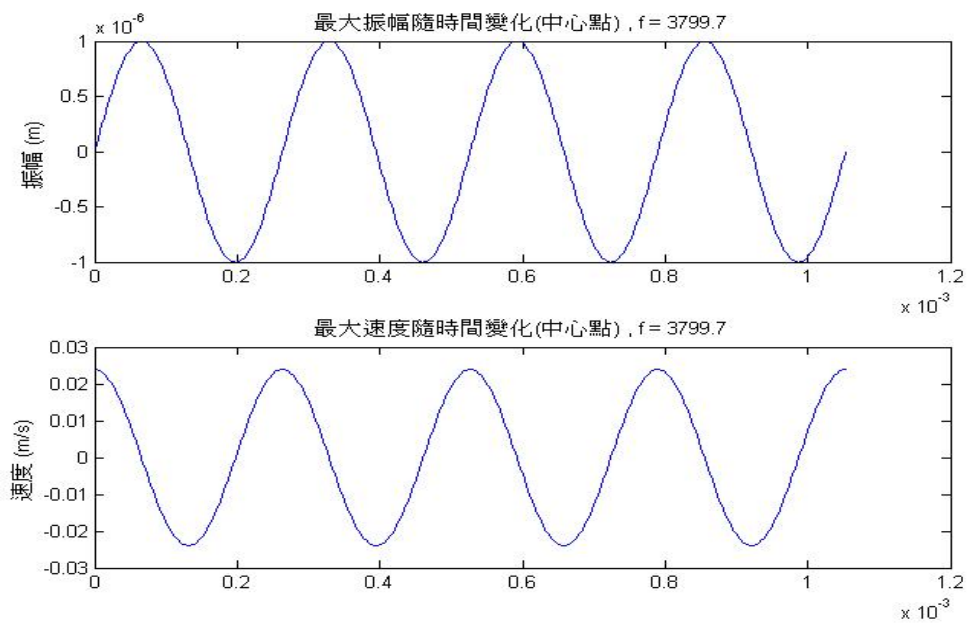
《圖 1.9》1998 年 Ollson 【5】所製微幫浦之 Nozzle/Diffuser 元件尺寸



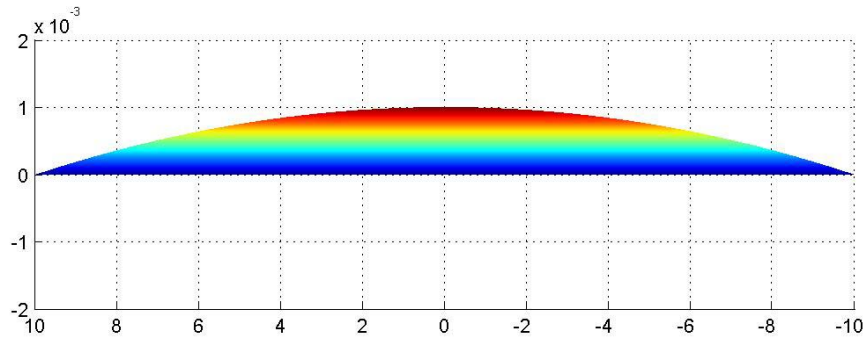
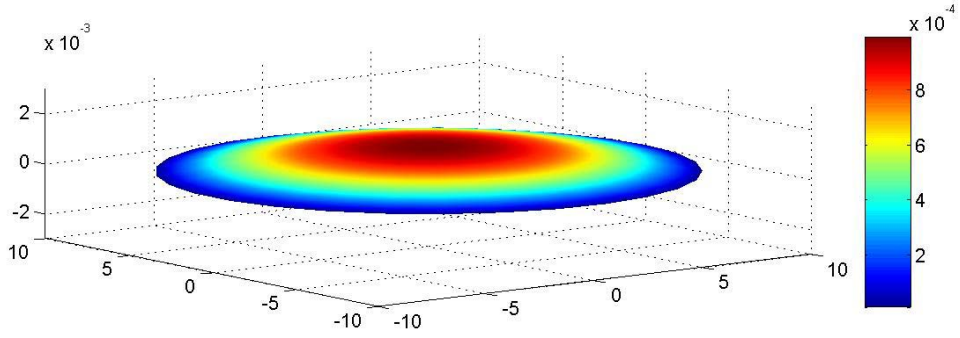
《圖 1.10》1998 年 Ollson 【5】所製微幫浦尺寸



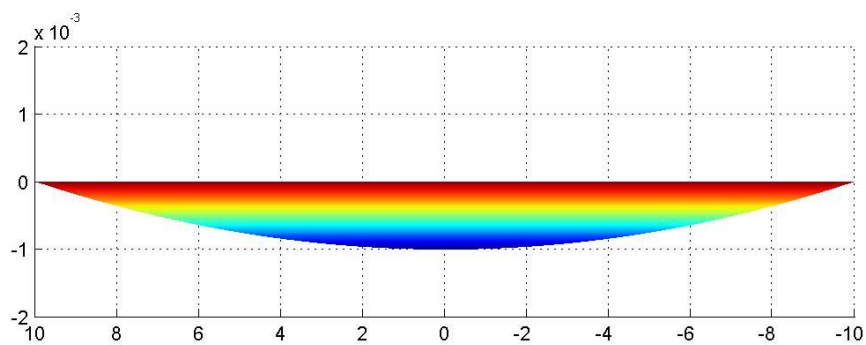
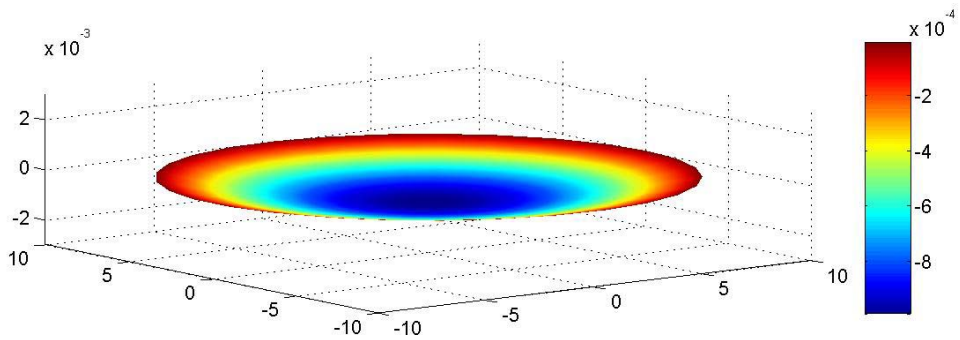
《圖 2.1》本文所欲分析的微幫浦的幾外形。圖為 1998 年，Ollson【5】所製單腔體圓形微幫浦示意圖



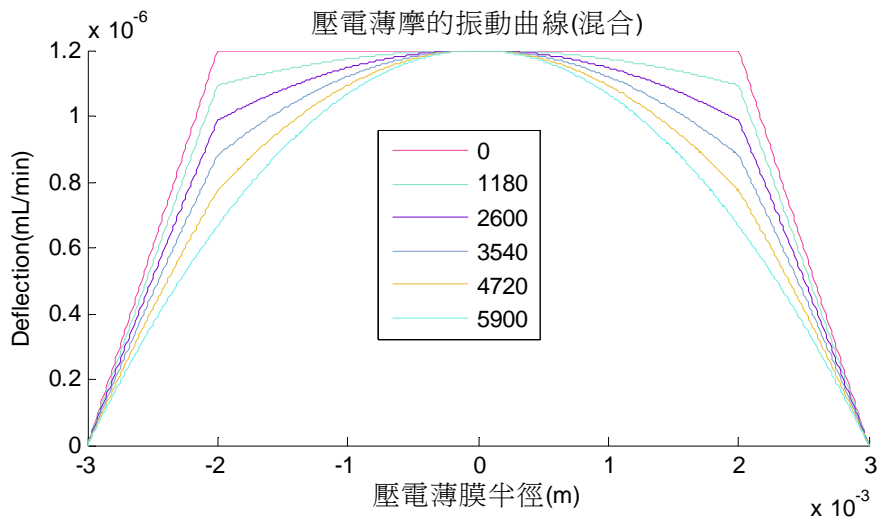
《圖 2.2》薄膜中心點位移和速度隨時間的變化



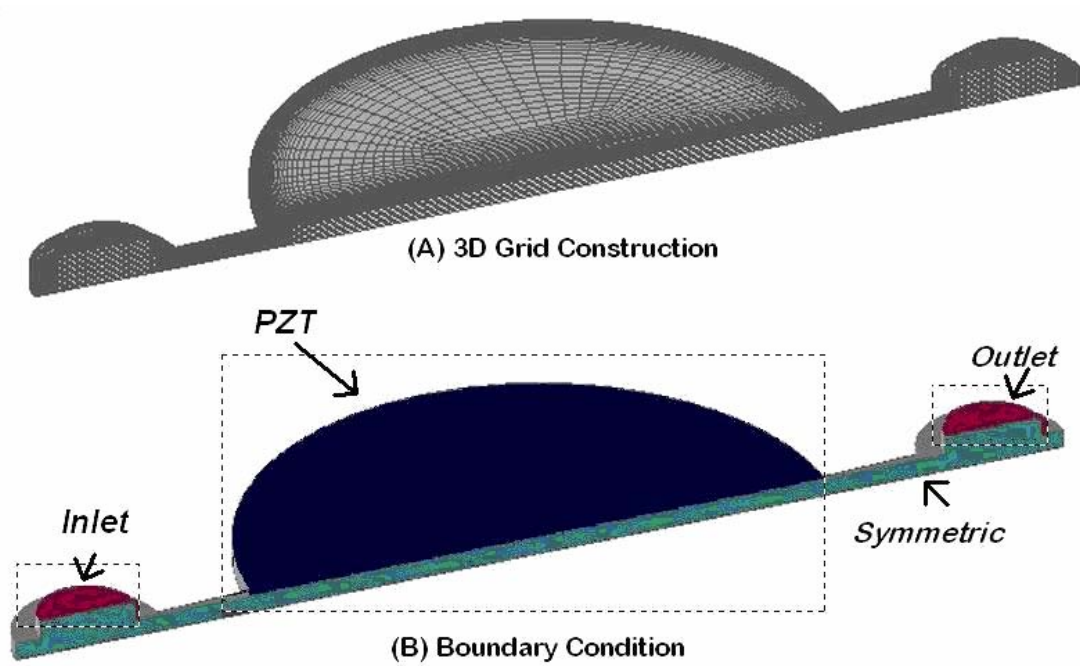
《圖 2.3》圓形壓電薄膜於不同半徑下的位移量(在上死點時)



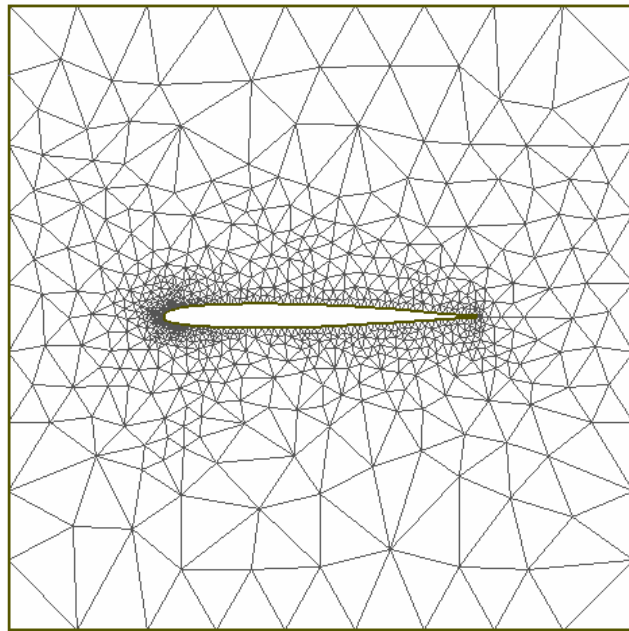
《圖 2.4》圓形壓電薄膜於不同半徑下的位移量(在下死點時)



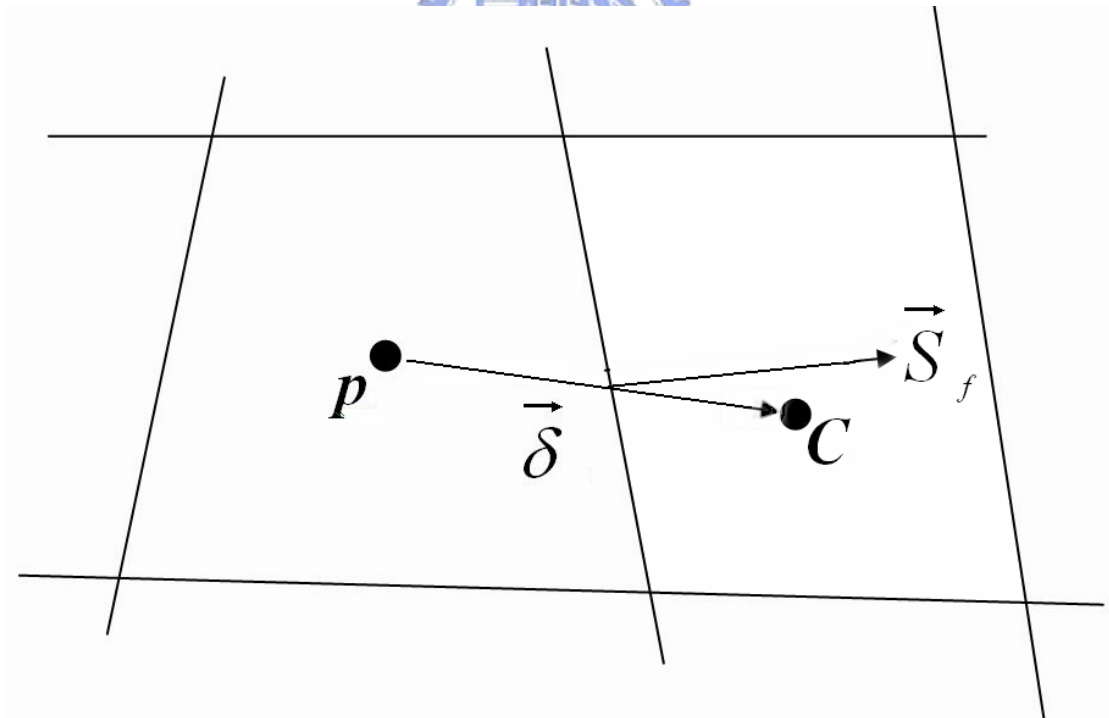
《圖 2.5》採用混合曲線下，在不同背壓下的壓電薄膜形狀



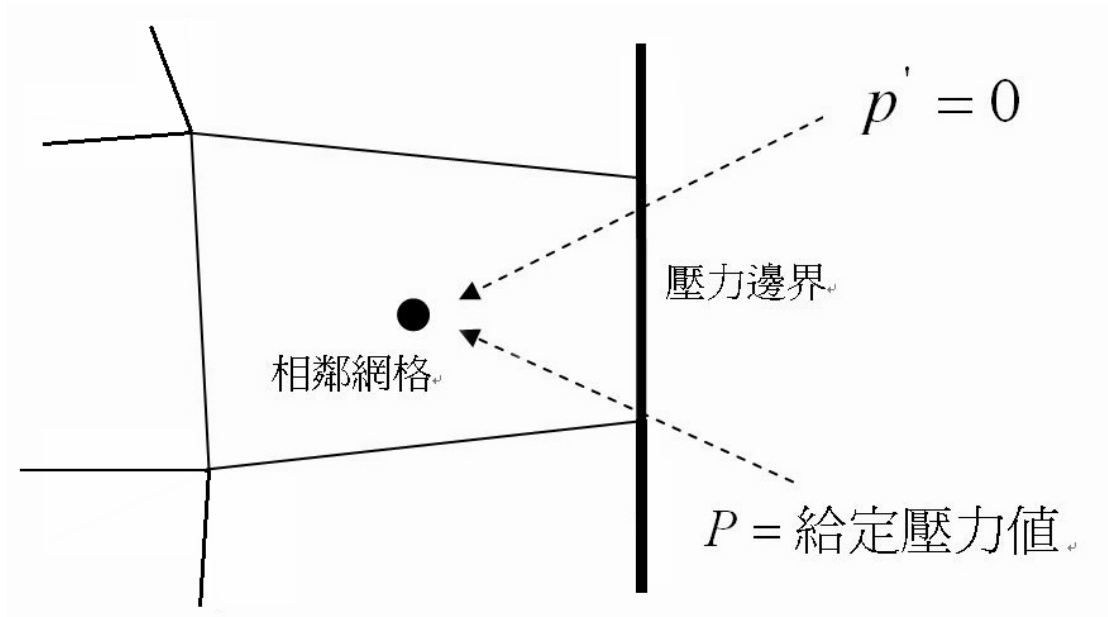
《圖 2.6》本文模擬之幾何與邊界條件 (A)3D 網格 (B) 邊界條件



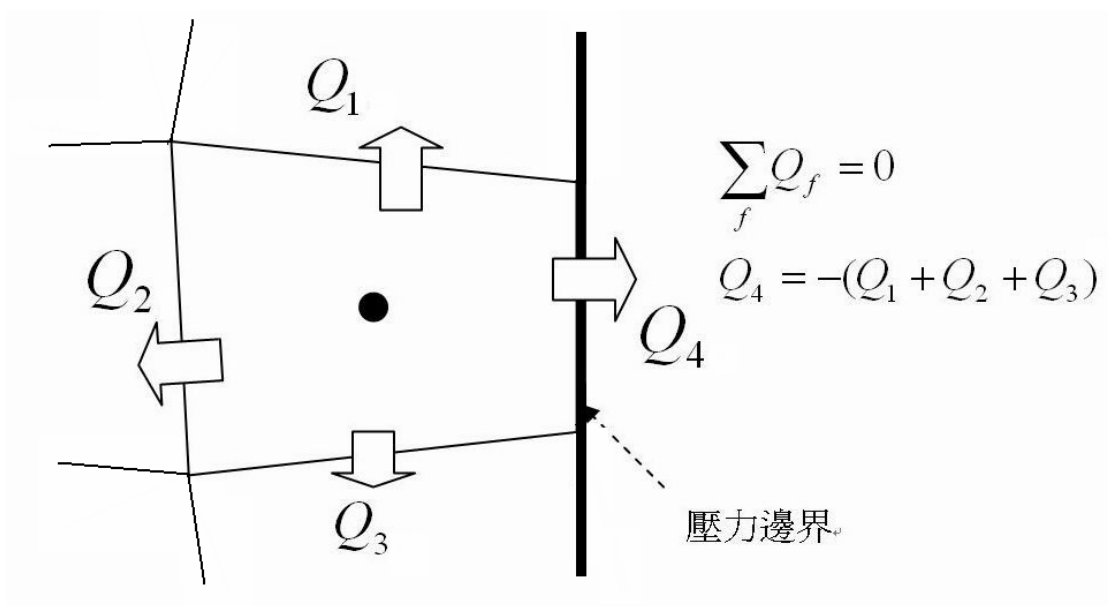
《圖 3.1》非結構性網格(Unstructured Grid)



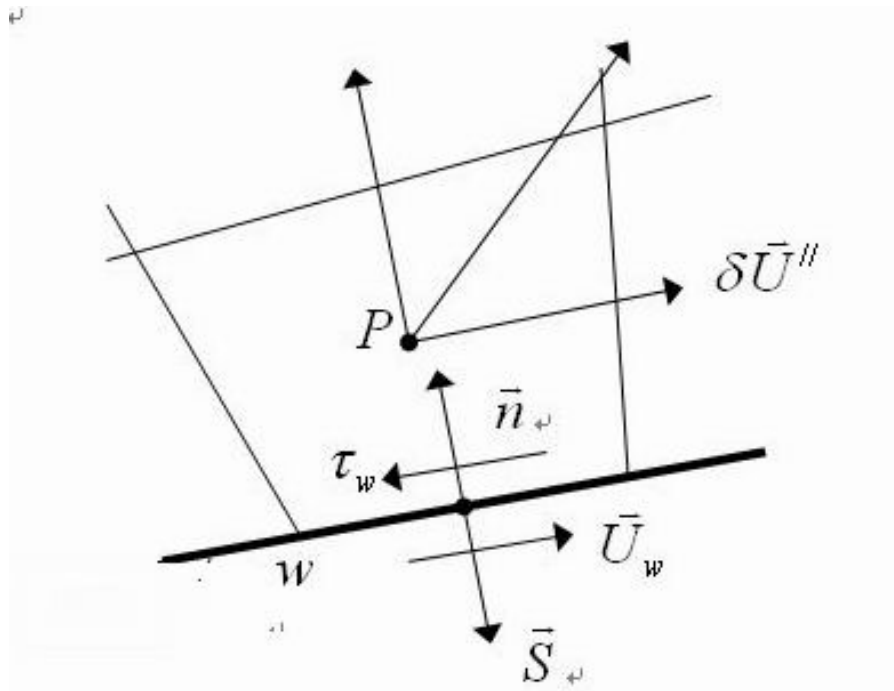
《圖 3.2》Over-Relax Approach



《圖 4.1》出口壓力邊界示意圖

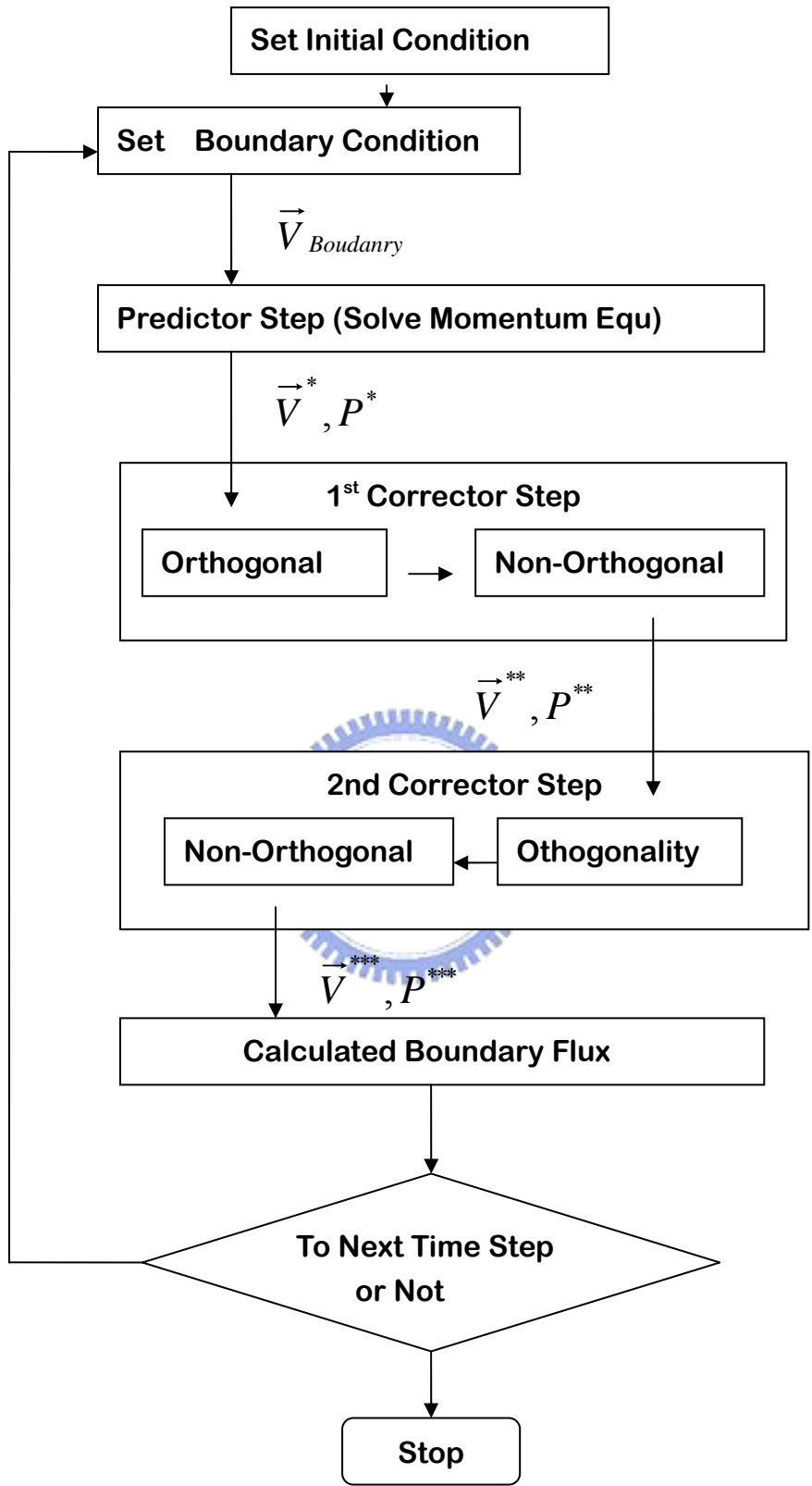


《圖 4.2》出口壓力邊界流量的計算

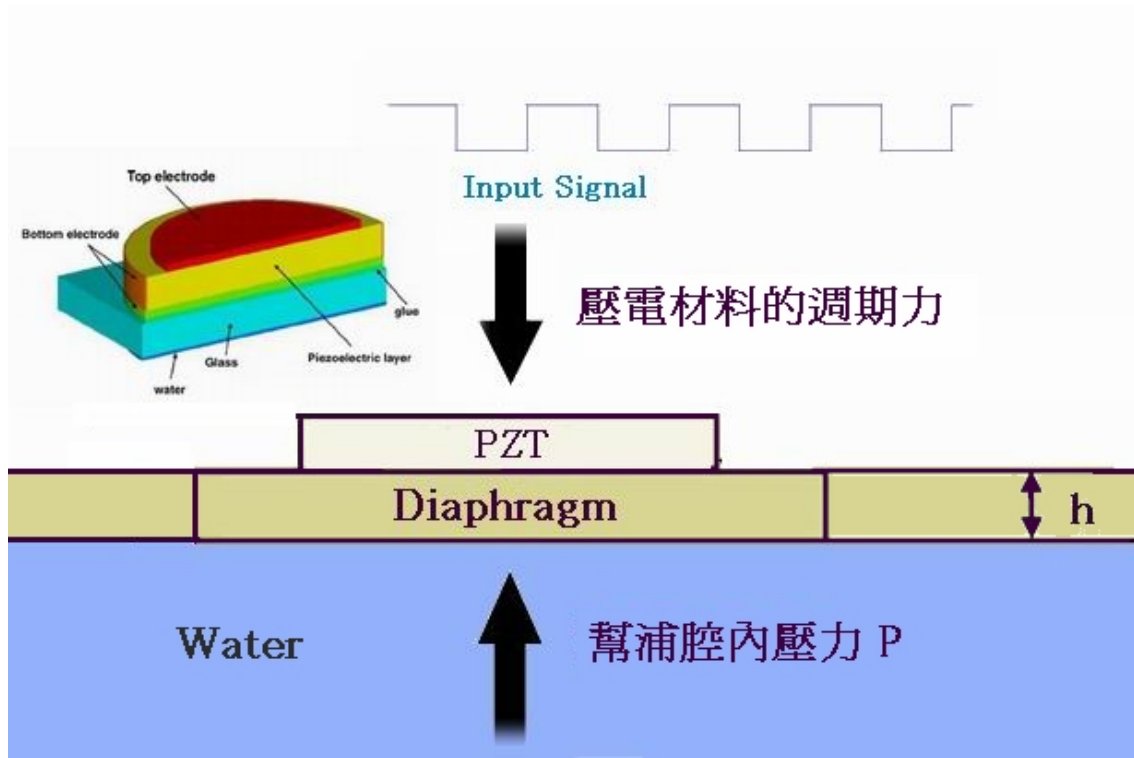


《圖 4.3》邊界剪應力的計算示意圖

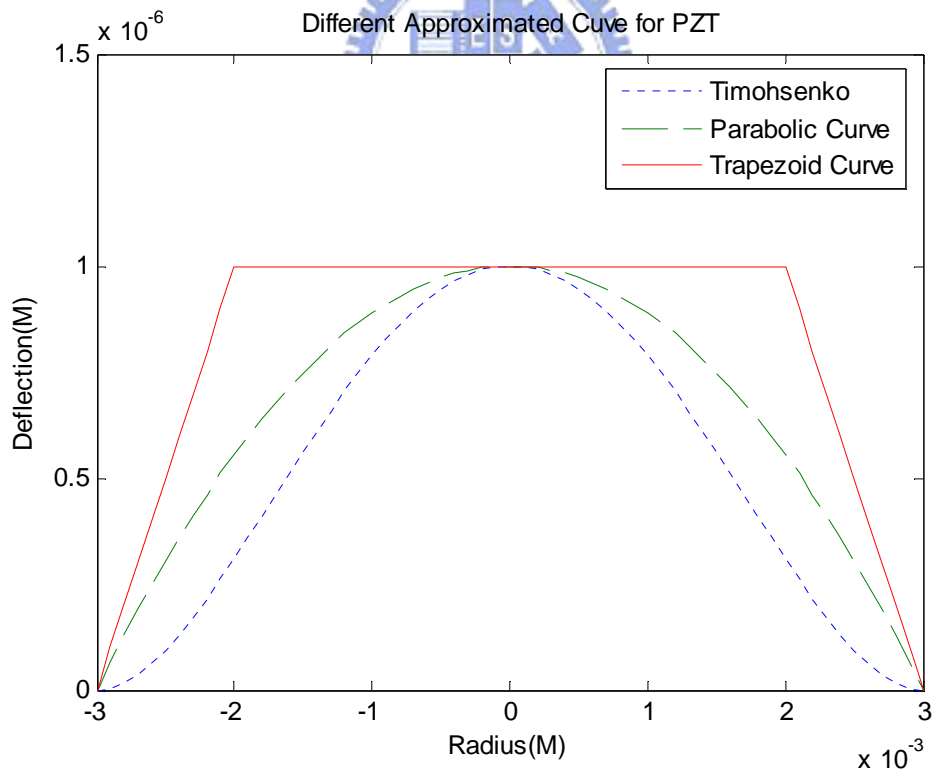




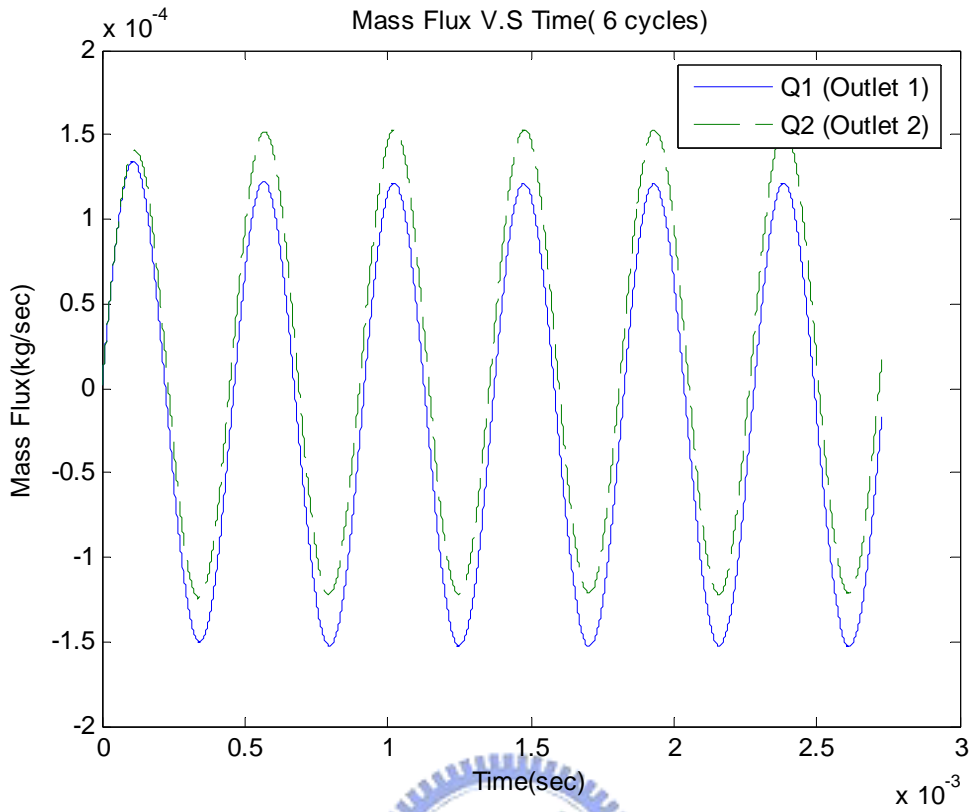
《圖 4.4》PISO 演算法流程圖



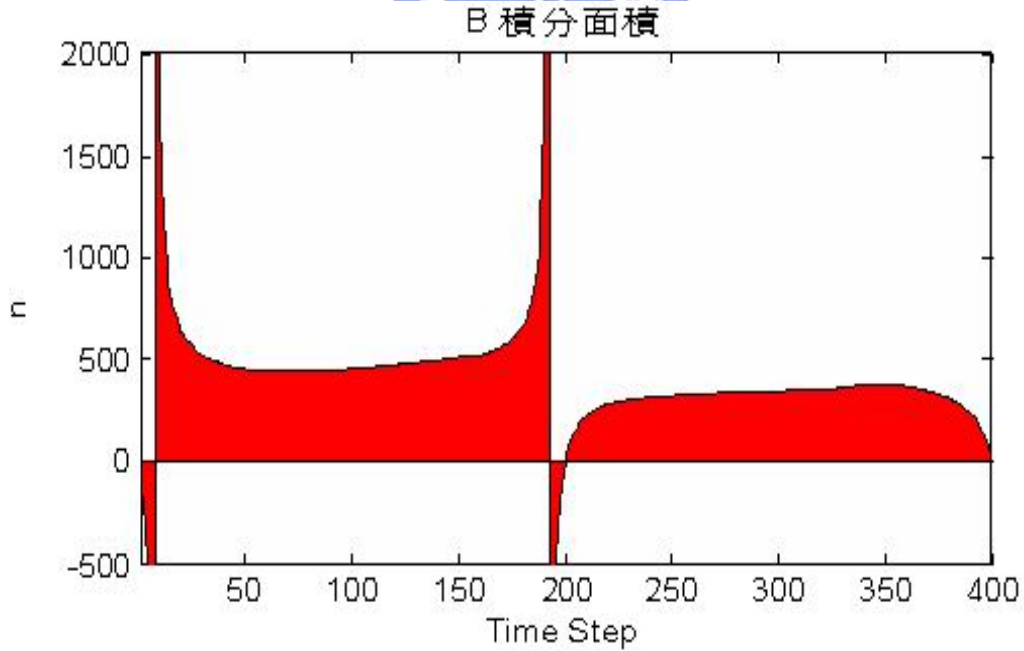
《圖 5.1》壓電薄膜和幫浦內部的作用



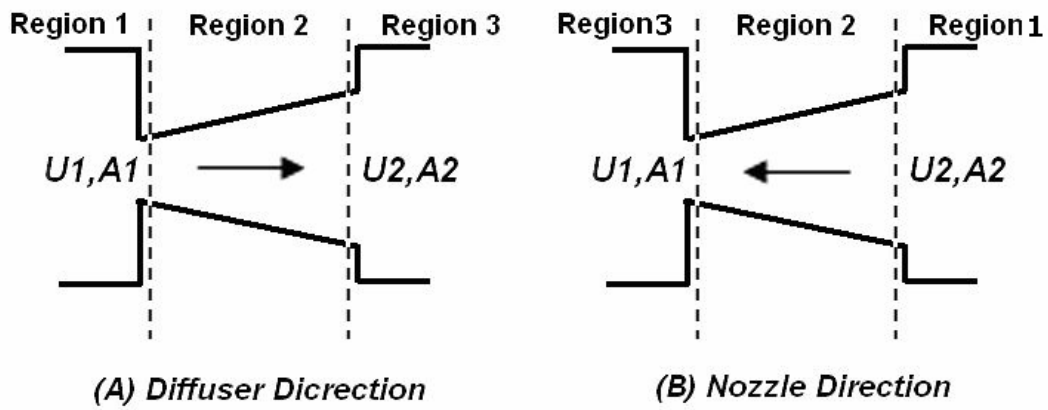
《圖 5.2》比較三種不同近似曲線於壓電薄膜的振動



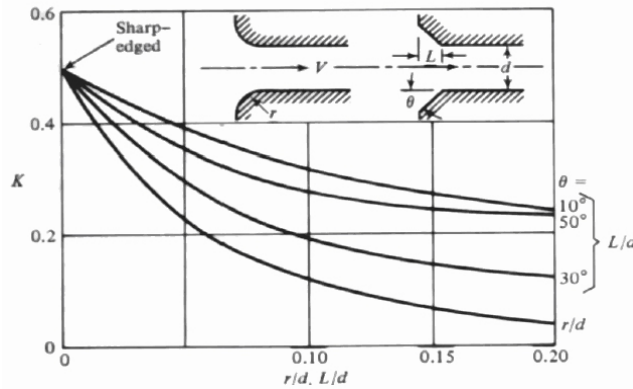
《圖 5.3》兩出口端流量隨時間的變化 (背壓=0)



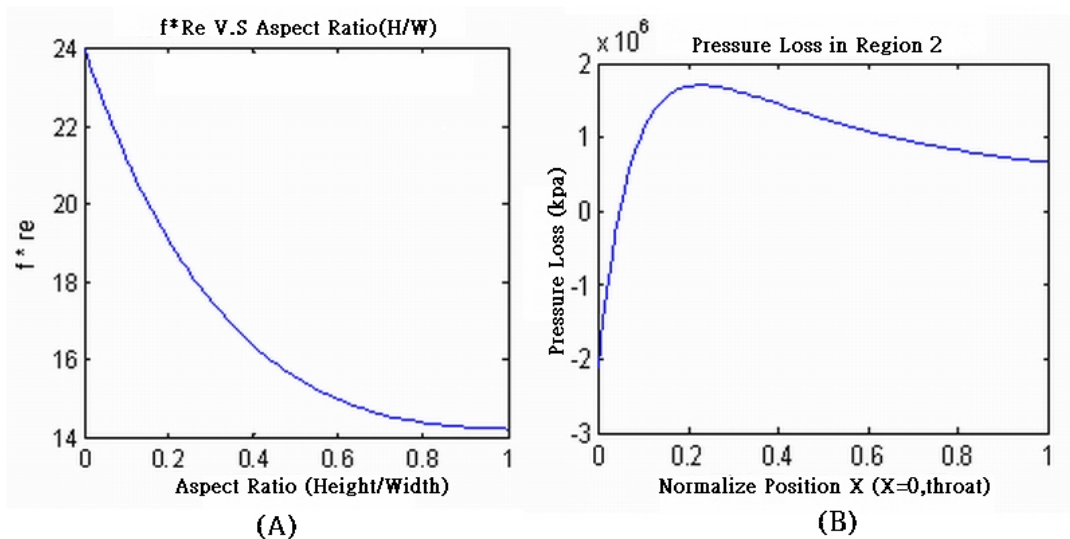
《圖 5.4》方程式(5.18)式的積分範圍



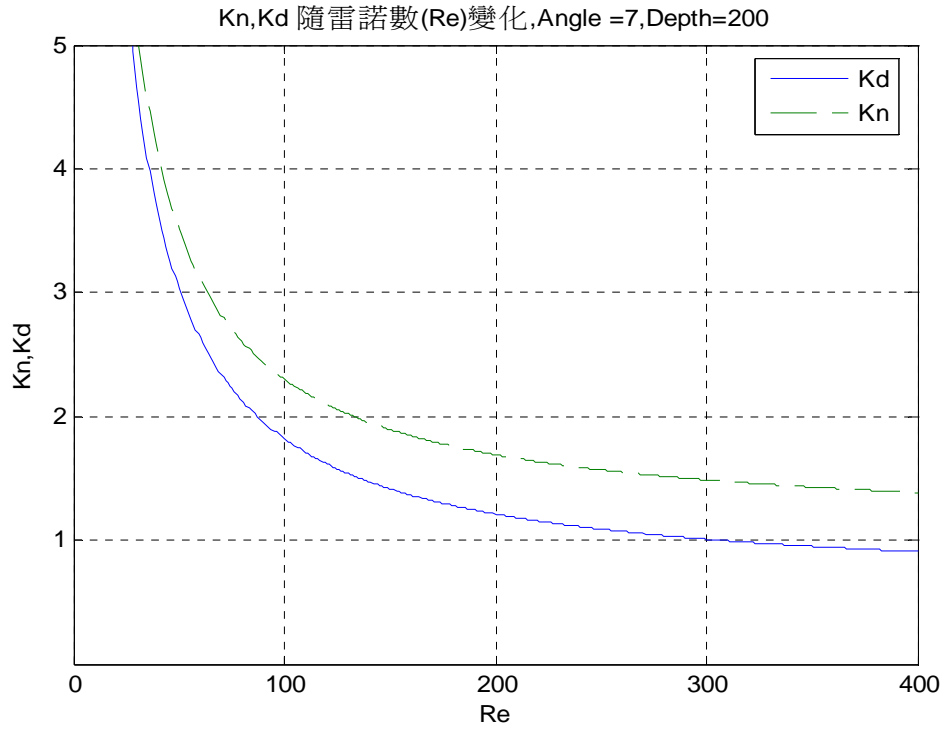
《圖 5.5》Diffuser-Element 示意圖，將 Nozzle/Diffuser 元件的壓力係數分成三個區間探討：Region 1-入口區間，Region 2-漸縮/漸擴區間，Region 3-出口區間。



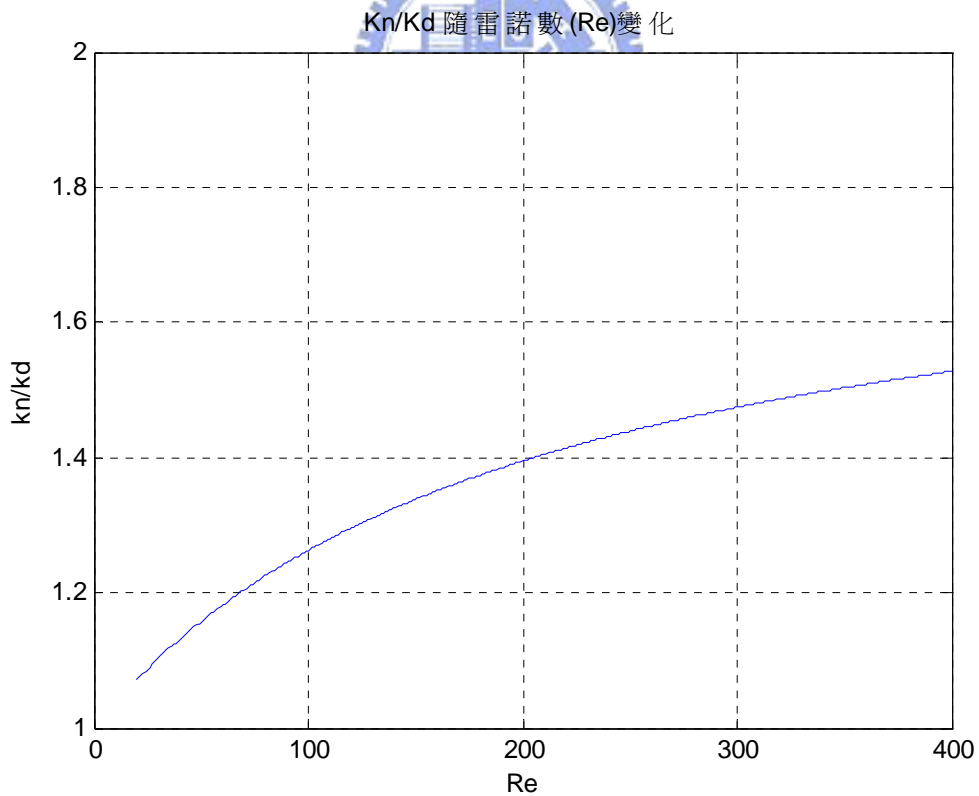
《圖 5.6》不同進口導角對於入口 K 值的影響【14】



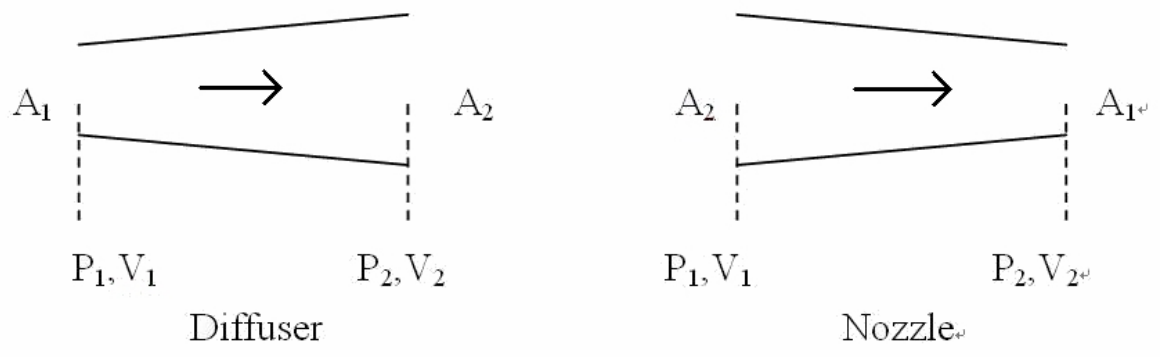
《圖 5.7》(A)方管摩擦係數 f 與不同深寬比的關係 (B)以文獻【18】方式所求得管道內部的壓力損失



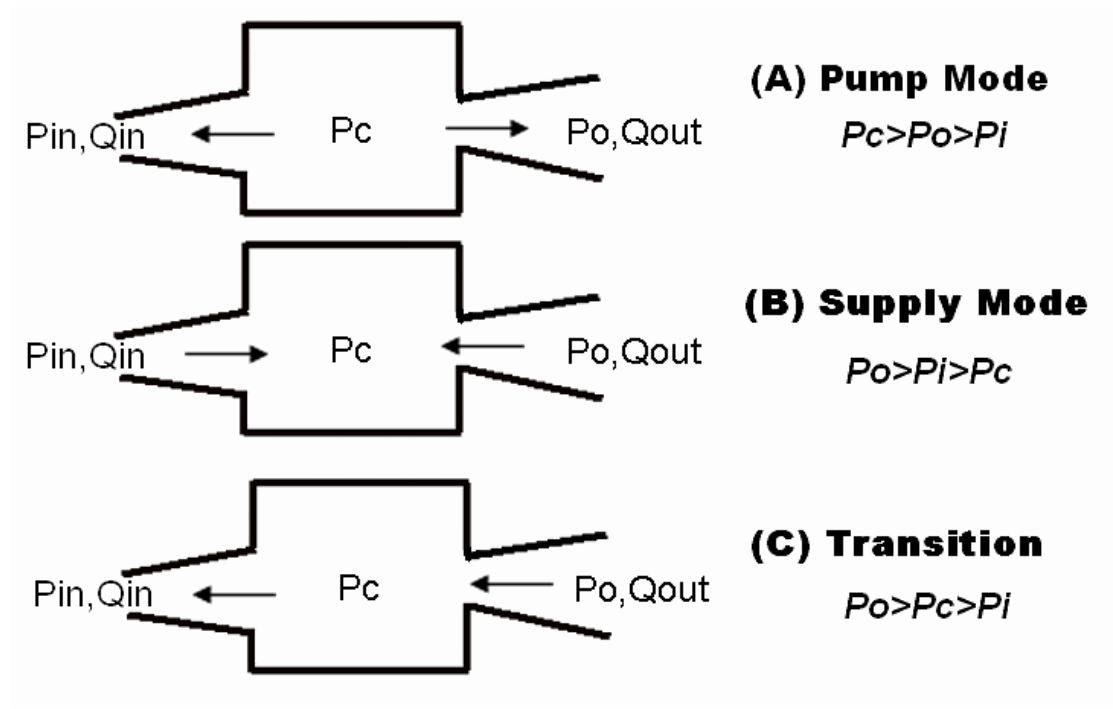
《圖 5.8》以文獻【18】方式計算 Kn,Kd 隨不同雷諾數(Re)的變化



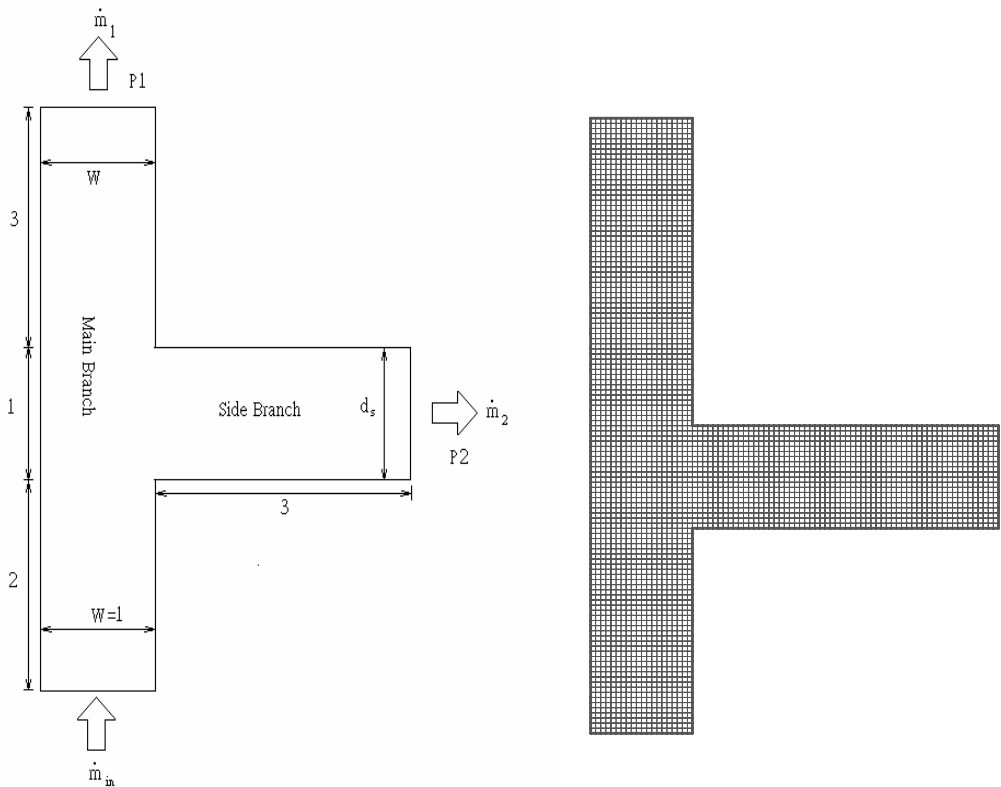
《圖 5.9》以文獻【18】方式計算於不同雷諾數(Re)下的 η_{nd}



《圖 5.10》 Diffuser 流向與 Nozzle 流向示意圖

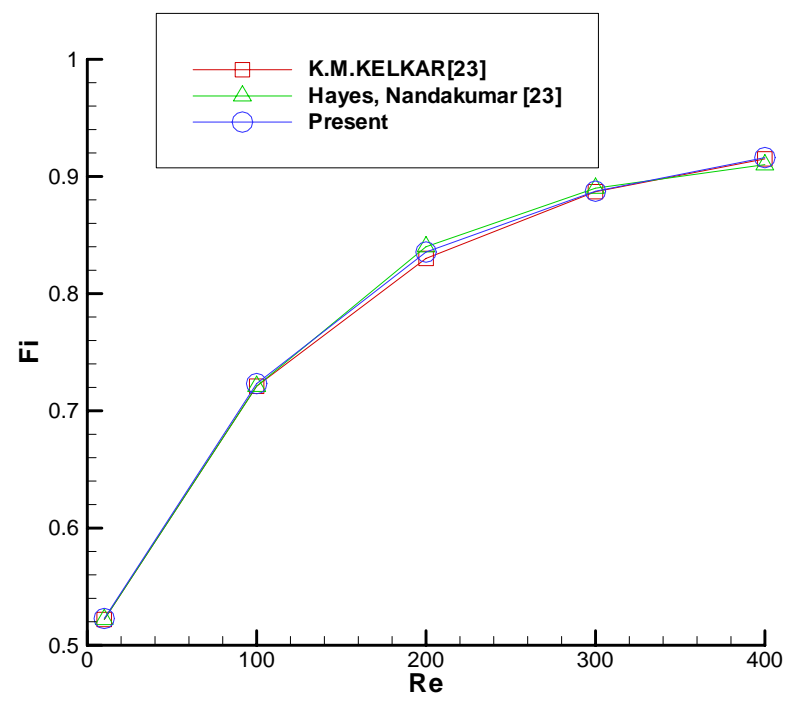


《圖 5.11》 Ullmann【6】針對單腔體微幫浦所區分的三個區間

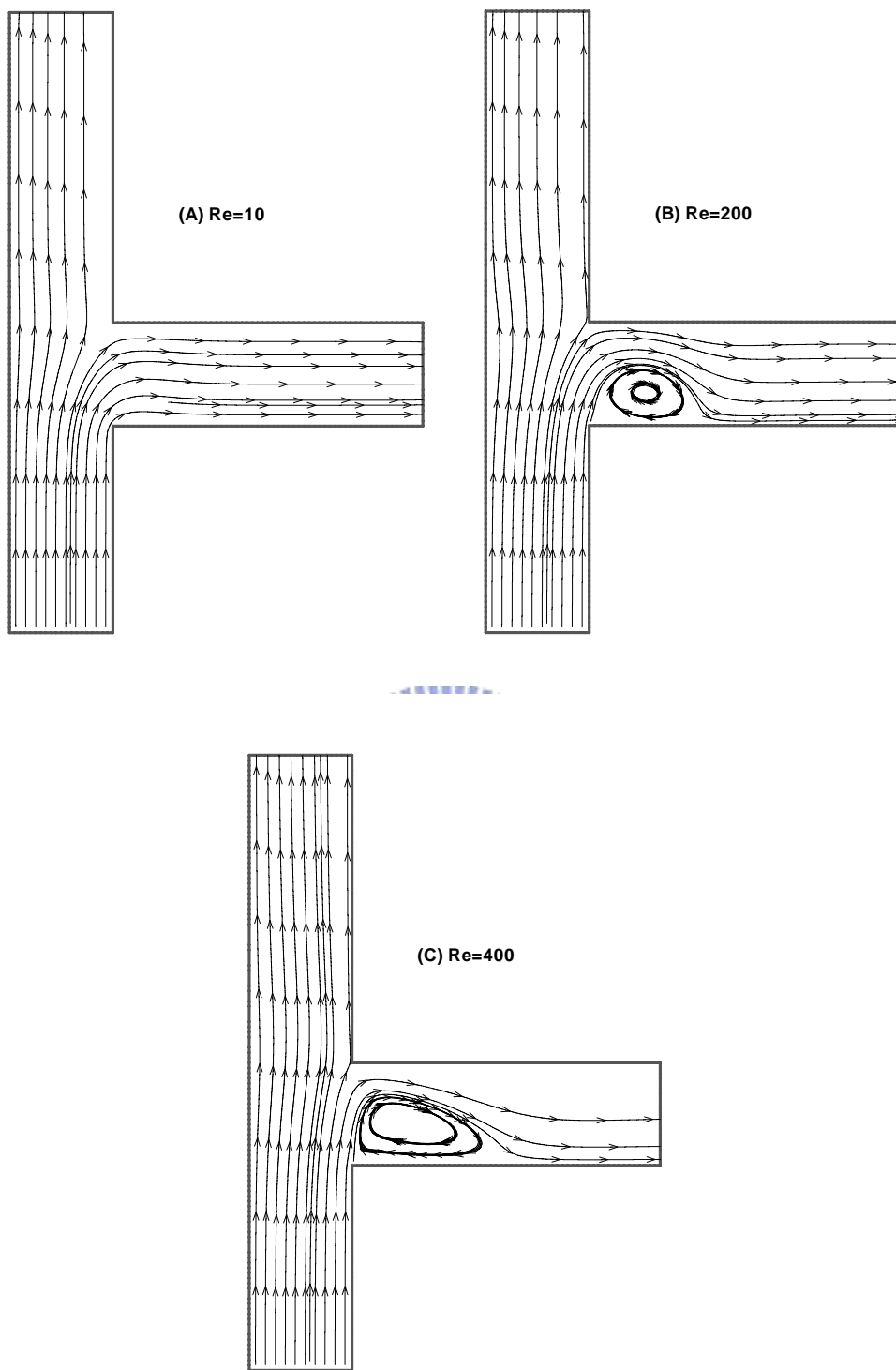


(a) 幾何 (b) 網格 (Mesh = 3600)

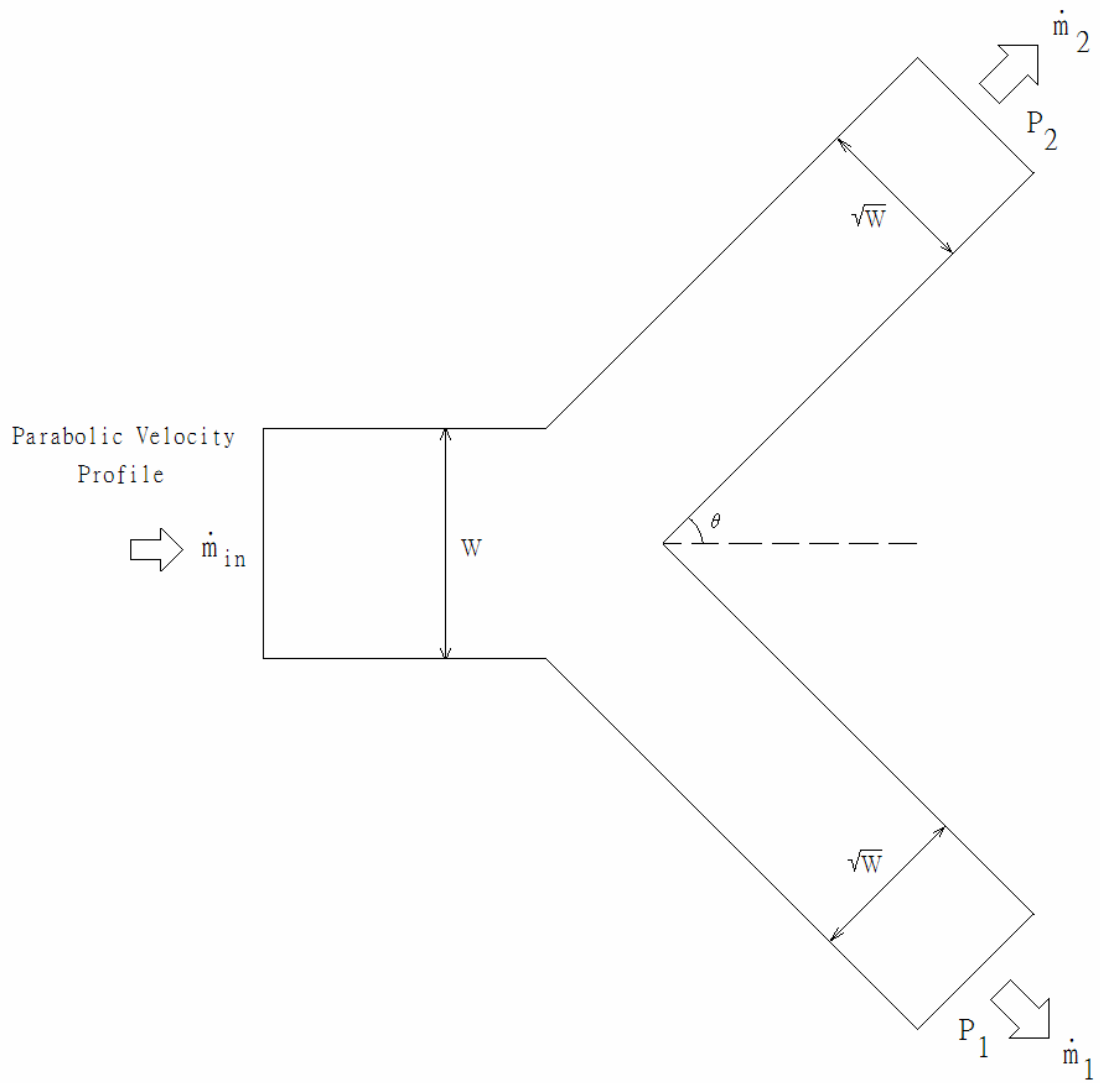
《圖 6.1》壓力邊界測試(1) - T 型分歧管的幾何與網格



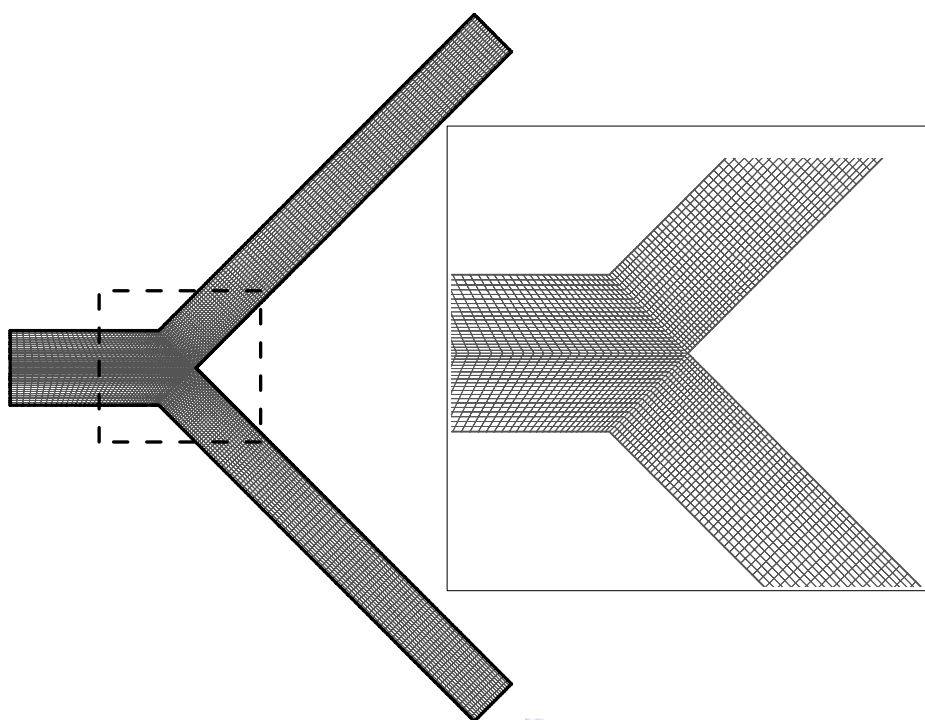
《圖 6.2》壓力邊界測試(1)的結果 - 流量比($Fi = \dot{m}_1 / \dot{m}_{in}$)隨雷諾數的變化。



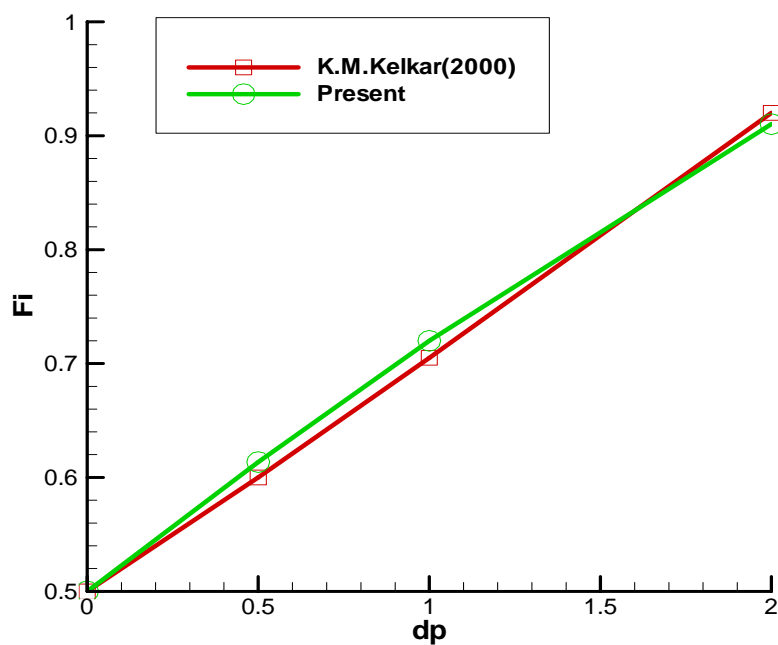
《圖 6.3》壓力邊界測試(1)的結果 - 雷諾數為 10、200、400 的流場流線圖



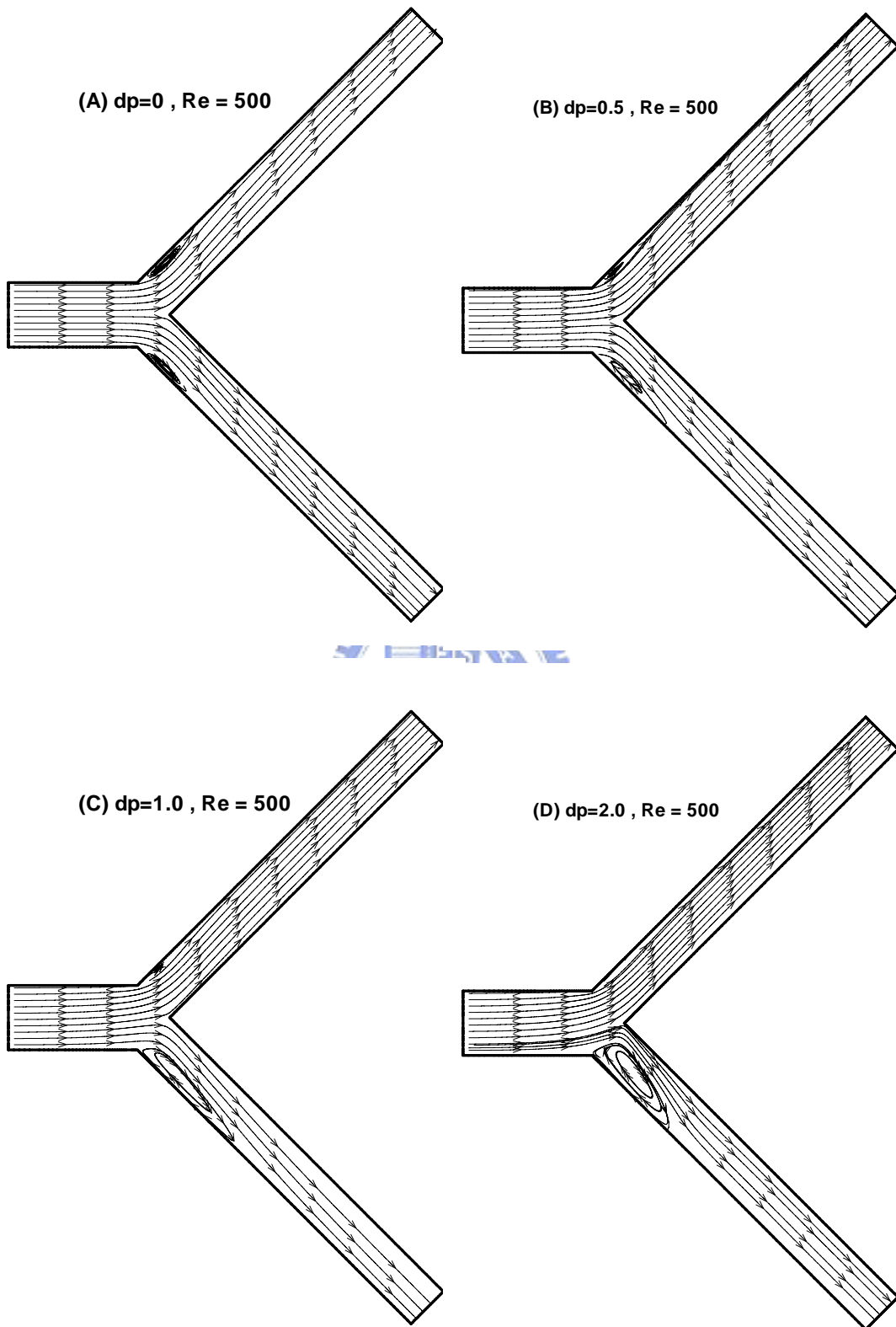
《圖 6.4》壓力邊界測試(2) - Y型分岐管幾何



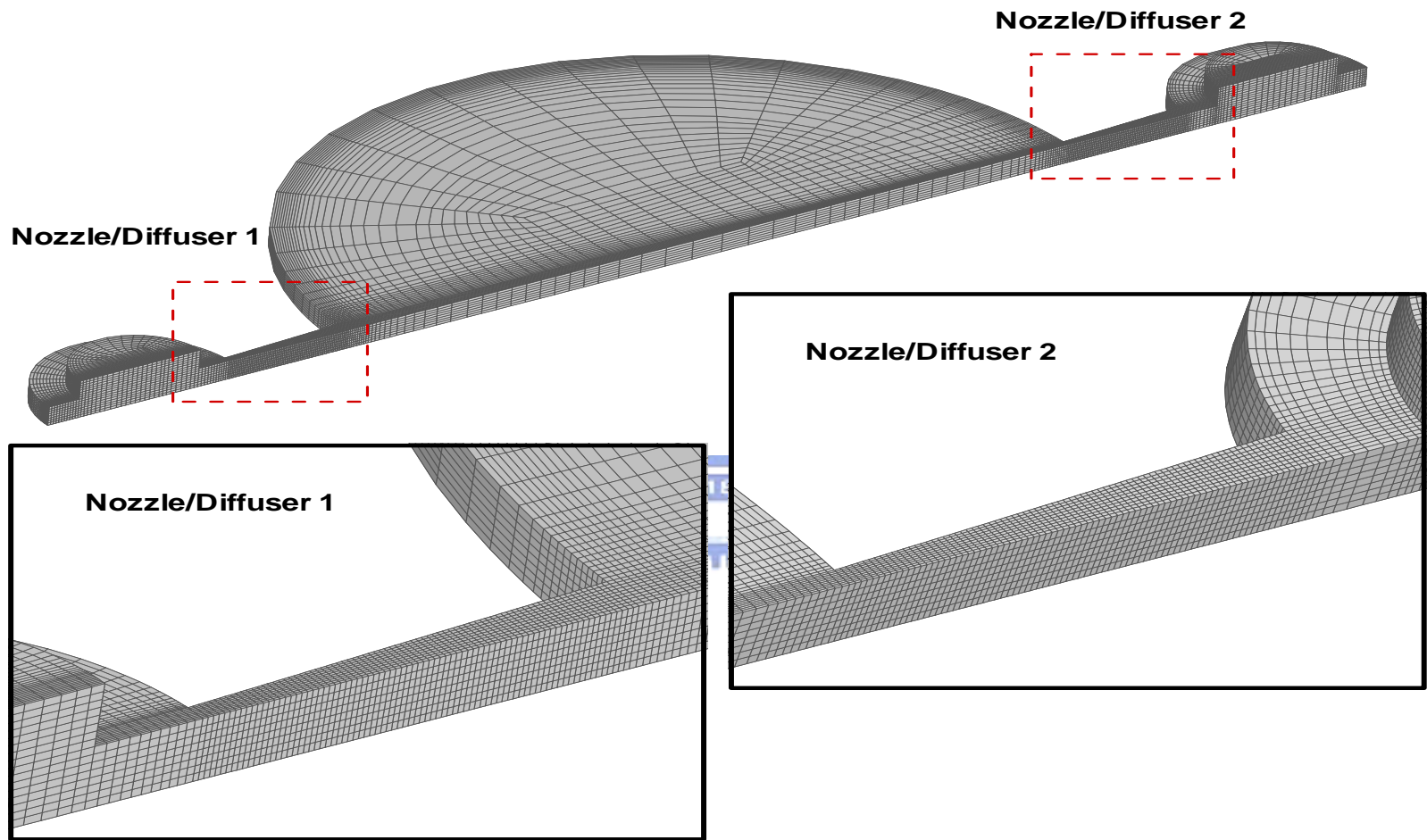
《圖 6.5》壓力邊界測試(2) - Y型分岐管網格



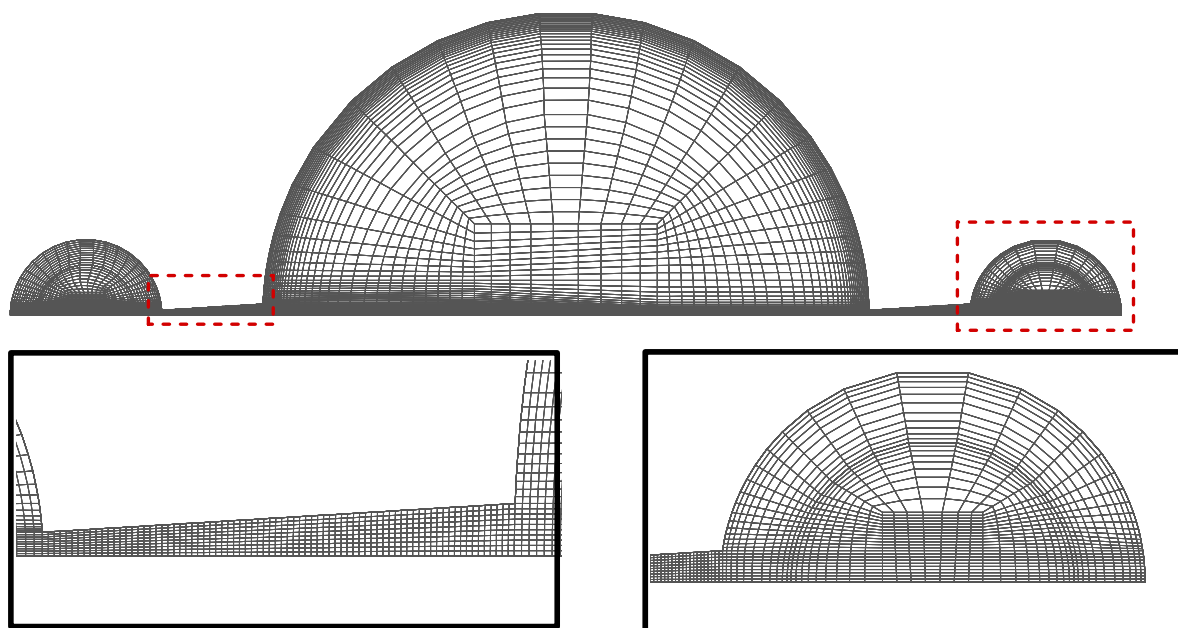
《圖 6.6》壓力邊界測試(2)的結果 - 流量比($Fi = \dot{m}_2 / \dot{m}_{in}$)隨出口壓力差 dp 的變化。



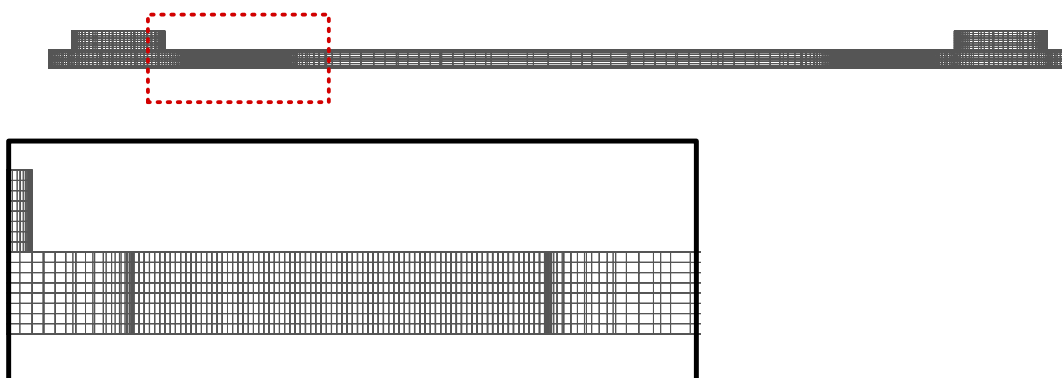
《圖 6.7》壓力邊界測試(2)的結果-不同壓差下的流



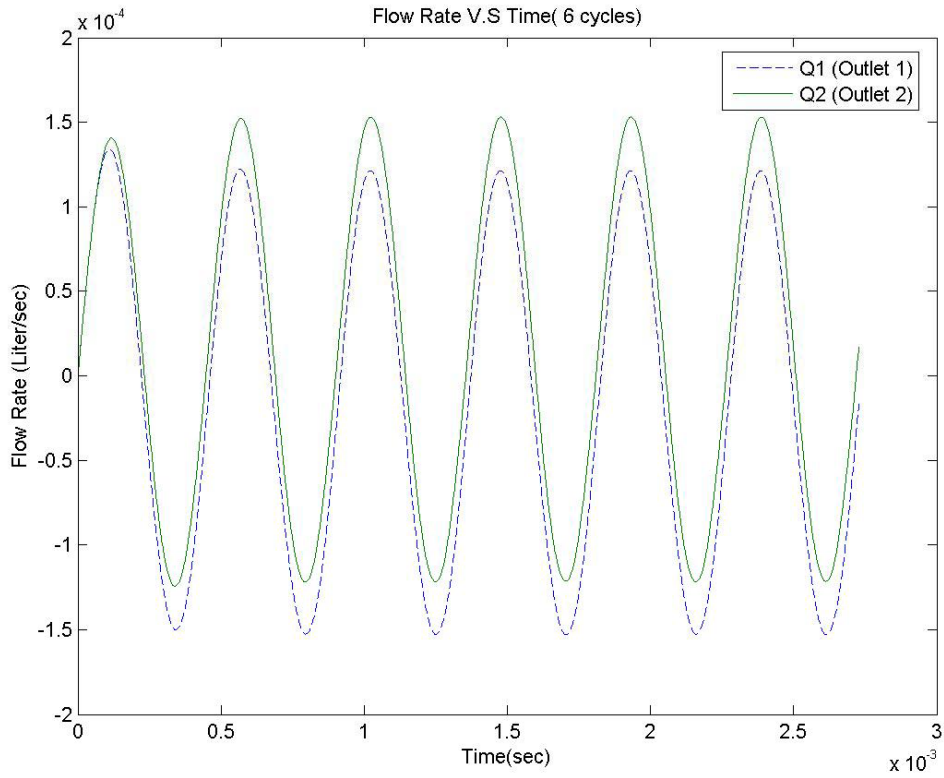
《圖 6.8》本文欲模擬的網格示意圖



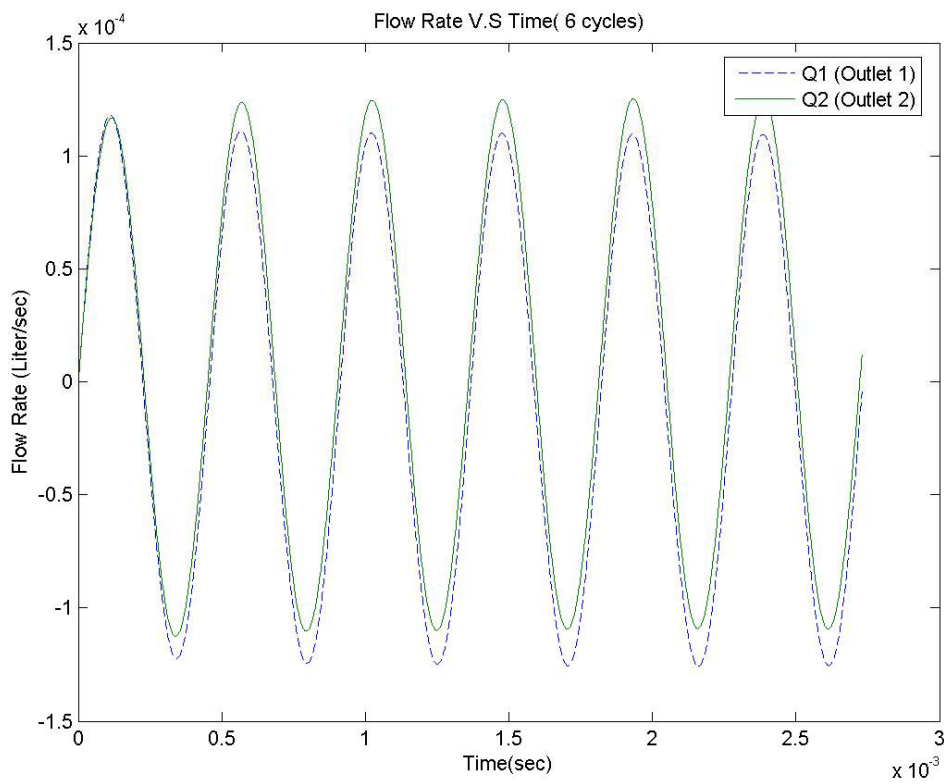
《圖 6.9》本文欲模擬的網格上視圖



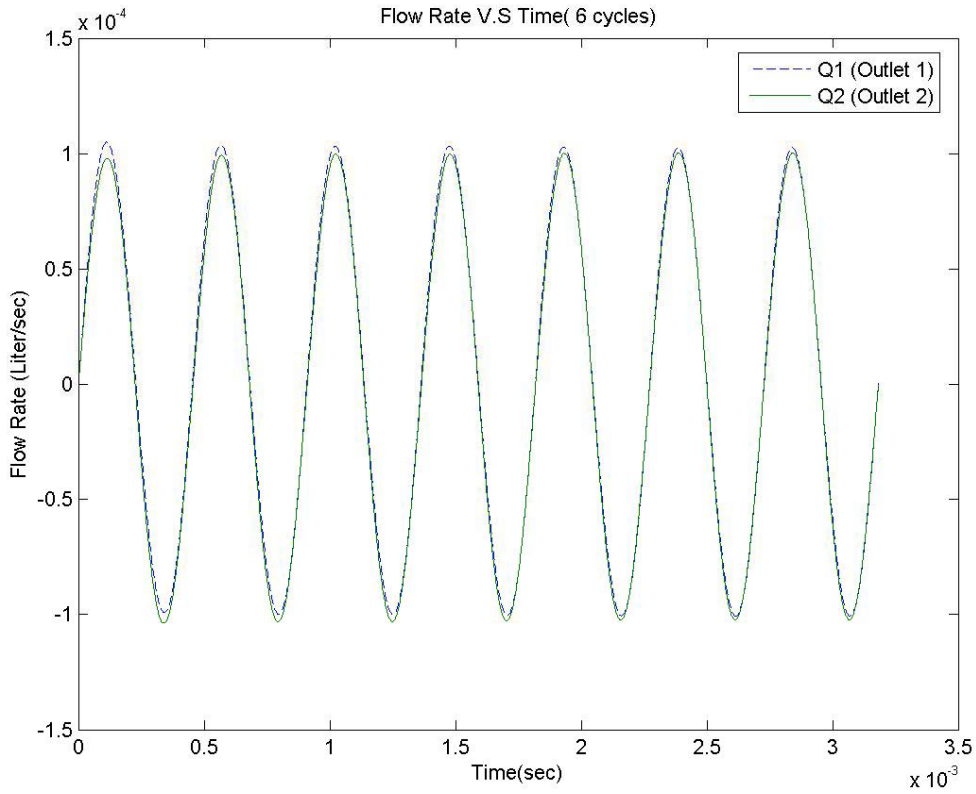
《圖 6.10》本文欲模擬的網格側視圖



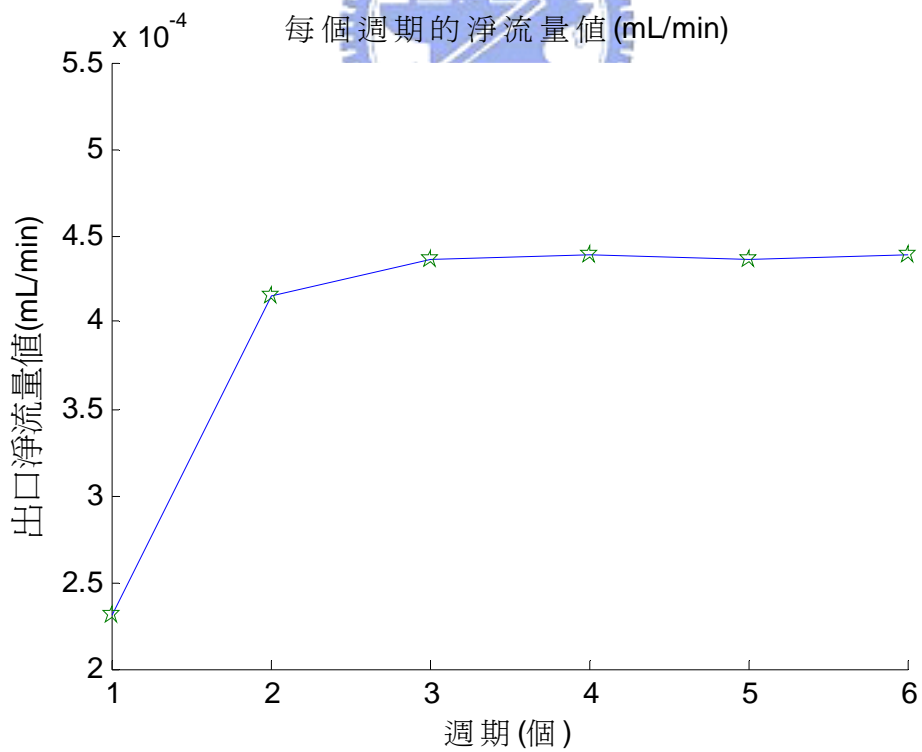
《圖 6.11》背壓 = 0 Pa，兩端出口流量 Q2,Q1 隨時間變化



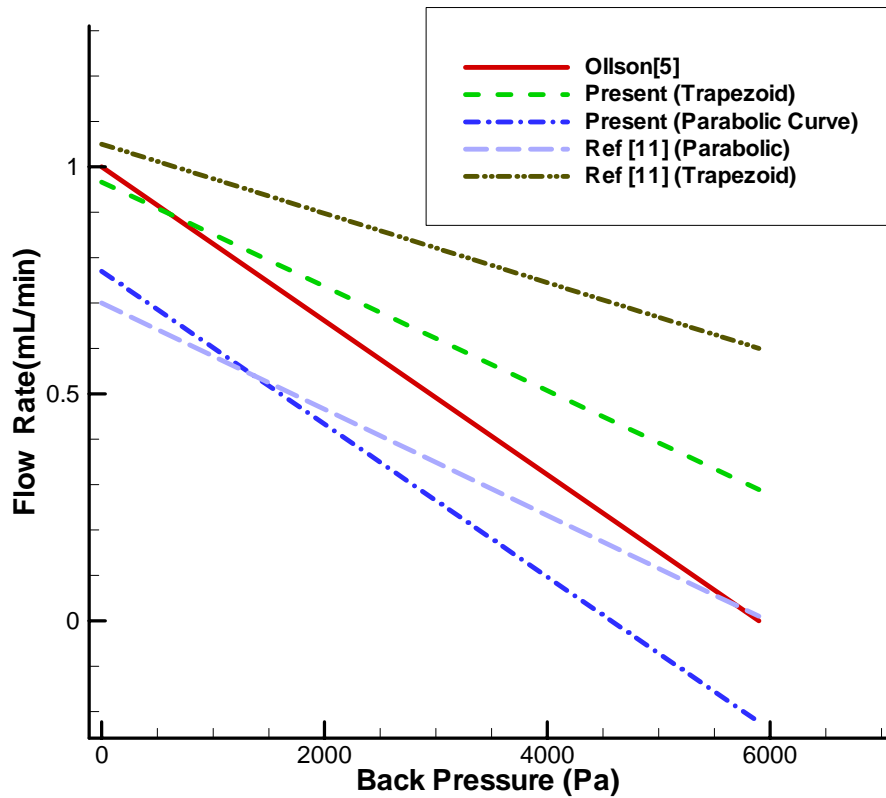
《圖 6.12》背壓 = 2950 Pa，兩端出口流量 Q2,Q1 隨時間變化



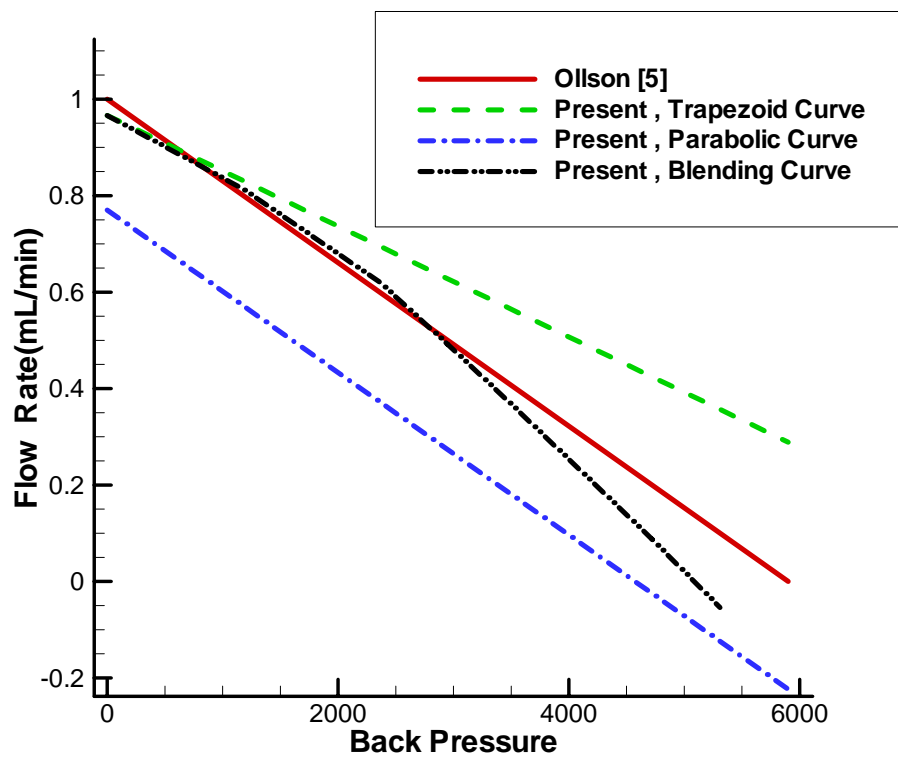
《圖 6.13》背壓 = 5310 Pa，兩端出口流量 Q2,Q1 隨時間變化



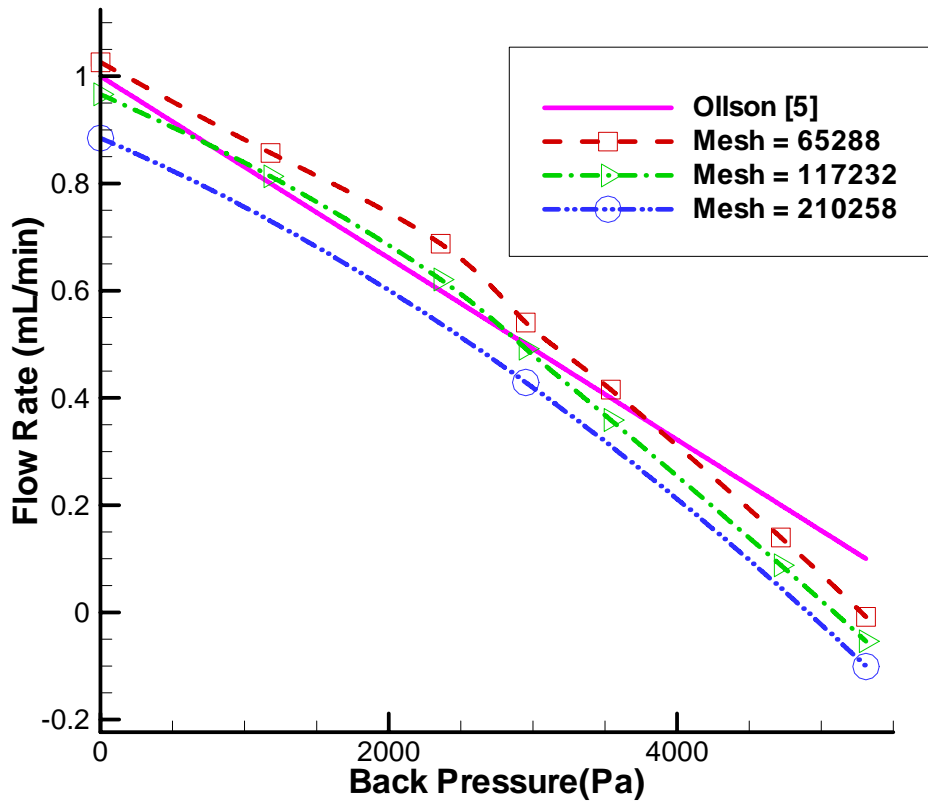
《圖 6.14》背壓 = 0 Pa，每個週期下的淨流量(mL/min)



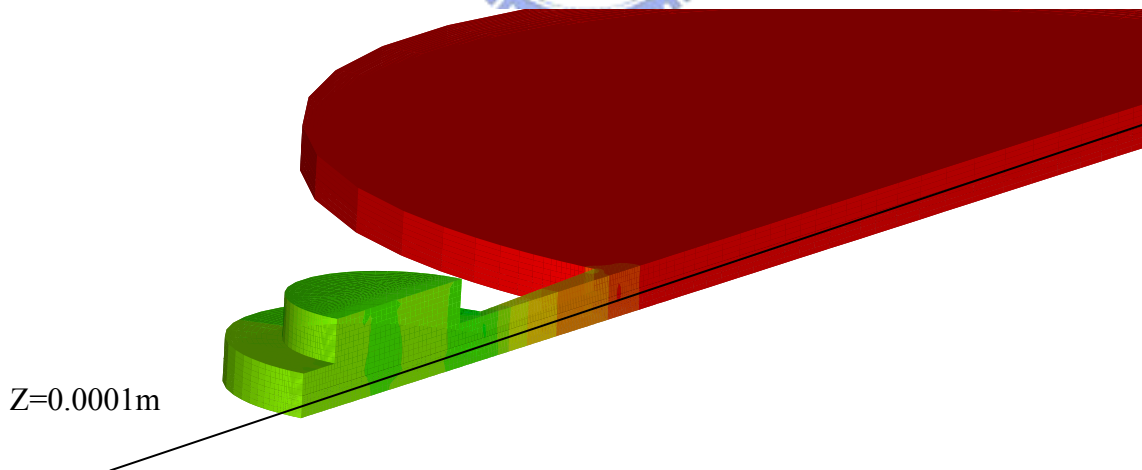
《圖 6.15》採用不同振動假設(2.3)、(2.4)式模擬所得淨流量與背壓關係圖



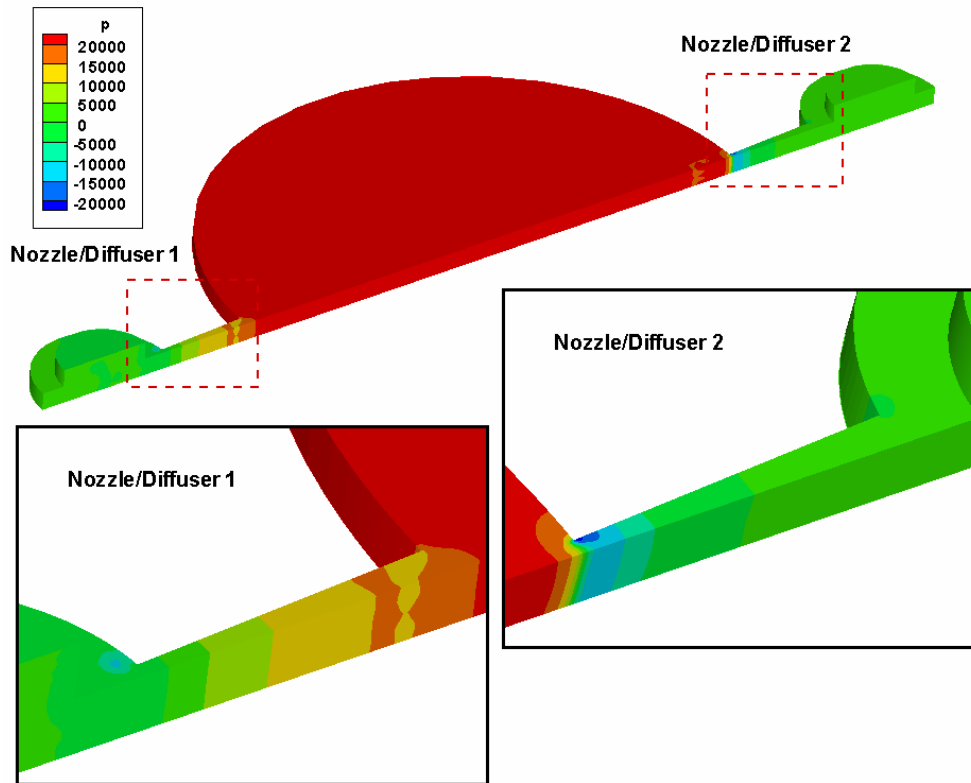
《圖 6.16》比較不同振動假設(2.3)、(2.4)、(2.8)式模擬所得淨流量與背壓關係圖



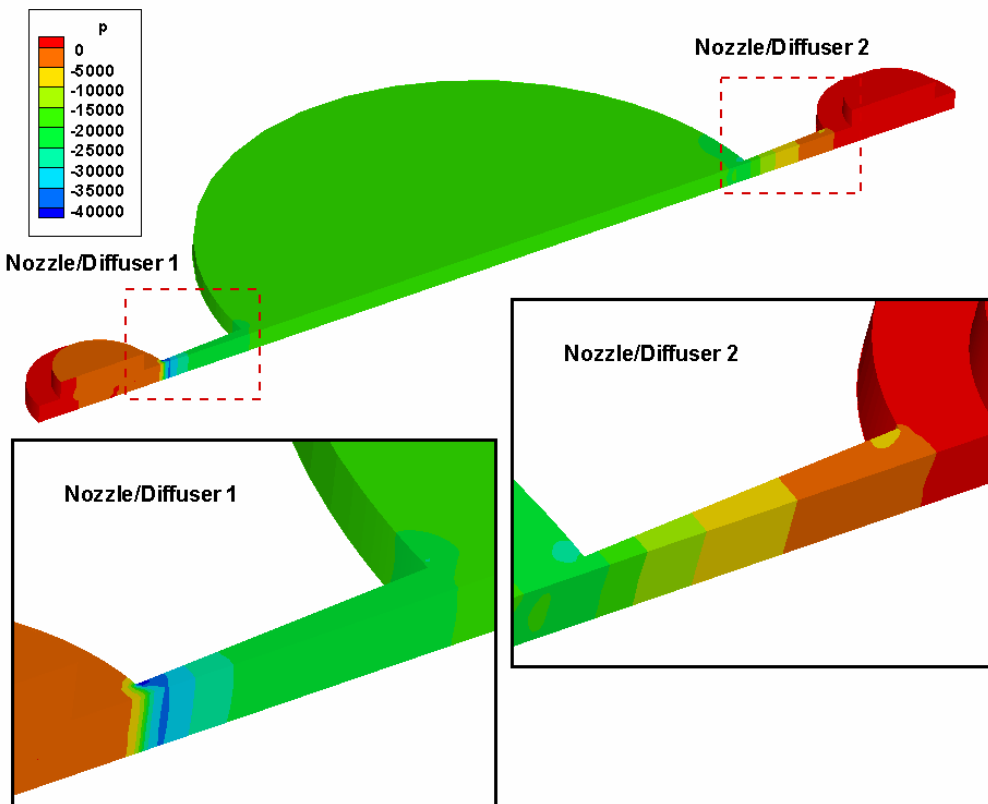
《圖 6.17》比較不同網格數量下(65288、117232、210258)，淨流量與背壓關係



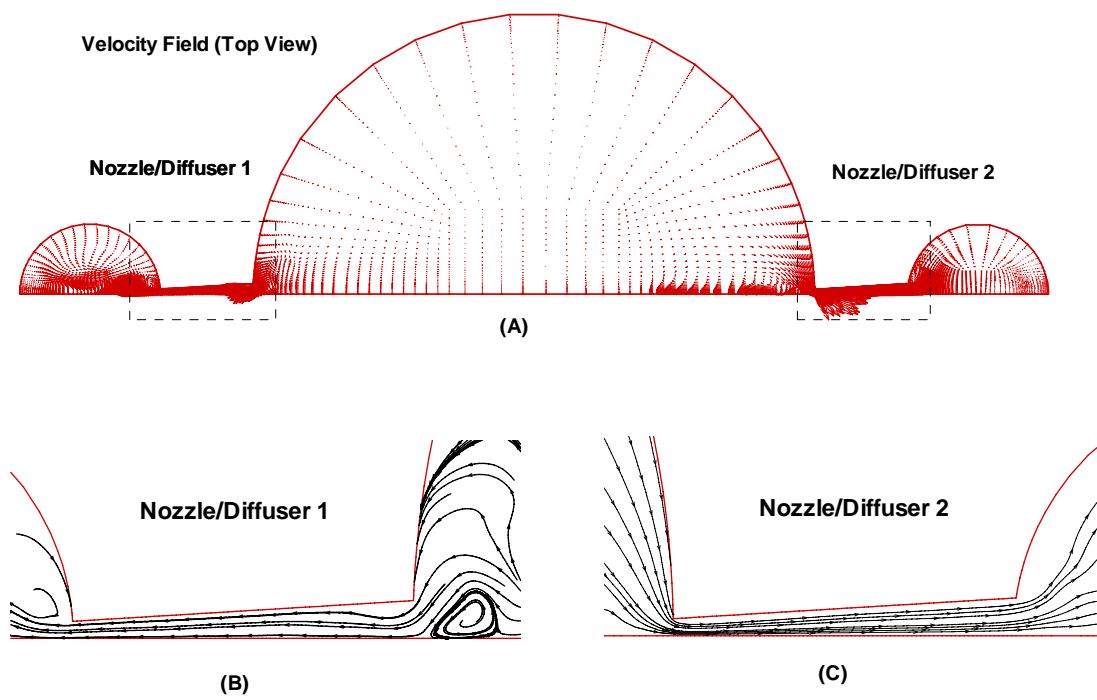
《圖 6.18》所取流場截面示意圖



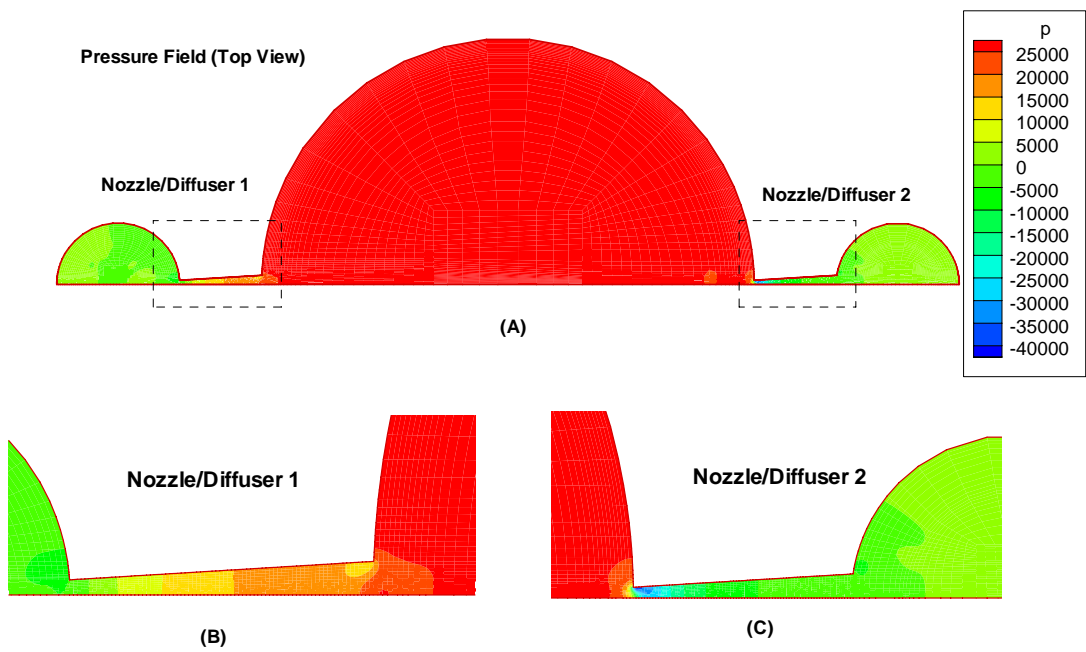
《圖 6.19》背壓=2950 Pa， $t = 0.25T$ ，壓力場分佈圖



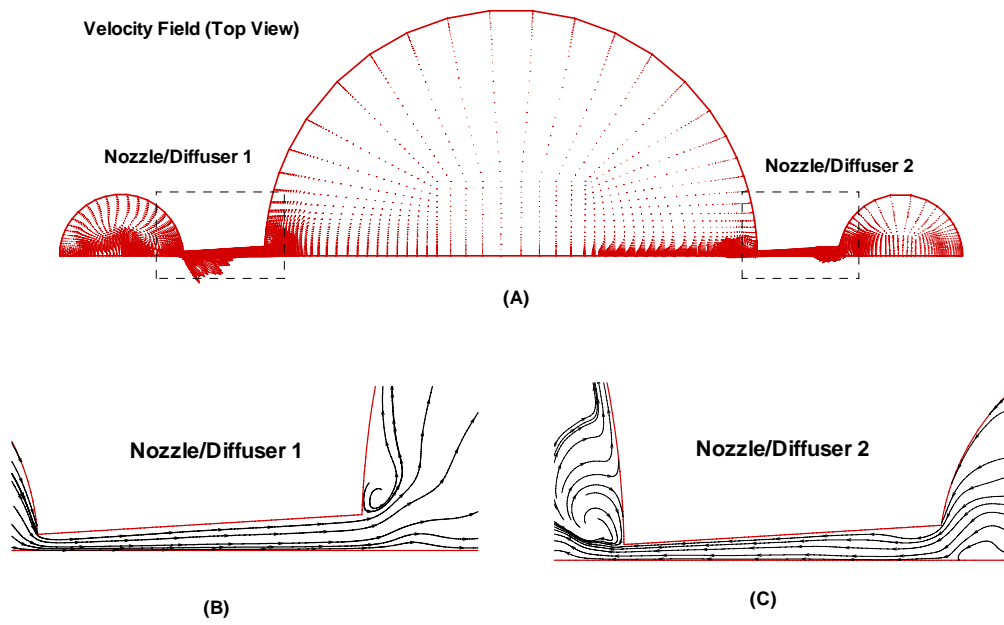
《圖 6.20》背壓=2950 Pa， $t = 0.75T$ ，壓力場分佈圖



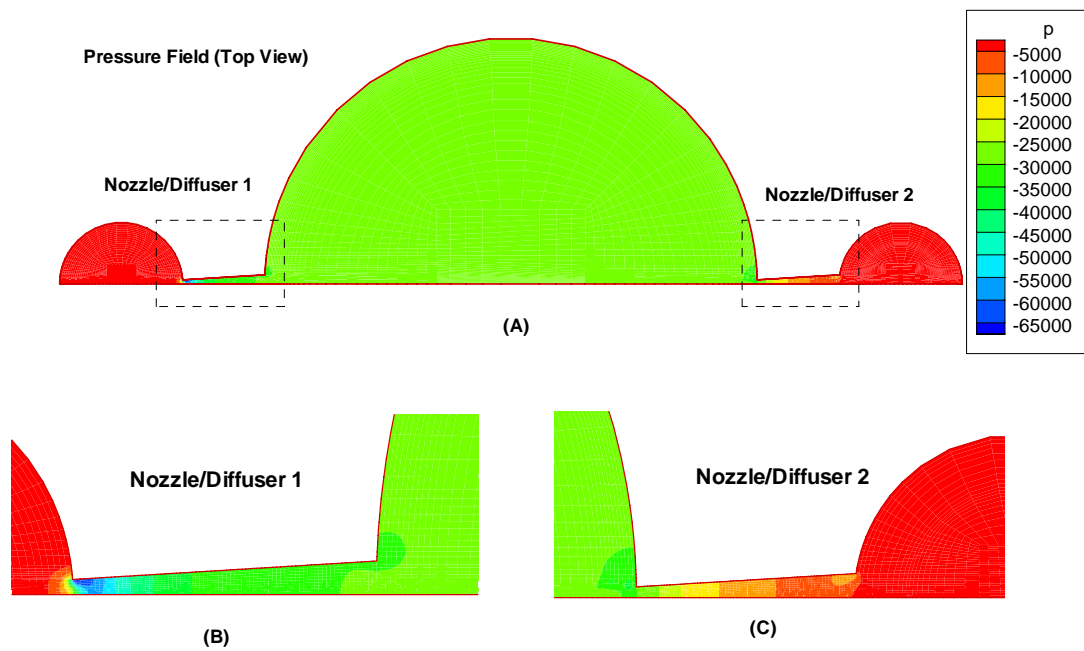
《圖 6.21》背壓=0，排水模式($t = 0.25T$)，截面圖($z=0.0001$ mm)



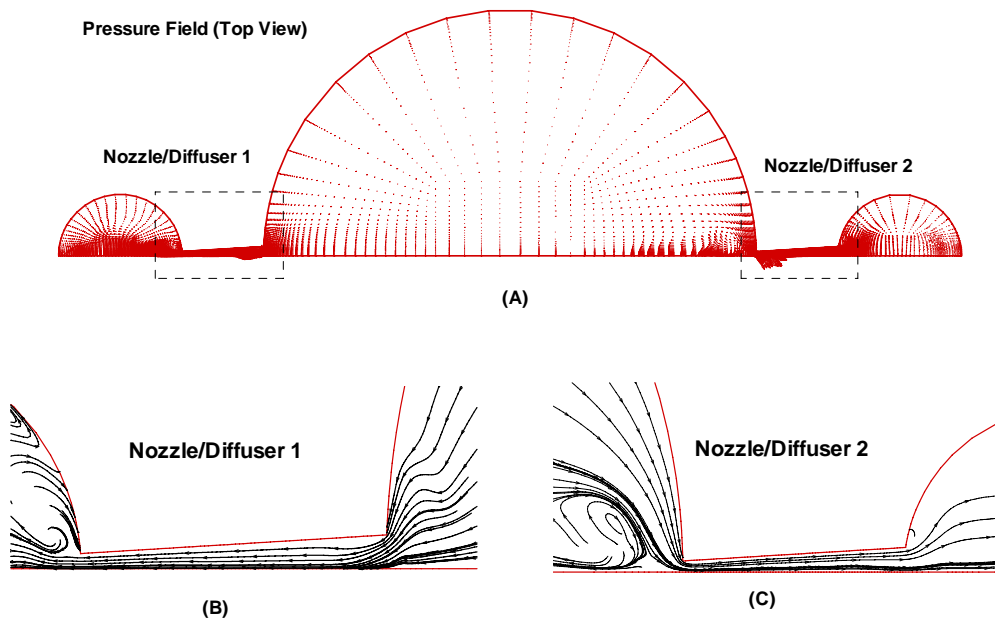
《圖 6.22》背壓=0，排水模式($t = 0.25T$)，流場與壓力場截面圖($z=0.0001$ mm)



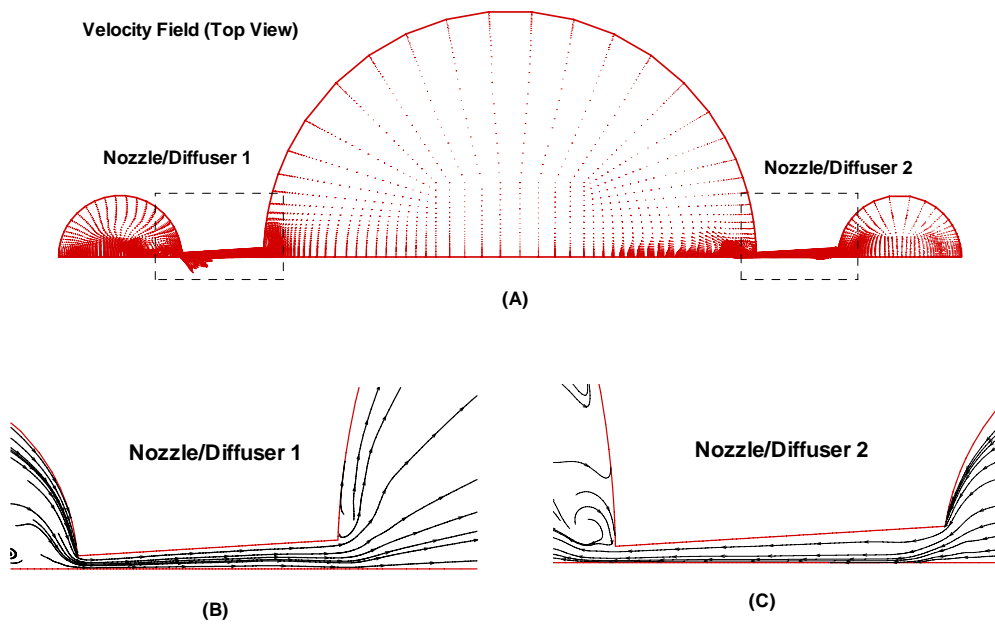
《圖 6.23》背壓=0，吸水模式($t = 0.75T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm)



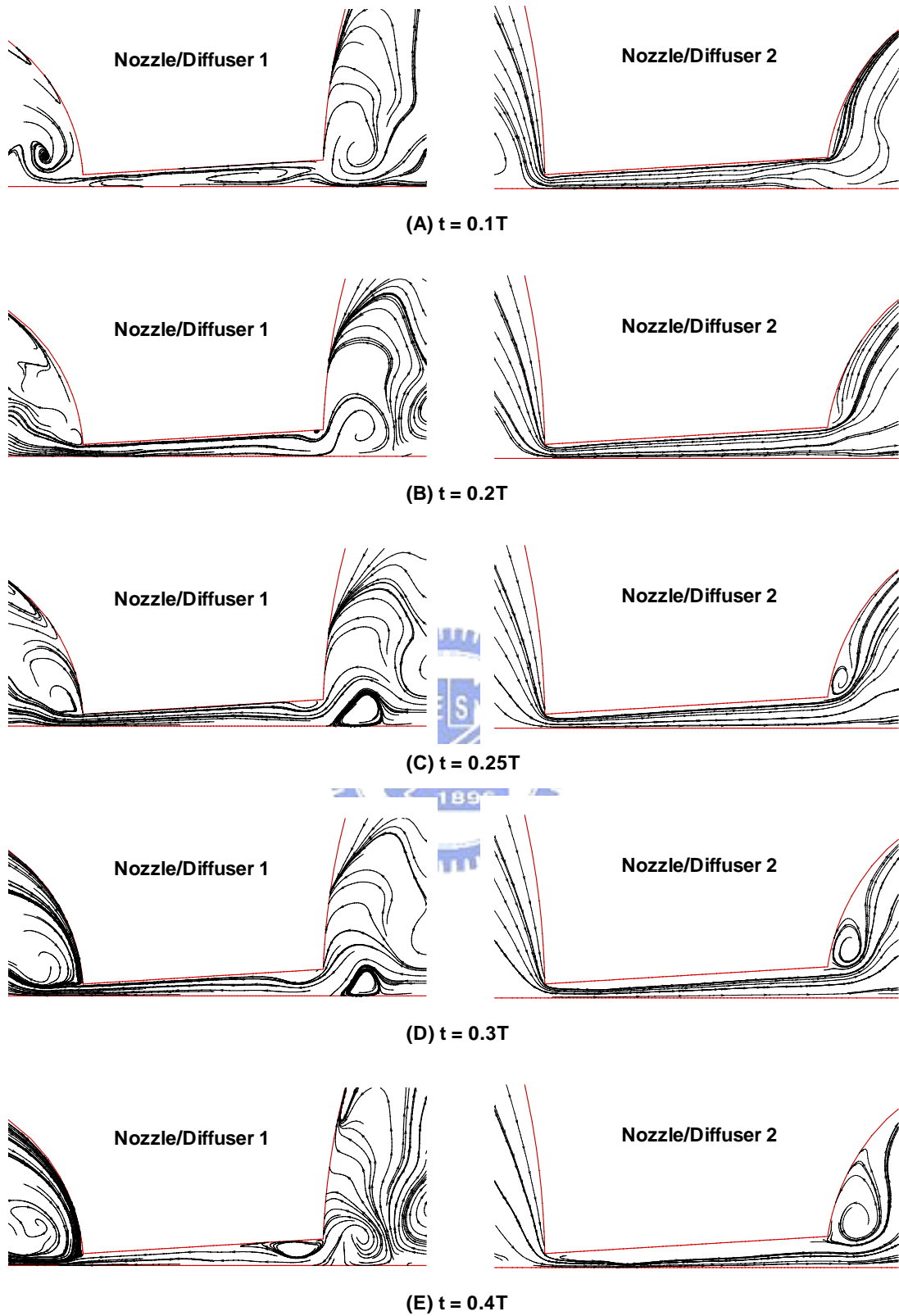
《圖 6.24》背壓=0，吸水模式($t = 0.75T$)，壓力場截面圖($z=0.0001$ mm)



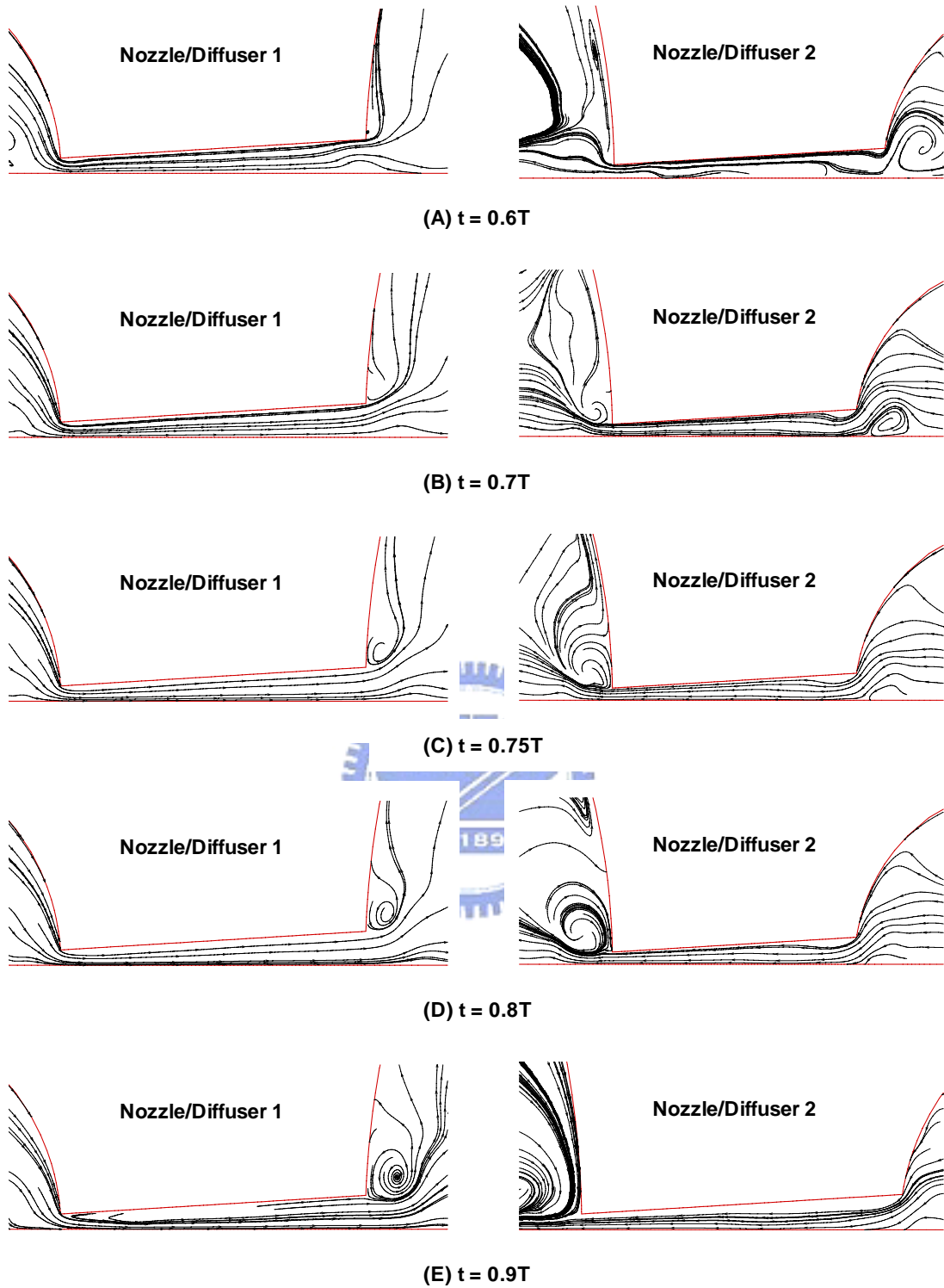
《圖 6.25》背壓=5310 Pa，排水模式($t = 0.25T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm)



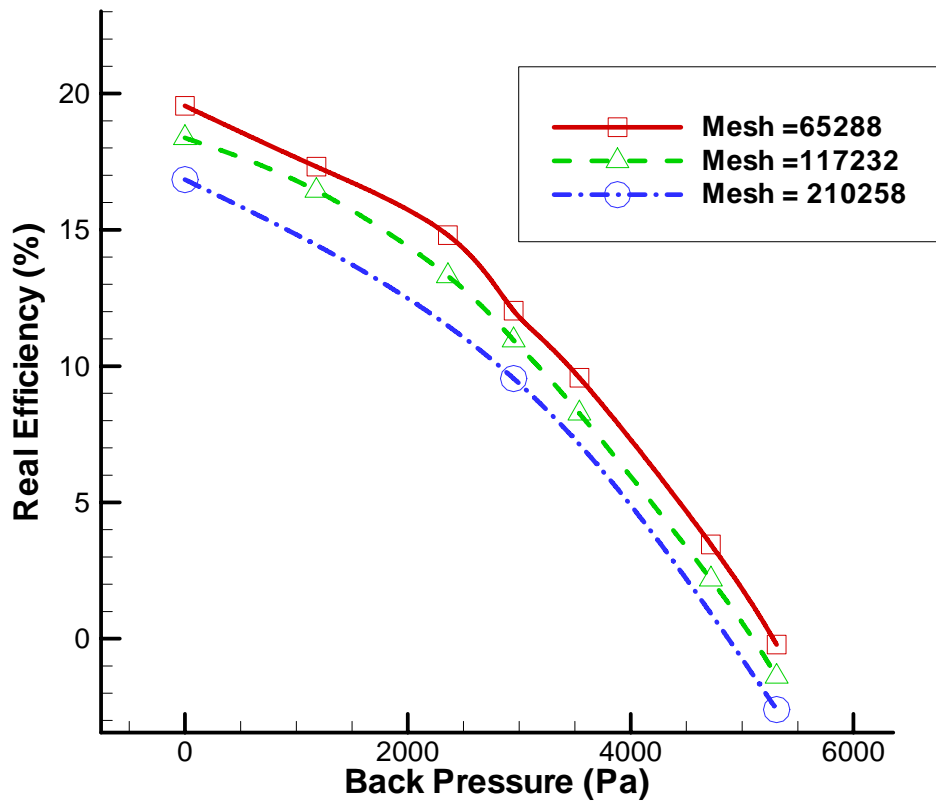
《圖 6.26》背壓=5310 Pa，吸水模式($t = 0.75T$)，流場截面圖($z=0.0001$ mm)



《圖 6.27》背壓=0 Pa，排水模式，不同時間下 Nozzle/Diffuser 流場圖($z=0.0001$ mm)

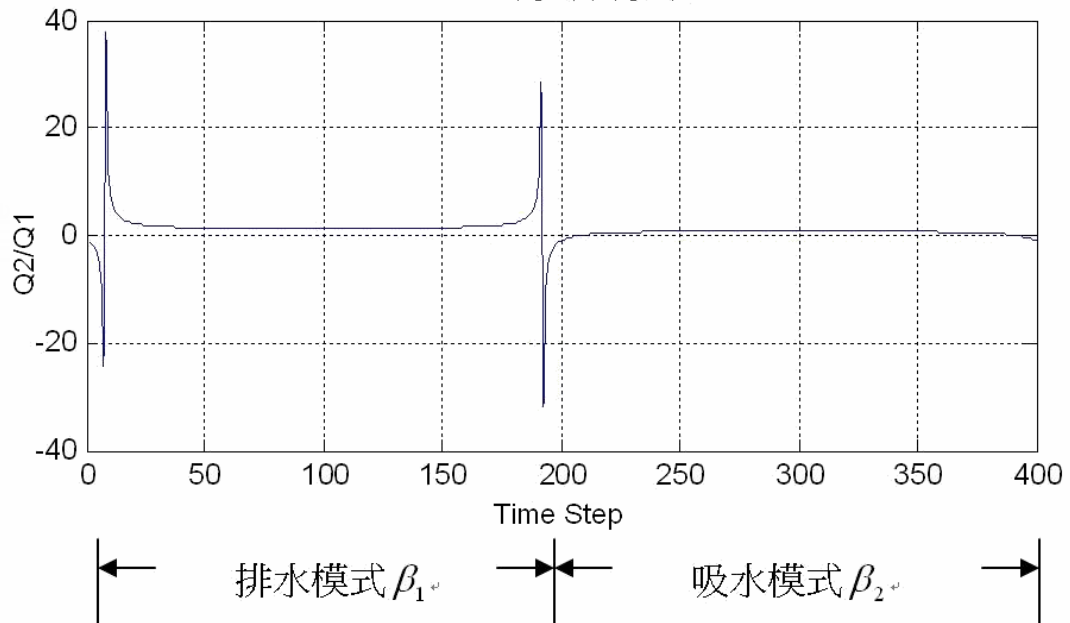


《圖 6.28》背壓=0 Pa，吸水模式，不同時間下 Nozzle/Diffuser 流場圖($z=0.0001$ mm)

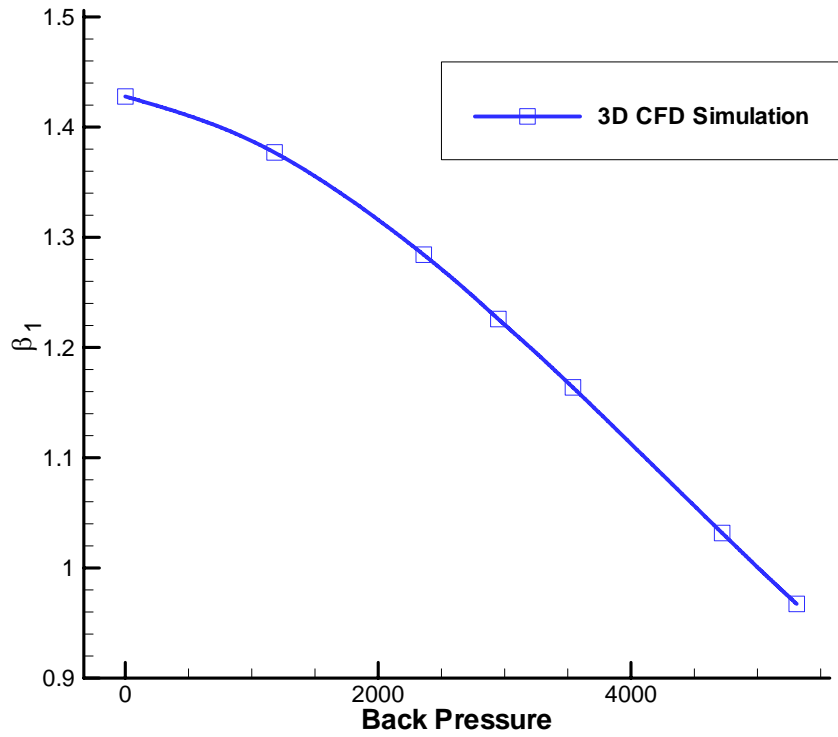


《圖 6.29》比較不同網格下，真實效率 η_r 與背壓的關係

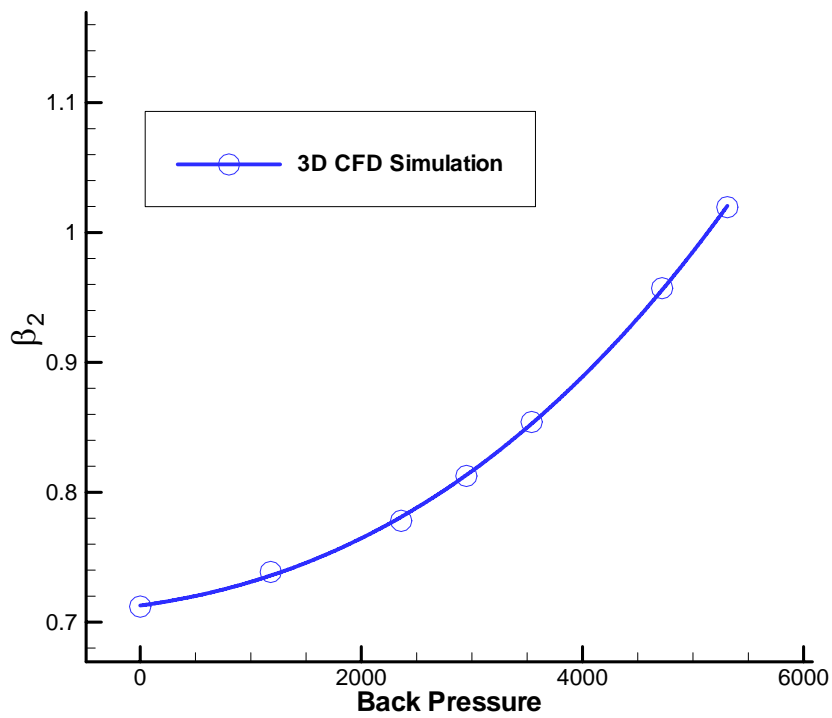
Q2/Q1 隨時間變化



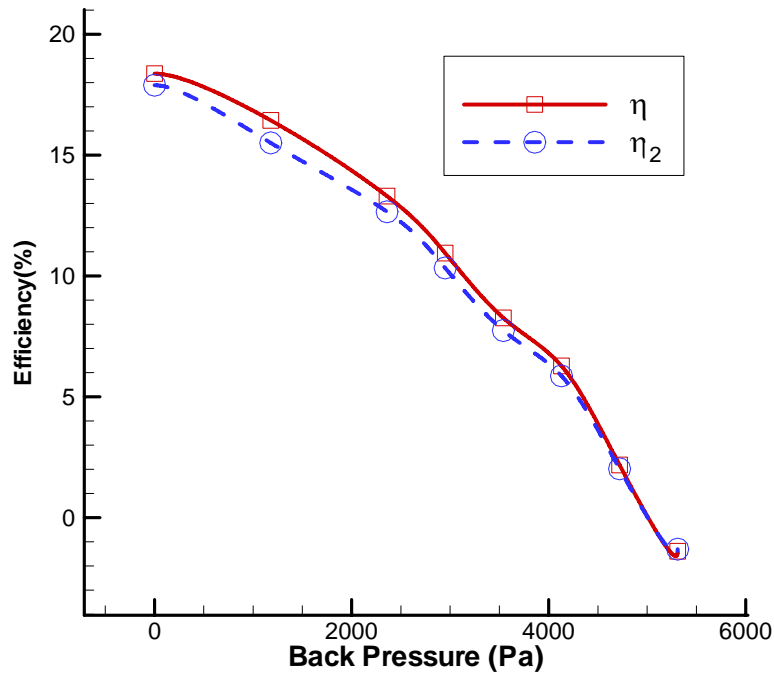
《圖 6.30》 $\beta(Q2/Q1)$ 於一個週期內的變化



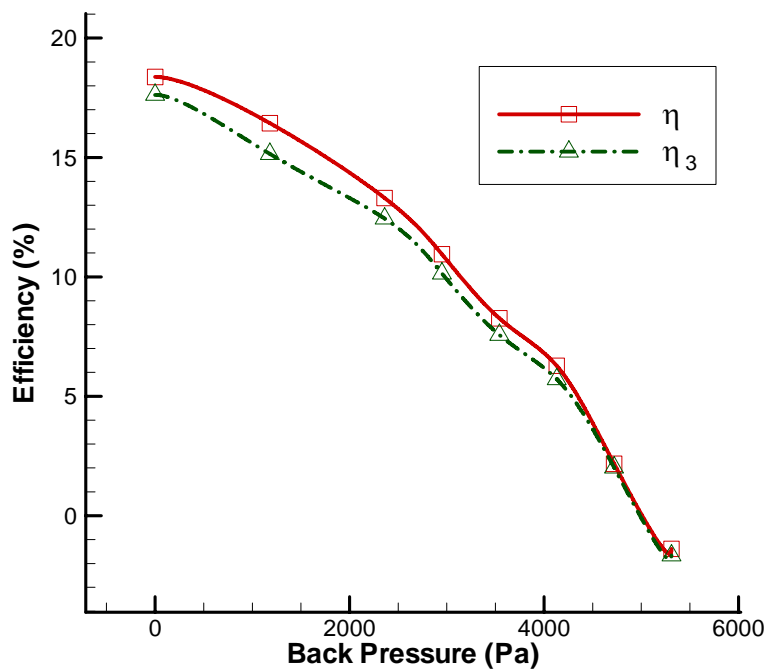
《圖 6.31》 Pump Model 下，流量比 β_1 (Q_2/Q_1) 與背壓的關係(網格 = 117232)



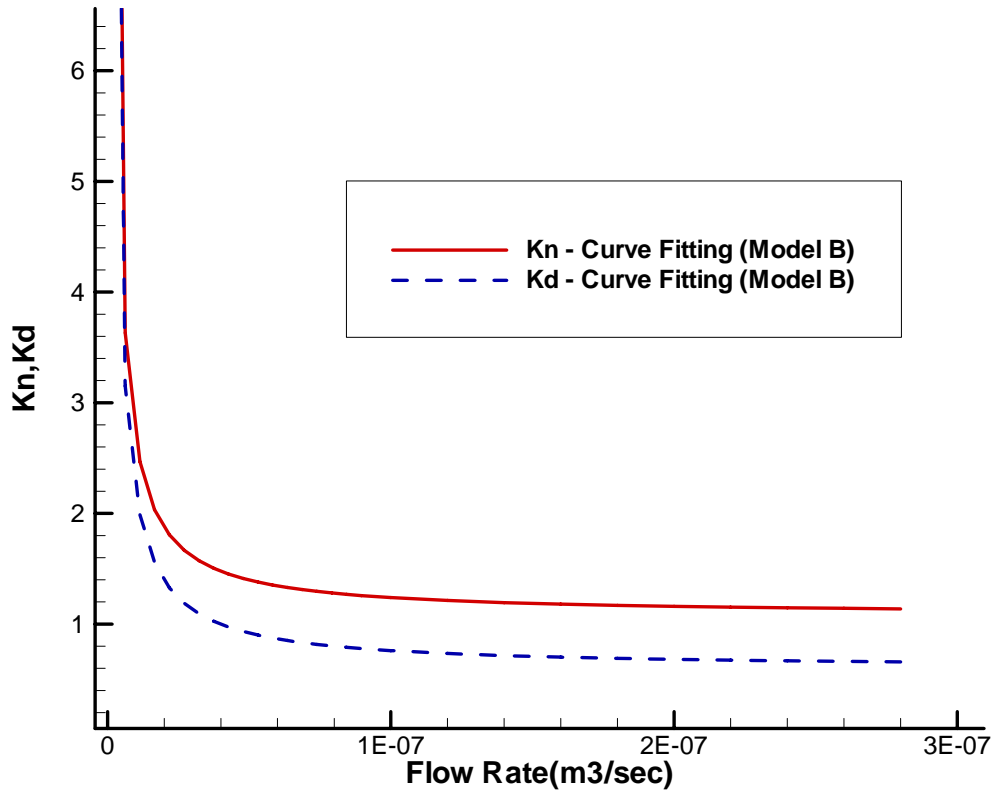
《圖 6.32》 Supply Model 下，流量比 β_2 (Q_2/Q_1) 與背壓的關係(網格 = 117232)



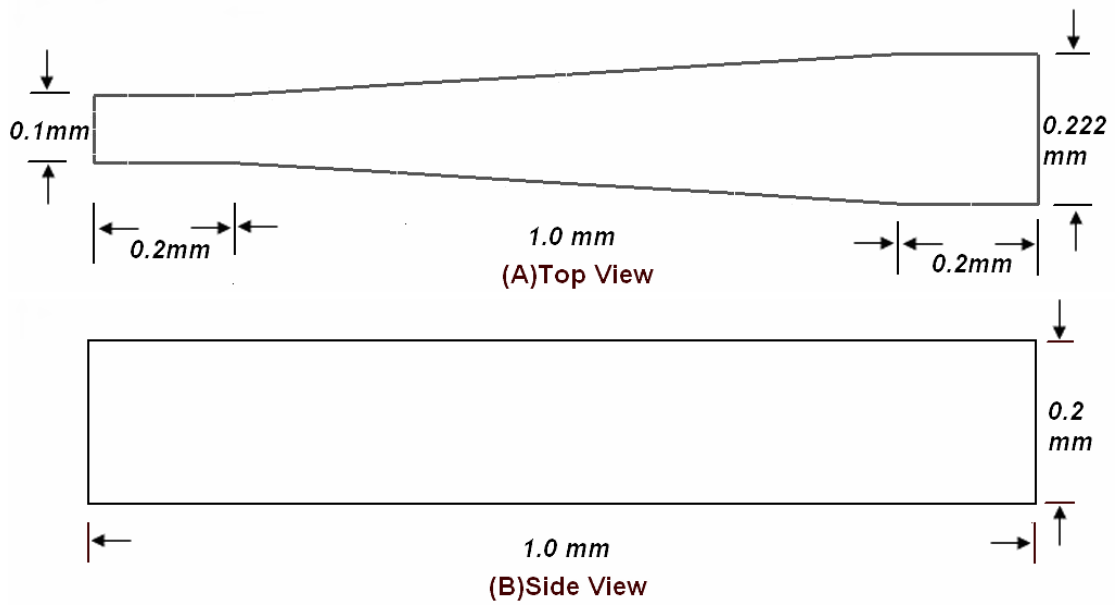
《圖 6.33》(5.19)式計算的效率 η_2 與真實效率(η)在不同背壓下的關係
(網格 = 117232)



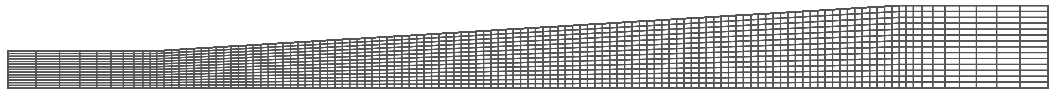
《圖 6.34》(5.23)式計算的效率 η_3 與真實效率(η_r)在不同背壓下的關係
(網格 = 117232)



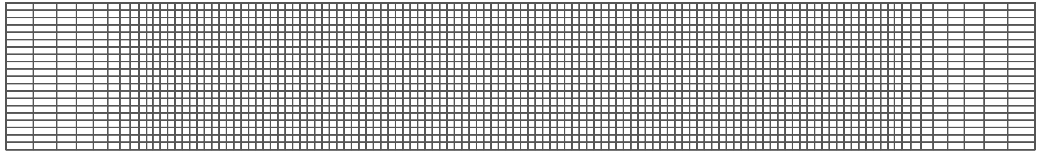
《圖 6.35》Kn, Kd 隨流量的變化 (Model B)



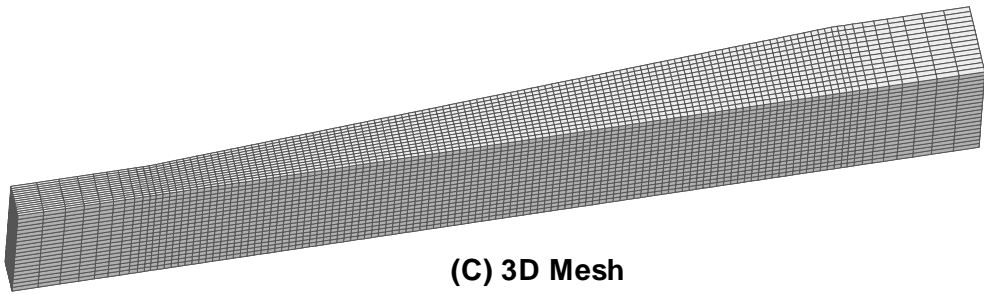
《圖 6.36》欲研究的 Nozzle/Diffuser 幾何尺寸



(A) Top View

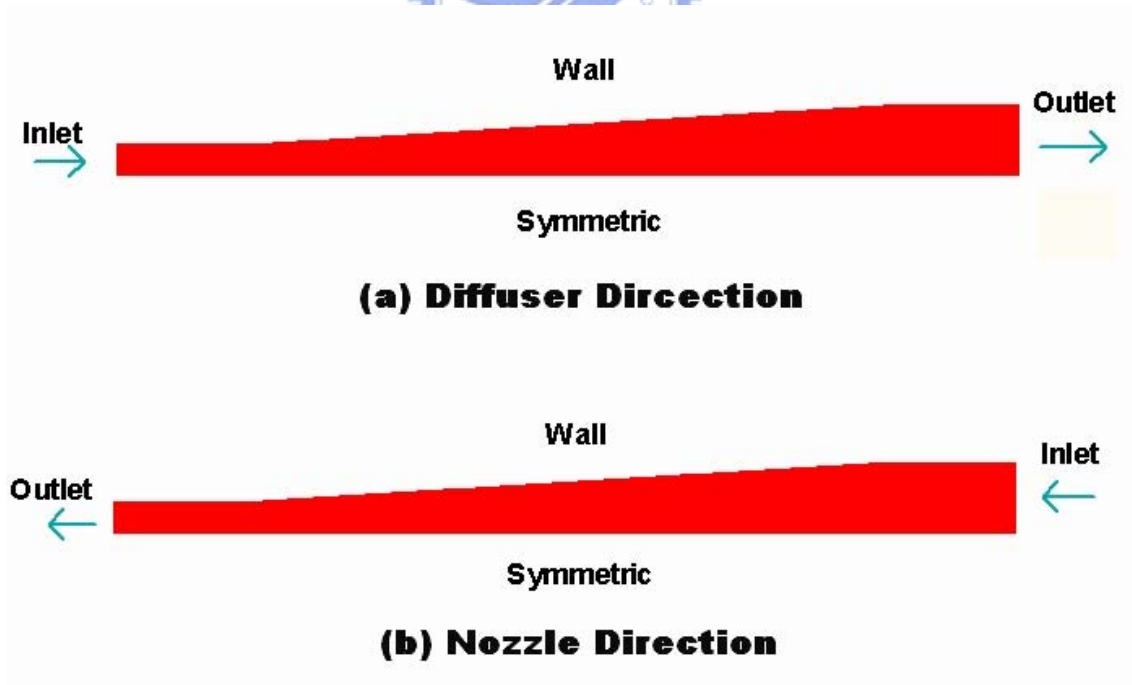


(B) Side View

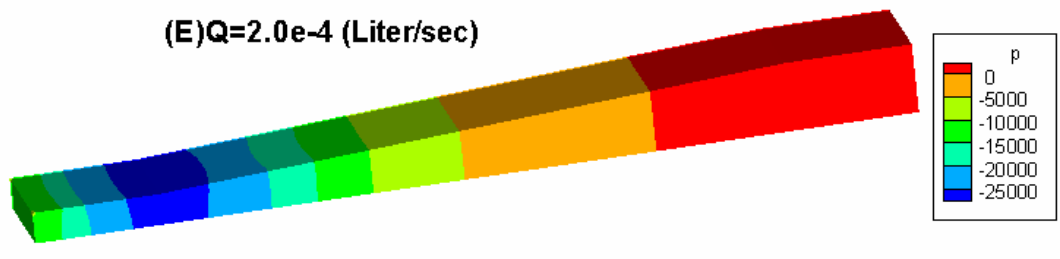
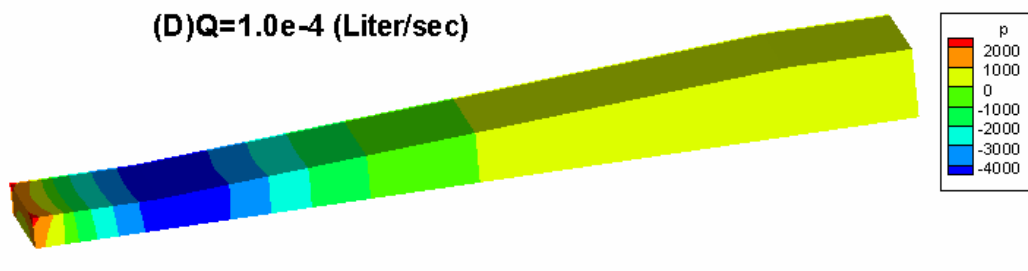
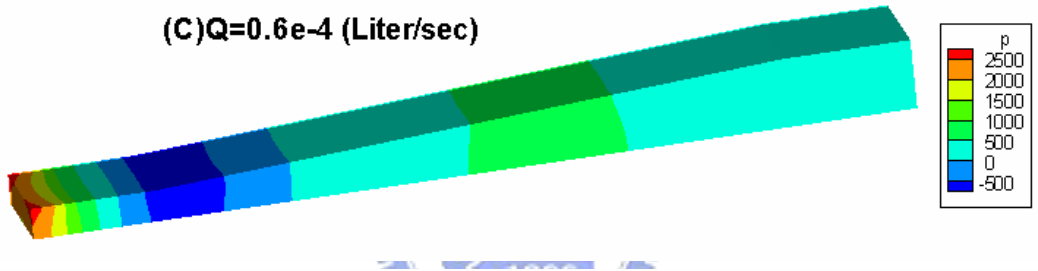
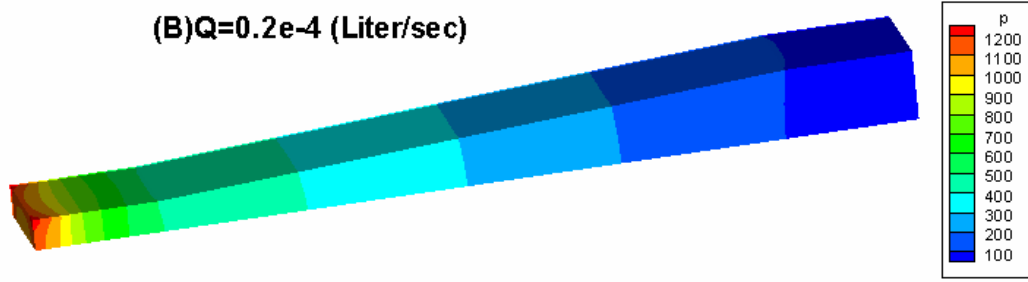
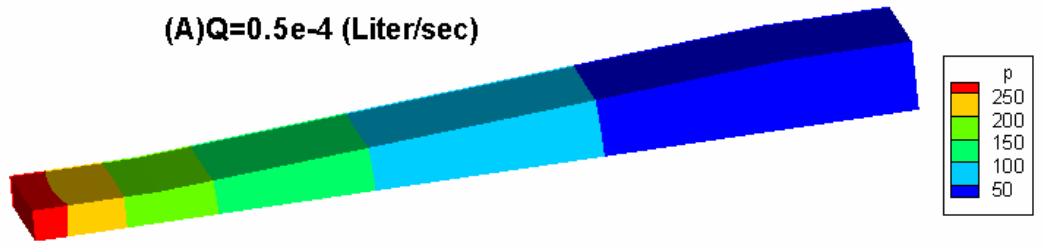


(C) 3D Mesh

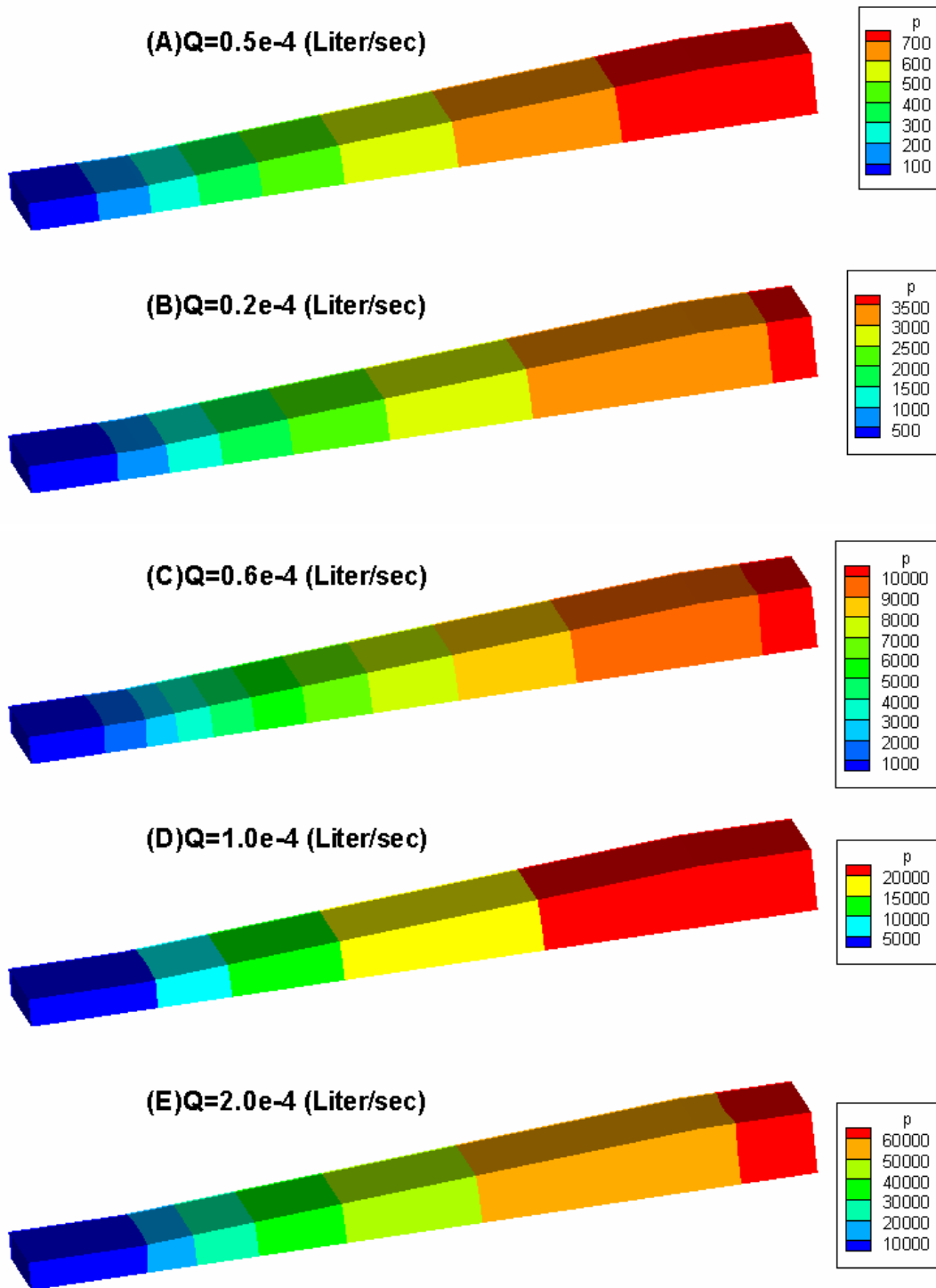
《圖 6.37》Nozzle/Diffuser CFD 模擬的網格上視圖與與測視圖



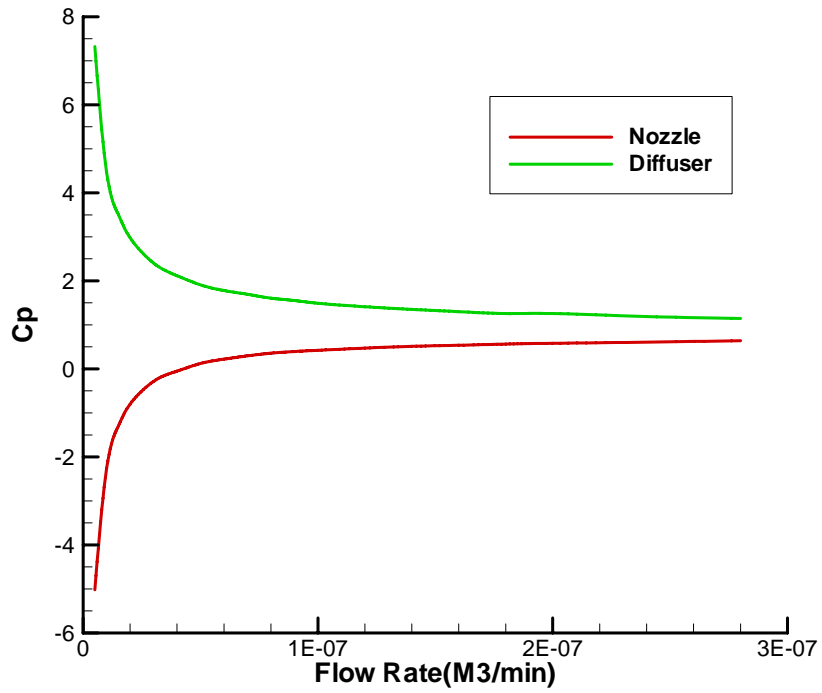
《圖 6.38》Nozzle/Diffuser 模擬的邊界條件给定



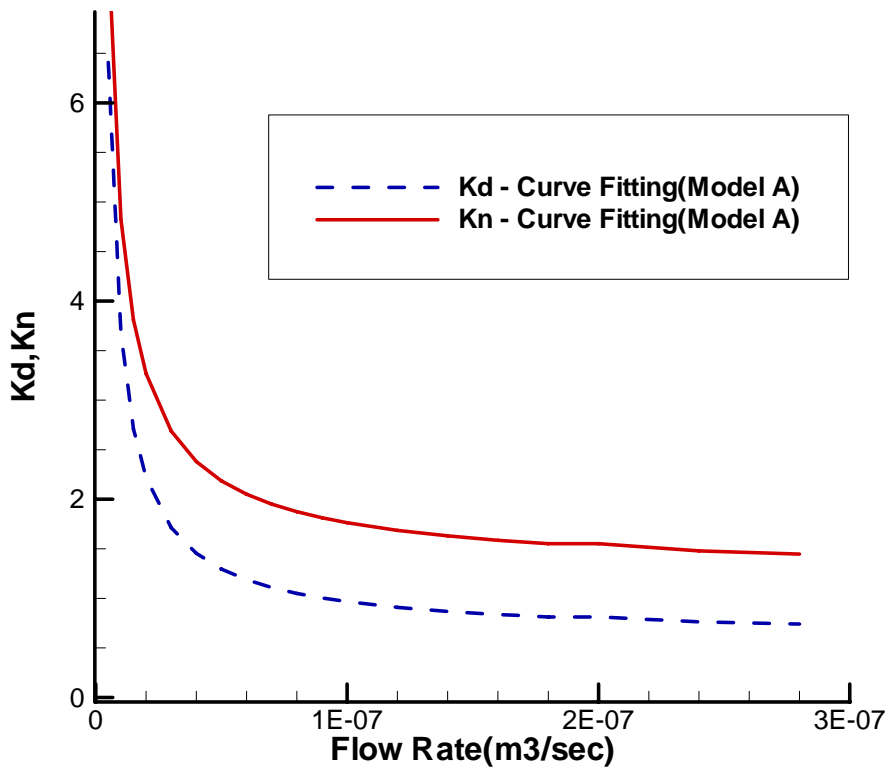
《圖 6.39》 Nozzle/Diffuser 模擬結果 I - 於不同進口流量(Q)下，Diffuser Direction 之壓力分佈圖



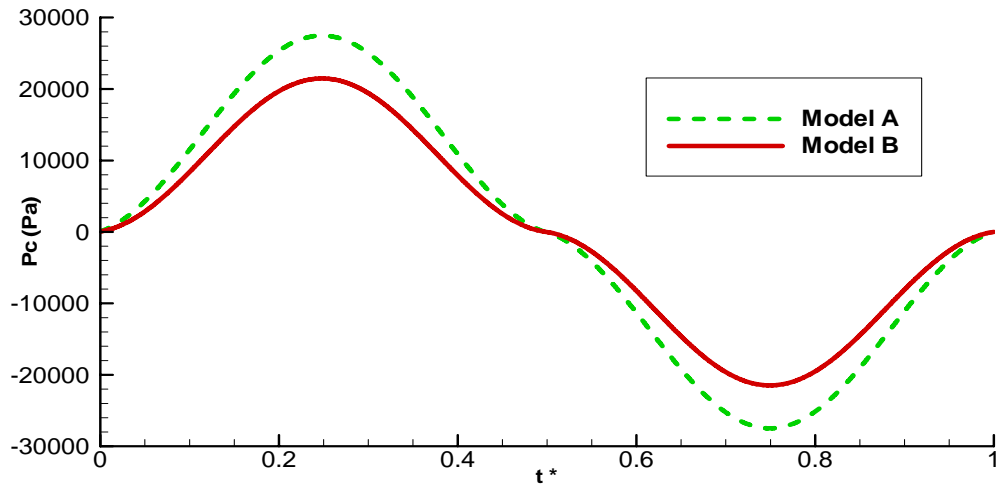
《圖 6.40》Nozzle/Diffuser 模擬結果 II - 於不同進口流量下(Q)，Nozzle Direction 之壓力分佈圖



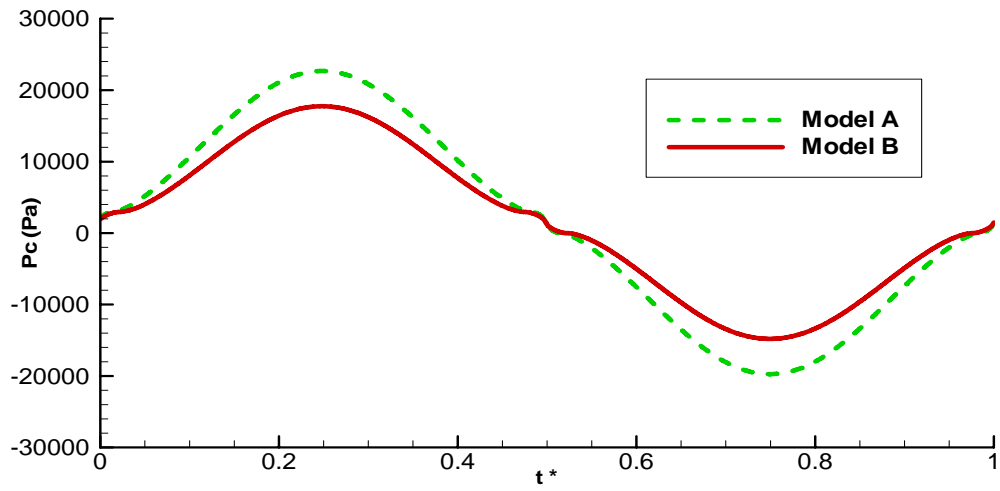
《圖 6.41》壓降係數 C_p 隨不同流量下的變化



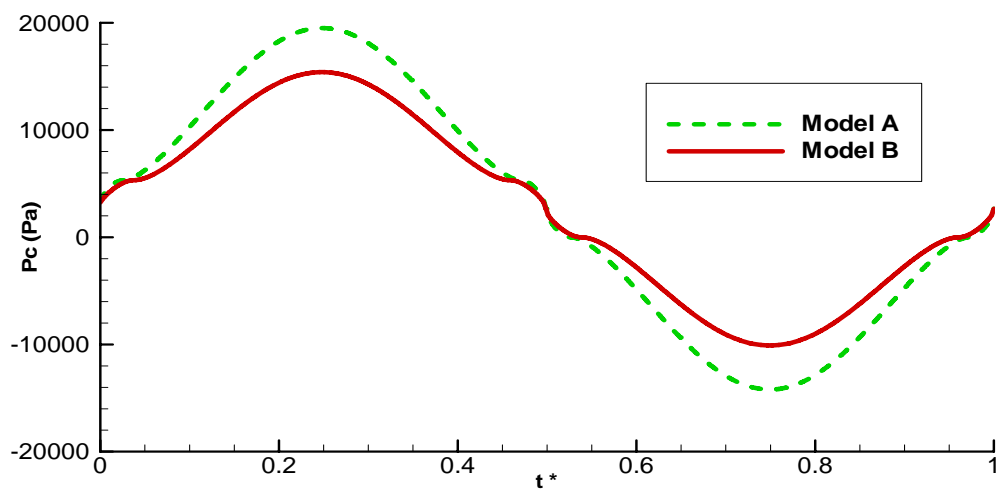
《圖 6.42》 K_n, K_d 隨流量的變化 (Model A)



(A) Back Pressure = 0 Pa

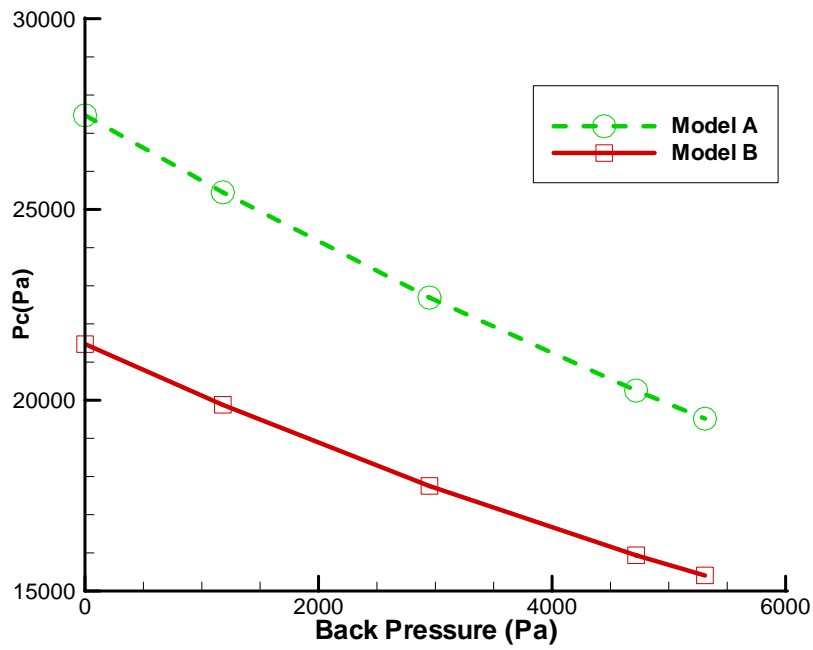


(A) Back Pressure = 2950 Pa

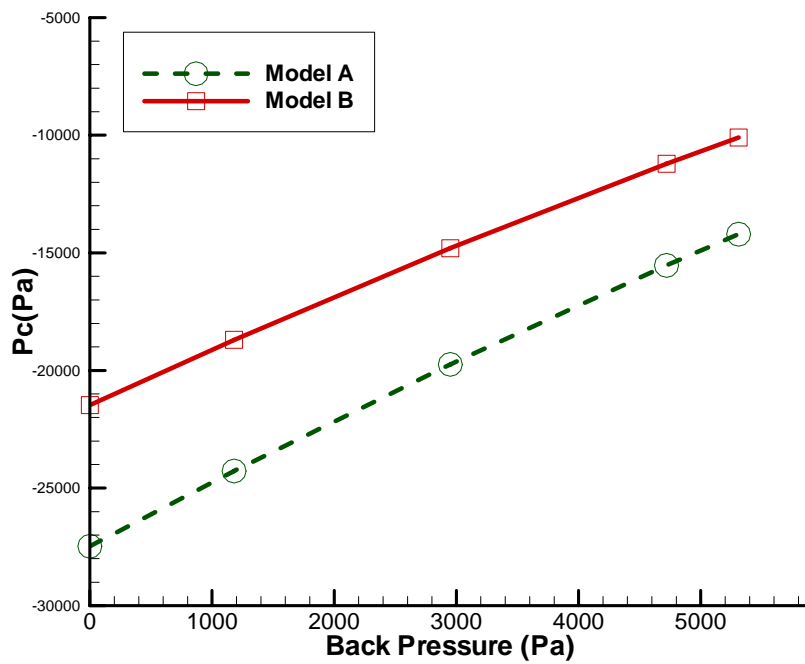


(A) Back Pressure = 5310 Pa

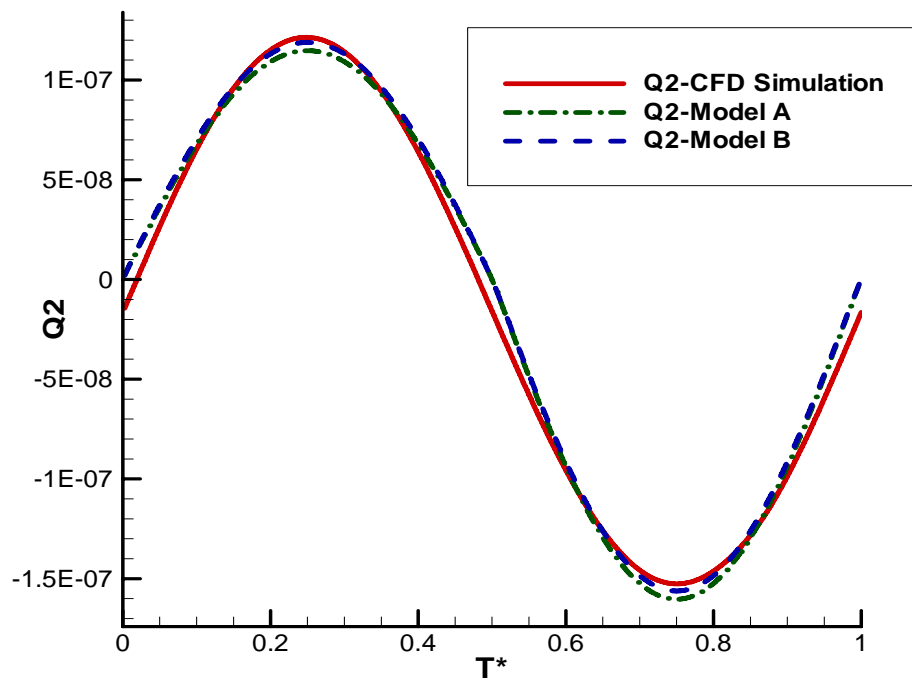
《圖 6.43》不同背壓下，腔體中心壓力 P_c 隨時間變化(一個週期內)



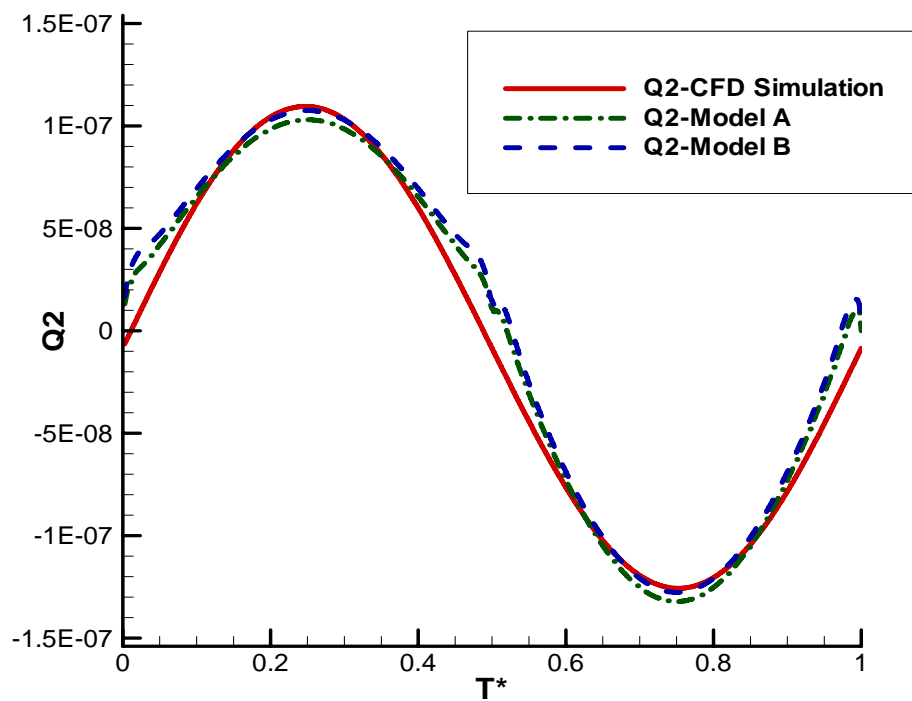
《圖 6.44》腔體中心點最大壓力 P_c ($T^* = 0.25$) 與不同背壓下的關係



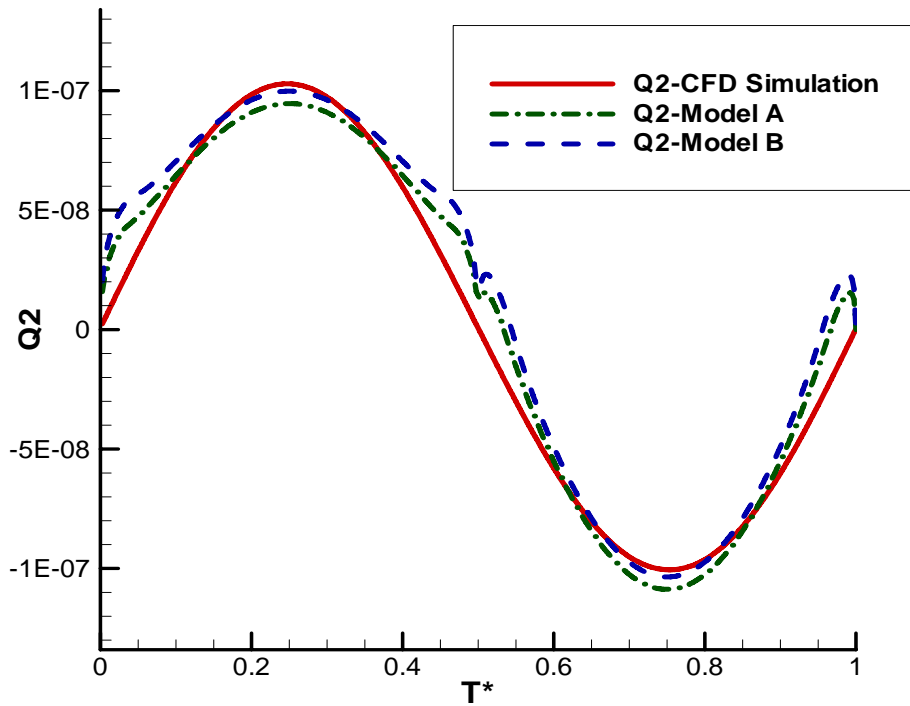
《圖 6.45》腔體中心點最小壓力 P_c ($T^* = 0.75$) 與不同背壓下的關係



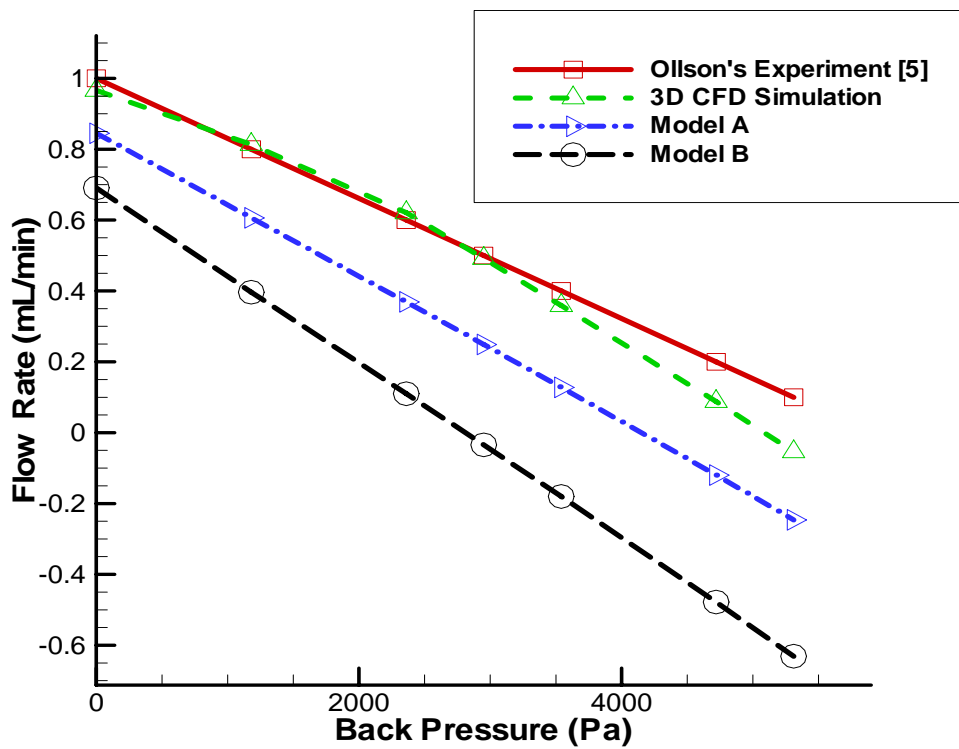
《圖 6.46》背壓= 0 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)



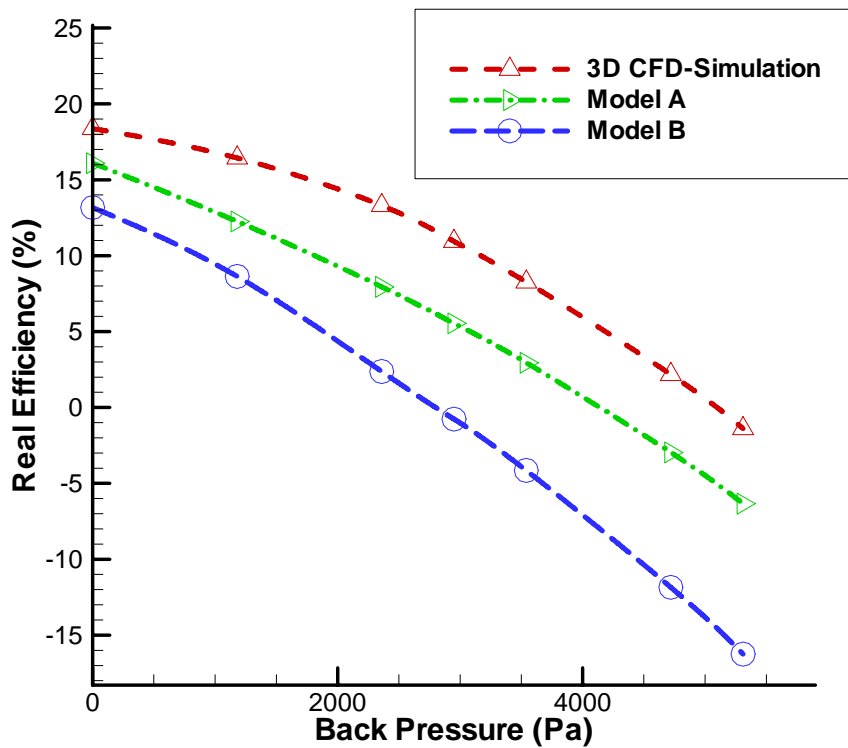
《圖 6.47》背壓=2950 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)



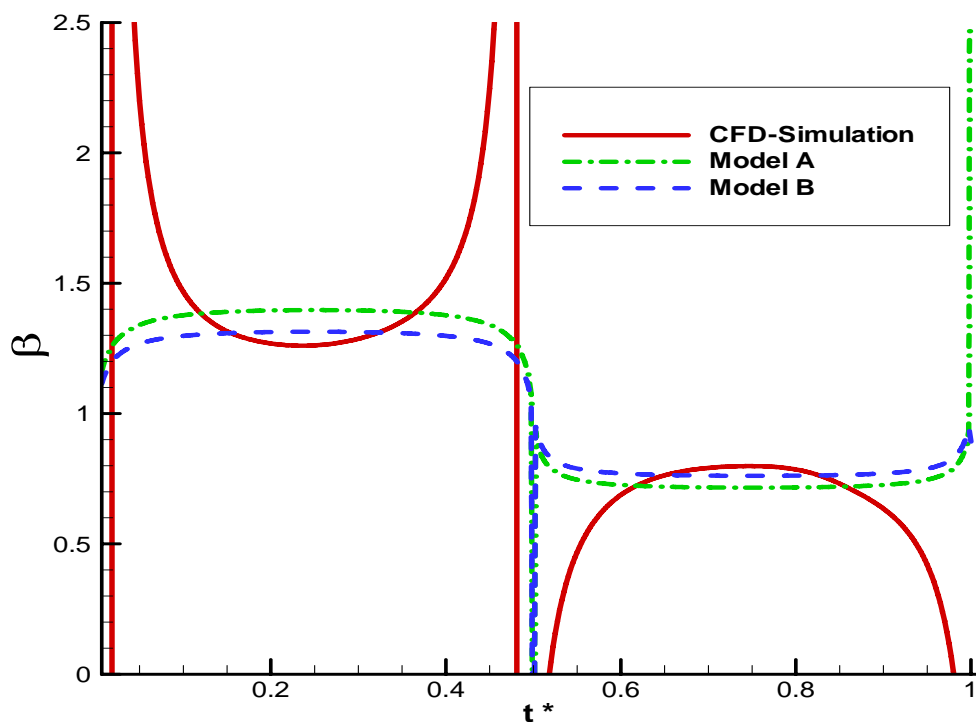
《圖 6.48》背壓=5310 Pa，右端出口流量(Q_2)隨時間的變化(一個週期)



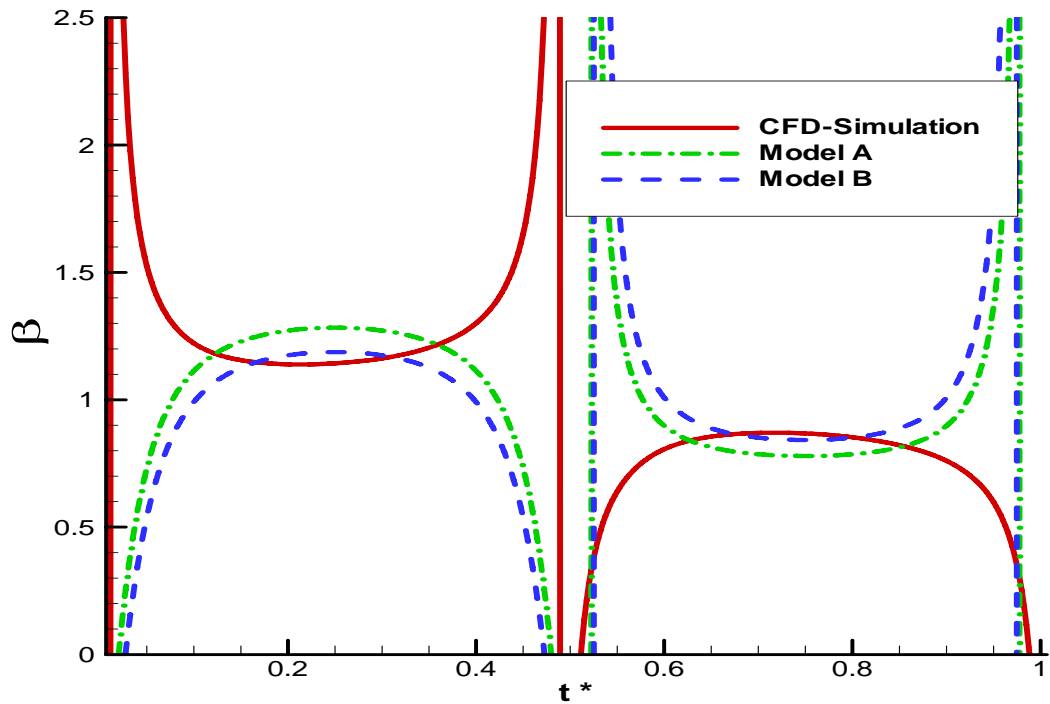
《圖 6.49》比較實驗、模擬、理論，來分析淨流量在不同背壓下的變化。



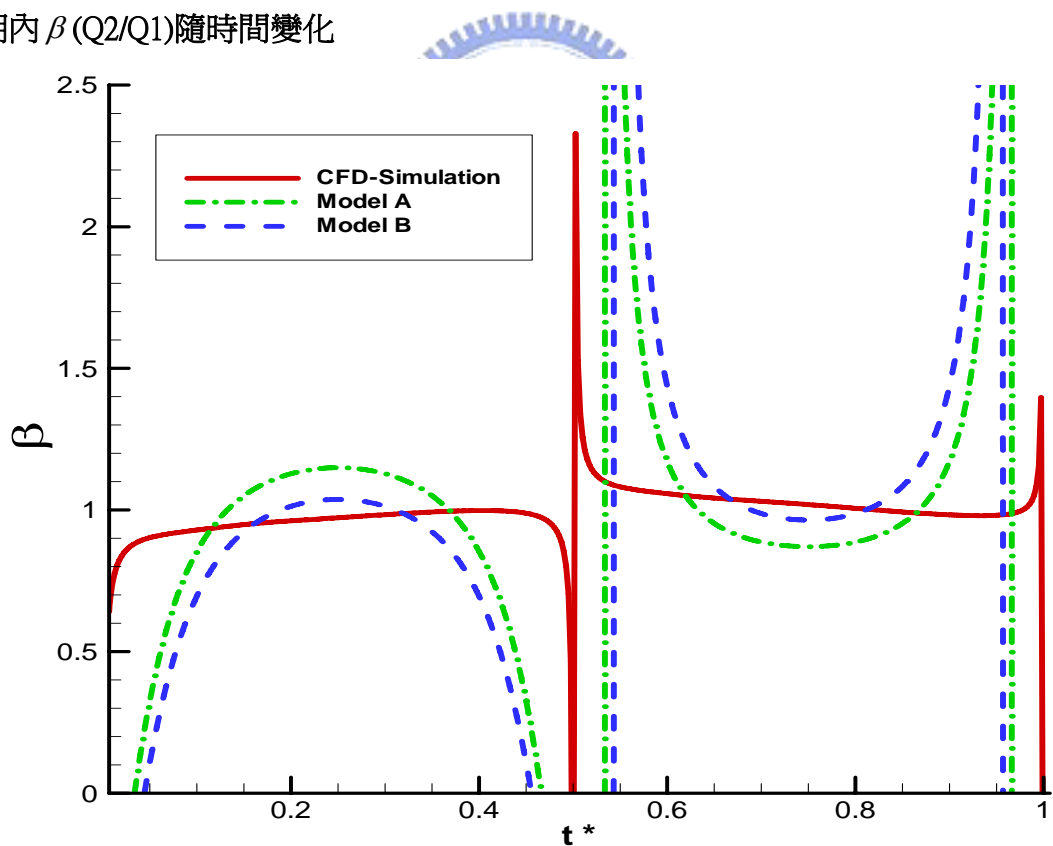
《圖 6.50》以模擬、理論的流量結果，比較在不同背壓下的真實效率。



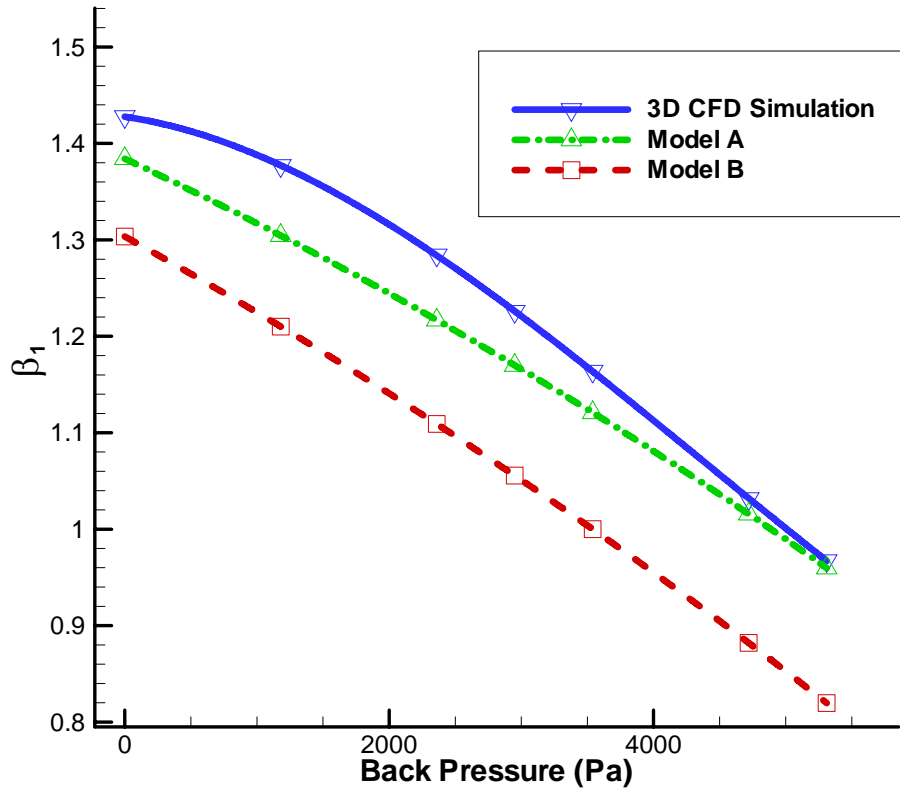
《圖 6.51》背壓 = 0 Pa，比較 Model A、Model B 與真實模擬結果中，一個週期內 β ($Q2/Q1$) 隨時間變化



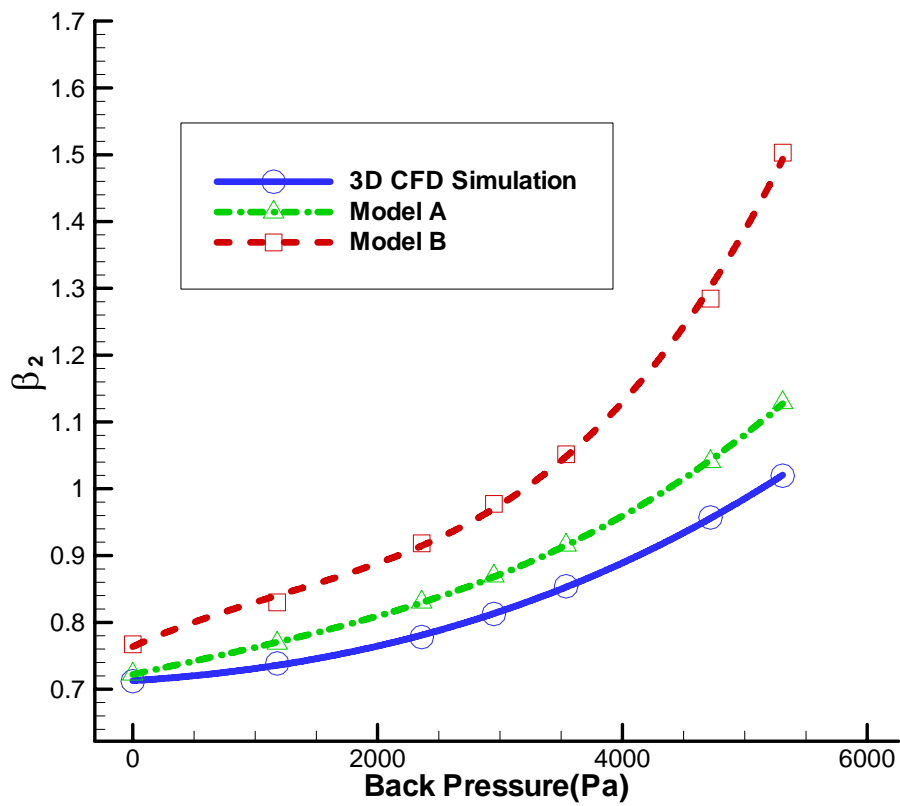
《圖 6.52》背壓 = 2950 Pa，比較 Model A、Model B 與真實模擬結果中，一個週期內 $\beta (Q2/Q1)$ 隨時間變化



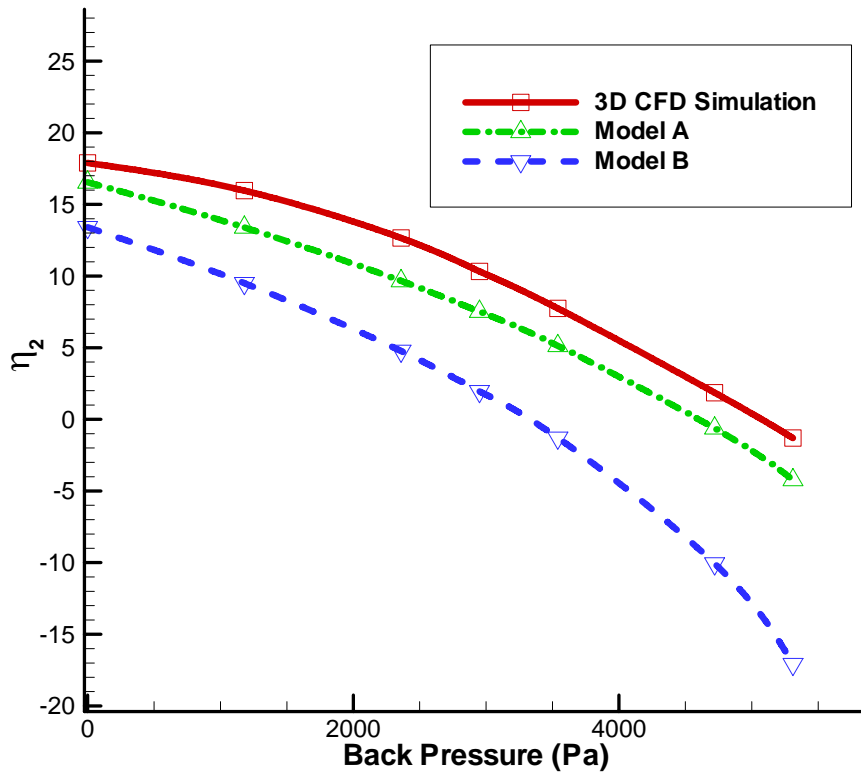
《圖 6.53》背壓 = 5310 Pa，比較 Model A、Model B 與真實模擬結果中，一個週期內 $\beta (Q2/Q1)$ 隨時間變化



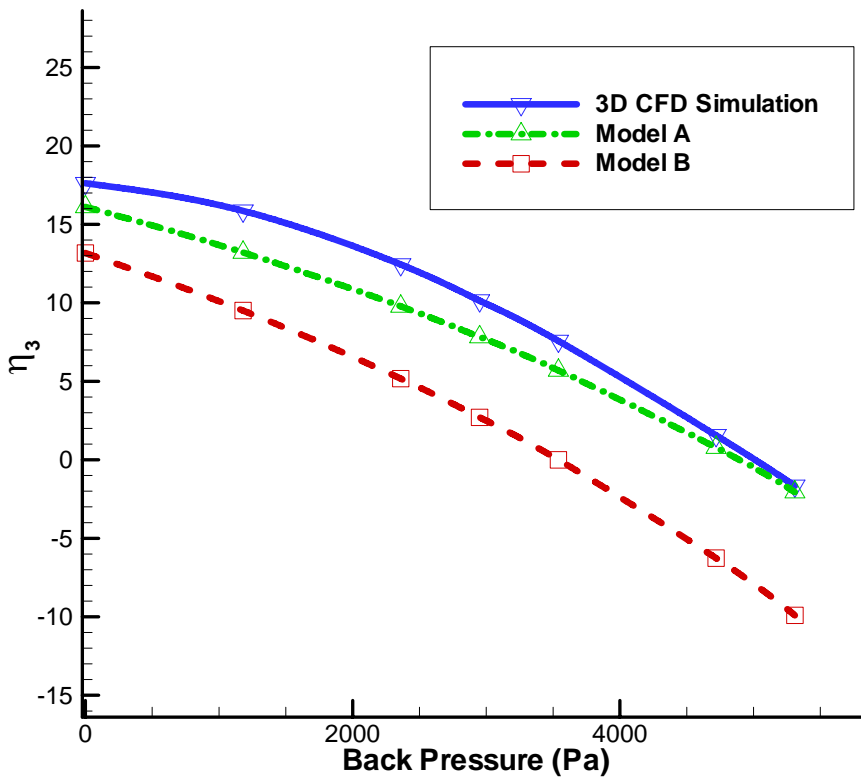
《圖 6.54》比較 Model A、Model B 與 3D 模擬結果中， $\beta_1(Q2/Q1)$ 與背壓的關係。



《圖 6.55》比較 Model A、Model B 與真 3D 擬結果中， $\beta_2(Q2/Q1)$ 與背壓的關係。



《圖 6.56》比較 Model A、Model B 與 3D 模擬結果中，效率 η_2 與背壓的關係。



《圖 6.57》比較 Model A、Model B 與 3D 模擬結果中，效率 η_3 與背壓的關係。