

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

薄膜皺折之有限元素分析

Finite Element Analysis of Thin Membrane
Wrinkling



研究生：黃孝衡

指導教授：蕭國模 博士

中華民國 九十六 年 八 月

薄膜皺折之有限元素分析

Finite Element Analysis of Thin Membrane Wrinkling

研究生：黃孝衡

Student：Hsiao Heng Huang

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年八月

薄膜皺折之有限元素分析

研究生：黃孝衡

指導教授：蕭國模 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究主要目的為以共旋轉有限元素法及殼元素(shell element)對膜結構皺折後的幾何形狀作初步探討。

本研究採用文獻[19]的平面三角殼元素分析膜結構，並採用牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法來解受位移負荷之結構的非線性平衡方程式。

皺折為側方向的變形，由於平面膜結構受到平面上的剪位移作用並沒有產生側方向變形的機制，本研究利用偵測結構平路徑的分歧點，計算挫屈模態，利用挫屈模態當擾動位移，使平面膜結構進入次要平衡路徑，以產生皺折。

本研究分析在邊界受剪位移作用的平面膜結構的皺折，並將分析結果與文獻上的實驗結果及數值結果比較。

Finite Element Analysis of Thin Membrane Wrinkling

Student : Hsiao Heng Huang

Advisor : Dr. Kuo Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The formation of wrinkling deformation for thin membrane is simulated by using the co-rotational finite element formulation and shell element.

The shell element employed here is the flat three-node triangular shell element proposed by Bathe and Ho's [19]. An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method and constant arc length method is used for solving nonlinear equilibrium equations with displacement loading.

In order to initiate the out-of-plane buckled deformation for planar membranes subjected to purely in-plane displacement loading at the bifurcation point, a perturbation displacement proportional to the first buckling mode is added to the equilibrium configuration, and then equilibrium iteration is carried out until a new equilibrium state is achieved.

Wrinkling of a planar membrane under uniform shear displacement loading along the edge of the membrane is analyzed here. The present results are compared with experimental data and numerical results in the literature. Good agreement between the present numerical results and experimental data is observed.

誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士兩年來的指導與教誨，使得本論文得以順利完成。在這兩年碩士班期間，讓我印象最深的是老師在研究上嚴謹的態度及對我們這群學生的日常生活上的關懷，這都使我受益良多，在此致上最高的謝意。同時也感謝尹慶中老師以及蔡佳霖老師撥冗擔任口試委員，為本文提出寶貴的意見。

感謝陳弘虎、蔡明旭、劉峰成、劉宗帆、楊禮龍學長的引領照顧，以及同學楊水勝的扶持與幫助，還有學弟林育丞、顏宏儒在學業上的砥礪與成長。

感謝我的父母親、妹妹對我的關愛與照顧，家是我最溫暖的避風港，感謝奶奶的祝福以及大伯的鼓勵，感謝所有關心我的朋友對我的支持與協助，感謝學校大門口土地公的保佑。僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。



目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
致謝	III
目錄	IV
表目錄	VI
圖目錄	VII
第一章 緒論	1
第二章 理論推導	4
2.1 基本假設	4
2.2 座標系統	4
2.3 旋轉向量	5
2.4 殼元素變形的描述	5
2.4.1 常應變三角元素(CST)的變形描述	6
2.4.2 DKT 元素的變形描述	8
2.5 元素內力與元素剛度矩陣	11
2.5.1 CST 元素之節點內力與剛度矩陣	12
2.5.2 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣	13
2.6 元素幾何剛度矩陣	14
2.7 元素變形角的描述	15
2.8 系統的平衡方程式與收斂準則	17
第三章 數值計算方法與程序	19
3.1 本研究使用的數值方法	19
3.2 增量迭代法	19

3.3 弧長控制法	22
3.4 二分法.....	23
3.5 逆冪法	24
3.6 數值程序	24
第四章 數值例題與結果	26
第五章 結論與展望	31
參考文獻	32
附錄 A DKT 元素的形狀函數	86
附錄 B CST 元素的剛度矩陣	92
附錄 C 逆冪法解廣義特徵值問題之數值方法	93



表 目 錄

表 4.1	膜結構側方向最大正負位移點所在位置的初始座標.....	35
-------	-----------------------------	----



圖 目 錄

圖 1.1	皺折的示意圖.....	36
圖 1.2	波長的示意圖.....	37
圖 1.3	文獻[11]例題之結構示意圖.....	38
圖 2.1	三角殼元素的示意圖及節點自由度.....	39
圖 2.2	總體座標與三種元素座標.....	40
圖 2.3	旋轉向量.....	41
圖 2.4	DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖.....	42
圖 2.5	CST 元素在元素座標上的變形位移.....	43
圖 2.6	變形前板元素中心面之單位法向量 \mathbf{n} 受旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}$ 作用的 示意圖.....	44
圖 2.7	元素座標的剛體旋轉 (a)面外旋轉(out-of plane rotation), (b)面內旋轉(in-plane rotation).....	45
圖 2.8	決定板元素節點變形轉角的第 3 個步驟的示意圖.....	46
圖 4.1	圓柱殼結構示意圖及其受之位移負荷圖 (例題一).....	47
圖 4.2	M 點之反力-負荷參數曲線圖(例題一).....	48
圖 4.3	M 點之反力-負荷參數曲線與文獻[18]比較圖(例題一).....	49
圖 4.4	正方形膜結構示意圖及其受之位移負荷圖 (例題二).....	50
圖 4.5	挫屈模態(例題二, Mesh 40×40).....	51
圖 4.6	挫屈模態(例題二, Mesh 60×60).....	52
圖 4.7	挫屈模態(例題二, Mesh 80×80).....	53
圖 4.8	挫屈模態的剖面圖.....	54
圖 4.9	I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖 (例題二, Mesh 40×40).....	55

圖 4.10	I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖， (例題二，Mesh 60×60).....	56
圖 4.11	I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖， (例題二，Mesh 80×80).....	57
圖 4.12	不同增量位移下，I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參 數 λ 曲線圖，(例題二，Mesh 60×60).....	58
圖 4.13	不同元素網格下，I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參 數 λ 曲線比較圖，(例題二).....	59
圖 4.14	例題二位移邊界 AD 上(a)X 方向節點力合力 $\sum R_{Xi}$ - 位移負 荷參數 λ 曲線圖(b) Y 方向節點力合力 $\sum R_{Yi}$ - 位移負荷參 數 λ 曲線圖.....	60
圖 4.15	(a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖，(例題二，Mesh 40×40).....	61
圖 4.16	(a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖，(例題二，Mesh 60×60).....	62
圖 4.17	(a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖，(例題二，Mesh 80×80).....	63
圖 4.18	膜結構變形圖，例題二(a) Mesh 40×40 , $\lambda = 0.0507(mm)$, (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.0493(mm)$, (c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.0507(mm)$	64
圖 4.19	膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 0.401(mm)$, (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.404(mm)$, (c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.406(mm)$	65
圖 4.20	膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 0.601(mm)$,	

	(b)Mesh 60×60, $\lambda = 0.604(mm)$, (c)Mesh 80×80, $\lambda = 0.606(mm)$	66
圖 4.21	膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40, $\lambda = 0.801(mm)$, (b)Mesh 60×60, $\lambda = 0.804(mm)$, (c)Mesh 80×80, $\lambda = 0.806(mm)$	67
圖 4.22	膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40, $\lambda = 1(mm)$, (b)Mesh 60×60, $\lambda = 1(mm)$, (c)Mesh 80×80, $\lambda = 1(mm)$	68
圖 4.23	軸線 AB 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 40×40，(b) Mesh 60×60	69
圖 4.24	軸線 AB 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 60×60，(b) Mesh 80×80	70
圖 4.25	軸線 FH 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 40×40，(b) Mesh 60×60	71
圖 4.26	軸線 FH 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 60×60，(b) Mesh 80×80	72
圖 4.27	軸線 CD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 40×40，(b) Mesh 60×60	73
圖 4.28	軸線 CD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 60×60，(b) Mesh 80×80	74
圖 4.29	軸線 JK 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 40×40，(b) Mesh 60×60	75
圖 4.30	軸線 JK 之 Z 方向位移分佈圖，例題二， (a)Mesh 60×60，(b) Mesh 80×80	76
圖 4.31	軸線 EG 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	

	(a)Mesh 40×40 , (b) Mesh 60×60	77
圖 4.32	軸線 EG 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	
	(a)Mesh 60×60 , (b) Mesh 80×80	78
圖 4.33	軸線 MN 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	
	(a)Mesh 40×40 , (b) Mesh 60×60	79
圖 4.34	軸線 MN 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	
	(a)Mesh 60×60 , (b) Mesh 80×80	80
圖 4.35	對角軸線 BD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	
	(a)Mesh 40×40 , (b) Mesh 60×60	81
圖 4.36	對角軸線 BD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，	
	(a)Mesh 60×60 , (b) Mesh 80×80	82
圖 4.37	膜結構皺折與文獻比較圖，(例題二，Mesh 40×40).....	83
圖 4.38	膜結構皺折與文獻比較圖，(例題二，Mesh 60×60).....	84
圖 4.39	膜結構皺折與文獻比較圖，(例題二，Mesh 80×80).....	85

第一章 緒論

膜結構的歷史由來已久，在自然界中存在許多膜結構形態的東西，許多動植物細胞以及人體器官都是由膜結構的系統所組成，比如說心臟，血管，以及皮膚。

膜結構(Membrane Structure) 因為其材料重量輕，可以有大大跨度的延伸，方便折疊以及容易做成各種美觀的形狀而廣泛地應用在各類結構物上，如航太科技的太陽能板、天線，以及可透光的大跨度輕質屋頂，展覽場的暫時性結構.....等等[1]。

膜結構是依靠膜材自身的張拉力和特殊的幾何形狀而構成的穩定的承力系統，相對於膜結構承受拉力的能力，其承受壓力和承受彎矩的能力極弱，故文獻上一般假設膜結構不能承受壓力和彎矩。膜結構的變形依其受力狀態可以分類成三種型態[2,3,4]：

1. 緊繃(taut)： $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$

膜結構承受雙向(biaxial)的拉應力。

2. 鬆弛(slack)： $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$

膜結構沒有承受任何方向的拉力。

3. 皺折(wrinkle)： $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$

膜結構既不是緊繃的狀態也不是鬆弛的狀態時，膜結構承受單軸向的拉應力，另一個主應力恰欲變成壓應力，此時膜結構會產生面外的(out of plane)的變形，變形如圖1.1所示。

皺折可分為材料性皺折與結構性皺折兩種[5]，材料性的皺折是在外力卸載後皺折依舊存在，材料性的皺折發生的部位與本來的膜結構會有不同的結構行為。結構性皺折是由於壓應力的產生所造成的暫時性挫屈，當外力卸載後皺折也就消失了。

皺折對膜結構的外型，品質，可靠度會有重大的影響，所以研究皺

折發生的方向以及瞭解皺折區域的應力型態是重要的。文獻上討論膜結構皺折的論文很多[2-17]。文獻上一般以有限元素法分析膜結構，所採用之元素大都為膜元素(membrane element)[2-7]，因為一般討論皺折的文章大多從結構的觀點在對膜結構皺折區域的應力與應變進行探討。

雖然膜元素較簡單，但因膜元素不能承受壓力及彎矩，如果用膜元素來進行皺折模擬，可以得到皺折的形態(pattern)，卻無法得到皺折的細節資訊，比如說振幅 A (amplitude) 以及波長 λ (wavelength)[5,8-9]，在此振幅的定義為從基準面起算到皺折的最高或最低點。波長的定義是兩個連續皺折的最高點或兩個連續皺折的最低點之間的距離[9]，如圖 1.2 所示。而在航太科技的太陽帆船(solar sail)中，膜結構的反射性(reflectivity)是皺折波長與振幅的函數，因此在太陽帆船設計上必須要知道皺折的細節[8]。所以亦有少數的論文[5,8-11,13]利用殼元素(shell element)來分析膜結構，在此所定義的殼元素是考慮抗彎矩能力很弱的薄殼元素。膜結構皺折細節的關鍵在於膜結構抵抗彎矩的能力(bending rigidity)相對於抗拉應力來說很弱，但並不是零[3]，故選用殼元素就可以研究這些面外的變形(out of plane deformation)的細節。文獻[11]分析膜結構邊界受剪位移負荷時產生的變形，圖 1.3 為文獻[11]分析的例題結構示意圖，由於平面膜結構單純受到平面上的位移負荷，故沒有產生側方向變形的機制，因此文獻[11]對結構側向加了擾動，使其幾何形狀不完美(Imperfection)，這個擾動的大小是利用膜結構厚度的函數來計算的。文獻[11]使用 10^4 個 ABAQUS 軟體的 S4R5 四邊型元素分析膜結構邊界受剪位移後皺折的振幅，並與文獻[12]的實驗結果比較。

由於文獻上利用殼元素來分析膜結構的論文甚少，且多是利用商用

軟體ABAQUS的殼元素來分析膜結構的皺折[5, 8-11, 13]，甚少提及分析的細節，故本研究擬採用殼元素探討膜結構受力後完整的行為，以及膜結構皺折後幾何形狀的細節。文獻[19]中將CST(constant strain triangle)平面元素[20]與DKT(discrete Kirchhoff theory)三角板元素[21]疊加成一平面三角殼元素，並使用更新拉格蘭日法(updated Lagrangian formulation)將該元素用在具有大位移及大旋轉的薄殼結構分析，由[19]的數值例題可見該元素相當的簡單及精確。文獻[19]中在計算對應於DKT元素部分的內力時是將對應於每一增量位移的增量內力相加而成，但[19]中在計算增量內力時將旋轉視為向量，且沒有扣除剛體旋轉的部分。因三維有限旋轉並非向量，所以[19]的方法在兩增量間的增量旋轉必須是小角度，才能得到精確的答案。為了克服此困難，文獻[22]採用共旋轉法來描述殼元素的變形，並提出一運動過程來決定平面三角殼元素的節點總變形角，再用總變形角來計算DKT元素[21]的節點內力。因[22]的方法可以有效的解決兩增量間增量轉角的限制，故本研究擬採用[22]中的共旋轉法及[19]的平面三角殼元素。

本研究僅考慮彈性材料的膜結構，及結構性的皺折。本研究在第二章介紹本文所使用的平面三角殼元素及座標系統。在第三章中介紹本文的數值計算方法及程序。在第四章中以數值例題驗證本研究所使用的程式可以偵測結構平衡路徑的分歧點，然後再以文獻上的例題探討膜結構邊界受到剪位移時，膜結構皺折的情形。

第二章 理論推導

本研究使用文獻[22]的共旋轉法(co-rotational formulation)，及文獻[19]中提出的平面三角殼元素，如圖 2.1 所示，文獻[19]中的殼元素是由 CST(constant strain triangle)常應變三角形元素[20]及在文獻[21]中提出的 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角殼元素所疊加而成。為了本文的完整性，在本章將簡單描述文獻[19]中元素變形的假設與內力、剛度矩陣的推導，及本研究所修改的內力及剛度矩陣。文章中亦將簡單描述文獻[22]中決定元素變形角的方法。

2.1 基本假設

在文獻[19]中對於非線性平面三角殼元素的推導，做以下的假設

- (1) 薄膜變形(membrane deformation)以及彎曲變形(bending deformation)之間無耦合作用。
- (2) 殼元素的變形為小變形。
- (3) 在元素變形前，垂直於中心面的法向線段，在元素變形後，依然保持直線，且沒有伸長及縮短，除了在元素三個頂點以及三個邊的中央點外，該線段不必垂直於元素變形後的中心面。

2.2 座標系統

本文採用共旋轉法，為了描述系統的運動以及元素的變形，本文定義了兩組座標系統：

- (1) 固定總體座標系統(global coordinate): X_i ($i = 1, 2, 3$)；如圖 2.2，結構體節點的座標在此座標系統中定義。
- (2) 元素座標系統(element coordinate): \bar{x}_i ($i = 1, 2, 3$)；如圖 2.2，此座標系統是建立在每一殼元素變形後的最新位置上，其座標原點是

在元素節點 1， \bar{x}_1 軸即是元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線， \bar{x}_2 軸是在元素平面上垂直於 \bar{x}_1 軸且朝著元素節點 3 的方向， \bar{x}_3 軸則是由 \bar{x}_1 軸及 \bar{x}_2 軸外積而得。元素變形、元素內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由標準的座標轉換，將其轉換至總體座標系統。本文中 ${}^0\bar{x}_i$ 及 ${}^I\bar{x}_i$ ($i=1, 2, 3$) 表示初始未變形元素座標及在第 I 個增量疊代收斂後的元素座標。

2.3 旋轉向量

本文中使用的旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖 2.3 所示，一向量 \mathbf{R} 受到一旋轉向量 $\phi \mathbf{n}$ 的作用而轉到一個新位置 \mathbf{R}' ， \mathbf{R} 與 \mathbf{R}' 之間的關係可表示成[23]

$$\mathbf{R}' = \cos \phi \mathbf{R} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{R}) \quad (2.1)$$

其中 ϕ 表繞旋轉軸的旋轉角， \mathbf{n} 表旋轉軸的單位向量。

2.4 殼元素變形的描述

如圖 2.1 所示殼元素中心面上有三個節點，每個節點有 6 個自由度，分別是 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 、 \bar{x}_3 軸方向的位移 u_j 、 v_j 、 w_j 以及繞 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 、 \bar{x}_3 軸方向的位移轉角 θ_{xj} 、 θ_{yj} 、 θ_{zj} 。本殼元素假設元素的薄膜變形與彎曲變形之間無耦合作用，所以元素的變形可由薄膜變形及彎曲變形疊加而成。本元素的變形是由 CST (constant strain triangle) 常應變三角形元素[20]的薄膜變形及文獻[21]中的 DKT (discrete Kirchhoff theory) 三角形殼元素的彎曲變形疊加而成。

在圖 2.1 中的元素節點位移 u_j 與 v_j ($j=1, 2, 3$) 是 CST 元素節點位移，而 θ_{xj} 、 θ_{yj} 以及 w_j ($j=1, 2, 3$) 為在[21]中的 DKT 元素節點位移。

θ_{zj} 是為了不使元素剛度內的面內旋轉剛度(in-plane rotational stiffness)為 0，而人為加上去的自由度。圖 2.4 中的元素是在[21]中所提出的 DKT 元素，其節點 1、節點 2、節點 3 是元素的三個頂點，節點 4、節點 5、節點 6 為元素的三個邊的中央點，這三個中央點的自由度僅在元素推導的過程中暫時使用，在最後不會出現在元素的節點自由度。在本文以下的推導中，元素變形、元素內力以及元素剛度矩陣都是定義在元素座標系統上。

2.4.1 常應變三角元素(CST)的變形描述

因為 CST 元素內的應變為常數，所以其位移場為線性位移場，其位移場可表示成

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.2)$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y \quad (2.3)$$

其中 u 跟 v 為在 \bar{x}_1 軸與 \bar{x}_2 軸方向的位移， x 與 y 是元素內任意點變形前的座標值， $a_i (i=1-6)$ 是未定常數。

由元素座標的定義可知，在元素座標中圖 2.1 的節點 1、節點 2、節點 3 之變形前座標值可表示成 $(0,0)$ 、 $(x_2,0)$ 、 (x_3,y_3) ，令節點 j 在 \bar{x}_1 軸、 \bar{x}_2 軸的位移分別是 $u_j, v_j (j=1, 2, 3)$ 。

將三個節點的座標值及節點位移 $u_j, v_j (j=1, 2, 3)$ 代入(2.2)、(2.3)可以得到

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

由(2.4)、(2.5)式可將 $a_i (i=1-6)$ 表示成 u_i 及 v_i 的函數，所以(2.2)、(2.3)式可改寫成

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_m \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u} = \{u, v\} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_m = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\} \quad (2.9)$$

$$N_1 = \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y)$$

$$N_2 = \frac{1}{x_2 y_3} (x y_3 - x_3 y)$$

$$N_3 = \frac{y}{y_3} \quad (2.10)$$

依據本文中對元素座標的假設，元素座標原點是定義在節點1，元素座標的 \bar{x}_1 軸是定義在節點1與節點2的連線，如圖2.5所示，所以(2.9)式的 \mathbf{u}_m 中的 $u_1 = v_1 = v_2 = 0$ ，故(2.9)式可表示成

$$\mathbf{u}_m = \{0 \quad 0 \quad u_2 \quad 0 \quad u_3 \quad v_3\} \quad (2.11)$$

其中 u_2 、 u_3 、 v_3 可由圖2.5中元素節點在變形前後的座標決定。

CST元素的應變包含在 \bar{x}_1 軸與 \bar{x}_2 軸方向的應變 ε_x 與 ε_y 以及剪應變 γ_{xy} ，因本文中假設元素的變形為小變形所以 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 可表示成

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.12)$$

將(2.6)式代入(2.12)式得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 + x_3 & 0 & -x_3 & 0 & x_2 \\ -x_2 + x_3 & -y_3 & -x_3 & y_3 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

其中 \mathbf{B}_m 稱為 CST 元素的位移-應變轉換矩陣。

2.4.2 DKT 元素的變形描述

本文中是採用在文獻[21]中提出的 DKT(discrete Kirchhoff theory)三角板元素，在圖 2.6 中， \mathbf{n} 為殼元素中心面變形前的單位法線向量， \mathbf{n}_d 為 \mathbf{n} 在元素變形後的新位置，圖 2.6 中 $\boldsymbol{\theta}$ 為一在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面上的旋轉向量，將 $\boldsymbol{\theta}$ 作用在 \mathbf{n} 可將 \mathbf{n} 轉到 \mathbf{n}_d 。由 2.1 節所提的假設(3)可知垂直於變形前的元素中心面法線向量變形後仍為直線且長度不變，由假設(2)知變形角為小角度，所以文獻[21]之 DKT 元素的位移場可表示成

$$u = z\theta_y(x, y) \quad v = -z\theta_x(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (2.16)$$

其中 x 、 y 、 z 為元素上任一點分別在 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 、 \bar{x}_3 軸的座標值， θ_y 是 $\boldsymbol{\theta}$ 在 \bar{x}_2 軸方向的分量， θ_x 是 $\boldsymbol{\theta}$ 在 \bar{x}_1 軸方向的分量， u 是在 \bar{x}_1 軸方向的位移， v 是在 \bar{x}_2 軸方向的位移， w 是在 \bar{x}_3 軸方向位移。當 $\|\boldsymbol{\theta}\| \ll 1$ 時，

θ_y 與 θ_x 可視為法向量 \mathbf{n} 繞 \bar{x}_2 軸及 \bar{x}_1 軸的轉角。

DKT 元素變形包含彎曲應變(bending strain) ε_x 、 ε_y 與剪應變 γ_{xy} 以及橫向剪應變(transverse shear strain) γ_{xz} 、 γ_{yz} 。

因本文假設元素的變形為小變形， ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} 可表示成(2.12)式， γ_{xz} 、 γ_{yz} 可表示成

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.17)$$

將(2.16)式代入(2.12)式可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{z}\mathbf{K} \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{K} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\} \quad (2.20)$$

將(2.16)式代入(2.17)式可得

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} = \{w_{,x} + \theta_y, w_{,y} - \theta_x\} \quad (2.21)$$

由(2.16)可知 w 、 θ_y 、 θ_x 與 \bar{x}_3 無關，所以可由(2.21)式可知橫向剪應變在厚度方向為常數。

本文中稱圖 2.4 中沿著元素邊緣方向 s 為切線方向，而垂直於元素邊緣方向 n 為法線方向。

在[21]中對於其所提出的 DKT 元素做了下列的假設

(1) θ_y 、 θ_x 在元素內為二次變化，也就是

$$\theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{yi}, \quad \theta_x = -\sum_{i=1}^6 N_i \theta_{xi} \quad (2.22)$$

其中 θ_{yi} 、 θ_{xi} 是 θ_y 、 θ_x 在圖 2.4 中節點 i 的節點值， N_i ($i=1-6$) 為形狀函數[21]，其表示式詳見附錄 A。

(2) 元素的頂點以及三個邊的中央點可滿足克希霍夫板理(Kirchhoff plate theory)的假設，即

(a) 在頂點

$$\gamma_{xzi} = w_{,xi} + \theta_{yi} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23a)$$

$$\gamma_{yzi} = w_{,yi} - \theta_{xi} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23b)$$

其中 γ_{xzi} 、 γ_{yzi} 、 $w_{,xi}$ 、 $w_{,yi}$ 、 θ_{yi} 、 θ_{xi} 分別是 γ_{xz} 、 γ_{yz} 、 $w_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 、

$w_y = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ 、 θ_y 、 θ_x 在節點 i 的值。

(b) 在三個邊的中央點

$$-\theta_{nk} + w_{,sk} = 0 \quad k = 4, 5, 6 \quad (2.24a)$$

$$\theta_{sk} + w_{,nk} = 0 \quad k = 4, 5, 6 \quad (2.24b)$$

其中 θ_{nk} 、 θ_{sk} 分別是 θ_n 、 θ_s 在節點 k 的值， θ_n 與 θ_s 分別是 θ 在 n 與 s 方

向的分量， $w_{,sk}$ 、 $w_{,nk}$ 分別是 $w_{,s} (= \frac{\partial w}{\partial s})$ 、 $w_{,n} (= \frac{\partial w}{\partial n})$ 在節點 k 的值。

(3) w 在元素邊緣的方向上是呈現三次變化，也就是

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,sj} \quad (2.25)$$

其中 w_i 、 w_j 是 w 在節點 i 及 j 的值， $w_{,sk}$ 是 $w_{,s}$ 在節點 k 的值，

$k = 4, 5, 6$ 分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點， ij 邊為節點 i 與節點 j 之間的邊(見圖 2.4)，其中 $i = 1-3$ ， $j = 1-3$ 且 $i \neq j$ 。

(4) θ_s 在元素邊緣是呈現線性變化，即

$$\theta_{sk} = \frac{1}{2}(\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (2.26)$$

其中 θ_{sk} 、 θ_{si} 、 θ_{sj} 分別是 θ_s 在節點 k 、 i 、 j 之值， θ_s 是 θ 在 s 方向的分量，在圖 2.4 中節點 $k = 4, 5, 6$ 分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點。

在圖 2.4 中元素三個邊上的 θ_y 、 θ_x 與 θ_s 、 θ_n 之幾何轉換關係可表示成

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_n \\ \theta_s \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

$w_{,x}$ 、 $w_{,y}$ 與 $w_{,s}$ 、 $w_{,n}$ 的幾何轉換關係為

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

其中 $c = \cos \alpha_{ij}$ 、 $s = \sin \alpha_{ij}$ ， α_{ij} 為元素的邊 ij 上的法線 n_{ij} 與 \bar{x}_1 軸的夾角，見圖 2.4。

由(2.23)-(2.28)式可以把(2.22)式表示成[21]

$$\begin{aligned} \theta_y &= \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \\ \theta_x &= -\mathbf{H}_y^T(\xi, \eta) \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{u}_b = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}\} \quad (2.30)$$

其中 \mathbf{u}_b 為 DKT 元素的節點位移， \mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 是對應於元素節點位移的新形狀函數，其表示式詳見附錄 A， ξ 與 η 是元素內任一點在元素自然座標[21]的座標值，其中 $-1 \leq \xi \leq 1$ 、 $-1 \leq \eta \leq 1$ 。

將(2.29)式代入(2.20)式可以得到

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (2.31)$$

其中 \mathbf{B}_b 為 DKT 元素的位移-應變轉換矩陣，表示式為

$$\mathbf{B}_b(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \mathbf{H}_{x,\xi}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{y,\eta}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{x,\eta}^T + y_3 \mathbf{H}_{y,\xi}^T \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

其中 $A = \frac{x_2 y_3}{2}$ ， A 為三角形面積。

2.5 元素內力與元素剛度矩陣

本文中殼元素的節點內力是由 CST 及 DKT 元素的節點內力組成而成，元素剛度矩陣是由 CST 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_m 、DKT 元素剛度矩陣 \mathbf{k}_b 以及面內旋轉剛度 $k_{\theta z}$ 所疊加而成。本文中 $k_{\theta z}$ 的值是取 \mathbf{k}_b 之對角線元素的絕對值中的最小值。本節中將用虛功原理推導 CST 元素及 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣。

在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應變與應力關係為

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.36)$$

其中 E 是楊氏模數(Young's module)， ν 是蒲松比(Poisson ratio)， G 為剪力模數，(2.33)式之 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可以是(2.14)式中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 及(2.19)式中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ 。

2.5.1 CST 元素之節點內力與剛度矩陣

將(2.33)式代入(2.13)式可得

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{E}\mathbf{B}_m \mathbf{u}_m \quad (2.37)$$

由虛功原理可得

$$\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^t \boldsymbol{\sigma}_m dV \quad (2.38)$$

$$\mathbf{f}_m = \{\mathbf{f}_{m1} \ \mathbf{f}_{m2} \ \mathbf{f}_{m3}\}$$

$$\mathbf{f}_{mj} = \{f_{xj} \ f_{yj}\} \quad j=1, 2, 3 \quad (2.39)$$

其中 \mathbf{f}_m 是 CST 元素對應於 $\delta\mathbf{u}_m$ 的節點內力， V 是元素的體積， \mathbf{u}_m 定義於(2.11)式。

將(2.13)式、(2.37)式代入(2.38)式可得

$$\delta\mathbf{u}_m^t \mathbf{f}_m = \delta\mathbf{u}_m^t \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m dV \quad (2.40)$$

由(2.40)式可得

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{k}_m \mathbf{u}_m \quad (2.41)$$

$$\mathbf{k}_m = \int_V \mathbf{B}_m^t \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \quad (2.42)$$

其中 \mathbf{k}_m 是 CST 元素的剛度矩陣， \mathbf{k}_m 的表示式詳見附錄 B。

2.5.2 DKT 元素的節點內力及剛度矩陣

將(2.18)式、(2.31)式代入(2.33)式可得

$$\boldsymbol{\sigma}_b = z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (2.43)$$

在薄殼中剪應力 τ_{yz} 與 τ_{xz} 所做的虛功可以忽略，所以本文中用虛功原理推導 DKT 元素的節點內力時僅考慮 σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy} 所做的虛功。

由虛功原理可得

$$\delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}_b^t \boldsymbol{\sigma}_b dV \quad (2.44)$$

$$\mathbf{f}_b = \{\mathbf{f}_{b1} \ \mathbf{f}_{b2} \ \mathbf{f}_{b3}\}$$

$$\mathbf{f}_{bj} = \{f_{zj} \ m_{xj} \ m_{yj}\} \quad j=1, 2, 3 \quad (2.45)$$

其中 \mathbf{f}_b 是 DKT 元素對應於 $\delta\mathbf{u}_b$ 的節點內力， \mathbf{u}_b 定義於(2.30)式， V 為 DKT 元素的體積。

將(2.18)式、(2.31)式、(2.43)式代入(2.44)式可得

$$\delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \delta\mathbf{u}_b^t \int_A \int z \mathbf{B}_b^t z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dz dA$$

$$= \delta \mathbf{u}_b^t \int_A \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dA \quad (2.46)$$

其中

$$\mathbf{D}_b = \int_{-0.5h}^{0.5h} \mathbf{E} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

其中 h 為板元素厚度。

由(2.46)式可得[21]

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{k}_b \mathbf{u}_b \quad (2.48)$$

$$\mathbf{k}_b = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\xi d\eta \quad (2.49)$$

其中 \mathbf{k}_b 是 DKT 元素剛度矩陣。

2.6 元素幾何剛度矩陣

為了改善收斂速度，本文中在平衡迭代的過程中將元素幾何剛度矩陣加入元素剛度矩陣中。本文中採用文獻[19]中的元素幾何剛度，其表示式為

$$\mathbf{k}_g = \int_A \mathbf{B}_g^t \mathbf{N} \mathbf{B}_g dA \quad (2.50)$$

其中

$$\mathbf{B}_g = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{32} & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -y_3 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^* & & \\ & \mathbf{N}^* & \\ & & \mathbf{N}^* \end{bmatrix}$$

其中

$$x_{32} = x_3 - x_2$$

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_1 & \bar{\mathbf{N}}_{12} \\ \bar{\mathbf{N}}_{12} & \bar{\mathbf{N}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{N}} = h\mathbf{E}\mathbf{B}_m \mathbf{u}_m$$

其中 h 為板元素厚度， \mathbf{E} 定義於(2.36)式， \mathbf{B}_m 定義於(2.15)式， \mathbf{u}_m 定義於(2.9)式。

(2.50)式為一近似的幾何剛度矩陣，僅考慮面內應力 σ_x 、 σ_y 以及 τ_{xy} 在剛體運動時的效應。文獻[24]提到將元素幾何剛度矩陣加入元素剛度矩陣可以有效提高平衡迭代的收斂速率。最後，將剛度 \mathbf{k}_m 、 \mathbf{k}_b 、 \mathbf{k}_g 疊加後，旋轉至總體座標系統上。

2.7 元素變形角的描述

本文中採用文獻[22]中的兩階段旋轉法來決定元素的剛體旋轉及節點在元素座標的變形位移與轉角。假設第 I 個位置已知，此處所謂的第 I 個位置，是指第 I 個增量疊代收斂後的平衡位置。 ${}^I\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ 為元素在第 I 個位置元素座標， ${}^I X_j$ 、 $\Delta \mathbf{U}_j$ 及 $\Delta \Phi_j (j=1, 2, 3)$ 分別是元素節點 j 在總體座標中第 I 個位置的位置向量、增量位移向量，及增量旋轉向量，節點 j 當前的座標 $X_j (j=1, 2, 3)$ 可由 ${}^I X_j$ 加上 $\Delta \mathbf{U}_j$ 得到。由 X_j 可以利用元素座標定義求出當前的元素座標 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3)$ ，本文中稱元素從 ${}^I\bar{x}_i$ 到 \bar{x}_i 的運動為對應於 $\Delta \mathbf{U}_j$ 、 $\Delta \Phi_j (j=1, 2, 3)$ 之剛體運動，本文中假設該剛體運動是由以下三個步驟達成的。

(1) $\Delta \mathbf{U}_1$ 造成的位移：元素座標 ${}^I \bar{x}_i$ 的原點受到 $\Delta \mathbf{U}_1$ 的作用移動到元素座標 \bar{x}_i 的原點，如圖 2.7(a)，其中 $\Delta \mathbf{U}_1$ 是作用在元素節點 1 的元素節點增量位移向量。

(2) 旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 造成的面外旋轉(out-of plane rotation)：在圖 2.7(a)中可以看到元素的 ${}^I \bar{x}_i$ ($i=1, 2, 3$) 軸因為受到在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面的旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用而旋轉，其中 ${}^I \bar{x}_3$ 軸旋轉到 \bar{x}_3 軸處並且與之重疊， $\boldsymbol{\alpha}$ 的表示式為

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos^{-1}({}^I \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) \frac{{}^I \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3}{\|{}^I \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3\|} \quad (2.51)$$

其中 ${}^I \mathbf{e}_3$ 與 \mathbf{e}_3 分別是 ${}^I \bar{x}_3$ 軸與 \bar{x}_3 軸上的單位向量。

因為旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 造成的運動是朝遠離 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面方向，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 所造成的旋轉稱為面外旋轉。

(3) 旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 造成的面內旋轉(in-plane rotation)：元素的 ${}^I \bar{x}_i$ 軸因為受到在 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面的旋轉向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作用而旋轉到 \bar{x}'_i ($i=1, 2, 3$) 軸，由圖 2.7(b)可知 \bar{x}'_3 軸與 \bar{x}_3 軸重疊，而 \bar{x}'_i 軸受到旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 作用轉到 \bar{x}_i 軸，旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示式為

$$\boldsymbol{\beta} = \cos^{-1}(\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_3 \quad (2.52)$$

其中 \mathbf{e}'_1 、 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_3 分別是 \bar{x}'_1 、 \bar{x}_1 、 \bar{x}_3 軸方向的單位向量。

因為旋轉向量 $\boldsymbol{\beta}$ 造成的運動的方向是平行於 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 平面，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 所造成的旋轉稱為面內旋轉。

本文使用文獻[22]提出的直接法(direct method)來計算對應於 $\Delta \mathbf{U}_j$ 及 $\Delta \boldsymbol{\Phi}_j$ ($j=1, 2, 3$) 的元素變形角。

在文獻[22]所提出的直接法可以分成以下四個步驟。

(1) $\Delta \mathbf{U}_1$ 造成的剛體移動：整個元素因為 $\Delta \mathbf{U}_1$ 而移動，其中 $\Delta \mathbf{U}_1$ 是作用在元素節點 1 的元素節點增量位移向量。

(2) 旋轉向量 α 造成的剛體旋轉：旋轉向量 α (2.51 式) 通過元素節點 1 使得整個元素除了 ${}^I \mathbf{n}_{dj}$ 之外由 ${}^I \bar{x}_i$ ($i=1, 2, 3$) 座標轉到 \bar{x}'_i ($i=1, 2, 3$) 座標，其中 ${}^I \mathbf{n}_{dj}$ 是在垂直於在第 I 次疊代收斂後位在元素節點 j 的變形後元素中心面的法線向量。

(3) $\Delta\Phi_{ij}$ 造成 ${}^I \mathbf{n}_{dj}$ 的有限旋轉：法線向量 ${}^I \mathbf{n}_{dj}$ 受到 $\Delta\Phi_{ij}$ 作用而旋轉到新位置 \mathbf{n}'_{dj} ，如圖 2.8 所示。其中 $\Delta\Phi_{ij}$ 是增量旋轉位移向量 $\Delta\Phi_j$ 在 $\bar{x}'_1 - \bar{x}'_2$ 平面的投影向量。

(4) 旋轉向量 β 造成的剛體旋轉：旋轉向量 β (2.52 式) 通過元素節點 1 使得整個元素包括 \mathbf{n}'_u 及 \mathbf{n}'_{dj} 旋轉到最後的位置 \mathbf{n}_u 及 \mathbf{n}_{dj} ，其中 \mathbf{n}'_u 是 ${}^I \mathbf{n}_u$ 受到 α 作用後的新位置， ${}^I \mathbf{n}_u$ 是在第 I 次疊代收斂後，垂直於未變形的元素中心面的法線向量， \mathbf{n}_u 是當前垂直於未變形元素中心面的法線向量。

令 $\bar{\mathbf{n}}_u$ 及 $\bar{\mathbf{n}}_{dj}$ 為將 \mathbf{n}_u 與 \mathbf{n}_{dj} 表示成在當前的元素座標 \bar{x}_i ($i=1, 2, 3$) 軸分量的向量，則元素變形角 $\bar{\theta}_j$ 可表示成

$$\bar{\theta}_j = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{1j} \\ \bar{\theta}_{2j} \\ 0 \end{Bmatrix} = \cos^{-1}(\bar{\mathbf{n}}_u \cdot \bar{\mathbf{n}}_{dj}) \frac{\bar{\mathbf{n}}_u \times \bar{\mathbf{n}}_{dj}}{\|\bar{\mathbf{n}}_u \times \bar{\mathbf{n}}_{dj}\|} \quad (2.53)$$

2.8 系統的平衡方程式與收斂準則

結構系統受位移負荷時，其平衡方程式可以表示為

$$\Psi = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda \mathbf{Q}_p) = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

其中 Ψ 為系統不平衡力向量， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q} 為系統位移向量， λ 為負荷參數， \mathbf{Q}_p 為參考位移負荷向量。 \mathbf{F} 可由(2.39)與(2.45)

式的元素節點力，用標準的座標轉換，轉換到對應總體座標後再組合而成。

本文以不平衡力 Ψ 的 weighted Euclidean norm 作為迭代時的誤差度量，而且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{\|\mathbf{F}_e\|} \leq e_{tol} \quad (2.55)$$

其中 \mathbf{F}_e 為對應於位移負荷的系統節點反力向量。 e_{tol} 為一給定之容許誤差值。



第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.54)式的數值計算方法是採用文獻[25]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。為了文章的完整性，本章將簡單介紹文獻[25]中提出的數值計算的方法與程序。

3.1 本研究使用的數值計算方法

本研究使用牛頓-拉福森法和弧長控制法[25]的增量迭代，本研究利用判斷系統切線剛度的行列式值是否變號並使用二分法來偵測分歧點，找到第一個分歧點後，使用逆冪法計算挫屈模態，以第一個挫屈模態當擾動位移，使平面膜結構進入次要平衡路徑，以產生皺折。本研究在結構進入次要平衡路徑之後，使用弧長控制法容易出現找不到實根的情形，故改以標準牛頓法進行迭代。

3.2 增量迭代法

在增量迭代法中，若第 I 個增量的平衡位置為已知，令其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 λ_I ，則第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)求得[26]

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{r}_T, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_T = -(\mathbf{K}_T^I)^{-1}\mathbf{F}_P, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}_P = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\lambda}, \quad (3.3)$$

其中 \mathbf{K}_T^I 為在第 I 個平衡位置的系統切線剛度矩陣， $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， \mathbf{F} 為(2.54)式中的系統節點內力， \mathbf{F}_P 之計算方法可說明如下：

因式(3.3)中的系統節點內力 \mathbf{F} 是由在總體座標中的元素節點內力

\mathbf{f}^G 組合而成，因此， \mathbf{F}_P 亦可由

$$\mathbf{f}_P^G = \frac{\partial \mathbf{f}^G}{\partial \lambda}, \quad (3.4)$$

組合而成；(3.4)式中之 $\frac{\partial \mathbf{f}^G}{\partial \lambda}$ 可表示成

$$\frac{\partial \mathbf{f}^G}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{f}^G}{\partial \mathbf{r}^G} \frac{\partial \mathbf{r}^G}{\partial \lambda} = \mathbf{k}^G \mathbf{r}_P^G \quad (3.5)$$

$$\mathbf{k}^G = \frac{\partial \mathbf{f}^G}{\partial \mathbf{r}^G} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_P^G = \frac{\partial \mathbf{r}^G}{\partial \lambda} \quad (3.7)$$

其中， \mathbf{k}^G 為在總體座標上的元素剛度矩陣， \mathbf{k}^G 是由在元素座標中的元素剛度矩陣經標準轉換得到， \mathbf{r}_P^G 為元素的節點參考位移負荷，可以由系統參考位移負荷 \mathbf{Q}_P 萃取而得到。

(3.1)式中的 $\Delta \lambda$ 可利用下式求出[27]

$$\Delta \lambda = \pm \Delta l / (\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T)^{1/2}, \quad (3.8)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I-1 與 I 個增量收斂時，其系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta \lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 Δl 表示第 I+1 個增量的增量弧長，其值可以如下決定[27]

$$\Delta l = \Delta l_I (J_D / J_I)^{1/2}, \quad (3.9)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|}, \quad (3.10)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， \mathbf{R}_0 為 $\lambda = 0$ 時(3.2)式中之 \mathbf{r}_T ， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量之絕對值。

當增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ 及增量位移負荷參數 $\Delta \lambda$ 已知時，則可進行以下的平衡迭代：由 $\mathbf{Q}_{I+1} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ ， $\lambda_{I+1} = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，參考位移負荷向量 \mathbf{Q}_P 及 2.5 節與 2.7 節的方法，則可以求得系統中各殼元素在當前的元素座標、節點變形位移、節點變形角。再利用 2.6 節的方法，求得在當前元素座標上的節點內力及剛度矩陣，再轉換到總體座標的節點內力及剛度矩陣。由(2.54)式此時之不平衡力可表示成

$$\Psi_{I+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}, \mathbf{Q}_P), \quad (3.11)$$

將(2.54)式在 $\lambda = \lambda_{I+1}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{I+1}$ 時用泰勒展開式展開為

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_{I+1} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \delta \lambda + (\text{二次以上高次項}) \\ &= \Psi_{I+1} + \mathbf{K}_T \mathbf{r} + \delta \lambda \mathbf{F}_P + (\text{二次以上高次項}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中， $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$ 為系統切線剛度矩陣， $\mathbf{r} = \delta \mathbf{Q}$ 為增量位移修正量， \mathbf{F}_P

在(3.3)式中已定義，在此我們必須注意 \mathbf{F}_P 在每一次迭代後都要重新計算。

依牛頓法，忽略(3.12)式中二次以上高次項，可得到位移修正量

$$\mathbf{r} = -\mathbf{K}_T^{-1} (\Psi_{I+1} + \delta \lambda \mathbf{F}_P) = \mathbf{r}_0 + \delta \lambda \mathbf{r}_T, \quad (3.13)$$

其中， $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{K}_T^{-1} \Psi_{I+1}$ ， \mathbf{r}_T 在(3.2)式中已定義。

(3.13)式中的位移負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 有很多不同的決定方法[28]，如 Crisfield 在文獻[27]所提出的定弧長控制法及 Fried 在文獻[29]提出的正交軌線法，本文使用 Crisfield 在文獻[27]所提出的定弧長控制法決定 $\delta\lambda$ ，並將於 3.3 節中介紹。

將求得之位移負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 及增量位移修正量 \mathbf{r} 加入上次迭代之 $\Delta\lambda$ 與 $\Delta\mathbf{Q}$ 中，可得到一新的增量位移向量與增量位移負荷參數，再進行下一次迭代。以上之迭代過程一直重複至(3.11)式中的不平衡力滿足(2.55)式的收斂準則為止。

3.3 弧長控制法

(3.13)式中的位移負荷參數修正量 $\delta\lambda$ 可利用文獻[27]中 Crisfield 所提出的定弧長控制法決定，其方法使在每一個增量中固定其增量位移的 Euclidean norm 為一定值 Δl 。由新的增量位移向量為 $(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})$ 可得

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T), \quad (3.14)$$

上式經過整理後可以得到 $\delta\lambda$ 的二次方程式

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0, \quad (3.15)$$

其中

$$a_1 = \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T,$$

$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t \mathbf{r}_T,$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0) - \Delta l^2,$$

當(3.15)式的解為兩實根 $\delta\lambda_1$ ， $\delta\lambda_2$ 時，本文中取兩根中能使新的增量位移 $(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})$ 與前次迭代增量位移 $\Delta\mathbf{Q}$ 間的內積(inner product)較大

者為 $\delta\lambda$ 。當(3.15)式無實根時，則把(3.9)式之 Δl 減小，重做第 I+1 個增量。

3.4 二分法

利用 3.2 節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 I+1 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 Δl_{I+1} 表示第 I+1 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{CR} ：

(1) 令 $\Delta l_L = 0, \Delta l_R = \Delta l_{I+1}, \lambda_L = \lambda_I, \lambda_R = \lambda_{I+1}$ ，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。

(2) 取 $\Delta l_{I+1} = \frac{\Delta l_L + \Delta l_R}{2}$ ，重作第 I+1 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。

(3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}, \Delta l_L = \Delta l_{I+1}$ ，若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}, \Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ 。

(4) 若下列兩式挫屈誤差準則同時滿足

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{D(0)} < e_D \quad (3.16)$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{\lambda_{I+1}} < e_\lambda \quad (3.17)$$

其中 e_D, e_λ 為給定的容許誤差值，則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

3.5 逆冪法(Inverse Power Method)

由 3.4 節的二分法僅能求得挫屈負荷，無法得知其挫屈模態為了求得挫屈模態，本文中採用了逆冪法，並說明如下：

令矩陣 **A** 與矩陣 **B** 分別為

$$\mathbf{A}=\mathbf{K}_T(\lambda_{CR}), \mathbf{B}=\mathbf{I} \quad (3.18)$$

則對應於挫屈負荷參數 λ_{CR} 的挫屈模態為對應於特徵值為 λ_{CR} 之廣義特徵值問題的特徵向量

$$\mathbf{AX}=\lambda \mathbf{BX} \quad (3.19)$$

本文用逆冪法解式(3.19)的數值程序放在附錄 C 中。

3.6 數值程序

本文使用的增量迭代法之數值程序可以分為三個主要部分

1. 輸入與計算開始分析所需的資料
 - (a) 輸入結構與負荷資料。
 - (b) 選擇一個參考自由度，並設定期望此自由度達到的最大位移。
 - (c) 給定最大增量數、每個增量期望的迭代數與最大的迭代數、收斂時的容許誤差。
 - (d) 形成剛度矩陣並求得(3.10)式中的 \mathbf{R}_0 。
 - (e) 利用(3.1)-(3.3)式、(3.9)式與(3.10)式計算第一次增量的增量弧長、增量負荷參數與初始增量位移。
2. 使用迭代法求增量的收斂解
 - (a) 利用已知的增量位移求得目前元素的變形，並以(2.39)、(2.45)式計算元素節點內力。
 - (b) 計算(2.54)式的不平衡力 Ψ 。
 - (c) 檢查(2.55)式的收斂準則，若滿足則進行(e)；否則檢查迭代數，如果小於給定之最大迭代數，則進行(d)；否則減少增量弧長並以

(3.1)-(3.3)式與(3.9)式計算新的增量位移與增量負荷，回到步驟(a)重新此增量。

(d) 以(3.13)式與 3.2 節的方法計算增量位移修正量與增量負荷參數修正量，然後回到步驟(a)。

(e) 判斷系統切線剛度的行列式值是否變號，並使用二分法來偵測分歧點，若找到第一個分歧點，則進行(f)，否則進入第三部分。

(f) 使用逆冪法計算挫屈模態，進入第 3 部分，且此後第二部分改用標準牛頓法進行迭代。

3. 計算下一次增量所需的資料

(a) 檢查參考自由度的位移或已進行的增量次數是否已達給定值。若已達到給定值則停止分析工作；否則進行下一步工作。

(b) 計算(3.12)式中的切線剛度矩陣與 F_p 。

(c) 若第二部分有進行(f)步驟，則調整所算出的挫屈模態向量的長度，並以此挫屈模態作為下一增量的增量位移，擾動進入次要路徑。若第二部分沒有進行(f)步驟，則以(3.1)-(3.3)式與(3.8)-(3.9)式計算下一次增量的增量位移、增量弧長與增量負荷參數。

(d) 回到第二部份執行迭代工作。

第四章 數值分析與結果

在本章中，將先以文獻上的數值例題驗證本文第二章之板元素及第三章所提的幾何非線性分析之數值程序與方法的正確性及可行性，再以文獻上的例題探討膜結構受到剪位移負荷作用下的非線性行為。

例題一：圓柱殼受到位移負荷作用

圖 4.1 為圓柱殼結構示意及其受之位移負荷圖，如圖 4.1 所示，AD，BC 兩邊為鉸接，AB，CD 兩邊為自由邊，本例題在圖 4.1 的中點 M 施加一個向下的位移負荷 λ_M ，其中 $\lambda_M = \lambda$ (mm)， λ 是負荷參數 (Loading parameter)，由於結構為雙對稱結構，本例題分別取 1/4 個結構，與 1/2 個結構，還有完整結構進行分析。分析結構平衡路徑的主要路徑時，本例題使用 10×10 元素網格，容許誤差值取 1×10^{-4} ，取 1/4 個結構分析時，使用 20 個增量，平均迭代次數約為 4，取 1/2 個結構分析時，使用 20 個增量，平均迭代次數約為 4，取完整結構分析時，使用 23 個增量，平均迭代次數約為 4。分析結構平衡路徑的次要路徑時，本例題使用 10×10 元素網格，容許誤差值取 1×10^{-4} ，取 1/2 個結構分析時，使用 27 個增量，平均迭代次數約為 4，取完整結構分析時，使用 33 個增量，平均迭代次數約為 4。圖 4.2 為本例題所得到 M 點的位移-負荷曲線圖的結果。由圖 4.2 可以看出本例題在取 1/2 個結構或整個結構作分析時，都可以偵測到平衡路徑上的分歧點，並可以挫屈模態擾動進入結構的次要平衡路徑。但在取 1/4 個結構分析時，無法找到平衡路徑上的分歧點，也無法找到結構的次要平衡路徑，這應是因為若僅取 1/4 結構進行分析，在設定邊界條件的時候，將圖 4.1 上 M 點的 X 與 Y 方向位移鎖住了，所以不會偵測出結構平衡路徑上的分歧點。圖 4.3 為本例題與文獻的比較，其中 R_M 為

在位移負荷方向的反力， R_M 及 λ 相當於文獻之力負荷及力負荷方向的位移，由圖 4.3 可以看出本例題的結果與文獻[18]的結果相當重合。

例題二：正方形膜結構邊界受剪位移負荷

圖 4.4 所示為本例題分析之正方形膜結構與受負荷圖，本例題是參考文獻[11]提出的例題，正方形膜結構邊長 $L = 229$ (mm)，厚度 $h = 0.0762$ (mm)，楊氏係數 $E = 3790$ (MPa)，蒲松比 $\nu = 0.38$ 。如圖 4.4，本例題 AB, CD 邊為自由邊，BC 邊為固接(Fixed End)，AD 邊為固接，但可在 X 軸方向上移動，本例題在 AD 邊上施加均勻的水平位移 λ (mm) (圖 4.4)。 λ 稱為負荷參數(loading parameter)，在施加剪位移 λ 的過程中，AD 與 BC 兩邊之間的距離是維持固定不變的。

本例題的挫屈負荷為切線剛度行列式值的正負號恰欲由正變負時的位移負荷， 40×40 元素網格挫屈負荷值為 6.56×10^{-4} (mm)， 60×60 元素網格挫屈負荷值為 6.55×10^{-4} (mm)， 80×80 元素網格挫屈負荷值為 6.549×10^{-4} (mm)，可以看出使用 80×80 元素網格挫屈負荷的值收斂了，本例題使用 80×80 元素網格對膜結構進行分析，並與使用 40×40 以及 60×60 元素網格的結果以及文獻[11,12]作比較。使用 40×40 元素網格例題在結構挫屈後使用標準牛頓法進行迭代，平衡迭代容許誤差為 5×10^{-5} ，使用 110 個增量，每個增量平均迭代次數為約為 16 次，使用 60×60 元素網格例題結構挫屈後使用標準牛頓法進行迭代，平衡迭代容許誤差為 5×10^{-5} ，使用 202 個增量，每個增量平均迭代次數為 6，使用 80×80 元素網格例題結構挫屈後使用標準牛頓法進行迭代，平衡迭代容許誤差為 1×10^{-4} ，使用 203 個增量，每個增量平均迭代次數為 5。圖 4.5-4-7 為膜結構的第一個挫屈模態，可以看出使用不同元素網格計算出來的挫屈模態型態非常相似。圖 4.8

為挫屈模態的剖面圖。圖 4.9-4.11 為膜結構正中央點 I 點之位移 w_I 與 AB 邊中點 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖，I 點與 E 點位置如圖 4.4 所示，由圖 4.9-4.11 可以看出 w_I 隨著負荷參數 λ 增加一直在增加，且使用 40×40 元素網格與 60×60 元素網格以及 80×80 元素網格 w_I 的方向相反。 w_E 在初期會有不穩定的跳動現象，之後則趨於穩定，圖 4.12 是使用 60×60 元素網格， w_E 在使用不同的增量負荷參數 $\Delta\lambda$ (mm) 進行迭代的結果，可以看出 w_I 曲線是趨於穩定的，但 w_E 會有不同的結果，這可能是膜結構自由邊邊界鬆弛了，所以使的結構受到差異極小的負荷條件，但結構的變形差異卻很大，圖 4.13 是使用 60×60 元素網格以及 80×80 元素網格的比較圖，可以觀察到 w_I 的曲線是接近的，但 w_E 的曲線仍有差異。圖 4.14(a) 為位移邊界 AD 之節點合力 $\sum R_{Xi}$ -位移負荷參數 λ 曲線圖，圖 4.14(b) 為位移邊界 AD 之節點合力 $\sum R_{Yi}$ -位移負荷參數 λ 曲線圖，圖 4.14 中之反力 $\sum R_{Xi}$ ， $\sum R_{Yi}$ 各為圖 4.4 中的位移邊界 AD 之節點 X 與 Y 方向反力的和，由圖 4.14 可看出不同網格下，位移邊界 AD 之節點反力的合力 $\sum R_{Xi}$ ， $\sum R_{Yi}$ -位移負荷參數 λ 的曲線相當接近。圖 4.15-4.17 為位移邊界 AD 在 X 與 Y 軸方向上的節點反力。由圖 4.15-4.17 可以看出越靠近 A 點的地方節點反力越大，圖 4.18-4.22 是膜結構變形圖，由圖 4.18-4.22 可以看出皺折的走向是呈 AC 的方向，膜結構最大拉應力的分佈的應是沿著對角線 AC 的走向，隨著位移邊界 AD 上的點越靠近 D 點，拉應力逐漸變小，故位移邊界上之節點力的分佈是合理的。

圖 4.18-4.22 為等高線圖及透視圖，透視圖是使用視角 53° 繪製。膜結構側方向最大正負位移，以及最大正負位移所在位置的初始座標如表 4.1 所示。由圖 4.18-4.22 可以看出本例題使用 60×60 與 80×80 元素網格，膜結構的皺折數目較使用 40×40 元素網格多。圖 4.23-4.36 為

結構重要軸線在 Z 方向上的變形，由圖 4.23-4.36 可以看出隨著負荷參數 λ 越來越大，膜結構在 Z 方向的位移也越來越大，且結構變形相當對稱。由圖 4.31 與 4.32 軸線 EG 在 Z 方向的位移分佈圖可以看出使用 60×60 與 80×80 元素網格，膜結構的皺折數目較使用 40×40 元素網格膜結構的皺折數目多，且膜結構正中央點的位移方向相反，故分析本題目時若使用 40×40 元素網格可能還不夠密，由圖 4.31 與 4.32 也可以看出使用 60×60 與 80×80 元素網格膜結構整體變形趨勢是很接近的。

圖 4.22 是本例題在負荷參數 $\lambda = 1(\text{mm})$ 時的膜結構變形圖，可以看出使用 40×40 與 60×60 元素網格及 80×80 元素網格結果是有差異的，使用 60×60 與 80×80 元素網格結果較接近。使用 40×40 元素網格，主要有三條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移為 $\pm w_{\max} = 1.666, -2.805(\text{mm})$ ，最大正位移與最大負位移的差 $+w_{\max} - (-w_{\max}) = 4.471(\text{mm})$ ，使用 60×60 元素網格，主要有四條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移為 $\pm w_{\max} = 1.024, -2.376(\text{mm})$ ，最大正位移與最大負位移的差 $+w_{\max} - (-w_{\max}) = 3.400(\text{mm})$ ，使用 80×80 元素網格，主要有四條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移為 $\pm w_{\max} = 0.930, -2.153(\text{mm})$ ，最大正位移與最大負位移的差 $+w_{\max} - (-w_{\max}) = 3.083(\text{mm})$ 。圖 4.37-4.39 的(b)圖為文獻[12]實驗的結果，可以看出有四條主要的皺折，膜結構側方向最大正負位移為 $\pm w_{\max} = 0.67, -3.11(\text{mm})$ ，最大位移與最小位移大約相差 $3.78(\text{mm})$ 。圖 4.37-4.39 的(c)圖為文獻[11] 以 ABAQUS 以 10^4 個 S4R5 殼元素數值模擬的結果，可以看出主要是有三條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移為 $\pm w_{\max} = 1.18, -3.15(\text{mm})$ ，膜結構側方向最大位移與最

小位移大約相差 4.33(mm)，以本例題與文獻[11,12]比較，可以看出本例題以 40×40 元素網格分析的結果與文獻[11]數值例題的結果較接近，都有三條突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移的差也接近，但是本例題以 40×40 元素網格分析的膜結構側方向最大正位移比起文獻[11]的結果大了許多。本例題使用 60×60 與 80×80 元素網格分析的結果與文獻[12]實驗結果較接近。主要有四條主要突起的皺折，膜結構側方向最大正負位移的差也接近，但是本例題以 80×80 元素網格分析的側方向最大正位移比起文獻[12]的結果大，最大負位移比起文獻[12]的結果小，比較本例題使用 80×80 元素網格分析的結果與文獻[12]實驗結果，可以發現兩者的皺折型態有相同的特徵，但細部仍有差異。造成差異的原因有可能是本例題使用 80×80 元素網格還不夠密，也有可能是文獻[12]在做此實驗時，有先將膜結構稍微彎曲一下，才開始施加剪位移，這部分在本例題的數值計算中沒有被考慮到，也有可能文獻[12]實驗真正的邊界條件與本例題所設定的邊界條件有差異，也有可能是膜結構某些地方很容易鬆弛，差異極小的負荷條件也會造成不同的變形結果。

第五章 結論與展望

本文以共旋轉有限元素推導法，殼元素來分析膜結構的皺折，由本文分析之數值例題的結果，可得以下的結論：

(1)膜結構邊界受剪力側向挫屈後有很多不同平衡路徑，且膜結構受力後的變形很敏感，差異很小的負荷條件，有可能會造成差異很大的變形結果。

(2)由本文例題結果發現膜結構受剪位移時，若元素網格不夠密，則膜結構皺折的數目太少。若欲得到精確的結果，應使用較密元素網格。

(3)本文對於平面膜結構產生側方向位移的機制為在分歧點加上挫屈模態擾動，使膜結構有側方向的位移，本研究發現挫屈模態與膜結構挫屈後皺折的的形狀差異很大。

(4)由本研究分析的結果與文獻上的實驗結果比較，可以發現兩者的皺折型態有相同的特徵，但細部仍有差異，其原因可能是本研究分析時，元素的數目不夠，文獻上的結構有初始不完美，且實驗操作上真實的邊界條件可能與分析的邊界條件不同。

本文例題發現使用太密的元素網格，會出現不易收斂的情形，這可能是因為本研究以平板三角殼元素來模擬薄膜結構的行為，可能因平板殼元素沒有考慮撓曲變形與膜變形間的耦合及採用近似的幾何剛度，造成收斂的困難。也可能是個數值方法上的問題，未來可考慮採用其他元素或數值方法，若能解決這些困難，使用較密的元素網格，有可能可以得到更精確的結果。

參考文獻

- [1] J. W. Leonard, "Tension Structure." McGraw-Hill Book Company; 1988.
- [2] H. Ding, B. Yang, "The modeling and numerical analysis of wrinkled membranes." *Int J Numer Meth Engng.* 2003; 58: 1785-1801.
- [3] E. S. Lee, S. K. Youn, "Finite element analysis of wrinkling membrane structures with large deformations." *Finite Elements Anal Design.* 2006; 42: 780-791.
- [4] R. Rossi, M. Lazzari, R. Vitaliani, And E. Onate, "Simulation of light-weight membrane structures by wrinkling model." *Int J Numer Meth Engng.* 2005; 62: 2127-2153.
- [5] J. Månsson, J. Söderqvist, "Finite element analysis of thin membrane wrinkling." *Mekanik KTH MSc Thesis*; 2003.
- [6] A. Diaby, A. L. Van, C. Wielgosz, "Buckling and wrinkling of prestressed membranes." *Finite Elements Anal Design.* 2006; 42: 992-1001.
- [7] M. Stanuszek, "FE analysis of large deformations of membranes with wrinkling." *Finite Elements in Anal Design.* 2003; 39: 599-618.
- [8] Y. W. Wong, S. Pellegrino, K. C. Park, "Prediction of wrinkle amplitudes in square solar sails." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Conference. Norfolk. 2003.
- [9] Y. W. Wong, S. Pellegrino "Computation of wrinkle amplitudes in thin membranes." 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Denver. 2002.
- [10] Y. W. Wong, S. Pellegrino, "Amplitude of wrinkles in thin membranes." In *new approaches to structural mechanics shells and biological structures* (Dordrecht, The Netherlands, 2002). Kluwer Academic Publishers. pp. 257-270.

- [11] A. Tessler, D. W. Sleight, J. T. Wang, "Nonlinear shell modeling of thin membranes with emphasis on structural wrinkling." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, Virginia 2003.
- [12] J. Leifer, Paducah, J. Black, "Evaluation of shear compliant borders for wrinkle reduction in thin film membrane structures." 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Norfolk, Virginia 2003.
- [13] A. Tessler, D. W. Sleight, J. T. Wang, "Effective modeling and nonlinear shell analysis of thin membranes exhibiting structural wrinkling." *J Spacecraft Rockets*. 2005; 42: 287-298.
- [14] Y. Miyazaki, "Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane." *Int J Numer Meth Engng*. 2006; 66: 1179-1209.
- [15] T. Raible, K. Tegeler, S. Löhnert, P. Wriggers. "Development of a wrinkling algorithm for orthotropic membrane materials." *Comput Methods Appl Mech Engng*. 2005; 194: 2550-2568.
- [16] J.-C. Geminard, R. Bernal, F. Melo, "Wrinkle formulations in Axi-symmetrically stretched membranes." *Eur. Phys. J. E*. 2004; 15: 117-126.
- [17] W. Zhang, T. Hisada, H. Noguchi, "Post-buckling analysis of shell membrane structure by dynamic relaxation method." *Comp Mech*. 2000; 26: 267-272.
- [18] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, "Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Pade approximants" *Int J Numer Meth Engng* 2004; 60: 1987-2012.
- [19] K. J. Bathe, L. W. Ho, "A simple and effective element for analysis of general shell structures." *Comput Struct* 1981; 13: 673-681.
- [20] R. H. Gallagher, "Finite Element Analysis Fundamentals."

- Prentice-Hall: Englewood Cliffs; 1973.
- [21] J. L. Batoz, K. J. Bathe, L. W. Ho, "A study of three-node triangular plate bending elements." *Int J Numer Meth Engng* 1980; 15: 1771-1812.
- [22] K. M. Hsiao, "Nonlinear analysis of general shell structures by flat tri- angular shell element." *Comput Struct.* 1987; 25: 665-675.
- [23] H. Goldstein, "Classical Mechanics." Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [24] 楊禮龍, 薄殼結構在位移負荷作用之下的幾何非線性分析, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2006.
- [25] 張景維, 平面梁結構在位移負荷作用下之幾何非線性分析, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹, 1998.
- [26] M. A. Crisfield, "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures volume 1- essentials." John Wiley and Sons; 1991.
- [27] M. A. Crisfield, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles 'Snap-Through'." *Comput Struct* 1981; 13: 55-62.
- [28] R. Kouhia, M. Mikkola, "Tracing the Equilibrium Path beyond Simple Critical Points." *Int J Numer Meth Engng* 1989; 28: 2923-2941.
- [29] I. Fried, "Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve." *Comput Meth Appl Mech and Engng* 1984; 47: 283-297.
- [30] O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method, 3rd ed." London: McGraw-Hill; 1977.

圖	Mesh	λ (mm)	$+w_{\max}$ (mm)	$+w_{\max}$ 所在位置的初始座標	$-w_{\max}$ (mm)	$-w_{\max}$ 所在位置的初始座標
4.18	40×40	0.0507	0.421	(114.5, 114.5, 0)	-0.608	(177.48, 0, 0)
4.18	60×60	0.0493	0.676	(91.6, 0, 0)	-0.368	(122.13, 125.95, 0)
4.18	80×80	0.0507	0.507	(91.6, 0, 0)	-0.448	(40.075, 229, 0)
4.19	40×40	0.401	1.062	(114.5, 114.5, 0)	-1.770	(177.48, 0, 0)
4.19	60×60	0.404	1.578	(57.25, 229, 0)	-0.933	(118.32, 118.32, 0)
4.19	80×80	0.406	0.791	(157.44, 229, 0)	-1.124	(174.61, 0, 0)
4.20	40×40	0.601	1.296	(114.5, 114.5, 0)	-2.170	(171.75, 0, 0)
4.20	60×60	0.604	1.529	(45.8, 229, 0)	-1.480	(129.77, 0, 0)
4.20	80×80	0.606	0.797	(88.74, 74.43, 0)	-1.564	(71.56, 0, 0)
4.21	40×40	0.801	1.493	(114.5, 114.5, 0)	-2.510	(171.75, 0, 0)
4.21	60×60	0.804	1.078	(34.35, 229, 0)	-2.036	(129.77, 0, 0)
4.21	80×80	0.806	0.868	(85.88, 74.43, 0)	-1.919	(131.68, 229, 0)
4.22	40×40	1.000	1.666	(114.5, 114.5, 0)	-2.805	(51.53, 229, 0)
4.22	60×60	1.000	1.024	(145.03, 156.48, 0)	-2.376	(129.77, 0, 0)
4.22	80×80	1.000	0.930	(85.88, 74.43, 0)	-2.153	(131.68, 229, 0)

表 4.1 膜結構側方向最大正負位移點所在位置的初始座標

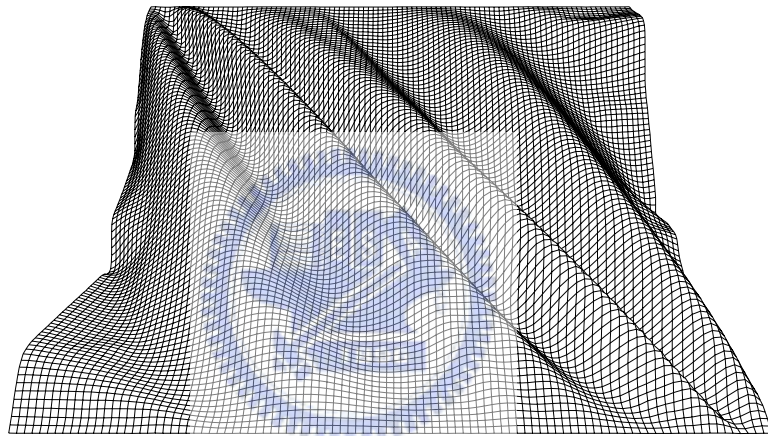


圖 1.1 皺折的示意圖

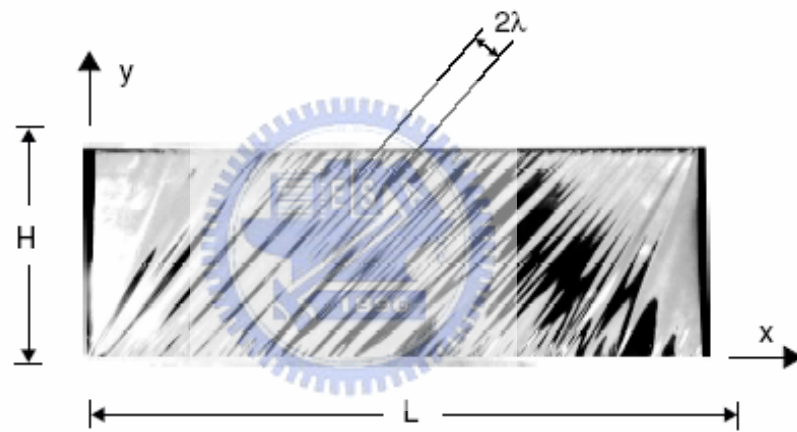
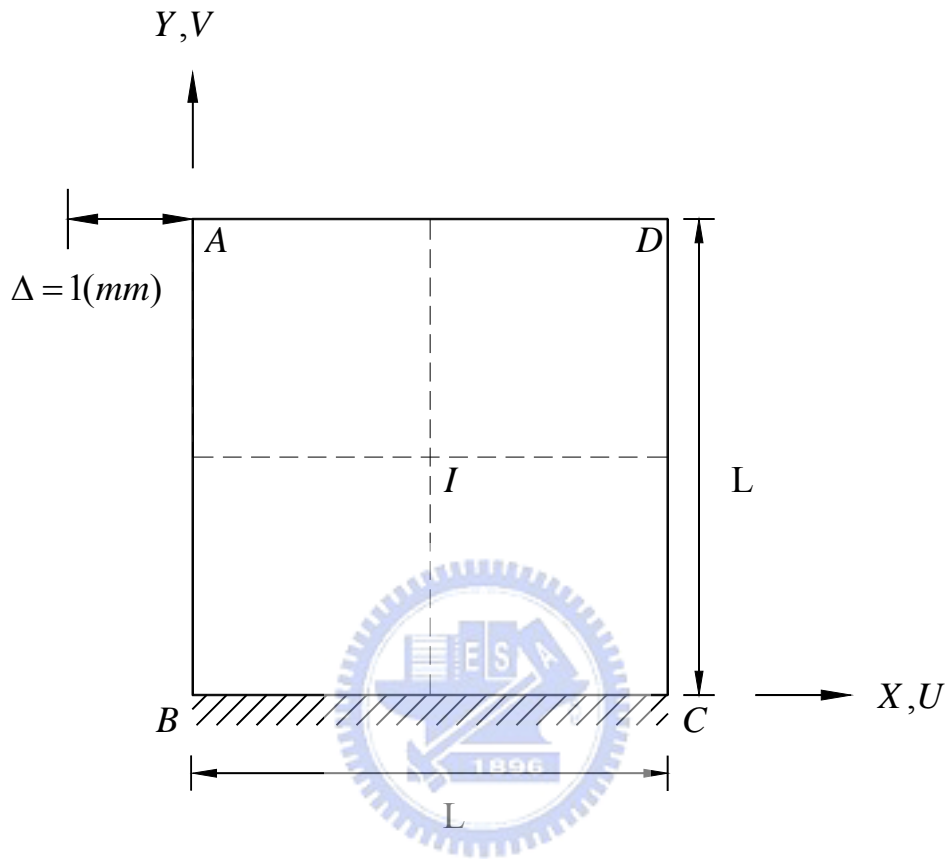


圖1.2 波長的示意圖，圖上符號 λ 為半波長，取自文獻[9]



$L = 229(mm)$
 Thickness, $h = 0.0762(mm)$
 $E = 3790(N/mm^2)$
 $\nu = 0.38$

圖1.3文獻[11]例題之結構示意圖

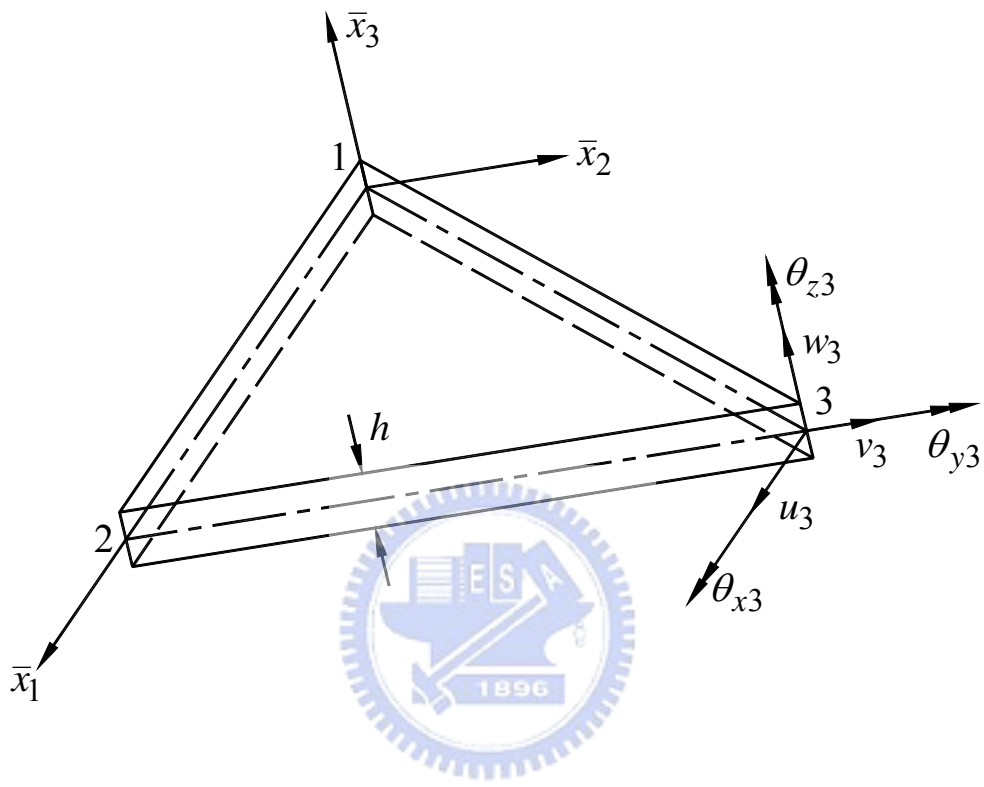


圖 2.1 三角殼元素的示意圖及節點自由度

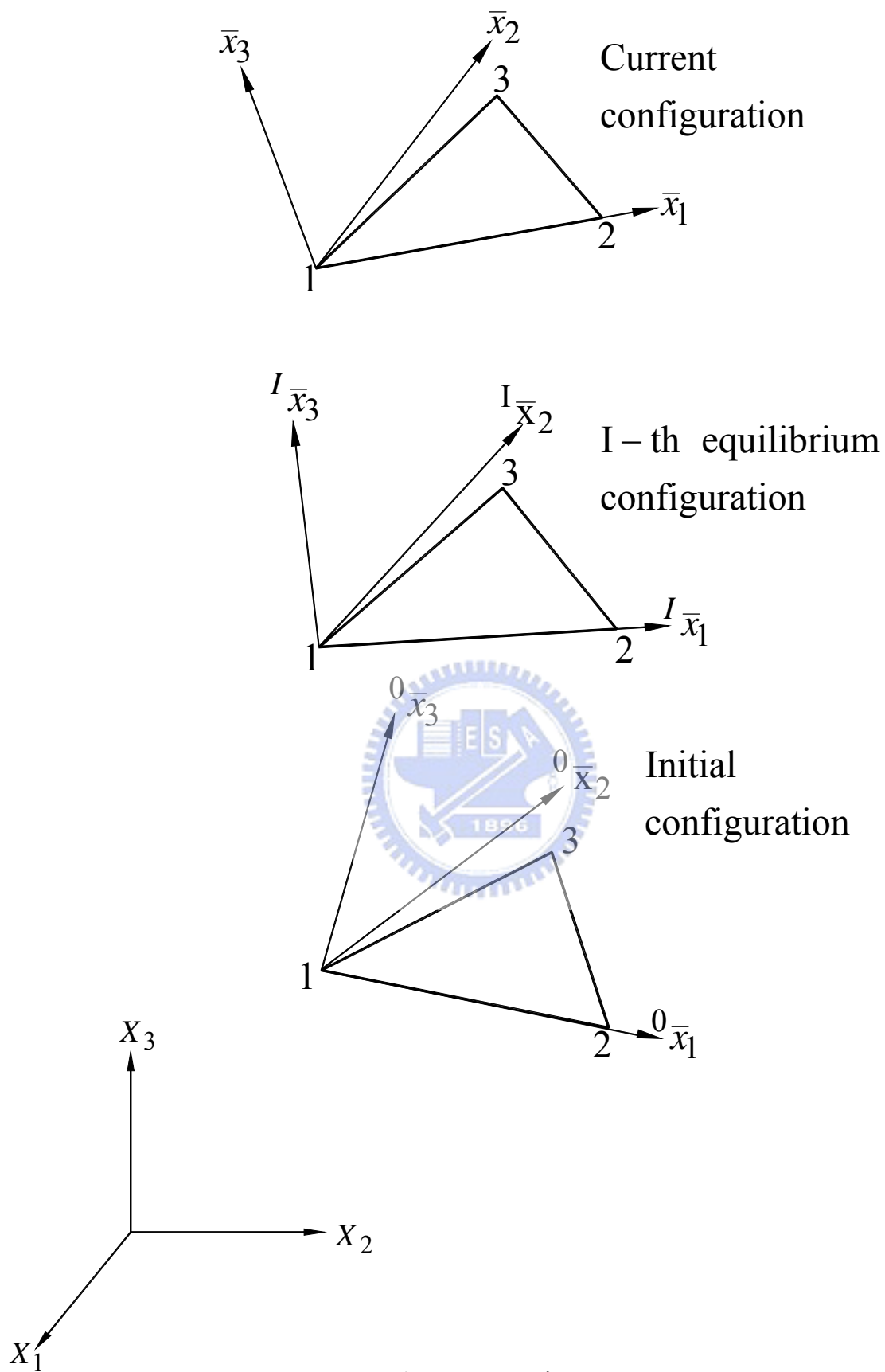


圖 2.2 總體座標與元素座標

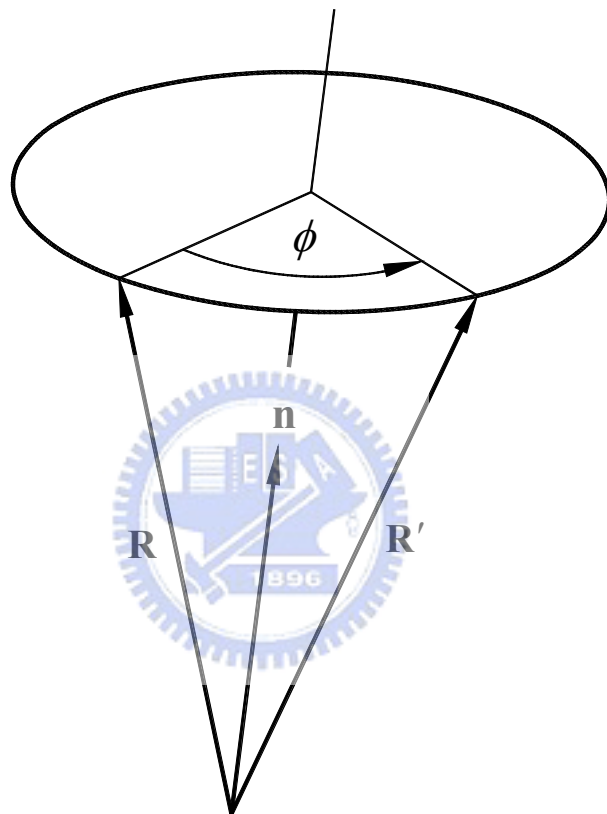


圖 2.3 旋轉向量

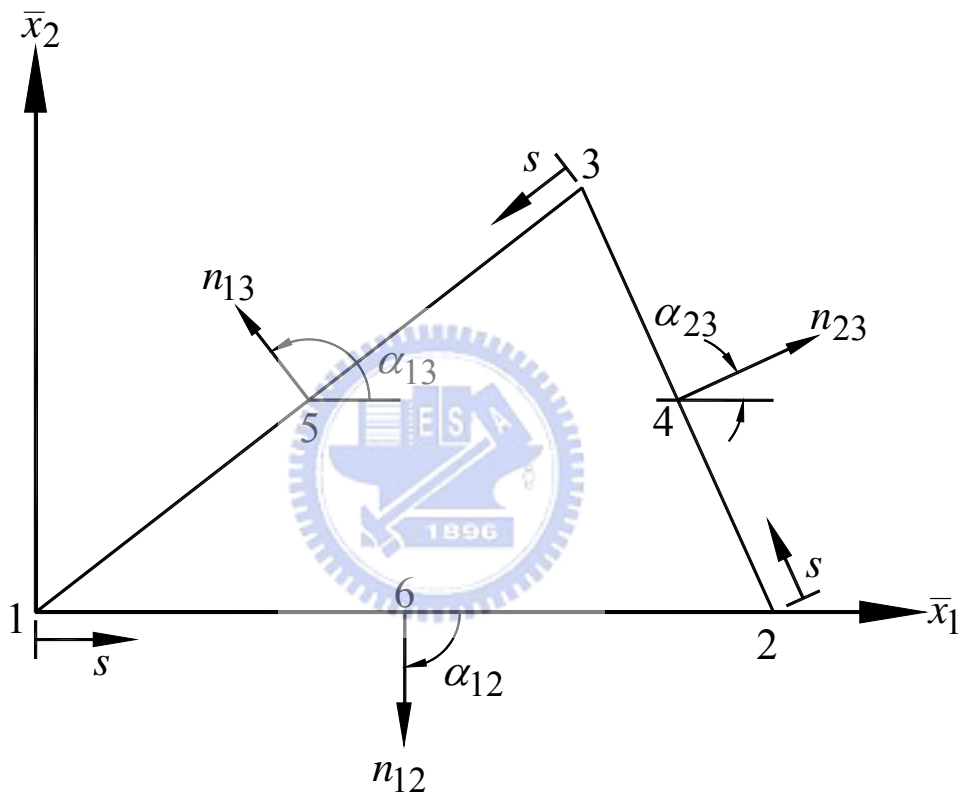
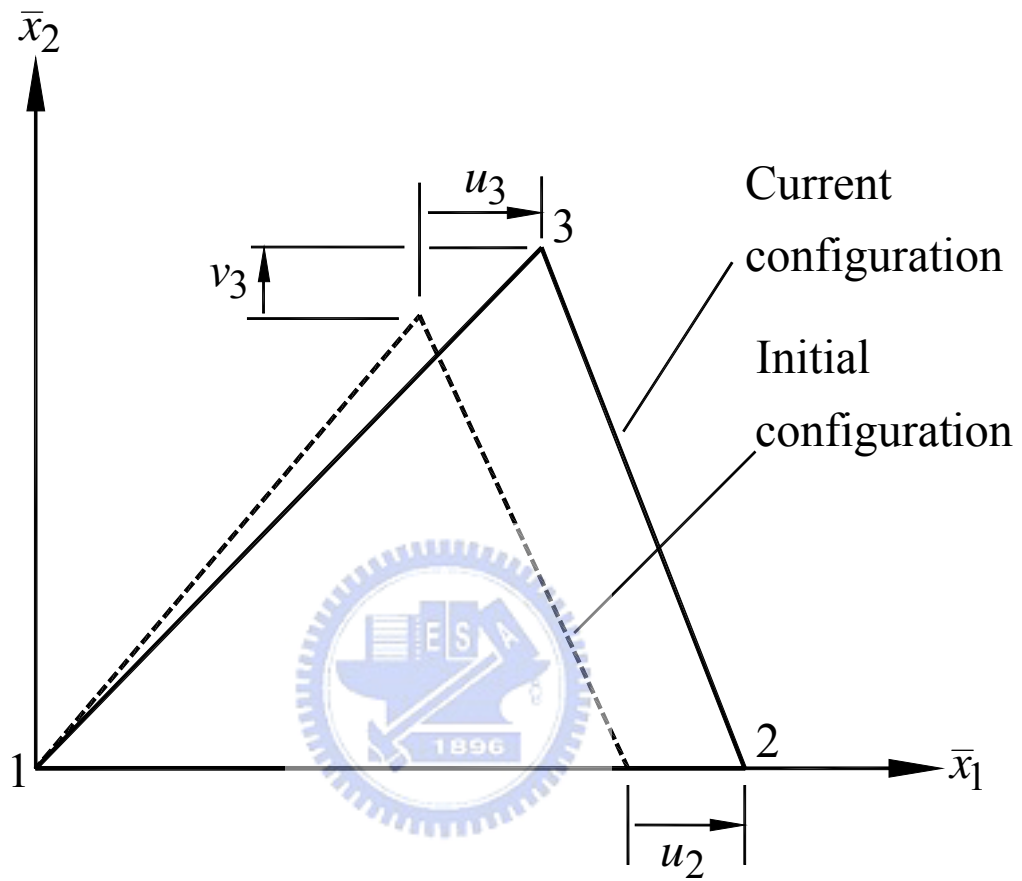


圖 2.4 DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖



Membrane nodal displacement : $u_m = \{0 \ 0 \ u_2 \ 0 \ u_3 \ v_3\}$

圖 2.5 CST 元素在元素座標上的變形位移

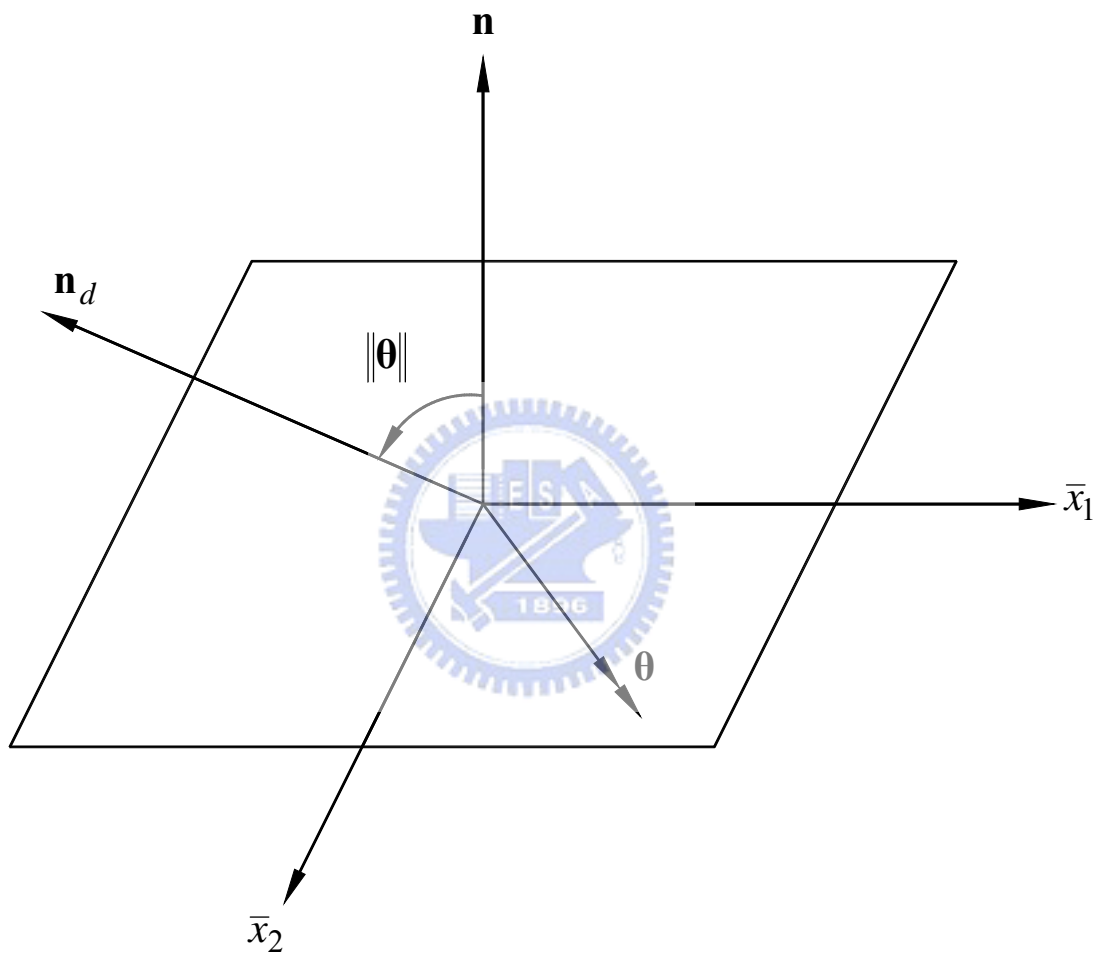


圖 2.6 變形前板元素中心面之單位法向量 \mathbf{n} 受旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}$ 作用的示意圖

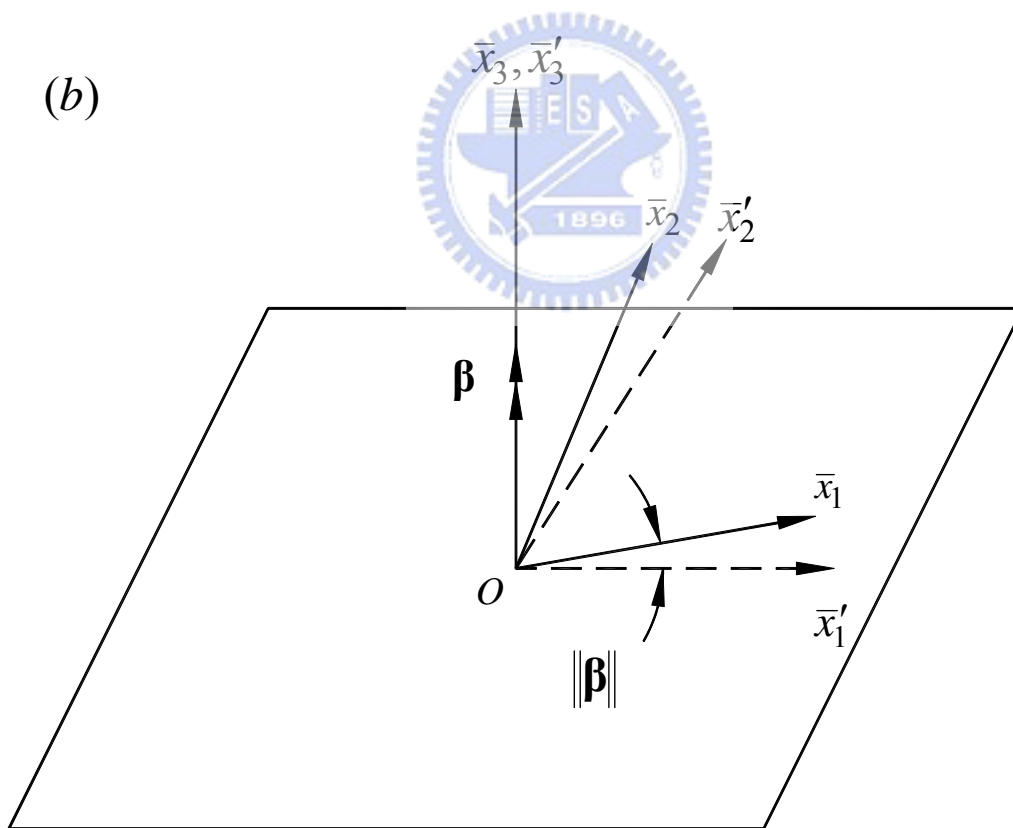
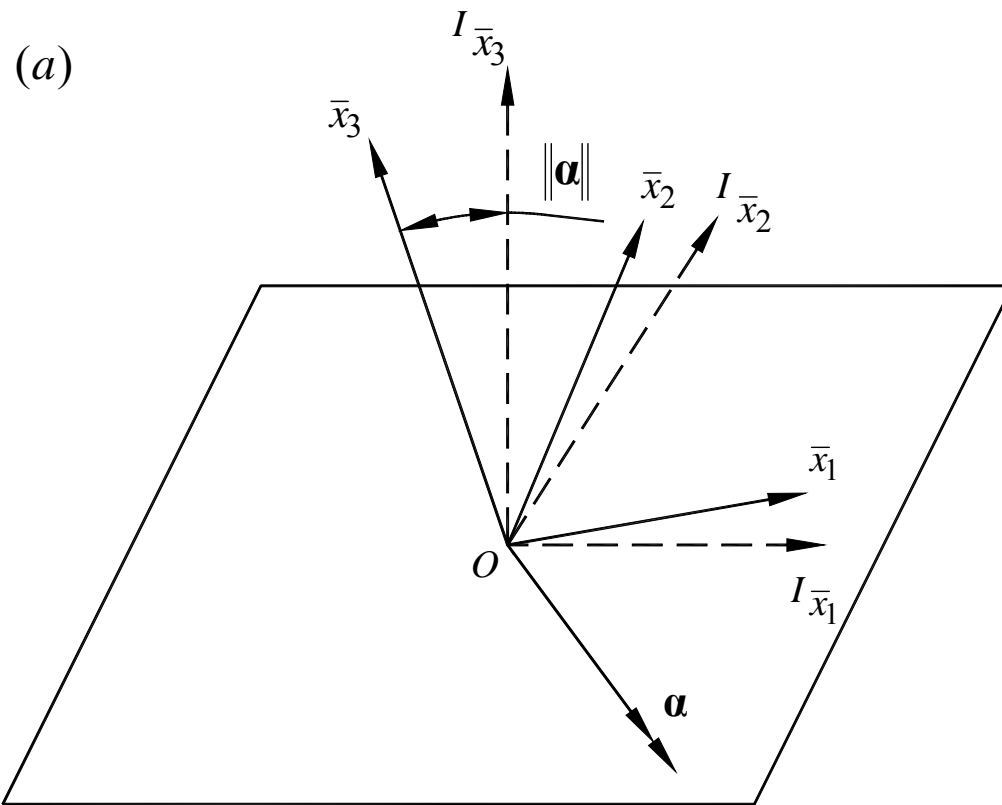


圖 2.7 元素座標的剛體旋轉 (a)面外旋轉(out-of plane rotation),(b)面內旋轉(in-plane roration)

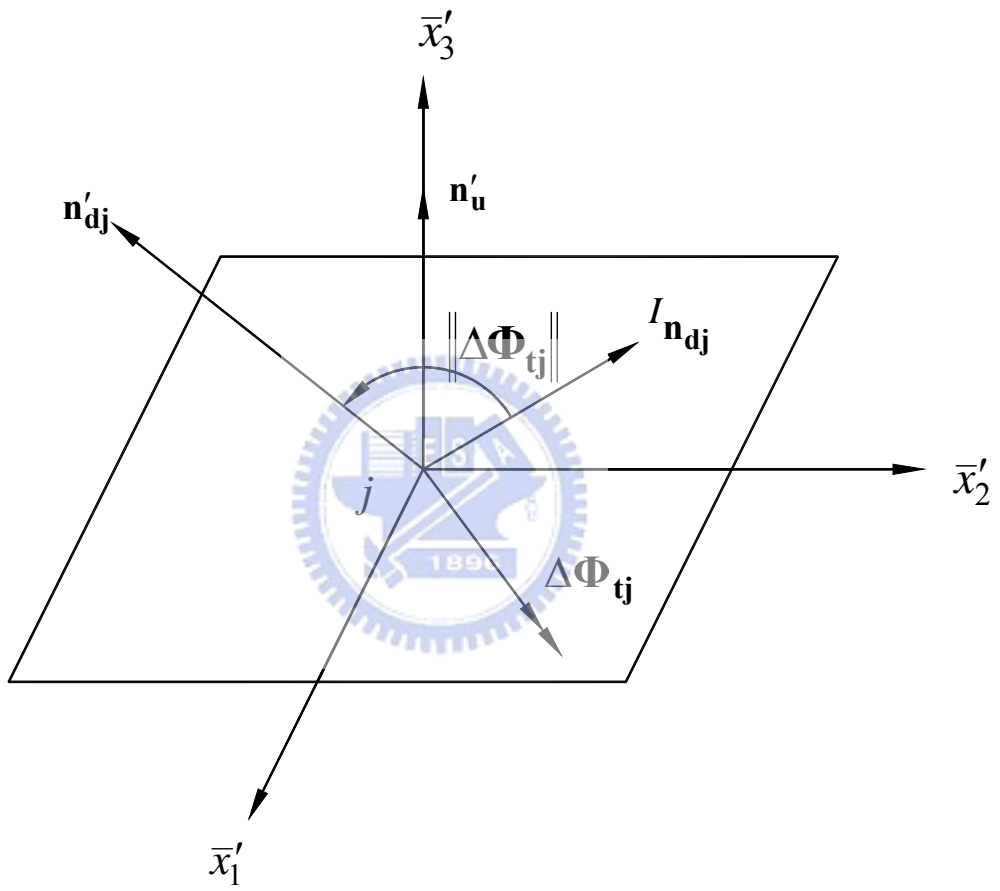


圖 2.8 決定板元素節點變形轉角的第 3 個步驟的示意圖

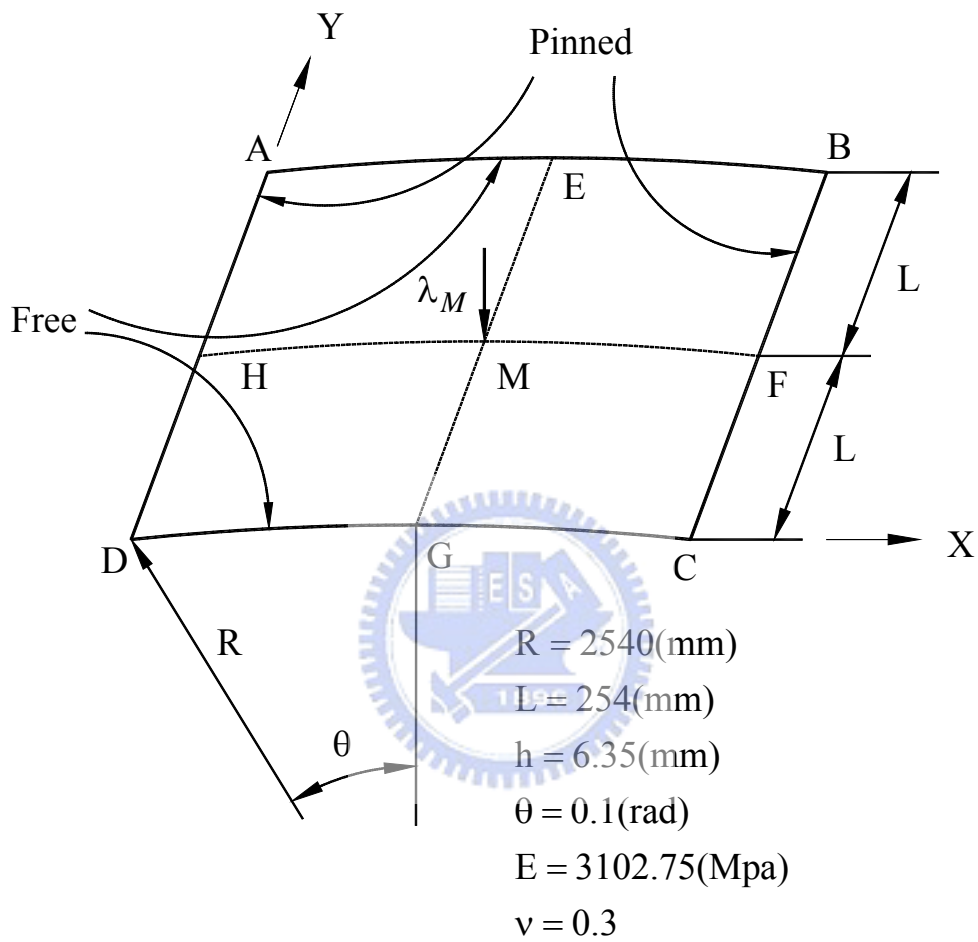


圖 4.1 圓柱殼結構示意圖及其受之位移負荷圖，(例題一)

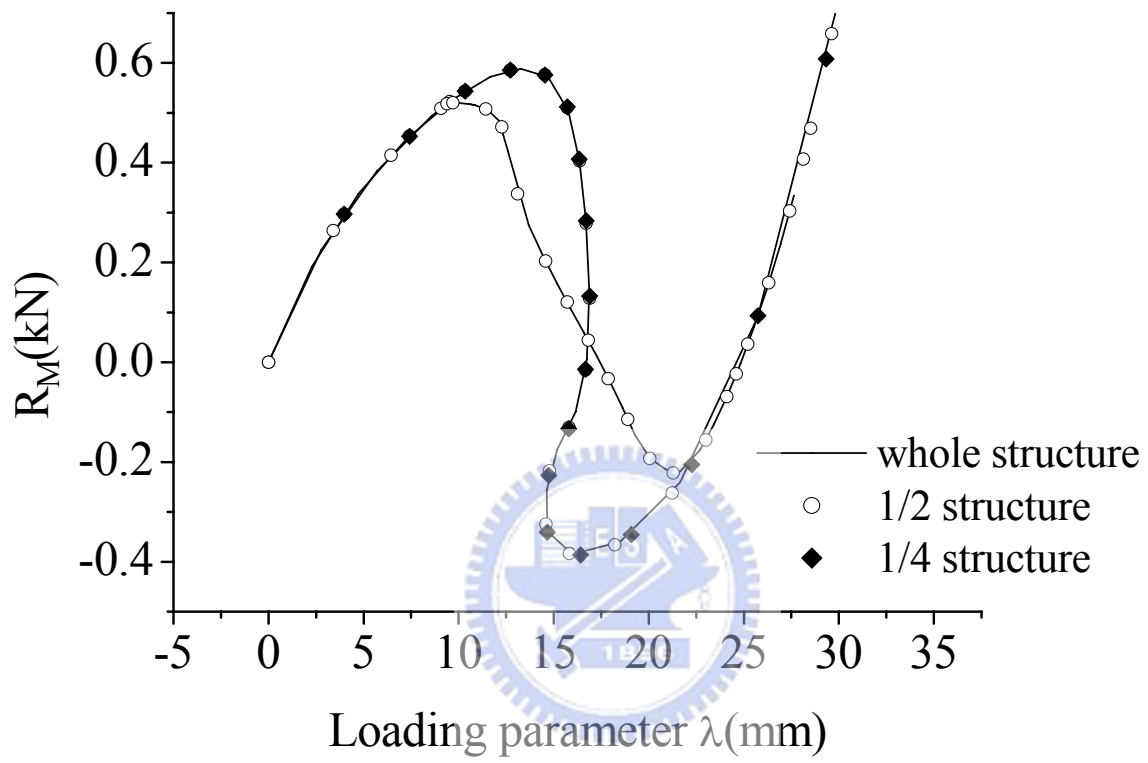


圖 4.2 M 點之反力-負荷參數曲線圖(例題一)

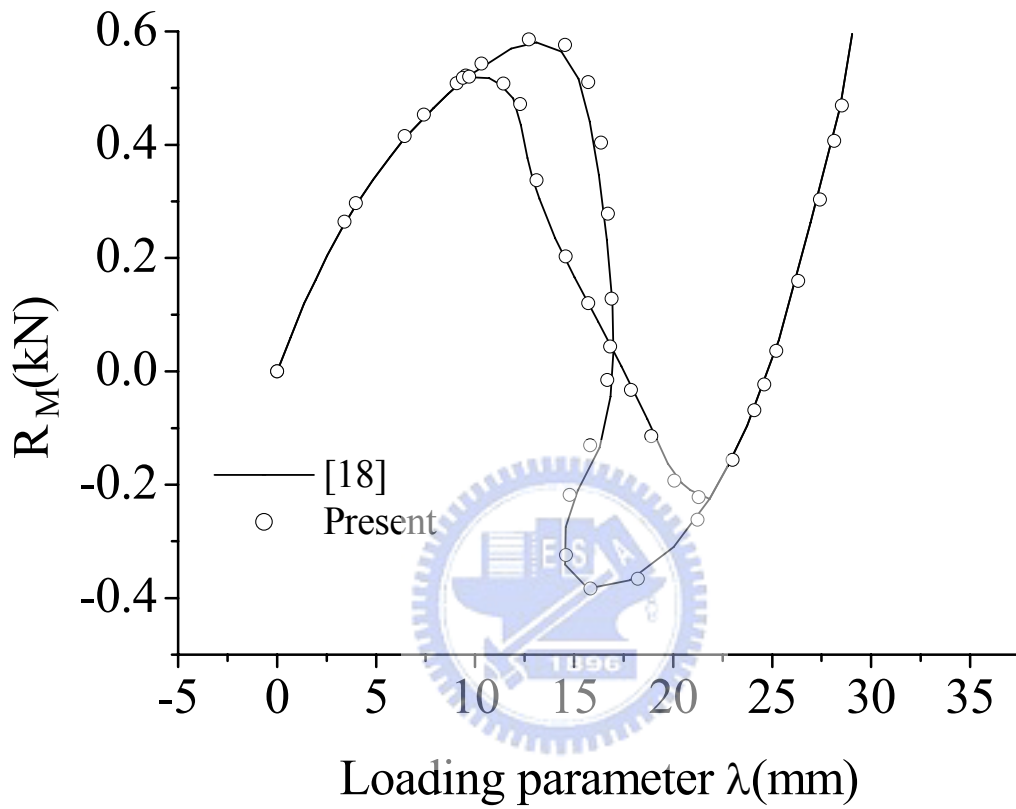
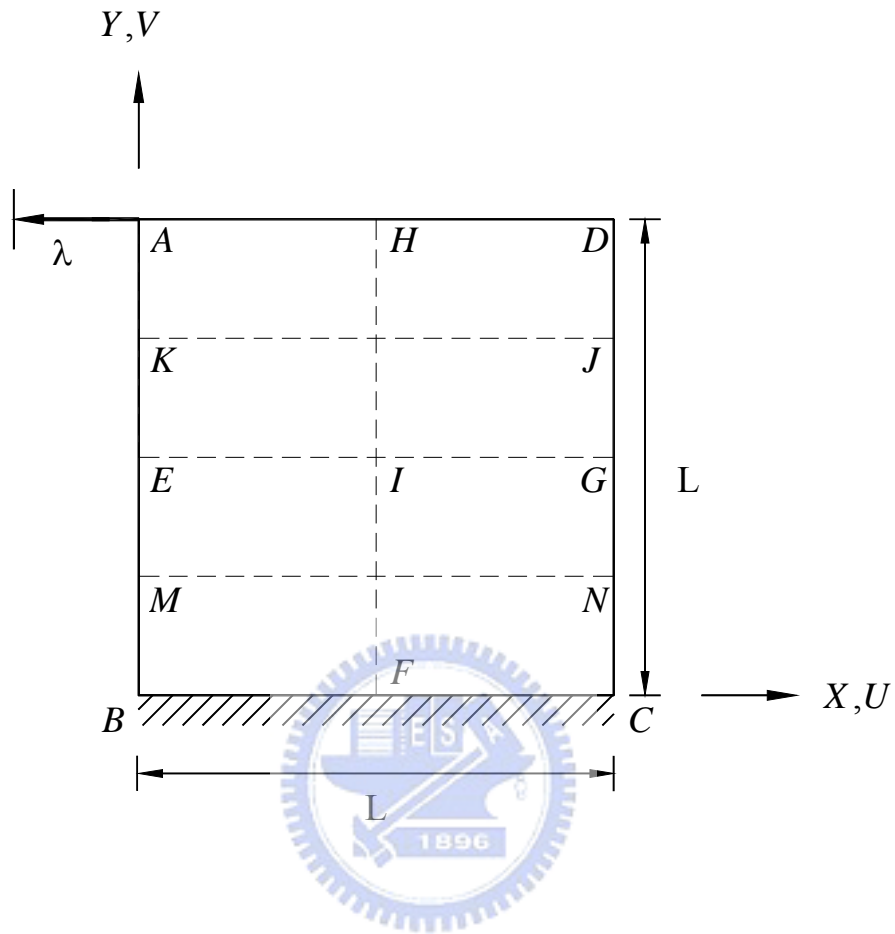


圖 4.3 M 點之反力-負荷參數曲線圖(例題一)



$$L = 229(\text{mm})$$

$$\text{Thickness, } h = 0.0762(\text{mm})$$

$$E = 3790(\text{N}/\text{mm}^2)$$

$$\nu = 0.38$$

$$AK = KE = EM = MB = 0.25L$$

$$EH = HD = 0.5L$$

圖 4.4 正方形膜結構示意圖及其受之位移負荷圖 (例題二)

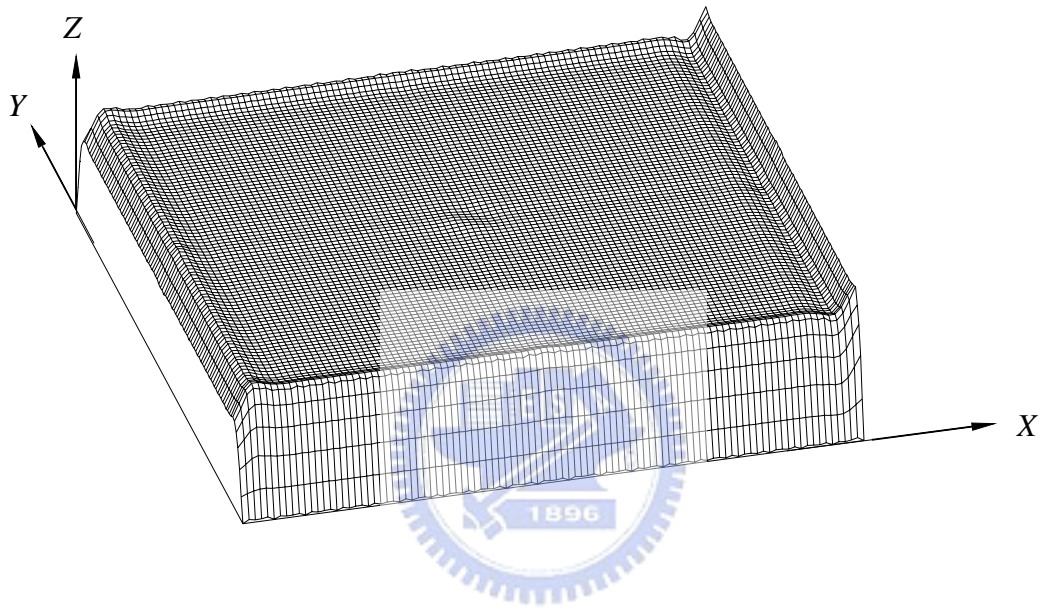


圖 4.5 挫屈模態，例題二，Mesh 40×40

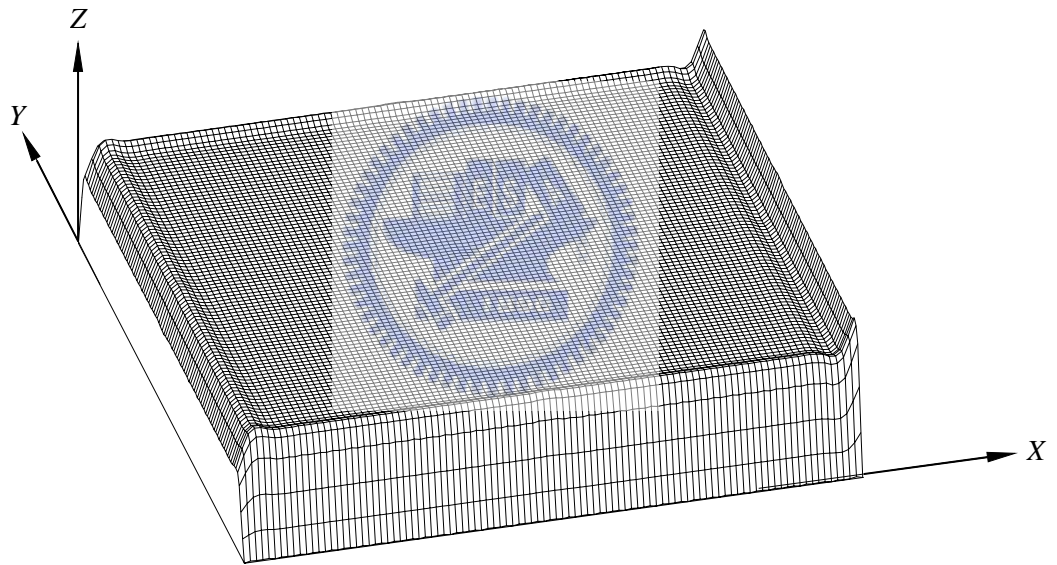


圖 4.6 挫屈模態，例題二，Mesh 60×60

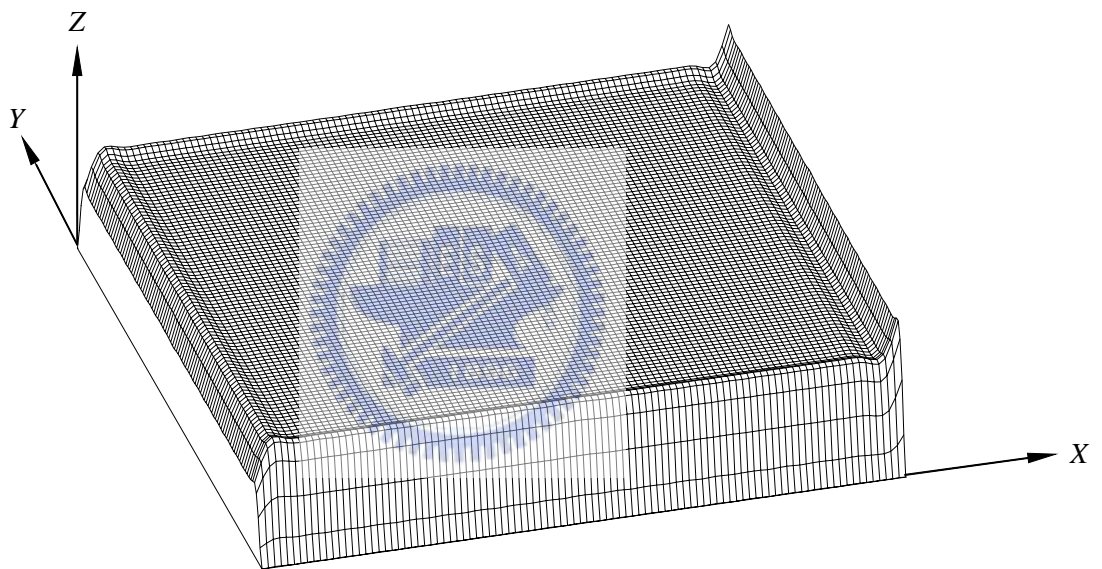


圖 4.7 挫屈模態，例題二，Mesh 80×80

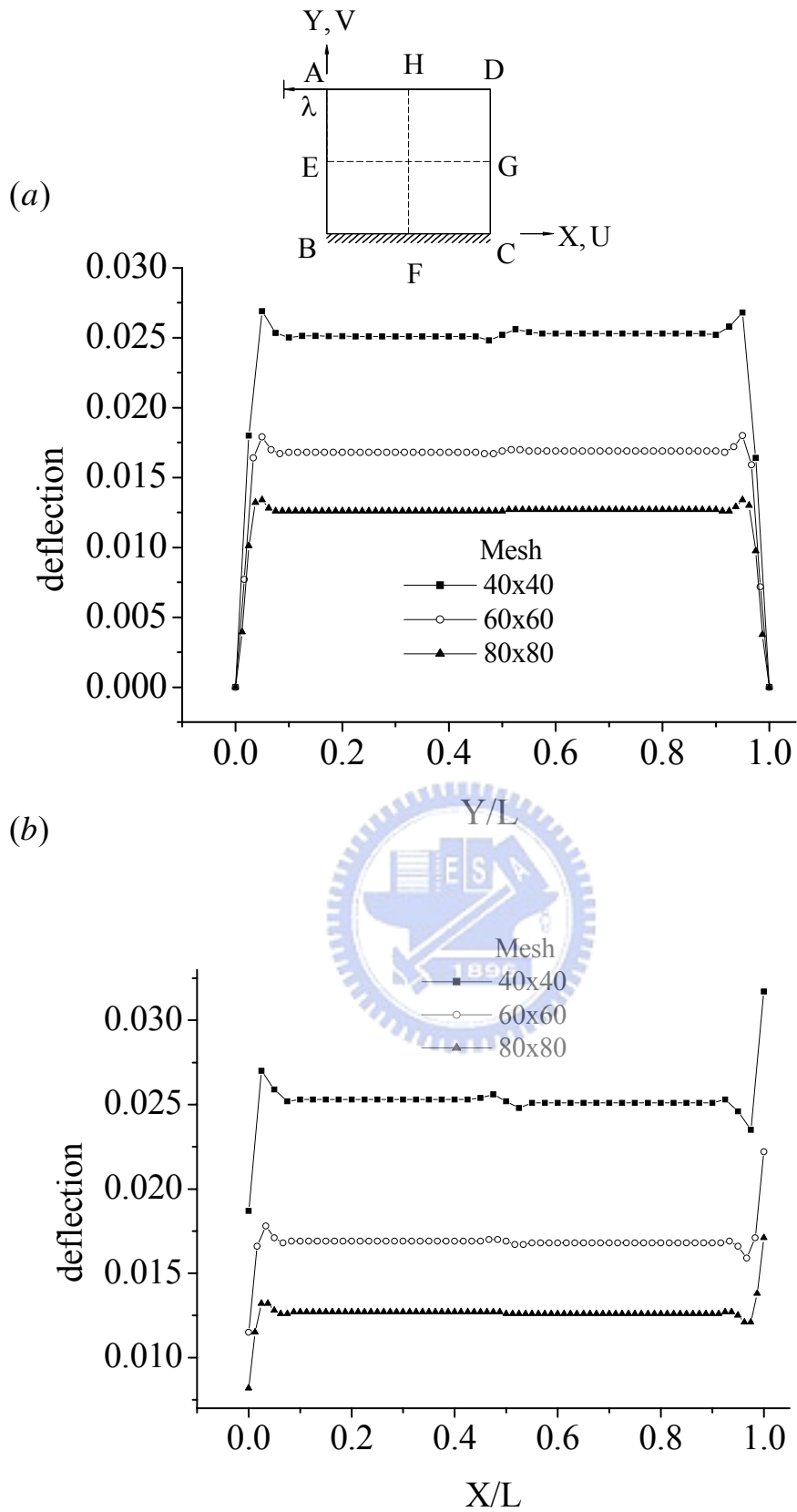


圖 4.8 挫屈模態的剖面圖 (a)FH 斷面，(b)EG 斷面，例題二

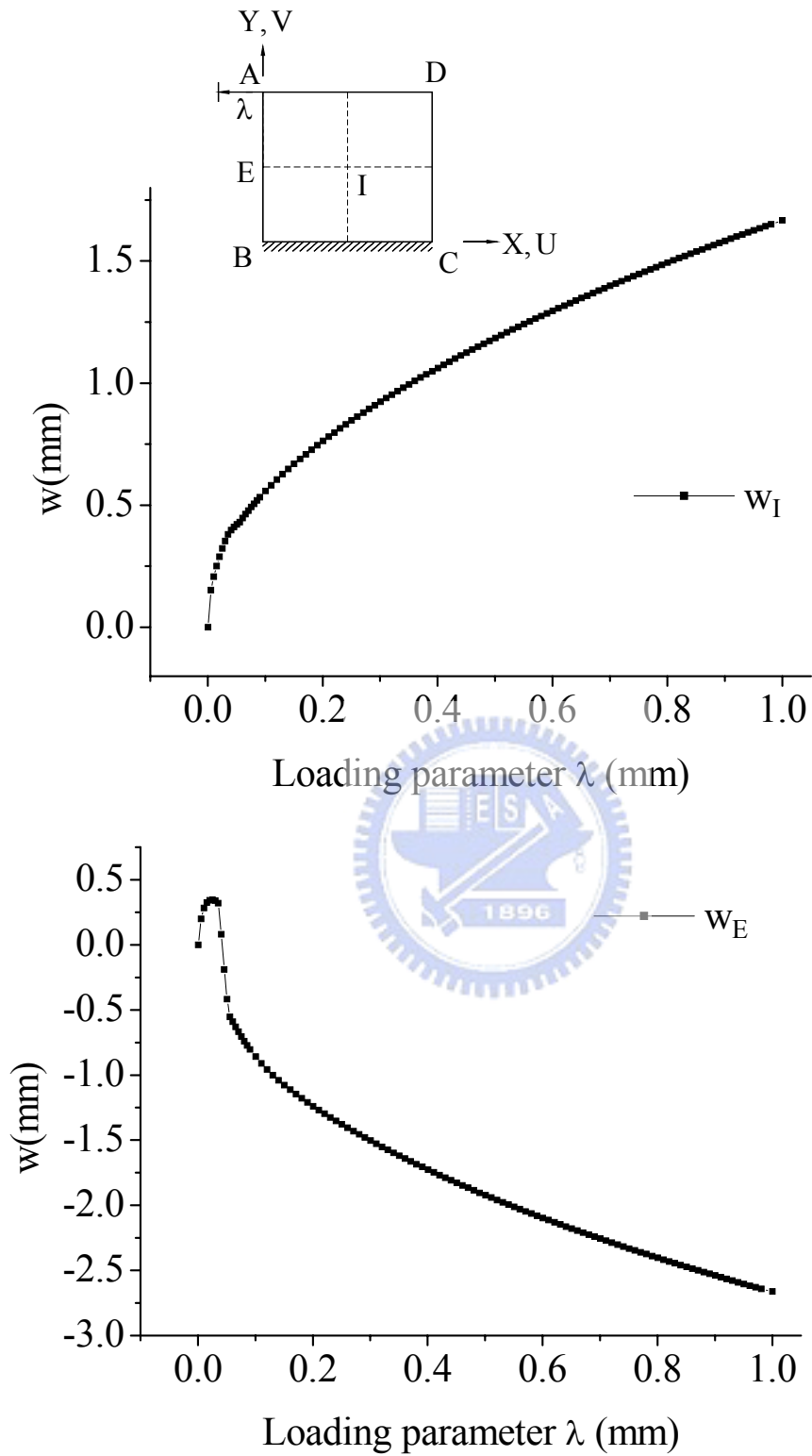


圖 4.9 I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E - 負荷參數 λ 曲線圖，

例題二，Mesh 40×40

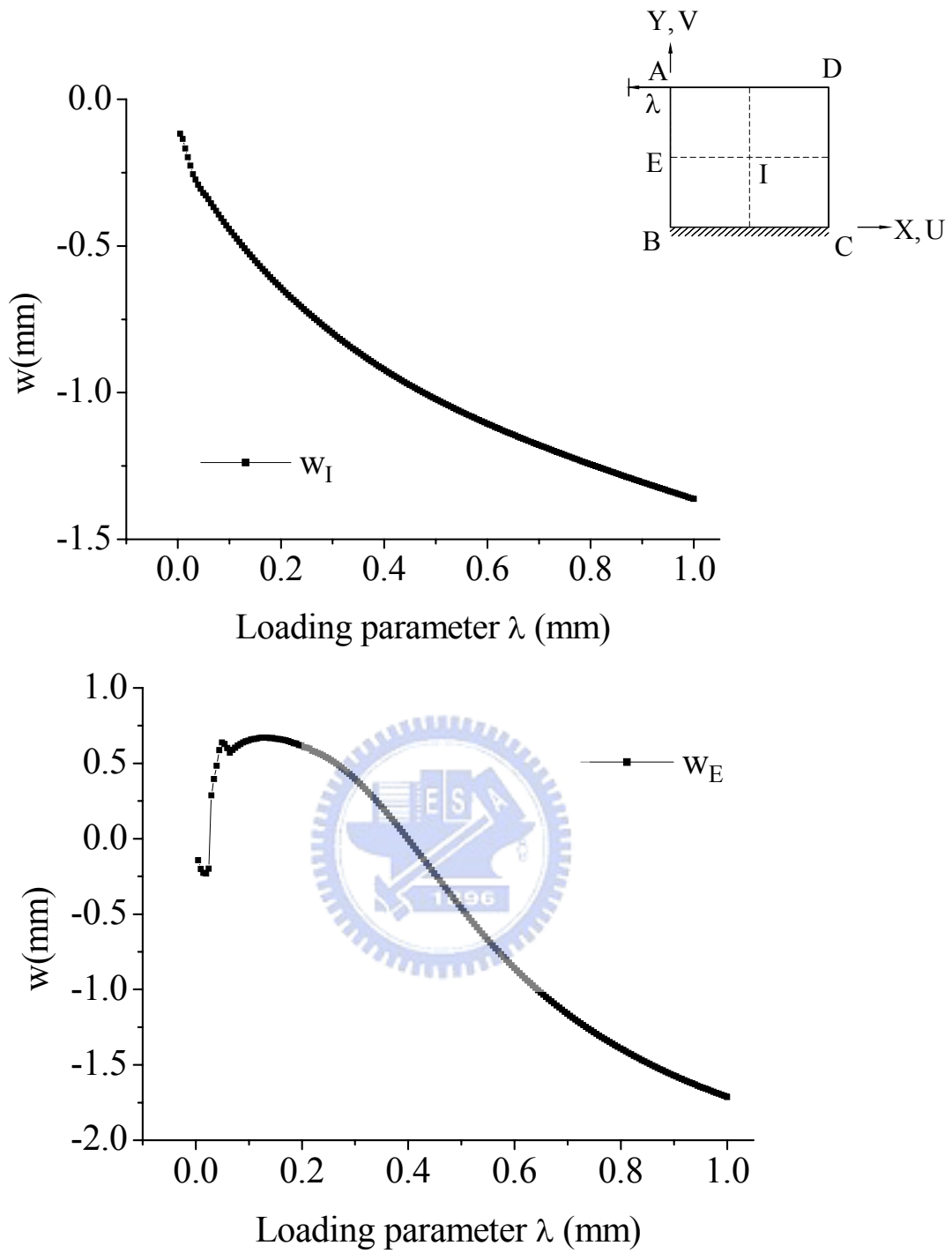


圖 4.10 I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖，
例題二，Mesh 60×60

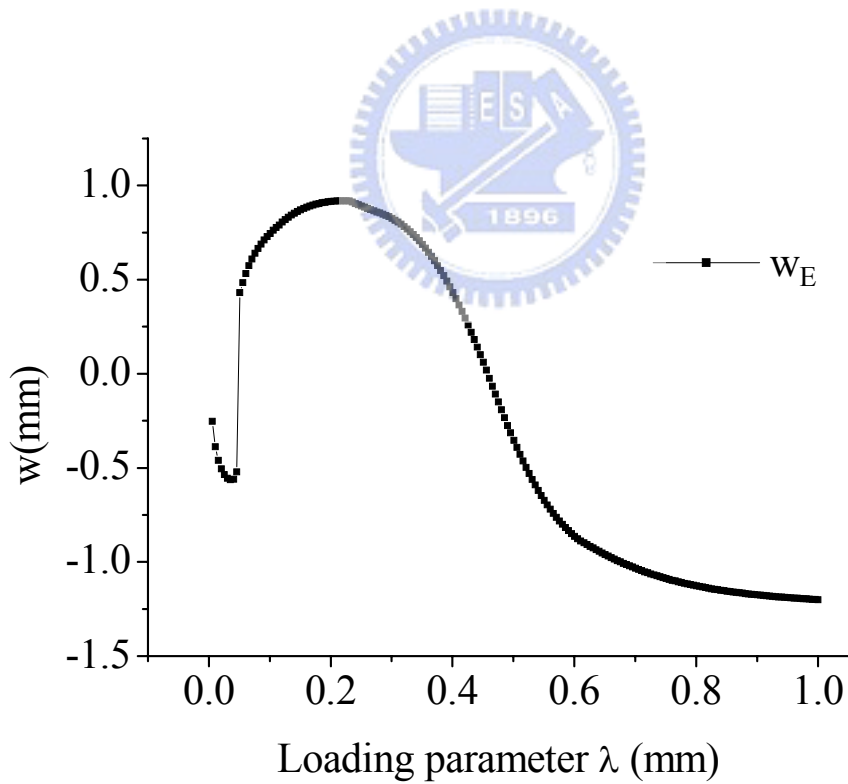
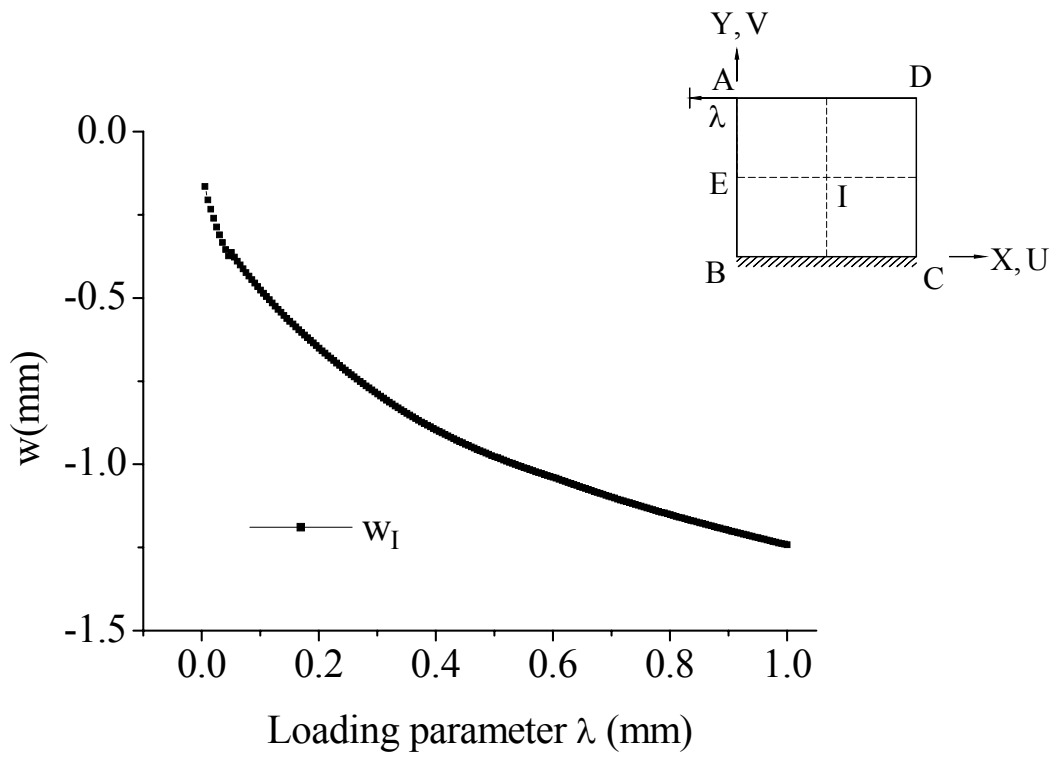


圖 4.11 I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E -負荷參數 λ 曲線圖，

例題二，Mesh 80×80

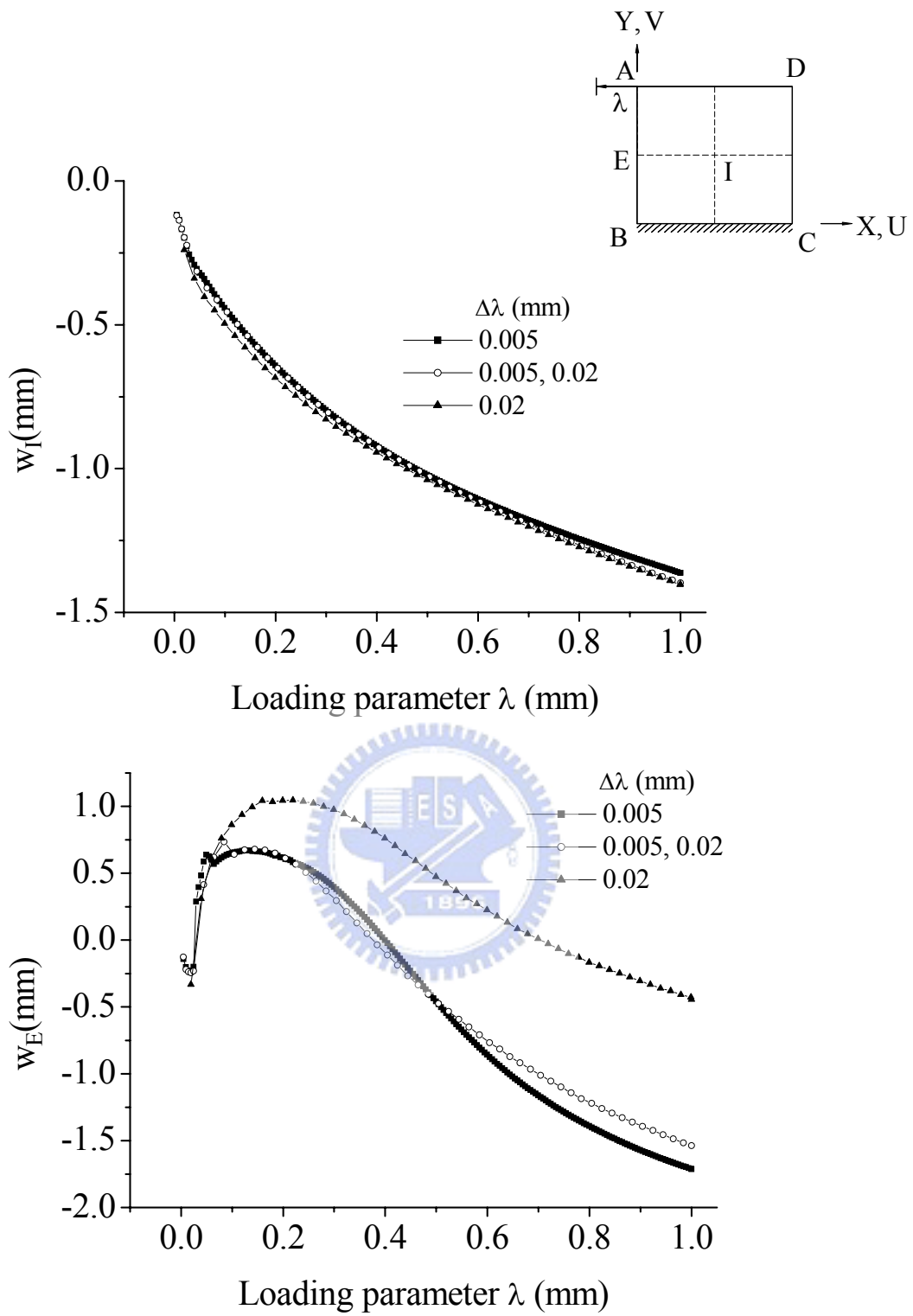


圖 4.12 不同增量位移下，I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E - 負荷參數 λ 曲線圖，例題二，Mesh 60×60

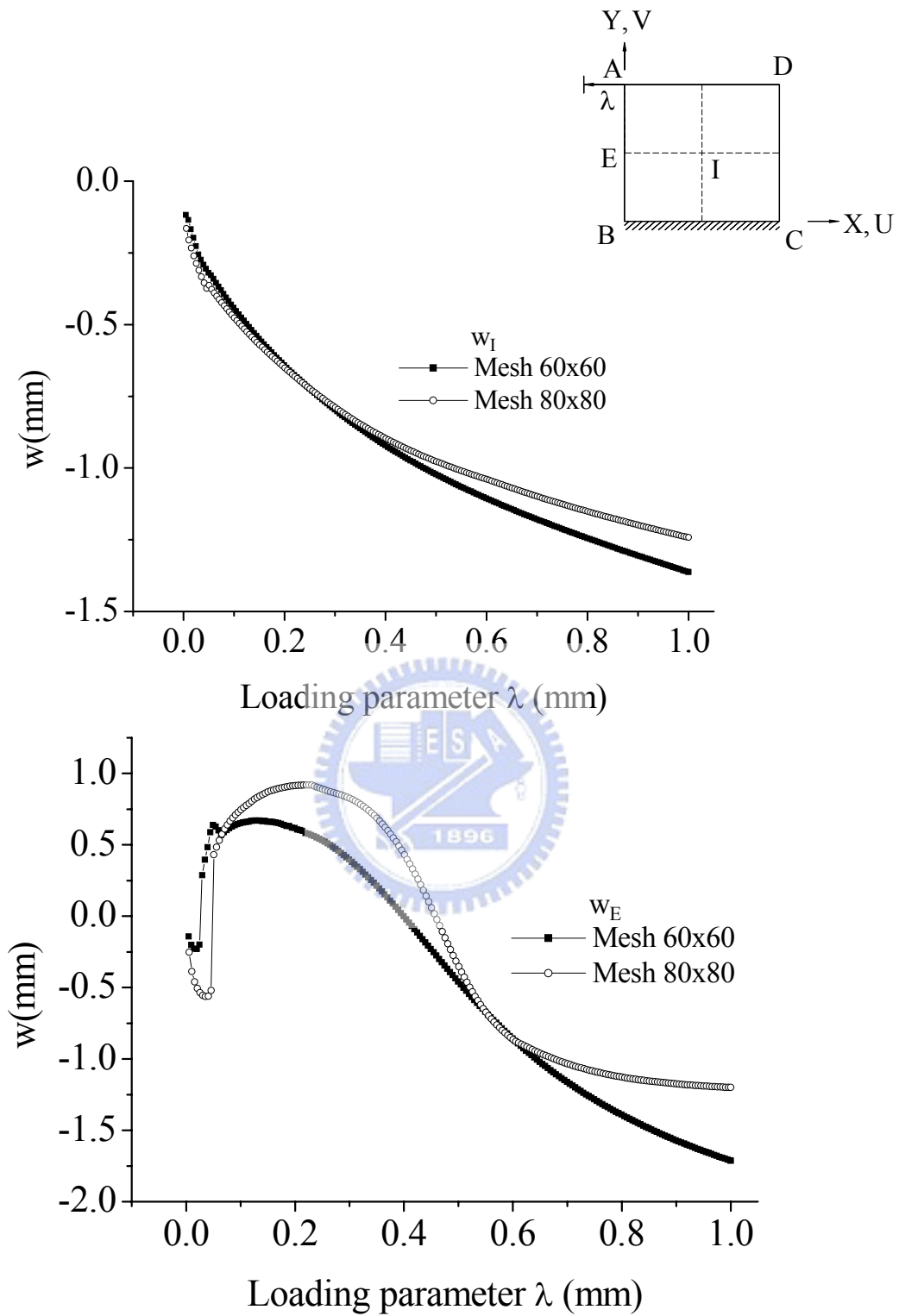


圖 4.13 不同元素網格之 I 點之位移 w_I 與 E 點之位移 w_E - 負荷參數 λ 曲線比較圖，例題二

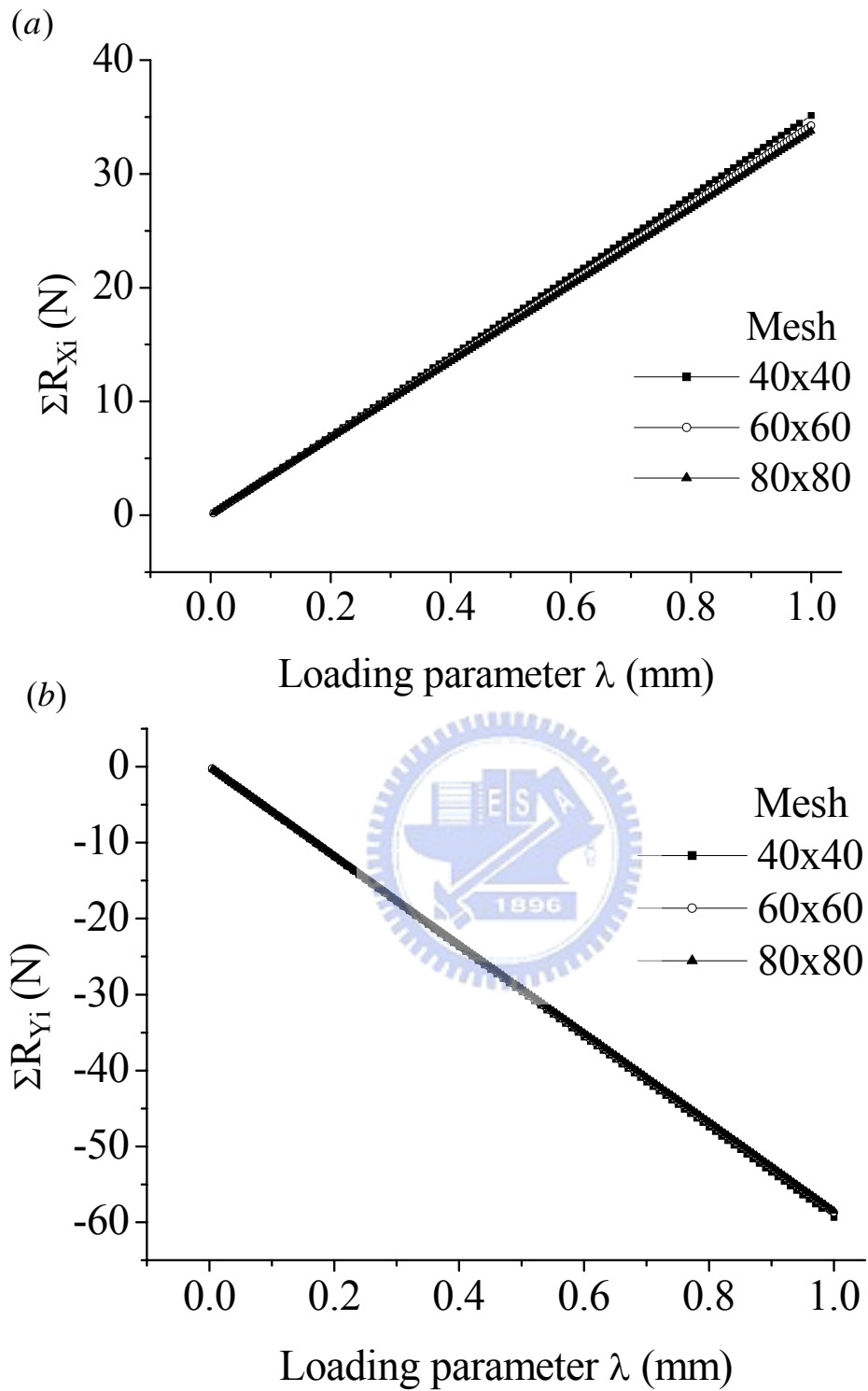


圖 4.14 例題二，位移邊界 AD 上

(a) X 方向節點力合力 ΣR_{X_i} - 位移負荷參數 λ 曲線圖

(b) Y 方向節點力合力 ΣR_{Y_i} - 位移負荷參數 λ 曲線圖

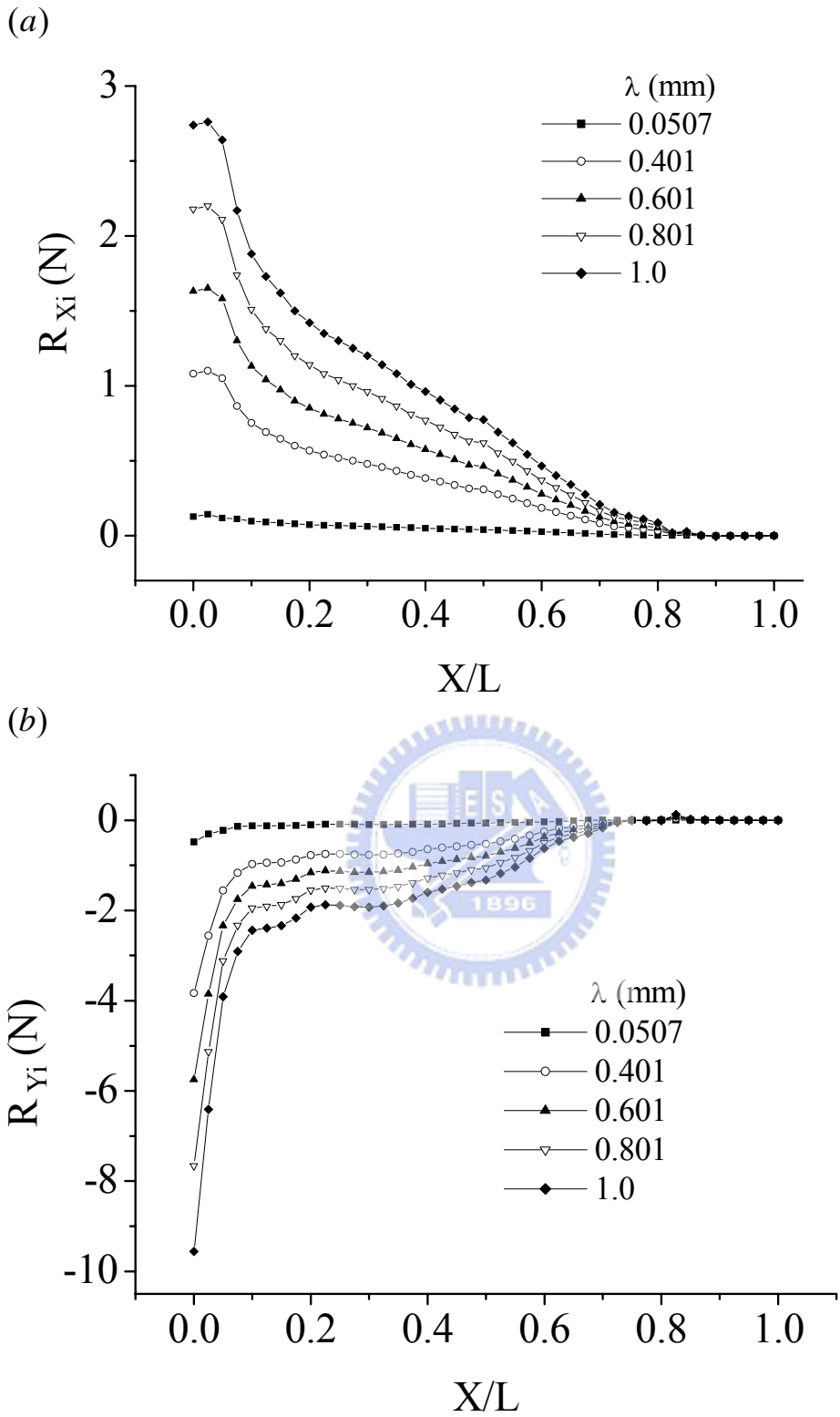


圖 4.15 (a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y

方向的節點反力圖，例題二，Mesh 40×40

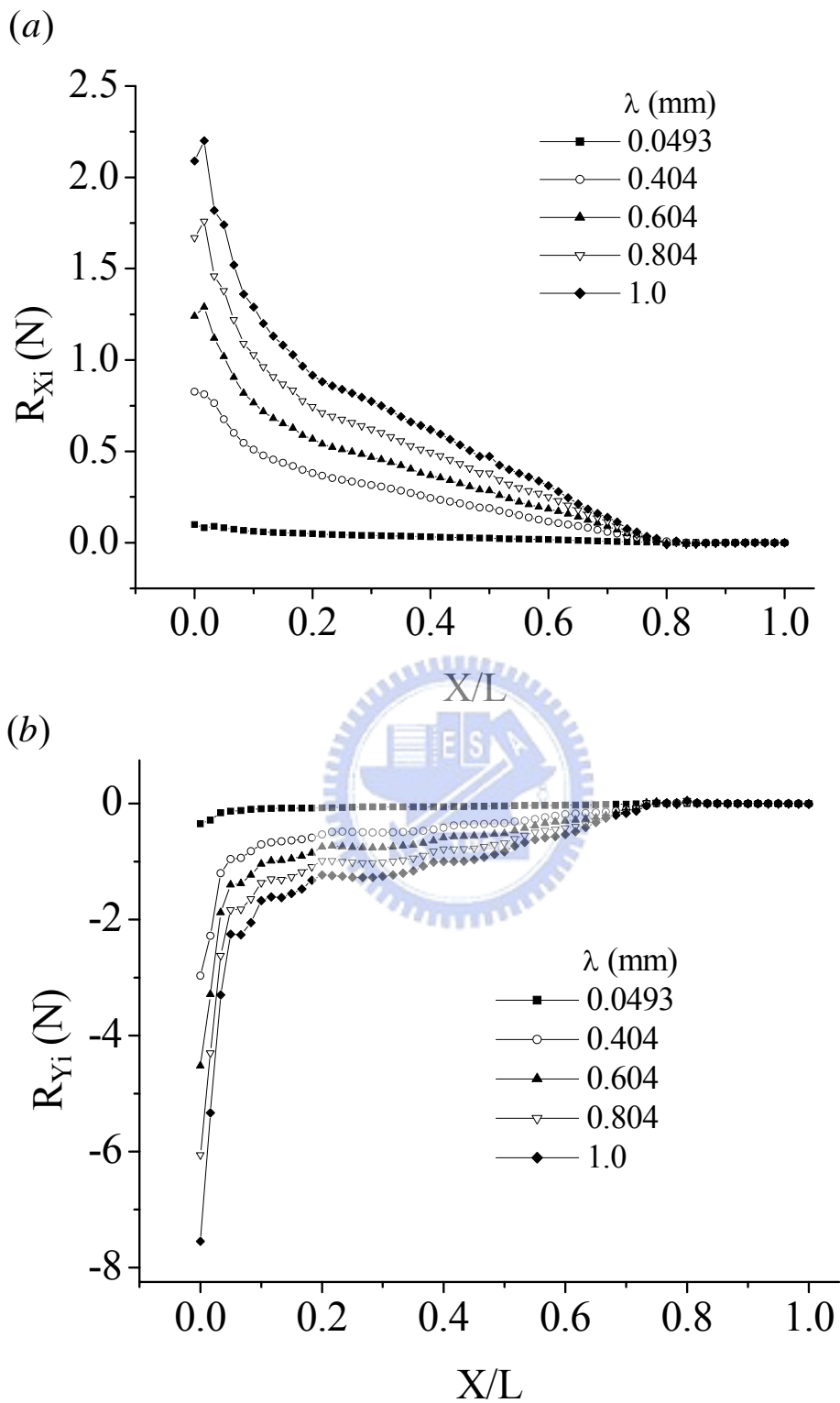


圖 4.16 (a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y

方向的節點反力圖，例題二，Mesh 60×60

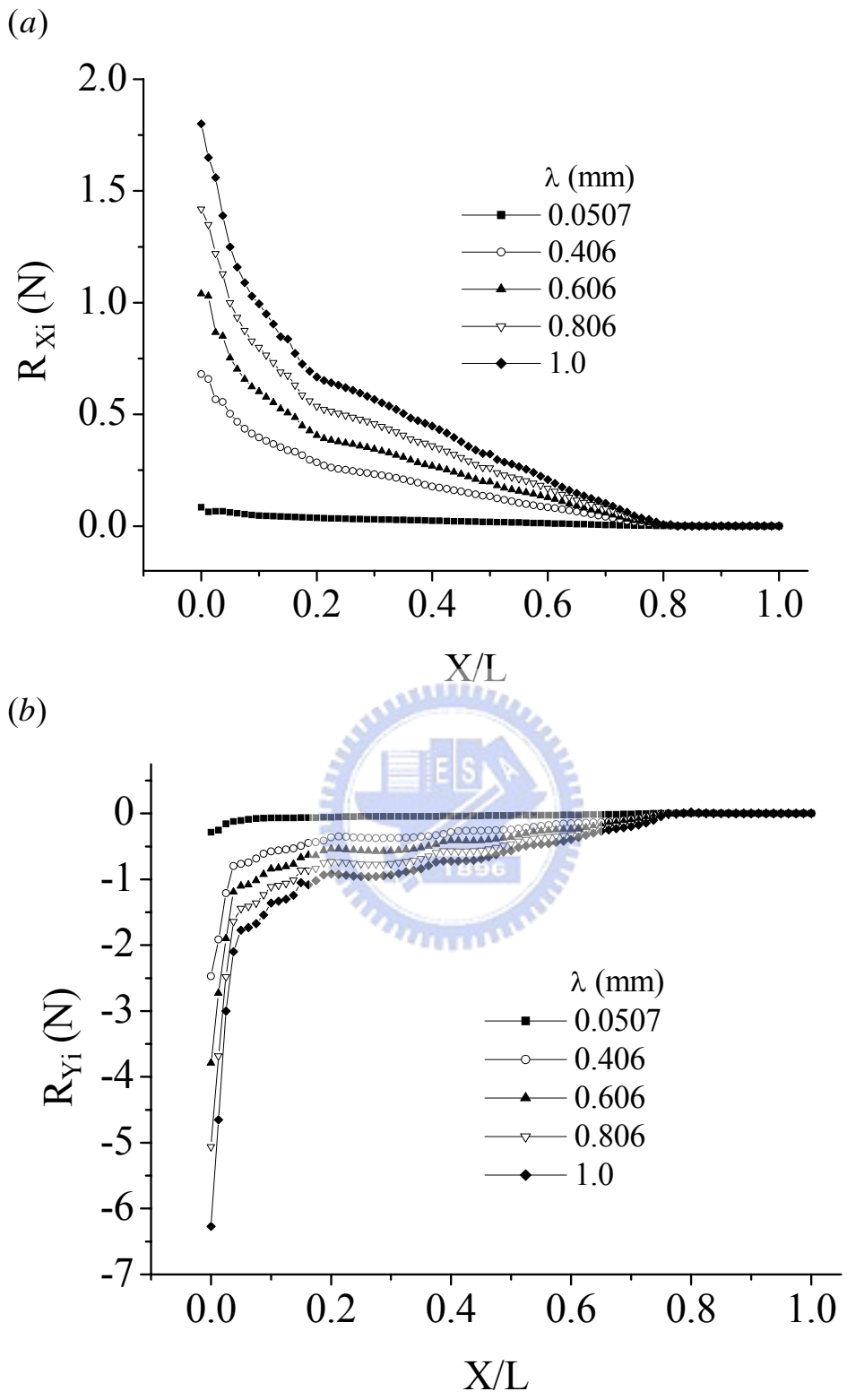


圖 4.17 (a)位移邊界 AD 上 X 方向的節點反力圖(b)位移邊界 AD 上 Y 方向的節點反力圖，例題二，Mesh 80×80

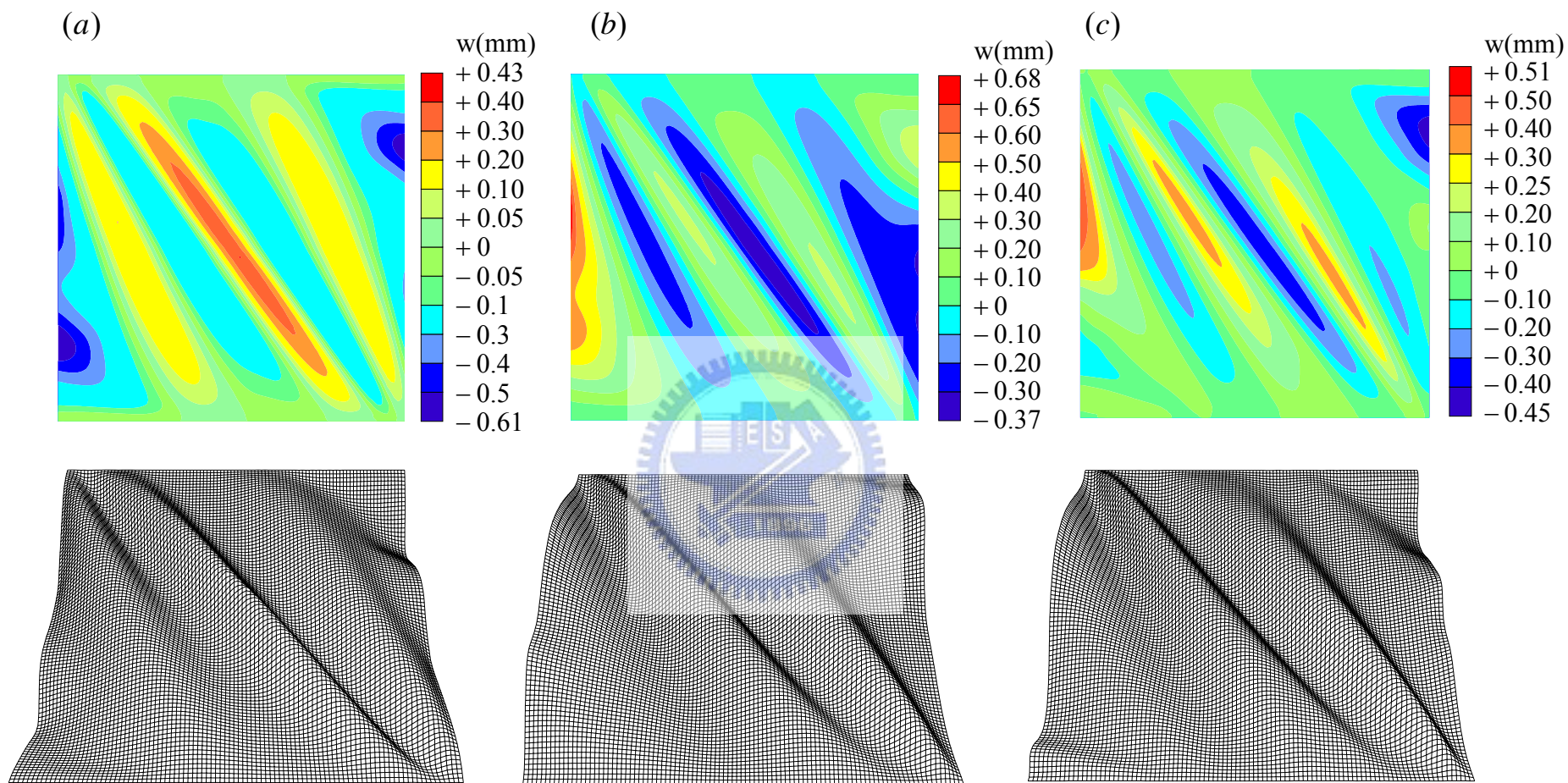


圖 4.18 膜結構變形圖，例題二(a) Mesh 40×40 , $\lambda = 0.0507(mm)$, (b) Mesh 60×60 , $\lambda = 0.0493(mm)$,
(c) Mesh 80×80 , $\lambda = 0.0507(mm)$

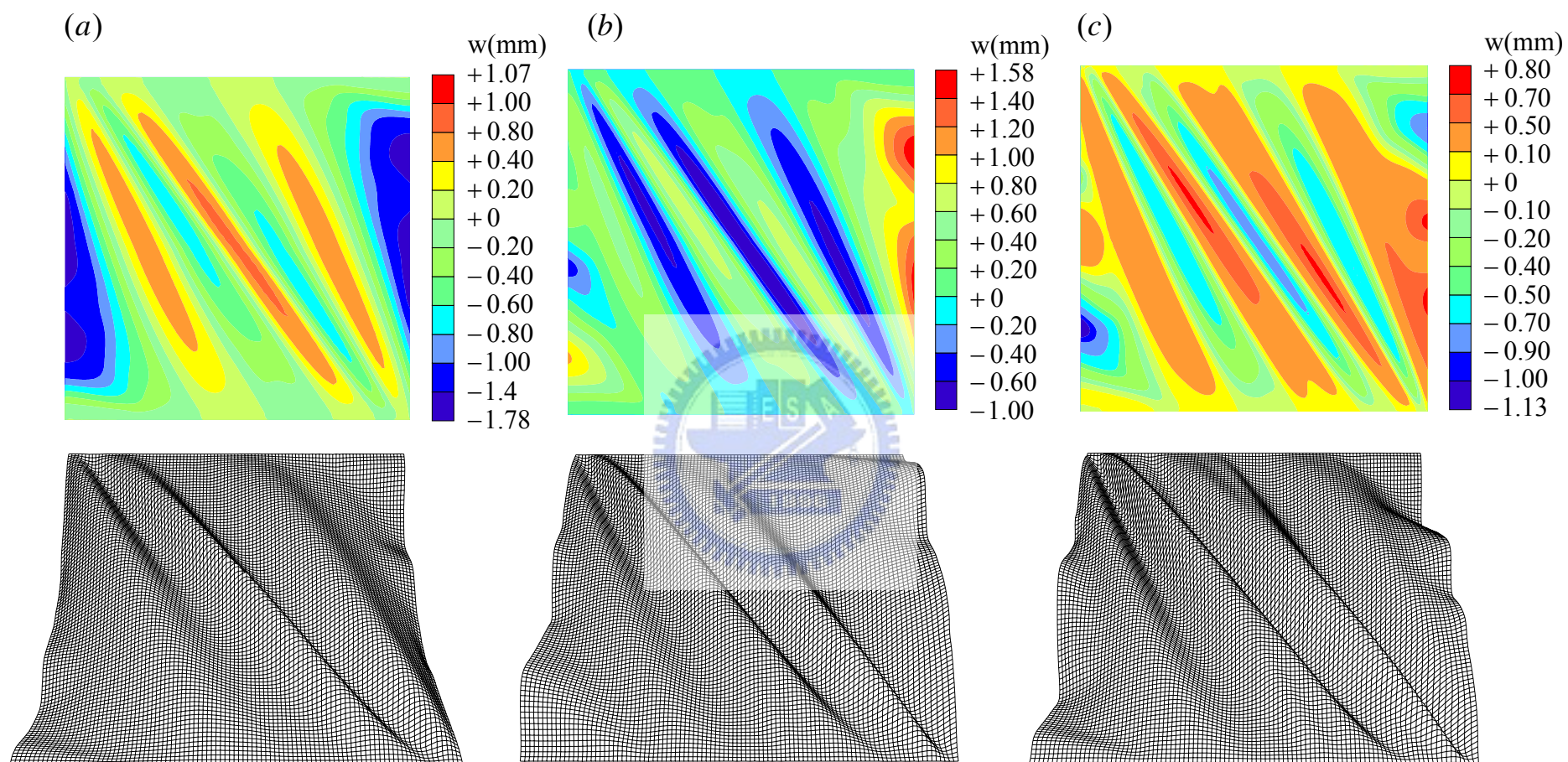


圖 4.19 膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 0.401$ (mm), (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.404$ (mm), (c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.406$ (mm)

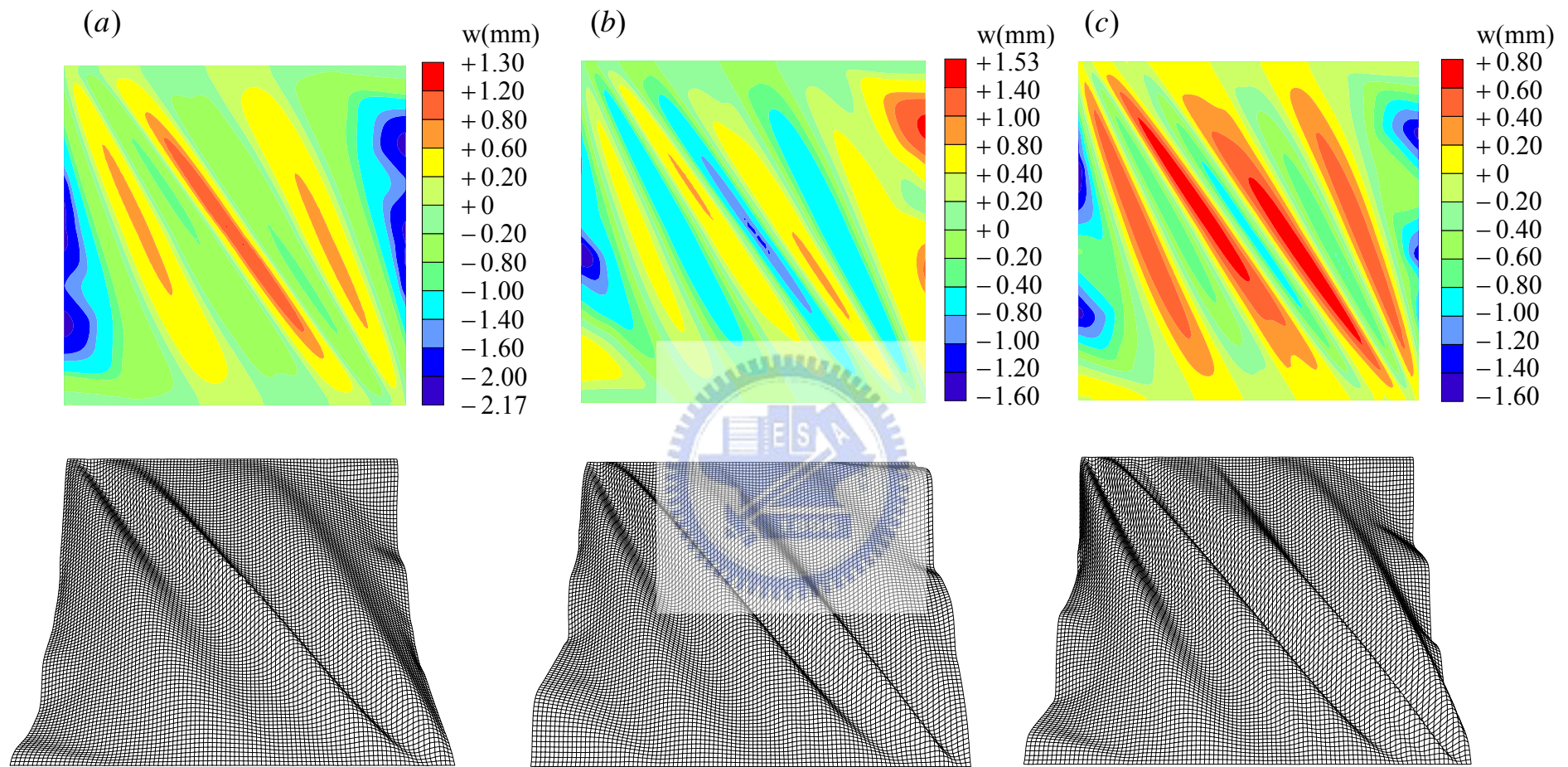


圖 4.20 膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 0.601$ (mm), (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.604$ (mm), (c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.606$ (mm)

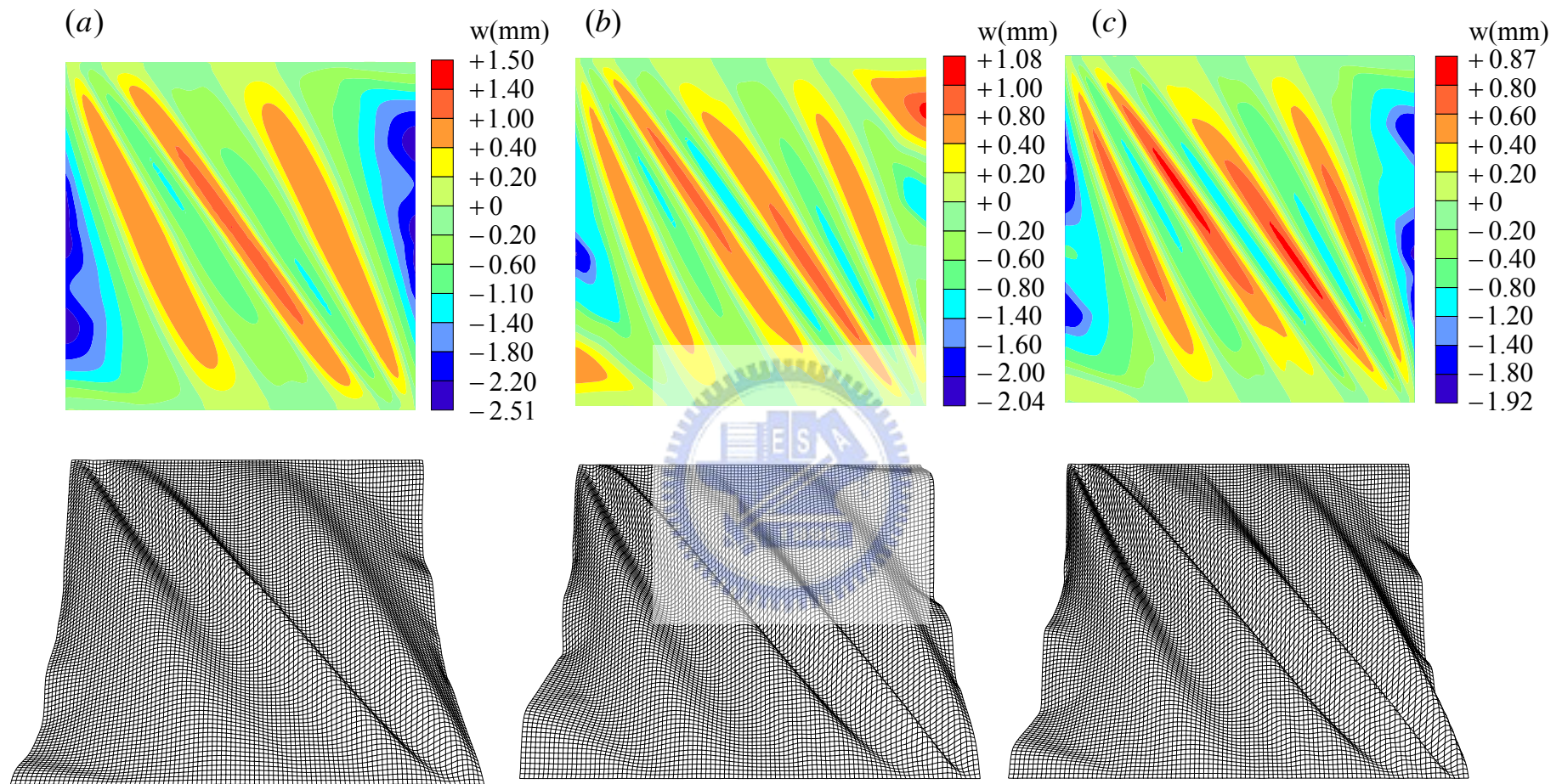


圖 4.21 膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 0.801$ (mm), (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 0.804$ (mm), (c)Mesh 80×80 , $\lambda = 0.806$ (mm)

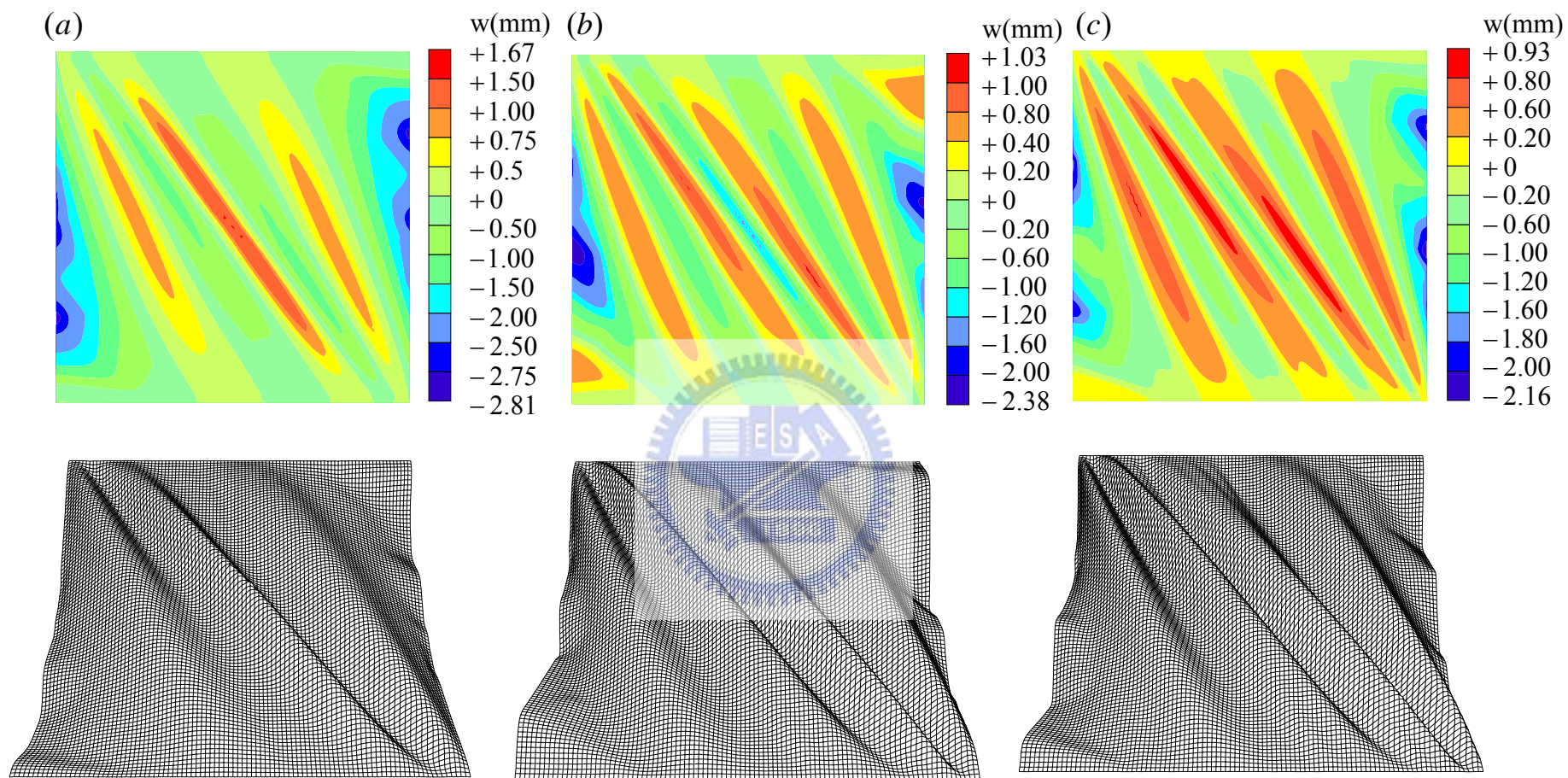


圖 4.22 膜結構變形圖，例題二(a)Mesh 40×40 , $\lambda = 1(mm)$, (b)Mesh 60×60 , $\lambda = 1(mm)$,
(c)Mesh 80×80 , $\lambda = 1(mm)$

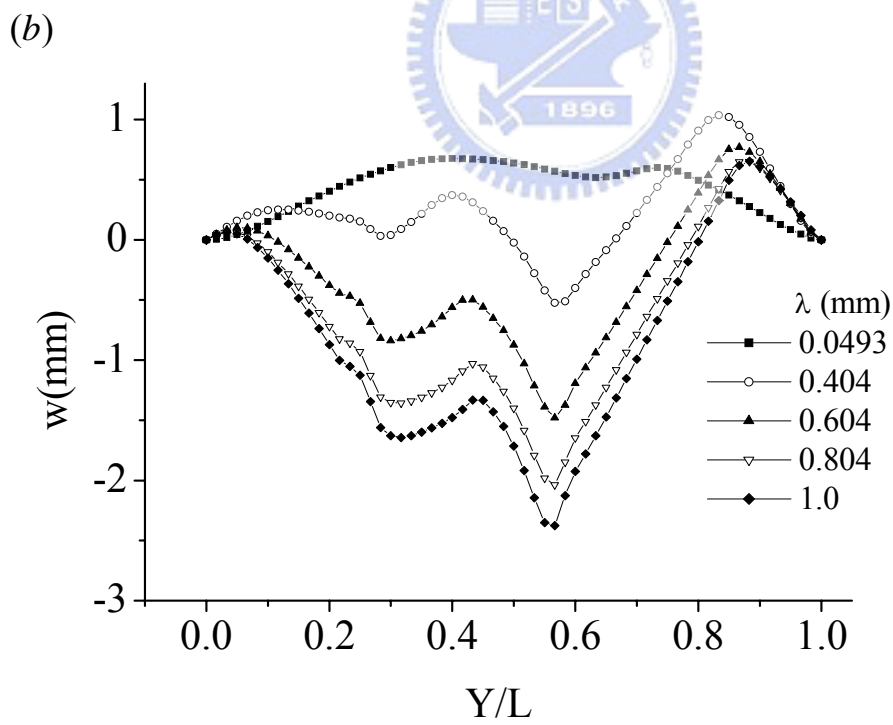
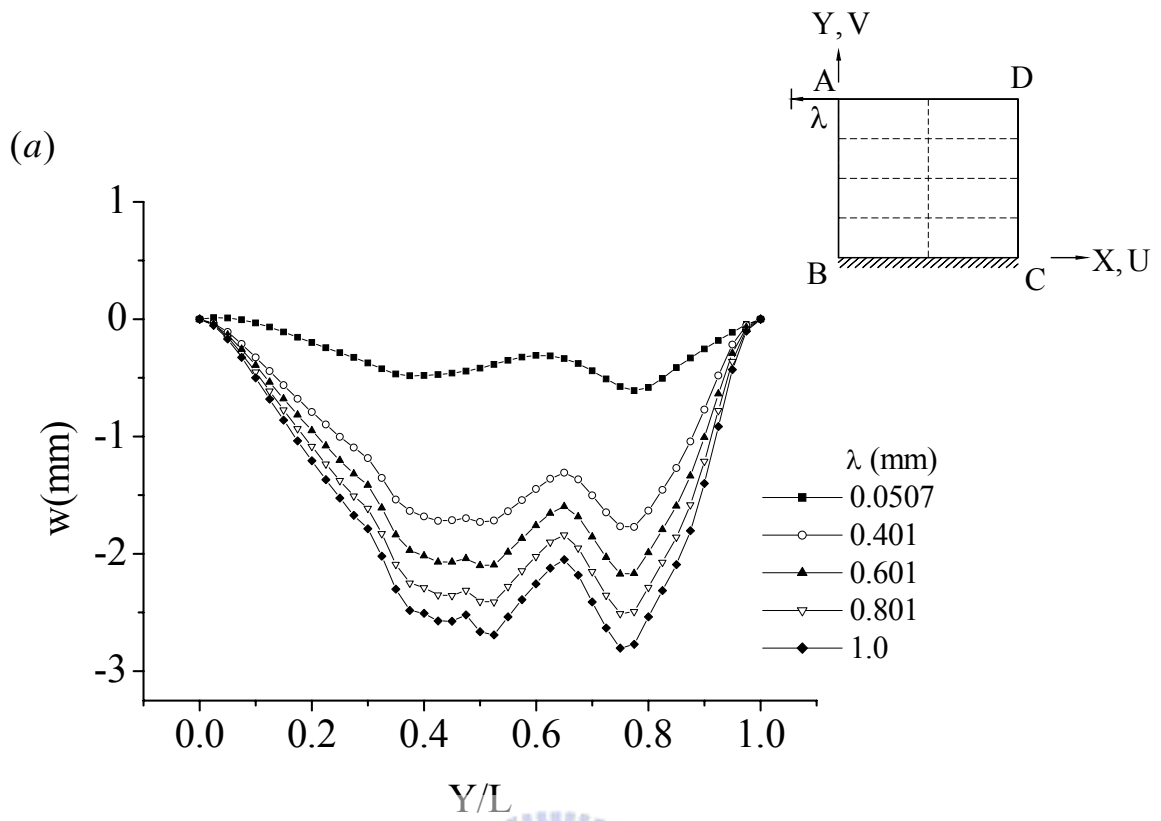


圖 4.23 軸線 AB 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

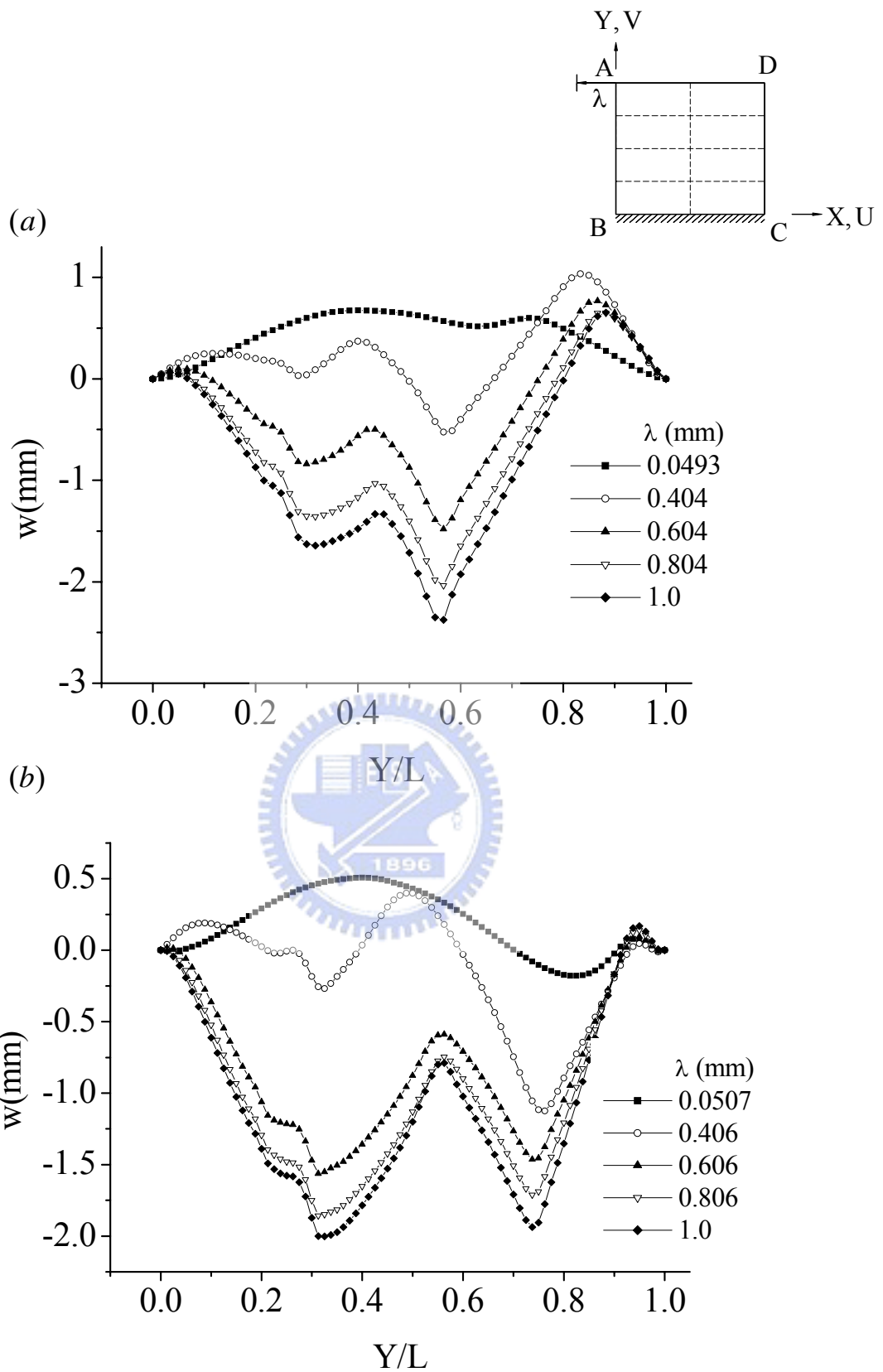


圖 4.24 軸線 AB 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

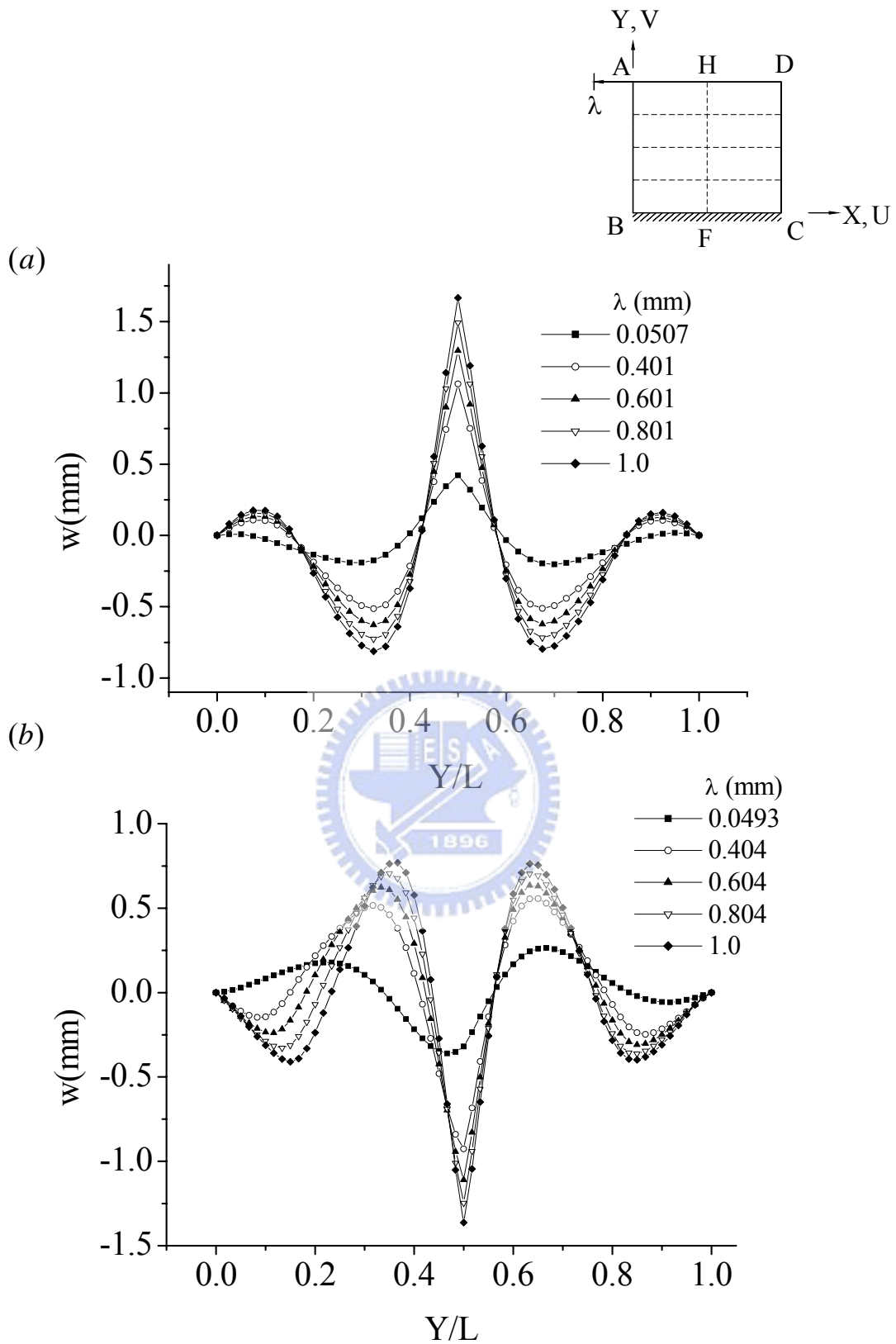


圖 4.25 軸線 FH 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

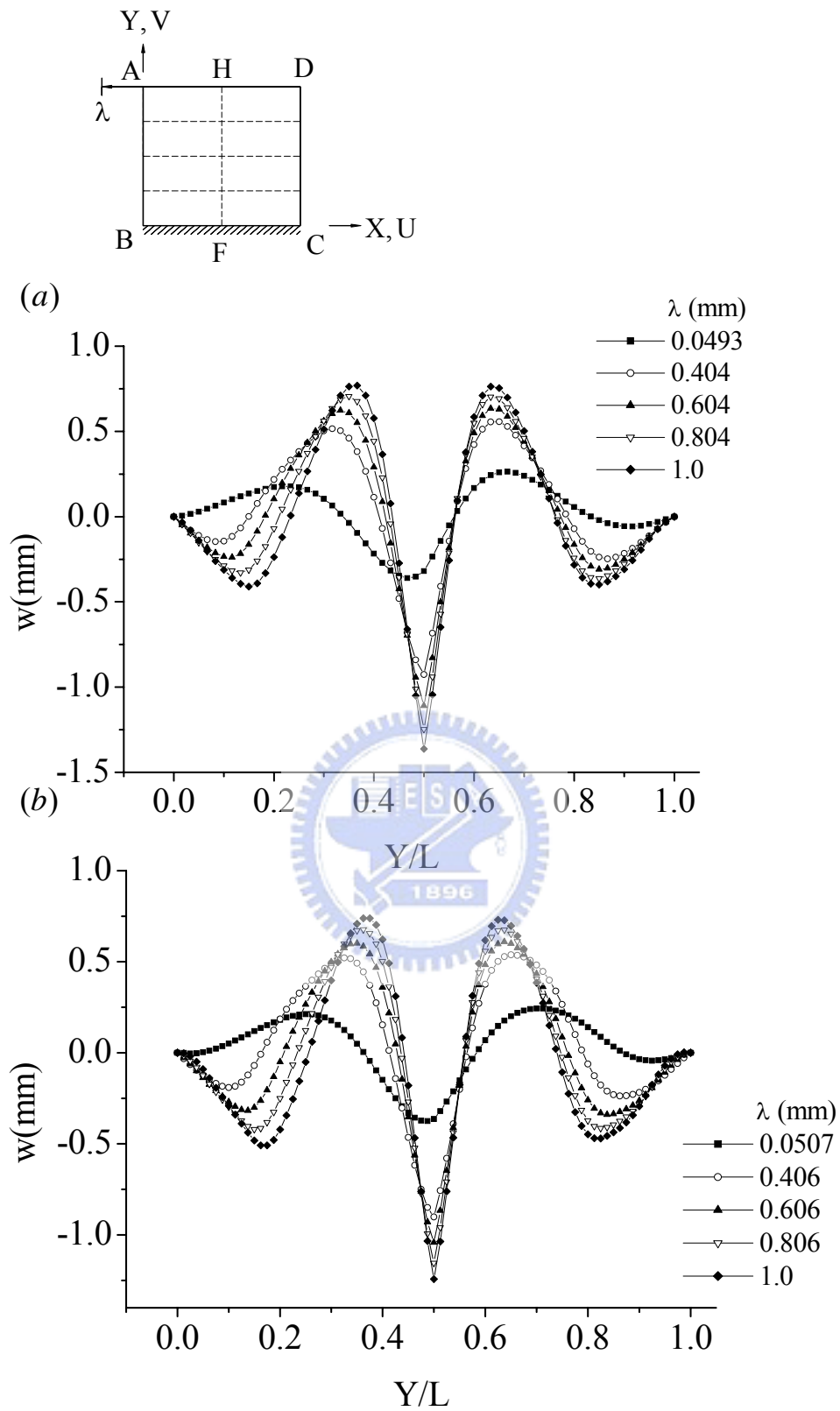


圖 4.26 軸線 FH 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

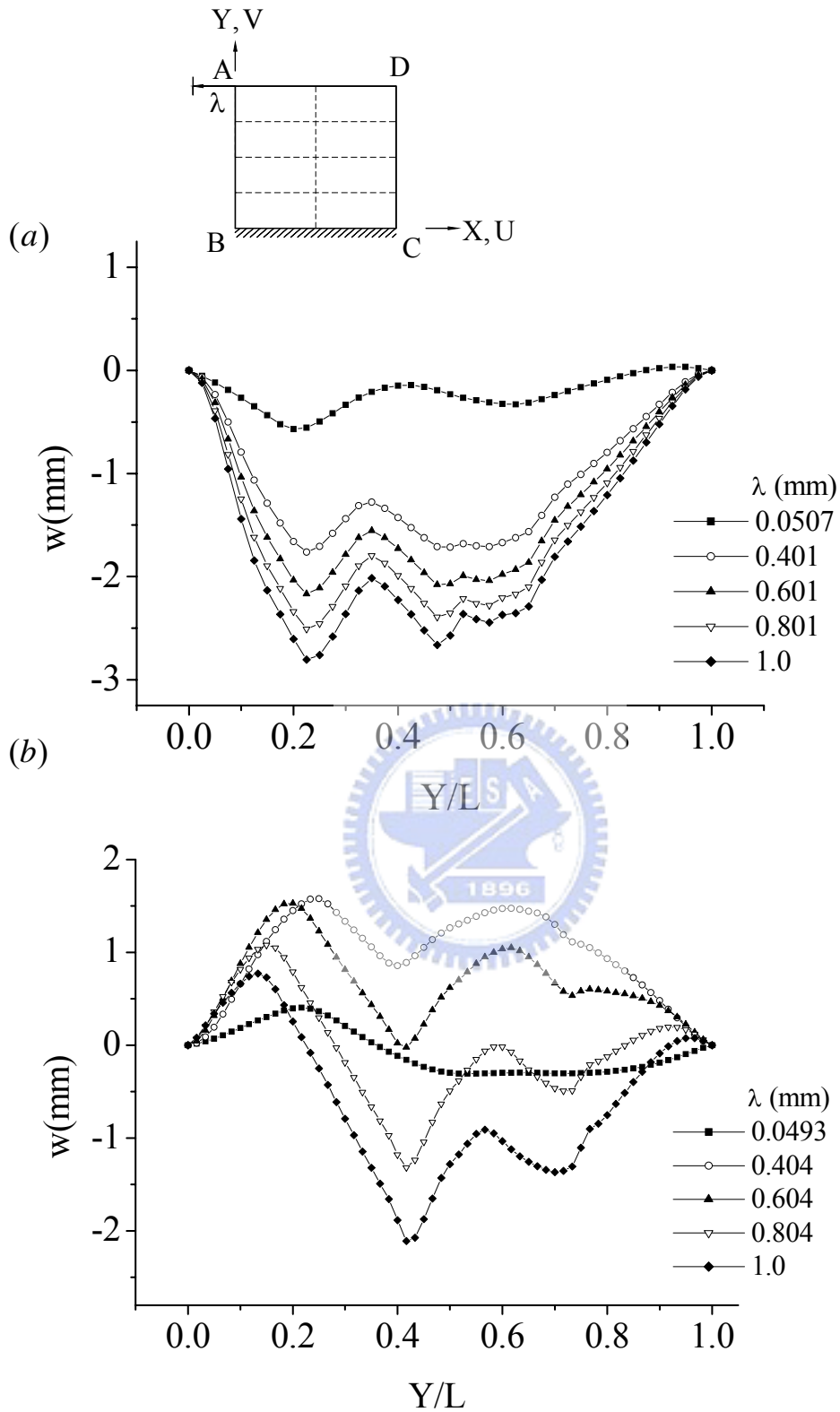


圖 4.27 軸線 CD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，
 (a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

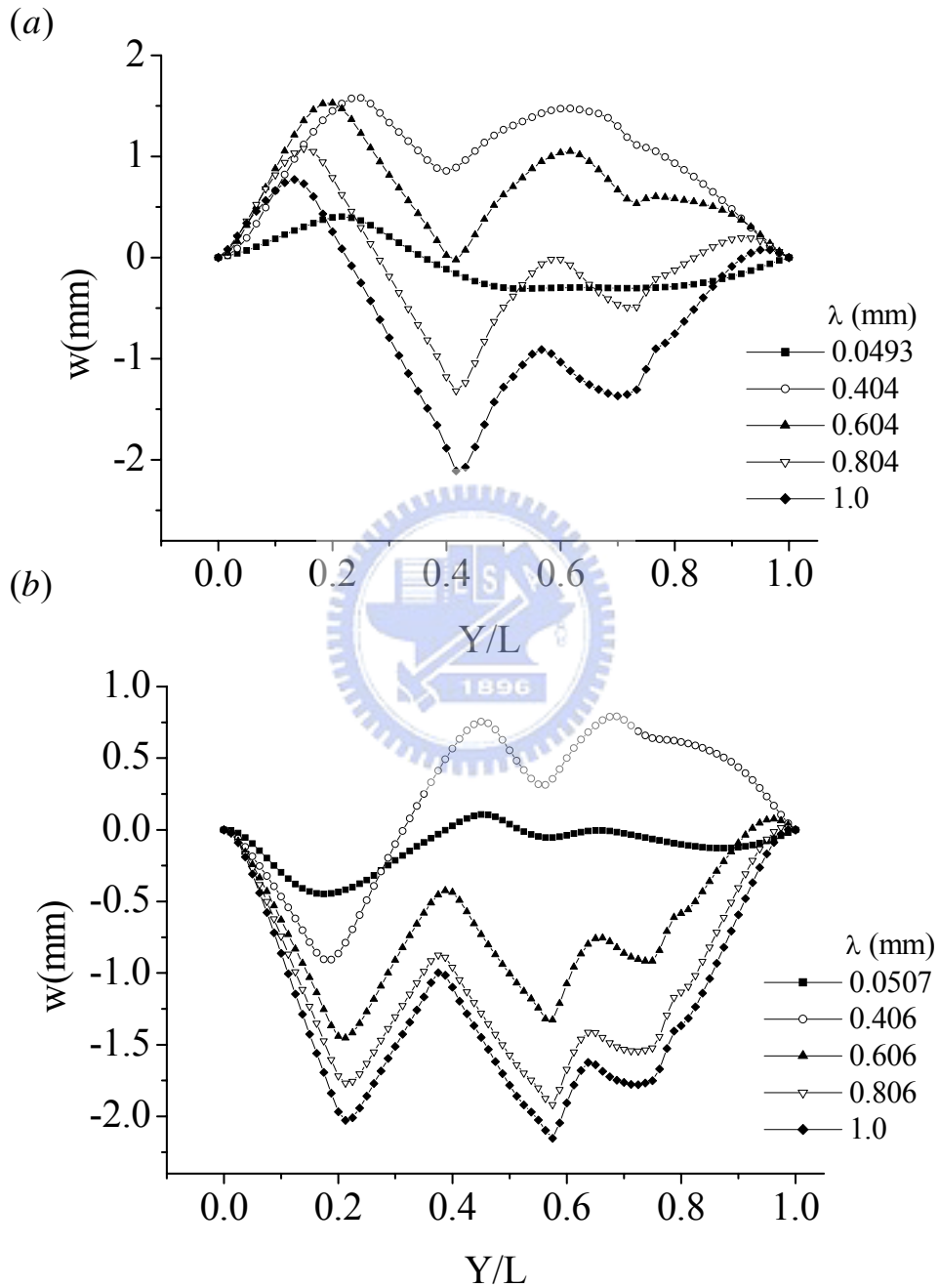
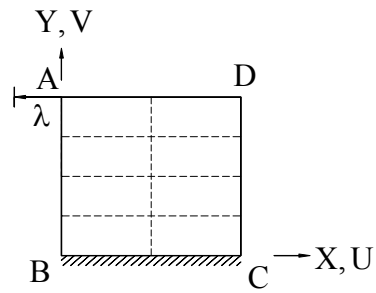


圖 4.28 軸線 CD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

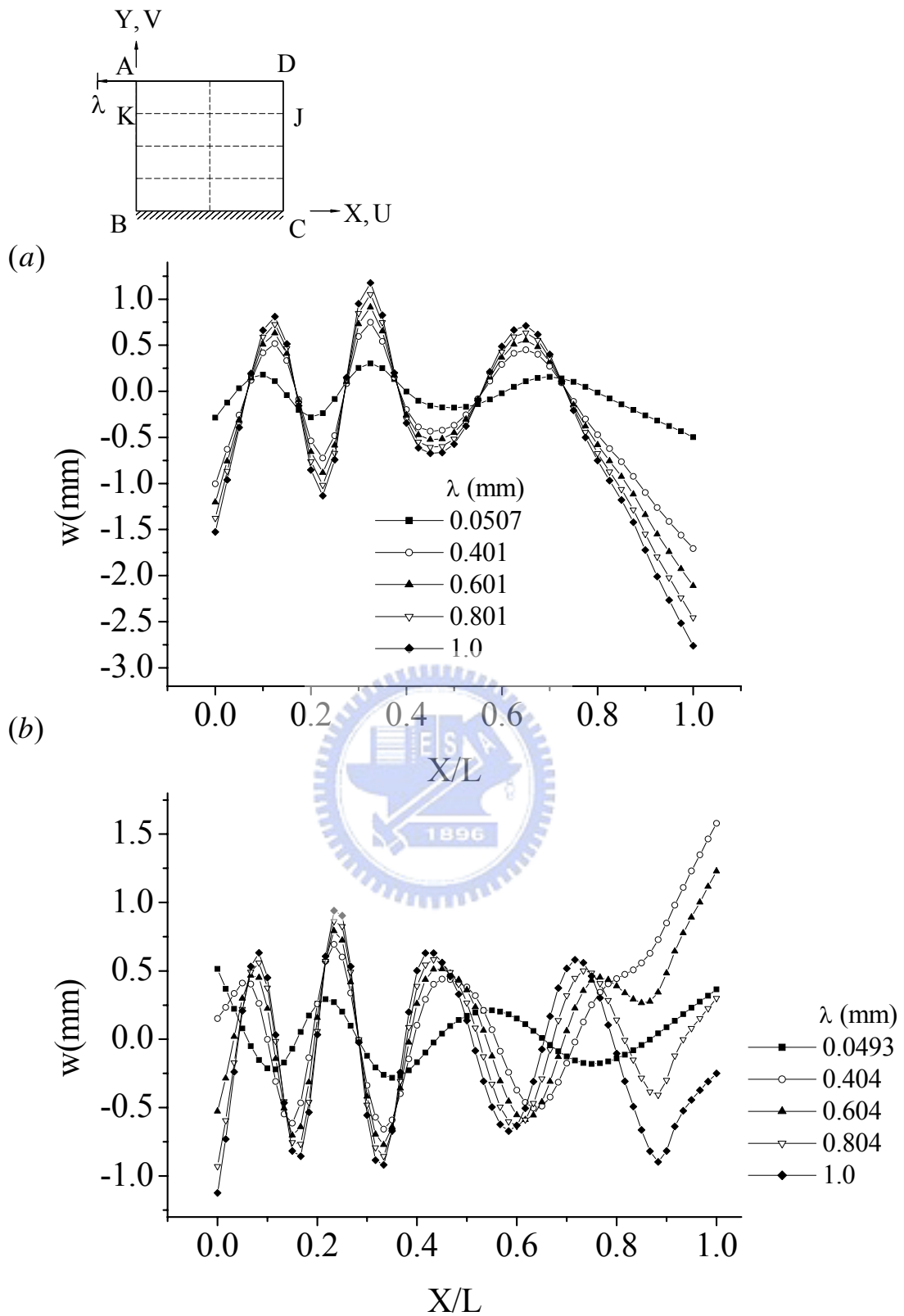


圖 4.29 軸線 JK 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，
 (a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

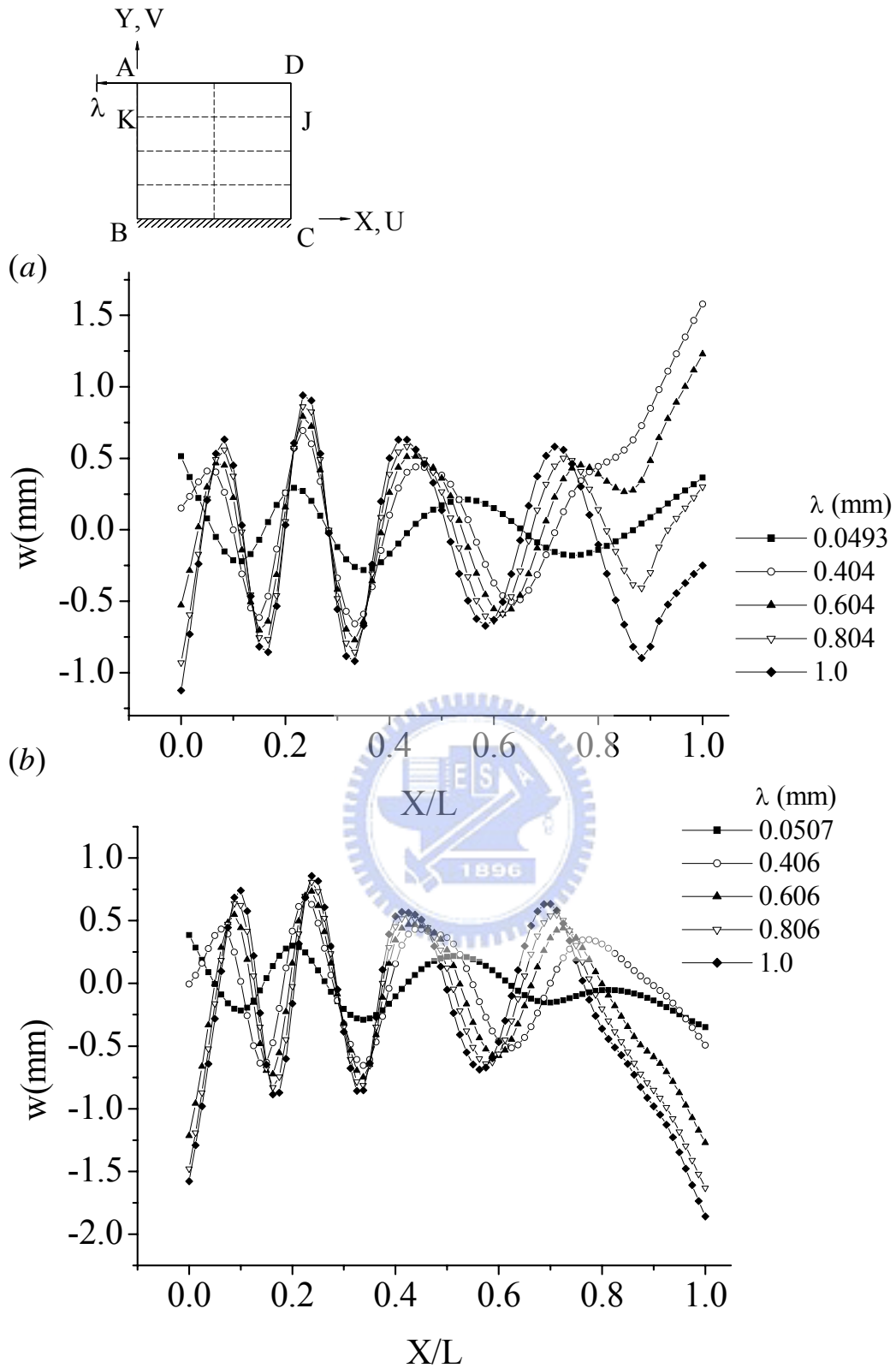


圖 4.30 軸線 JK 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

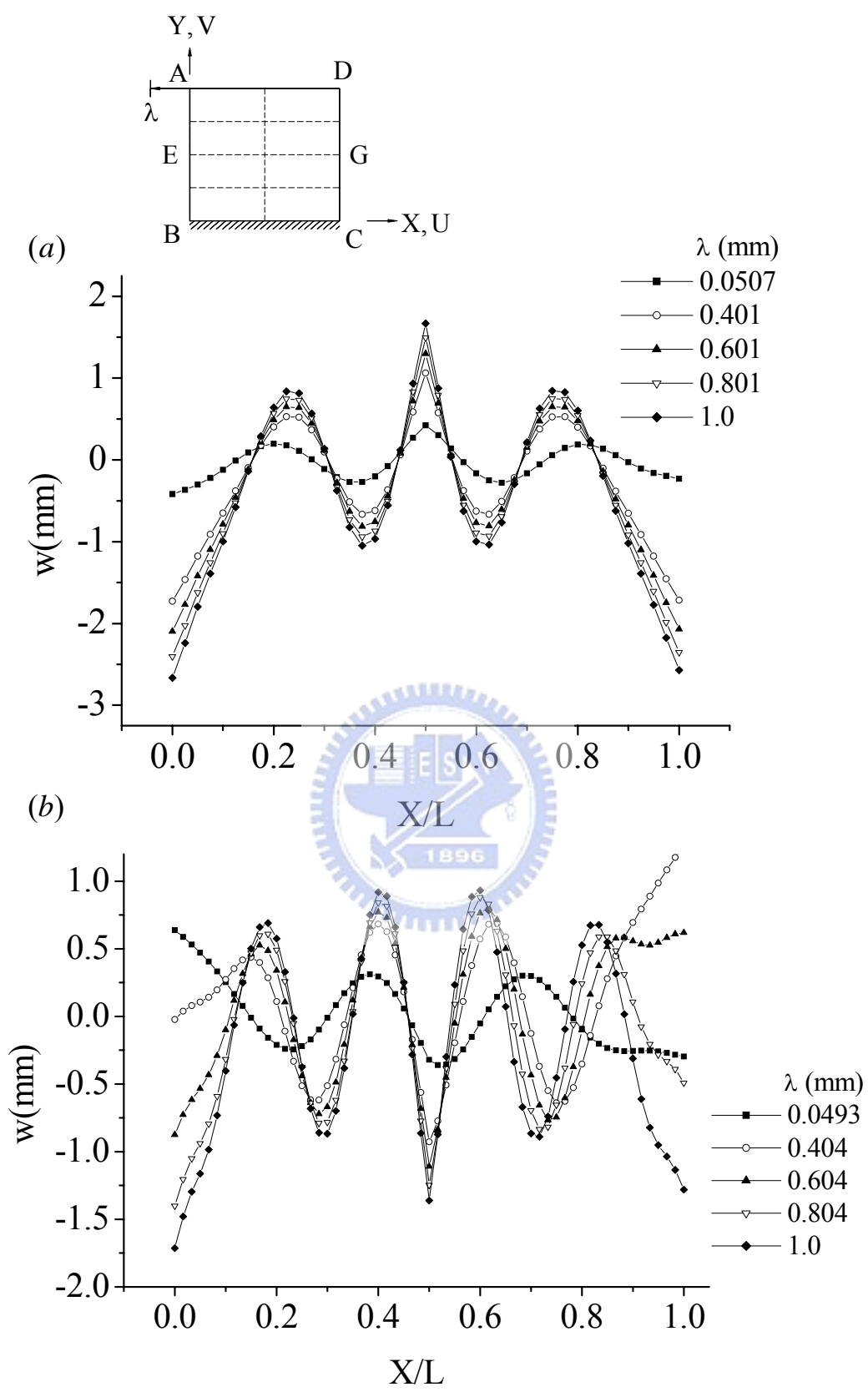


圖 4.31 軸線 EG 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

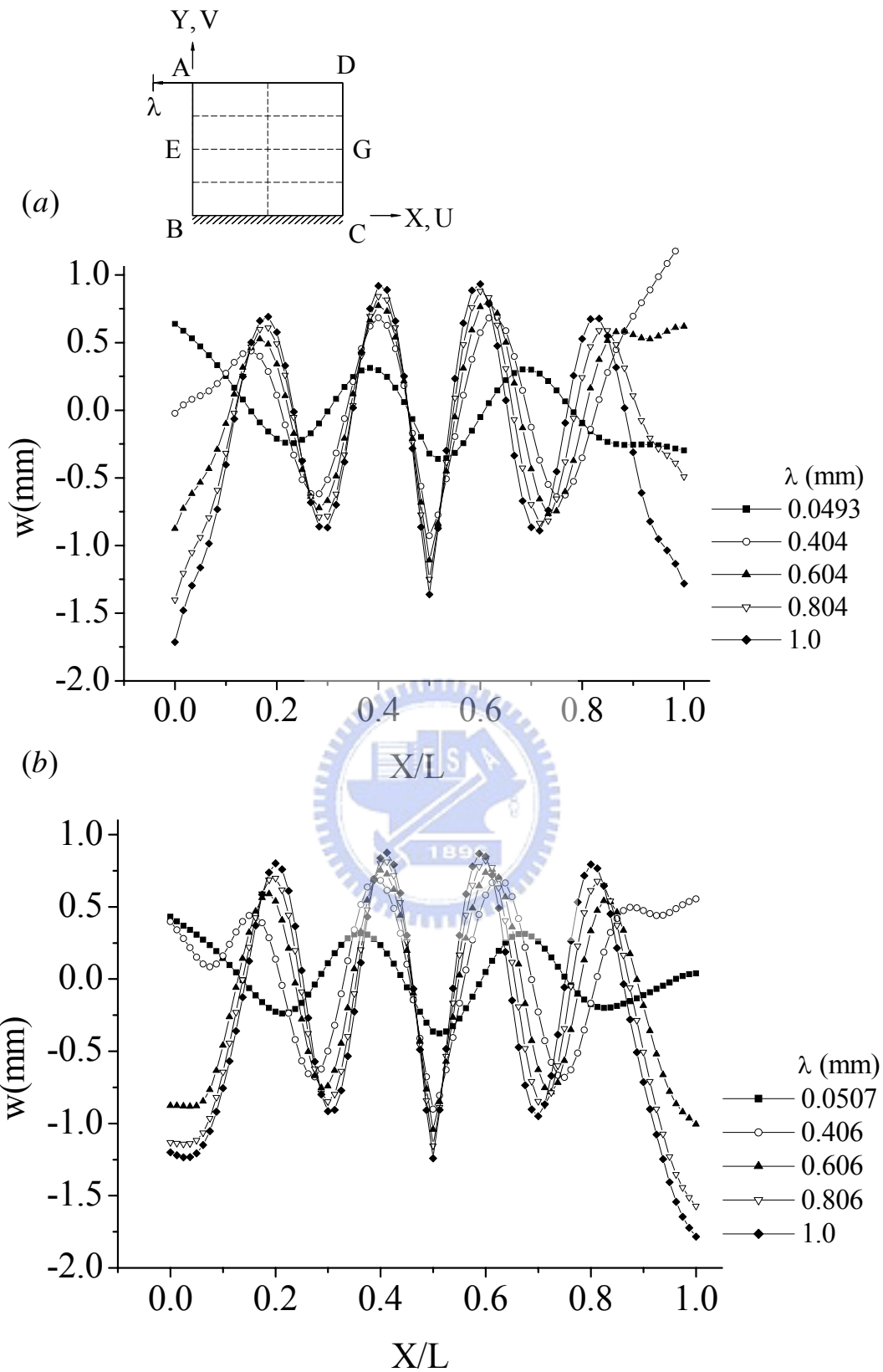


圖 4.32 軸線 EG 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

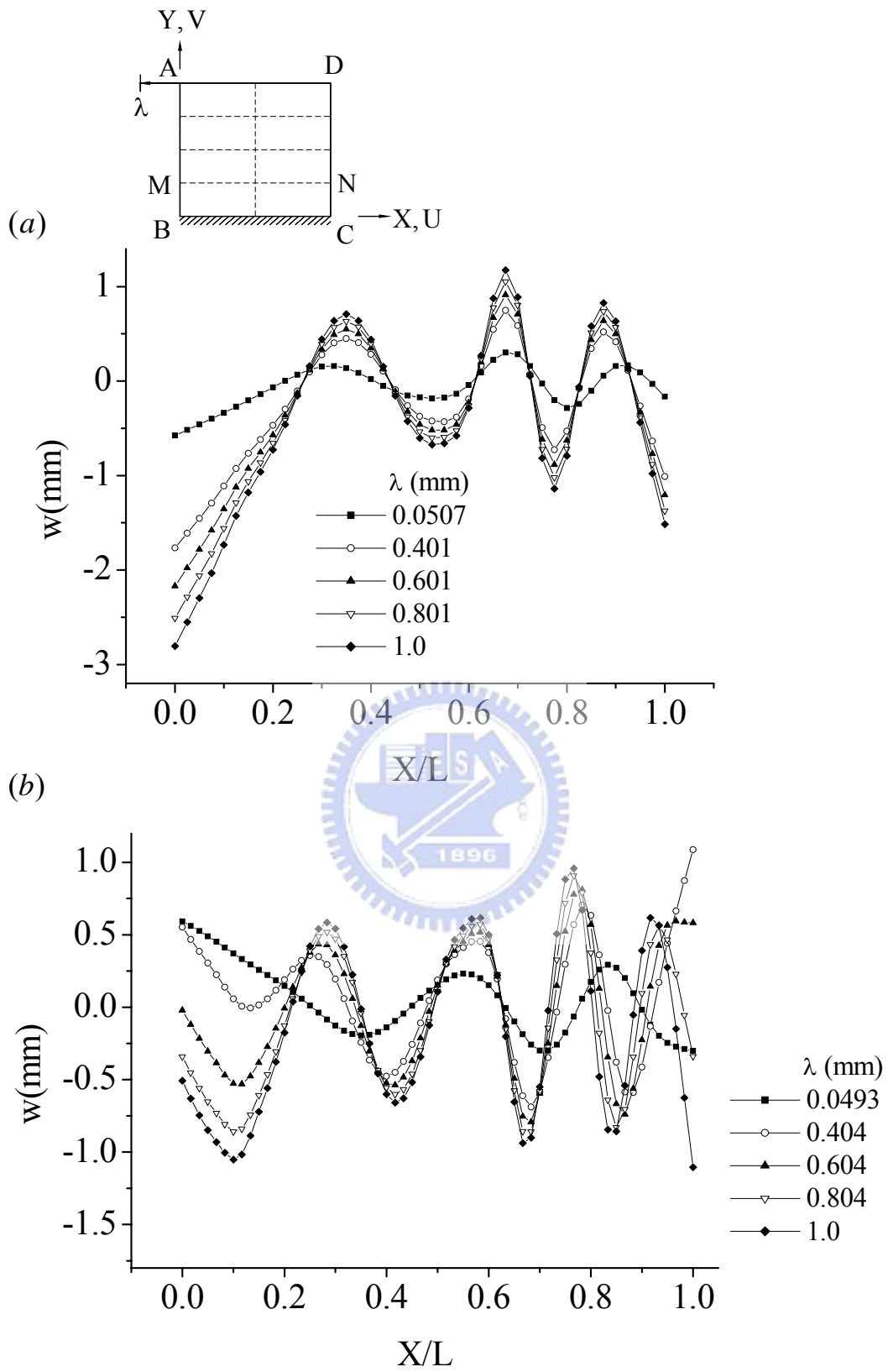


圖 4.33 軸線 MN 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 40×40，(b) Mesh 60×60

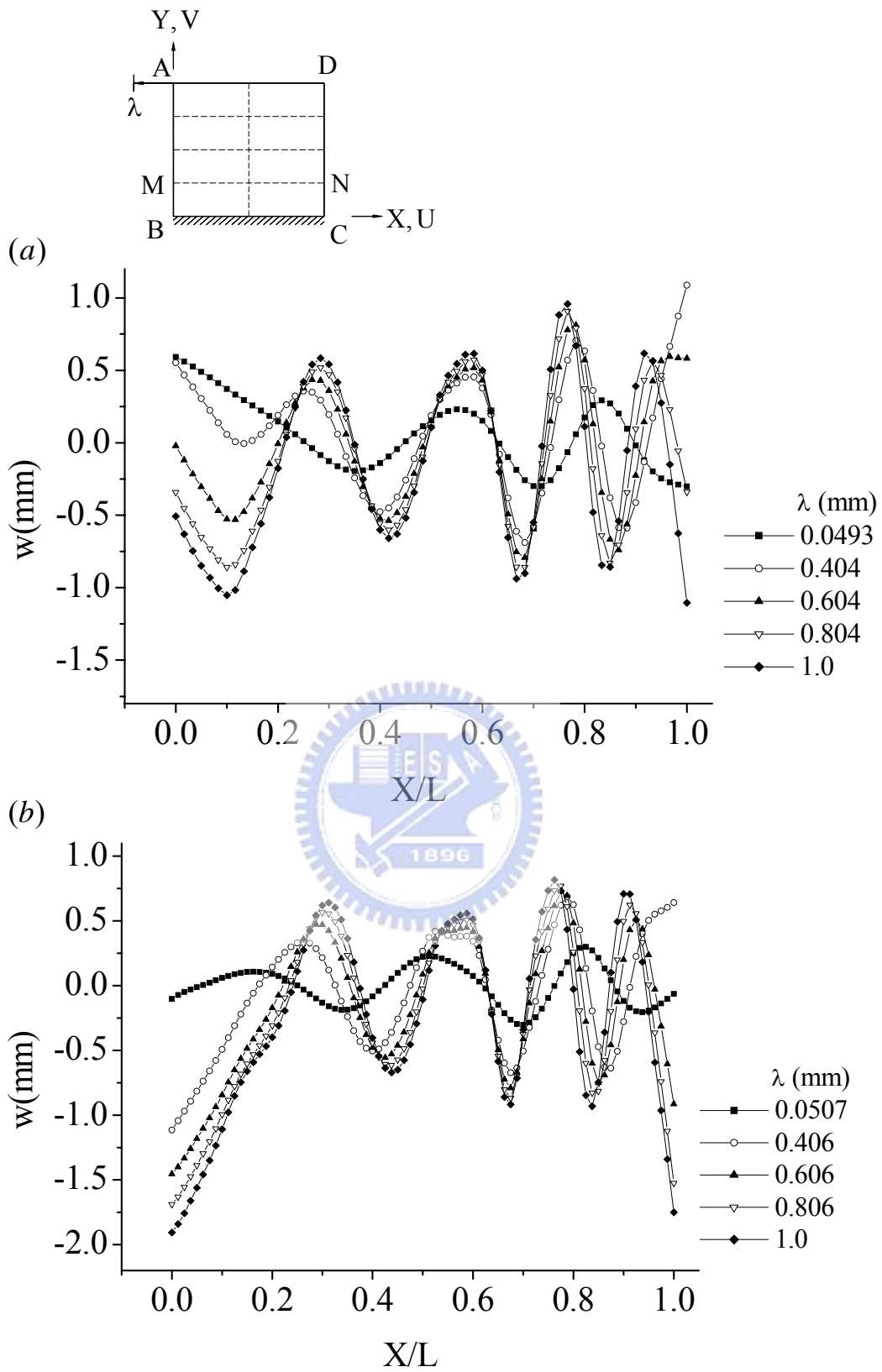


圖 4.34 軸線 MN 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

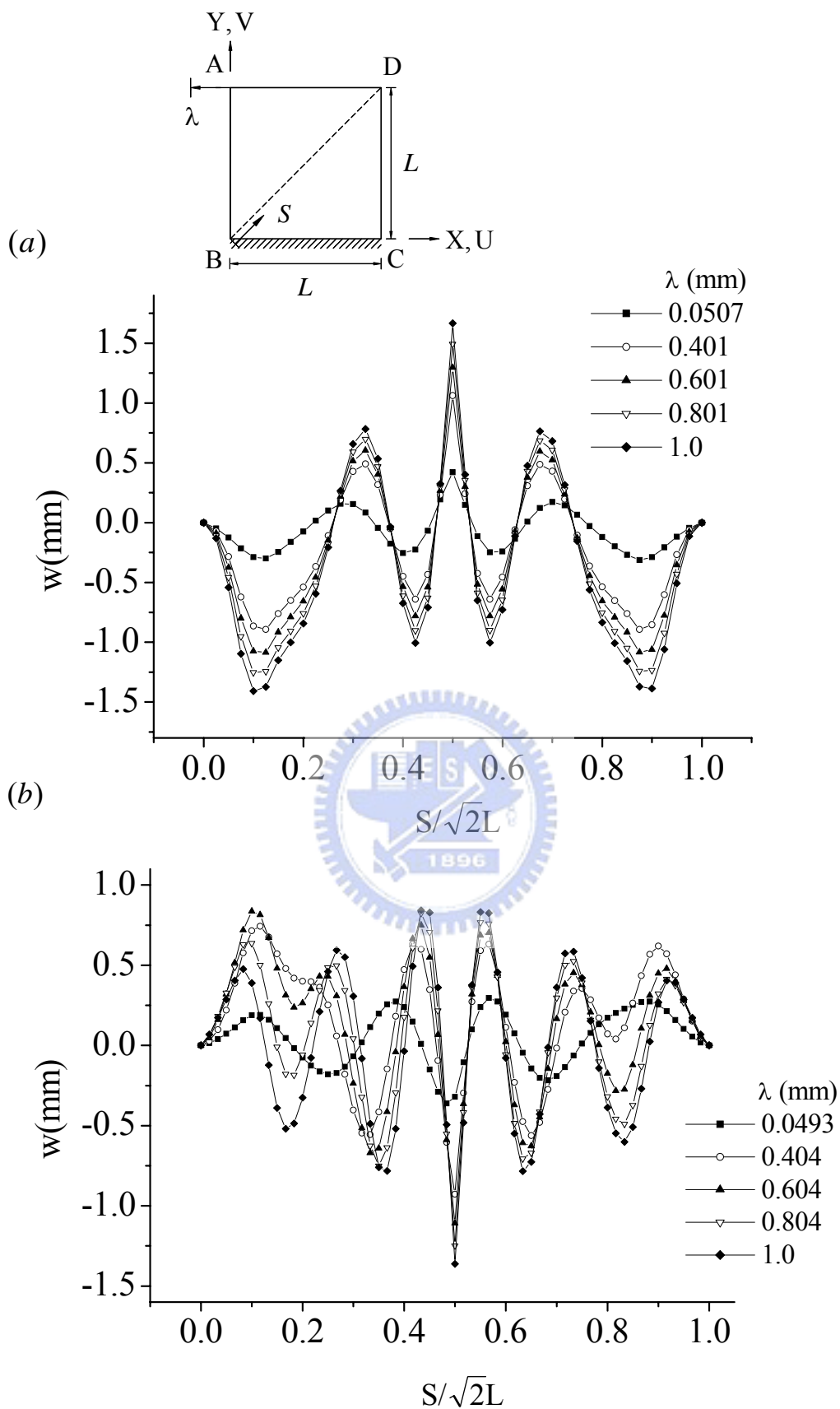


圖 4.35 對角軸線 BD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 40×40 ，(b) Mesh 60×60

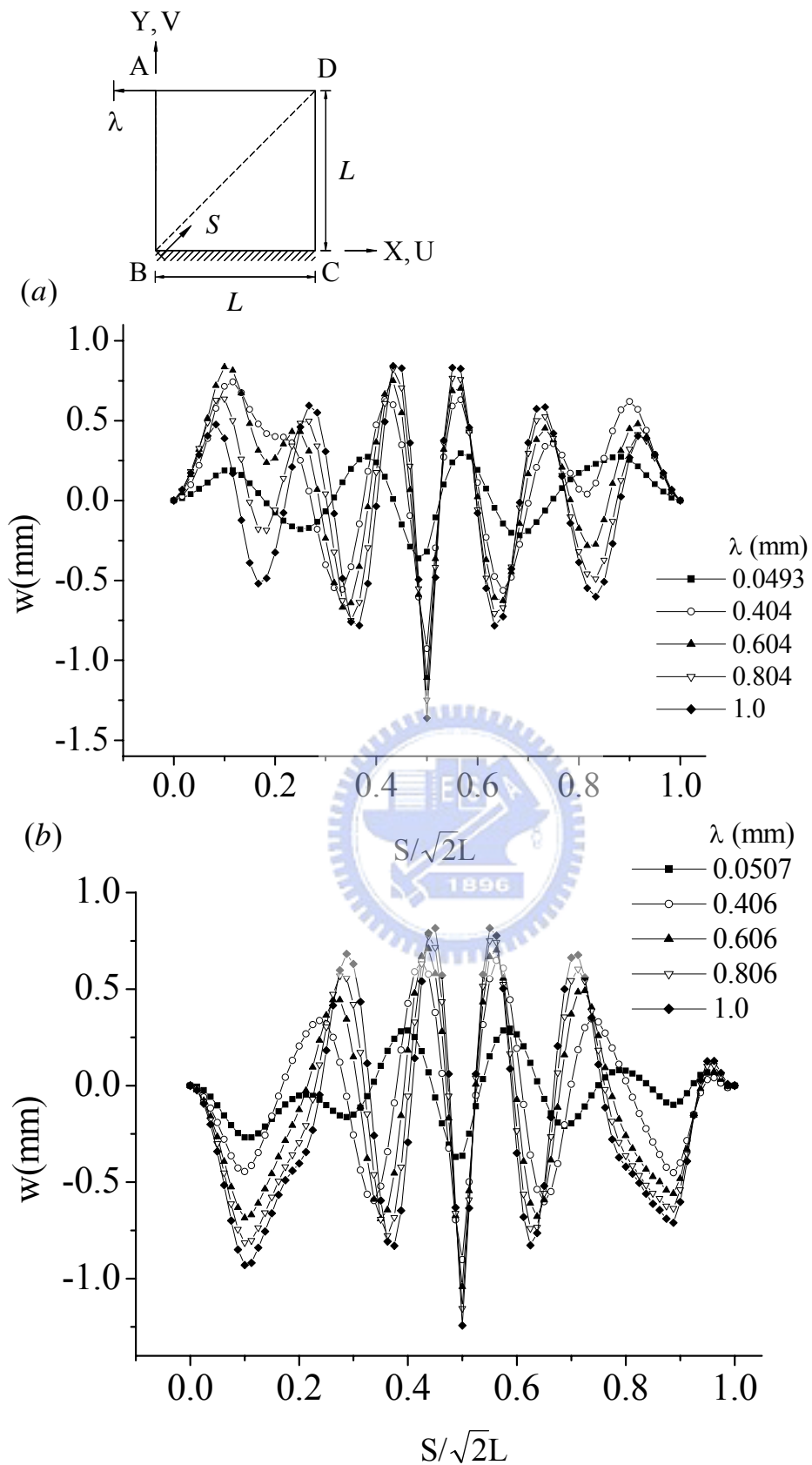


圖 4.36 對角軸線 BD 之 Z 方向位移分佈圖，例題二，

(a) Mesh 60×60 ，(b) Mesh 80×80

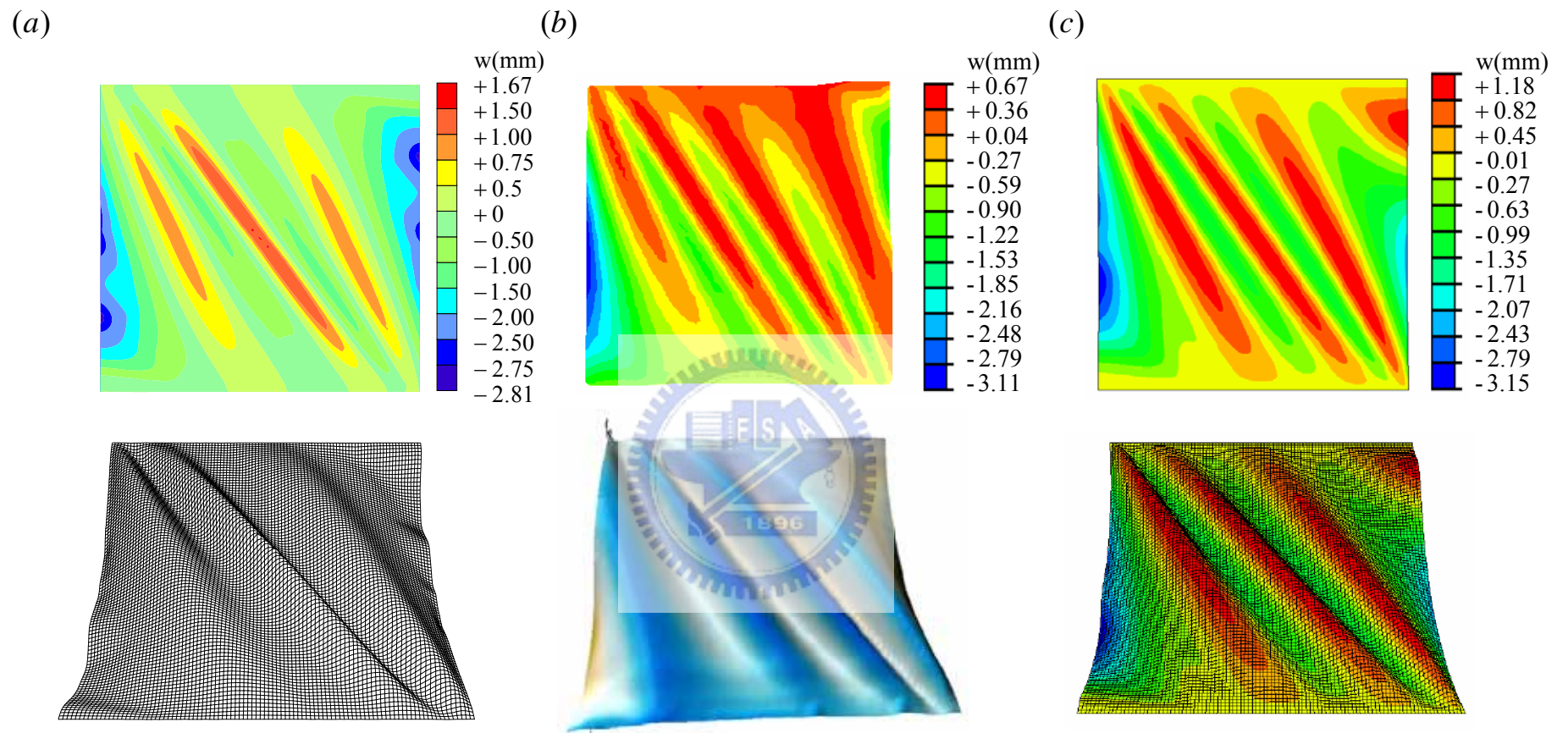


圖 4.37 膜結構變形圖，例題二， $\lambda = 1(mm)$

(a) Present, Mesh 40×40 , (b)文獻[12]Experiment(Photogrammetry), (c)文獻[11] (ABAQUS S4R5)

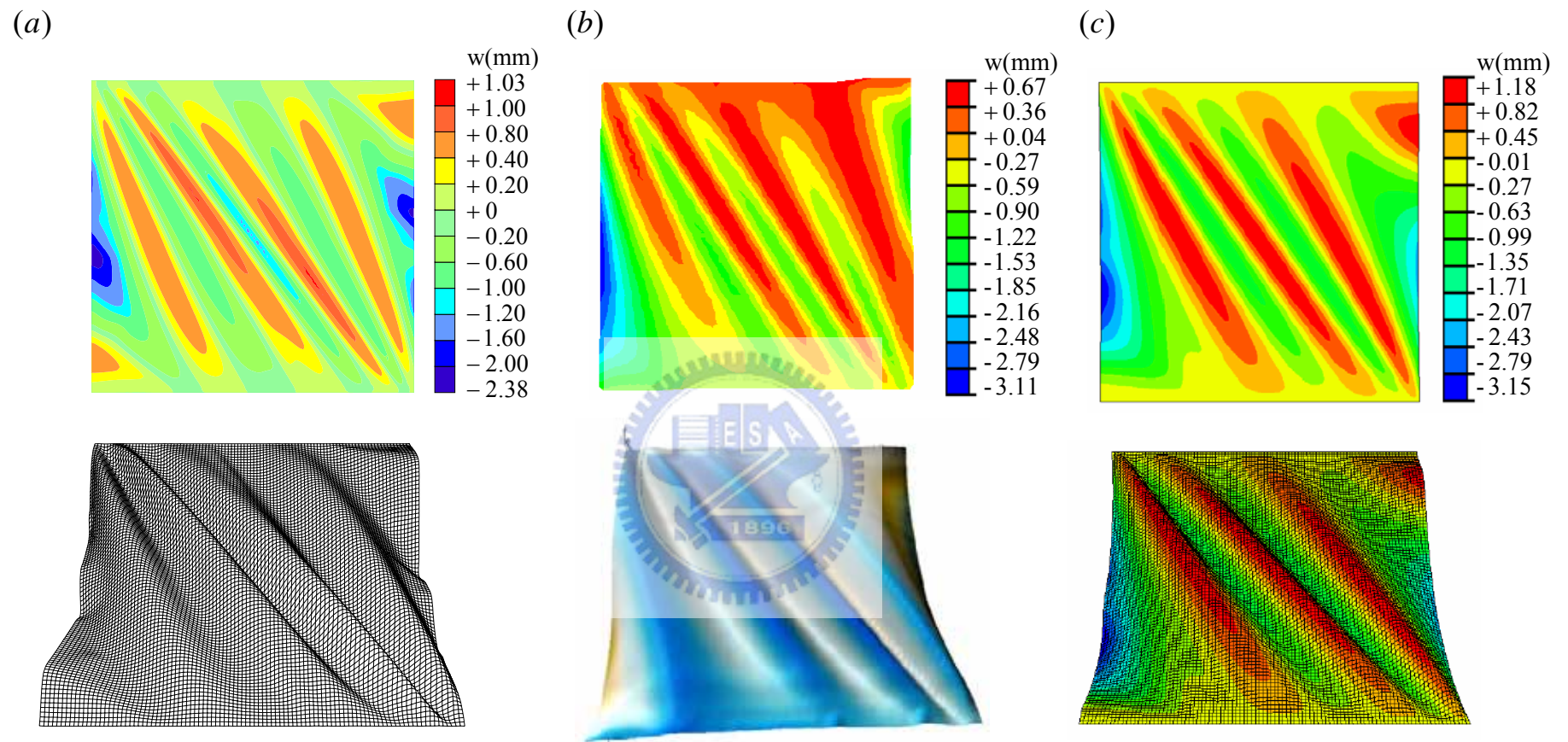


圖 4.38 膜結構變形圖，例題二， $\lambda = 1(mm)$

(a)Present, Mesh 60×60 , (b)文獻[12]Experiment(Photogrammetry), (c)文獻[11] (ABAQUS S4R5)

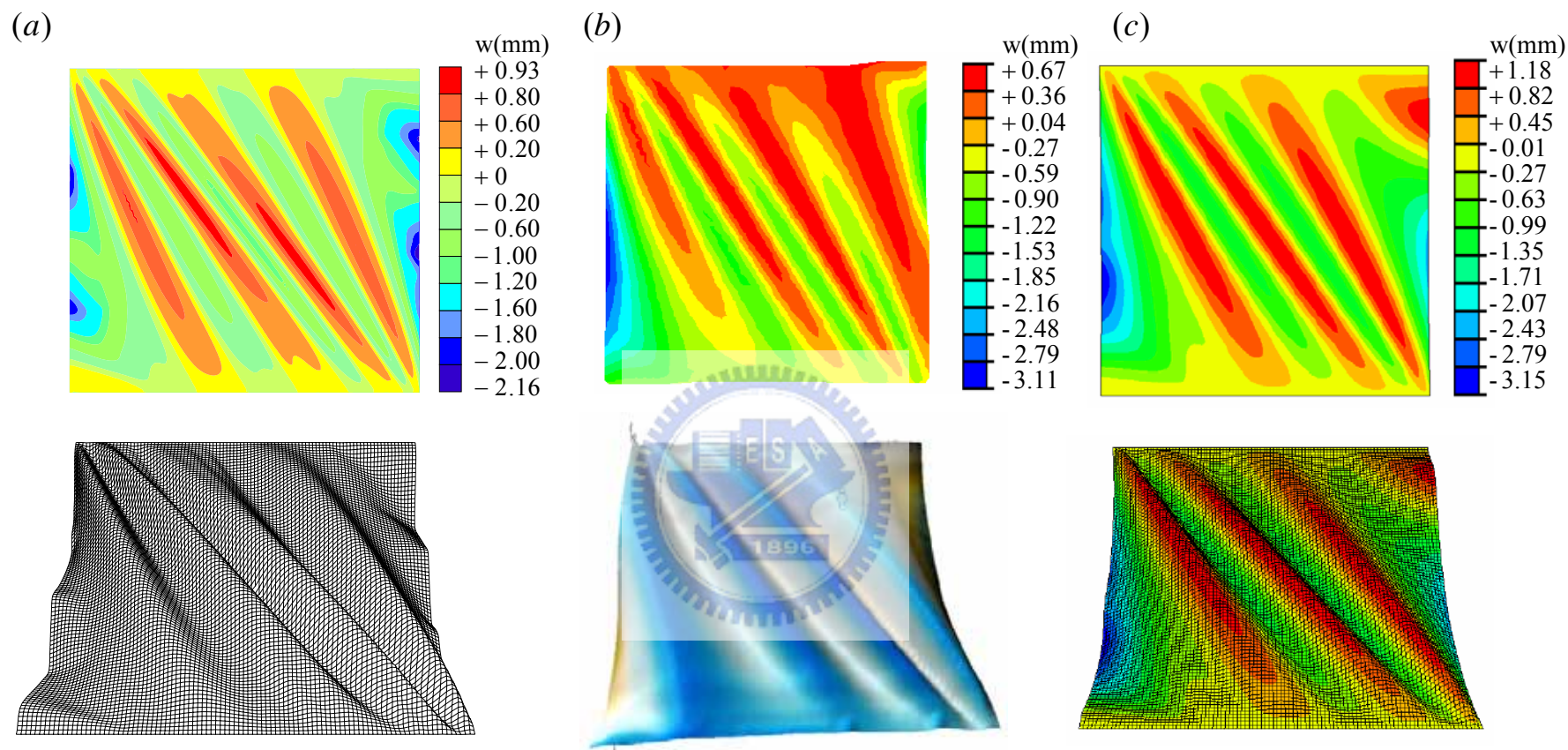


圖 4.39 膜結構變形圖，例題二， $\lambda = 1(mm)$

(a)Present, Mesh 80×80 , (b)文獻[12]Experiment(Photogrammetry), (c)文獻[11] (ABAQUS S4R5)

附錄 A DKT 元素的形狀函數

在(2.29)式裡面的 \mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 分別有 9 個分量，其表示式為[21]

$$H_{x1} = 1.5(a_6N_6 - a_5N_5)$$

$$H_{x2} = b_5N_5 + b_6N_6$$

$$H_{x3} = N_1 - c_5N_5 - c_6N_6$$

$$H_{x4} = 1.5(a_4N_4 - a_6N_6)$$

$$H_{x5} = b_6N_6 + b_4N_4$$

$$H_{x6} = N_2 - c_6N_6 - c_4N_4$$

$$H_{x7} = 1.5(a_5N_5 - a_4N_4)$$

$$H_{x8} = b_4N_4 + b_5N_5$$

$$H_{x9} = N_3 - c_4N_4 - c_5N_5$$

$$H_{y1} = 1.5(d_6N_6 - d_5N_5)$$

$$H_{y2} = -N_1 + e_5N_5 + e_6N_6$$

$$H_{y3} = -H_{x2}$$

$$H_{y4} = 1.5(d_4N_4 - d_6N_6)$$

$$H_{y5} = -N_2 + e_6N_6 + e_4N_4$$

$$H_{y6} = -H_{x5}$$

$$H_{y7} = 1.5(d_5N_5 - d_4N_4)$$

$$H_{y8} = -N_3 + e_4N_4 + e_5N_5$$

$$H_{y9} = -H_{x8}$$

其中

$$a_k = \frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$b_k = \frac{\frac{3}{4}x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$d_k = \frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$l_{ij}^2 = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)$$

其中 $k = 4, 5, 6$ 分別對應到 $ij = 23, 31, 12$ 如圖 2.4 所示， $x_{ij} = x_i - x_j$ ，

$y_{ij} = y_i - y_j$ 。

在 \mathbf{H}_x 、 \mathbf{H}_y 的表示式中以及在(2.22)式中的 $N_i (i = 1-6)$ 為[21]

$$N_1 = 2(1 - \xi - \eta)(\frac{1}{2} - \xi - \eta)$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

其中 ξ 、 η 是元素面積座標裡的 L_2 與 L_3 [30]。

在文獻[30]中元素面積座標的 L_1 、 L_2 、 L_3 分別為

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y)$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y)$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y)$$

$$2A = (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

其中 x_1 、 x_2 、 x_3 、 y_1 、 y_2 、 y_3 分別是元素三個端點在座標的座標值，見圖 A.1。A 為元素面積， A_1 、 A_2 、 A_3 為圖 A.1 中 $\Delta P32$ 、 $\Delta P31$ 、 $\Delta P12$ 的面積。圖 A.2 為元素節點在元素自然座標 ξ 及 η 上的座標值。

L_1 、 L_2 、 L_3 對 x 、 y 的偏微分別為

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = y_2 - y_3$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = y_1 - y_2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = x_3 - x_2$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial y} = x_2 - x_1$$

因為 $\xi = L_2$ 、 $\eta = L_3$ 故

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2$$



$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1$$

依照本文元素座標的定義， $x_1 = y_1 = y_2 = 0$

則 ξ 、 η 對 x 、 y 的偏微分別為

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1 = y_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3 = -x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2 = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1 = x_2$$

\mathbf{H}_x 與 \mathbf{H}_y 對 ξ 與 η 偏微的表示式如下

$$\mathbf{H}_{x,\xi} = \begin{bmatrix} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{x,\eta} = \begin{bmatrix} -P_5(1-2\eta) - \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

其中

$$P_k = \frac{-6x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6a_k ; \quad t_k = \frac{-6y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6d_k$$

$$q_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4b_k ; \quad r_k = \frac{3y_{ij}^2}{l_{ij}^2}$$

$k = 4, 5, 6$ 分別對應到 $ij = 23, 31, 12$

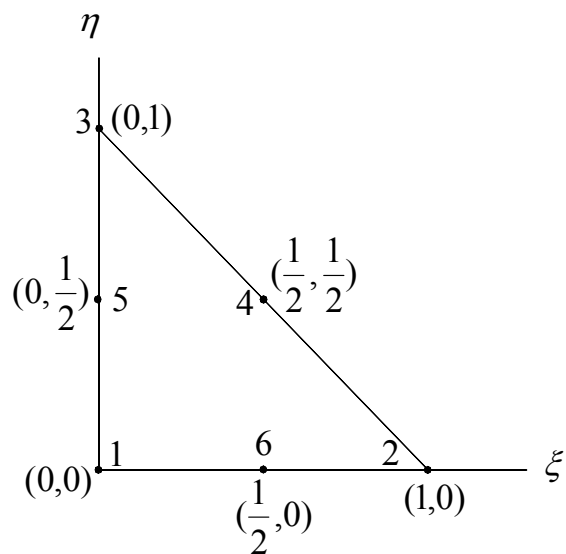
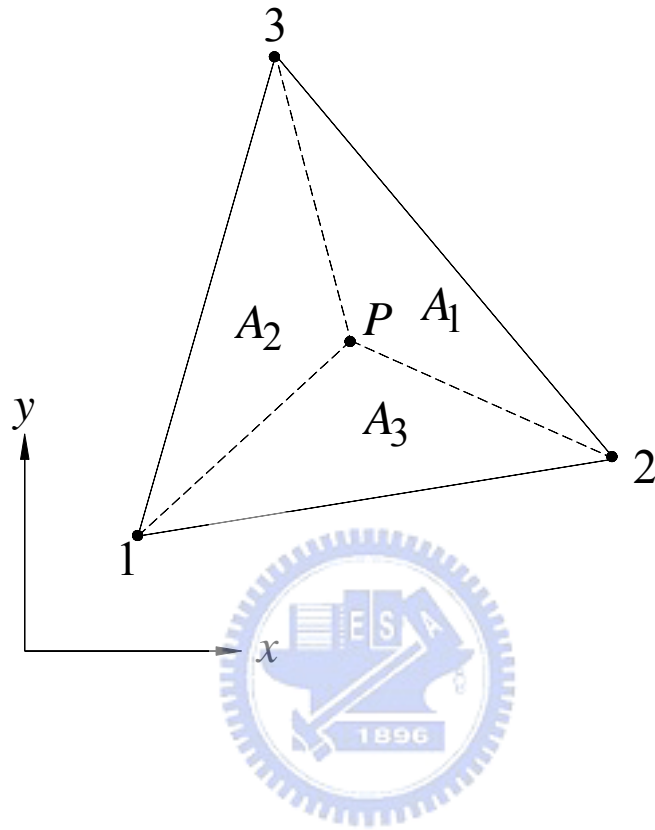


圖 A.2 殼元素節點的自然座標示意圖

附錄 B CST 元素的剛度矩陣

CST 元素的剛度矩陣表示如下[20]

$$\mathbf{k}_m = D \begin{bmatrix}
 u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\
 y_3^2 + \gamma_1 x_{32}^2 & & & & & \\
 -y_3^2 - \gamma_1 x_3 x_{32} & y_3^2 + \gamma_1 x_3^2 & & & & \\
 \gamma_1 x_2 x_{32} & -\gamma_1 x_2 x_3 & \gamma_1 x_2^2 & & & \\
 -\gamma_2 y_3 x_{32} & \nu y_3 x_{32} + \gamma_1 x_3 y_2 & -\gamma_1 x_2 y_3 & \gamma_1 y_3^2 + x_{32}^2 & & \\
 \nu x_2 y_3 + \gamma_1 y_3 x_{32} & -\gamma_2 x_3 y_3 & \gamma_1 x_2 y_3 & -\gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{32} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & \\
 -\nu x_2 y_3 & \nu x_2 y_3 & 0 & x_2 x_{32} & -x_2 x_3 & x_2^2
 \end{bmatrix} \text{Symmetric}$$

其中 $D = \frac{Et}{2(1-\nu^2)x_2 y_3}$ ， ν 是蒲松比(Poisson ratio)， $\gamma_1 = \frac{1-\nu}{2}$ ，

$\gamma_2 = \frac{1+\nu}{2}$ ， $x_{32} = x_3 - x_2$ 。

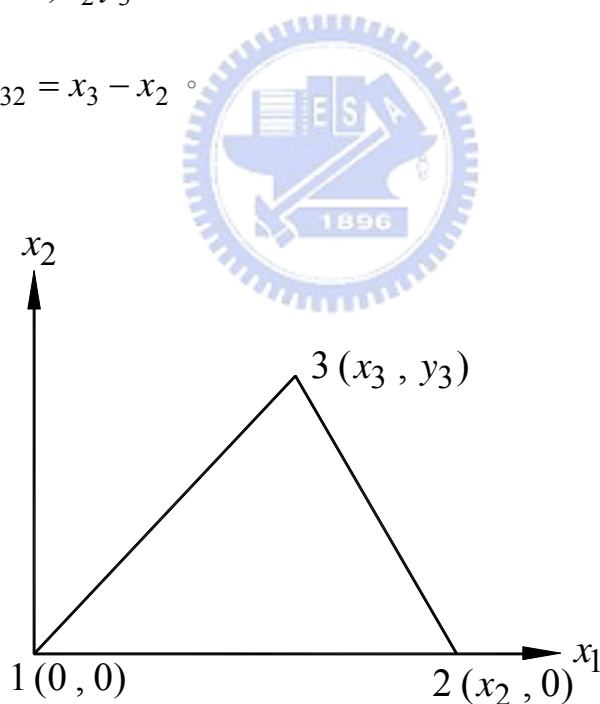


圖 B.1 CST 元素節點座標示意圖

附錄 C

逆冪法解廣義特徵值問題之數值方法

廣義特徵值問題(generalized eigenvalue problem)可表示成

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{BX} \quad (\text{C.1})$$

若(C.1)式的最小特徵值沒有重根，則可利用逆冪法(inverse power method)求其最小的特徵值及特徵向量。

以逆冪法求解廣義特徵值問題的數值方法可說明如下：

將(C.1)式之兩邊各減掉 $\lambda_S \mathbf{BX}$ ，其中 λ_S 為一接近欲求之特徵值的

給定值，則(C.1)式可被改寫成

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \bar{\lambda}\mathbf{BX}, \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \lambda_S \mathbf{B}, \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_S. \quad (\text{C.4})$$

令 $\bar{\lambda}_0 = 0$ 與 $\mathbf{X}_0 = \{1, 1, \dots, 1\}$ ，並計算 $\mathbf{Y} = \mathbf{BX}_0$ 。

將 \mathbf{Y} 正規化，亦即

$$\mathbf{Y}_0 = \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|}. \quad (\text{C.5})$$

求解

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_0, \quad (\text{C.6})$$

求得 \mathbf{X}_1 。再計算

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{BX}_1, \quad (\text{C.7})$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\mathbf{X}_1^t \mathbf{Y}_0}{\mathbf{X}_1^t \mathbf{Y}_1}. \quad (\text{C.8})$$

檢查以下兩個挫屈收斂準則

$$1 - \frac{|\mathbf{X}_0^t \mathbf{X}_1|}{\|\mathbf{X}_0\| \|\mathbf{X}_1\|} \leq \mathbf{e}_X, \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{|\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_0|}{|\bar{\lambda}_1|} \leq \mathbf{e}_\lambda, \quad (\text{C.10})$$

其中 \mathbf{e}_X 與 \mathbf{e}_λ 為給定之容許誤差。

若(C.9)與(C.10)式同時滿足，則取 $\lambda = \bar{\lambda}_1 + \lambda_S$ 為所求之挫屈負荷參數，而 \mathbf{X}_1 代表對應 λ 之挫屈模態(buckling mode)，並停止迭代；否則令 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1$ 、 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1$ 、與 $\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_1$ ，並回到步驟(3)繼續迭代。

