

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

片狀彈性支承之設計及應用

The Design and Application of Plate-Type Elastic
Damper



研究生：黃聖傑

指導教授：金大仁 教授

中華民國九十六年十二月

片狀彈性支承之設計及應用

The Design and Application of Plate-Type Elastic Damper

研究生：黃聖傑

Student : Sheng-Chieh Huang

指導教授：金大仁 博士

Advisor : Tai-Yan Kam

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

December 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年十二月

片狀彈性支承之設計及應用

研究生：黃聖傑

指導教授：金大仁 博士

國立交通大學機械工程學系 碩士班

摘 要

本文重點分兩部份。第一部份為彈性支承的研製，為解決傳統彈波在大變形下其彈性係數呈非線性變化的問題，製作一碳纖片狀彈性支承，利用最佳化程式對彈性支承之幾何形狀做最佳化設計，使揚聲器系統之最低共振頻率降低，且能夠於大功率下穩定運動。由於本文使用圓形平面揚聲板，其聲壓曲線在中音域 1kHz 附近有一聲壓落差，因此第二部份將利用立體加勁方式加強揚聲板之剛性，使中音谷發生的位置往高頻移動，以增加揚聲器在中低音域的實效頻寬。在理論分析上，利用有限單元軟體 ANSYS 研究加勁振動板之振動行為，並比較不同加勁振動板振形與聲壓曲線的影響，找出最適合之加勁長度，並以實驗加以驗證。

The Design and Application of Plate-Type Elastic Damper

Student : Sheng-Chieh Huang

Advisor : Dr. Tai-Yan Kam

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

Two parts are discussed in the thesis. The first part is the fabrication of the elastic dampers. In order to tackle the nonlinear problem of traditional damper's translational stiffness, a plate-type elastic damper is developed for flat panel speakers. The shape of the plate-type elastic damper is optimally designed and carbon fiber epoxy composite material is used to make the plate-type elastic damper. The use of the plate-type damper can make the radiating plate vibrate steadily. For a circular flat panel speakers, there is a dip in mid frequency range on the sound pressure level (SPL) curve. Such dip can be harmful to the sound quality of the loudspeaker. Therefore, in the second part of the thesis a method is proposed to increase the plate stiffness and raise the frequency of the dip in mid frequency range. The finite element model of the loudspeaker is constructed through the FE software ANSYS. The mode shapes of the radiating plate with added carbon fiber epoxy stiffeners are analyzed using ANSYS. The appropriate lengths of the stiffeners are determined to expand the low to mid frequency range with flat response on the SPL curve. Experiments are performed to verify the feasibility of the proposed design method in the design of circular flat panel loudspeakers.

誌 謝

在這兩年半的碩士班求學生涯過程，充滿許多難忘的回憶，對我的人生影響重大，首先要感謝指導教授金大仁博士對我在課業及研究方法上的細心指正與諄諄教誨，讓我培養出正確的求學態度，順利完成本篇論文，在此獻上最誠摯的謝意。

感謝我的父母從小到大對我無微不至的照顧，以及姊姊、妹妹的鼓勵與支持，讓我順利無憂的完成碩士班學業。還要感謝偉芬學姐、清榮學長、志明學長、昌毅學長、于昇學長、崧任學長、建郎學長、維成學長、慶博學長、欣翰學長、哲瑋學長、建勳學長、宗鴻學長在課業、生活及研究上的種種指導與協助，以及同窗好友永立、魁原、國真、融崧、捷凱的互相切磋與勉勵，使我在求學的過程中不感孤單，另外也要感謝學弟志傑、建儒、宏銘、政霖、致翔、秉達、恩寶、奕樵在各方面的幫助，並要感謝幫助過我的人，最後僅將本文獻給我的家人、師長與朋友。

聖傑 2008. 于交大

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
一、	緒論.....	1
1-1	前言.....	1
1-2	文獻回顧.....	2
1-3	研究動機與方法.....	4
二、	複合材料疊層板的振動分析.....	6
2-1	一階剪變形平板理論.....	6
2-2	瑞雷-黎次法(Rayleigh-Ritz method).....	9
2-3	平板之有限元素分析.....	12
2-4	特徵值與特徵向量.....	15
2-5	受外力的振動系統.....	16
三、	有限元素分析模擬與聲壓計算.....	18
3-1	ANSYS 有限元素模型之建立.....	18
3-1.1	模擬元素之選擇.....	18
3-1.2	ANSYS 模型建立步驟.....	18
3-2	ANSYS 模擬分析中各參數之取得.....	21
3-2.1	質點元素的參數.....	21
3-2.2	彈簧元素的參數.....	21
3-2.3	激振力的給定.....	22
3-2.4	阻尼比的給定.....	22
3-3	聲壓的計算及應用.....	23
3-4	ANSYS 模型之驗證.....	26
3-4.1	模擬元素的選擇.....	26
3-4.2	非線性懸臂梁模擬的驗證.....	26
3-4.3	聲壓模擬的驗證.....	27
四、	最佳化總域極小化理論.....	28
4-1	最佳化設計.....	29

4-2	多起始點方法.....	30
4-3	區域極小化程序.....	31
4-4	總域極小化程序.....	33
4-5	廣義拉格蘭吉乘子方法.....	34
五、	片狀彈性支承之最佳設計.....	35
5-1	彈性支承之功能.....	36
5-2	碳纖片狀彈性支承.....	37
5-3	彈性支承幾何形狀之最佳化設計.....	38
5-3.1	最佳化法之建立.....	38
5-3.2	彈性支承設計與拉伸實驗結果.....	40
六、	平面揚聲器之研製與實驗.....	42
6-1	揚聲器製作.....	42
6-1.1	彈性矽膠懸邊之製作.....	42
6-1.2	音圈與場磁鐵之製作.....	43
6-1.3	平面揚聲器之製作.....	43
6-2	揚聲器各種實驗程序.....	43
6-2.1	阻尼量測實驗.....	43
6-2.2	聲壓量測實驗.....	44
6-2.3	阻抗量測實驗.....	45
6-2.4	參數量測實驗.....	45
6-3	中音谷產生的原因.....	46
6-4	碳纖立體加勁振動板.....	47
6-4.1	ANSYS 模擬立體加勁.....	48
6-4.2	實驗驗證.....	49
七、	結論與未來研究方向.....	51
7-1	結論.....	51
7-2	未來研究方向.....	52
參考文獻	53

表 目 錄

表 3-1	ANSYS 模擬之材料常數.....	55
表 3-2	平面揚聲器量測參數.....	55
表 3-3	文獻[2]中的材料常數.....	56
表 3-4	文獻[2]與 ANSYS 各元素自然頻率分析比較.....	56
表 3-5	文獻[7]與 ANSYS 模擬比較.....	57
表 5-1	最佳化之設計變數最佳值.....	57
表 5-2	最佳化之彈性支承 ANSYS 模擬之力與位移關係.....	58
表 6-1	音圈規格表.....	58
表 6-2	場磁鐵規格表.....	58
表 6-3	ANSYS 模擬立體加勁之彎矩模態頻率與中音谷聲壓落差.....	59
表 6-4	x 軸向固定 19mm 加勁與 y 軸之不同加勁長度比較.....	59
表 6-5	y 軸向固定 19mm 加勁與 x 軸之不同加勁長度比較.....	59



圖 目 錄

圖 1-1	傳統振動板為錐盆型的揚聲器.....	60
圖 1-2	振動板為平面的揚聲器.....	60
圖 1-3	傳統半月型波浪彈波.....	61
圖 2-1	平板所受應力的合力圖.....	61
圖 2-2	半徑為 a 公尺之具彈性支撐圓形板.....	62
圖 2-3	頻率-位移圖.....	62
圖 2-4	Rayleigh Damping.....	63
圖 3-1	ANSYS 模擬 model.....	63
圖 3-2	平面揚聲器阻抗圖.....	64
圖 3-3	以雷射測速儀量測振動板中心點位移響應.....	65
圖 3-4	聲壓距離示意圖.....	66
圖 3-5	ANSYS 模擬與文獻[7] 之力與位移比較.....	66
圖 3-6	純巴桑木振動板揚聲器實驗與 ANSYS 模擬比較.....	67
圖 4-1	能量守恆觀點最小值示意圖.....	67
圖 4-2	區域極小化流程圖(BLOCK 1).....	68
圖 4-3	總域極小化流程圖.....	69
圖 4-4	A.L.M.區極小化流程圖(BLOCK A).....	70
圖 5-1	振動板之振形.....	71
圖 5-2	揚聲器結構.....	71
圖 5-3	傳統波浪圓形彈波之力與位移示意圖.....	72
圖 5-4	碳纖壓製疊層順序.....	72
圖 5-5	熱壓機.....	73
圖 5-6	複合材料積層板之加熱加壓硬化成型製程圖.....	73
圖 5-7	冂字形彈性支承.....	74
圖 5-8	冂字形彈性支承之力與位移示意圖.....	74
圖 5-9	具波浪形彈性支承.....	75
圖 5-10	具波浪形彈性支承之力與位移示意圖.....	75
圖 5-11	彈性支承設計變數示意圖.....	76

圖 5-12	ANSYS 模擬之力-位移示意圖.....	76
圖 5-13	最佳化彈性支承幾何形狀示意圖.....	77
圖 5-14	ANSYS 模擬最佳化彈性支承之力-位移關係圖.....	77
圖 5-15	片狀碳纖彈性支承成品.....	78
圖 5-16	拉伸實驗：片狀彈性支承之力與位移示意圖.....	79
圖 6-1	彈性矽膠懸邊完成品.....	79
圖 6-2	揚聲器製作完成品.....	80
圖 6-3	阻尼比量測實驗架設示意圖.....	80
圖 6-4	聲壓量測實驗架設圖.....	81
圖 6-5	平面揚聲器阻抗圖.....	81
圖 6-6	揚聲器參數計算.....	82
圖 6-7	具碳纖彈波巴沙木振動板與 ANSYS 模擬之聲壓曲線.....	82
圖 6-8	具碳纖支承巴桑木振動板自然頻率圖.....	83
圖 6-9	具碳纖支承之剛體振動板 ANSYS 模擬圖.....	84
圖 6-10	ANSYS 模擬剛體振動板振形圖.....	85
圖 6-11	碳纖平面加勁示意圖.....	85
圖 6-12	慣性矩說明.....	86
圖 6-13	碳纖立體加勁位置示意圖.....	86
圖 6-14	巴桑木與 11mm 立體加勁聲壓圖.....	87
圖 6-15	巴桑木與 19mm 立體加勁聲壓圖.....	87
圖 6-16	巴桑木與 27mm 立體加勁聲壓圖.....	88
圖 6-17	立體加勁與彎矩模態圖.....	88
圖 6-18	碳纖加勁長度與彎矩模態頻率關係.....	89
圖 6-19	碳纖加勁長度與中音谷落差關係.....	89
圖 6-20	碳纖立體 y 軸不同加勁位置示意圖.....	90
圖 6-21	19mm 與 y 軸不同加勁位置聲壓圖.....	90
圖 6-22	碳纖立體 x 軸不同加勁位置示意圖.....	91
圖 6-23	19mm 與 x 軸不同加勁位置聲壓圖.....	91
圖 6-24	改變 x、y 軸之彎矩振形頻率比較.....	92
圖 6-25	改變 x、y 軸之中音谷落差比較.....	92

圖 6-26	具立體碳纖加勁振動板.....	93
圖 6-27	碳纖立體加勁板實驗聲壓圖.....	93
圖 6-28	19mm 加勁板與碳纖三明治板聲壓比較.....	94
圖 6-29	ANSYS 模擬之彈性支承變形振動模態.....	94
圖 6-30	加泡棉之碳纖彈性支承.....	95
圖 6-31	19mm 加勁板與彈性支承加泡棉之比較.....	95



一、緒論

1-1 前言

複合材料是指結合兩種或以上不同之物質，將以結合，擷取原材料之特性與優點，製成性能優異並能滿足需求的一種新材料。複合材料之構成有兩大要素：一為基材(matrix)，另為補強材料(reinforcement)二者予以複合，以獲得符合設計需求的新材料，其中以纖維強化的複合材料應用較廣，此種材料在纖維方向具有相對於同等密度之材料較高強度、高勁度之特性，所以可以透過不同疊層的角度或不同的疊層方式之設計來達到實際需求上具備輕質量、高強度、設計上變化性大的材料。目前複合材料已被廣泛的應用在航太、造船、飛彈、汽車、休閒運動器材等對於重量敏感及有高強度需求的結構上。

近年來，受到電視與顯示器的平面化影響，所搭配的揚聲器也由傳統之錐盆式揚聲器(圖 1-1)改為平面式揚聲器(圖 1-2)，而平面揚聲器的揚聲板也逐漸由單一材料構成之振動板，改以玻纖或碳纖加勁之揚聲板取代。而振動板之特性可說是揚聲器品質優劣的重要判斷因素之一。優異的振動板必須有兩大特點，一為高剛性，使振動過程中之板變形量十分微小，進而產生平穩之聲壓值；二為重量輕，能夠以較小之出力產生相同或更高之輸出功率，即可減少輸入訊號之功率，而達到低耗電量、省電的優勢。

決定揚聲器品質優劣之另一個重點為其懸吊系統。揚聲器作動時為往復的簡諧運動，必須提供一個穩定的懸吊系統使其音圈可以在磁隙中能夠穩定的運動，不使音圈產生偏擺，而不至於產生不悅耳的雜音。以揚聲板運動之方式可大致分為兩種區域。一為系統共振頻率(f_0)附近之剛體運動，

二為 f_0 之後高頻揚聲板變形。當激振頻率到達系統共振頻率 f_0 之後，因揚聲板產生大位移，揚聲器才會有一個平穩之聲壓值，所以可以將 f_0 稱為揚聲器之起始頻寬，因此，若需要此揚聲器有良好的低音表現，必須將 f_0 降低至所需之目標。而揚聲板在受激振時，亦會發生共振模態，使得揚聲板產生局部的變形，會產生不同的振幅與相位，因此揚聲板作動時不再是一個剛體運動，若當有反相位振形發生時，會減少推動空氣的體積，因而降低了聲壓，因此揚聲板之變形會對聲壓產生不良的影響。

傳統圓形波浪紋彈波(如圖 1-3)在大變形時的彈性係數，呈現非線性現象，造成高瓦數及大衝程時揚聲器失真的效應；且在長時間往復振動使得彈波上不織布以及熱塑膠有龜裂現象，為了解決這些缺點，本文目的在設計一個揚聲器彈波，使其在低頻保持穩定振動輸出，討論重點為利用最佳化程式去設計一個片狀彈性支承，並降低 f_0 值。另一方面研究碳纖支承的立體加勁，有效地提高揚聲板的剛性與中音谷發生的頻率，使得揚聲器有更大的實效頻寬。

1-2 文獻回顧

在分析平板的理論方面，從古典板理論(Classical Plate Theory，簡稱 CPT)[1]改進而成的古典積層板理論(Classical Lamination Theory)，對於複合材料薄板的力學分析已能得到不錯的結果，但只適用於長厚比大於 60 之平板；對於厚板而言，由於複合材料積層板之側向剪力模數(Shear modulus)比沿纖維方向的楊氏係數(Young's modulus)低很多，且在厚度上較薄板高出許多，因此容易產生側向剪變形，所以古典板理論不適合分析較厚之複合材料板。為此，Mindlin 提出了一階剪變形理論(The First-order Shear

Deformation Theory，簡稱 FSDT)[2]，首先將側向剪力的影響加以考慮，但是因為假設側向剪力分布為常數，並不符合實際的情況，於是 Whitney[3、4]便提出了剪力修正因子來加以修正，此種理論比較適合用在長厚比大於 15 的結構上；之後，學者又提出了各種高階剪變形的理論，雖有提高理論值與實際狀況相比之準確性，但往往較適用於厚板結構（長厚比大於 15）之情況，且其計算上比較複雜許多，而本文中使用的圓形揚聲板並不在厚板結構的範圍內，所以仍以一階剪變形理論為主，來分析振動板之變形行為。

在振動方面，有關振動模態分析與多自由度振動響應系統之運動方程式，參考書籍作者為 Thomson[5]、王栢村[6]等。Demeter[7]則是介紹梁、板等的非線性靜力以及振動理論。文獻 [8~11] 是介紹一般工程最佳化概念，隨著複合材料的廣泛使用與結構可靠度評估而逐漸受到重視與矚目，許多知名學者將工程最佳化運用在複合材料力學領域之相關研究，Deobald、Gibson[12]及 Frederiksen [13] 以里茲（Rayleigh-Ritz）模態分析方法及數值迭代方式、最佳化方式決定複合材料之彈性常數，而[14]則應用最佳化方法識別不同型式彈性支承結構之系統參數。

對於聲學與聲壓計算方面，Morse[15]中推導出了聲源在空氣中傳遞之聲壓方程式，在 Takeo[16]中引用出有限元素之聲壓方程式，而 Tan[17]中討論了藉由促動器(actuator)主動控制對平板之聲場的影響，文獻[18]中陳述了關於揚聲器量測的各參數的討論，文獻[19]中討論圓板之振動與聲傳，[20]則是說明在不同位置附加質量對聲壓曲線的影響。

ANSYS 為泛用型有限元素分析軟體，已被廣泛應用於學術界與工業界，包括結構應力、振動、熱傳、流體、電磁場、聲場等分析，文獻[21] 利

用 ANSYS 模擬之平面揚聲器振動板材料參數對聲壓之影響。本文也將利用 ANSYS 分析振動板之自然模態與振形，結合聲壓計算，分析出揚聲器之聲壓曲線，進而改善揚聲器之表現。

1-3 研究方法

為了讓揚聲器的低音有更好的表現及更大的有效頻寬，本文以盡量壓低揚聲器的起始頻率 f_0 為前提，研製出適合的揚聲器彈波，支撐住音圈、振動板，使其能定向、定位，且保持固定方向的往復運動。而在第一個自然頻率 f_0 之後，則因為振動板的振動模態變形，造成振動板推動的空氣有正有負互相抵消，使得聲壓會有某一段突然下降，稱之為中音谷。為改善中音谷問題，以往提高對振動板剛性的加勁方式是在整面巴桑木板上下各黏一片碳纖基層板，此種兩片碳纖夾一層巴桑木的結構一般稱之為三明治結構，但是由於加勁的面積及質量太大使得揚聲器感度下降，降低了整個揚聲器的增益。而碳纖支承垂直加勁之慣性矩較平面加勁為大，更能有效地抑制振動板因中高頻部份的變形造成的音谷。本文即是使用最佳化程式去設計一個片狀彈性支承，使其在適當的振幅下彈性係數為線性範圍，改善傳統彈波在大變形下的非線性影響；另一方面使用碳纖複合材料做立體加勁方式提高振動板剛性，使揚聲器之實效頻寬增加，並討論其不同加勁方式振動板振形與聲壓的影響。

在實驗部分，根據既定尺寸直徑 84mm 之揚聲板(如圖 1-2)，嘗試不同加勁方式，並將最佳化設計出來的片狀彈性支承以碳纖在 150 度高溫熱壓成形，組合製作出圓形平面揚聲器，利用 PULSE 訊號分析儀及 Polytec OFV350 雷射測速儀量測揚聲器系統之自然頻率，並由 LMS 聲壓頻譜儀量

測聲壓曲線及阻抗，記錄聲壓曲線並與儀器量測之阻抗圖、測速儀之頻譜圖比較結果是否一致。

分析方面，以 ANSYS 有限元素分析軟體建立一個與實體幾何相同的模型，繼而分析結構之自然頻率、模態，將分析出來的自然頻率與實驗數值比較，驗證模型的正確性；接著再進行簡諧激振分析，計算出不同激振頻率下振動板所有節點之振幅及相位角，輸入由 Fortran 程式所寫成的聲壓公式計算聲壓並由繪圖軟體繪製出聲壓曲線，將曲線與實驗結果相對照，以求模型能真實模擬出實際狀況。當整個模型驗證無誤之後，開始嘗試在不同長度之門字形加勁，探討振形與聲壓之關係，以求平滑之聲壓曲線，再由實驗驗證是否與分析吻合。



二、 複合材料疊層板的振動分析

由於本文使用之振動板直徑為 84mm，厚度為 2mm，符合一階剪變形理論長厚比需大於 15 的條件，因此使用一階剪變形來進行分析。而求平板之振動頻率常用的方法有兩種：瑞雷-黎次法(Rayleigh-Ritz method)以及有限元素分析，本章將敘述一階剪變形平板理論之基本假設、應力與應變關係以及兩種振動分析的基本理論。

2-1 一階剪變形平板理論

一階剪變形理論 FSDT (The First Order Shear Deformation Theory) 來作為積層板分析的基礎，其基本假設如下：

1. 板的長、寬為板的厚度的 15 倍以上。
2. 板的截面變形後仍保持平面。
3. 厚度仍保持不變，即 $\varepsilon_z=0$ 。
4. 板的變形量 u, v, w 很小。

其位移場的假設如下：

$$u = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t)$$

$$v = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \quad (2.1)$$

$$w = w(x, y, t)$$

而應變場如下：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\theta_{x,x} = \varepsilon_1^0 + z\kappa_1^0 \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} + z\theta_{y,y} = \varepsilon_2^0 + z\kappa_2^0 \\
\varepsilon_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} + \theta_y \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} + \theta_x \\
\varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) = \varepsilon_6^0 + z\kappa_6^0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 u 、 v 、 w 分別代表平板在 x 、 y 、 z 方向之位移量， t 代表時間， u_0 、 v_0 分別代表平板中間面在 x 、 y 方向上的位移，而 $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ 、 $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 是剪應變所產生之旋轉量(Shear Rotation)。

而中間面之曲率為

$$\begin{aligned}
\kappa_1^0 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\kappa_2^0 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\kappa_6^0 &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$



而平板之應力應變關係如下：

$$\sigma_{5 \times 1} = \underline{Q}_{5 \times 5} \varepsilon_{5 \times 1} \tag{2.3}$$

其中

$$\underline{Q}_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

且

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & Q_{12} &= \frac{E_2\nu_{12}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & Q_{66} &= G_{12} \\
Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{13}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 Q_{ij} 為彈性係數， E_i 為楊氏模數， ν_{ij} 為蒲松比， G_{ij} 為剪力模數。

考慮單層平板(如圖 2-1)，其合力與合力矩為

$$\begin{aligned}
N &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\varepsilon_{ij}dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(\varepsilon_j^0 + z\kappa_j^0)dz = A_{ij}\varepsilon_j^0 + B_{ij}\kappa_j^0 \\
M &= \int_{-h/2}^{h/2} zQ_{ij}\varepsilon_{ij}dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z\varepsilon_j^0 + z^2\kappa_j^0)dz = B_{ij}\varepsilon_j^0 + D_{ij}\kappa_j^0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}dz \\
B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}zdz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}z^2dz
\end{aligned} \tag{2.7}$$

上式 h 為平板厚度， $h/2$ 即為薄板表面到中間面的距離， A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$)

分別代表拉伸、耦合、彎曲勁度矩陣(Extensional Stiffness Matrix、Coupling Stiffness Matrix、Bending Stiffness Matrix)，將合力及合力矩寫成矩陣形式如

下：

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

2.2 瑞雷-黎次法(Rayleigh-Ritz method)

對於半徑為 a 公尺之彈性支撐圓板的情形，可模擬成如圖 2-2 所示，邊界之彈性支承以橫向(Translation)及旋轉(Rotation)彈簧加以表示，此系統所具有之最大應變能為 U_{\max} ，可表示如下：

$$U_{\max} = U_p + U_t + U_r \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \iint_A \{W\}^T [D] \{W\} dA \\ U_t &= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta \\ U_r &= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_r \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 d\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 U_p 、 U_t 、 U_r 各代表圓板之應變能、圓板邊界上彈性支撐之橫向及旋轉應變能。 k_t 、 k_r 代表線性剛性(translational stiffness)和旋轉剛性(rotational stiffness)。而位移函數(deflection function) W 表示為下式：

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 W}{2\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \quad (2.11)$$

而系統最大動能為 T_{\max} ，可表示為下式：

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 h \iint_A W^2 dA \quad (2.12)$$

分別將(2.10)、(2.12)無因次化，整理如(2.13)、(2.14)式：

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \frac{D_0}{a^2 \alpha} \left\{ \iint_A \{W\}^T [D] \{W\} d\xi d\eta \right.$$

$$\left. + \frac{a^3 \alpha}{D_0} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta + \frac{a\alpha}{D_0} \int_0^{2\pi} k_r \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 d\theta \right\} \quad (2.13)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{D_0}{a^2 \alpha} \lambda^2 \iint_A W^2 d\xi d\eta \quad (2.14)$$

利用 Rayleigh-Ritz method 將位移函數表示如下：

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0} \sum_{n=0} C_{mn} \Phi_{(\xi)}^m \Psi_{(\eta)}^n \quad (2.15)$$

其中 C_{mn} 為待定係數， $\Phi_{(\xi)}$ 、 $\Psi_{(\eta)}$ 係由 Gram-Schmidt 正交化法所產生的多項式函數(polynomial function)，亦是所謂之形狀函數(shape function)。而其他無因次化定義如下：

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\lambda = \left(\frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

故複合材料層板的總能量泛函 Π 可表示為：

$$\Pi = U - T \quad (2.16)$$

若以一階剪變形理論分析，此系統之最大應變能 V_{\max} ：

$$V_{\max} = V_p + V_t + V_r \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T [\varepsilon] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]^T [\bar{Q}] [\varepsilon] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A [(A_{44} \varepsilon_4^2 + A_{55} \varepsilon_5^2 + 2A_{45} \varepsilon_4 \varepsilon_5) + (D_{11} \kappa_1^2 + D_{22} \kappa_2^2 + D_{66} \kappa_6^2) \\ &\quad + 2(D_{12} \kappa_1 \kappa_2 + D_{16} \kappa_1 \kappa_6 + D_{26} \kappa_2 \kappa_6)] dA \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_4 = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \varepsilon_5 = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \kappa_2 = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \kappa_6 = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

$$V_t = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_t W^2 d\theta \quad (2.19)$$

$$V_r = \frac{I}{2} \int_S M_n \phi dS = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} k_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 d\theta \quad (2.20)$$

而系統最大動能為 T_{\max} ：

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{I}{2} \rho \int_V V^2 dV \\ &= \frac{I}{2} \rho \lambda^2 \int_V (z^2 \theta_x^2 + z^2 \theta_y^2 + w^2) dV \\ &= \frac{\rho h \lambda^2}{2} \int_A [(\theta_x^2 + \theta_y^2) \frac{h^2}{12} + w^2] dA \end{aligned} \quad (2.21)$$

故總位勢能可寫成

$$\pi = V_p + V_t + V_r - T_{\max} \quad (2.22)$$

而 shape function 可整理如下：

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{wij} \Phi_{(\xi)}^i \Psi_{(\eta)}^j \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{xkl} \Phi_{(\xi)}^k \Psi_{(\eta)}^l \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \sum \sum C_{ymn} \Phi_{(\xi)}^m \Psi_{(\eta)}^n \end{aligned} \quad (2.23)$$

將(2.23)代入(2.22)，並使用 Ritz method 求待定係數，令

$$\frac{\partial(\pi)}{\partial C_{wij}} = 0 \quad \frac{\partial(\pi)}{\partial C_{xkl}} = 0 \quad \frac{\partial(\pi)}{\partial C_{ymn}} = 0 \quad (2.24)$$

其中 $i, j, k, l, m, n = 0, 1, 2, \dots, I, J, K, L, M, N$

可求得系統之特徵方程式：

$$([K] - \omega^2 [M])\{C\} = \{0\} \quad (2.25)$$

求解上式，可得 ω 即為無因次之自然角頻率。

2-3 平板之有限元素分析

將平板的虛功方程式以 n 個元素的組合來表示：

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \frac{1}{2} \delta \int_{V_e} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{A_e} \delta u_i F_i dA \right\}_k = 0 \quad (2.26)$$

其中，每個節點都有五個自由度，我們以等參單元的形狀函數(Shape Function)來表示位移場：

$$\begin{aligned} u_0 &= N_i u_i & v_0 &= N_i v_i & w &= N_i w_i \\ \theta_x &= N_i \theta_{xi} & \theta_y &= N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (2.27)$$

對各元素來說，其位移可用下式來表示：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & zN_i & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & zN_i \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

也可寫成：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m N_i \underline{I} \nabla_i \quad (2.29)$$

其中 m 是每一個元素中之節點數， N_i 是元素之形狀函數， \underline{I} 是一個 5×5 的單位矩陣， ∇_i 是節點位移， $\nabla_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T$ 。

對(2.27)式的導數 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ 可得：

$$\begin{aligned} u_{0,x} &= N_{i,x} u_i & u_{0,y} &= N_{i,y} u_i \\ v_{0,x} &= N_{i,x} v_i & v_{0,y} &= N_{i,y} v_i \\ w_{,x} &= N_{i,x} w_i & w_{,y} &= N_{i,y} w_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\theta_{x,x} = N_{i,x} \theta_{xi} \quad \theta_{x,y} = N_{i,y} \theta_{xi}$$

$$\theta_{y,x} = N_{i,x} \theta_{yi} \quad \theta_{y,y} = N_{i,y} \theta_{yi}$$

將(2.30)式代入應變場：

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\theta_{x,x} = \varepsilon_1^0 + z\kappa_1^0 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} + z\theta_{y,y} = \varepsilon_2^0 + z\kappa_2^0 \\ \varepsilon_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} + \theta_y \\ \varepsilon_5 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} + \theta_x \\ \varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) = \varepsilon_6^0 + z\kappa_6^0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

可得應變—位移關係如下：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & zN_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & zN_{i,x} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & zN_{i,x} & zN_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \\ 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

可寫成：

$$[\varepsilon] = [B][\underline{V}_i] \quad (2.33)$$

其中

$$[B] = \partial[N_i]$$

由有限元素法得知元素勁度矩陣為：

$$[K_e] = \int_v [B]^T [E] [B] dV \quad (2.34)$$

其中[E]為材料特性矩陣。

再由(2.26)及(2.29)式，可用下列各式表示任意元素之各項虛功：

$$\int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{M}^e \underline{\ddot{\nabla}}^e \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{2} \delta \int_{V_e} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{K}_L^e \underline{\nabla}^e \quad (2.36)$$

$$\int_{A_e} \delta u_i F_i dA = (\delta \underline{\nabla}^e)^T \underline{F}^e \quad (2.37)$$

其中 $\underline{\nabla}^e = \{\underline{\nabla}_1, \underline{\nabla}_2, \dots, \underline{\nabla}_q\}$ ， \underline{M}^e 是元素質量矩陣(Element Mass Matrix)， \underline{K}_L^e 是元素勁度矩陣(Element Bending Stiffness Matrix)， \underline{F}^e 是元素之點負載向量(Vector of Element Nodal Force)。

而具邊界彈性支承平板之虛功方程式以 n 個元素加上 p 個邊界節點組合可表示為：

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_{V_e} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \frac{1}{2} \delta \int_{V_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{A_e} \delta u_i F_i dA \right\}_k + \sum_{q=1}^p \left\{ \int_s k_{Tq} \omega_q \delta \omega_q ds + \int_s k_{Rq} \theta_q \delta \theta_q ds \right\} = 0 \quad (2.38)$$

將邊界彈性支承之虛功方程式可整理如下：

$$\int_s k_{Tq} \omega_q \delta \omega_q ds = (\delta \underline{\omega}^S) \underline{k}_T^S \underline{\omega}^S$$

$$\int_s k_{Rq} \theta_q \delta \theta_q ds = (\delta \underline{\theta}^S) \underline{k}_R^S \underline{\theta}^S \quad (2.39)$$

其中 \underline{k}_T^S 、 \underline{k}_R^S 代表邊界節點之線性剛性(translational stiffness)和旋轉剛性(rotational stiffness)矩陣， $\underline{\omega}^S$ 及 $\underline{\theta}^S$ 為邊界節點位移與旋轉角度矩陣，p 為邊界節點總數。

最後將所有元素矩陣組合起來，則具邊界彈性支承平板之有限元素分析模型的平衡方程式如下：

$$\underline{M} \ddot{\underline{V}} + \underline{K} \underline{V} = \underline{F} \quad (2.40)$$

其中 \underline{M} 、 \underline{K} 、 \underline{F} 、 \underline{V} 分別代表廣義的質量矩陣、勁度矩陣、載荷向量和位移

向量。接下來說明外力為零以及受外力時的振動系統。

2-4 特徵值與特徵向量

一般探討結構系統的基本模態，係假設為無阻尼狀態下的自由振動模態，其運動方程式可寫為：

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad (2.41)$$

其中， $[M]$ 為質量矩陣； $[K]$ 為勁度矩陣； $\{X\}$ 為位移向量；而對任何線性結構系統而言(該系統之受力與變形關係為線性)，上式中之 $[M]$ 、 $[K]$ 均為實數對稱(Real Symmetric)矩陣。

求解任何線性結構系統時，通常假設在結構系統中，各不同部位之振動為簡諧運動，且其振頻與相位均為相同，即

$$\{X\} = \{\Phi\}e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

$$\{\ddot{X}\} = -\omega^2 \{X\} = -\lambda \{X\} \quad (2.43)$$

其中 $\{\Phi\}$ 為實向量； ω 為簡諧運動之角頻率； $\lambda = \omega^2$ 。代回式(2.41)可得：

$$([K] - \omega^2[M])\{\Phi\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.44)$$

上式中 $\{\Phi\}$ 有非零解之條件為 $[K] - \omega^2[M]$ 為奇異性(Singular)，亦即為：

$$\det |[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (2.45)$$

上式即為此系統之特徵方程式， ω_r 為系統之第 r 各自然頻率，求解上式即可得平板之自然頻率，而相對應之 $\{\Phi\}_r$ 為特徵向量，寫成矩陣型式為：

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}, [\Psi] = [\{\Phi\}_1 \cdots \{\Phi\}_r \cdots]$$

2-5 受外力的振動系統

假設此系統具有比例阻尼(Proportional Damping)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.46)$$

其中 α 、 β 將以下述之 Bandwidth Method 和 Rayleigh Damping 取得：

(一) Bandwidth Method

如圖 2-3 所示，為一振動板中心之頻率-響應圖，其中 Peak response 為某一共振頻率相對應之振幅， f_1 及 f_2 為曲線和 $peak/\sqrt{2}$ 之交點。利用下式求得共振頻率之阻尼比：

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (2.47)$$

ξ 為此共振頻率之阻尼比。



(二) Rayleigh Damping

由 Bandwidth Method 得到每一共振頻率相對應之阻尼比後，可從任二組共振頻率響應得到系統阻尼比(如圖 2-4 所示)。利用下式可以求得系統 α -damping 和 β -damping：

$$\xi_i = \alpha / (2\Omega_i) + \beta (\Omega_i / 2) \quad (2.48)$$

ξ_i ：第 i 個模態之阻尼比

Ω_i ：第 i 個模態之角自然頻率

α ：與質量矩陣有關的阻尼比

β ：與勁度矩陣有關的阻尼比

振動系統之運動方程式可寫為：

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \sin \omega t \quad (2.49)$$

因為 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ 為實對稱矩陣，所以我們可將其對角化為：

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & m_r^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & k_r^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$[\Psi]^T [C] [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & c_r^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

我們將 $\{X\} = [\Psi] \{x\}$ 代入(2.49)式並乘上 $[\Psi]^T$ 可改寫成為：

$$[m_r]\{\ddot{x}\} + [c_r]\{\dot{x}\} + [k_r]\{x\} = [\Psi]^T \{F\} \sin \omega t \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.51)$$

即可求得

$$x_r = \frac{F_r}{k_r} \left(\frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2c_r \eta)^2} + j \frac{2c_r \eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2c_r \eta)^2} \right) \quad (2.52)$$

其中 $\eta = \bar{\omega} / \omega_r$

因此，系統響應 $\{X\}$ 可得：

$$\{X\} = [\Psi] \{x\} = \sum_{r=1}^n \{\Phi\}_r x_r \quad (2.53)$$

三、 有限元素分析模擬與聲壓計算

上一章敘述求解振動板自然模態與頻率響應之方法，而本文為求計算速度以及正確性，將利用有限元素分析軟體 ANSYS 做揚聲器模擬。本章先是敘述整個 ANSYS 模型的建立方式、實驗上分析參數的取得，還有陳述 ANSYS 分析模擬揚聲器聲壓曲線時所需要的聲壓公式，最後驗證 ANSYS 模型的正確性。

3-1 ANSYS 有限元素模型之建立

3-1.1 模擬元素之選擇

本節在陳述 ANSYS 有限元素模擬分析揚聲器振動板的過程，其中振動板部份為單層 2mm，將選用符合一階剪變形理論的殼元素 Shell 99 來模擬。懸邊以及彈波則是以彈簧元素 Spring-damper14 並配合質點元素 Mass21 模擬彈性係數以及質量，音圈部份則以殼元素 Shell99 加上質點元素 Mass21 模擬，而對設計的彈性支承將選擇可計算大變形的殼元素 Shell93。而彈性支承的設計以及揚聲器的製作將於第五、六章介紹。

3-1.2 ANSYS 模型建立步驟

前處理部份：

1. Preprocessor → Element type：選擇振動板 Shell99(K11=node at bot face)，音圈元素 Shell99，彈簧元素 Spring-damper 14，音圈、支承材料的質點 Mass21。
2. Preprocessor → Real constant：設定元素之參數、彈簧常數、質量參數

等。

3. Preprocessor → Material Props → Material Models：設定振動板、音圈以及碳纖彈波之材料性質，如表 3-1。
4. Preprocessor → Modeling：由點、線、面建立振動板的模型外觀。
5. Preprocessor → MeshTool：選擇各面積之元素參數、材料性質、各元素之尺寸大小，並分割元素。
6. Preprocessor → Modeling → Copy → Nodes：將必須建立彈簧的地方偏移複製，偏移之距離即為彈簧之長度。
7. Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Auto Numbered → Thru Nodes：逐一點選以兩個節點為一組之節點來建立彈簧元素，亦可由迴圈程式輔助完成此重複性動作。
8. Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → on Node：逐一點選音圈、懸邊部份的位置建立 Keypoints。
9. Preprocessor → MeshTool：選擇音圈、懸邊、彈波的元素參數。
10. Preprocessor → Coupling/Ceqn → Coincident Nodes：選取彈波以及彈簧固定端 nodes 限制其自由度。

建立完成的模型(如圖 3-1 所示)。到此前處理即算完成，接下來可以做模態分析或是聲壓分析部分。

首先說明模態分析部分：

11. Solution → Analysis Type → New Analysis：選擇分析型態，自然頻率模態分析點選“Modal”。
12. Solution → Analysis Type → Analysis Options：No. of modes to extract 為要分析的模態個數。

13. Solution → Solve → Current Ls : 求解。
14. General Postproc → Results Summary : 列出所有的自然頻率。
15. General Postproc → Read Results → By Pick : 選出想看 Mode Shapes 的自然頻率。
16. General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu : 再選 Nodal Solution → Z-Component of displacement , 列出 Z 方向的位移。

即可得到自然頻率及模態。

分析聲壓部分如下：

11. Solution → Analysis Type → New Analysis : 選擇分析型態，簡諧頻率響應分析點選“Harmonic”。
12. Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Nodes : 在位於音圈位置上的節點施予 Z 方向且相角為零之推力。
13. Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Damping : 輸入系統阻尼 α 、 β 的值。
14. Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Freq and Substps : 輸入欲分析頻率響應之頻寬。
15. Solution → Solve → Current Ls : 求解。
16. TimeHist Postpro → List Variables : 輸出振動板模型全部節點的振幅及相角。

由上面簡諧激振分析可得到以下資料：

1. 節點編號 NodeNo(i)及位置 $x(i),y(i),z(i)$
2. 第 i 節點在第 j 頻率的振幅 $Amplitude(i,j)$ 及相角 $phase(i,j)$

3-2 ANSYS 模擬分析中各參數之取得

ANSYS 分析模擬上的質點元素、彈簧元素的各參數和模擬音圈激振的施力皆可由實驗取得。如圖 3-2、表 3-2 為圓形平面振動板揚聲器的阻抗圖和參數值，以下的討論將使用到參數值中的 M_{ms} 、 C_{ms} 和 BL 值，其實驗過程將在第五章中做敘述。而系統 α -damping 和 β -damping 也可從阻尼量測實驗中陳述的方法取得。

3-2.1 質點元素的參數

質點元素方面，音圈、支承材料質量可在組裝前直接以電子秤量測，然後將振動板、音圈、支承材料的所有的質量加總再和參數值中的 M_{ms} 值作比較和驗證，實驗中量測加總的質量和 M_{ms} 的值是吻合的，其中 M_{ms} 值是揚聲器振動板系統之重量，因此可以確認所有的質點元素的參數值是可以給定的。

3-2.2 彈簧元素的參數

彈簧元素方面，彈簧彈性係數的給定可由參數中的 C_{ms} 值計算出來，其中， C_{ms} 值指的是系統柔度 (compliance) 即每牛頓力將可產生的位移。由參數中 $C_{ms}=1312.4$ ，所以：

$$\text{彈簧彈性係數 (k)} = 10^6 / C_{ms} = 10^6 / 1312.4 = 761.96$$

單位：(牛頓/公尺)

3-2.3 激振力的給定

激振器施力方面，第五章中有提及激振力 $F=BLI$ ，而 BL 值也可由參數中取得， I 值為流過激振器線圈的電流，由於線圈阻抗 R 可由三用電錶量出，而本文量測聲壓時使用標準的量測功率為一瓦，再由公式 $W=I^2R$ (其中 W 為功率， I 為電流， R 為阻抗) 即可計算出 I 值，因此分析中激振力也是可給定的。

3-2.4 阻尼比的給定

如圖 3-3 為阻尼量測試驗時量測振動板中心點各頻率的位移圖，文獻 [21] 中有討論以不同之阻尼比比較聲壓曲線研究，發現阻尼比對聲壓曲線並無嚴重之影響，且 α -damping 對低頻影響較大對高頻沒什麼影響而 β -damping 對高頻影響較大對低頻沒什麼影響，因此，本文取了兩個頻率來計算 α -damping 和 β -damping。其中，包括低頻的第一個自然頻率(如圖 3-3a) 忽略 β -damping 的影響來計算 α -damping，還有在高頻區 10KHz 之後找一個明顯的突起(如圖 3-3b) 忽略 α -damping 的影響來計算 β -damping。在第一個自然頻率忽略 β -damping 的影響來計算 α -damping 由式 2-47、2-48 可得：

$$\xi = \frac{(68-41)}{(68+41)} = \frac{\alpha}{4\pi \times 54} \quad (3.1)$$
$$\alpha = 168.04$$

在 10KHz 後自然頻率忽略 α -damping 的影響來計算 β -damping：

$$\xi = \frac{(10730-9150)}{(10730+9150)} = \frac{\beta \times 2\pi \times 10270}{2} \quad (3.2)$$
$$\beta = 2.46 \times 10^{-6}$$

3-3 聲壓的計算及應用

依照上述 3-1、3-2 節中敘述的 ANSYS 模型建立的方式和建立 ANSYS 模型過程中需要參數的取得，所建立的 ANSYS 模型做簡諧激振分析，可以得到振動板上各節點的座標和各頻率下各節點的振幅、相角(如 3-1.2 節中的結果所述)，將以上 ANSYS 模擬得到的數據代入本節所推導的聲壓公式，即可得到振動板在各頻率下的聲壓，即可依此畫出聲壓曲線。

對平面波而言，一維波動方程式為

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

其中 c 為聲音之速度，在常溫 24°C 時， $c=343\text{m/s}$ 。利用特徵曲線法(method of characteristics)可求得

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

上式 f_1, f_2 為任意函數，對於諧波聲場，可直接求解

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{p} = 0 \quad (3.4)$$

令 $k = \frac{\omega}{c}$ ，為波數(wave number)，可求得

$$\tilde{p}(x) = \tilde{A}e^{-ikx} + \tilde{B}e^{ikx} \quad (3.5)$$

還原成時間域的表示法

$$p(x, t) = \tilde{A}e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.6)$$

其中 \tilde{A} ， \tilde{B} 為未定複數，對於點聲源而言，3-D 波動方程式在球面座標(spherical coordinate)為

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

因為點聲源是一個完全對稱的聲源，所以我們可以預期它所產生的聲場應該不會有方向性，所以可忽略與角度相關的項，所以式(3.7)可以簡化成

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

其中 r 為點聲源距量測點的距離。

將上式改寫成：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = \frac{1}{r c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rp)$$

故

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

觀察(3.9)式的形式，可以發現它的形式和前面的一維波動方程式是一樣的，所以其解為

$$rp = f_1(r - ct) + f_2(r + ct)$$

所以

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct) + \frac{1}{r} f_2(r + ct) \quad (3.10)$$

而一個點聲源只會發出外傳波(outgoing wave)，

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct) \quad (3.11)$$

對於簡諧球面波(harmonic spherical wave) 而言，

$$p(r, t) = \frac{\bar{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.12)$$

對面積為 δs 的微小振動板而言，距離振動板 r 的聲壓可由 Rayleigh's first integral 計算出來，積分形式如下

$$p(r,t) = \left(\frac{i\omega\rho_{air} u_d \delta s}{2\pi r} \right) e^{[i(\omega t - kr)]} \quad (3.13)$$

對一塊振動板而言，聲壓為：

$$p(r,t) = \frac{i\omega\rho_{air}}{2\pi} e^{i\omega t} \int_s \frac{u_d(r,t) e^{-ikr}}{r} dS \quad (3.14)$$

設 $A_d(r,t) = Ae^{i(\omega t - kr)}$ ，則 $u_d(r,t) = i\omega Ae^{i(\omega t - kr)} = i\omega A_d(r,t)$

所以

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} e^{i\omega t} \int_s \frac{A_d(r,t) e^{-ikr}}{r} dS \quad (3.15)$$

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} \sum_i A_d(r_i,t) \times e^{i(\omega t - kr)} \frac{\Delta S}{r_i} \quad (3.16)$$

$$p(r,t) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} \sum_i (A_d(r_i,t) \times \cos(\omega t - kr_i)) \frac{\Delta S}{r_i} \quad (3.17)$$

現在假設聲源的力是簡諧激振的模式，並且其簡諧激振響應的解採用穩態解。並考慮聲音接收處是位於垂直中心點 r 處，接收時間考慮使用的頻率區間，則：

$$P(freq.) = \frac{-\omega^2 \rho_{air}}{2\pi} \sum_i (A(x_i, y_i) \times \cos(\theta_i - kr_i)) \frac{\Delta S}{r_i} \quad (3.18)$$

其中 $p(r,t)$ 為量測點與振動板距離 r 處的聲壓， ρ_{air} 為空氣密度， $u_d(r,t)$ 為振動板表面元素之速度大小， $A(x_i, y_i)$ 為振動板表面元素之振幅大小， ω 為當時之激振頻率， θ_i 為板子當時之相位角， r_i 為量測點與振動板表面元素 ΔS 之距離(如圖 3-4)， k 為波數($\frac{\omega}{c}$)， $i = \sqrt{-1}$ 。其中 $A(x_i, y_i)$ 、 θ_i 、 r_i 的結果可由有限單元分析軟體 ANSYS 進行簡諧激振響應分析得到。

在實務上，通常量測聲音使用的尺度是分貝(decibel)符號是(dB)，它基本上是一個對數尺度(log scale)，採對數尺度主要原因是聲音的動態範圍非常大，同時人耳對音量的感覺也是比較接近對數尺度。

聲壓位準(Sound Pressure Level)

$$\text{SPL} = 20 \log\left(\frac{|P_{\text{rms}}|}{P_{\text{ref}}}\right) \quad (3.19)$$

P_{rms} 為量測點聲壓之均方根值為

$$P_{\text{rms}} = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |p(r, t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

聲壓參考值 $P_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5} \text{ pa}$

一般在測量聲壓的儀器看到的聲壓曲線即為頻率響應曲線，縱軸為(dB)，橫軸為激振頻率。

3-4 ANSYS 模型之驗證

3-4.1 模擬元素的選擇

由參考文獻[2]中的板結構驗證，其尺寸為延著纖維方向為 1.83 公尺、垂直纖維方向為 1.22 公尺、厚度為 0.0064 公尺，材料常數和密度(如表 3-3)，而其三明治板的邊界條件為簡支承(simple support)。以此相同的尺寸、材料常數、支承條件，再以不同的 ANSYS 元素作自然頻率的模態分析取其前六個頻率與文獻中的結果做比較(如表 3-4)。由表中比較結果可得，理論基礎為一階剪變形的元素 Shell99 分析結果一致。

3-4.2 非線性懸臂梁模擬的驗證

因使用最佳化程式去設計彈性支承的過程有使用 ANSYS 作彈性支承的靜力分析，為了避免在非線性情形下模擬錯誤，故先對 ANSYS 做懸臂梁靜力分析，並與文獻[7]中的問題做比較。分別選用 Beam3 以及 Shell93 對

同樣的懸臂梁做比較，其中長度 L 為 25.4m ， $EI=516.541\text{Nm}^2$ ，在不同施力下之位移經 ANSYS 模擬的結果如表 3-4。表中左為[18]之數據，接下各行分別為 Beam3 未開大變形指令、Beam3 將大變形指令打開以及使用殼元素 Shell93 模擬之靜力模擬數值。由圖 3-5 可知使用 Beam3 且將大變形指令打開以及 Shell93，與文獻[7]之數值非常接近，而小變形之數據僅為線性變化。可知 ANSYS 模擬非常準確，故接下來對彈性支承的幾何形狀做最佳化分析時將使用 Beam3 且將大變形指令開啟，而對揚聲器聲壓模擬之片狀彈性支承使用 Shell93。

3-4.3 聲壓模擬的驗證

經由前面兩節陳述可得知整個揚聲器的振動系統在模擬分析上，是由揚聲板 Shell99 的殼元素、音圈由殼元素 Shell99 以及質點元素 Mass21、懸邊由 Spring-damper 14 的彈簧元素和質點元素 Mass21，彈波由殼元素 Shell93 所組成。先選定由傳統彈波製作以純巴桑木為振動板之揚聲器，組裝後量測聲壓曲線。再與 ANSYS 中建立之相同模型，計算出各節點位移與相角，經由聲壓公式計算後所得之曲線，互相比較兩條曲線，如圖 3-5。可得知實驗和分析模擬出來的兩條聲壓曲線有相同的趨勢，由此可實驗驗證出此 ANSYS 模型是具參考價值的，雖有些許的不同但趨勢大致上是相同的，其主因為巴桑木為天然材料，材料常數並非一穩定值。

四、最佳化總域極小化理論

「最佳化方法」是指找出問題其「最好的解決方案」的方法。此法已被廣泛運用在解決數學、應用科學、工程、生物科技、商業和管理等領域的最佳化問題上，例如在工程上，考量產品尺寸選用材料組合、成本、強度等因素；在商業和管理上，有關排班表、投資組合、人員與物流管理等，都是最佳化的問題。另外，尤其是有些領域上的問題是沒有解析解的，或是問題同時有太多的考量因素與條件時，都可以將這些棘手的問題轉換變成數學模式的最佳化問題，再藉由電腦的計算和模擬，而獲得解答。本章將簡明地敘述這個方法及最佳化演算法的基本概念。

有關求解最佳化模型的數值方法，可以沒有限制條件和有限制條件來區分。首先考慮「沒有限制條件」：(一)單變數函數最小值搜尋，這是多變數目標函數最小值演算法的基礎，而其方法有解析解方法求函數一次微分為零的解；若一次微分很難求得、不存在或不連續時，應用數值迭代方式直接求解的零次方法，如二分法的「費邦那西搜尋」(Fibonacci Search)、「黃金分割搜尋」(Golden Section Search)和割線法(Secant Method)；或使用二次方法的多項式近似法之「牛頓法」等。(二)多變數函數最小值搜尋，其方法有「零次方法」的隨機搜尋法、前面提到的「費邦那西搜尋」、「黃金分割搜尋」；或使用一次、二次之直線搜尋(Line Search)法，如「準牛頓法」(Qusi-Newton Method)、「牛頓法」(Newton Method)。接下來則是考慮「有限制條件」：(一)單變數函數最小值搜尋，其方法有直接搜尋法(多項式近似法、費邦那西搜尋法與黃金分割搜尋法)；或懲罰函數(Penalty Function)法配合循序無限制(Sequential Unconstrained)條件最小化技巧，將問題轉換為無

限制條件最佳化問題。(二)多變數函數最小值搜尋，其方法有「直接搜尋法」的可行方向法、梯度投影法；應用「懲罰函數法配合循序無限制條件最小化技巧」將原先的有限制條件的非線性問題，轉換成一系列的無限制條件最佳化問題；線性規畫法(Linear Programing, LP)；或是循序線性規畫法(Sequential Linear Programing, SLP)與循序非線性規畫法(SNLP)等。

4-1 最佳化設計

在工程設計上，整個設計的流程其實很自然的包含了迴圈形式的迭代過程。設計者經由不斷地深入了解問題，思考解決方法、而產生了各種新的方案，再藉由不斷的試驗評估其可行性，最後在有限的時間和資源條件限制下，找出一個最好的解決方案，而這其實就正是最佳化設計的流程。最佳化設計乃是尋找一組變數 x ，而 $x \in X \subset R^n$ ，使得在受某些限制條件下或在不受限制條件的系統模式(目標函數) $F(x)$ 能夠達到最佳性能(目標函數之最大值或最小值)。最佳化設計的程序，是先經由有系統的整理相關領域知識後，再將實際問題建立成正確的最佳化數學模型，再以數值方法求解最佳的解，數值方法概以沿著搜尋軌跡做反覆迭代來改變設計變數的值以達到目標函數之最佳解。而最佳化設計其數學標準形式描述如下：

$$\text{Minimize } F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

$$\text{s.t. } h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中 n 、 p 和 m 分別為設計變數、等式限制條件及不等式限制條件之數目，

x_{il} 和 x_{iu} 則為設計變數之合理上、下限制容許值(Lower Bound and Upper Bound)。

而本文研究之片狀彈性支承幾何形狀設計，牽涉到相當多的變數，且目標函數為非線性，都增加了總域極小值收斂的困難及不可靠度。因此，文中將應用廣義拉格蘭吉乘子法(Augmented Lagrange Multiplier Method)將原始受限制條件問題先轉變成無限制條件的問題，再配合隨機多起始點的方法(Multi - Start Method)及貝氏分析法(Bayesian Approach)所發展的總域極小值演算法[10]進行最佳化設計。此演算法是基於運動質點在保守力場中能量守恆觀點，在無限制條件下的目標函數 $F(x)$ (即位能值)，應用多起始點搜尋最小位能，若起始點落於 $R^* = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ 內，皆可成功搜尋到目標函數之總域最小值 X^* (如圖 4-1 所示)。



4-2 多起始點方法

一般最佳化方法，是採用單起始點方式來搜尋極小值，而其所獲得之極小值亦僅是區域局小值，並無法確認是否獲得總域之極小值。而本文之方法正是要改善此一困境，利用隨機多起此點搜尋方式，可以增加搜尋獲得上、下限範圍內之各個區域極小值的機會。且以能量守恆的觀念來計算出目標函數值(亦即為質點位能)，其迭代過程容許目標函數些微上升的解，使目標函數可從區域極小值中跳脫，找到總域極小值，詳如 4-3 節之區域極小化程序所述。

在最佳化設計中取多起始點的方法，乃是針對設計變數 x_i 的合理區間(上、下限)內，利用隨機取樣的方式取出一系列的起始點，並且以此為開始

做搜尋軌跡方式，找出其區域極小值。而在文中取多起始點的方式，乃應用 IMSL 軟體的 RNUN 副程式，對設計變數 x_i 於上、下限區間範圍內，以隨機取樣的方式選取初始猜測值。如此我們可以找出一些區域極小值 F_j 以及對應的區域極小點 x_j 。接著我們要從中找尋總域極小值 F^* ，其須滿足下列的式子：

$$F^* = \min\{F_j\} \quad (4.2)$$

4-3 區域極小化程序

由多起始點之方式，隨機找出初始值 x ，而 $x \in X \subset R^n$ ，使用搜尋軌跡方式是基於單位質量的質點在 n 維保守力場中的運動方程式及初始條件而來，如下所示：

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\Delta F(x(t)) \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

然後以能量守恆的觀念來計算出目標函數值，其中 $F(x(t))$ 為質點位能，也是計算中的目標函數(如圖 4-1 所示)， \dot{x} 、 \ddot{x} 分別表示質點在 n 維空間上的速度與加速度。

將(4.3)式乘以 $\dot{x}(t)$ ，可以得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 \right) = -\nabla F^T(x(t)) \dot{x}(t) \quad (4.4)$$

再將(4.4)式對時間 t 做積分，範圍從 0 到 t ，便可得到能量守恆關係式。如下列式子所示：

$$\frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 + F(x(t)) = \frac{1}{2} \|\dot{x}(0)\|^2 + F(x(0)) = F(x_0) \quad (4.5)$$

下列以三個條件來判別質點行進方向或停止搜尋：

(1) 當條件式 $-\nabla F^T \dot{x} > 0$ 成立時：

當質點的加速度與速度分量乘積合為正時，可視為加速度與速度是同方向，表示質點將沿著搜尋軌跡下降最快的方向移動。此時位能減少，則動能持續增加，而目標函數值將會降低，質點行進方向以迭代法來改變，所以 x 值經過 k 次迭代後的改變值如下：

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \dot{x}_k \Delta t \\ \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k - \nabla F(x_{k+1}) \Delta t\end{aligned}\quad (4.6)$$

其中； x_0 ， \dot{x}_0 及時間步階 Δt 皆已給定。所以由上式亦可滿足近似之能量守恆關係：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|\dot{x}_{k+1}\|^2 + F(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} \|\dot{x}_k\|^2 + F(x_k) + \frac{1}{2} \|\nabla F(x_{k+1})\|^2 (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Delta x_k)^T H(\tilde{x}) \Delta x_k\end{aligned}\quad (4.7)$$

其中； $H(\tilde{x})$ 為黑森矩陣 (Hessian Matrix)。

$$\tilde{x} = x_{k+1} - \Delta x_k r \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (4.8)$$

(2) 若條件式 $-\nabla F^T \dot{x} < 0$ 成立時：

表示質點的加速度與速度是反方向，此時表示質點位能增加，則動能減少，所以質點軌跡移動的方向應往相反方向搜尋。

(3) 臨界點的判斷：

若以 F_t 當做在此搜尋軌跡中所找到的最低位能，且目標函數滿足下列兩個條件之一時，就得終止搜尋軌跡，並將此軌跡當做區域最小值的變數值。其目標函數滿足的兩個條件之一如下：

$$F(x(t)) - F_t > \alpha(F(x_0) - F_t)$$

$$T = \frac{1}{2} |\dot{x}_{k+1}|^2 < (1 - \alpha)(F(x_0) - F_t) \quad (4.9)$$

其中 α 為給定之參數值，而在本文中 α 值為 0.95，區域極小化流程如圖 4-2 所示。

4-4 總域極小化理論

藉由多起始點方法及區域極小值的計算，可得到一系列的區域極小值。再利用貝氏分析方法(即為(4.10)不等式)做為判斷的標準，來決定總域極小值，總域極小化流程如圖 4-3 所示。其方法為先找出第一個區域極小值 $F(x)$ ，然後再依照尋找區域極小值的方法找出區域最小值 $\hat{F}(x)$ 。將 $\hat{F}(x)$ 值與 $F(x)$ 值做比較取較小值，再從比較之中找出一個臨時總域最小值 $F^*(x)$ 。在尋找過程中，區域極小值 $\hat{F}(x)$ 落在臨時的總域極小值 $F^*(x)$ 的收斂範圍內則算成功一次。所以在 n 次的隨機取樣次數中，若有 r 次均落在 $F^*(x)$ 值的收斂範圍內時，且機率大小必需滿足(4.10)不等式，則可將 $F^*(x)$ 視為總域極小值 $\bar{F}(x)$ 。

$$\Pr[\bar{F}(x) = F^*(x)] \geq q(n, r) = 1 - \left[\frac{(n+1)!(2n-r)!}{(2n+1)!(n-r)!} \right] \geq q^* \quad (4.10)$$

其中本文取 q^* 之值為 0.99。當時 $q(n, r) \geq q^*$ 則視為收斂，則可得到總域極小值 $\bar{F}(x)$ 及其對應之最佳設計變數值 x 。

4-5 廣義拉格蘭吉乘子方法

廣義拉格蘭吉乘子法(Augmented Lagrange Multiplier Method)(簡稱 A. L. M.)[13]其主要的目的是要將原始問題中的等式及不等式的限制條件先加上放鬆變數，再與等式限制條件，各別乘上一個拉格蘭吉乘子，加入原始的目標函數中，如此原始具限制條件的目標函數 $F(x)$ ，將變成無限制條件的新目標函數 $\underline{\psi}(x, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \gamma_p)$ ，A.L.M.區域極小化流程如圖 4-4 所示。本文研究是以 A.L.M.、多起始點、總域極小化理論程序，將其運用在碳纖彈性支承的幾何形狀設計。



五、片狀彈性支承之最佳設計

平面揚聲器振動板主要以振動板的剛體運動與振動板的變形兩種效應產生聲音，也因為激振器推動振動板，使振動板表面元素推動空氣產生振動，進而產生聲壓。由於振動板之振形有凹有凸(如圖 5.1)，所以產生之空氣速度亦有正有負，因此聲壓才有高低起伏的現象。一般在 1000Hz 左右會產生一個起伏較大的聲壓變化，稱之為中音谷，在一條平滑的聲壓中，中音谷的出現將使聲音在此部份聲壓下降，導致揚聲器無法表現出所有頻率的聲音而影響揚聲器的品質。

揚聲器單體的基本結構(如圖 5.2)可分為振動板、音圈、磁鐵、懸邊以及彈波。由電磁學的電能轉為力學能的公式為

$$F=IBL \quad (5.1)$$

其中 F 為激振力(N)，B 為磁場大小(Tesla)，I 為電流大小(A)，L 為線圈長(M)振動板由音圈電磁力產生推力 F，來激振揚聲器振動板。而懸邊與彈波主要功能為維持揚聲器穩定振動，也是影響揚聲器彈性係數的主因。

在剛體運動方面，可由振動學的單一自由度公式：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5.2)$$

估算最低共振頻率 f_0 ，其中 K 為系統之彈性係數、M 為系統質量。聲壓-頻率曲線在 f_0 之後開始有較平穩的聲壓值表現，故稱 f_0 為一個揚聲器的實效頻寬起始點。且 f_0 之後彈簧的影響降低，而剩振動板質量、剛性與力量的物體運動關係，所以在一定的激振力下降低彈性支承的彈性係數、增加振動板的剛性和減低質量將是改善揚聲器使其聲壓-阻抗曲線更加平緩的關

鍵。本章內容先介紹彈性支承的功能、傳統彈波及以往彈性支承的缺點，接著陳述片狀彈性支承幾何形狀的最佳化，並將最佳化製作出的彈性支承與以往的比較其改善情形。

5-1 彈性支承之功能

在傳統錐盆揚聲器中，懸邊以及彈波是主要影響彈性係數的結構，除了讓錐盆能夠藉音圈的控制而前後運動，並且使錐盆能在運動完畢後歸回原位，簡而言之，支承的主要功能就是兼具彈性、定向和定位。一個好的揚聲器彈性支承的彈性係數要越小越好，使得揚聲器的起始頻率 f_0 下降，但是越低的 f_0 將造成越大的振幅，且運動過程中的穩定度勢必大大的下降，一個好的揚聲器支承的設計，就是在降低振動系統 f_0 為前提下，能保持振動板定向穩定運動，且在往復過程中能將振動板和激振器之間定位，使音圈不至於和磁鐵產生磨擦，而產生不穩定的運動，並且在低頻的大振幅下，能給予振動板穩定的支承力，使得揚聲器在低頻時能有更真實的表現。

彈波為定位音圈使其在磁隙中穩定運動的機構，而其作法通常是以纖維布加上適量膠壓製，為了增強其彈性，設計成具波浪紋路，如圖 1-3。但當揚聲器需要更大的衝程時，彈波的直徑勢必要增長，較不適合長形揚聲器之製作，且在低音承受稍大一點振幅時，及呈現出明顯的非線性的彈性變化(如圖 5-3)，這對揚聲器低音的原音重現有非常大的不良影響。由於揚聲器作動時為往復的週期運動，所以彈波本身要能夠有良好的抗疲勞性，傳統彈波在長時間振動下其不織布以及熱塑膠會有龜裂現象影響其彈性與定位效果，而且彈波黏著於音圈上，會將重量附加於其上，為了使聲

壓位準有較高之表現，所以必須選擇質量輕的材料。綜合以上，彈性支承材料的選擇有兩大重點，一為抗疲勞性；二為質量輕。先前的設計為使用塑膠薄片作為支承材料，但其不耐疲勞，若經常時間振動，塑膠片容易會在轉折處發生破裂而導致失效。因此，最後的材料選為由碳纖與 PE 薄膜所組成之複材結構，其滿足了耐疲勞與質量輕之兩大重點。

5-2 碳纖片狀彈性支承

先製作幾何形狀簡單的冂字型支承，製作方式如下：

1. 首先由冷凍庫中取出複合材料預浸材，並在室溫下靜置 12~14 小時。
2. 將預浸材依需要的疊層數目、角度和大小剪裁、堆疊。
3. 在鐵板上依序放置輔助材及複合材料(如圖 5-4)，並抽真空，再將模具送上熱壓機(如圖 5-5)，依加溫時間-溫度關係及溫度-壓力關係(如圖 5-6)來控制複合積層板成型條件。
4. 等時間一到，關掉熱壓機的溫度，使模具在室溫下自然冷卻，待冷卻到室溫時，再將碳纖支承取出，即製作完成，如圖 5-7。

依上述方法即可製作出所需的彈性支承，而這種冂字型彈性支承也能提供良好的彈性。但經拉伸實驗發現，冂字型支承有一缺點為，振動板往外與往內之彈性係數並不一致，如圖 5-8。振動板往外時，由於冂字型支承垂直段受拉力不易變形，只能藉由水平段提供變形，如此導致彈性係數較大，而往內時，冂字型支承垂直段受壓力會往側向彎曲，增加了柔軟度，因此導致彈性係數較低。在彈性支承往外與往內彈性係數不同之情況下，振動板運動並不對稱，如此會使聲音聽起來有跳動的感覺。

為解決此問題，於是在冂字型支承水平段上增加了波浪設計，提高其

變形能力，依照同樣方式壓制出波浪形彈性支承(如圖 5-9)，經由實驗後發現，往外與往內之彈性係數在衝程為 2.5mm 以內相當接近(如圖 5-10)，但在 2.5mm 以後已仍然有非線性的現象造成往內與往外之彈性係數不同。

5-3 彈性支承幾何形狀之最佳化設計

由 5-2 節可知碳纖彈性支承的幾何形狀會造成彈性係數在運動方向往內以及往外時不同，使得振動板運動不對稱，本節將利用第四章之最佳化理論，找出最佳之幾何形狀。

5-3.1 最佳化法之建立

$$\text{Minimize } e(\tilde{x}) = [K_1 - K_2]^2 \quad (5.3)$$

$$\text{Subject to } \begin{aligned} x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U && ; \quad i = 1, \dots, 5 \\ y_j^L &\leq y_j \leq y_j^U && ; \quad j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

(5.3)式為最佳化之目標函數，其中 $x_1 \sim x_5$ 為片狀彈性支承之 x 座標點， y_1, y_2, y_3 為 x_1, x_3, x_5 的 y 座標(如圖 5-11)，將這些設計變數各以四分之一 \sin 函數連結為一曲線，即為片狀彈性支承之形狀，其中寬度為 7mm，厚度為 0.15mm 的單層碳纖材質，其材料常數如表 3-1 所示。接著將此曲線匯入 ANSYS 以 Beam3 模擬為近似曲線且開啟大變形選項，將一端固定且另一端施力 $F = 1.0N, -1.0N, 0.5N, -0.5N$ ，匯出位移量 A, B, C, D (如圖 5-12)。計算力與位移之斜率即可知道 K_1 及 K_2 ，其中 $K_1 = \frac{2}{A-B}$ 、 $K_2 = \frac{1}{C-D}$ ，目標函數為在固定施力下力與位移仍然保持在彈力線性範圍內，故取彈性係數差之平方值為最小。因為空間限制， x_i^L, x_i^U 為彈性支承設計變數的上下限，分別設定如下：

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq 30mm \\ 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 5mm \end{aligned} \quad (5.4)$$

此外我們期望 f_0 介於 50~60Hz 之間，利用(5.2)式估算，可以得知單一片狀彈性支承之彈性係數之限制範圍如下：

$$103 \leq k_{beam} \leq 157(NM) \quad (5.5)$$

完成目標函數、設計變數與限制條件之建立後，接下來是利用 A.L.M. 的方法，將上述限制性問題轉化為新的目標函數 $\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\gamma}_p)$ 無限制條件之多起始點總域極小值問題；可以寫成：

$$\underline{\Psi}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\gamma}_p) = e(\underline{\tilde{x}}) + \sum_{j=1}^n [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \quad (5.6)$$

其中

$$\begin{aligned} z_j &= \max \left[g_j(\tilde{x}_j), -\frac{\mu_j}{2\gamma_p} \right], & g_j(\tilde{x}_j) &= \tilde{x}_j - \tilde{x}_j^U \leq 0 \\ \phi_j &= \max \left[H_j(\tilde{x}_j), -\frac{\eta_j}{2\gamma_p} \right], & H_j(\tilde{x}_j) &= \tilde{x}_j - \tilde{x}_j^L \leq 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

其中 μ_j, η_j, γ_p 為拉格蘭吉乘子； $\max[*,*]$ 表示取括號中之最大值。而拉格蘭吉乘子疊代方程式如下：

$$\begin{aligned} \mu_j^{k+1} &= \mu_j^k + 2r_p^k z_j^k \\ \eta_j^{k+1} &= \eta_j^k + 2r_p^k \phi_j^k \quad j = 1, \dots, n \\ r_p^{k+1} &= \begin{cases} \gamma_0 r_p^k & \text{if } r_p^{k+1} < r_p^{\max} \\ r_p^{\max} & \text{if } r_p^{k+1} \geq r_p^{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8)$$

k 表示疊代次數，而各個疊代起始值，經由多次理論模擬分析得到最佳的設定值如下：

$$\begin{aligned} \mu_j^0 &= 1.0 & \eta_j^0 &= 1.0 & j &= 1, \dots, n \\ r_p^0 &= 0.4 & \gamma_0 &= 2.5 & r_p^{max} &= 100 \end{aligned} \quad (5.9)$$

此外為避免某些設計變數在搜尋目標時跨步大小有差異，造成其他設計變數在最佳化演算程序中不靈敏而造成誤差，將設計變數修正如下：

$$\tilde{x} = \left[\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, \frac{x_3}{\alpha_3}, \frac{x_4}{\alpha_4}, \frac{x_5}{\alpha_5}, \frac{y_1}{\alpha_6}, \frac{y_2}{\alpha_7}, \frac{y_3}{\alpha_8} \right] \quad (5.10)$$

其中修正係數設定如下，使其值介於 0~5 之間：

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8) = (6, 6, 6, 6, 6, 1, 1, 1) \quad (5.11)$$

上述 A.L.M 程序經設計變數修正後，在最佳化程序搜尋目標函數下降最快方向與質點跨步，均在最適情況。而設計變數係數的修正僅在極小化程序中進行，並不影響 ANSYS 之靜力分析模擬。

本文最佳化演算程序採多起始點，首先對所有設計變數其合理的上、下限區間(5.4)式內，配合多起始點方法及貝氏分析法所發展的總域極小值演算法，且隨機取樣選取起始點，經由第四章敘述之方法搜尋找到總域極小值時，亦即其貝氏分析之可靠度達 $\text{Pr} \geq 0.99$ 時停止搜尋，完成彈性支承最佳化程序。

5-3.2 彈性支承設計與拉伸實驗結果

經 A.L.M. 總域極小化演算程序，由 IMSL 套裝軟體副程式 RNUN 以隨機方式產生不同的 4 組起始點，每組約需要 10~12 次的迭代，當機率達 $P > 0.99$ 時即視為搜尋到總域極小值，並終止演算程序。下列為第一個由隨機選取之起始點

$$x_i = (1.650, 10.679, 23.747, 26.801, 27.811) \quad i = 1 \sim 5 \quad (5.12)$$

$$y_j = (0.715, 4.529, 4.099) \quad j = 1 \sim 3$$

經由最佳化方法搜尋獲得第一組區域極小值，並計算其機率值 P；最後經歷五次前述程序，搜尋獲得第四組區域極小值(如表 5-1 所示)。此時，其機率值為 0.9918，已經達到 $P > 0.99$ ，記錄設計變數之總域極小值如下：

$$x_i = (4.317, 6.614, 9.342, 12.254, 14.085) \quad i = 1 \sim 5 \quad (5.13)$$

$$y_j = (4.426, 1.593, 2.425) \quad j = 1 \sim 3$$

藉由表 6-6 可以明顯看出，本文之總域極小化演算法對於總域極小值解之搜尋能力，雖然經由隨機方式產生不同的 4 組起始點，每組各經歷 10~12 次的迭代，但最後他們所得之區域極小值皆是同一點，因此在完成第四組搜尋時，即滿足了貝氏分析法機率大於 0.99 的條件，因而將此極值視為總域之極小值。應用最佳化程式去設計片狀彈性支承之結果得(5.13)式之設計變數之數值，將其匯入 ANSYS 可得如圖 5-13 形狀之片狀彈性支承。其 ANSYS 模擬之力與位移關係可得表 5-2 與圖 5-14，可發現 K1 及 K2 非常接近，在振幅 7mm 內彈性係數近乎線性範圍，且 K1、K2 均在限制條件範圍下。

將最佳化得知形狀以碳纖為材料依照 5-2 節知方法熱壓而成(如圖 5-15)，並使用拉伸實驗機量測力與位移關係，可得圖 5-16，與傳統彈波(圖 5-3)以及 5-2 節實驗之 U 字形(圖 5-8) 與波浪形彈性支承(圖 5-10)比較，可知幾何形狀經最佳化設計之片狀彈性支承在振幅 6mm 下之拉伸實驗，其力與位移變化幾乎為線性且正反方向彈性係數相近，大大的改善前述彈波的缺點。

六、 平面揚聲器之研製與實驗

本章將說明各項實驗儀器、測量方法以及圓形振動板平面揚聲器的製作過程，並經由 ANSYS 模擬找出振動板在各頻率的振形，以及中音谷產生的原因，以及使用立體加勁的方式探討其改善的效果，最後以實驗驗證之。

6-1 揚聲器製作

6-1.1 彈性矽膠懸邊之製作

懸邊的主要功能除了使振動板穩定外，還需要有良好的氣密效果，避免振動板內側之聲音因相位與外側不同造成聽覺影響，因矽膠具有良好的伸縮性，且不會因為環境濕氣影響造成變質，故我們選用具膠質的不織布與矽膠熱壓成形，其製作方法如下：

1. 首先裁切適當大小之不織布。
2. 不織布下方貼放一層 PE 薄膜，以防止矽膠污染桌面，並於兩側放置 1mm 的玻纖墊片，擠出適量之矽膠於不織布上，以刮刀將矽膠平整的塗布於不織布上。
3. 將塗布矽膠後之不織布，以 120°C 乾烤十五分鐘，以加速其硬化時間。
4. 將塗布矽膠後之不織布，至入懸邊模具中，至入熱壓機中加壓成型，待冷卻後，即可將懸邊取出，如圖 6-1。

6-1.2 音圈與場磁鐵之製作

音圈與場磁鐵部份為設計好尺寸高度再委託，其尺寸如表 6-1、6-2 所示。其中 d_1 為內徑、 h 為音圈全高、 t_v 為捲幅。

6-1.3 平面揚聲器之製作

1. 由上敘述將彈性支承、矽膠懸邊、音圈、振動板等零件備妥，即可一下列步驟組裝為平面揚聲器。
2. 將振動板與外框固定於定位器中，並以音圈定位器將音圈黏著於振動板上。
3. 將音圈外環以適當高度黏於音圈。
4. 用定位器將碳纖彈性支承黏於音圈外環。
5. 在將懸邊黏著於振動板與外框，等待黏著劑乾燥固定，即完成揚聲器製作，如圖 6-2。

6-2 揚聲器各種實驗程序

6-2.1 阻尼量測實驗

本實驗使用 B&K 的 PULSE 頻譜分析儀和雷射測速儀進行振動板之頻率-響應量測，並藉由 Bandwidth Method 來計算各激振頻率之系統阻尼比。

(一)基本設備有：

1. PULSE 信號收集及處理器
2. PULSE 軟體
3. Polytec OFV350 雷射測速儀
4. Polytec OFV2500 測速儀控制器

5. 個人電腦
6. 組裝好之平面揚聲器

將儀器如圖 6-3 所示架設。

(二) 實驗程序：

1. 將待測之平面揚聲器放置在一固定台上。
2. 啟動 PULSE 程式，設定好量測頻寬、解析度、激發方式、訊號模擬方法等。
3. 先將 OFV2500 控制器接上 OFV350 雷射測速儀對平面揚聲器進行對焦，盡量使控制器接受訊號強度達到最大，再將 PULSE 訊號分析儀之訊號(輸出電壓)經電纜線接到激振器上。
4. 驅動激振器，並將傳回的訊號分析處理，由於所傳回之訊號為振動板之速度，需要將訊號對時間做一次積分以便得到振動板的位移響應。
5. 利用 Bandwidth Method 處理振動板之位移響應，以得到某自然頻率之阻尼比。

6-2.2 聲壓量測實驗

聲壓量測以 LINEARX 公司出的 LMS 聲壓測試系統。

(一)設備介紹如下：

1. LMS 聲壓測式系統(內含寬頻雜訊產生器、聲壓頻譜分析)
2. 桌上型電腦
3. 訊號放大器(Amplifier)
4. 麥克風

將揚聲器如圖 6-4 所示般架設在障板上。

(二) 量測步驟如下：

1. 將揚聲器架設妥當。
2. 軟體內部校正及外部校正，並將環境設定完成(如：測試頻寬、測試速度、解析度)。
3. 麥克風放置在離揚聲器中心一公尺外之同一高度腳架上(標準量測距離及功率為 1M：1W)。
4. 待一切準備就緒，啟動電腦發出訊號，由麥克風接收聲壓訊號，傳回電腦。
5. 將曲線平滑處理，平滑的參數是 1/3(Octave Width to Smooth By 0.3333)，即可得出頻率響應之聲壓分貝圖。

6-2.3 阻抗量測實驗

同上使用 LMS 系統，經過校正後，可量測出揚聲器系統的阻抗圖(如圖 6-5)，圖中阻抗曲線第一個突起的頂峰頻率就是整個揚聲器系統的第一個自然頻率 f_0 。

6-2.4 參數量測實驗

同阻抗量測試驗，量測出第一條同上未加質量時的阻抗曲線，再附加額外的質量黏著在板子中央處，所附加的質量要讓附加質量後量測出的阻抗曲線的第一個突起頂峰頻率較第一條阻抗曲線的第一個突起頂峰的頻率值減少 20%~50%才可計算出準確的參數值，一般來說所附加的質量接近振動板的質量即可在此範圍內。

量測出兩條阻抗曲線後(如圖 6-5)，在 LMS 程式之揚聲器參數計算之視窗(如圖 6-6)選取未加附加質量以及有附加質量之阻抗曲線，輸入音圈阻抗、振動板的面積和附加的質量即可計算出所要的參數。

6-3 中音谷產生的原因

聲音為物體振動推動空氣產生的疏密波，經由耳朵或是麥克風接收所聽到。若揚聲器的振動板為理想的剛體時，振動板受激振並不會產生局部變形，而形成穩定的疏密波，在理論分析中則會是一條平穩的曲線。而實際上揚聲器振動板受激振時，會發生共振模態，使得振動板產生局部的變形，會有不同的振幅與相位，因此振動板不再是一個剛體運動，若當有反相位的振形發生，會減少推動空氣的體積，因而降低了聲壓。因此若當振動板、懸邊與支承在受激振時產生了不同的相位，就會影響聲壓曲線，一般平面揚聲器在中音域由於彎矩模態(bending mode)影響，造成聲壓曲線有大落差，稱為中音谷，本文中所選定尺寸之振動板所製作的平面揚聲器，亦有此問題存在，如圖 6-7 即為碳纖彈波之平面揚聲器聲壓曲線。為了製作更大時效頻寬之揚聲器，則須提高中音谷的頻率及落差問題，因此必須先將中音谷發生的原因探究清楚，於是在 ANSYS 中開始找出何種振動板振形的影響較為嚴重，進而達到改善中音谷之情形。

在第三章中，確定了 ANSYS 模型的正確性，因此開始對振動板與彈性支承的自然頻率開始做討論。依第三章之建模方法，可以將振動板之自然模態求出，圖 6-8 為純巴桑木振動板結合碳纖彈性支承之自然頻率振形圖，與聲壓曲線比較後，可以得知在 1000 Hz 附近有一聲壓落差對照自然頻率可以發現，是由振動板的模態振形 (945 Hz) 所產生的落差，此模態的特

徵為有兩條節線，將板區分成為三塊區域，因此振動板受激振時，形成中間凹下兩側突起的振形。

而分析 500Hz 附近也有一小聲壓落差，對照模態圖中發現此為碳纖彈性支承變形所導致的聲壓落差。為分析彈性支承對聲壓影響的大小，將 ANSYS 之振動板材料常數提高使其為剛體，可得圖 6-9 的剛體振動板聲壓曲線，研究其模態找出與前落差之相同振形，可知在剛體曲線中 1556Hz 之片狀彈性支承振形(如圖 6-10)會使聲壓下降，但是此落差幅度不如振動板變形導致的聲壓落差明顯，且於實驗中此落差之程度較小，因此可先暫且忽略彈性支承對聲壓的影響，由此可以說明揚聲器的中音谷落差的主要原因為振動板的變形所致。

因此，增加振動板的剛性是改善中音谷情形的一個方式，如碳纖三明治振動板。雖然對中音谷的落差有改善，但此種方式會使振動板質量過重，造成整體的感度降低，大大的影響揚聲器發聲的效率，因此本文提出另一種方法可使中低音揚聲器時效頻寬增加，同時不減少揚聲器感度。

6-4 碳纖立體加勁振動板

以往的實驗係利用 ANSYS 找出影響聲壓之振動板振形，再用碳纖黏貼於振動板之特定位置熱壓而成，如圖 6-11。而由材料力學的慣性矩基本觀點(圖 6-12)，在相同面積下，(a)之慣性矩較(b)大且不易變形，因此改變碳纖的黏貼方式也可達到改變系統模態之功能，所以開始對揚聲振動板的碳纖立體加勁討論其對聲壓之影響。

6-4.1 ANSYS 模擬立體加勁

首先說明口字形碳纖立體加勁之位置，如圖 6-13 所示，於振動板之 x、y 軸正負方向加一寬度 10mm、高度 6mm、厚度 0.2mm 之碳纖立體支承，其長度分別為 11mm、19mm、27mm。開始建立 ANSYS 模型，振動板選定為純巴桑木，碳纖加勁支承則以殼元素 Shell99 模擬，經由 ANSYS 模擬可得聲壓曲線(如圖 6-14~16)以及影響中音谷之彎矩模態(如圖 6-17)。

由圖可知當立體加勁長度越長，其振動板剛性越高，中音谷的頻率也往高頻移動，其中音谷發生頻率與聲壓落差值如表 6-1 並將其繪如圖 6-18、圖 6-19。在 11mm、19mm 中，因為加勁碳纖長度增加，中音谷頻率上升、落差也減小，但 27mm 的中音谷落差反而增加，由各個中音谷模態(圖 6-17)可知加勁之後，純巴桑木的彎矩振形已經逐漸改變，但 19mm 以及 27mm 兩者並無太大差異。

接著取 x 軸向加勁長度為 19mm，y 軸加勁長度分別為 0mm、11mm、19mm、27mm，比較不同加勁長度對聲壓之影響，位置說明如圖 6-20，經 ANSYS 分析後可得圖 6-21 及表 6-4；由表可以發現 x 方向固定為 19mm 加勁，隨著 y 方向加勁長度增加，振動板剛性與中音谷頻率也隨之增加與上升，但對中音谷的落差影響不大。

再比較 y 軸向加勁長度為 19mm，x 軸加勁長度分別為 0mm、11mm、19mm、27mm 之不同加勁長度對聲壓之影響，位置說明如圖 6-22，而圖 6-23 為 ANSYS 模擬之聲壓曲線，表 6-5 為中音谷振形與聲壓落差；由圖可以發現 y 方向固定為 19mm 加勁，隨著 x 方向加勁長度增加，振動板剛性與中音谷頻率也隨之增加與上升，而中音谷的落差也有些微的減少，但 x、y 軸加勁至 27mm 時，其中音谷落差均增加。

由上兩個不同方向加勁長度整理可得圖 6-24、6-25。可知在 x 軸改變加勁長度，對影響中音谷之彎矩振形頻率增加較多，加勁長度越長中音谷也隨之下降落差，而 y 方向加勁對中音谷落差改善不如 x 軸加勁靈敏。值得注意的是 27mm 的加勁長度對中音谷落差變大，對照圖 6-17 可知振形在 19mm 加勁之影響已為臨界值，27mm 加勁對振形並無變化，而由文獻[20]可知在邊界有過多質量並不會有效的令中音谷頻率提高，反而使得音谷聲壓落差增加，此立體加勁法也有此現象。此外中高頻的部分，由於 x 方向加勁與巴桑木纖維方向相同，加勁之後如同 E_x 增加，由文獻[21]知 E_x 為主要影響聲壓曲線趨勢之材料常數，故中高頻部分改變較明顯；由於中高頻部分為許多小區域變形，y 方向加勁僅限制少部分區域，故整體趨勢相似，且隨 y 方向加勁長度增加，中高頻曲線漸平緩。

6-4.2 實驗驗證

依照第五章之作法做出口字形碳纖支承，將其黏貼於巴桑木，做成具碳纖加勁振動板，接著製作出揚聲器(圖 6-26)並量測聲壓曲線，得圖 6-27 與 ANSYS 模擬有相同之趨勢，由此可再驗證 ANSYS 模擬之正確性。而圖 6-28 是 19mm 立體加勁板與碳纖三明治板比較，由圖可知兩者中音谷頻率相近，但加勁板整體聲壓均優於三明治板，驗證立體加勁的方法可有效的抑制振動板變形，使其達到碳纖三明治板的剛性，並提高中低音揚聲器之實效頻寬。

實際用最佳化彈性支承實際做出的揚聲器聽音樂時，發覺在低音部分有晃動、不穩定的現象，這個問題在模擬與實驗的聲壓曲線上是反應不出來的。而由之前的 ANSYS 模擬可以發現在 400Hz 左右有碳纖彈性支承在

變形之共振模態(如圖 6-29)，而從之前模擬之純巴桑木共振模態(圖 6-8)也可發現在 176Hz、547Hz 等也有這類碳纖支承變形模態，造成揚聲器在中低音不穩定。為了解決此問題，而且考慮彈性支承在往內、外振動時其彈性係數必須相近，在碳纖彈性支承之上下端加上泡棉以阻止其晃動現象，如圖 6-30，實驗測量其聲壓曲線可得圖 6-31。由圖可知加上泡棉後，對聲壓曲線整體而言並無影響，而振動系統之第一共振頻率會由原本之 56Hz 上升至 64Hz，雖 f_0 略微上升，但卻大大改善原來之晃動、不穩定問題，提高揚聲器之使用功率。



七、 結論與未來研究方向

7-1 結論

由於電視與顯示器的平面化趨勢，所搭配的揚聲器也由傳統的錐盆式揚聲器改為平面式揚聲器。若要使揚聲器的時效頻寬起始點(f_0)降低，且有良好的低音表現，則需要衝程大、彈性係數佳以及能有定位音圈效果的彈性支承。另一重點為平面揚聲器之中音谷問題，要增加揚聲器之頻寬，就必須將振動板剛性增強使其中音谷發生之頻率提高，但碳纖三明治板因重量的關係會使得揚聲器整體感度下降，因此設計揚聲器時必須考慮此二因素。

傳統的彈波會使得 f_0 較高，且要另平面揚聲器有更好的低音效果時，會因波浪紋路的限制使得衝程不足，而在長時間的往復振動下其不織布容易變質而破裂，因此先後研製出口字形及波浪型的碳纖片狀彈性支承，但缺點為在大衝程時振動方向不同其彈性係數也不一樣。故本文利用最佳化程式去設計碳纖片狀彈性支承的幾何形狀，經實驗後， f_0 自 95Hz 降為 50~60Hz，且在不同方向之彈性係數問題已經解決，已經改良先前的設計，且可以利用最佳化程式對不同需求的揚聲器設計適合的彈性支承，由於幾何形狀的緣故，與傳統彈波相比更可解決平面揚聲器的空間利用問題。

為解決中音谷問題，本文提出了在不影響揚聲器感度的前提下，以碳纖條做振動板立體加勁的方式，改變振動板的模態振形，提高中音谷發生的頻率使中低音揚聲器的實效頻寬增加，並探討加勁的長度對聲壓影響。模擬的結果發現，加勁長度有一臨界值，過長的碳纖加勁並不會有效的提高中音谷頻率，而且會令中音谷落差更明顯。而加勁的方向與彎矩變形方

向應配合，本文中影響中音谷之彎矩變形為 y 方向，若 x 方向加勁越長，中音谷頻率會上升且其落差減少，而 y 方向加勁僅影響中音谷頻率，對落差改善不大，而當 x 、 y 方向均加至 27mm 時，振動板剛性並無明顯提高，但中音谷落差變大，由文獻[20]推測可能是在邊界有過多的加勁重量使中音谷落差增大。經實驗後證明，在少量的碳纖支承加勁下，即可提高中音谷頻率使其達到碳纖三明治板的水準，且聲壓感度較碳纖三明治板為佳。

7-2 未來研究方向

設計之片狀彈性支承，在低音部分有晃動的現象發生，故在其晃動嚴重的部份加上泡棉，實驗結果並不影響整體聲壓曲線，僅 f_0 頻率提高 5~8Hz。往後可針對碳纖彈性支承之寬度、材料以及製作方式等做研究，改良低音晃動的問題使其更加穩定。

本文碳纖加勁以 10mm 寬度做討論，對各種不同之振動板加勁的長、寬、高以及加勁的方式也不應相同。而立體加勁方式與文獻[20]之附加質量點相似，除了在適當位置提供質量使中音谷落差降低，更可有效提高振動板剛性。此外高頻時的落差主因是振動板上各位置小面積的變形，故未來研究的問題應放在平面加勁與立體加勁交互應用，改善其聲壓曲線。

參 考 文 獻

1. Reddy, J. N. , Energy and Variational Methods in Applied Mechanics , Junuthula Narasimha , 1945.
2. Mindlin, R. D. “Influence of Rotatory Inertia and Shear Deformation on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates” , J. Applied Mechanics , vol.18 , pp. 33-38 , 1951.
3. Whitney, J. M. “Shear Correction Factor Laminates Under Static Load” , J. Applied Mechanics , vol.40 , pp. 302-304 , 1973.
4. Whitney, J. M. “Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates” , J. Applied Mechanics , vol.40 , pp. 302-304 , 1973.
5. Thomson, W. T. , Theory of Vibration with Applications , 2nd Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. , 1981.
6. 王柏村 , 振動學 , 全華書局 , 台北市 , 1996。
7. Demeter, G. F. , Nonlinear Mechanics , Boca Raton : CRC Press , 1993.
8. Aora, J. S. , Introduction to Optimum Design , McGraw-Hill Inc. , 1989.
9. Vandperplaats, G. N. , Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Application , McGraw-Hill Inc , 1993.
10. Snyman, J. A. and Fatti, L. P. “A Multi-Start Global Minimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories” , J. Optimization Theory and Applications , Vol.54 , pp. 121-141 , 1987.
11. 徐業良 , 工程最佳化設計 , 國立編譯館 , 1995。
12. Deobald, L. R. and Gibson, R. F. “Determination of Elastic Constants of Orthotropic Plates by a Modal Analysis/Rayleigh-Ritz Technique” , J. Sound and Vibration , vol.124(2) , pp. 269-283 , 1988.
13. Frederiksen, P. S. “Estimation of elastic moduli in thick composite plates by inversion of vibrational data” , Proceedings of the Second International Symposium on Inverse Problems , pp. 111–118 , Paris , 1994.

14. 李清榮，「彈性支撐複合材料板結構系統參數之識別」，國立交通大學機械工程研究所博士論文，新竹市，2006。
15. Morse, P. M. and Ingrad, K. U. , Theoretical Acoustics , Princeton University Press , 1986.
16. Shindo, T. , Yashima, O. and Suzuki, H. “Effect of Voice- Coil and Surround on Vibration and Sound Pressure Response of Loudspeaker Cones” , J. the Audio Engineering Society , vol.28 , No.1 , pp. 31-51 , 1997.
17. Tan, C. C. and Hird, C. I. “Active Control of the Sound Field of a Constrained Panel by an Electromagnetic Actuator-an Experimental Study” , Applied Acoustics , vol.52 , pp. 31-51 , 1997.
18. Leach, W. JR. , Schafer, R. and Barnwell, T. “Time-Domain Measurement of Loudspeaker Driver Parameters” , IEEE Transactions on Acoustics , Speech , and Signal Processing , vol.27 , No.6 , pp. 734-739 , 1979.
19. 施志鴻，「具彈性支撐複合材料圓板之振動與聲傳研究」，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，新竹市，2004。
20. 徐國真，「具附加點質量長形平面揚聲器之研製」，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，新竹市，2007。
21. 陳建勳，「揚聲器平板之最佳參數研究」，國立交通大學機械工程研究所碩士論文，新竹市，2006。

表 3-1 ANSYS 模擬之材料常數

	巴桑木	碳纖維材料	音圈
E1	3.7GPa	147.503GPa	75GPa
E2	0.055GPa	9.223GPa	
G12	0.01GPa	6.835GPa	
G23	0.00167GPa	1.122GPa	
v12	0.2	0.327	0.3
v23	0.499	0.25	
D (density)	210Kg/m ³	1424.32Kg/m ³	2700Kg/m ³
t (thick)	2mm	0.15mm	0.3mm

表 3-2 平面揚聲器量測參數

Revc	7.600 Ohm	Mmd	5.009m Kg
Fo	53.975 Hz	Mms	5.243 g
Sd	5.500m M	BL	3.876 T
Krm	147.742u Ohm	Qms	3.411
Erm	0.965	Qes	1.099
Kxm	4.096m H	Qts	0.831
Exm	0.676	No	0.120%
Vas	4.767m M	SPLo	13.845K
Cms	1.3124m M/N		

表 3-3 文獻[2]中的材料常數

E1(GPa)	68.9
E2(GPa)	68.9
E3(GPa)	68.9
Poisson's ratio	0.3
G12(GPa)	26.5
G23(GPa)	26.5
G13(GPa)	26.5
Density(ρ)(Kg/m ³)	2770

表 3-4 文獻[2]與 ANSYS 各元素自然頻率分析比較

	文獻[2]	Shell91 (開啟三 明治選 項)	Shell91 (不開啟 三明治 選項)	Shell99
Mode 1(Hz)	23.05	23.275	23.464	23.464
Mode 2(Hz)	43.91	44.649	45.167	45.167
Mode 3(Hz)	71.06	70.092	72.1	72.1
Mode 4(Hz)	78.37	79.926	81.311	81.311
Mode 5(Hz)	90.85	90.887	93.795	93.795
Mode 6(Hz)	123.82	125.22	129.92	129.92

表 3-5 文獻[7]與 ANSYS 模擬比較

Load P(N)	文獻[7] (M)	Beam3 (M) nlgeom,off	Beam3 (M) nlgeom,on	Shell93 (M)
889.6	8.3467	9.4074	8.3477	8.3514
1779.2	13.2910	18.815	13.294	13.304
2668.8	15.9766	28.222	15.980	16.011
4448	18.5964	47.037	18.605	18.736
11120	21.3776	117.59	21.386	21.412
22240	22.5770	235.19	22.593	22.879

表 5-1 最佳化之局部與總域極小值

	1		2		3		4	
	start	final	start	final	start	final	start	final
x1	1.650	4.317	12.115	4.317	7.139	4.317	15.156	4.317
x2	10.679	6.614	12.867	6.614	13.110	6.614	18.636	6.614
x3	23.747	9.342	20.338	9.342	18.277	9.342	20.657	9.342
x4	26.801	12.254	22.460	12.254	19.088	12.254	23.385	12.254
x5	27.811	14.085	24.460	14.085	21.591	14.085	25.683	14.085
y1	0.715	4.426	2.312	4.426	2.611	4.426	4.570	4.426
y2	4.529	1.593	3.965	1.593	4.507	1.593	1.733	1.593
y3	4.099	2.425	3.679	2.425	3.646	2.425	3.661	2.425
迭代次數	12		11		12		10	

表 5-2 最佳化之彈性支承 ANSYS 模擬之力與位移關係

Force (N)	Displ. (mm)
1.0	7.984
0.5	4.244
-0.5	-4.349
-1.0	-7.717

表 6-1 音圈規格表

d1	13.2mm
h	18.5mm
tv	5mm
電阻	7.6Ohm
材質	Kapton
重量	1.24g

表 6-2 場磁鐵規格表

總高	15mm
磁石直徑	12.8mm
導磁片厚度	2mm
最大外徑	13.8mm

表 6-3 ANSYS 模擬立體加勁之彎矩模態頻率與中音谷聲壓落差

	彎矩模態頻率	中音谷落差
Balsawood	945Hz	20.6dB
11mm	1047Hz	16.8dB
19mm	1188Hz	14.2dB
27mm	1218Hz	24.5dB

表 6-4 x 軸向固定 19mm 加勁與 y 軸之不同加勁長度比較

y 軸加勁長度	彎矩模態頻率	中音谷落差
0mm	981Hz	15.6dB
11mm	1099Hz	16.1dB
19mm	1188Hz	14.2dB
27mm	1211Hz	17.7dB

表 6-5 y 軸向固定 19mm 加勁與 x 軸之不同加勁長度比較

x 軸加勁長度	彎矩模態頻率	中音谷落差
0mm	1011Hz	21.1dB
11mm	1109Hz	16.9dB
19mm	1188Hz	14.2dB
27mm	1221Hz	20.3dB



圖 1-1 傳統振動板為錐盆型的揚聲器



圖 1-2 振動板為平面的揚聲器



圖 1-3 傳統半月型波浪彈波

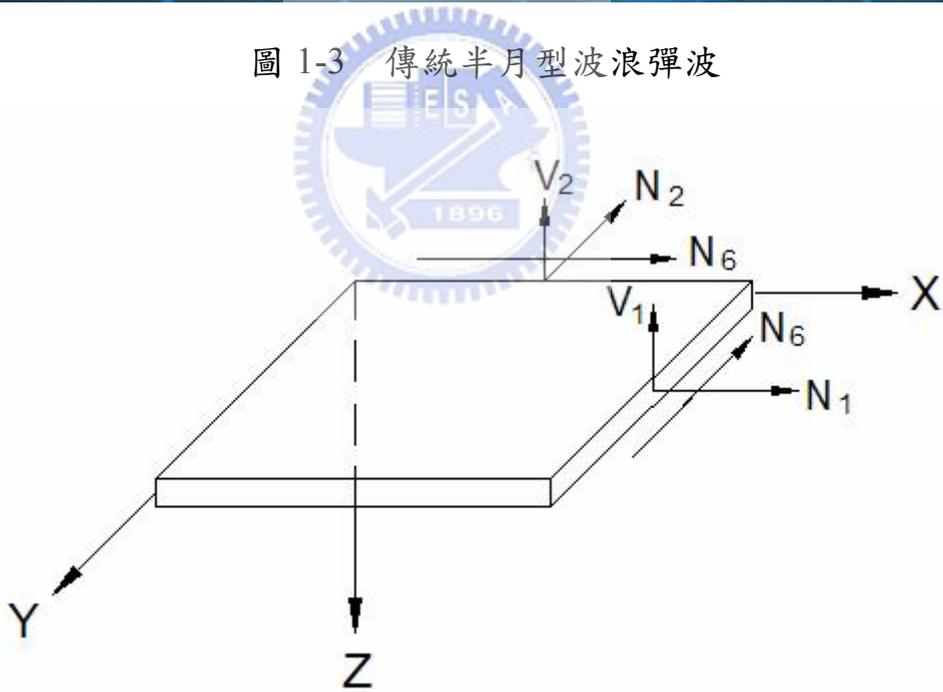


圖 2-1 平板所受應力的合力圖

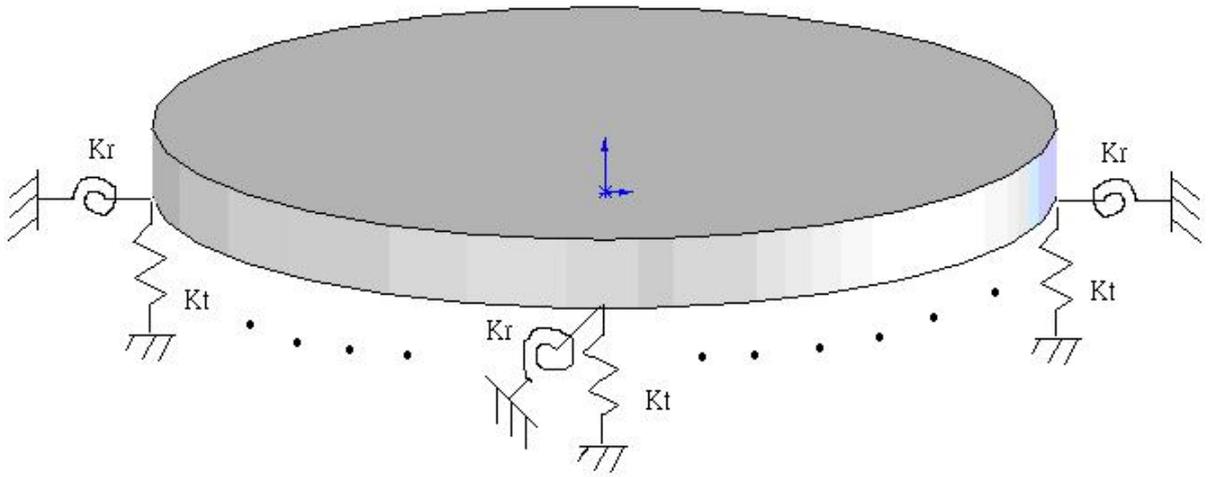


圖 2-2 半徑為 a 公尺之具彈性支撐圓形板

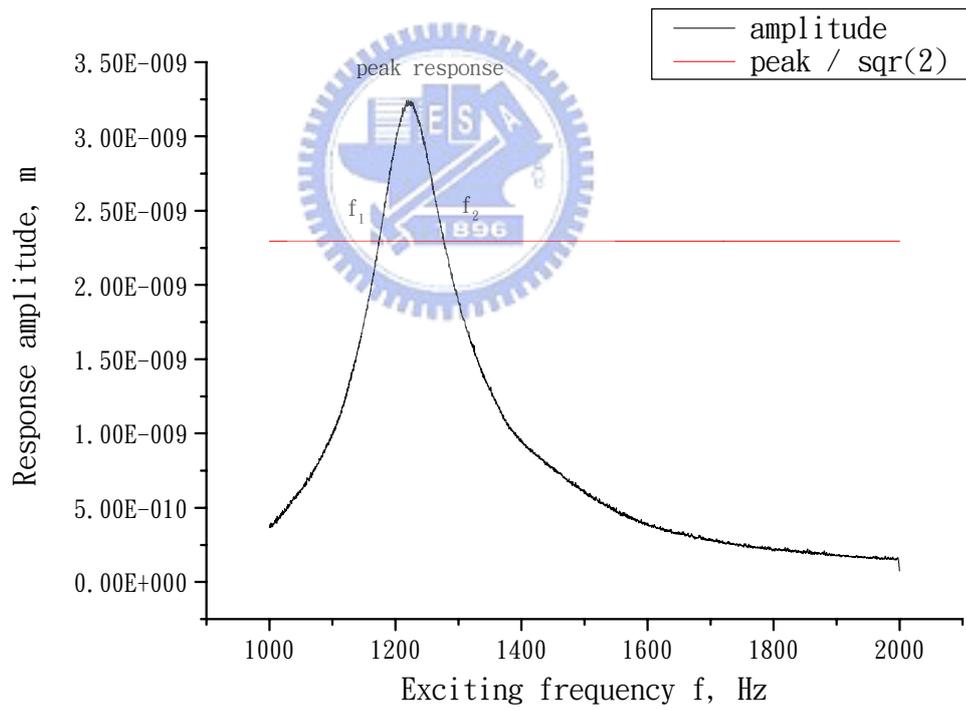


圖 2-3 頻率-位移圖

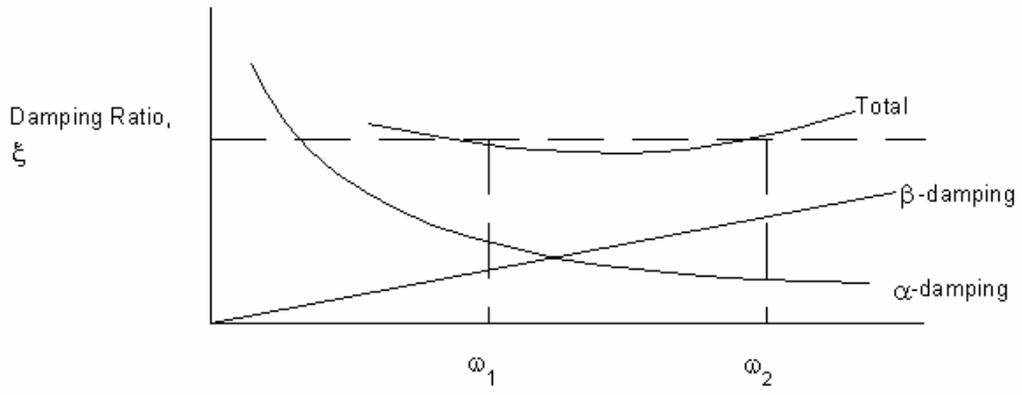


圖 2-4 Rayleigh Damping

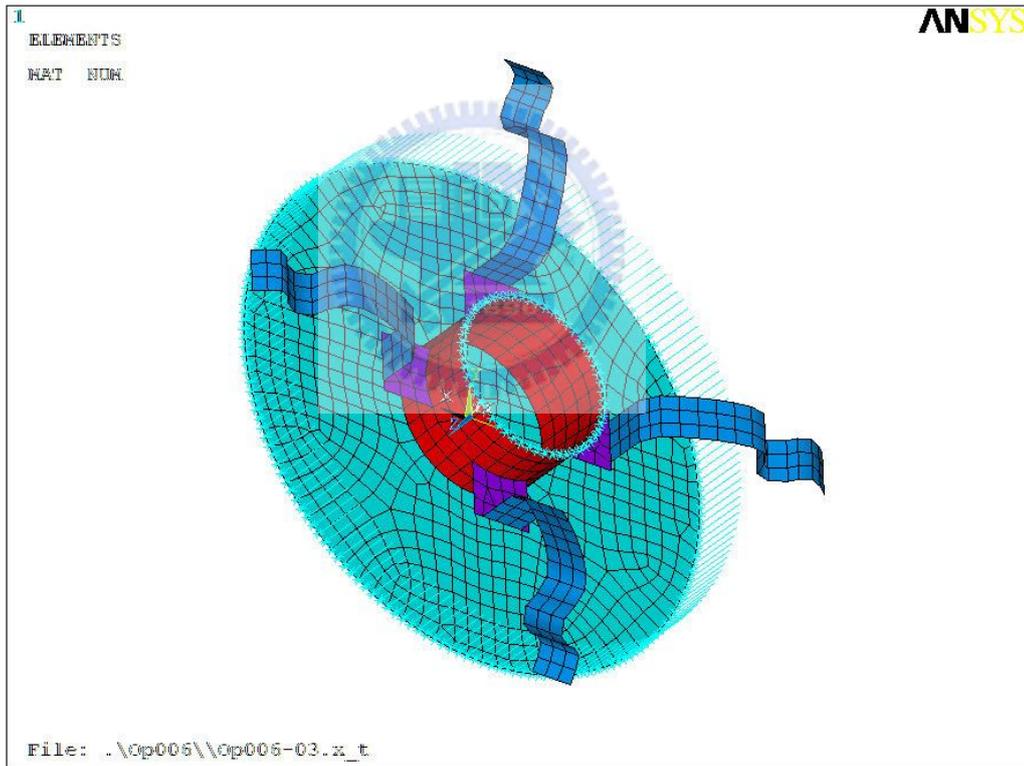


圖 3-1 ANSYS 模擬 model

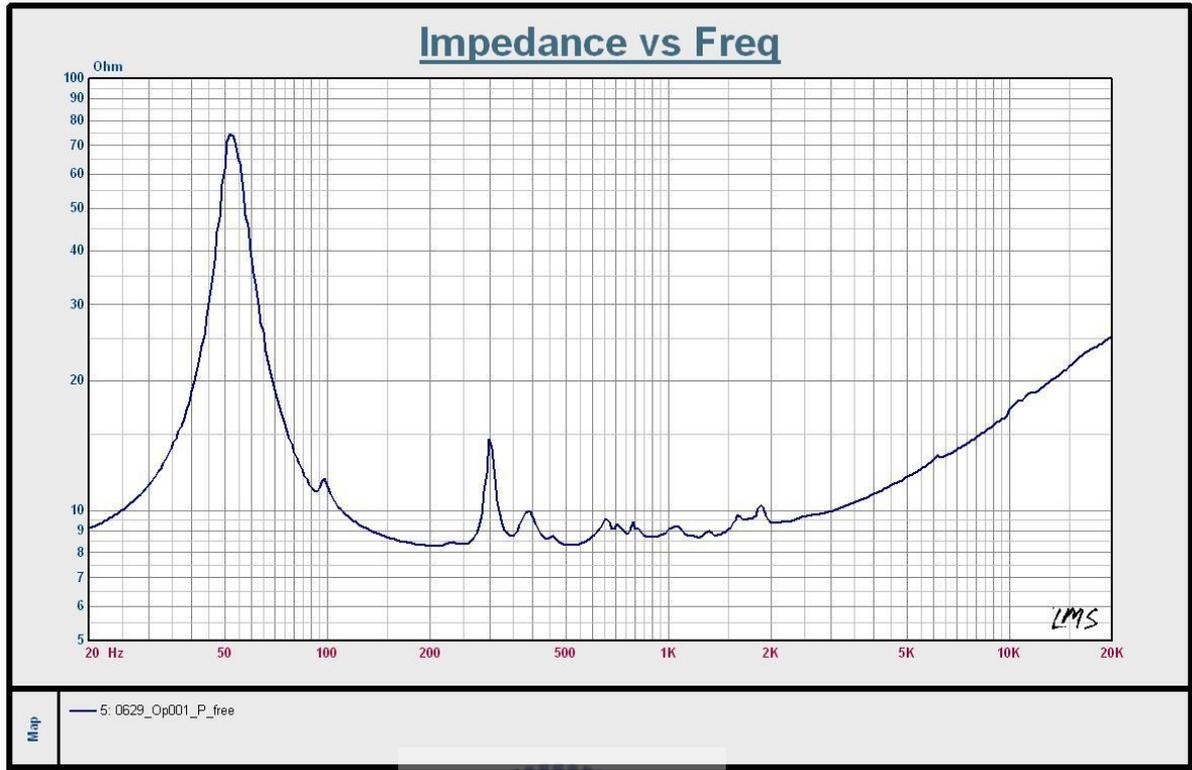
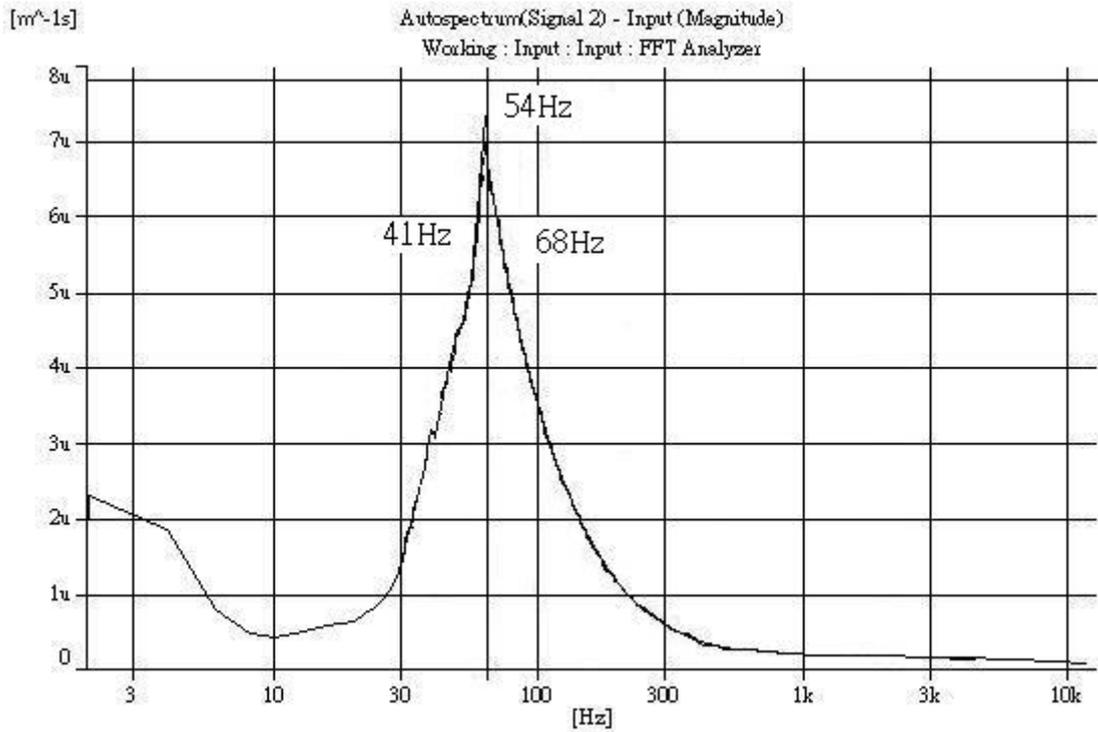
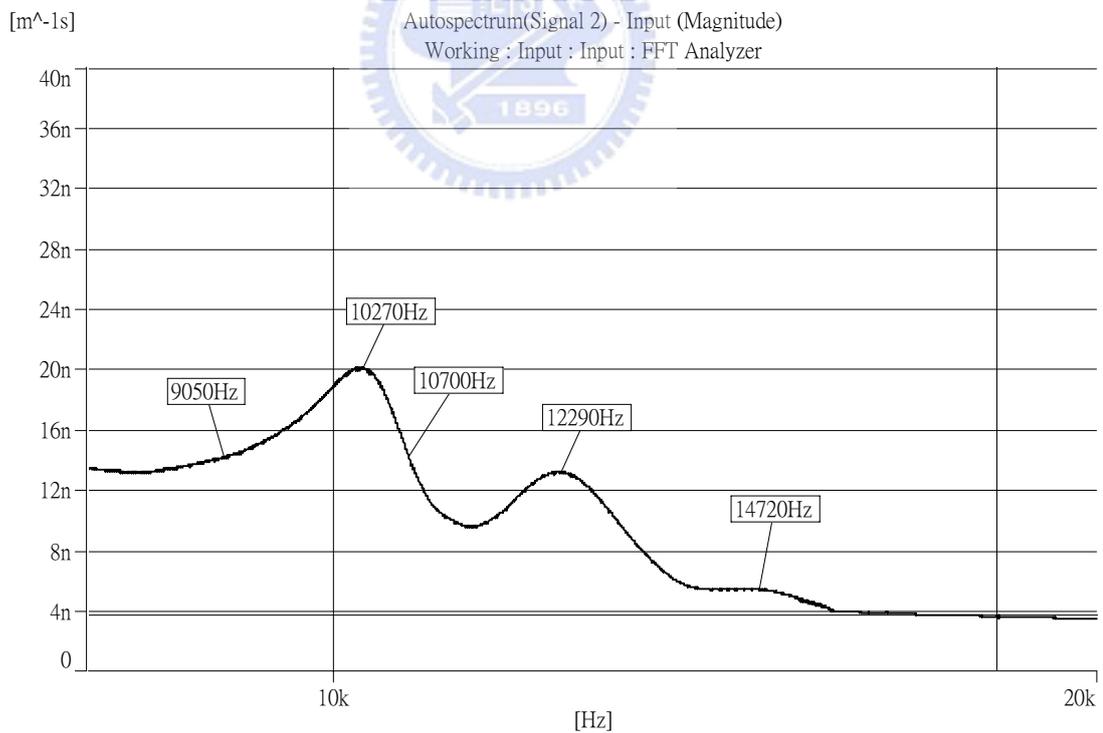


圖 3-2 平面揚聲器阻抗圖





(a) 低頻部份之位移響應



(b) 高頻部份之位移響應

圖 3-3 以雷射測速儀量測振動板中心點位移響應

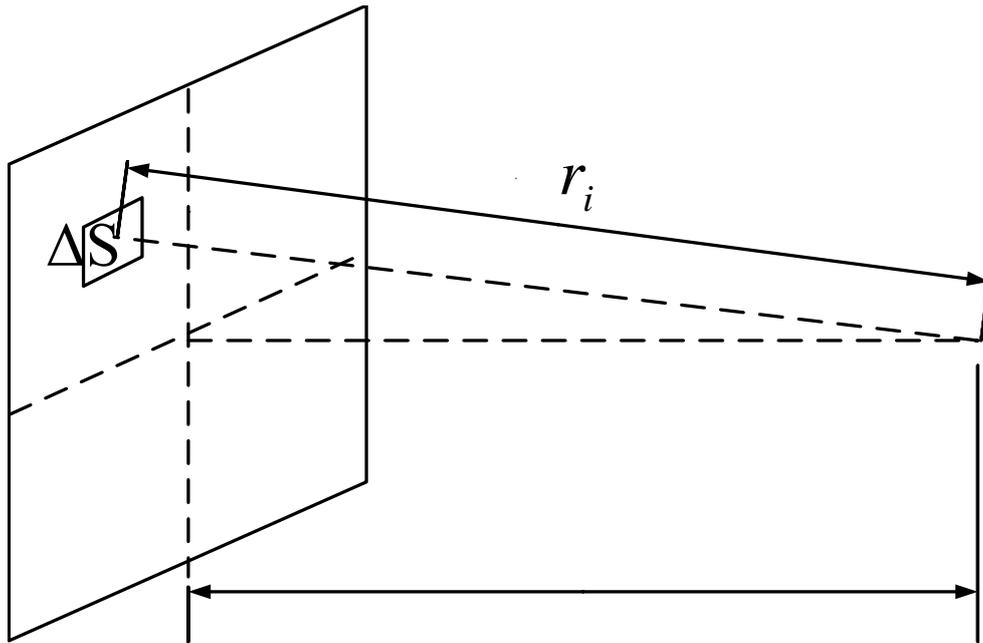


圖 3-4 聲壓距離示意圖

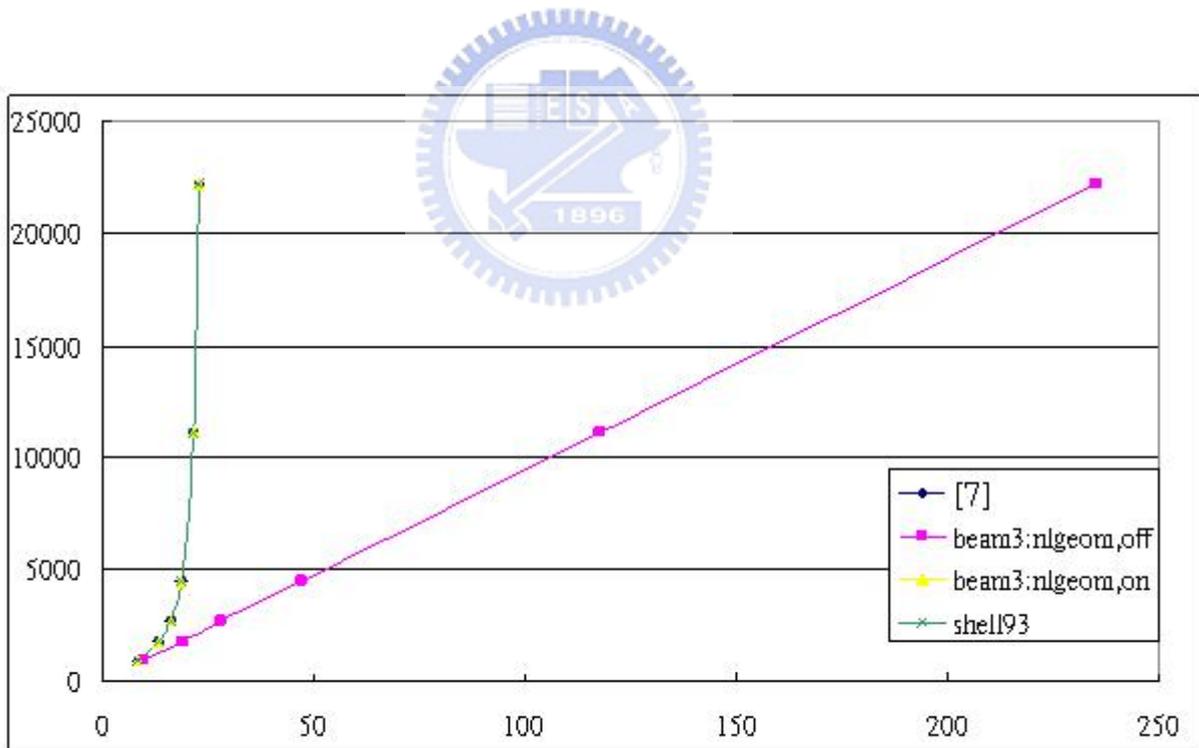


圖 3-5 ANSYS 模擬與文獻[7]之力與位移比較

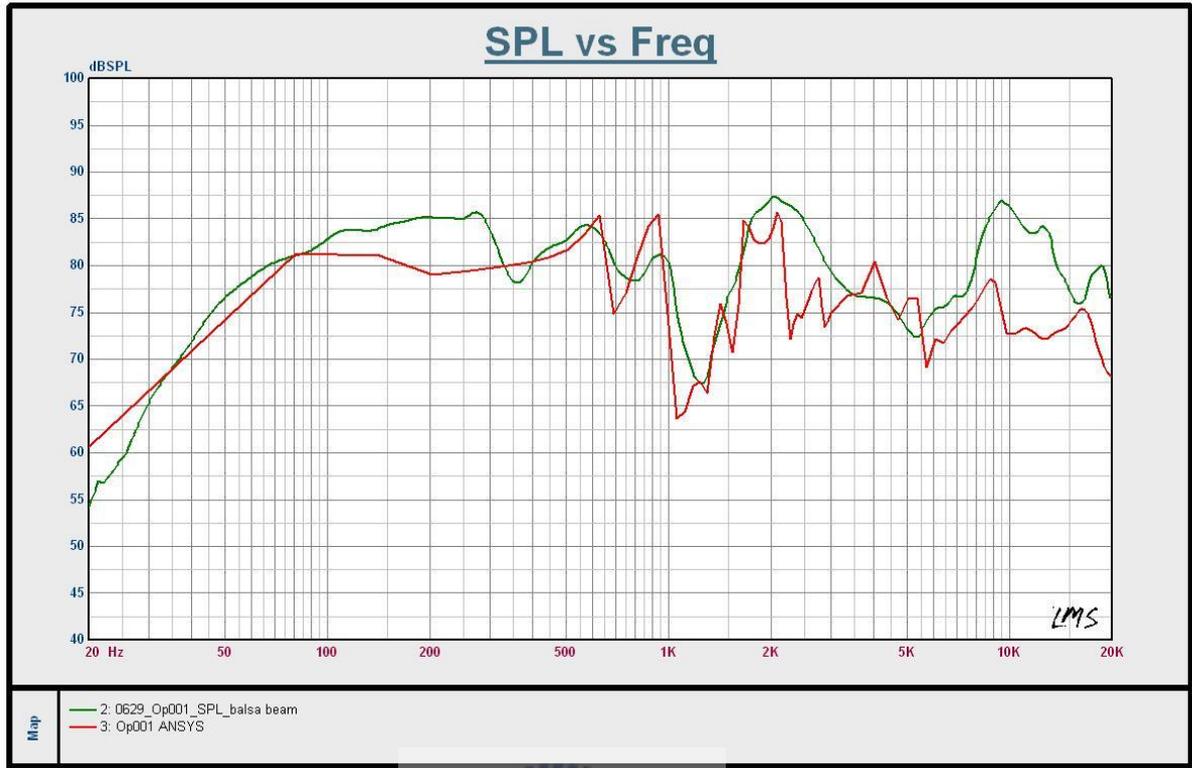


圖 3-6 純巴桑木振動板揚聲器實驗與 ANSYS 模擬比較

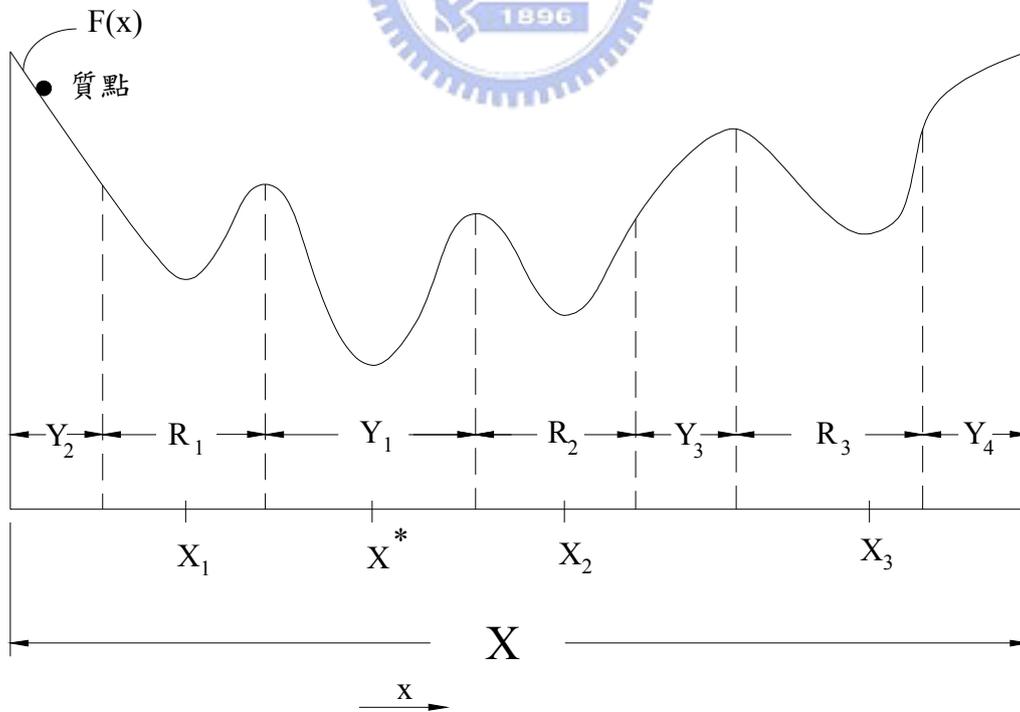


圖 4-1 能量守恆觀點最小值示意圖

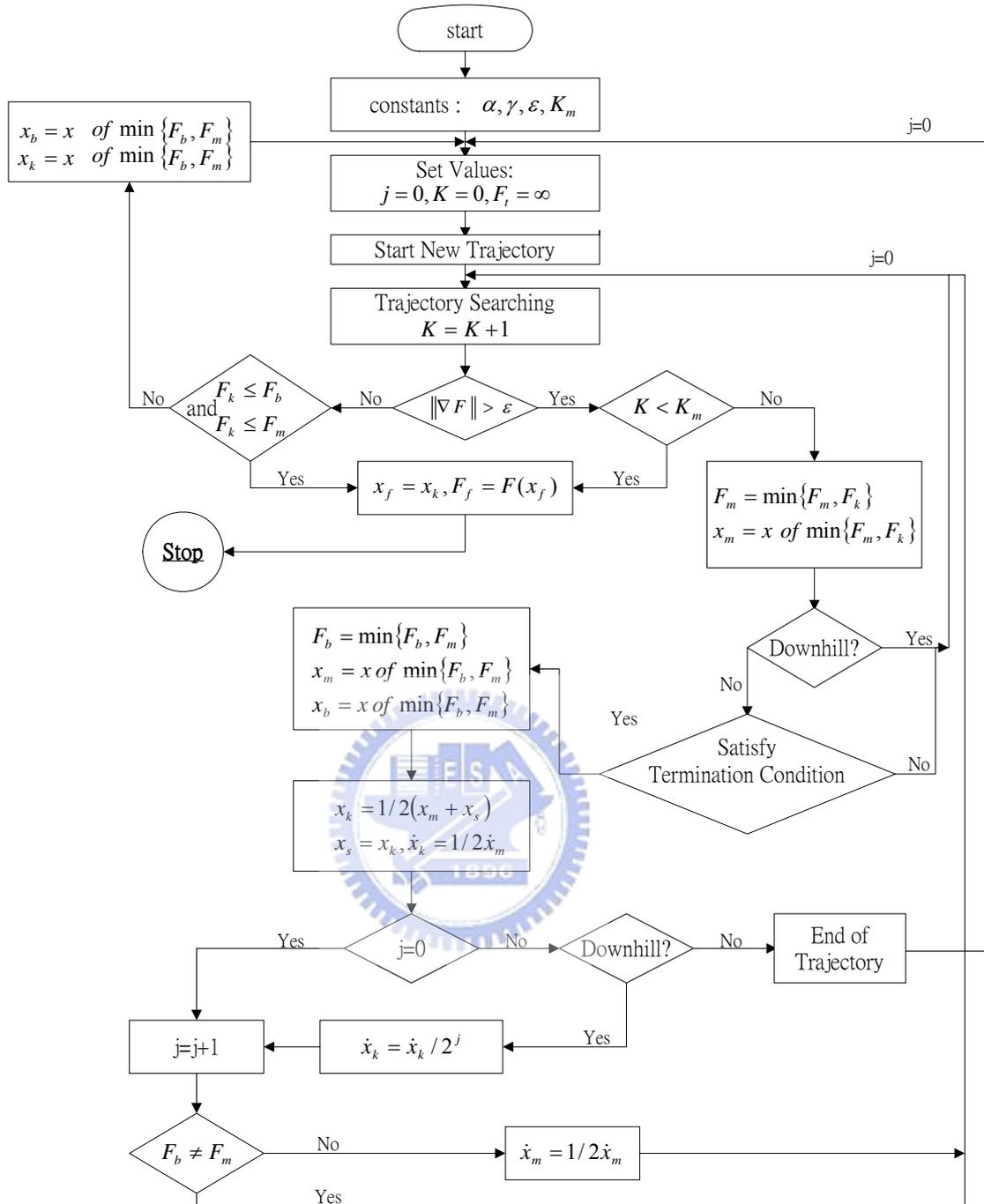


圖 4-2 區域極小化流程圖(BLOCK 1)

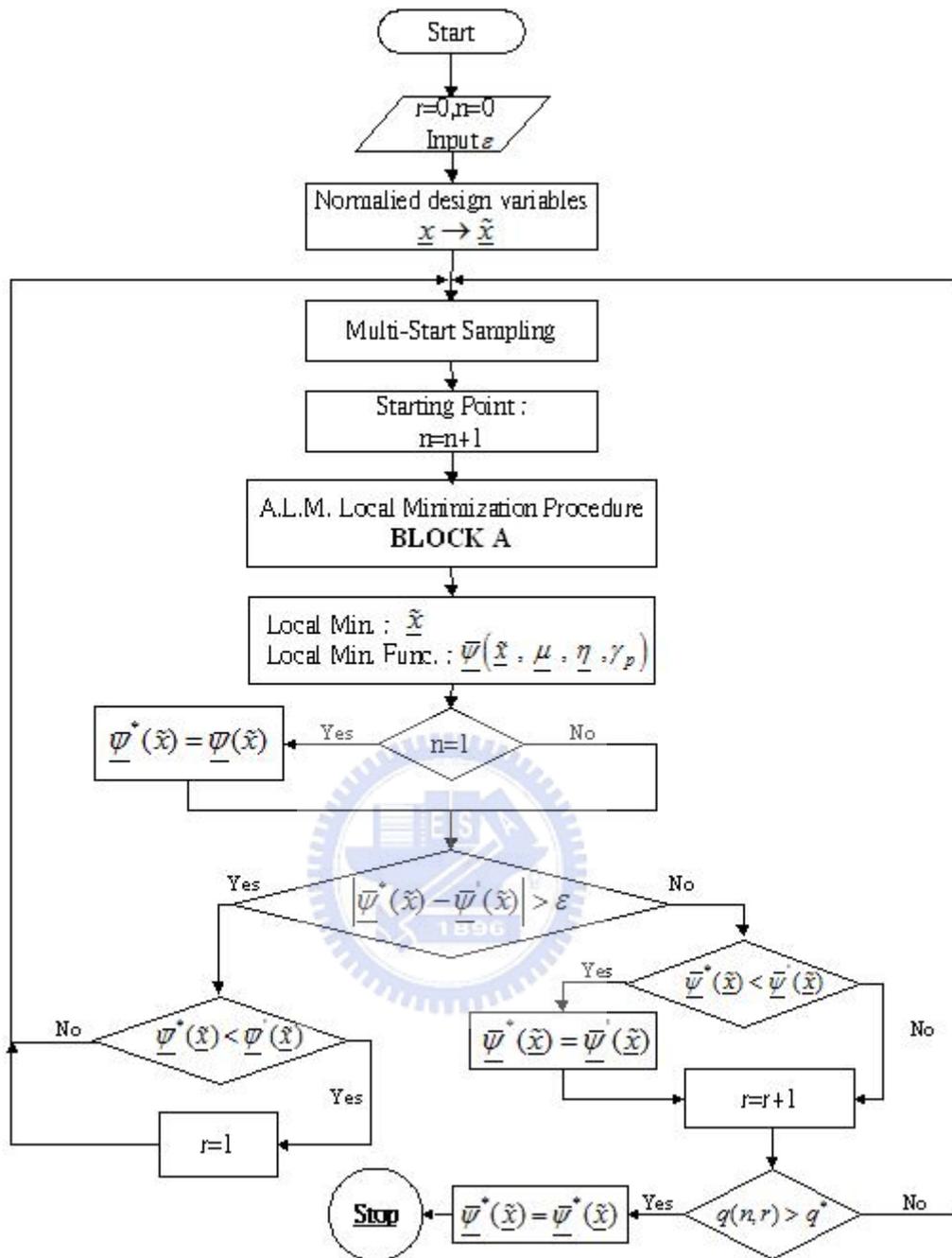


圖 4-3 總域極小化流程圖

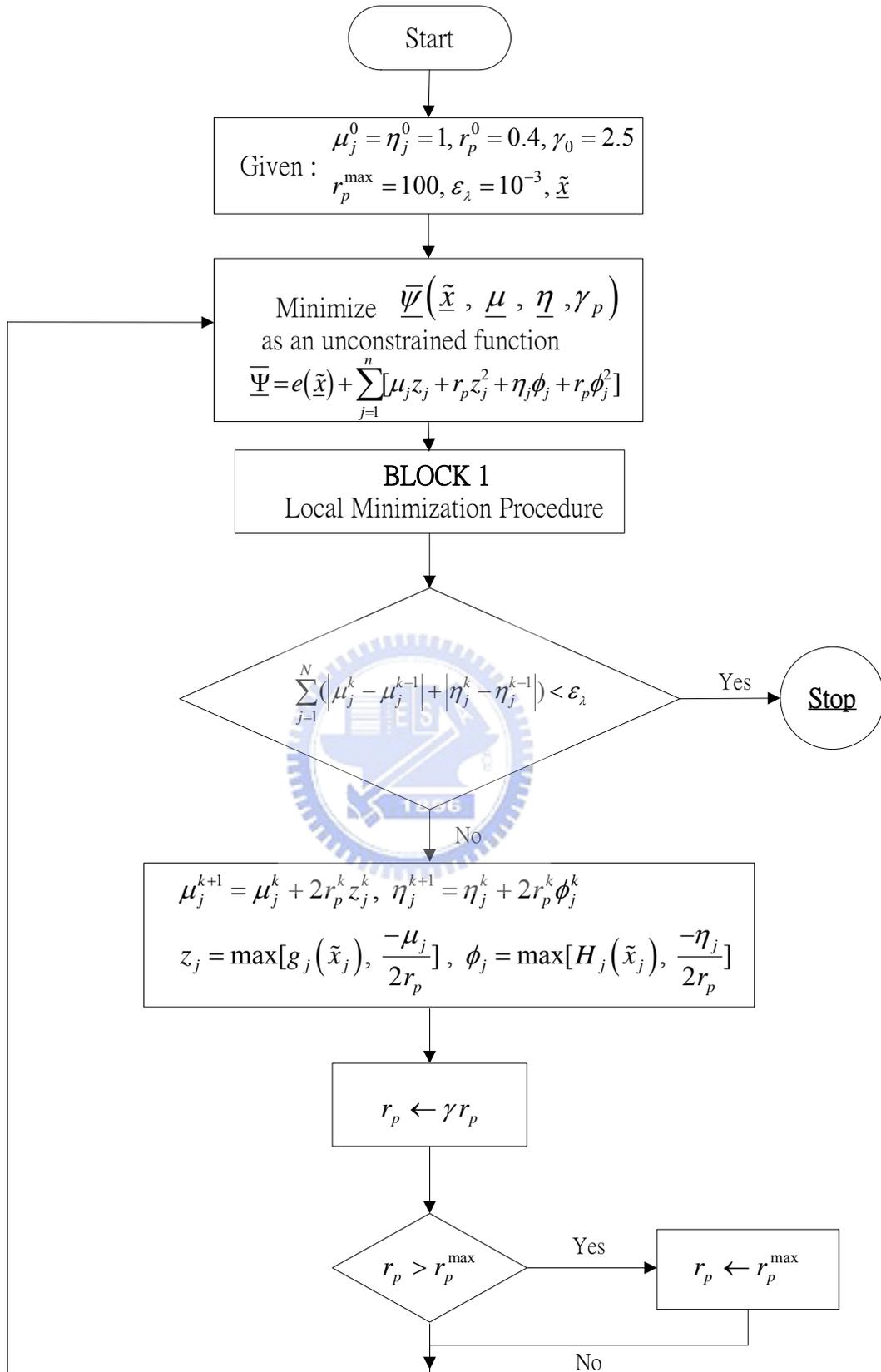


圖 4-4 A.L.M.區極小化流程圖(BLOCK A)

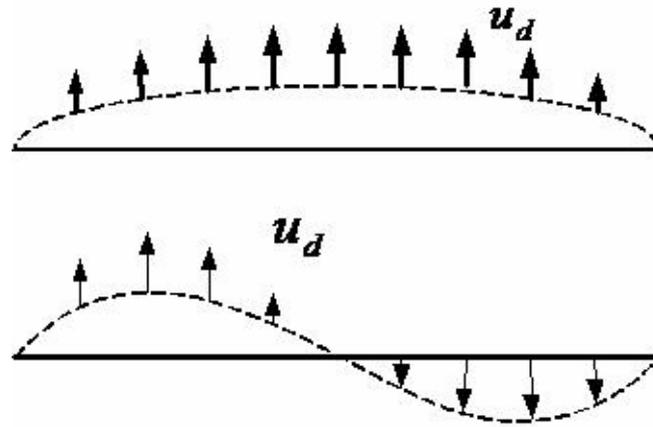


圖 5-1 振動板之振形

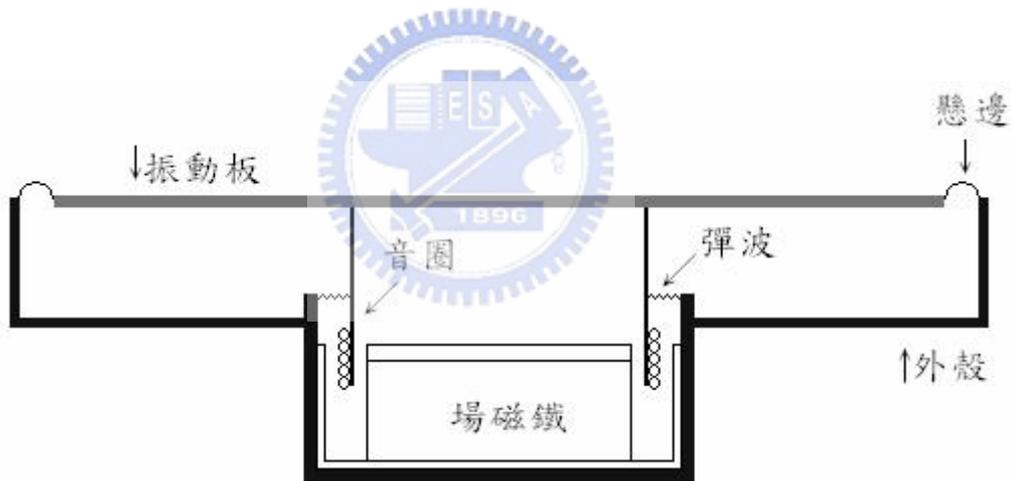


圖 5-2 揚聲器結構

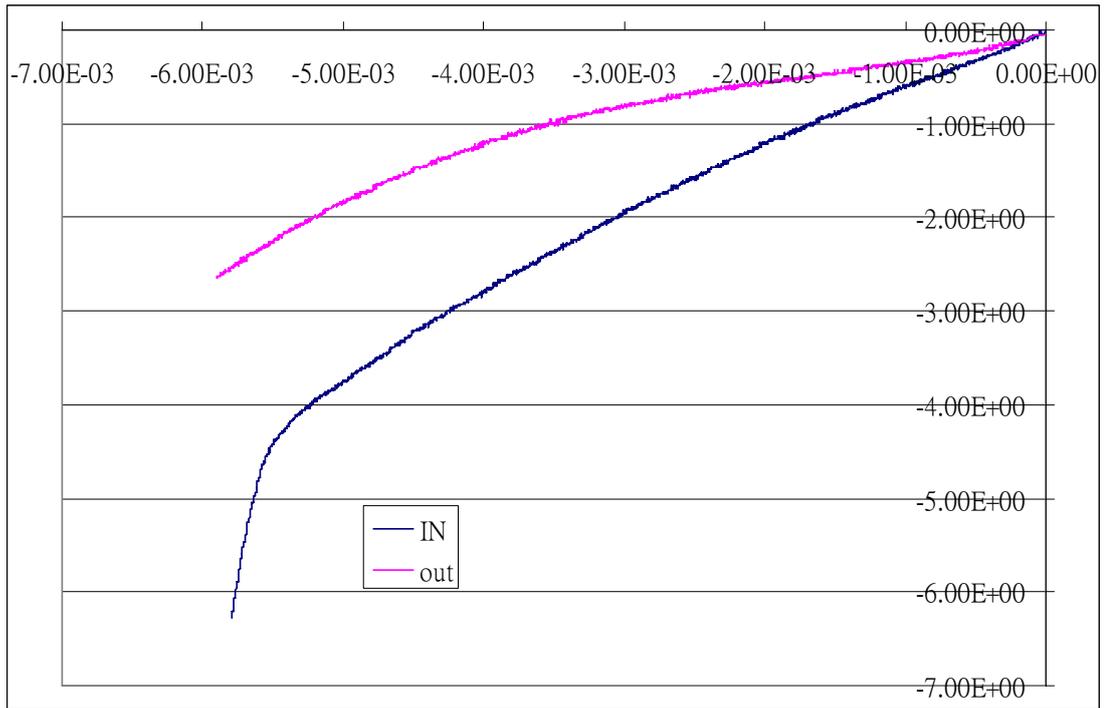


圖 5-3 傳統波浪圓形彈波之力與位移示意圖

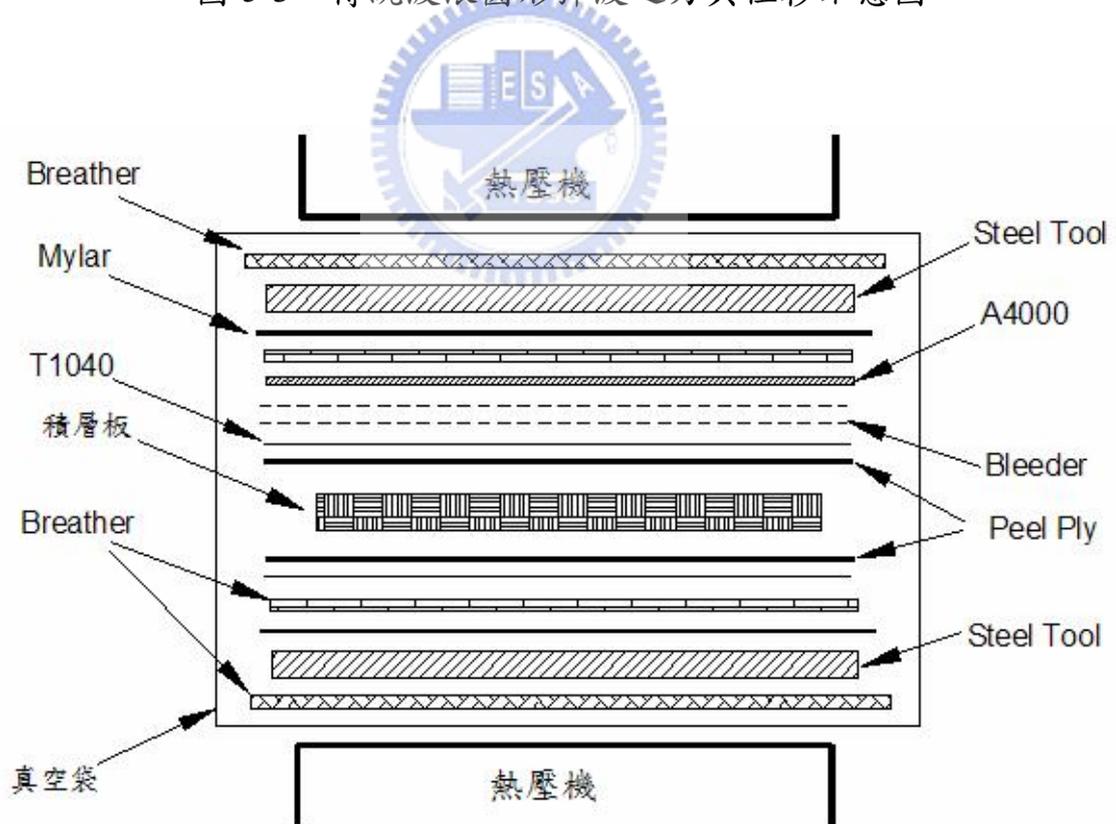


圖 5-4 碳纖壓製疊層順序



圖 5-5 熱壓機

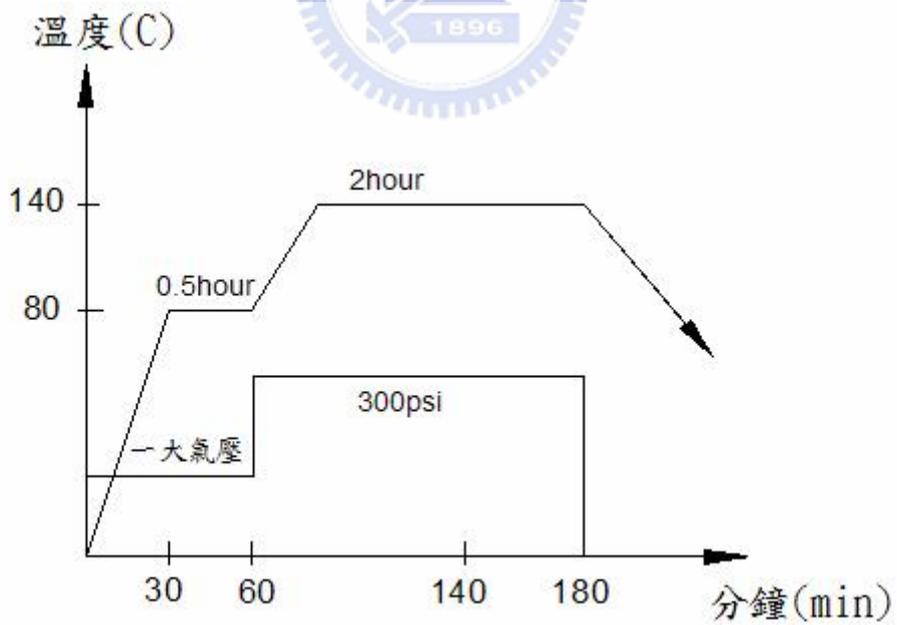


圖 5-6 複合材料積層板之加熱加壓硬化成型製程圖

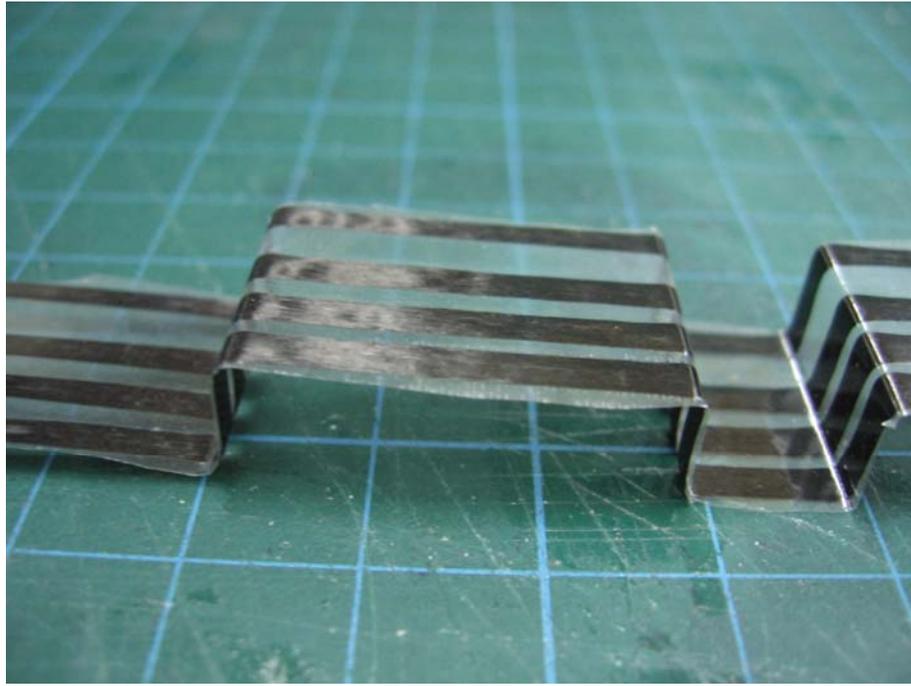


圖 5-7 ㄇ字型彈性支承

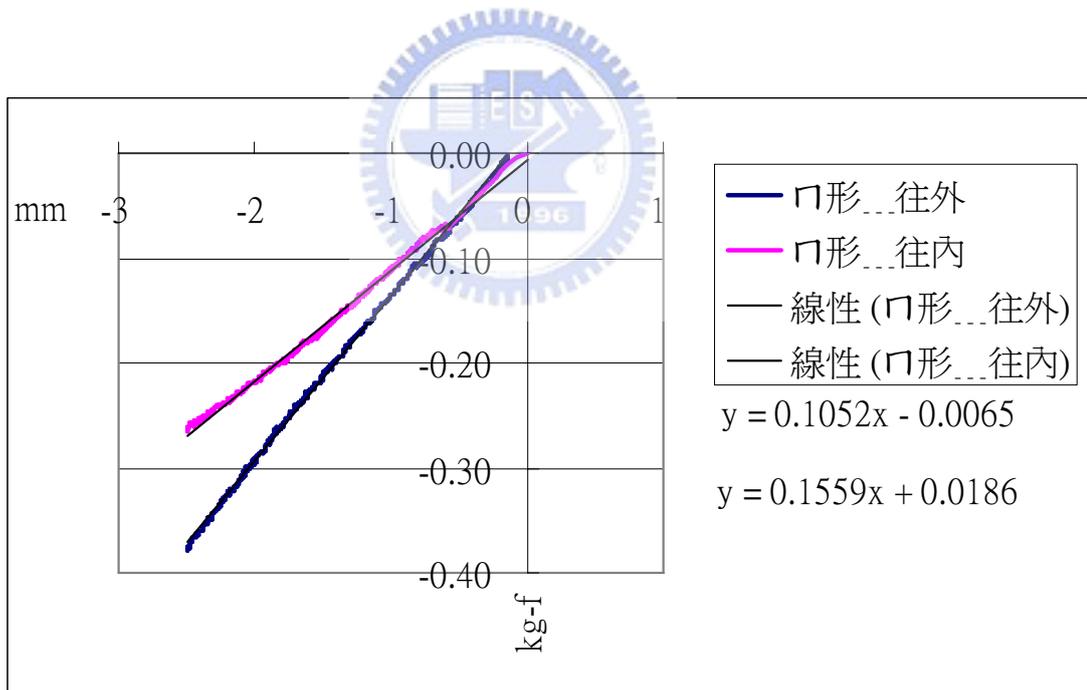


圖 5-8 ㄇ字型支承之力與位移示意圖

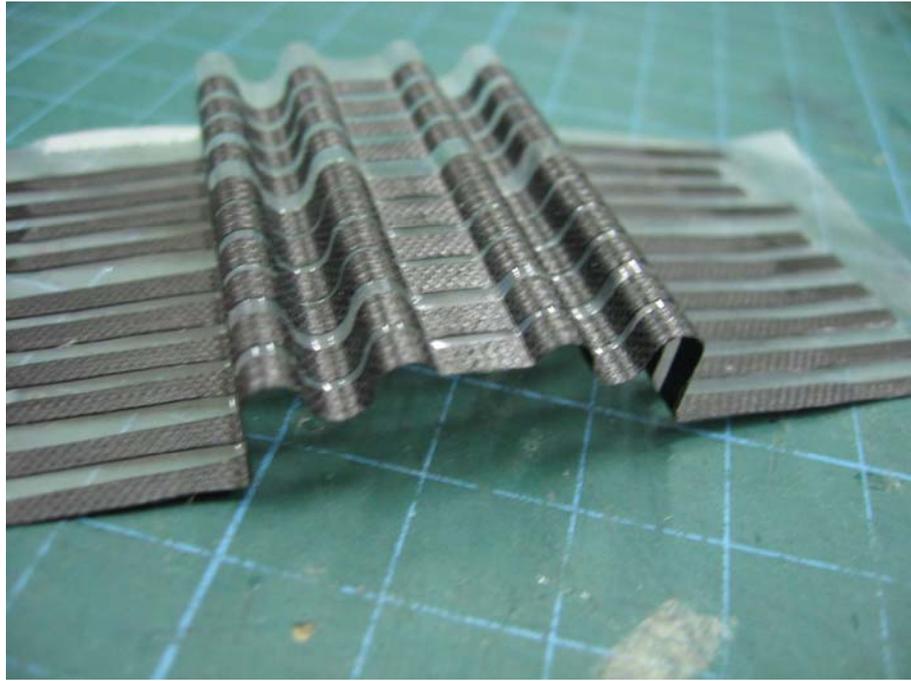


圖 5-9 具波浪形彈性支承

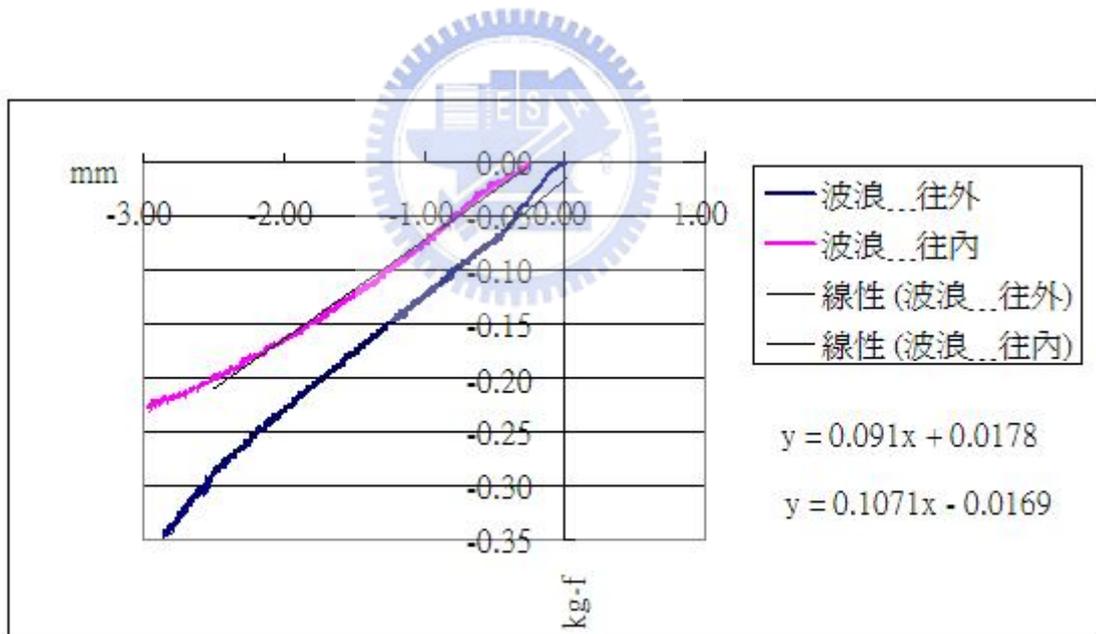


圖 5-10 具波浪形彈性支承之力與位移示意圖

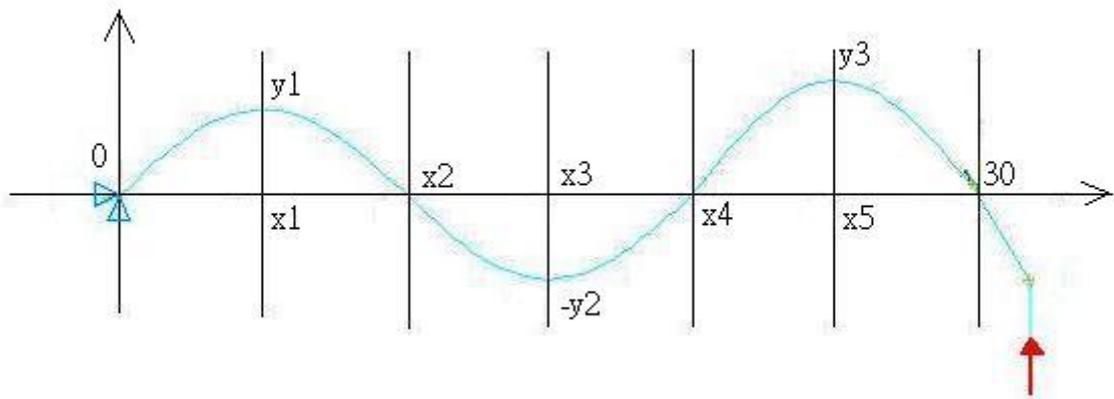


圖 5-11 彈性支承設計變數示意圖

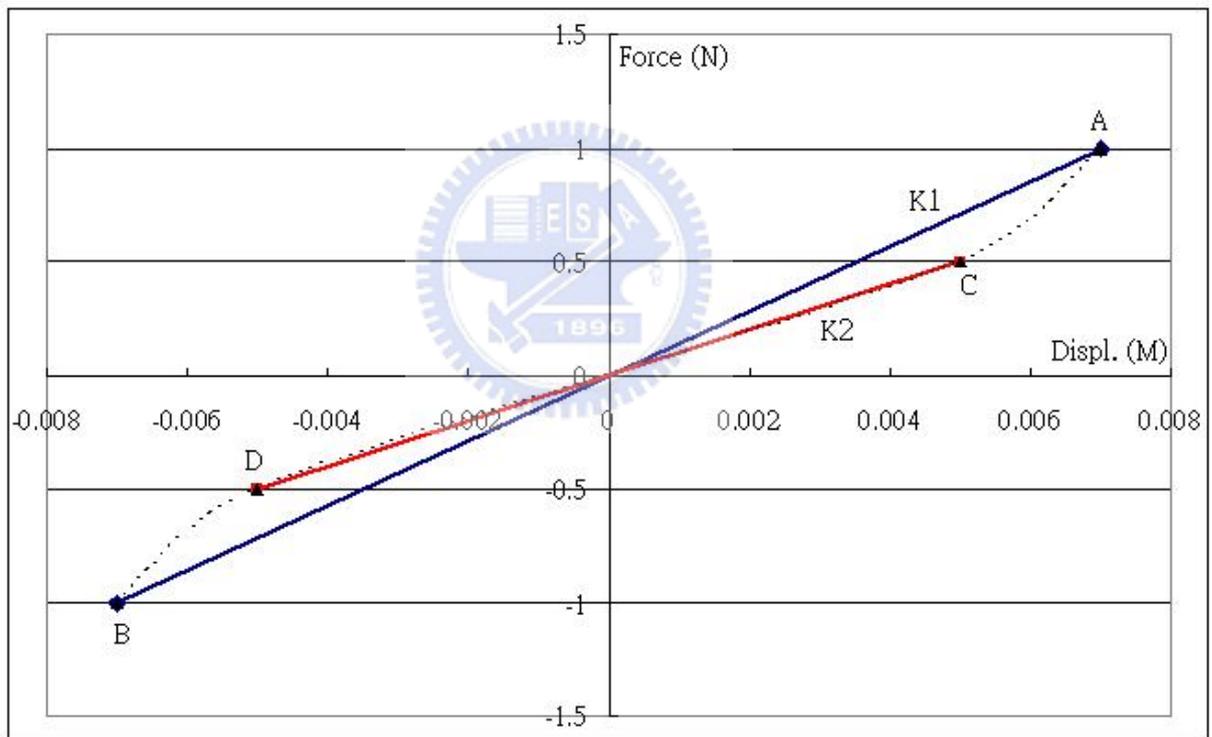


圖 5-12 ANSYS 模擬之力-位移示意圖

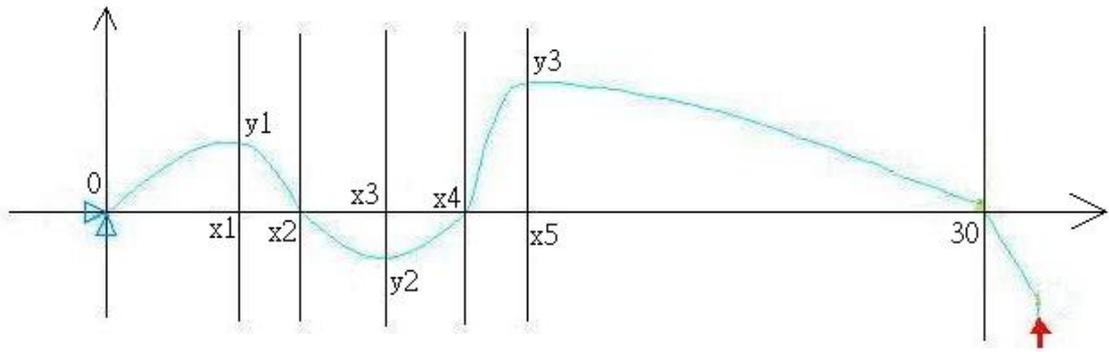


圖 5-13 最佳化彈性支承幾何形狀示意圖

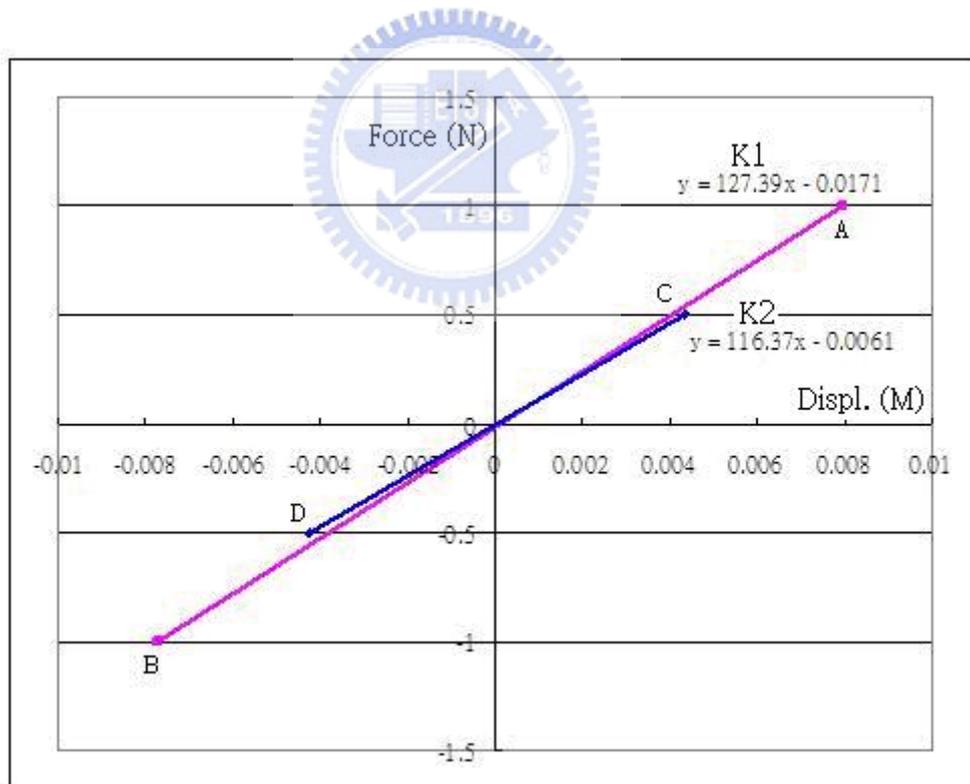


圖 5-14 ANSYS 模擬最佳化彈性支承之力-位移關係圖



圖 5-15 片狀碳纖彈性支承成品

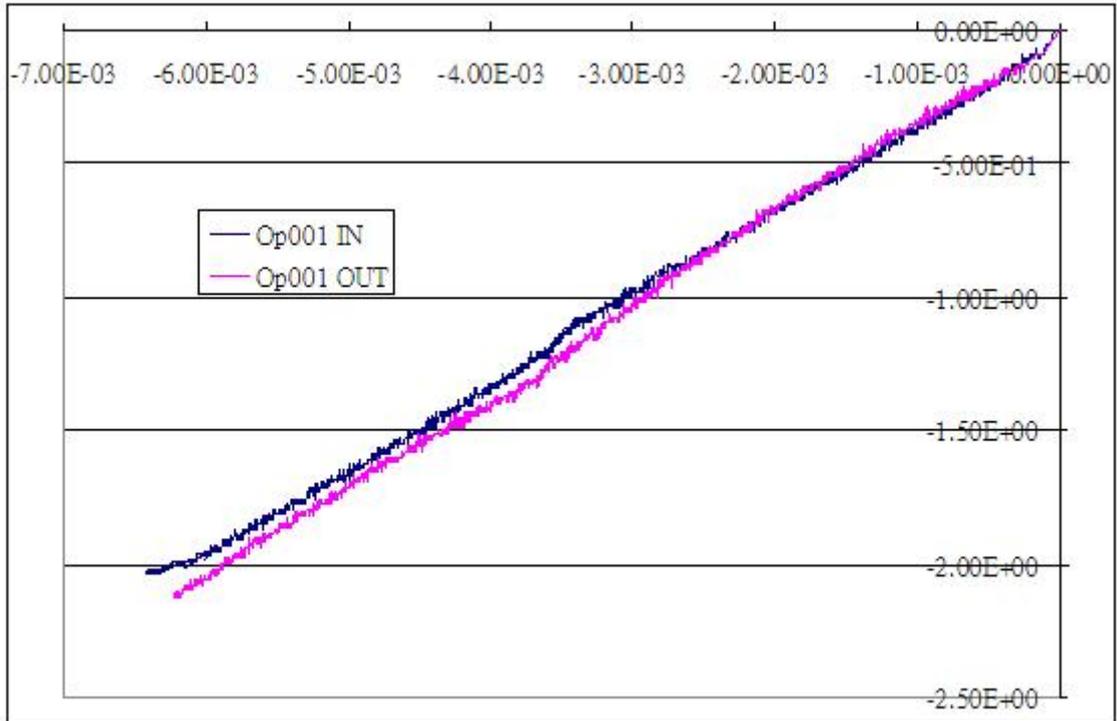


圖 5-16 拉伸實驗：片狀彈性支承之力與位移示意圖

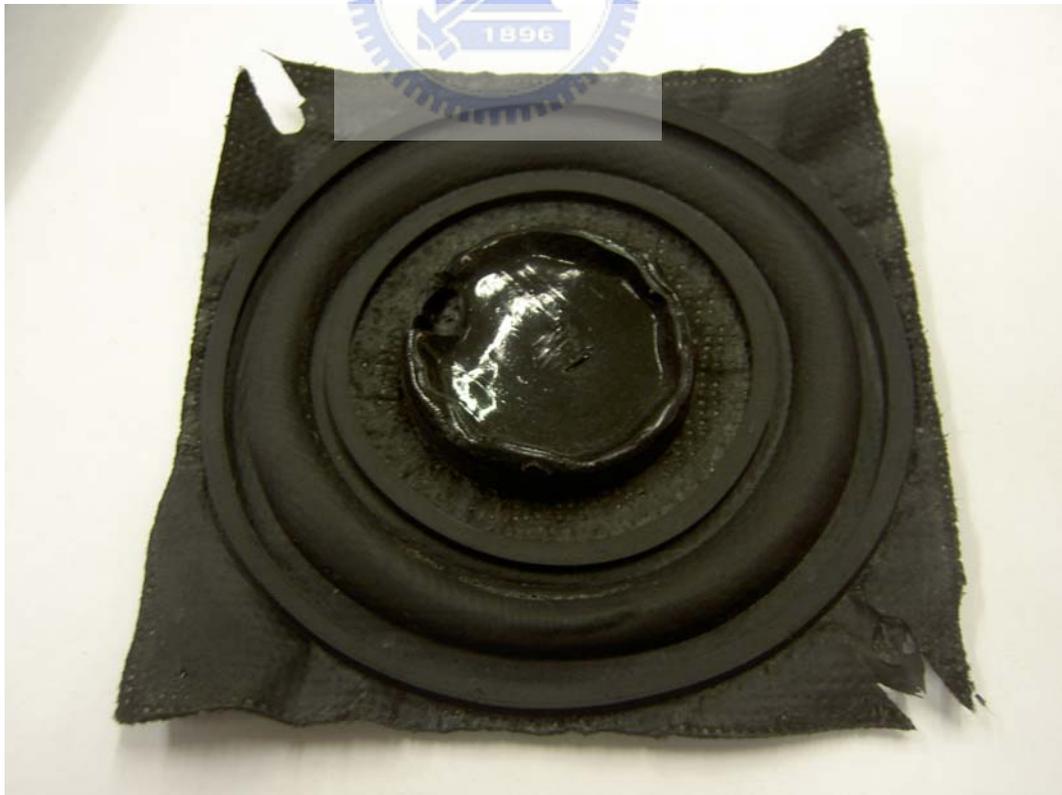


圖 6-1 彈性矽膠懸邊完成品

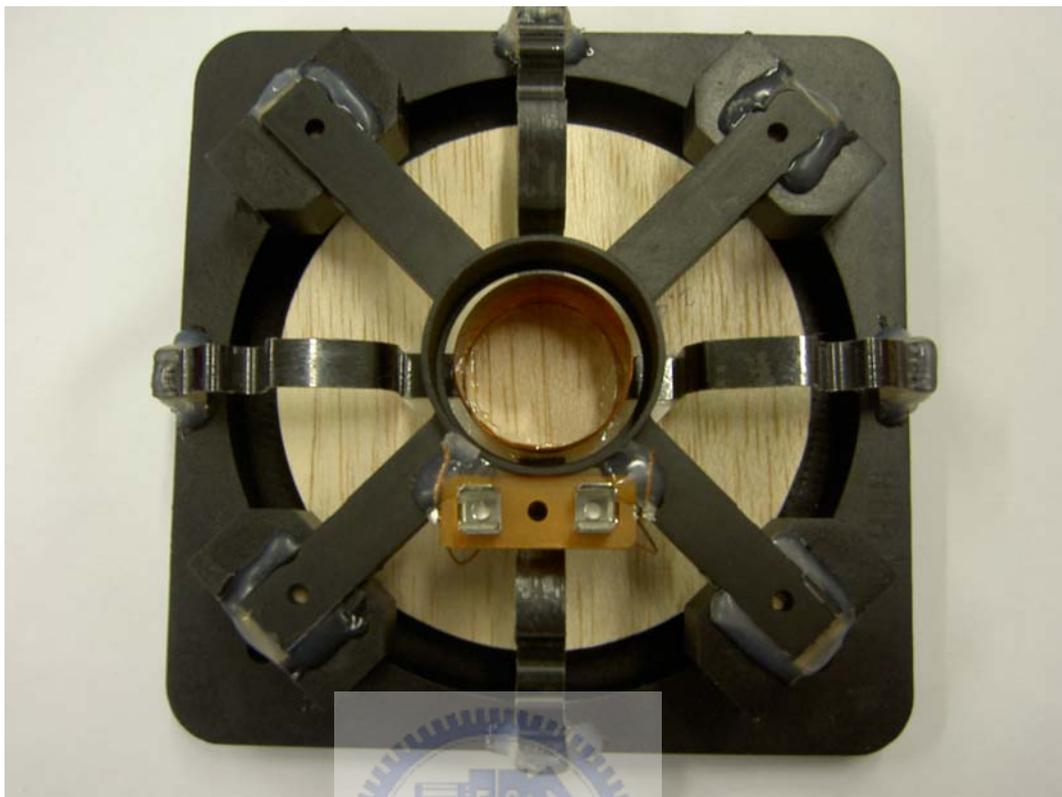


圖 6-2 揚聲器製作完成品



圖 6-3 阻尼比量測實驗架設示意圖

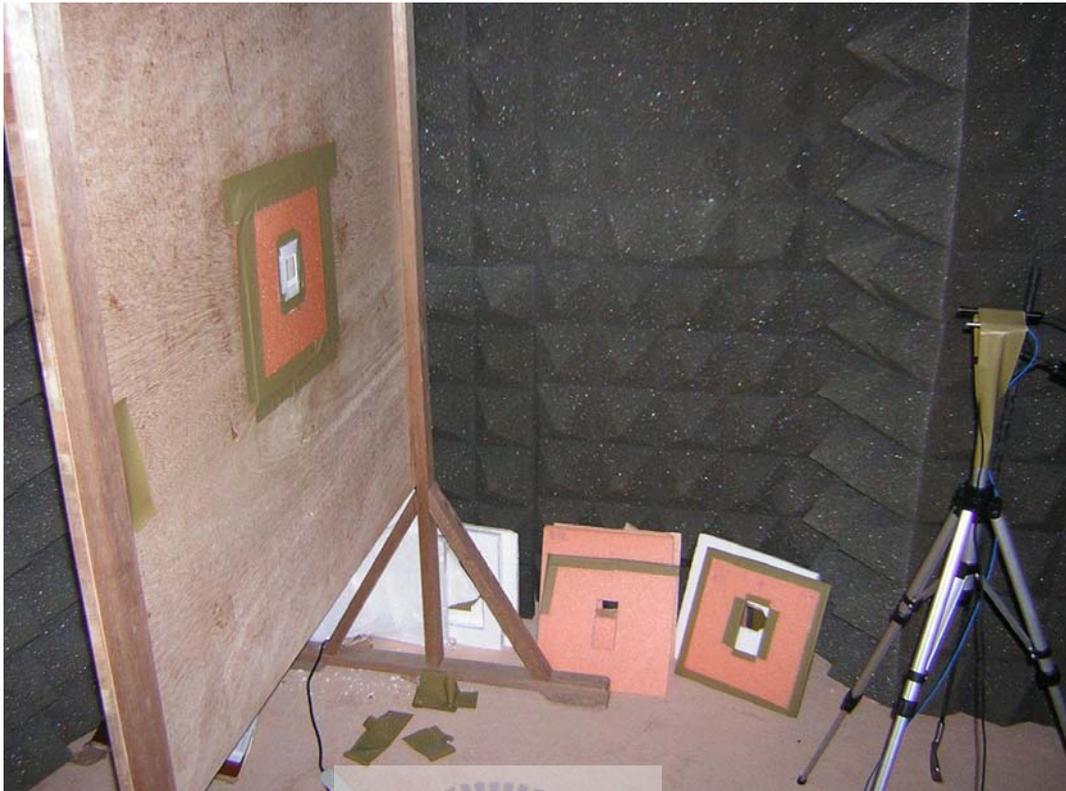


圖 6-4 聲壓量測實驗架設圖

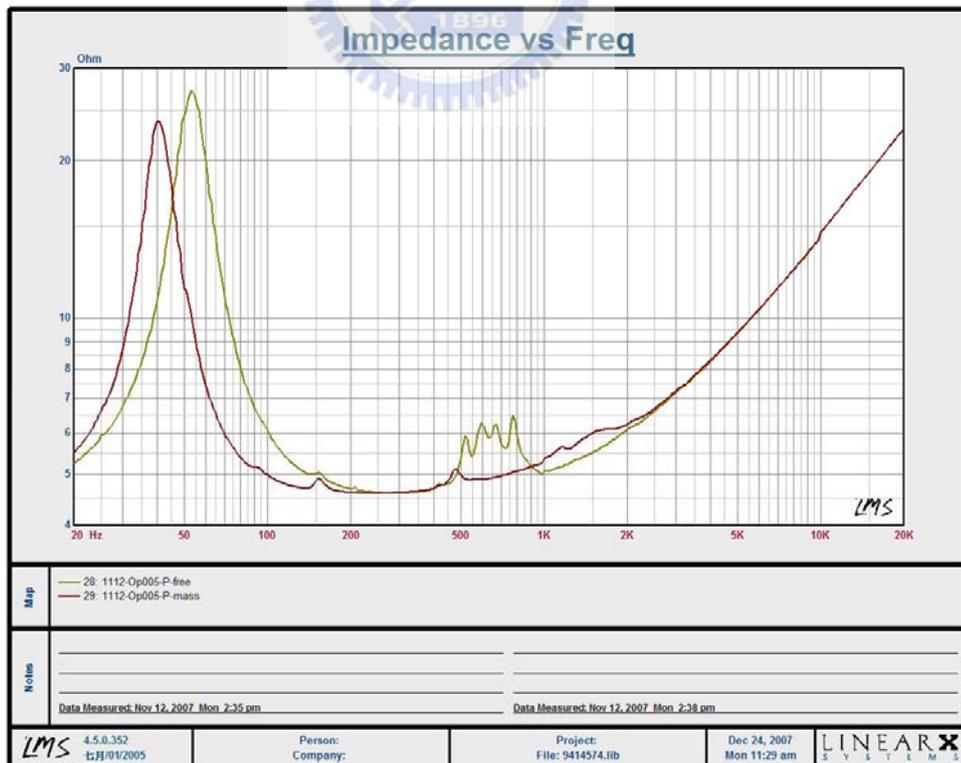


圖 6-5 平面揚聲器阻抗圖

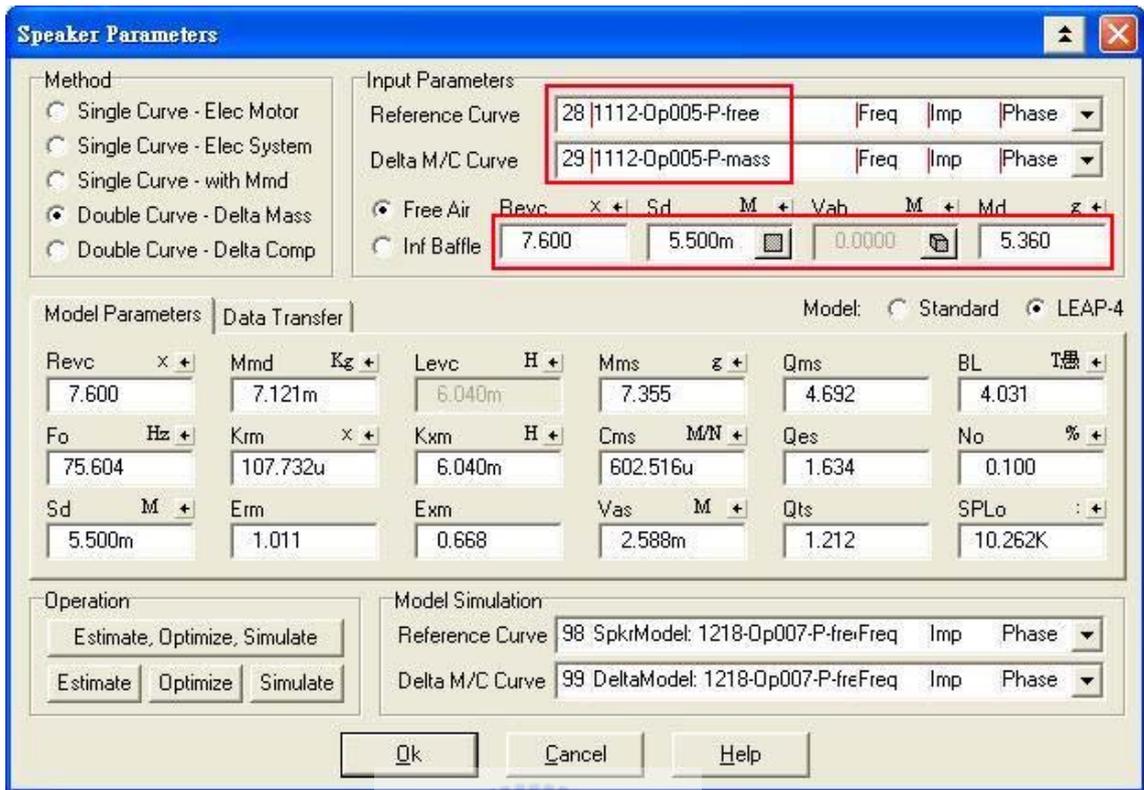


圖 6-6 揚聲器參數計算

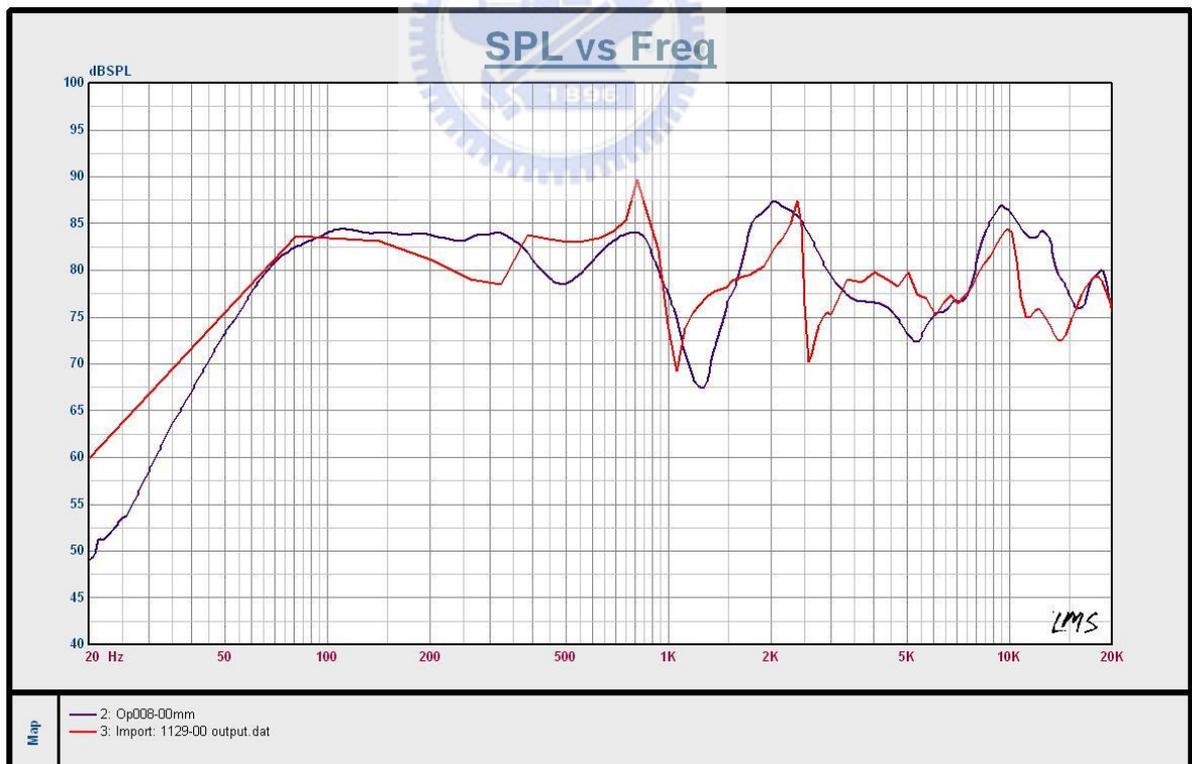


圖 6-7 具碳纖彈波巴沙木振動板與 ANSYS 模擬之聲壓曲線

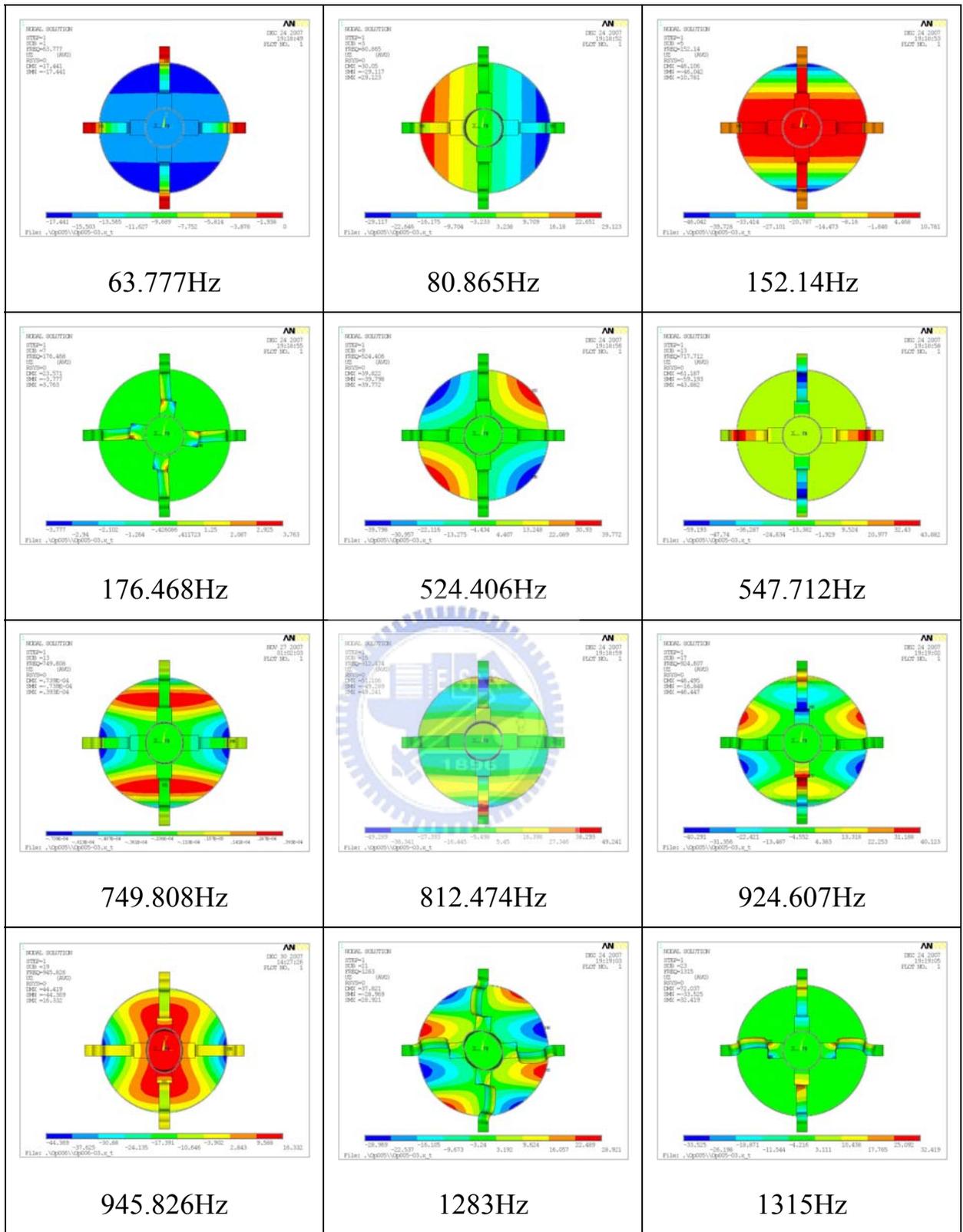


圖 6-8(a) 具碳纖支承巴桑木振動板自然頻率圖

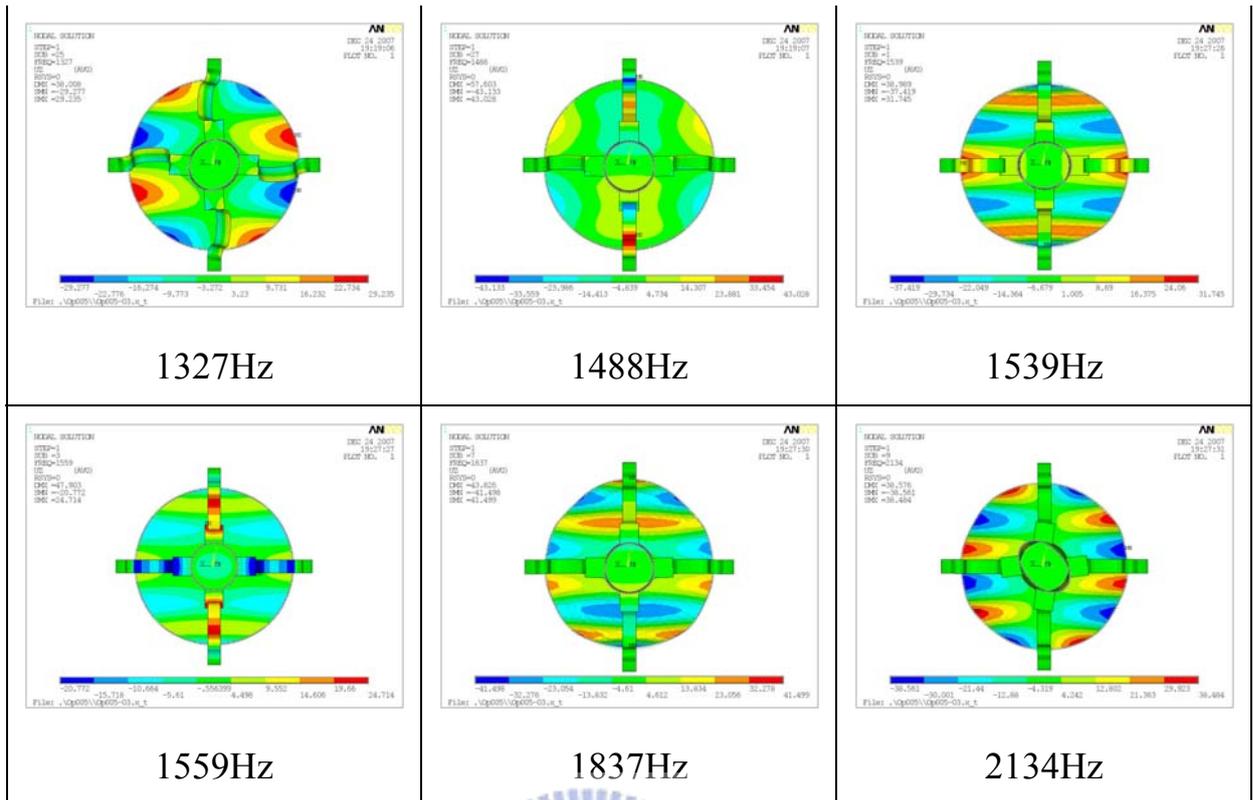


圖 6-8(b) 具碳纖支承巴桑木振動板自然頻率圖

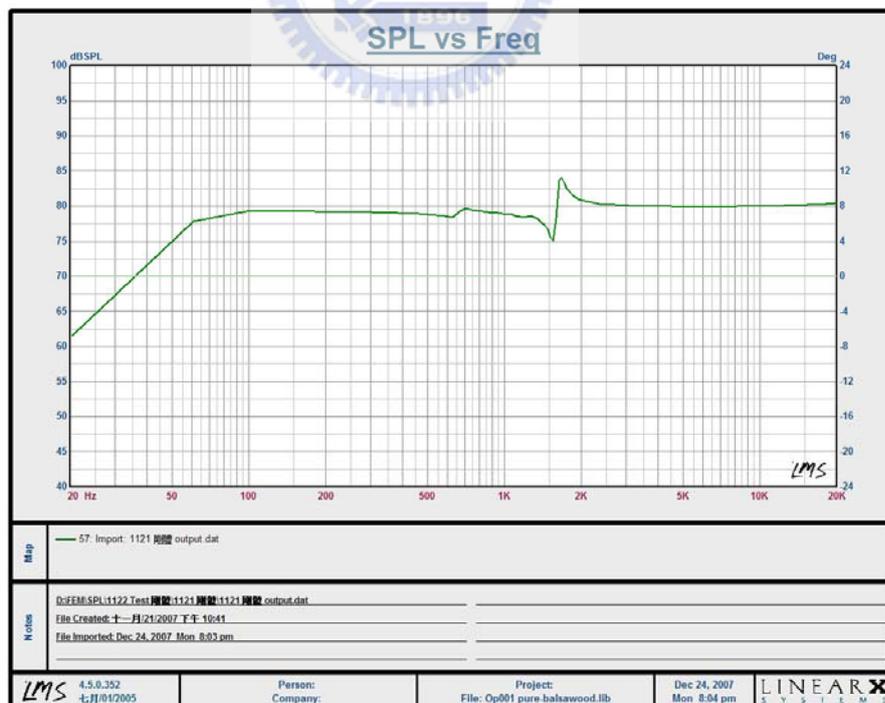


圖 6-9 具碳纖支承之剛體振動板 ANSYS 模擬圖

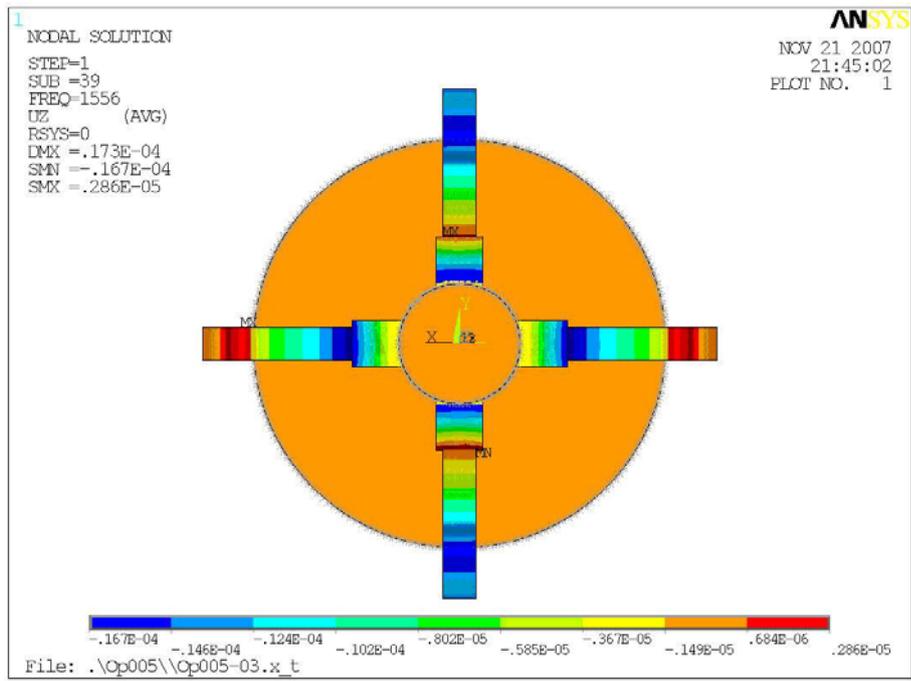
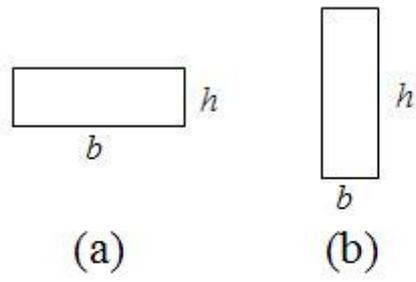


圖 6-10 ANSYS 模擬剛體振動板振形圖



圖 6-11 碳纖平面加勁示意圖



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

圖 6-12 慣性矩說明

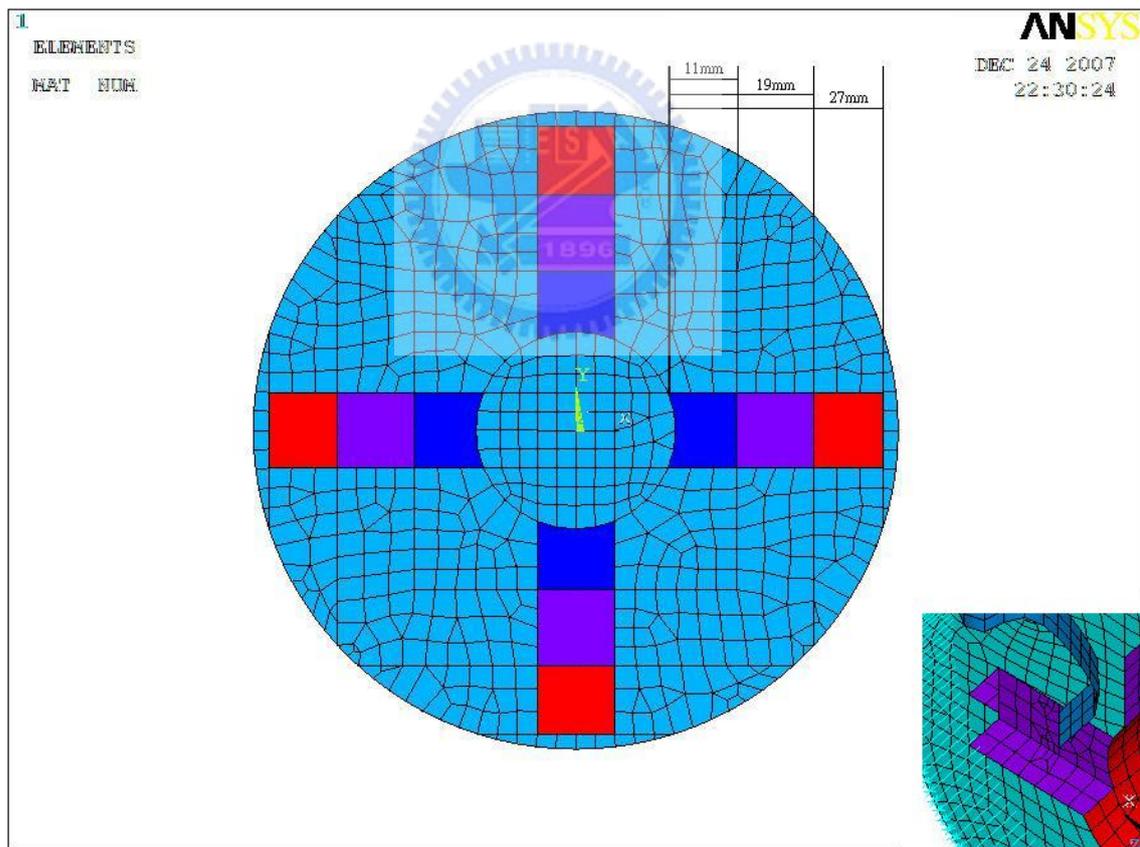


圖 6-13 碳纖立體加勁位置示意圖

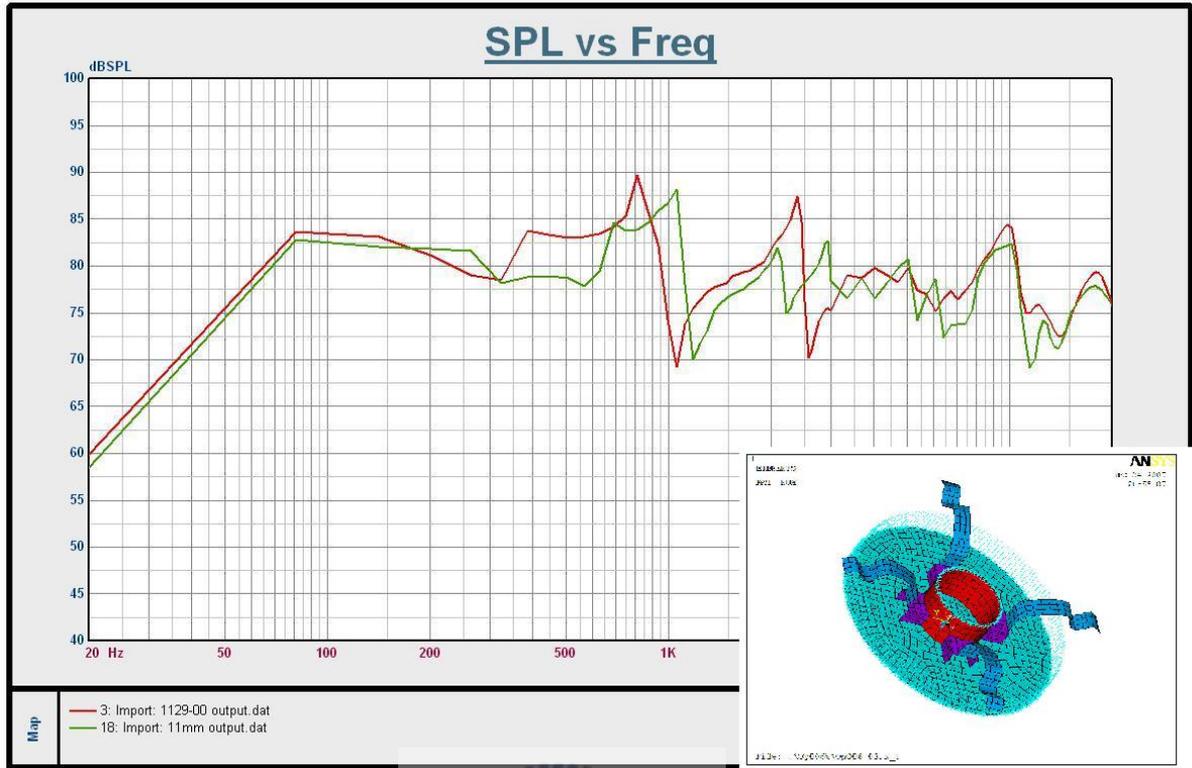


圖 6-14 巴桑木與 11mm 立體加勁聲壓圖

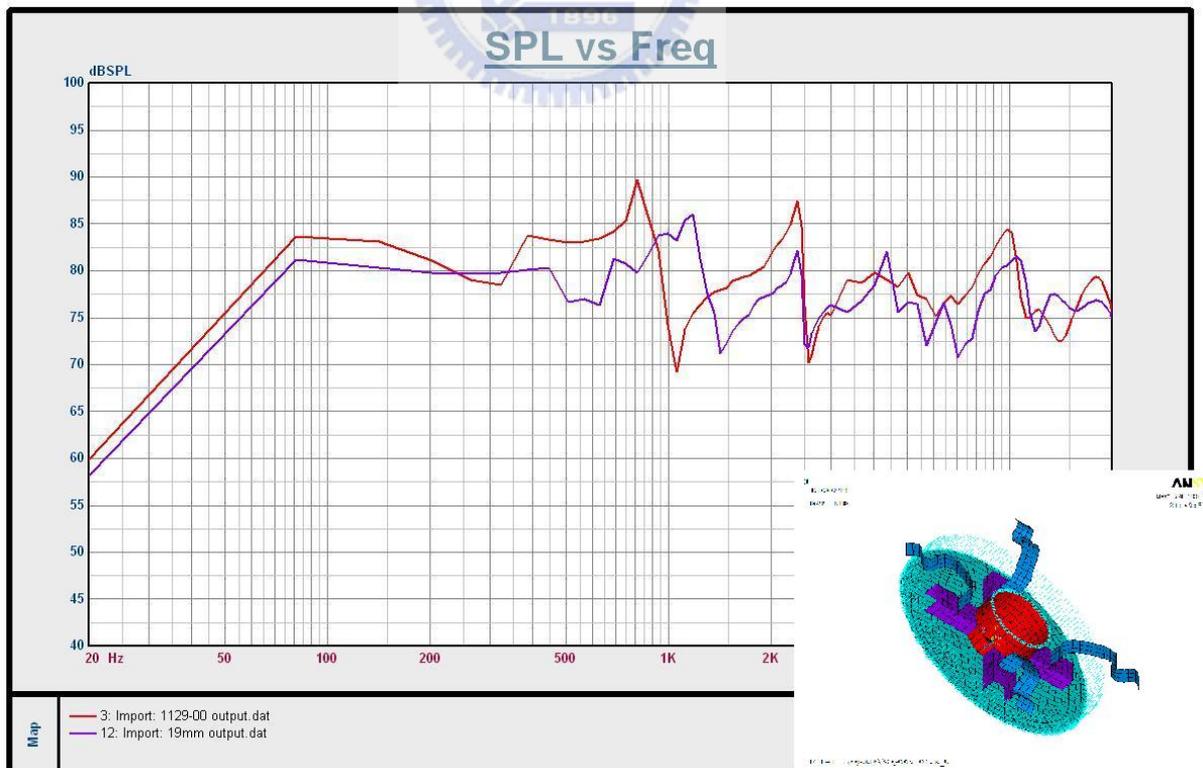


圖 6-15 巴桑木與 19mm 立體加勁聲壓圖

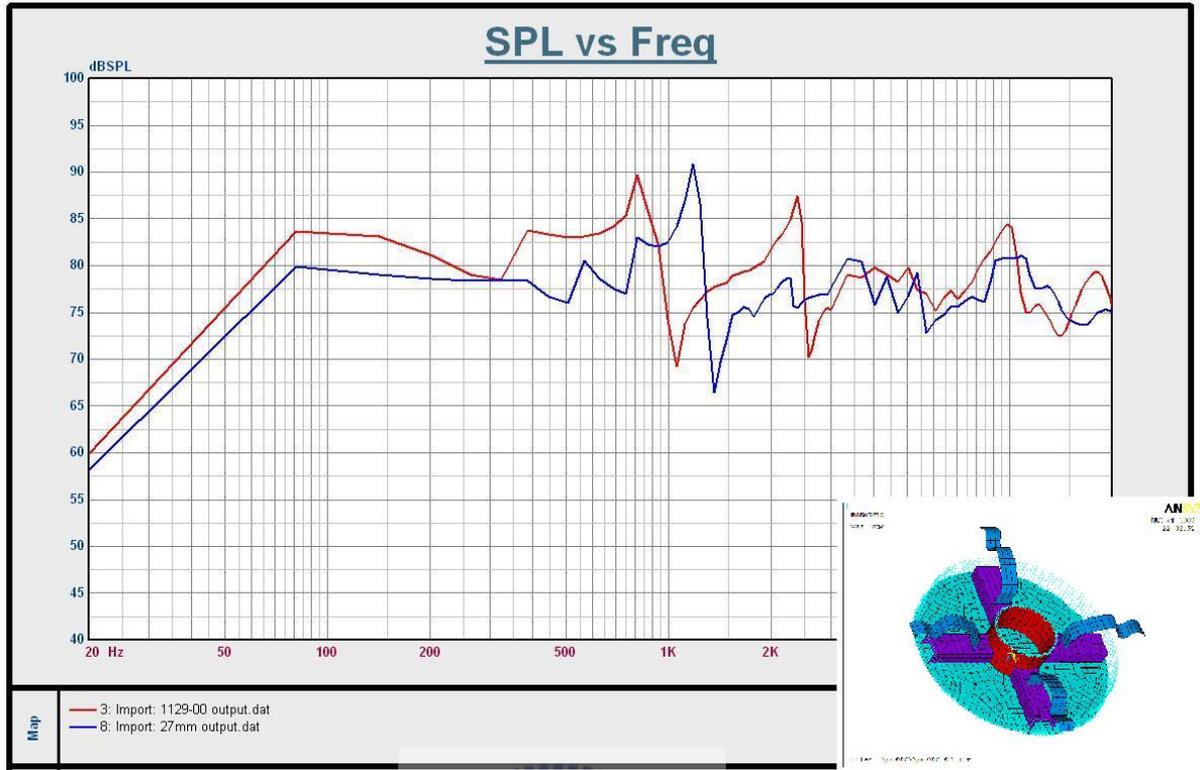


圖 6-16 巴桑木與 27mm 立體加勁聲壓圖

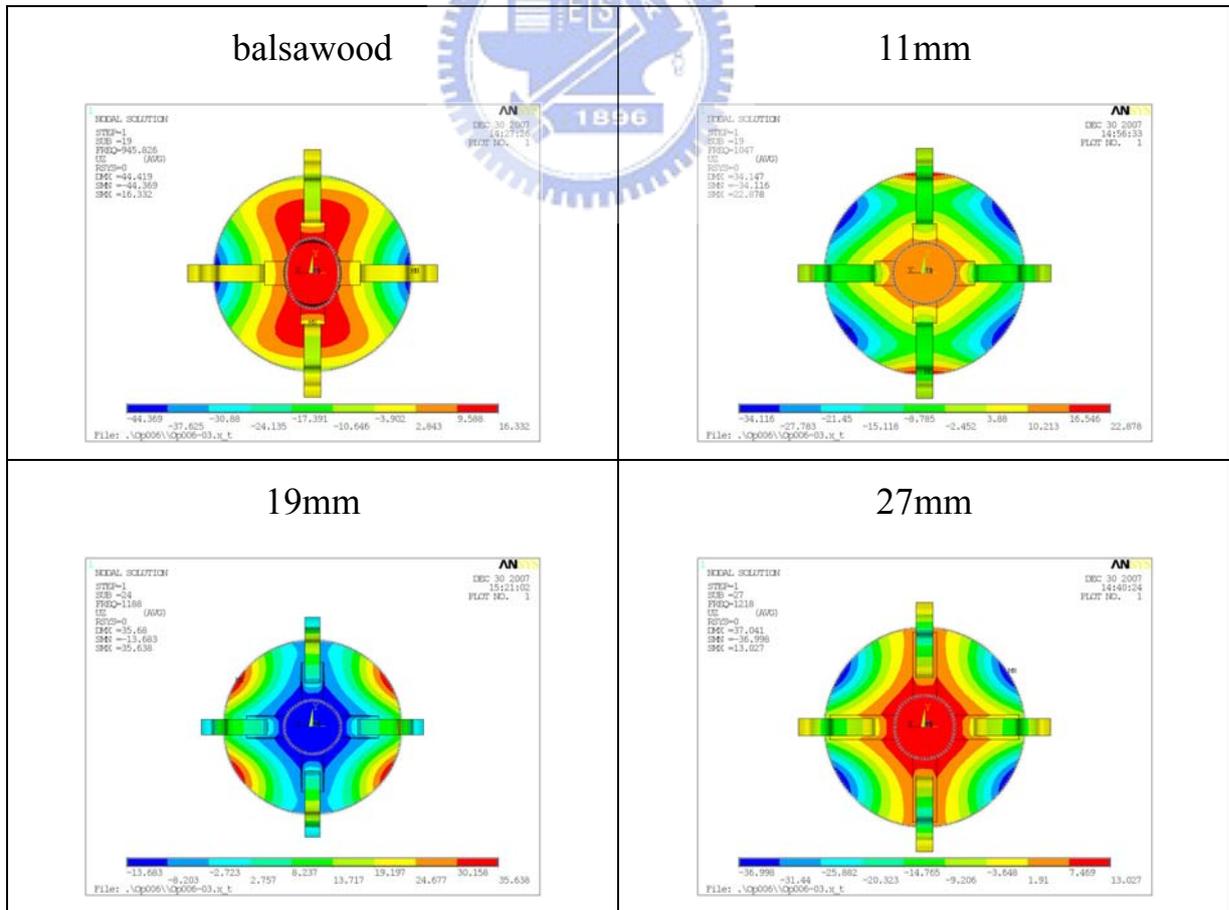


圖 6-17 立體加勁與彎矩模態圖

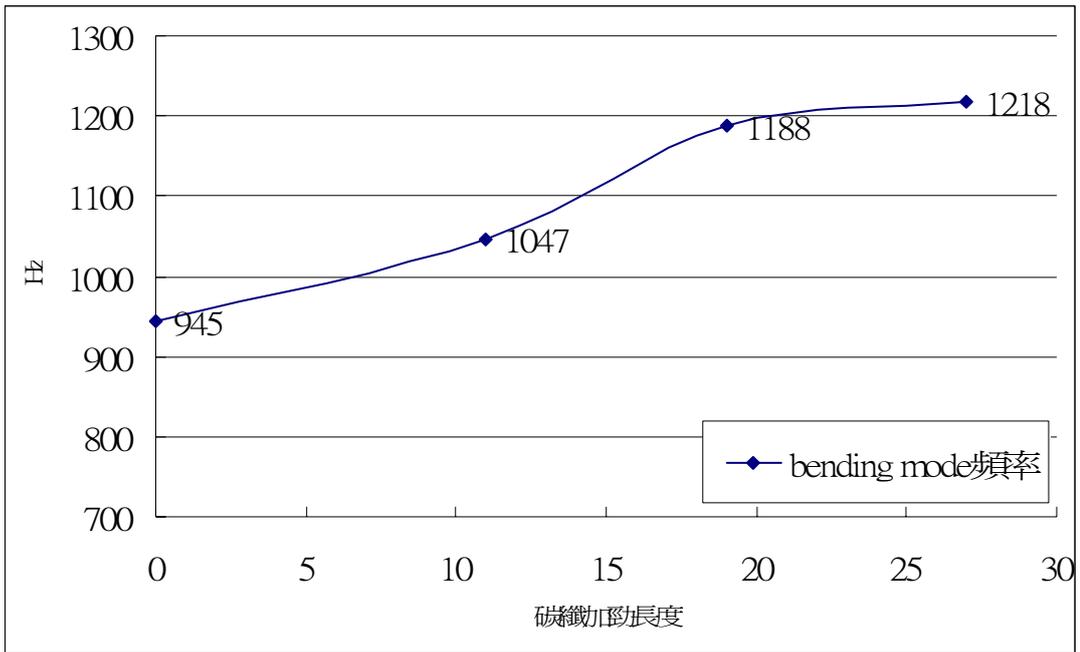


圖 6-18 碳纖加勁長度與彎矩模態頻率關係

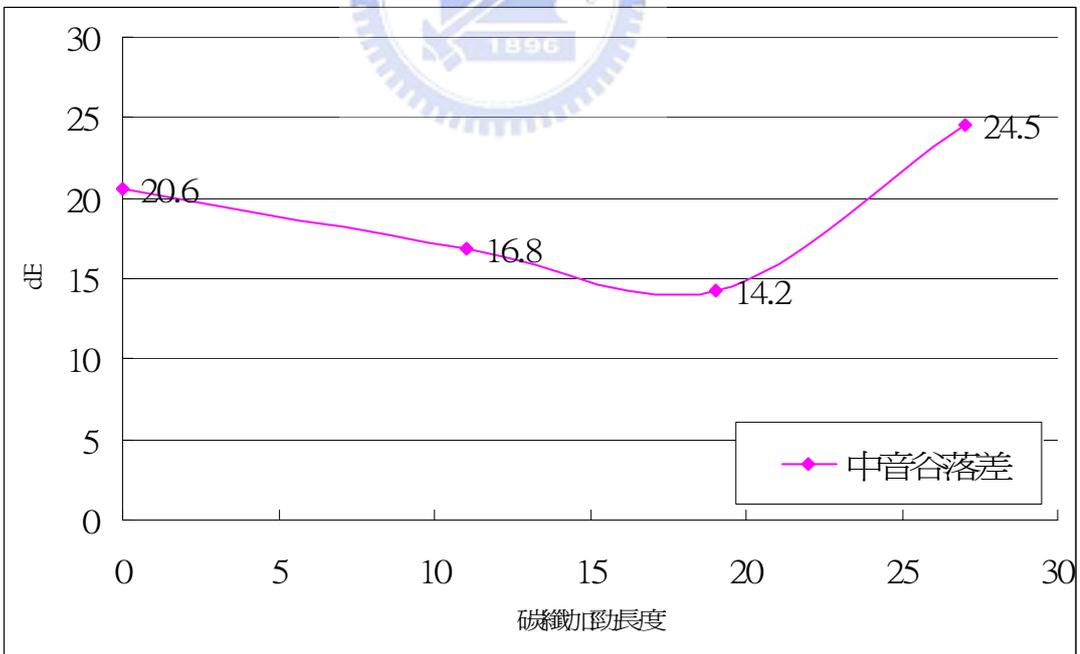


圖 6-19 碳纖加勁長度與中音谷落差關係

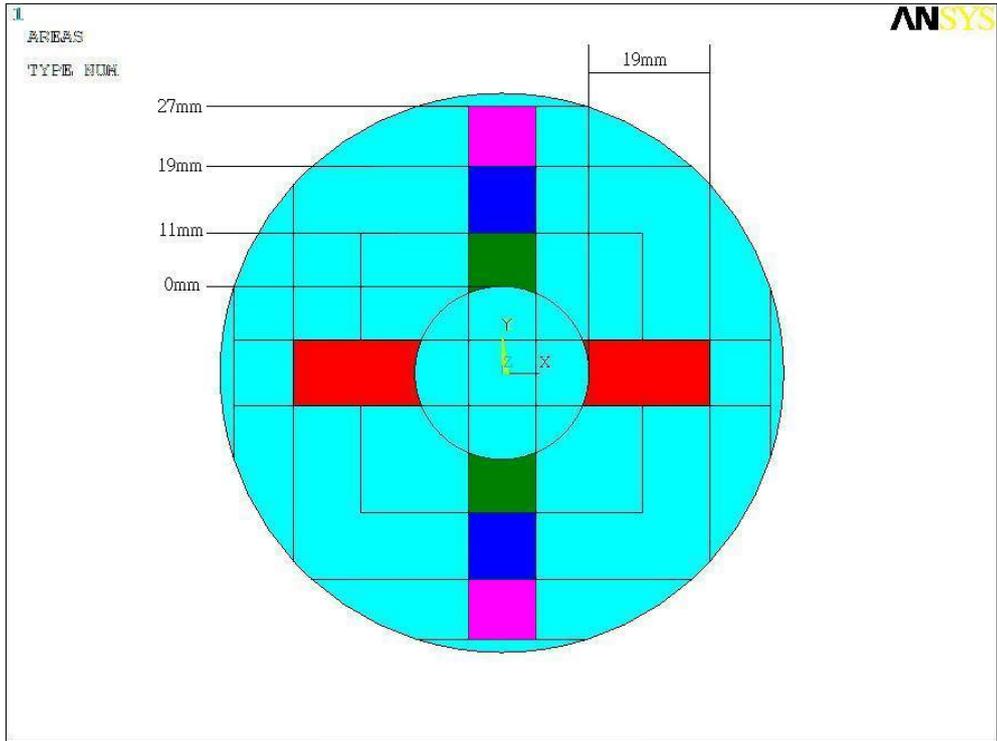


圖 6-20 碳纖立體 y 軸不同加勁位置示意圖



圖 6-21 19mm 與 y 軸不同加勁位置聲壓圖

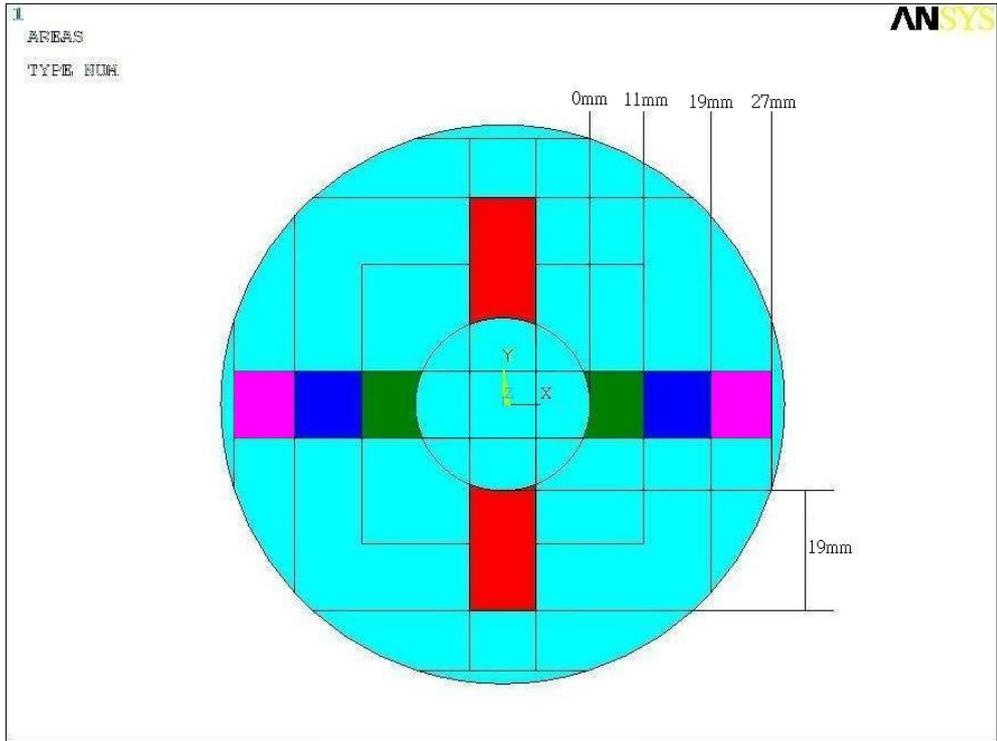


圖 6-22 碳纖立體 x 軸不同加勁位置示意圖

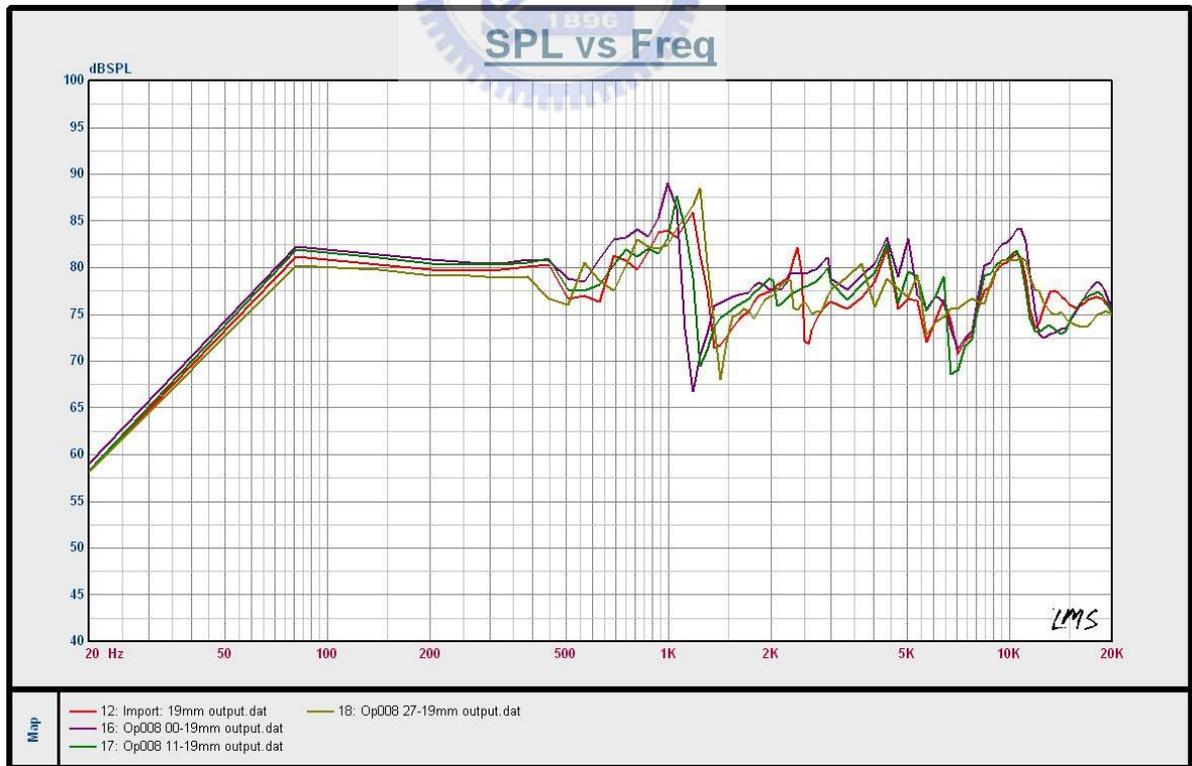


圖 6-23 19mm 與 x 軸不同加勁位置聲壓圖

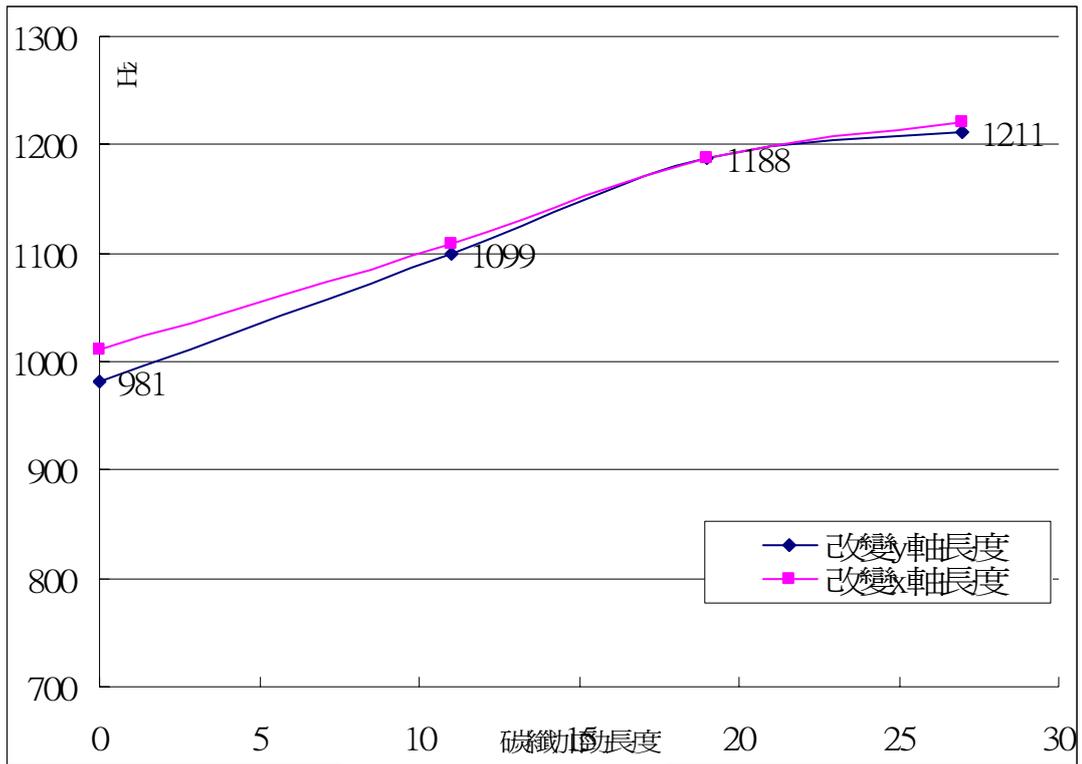


圖 6-24 改變 x、y 軸之彎矩振形頻率比較

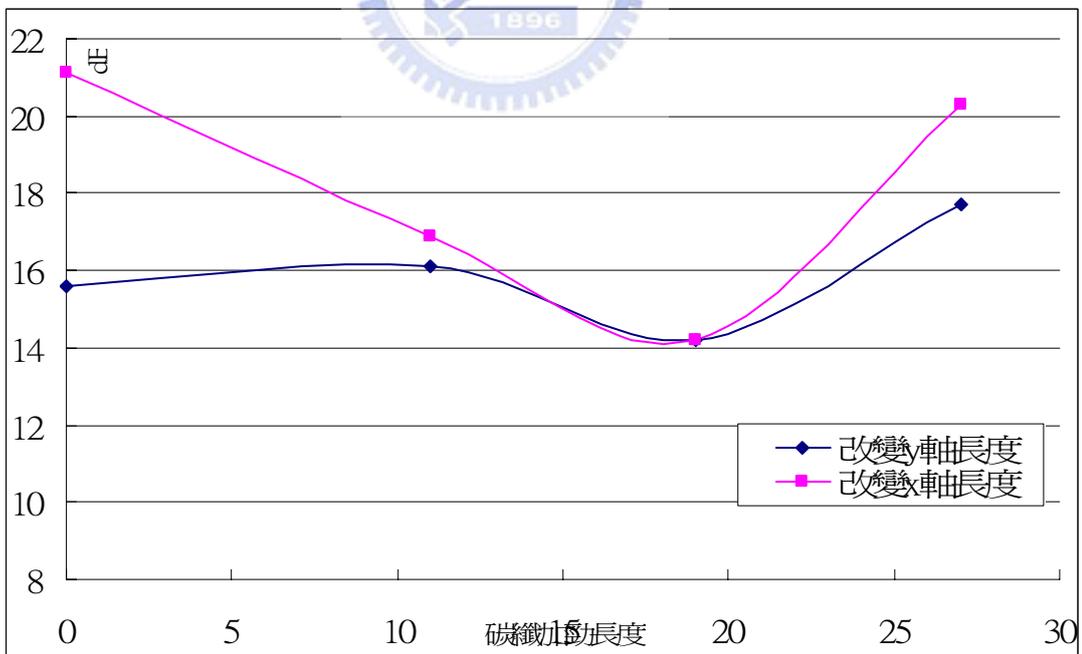


圖 6-25 改變 x、y 軸之中音谷落差比較



圖 6-26 具立體碳纖加勁振動板

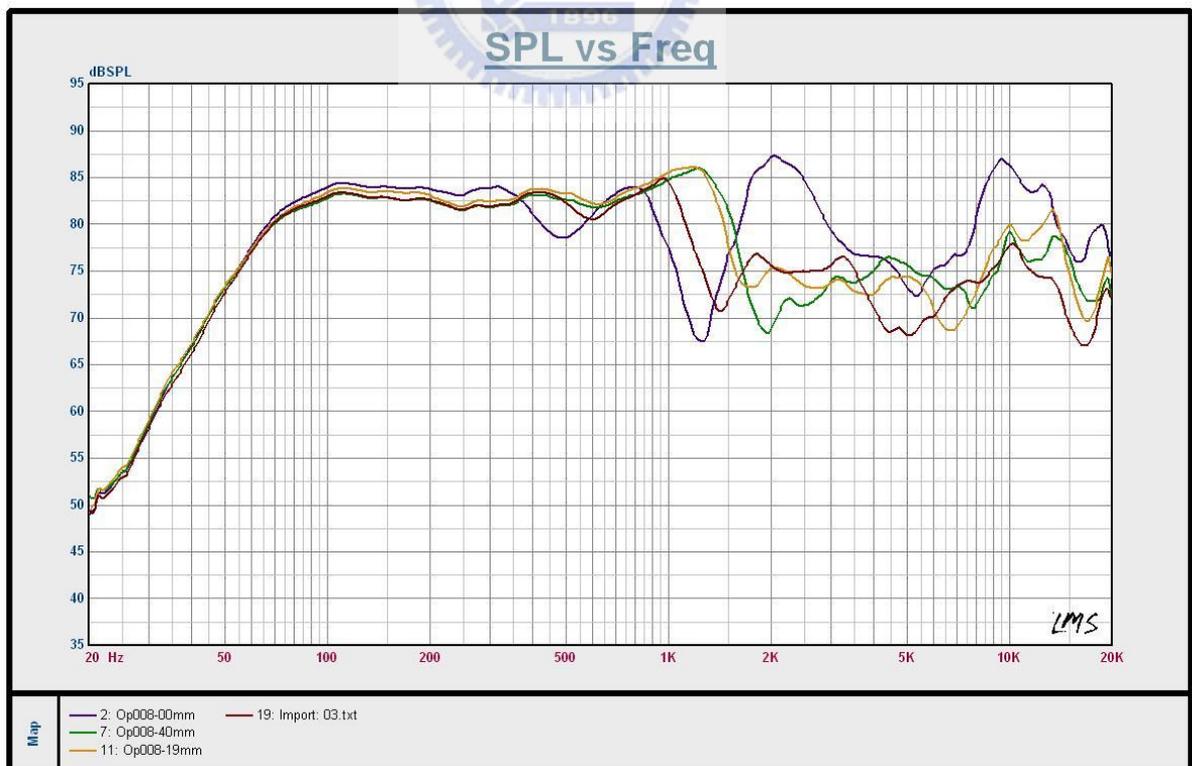


圖 6-27 碳纖立體加勁板實驗聲壓圖

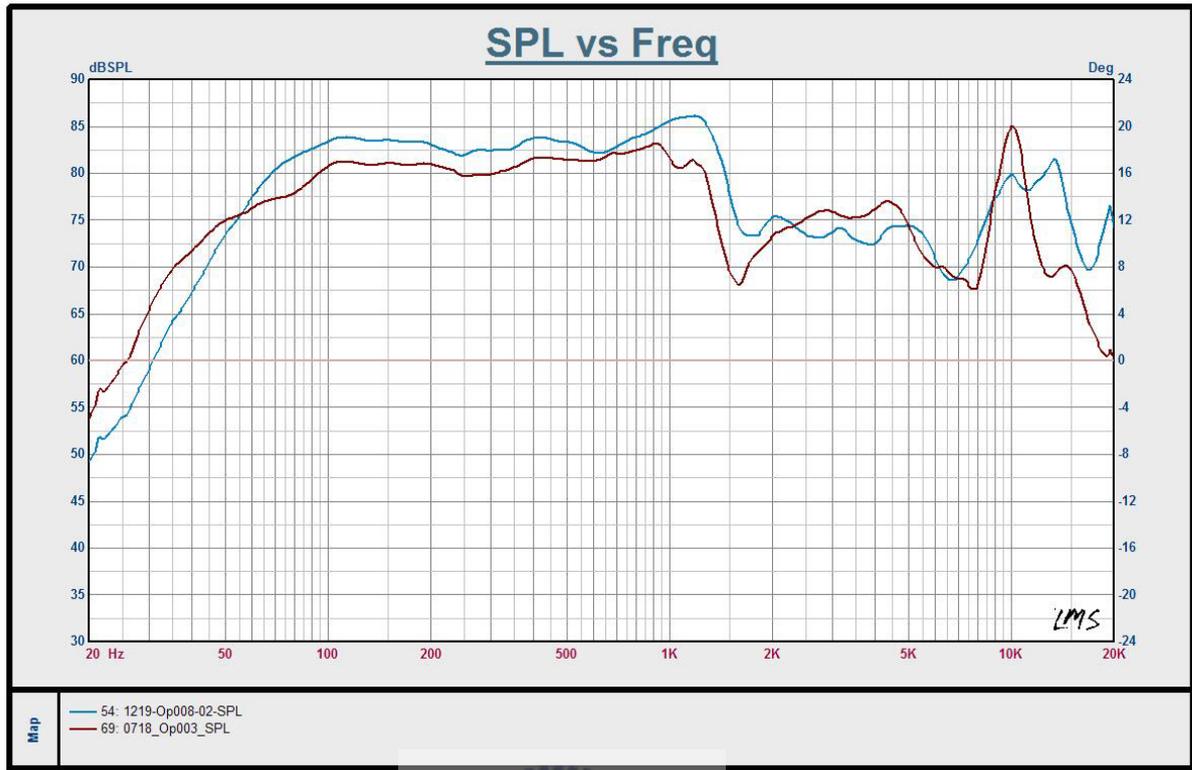


圖 6-28 19mm 加勁板與碳纖三明治板聲壓比較

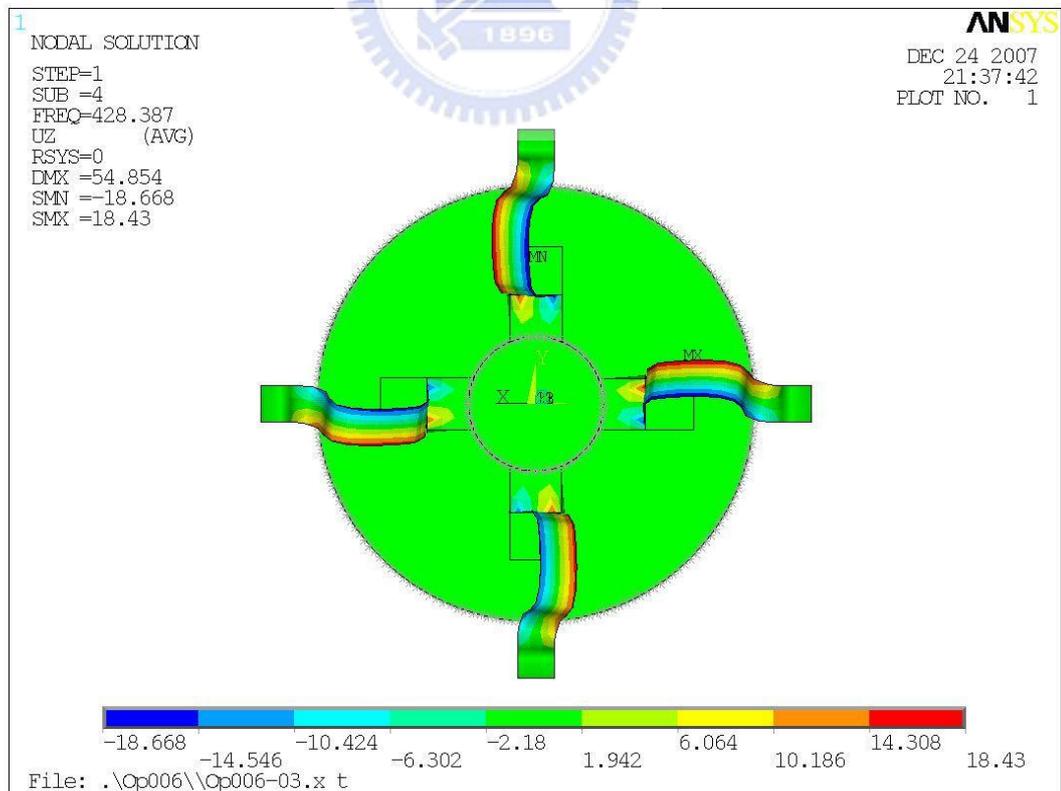


圖 6-29 ANSYS 模擬之彈性支承變形振動模態

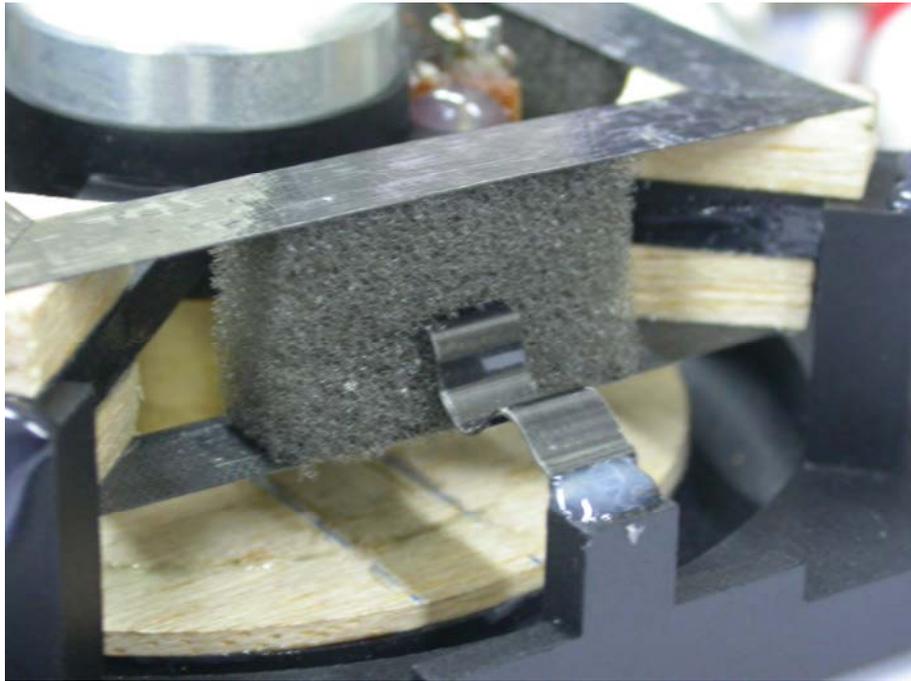


圖 6-30 加泡棉之碳纖彈性支承

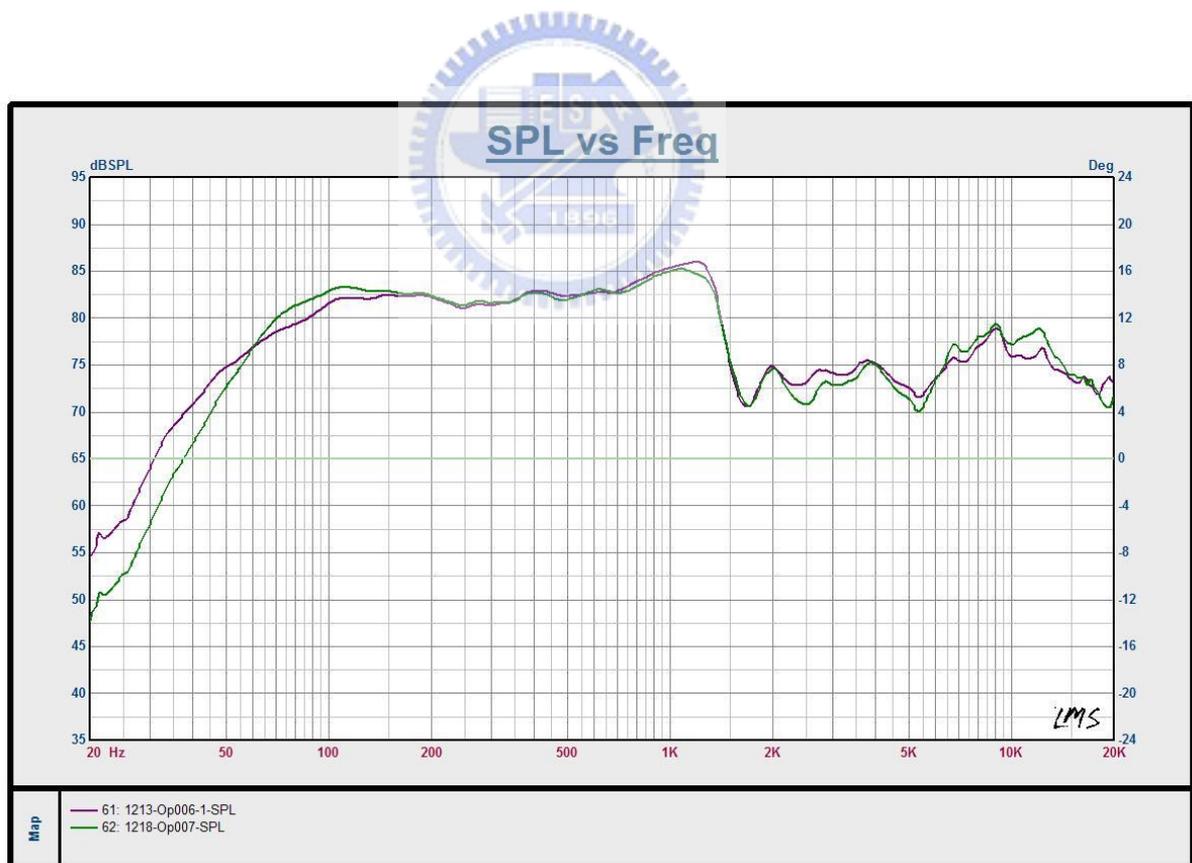


圖 6-31 19mm 加勁板與彈性支承加泡棉之比較