

國立交通大學
機械工程學系碩士班
碩士論文

壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳



Circumferential Ridge Wave Propagation in
Piezoelectric Tubes

研究生：楊炘岳

指導教授：尹慶中 博士

中華民國九十六年七月

壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳
Circumferential Ridge Wave Propagation in
Piezoelectric Tubes

研 究 生：楊焯岳

Student : Shin-Yueh Yang

指 導 教 授：尹慶中 博士

Advisor : Dr. Ching-Chung Yin

國 立 交 通 大 學
機 械 工 程 學 系 碩 士 班
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Mechanical Engineering
July 2007
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 六 年 七 月

國立交通大學

博碩士論文全文電子檔著作權授權書

(提供授權人裝訂於紙本論文書名頁之次頁用)

本授權書所授權之學位論文，為本人於國立交通大學機械工程系所
固控組，95學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文題目：壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳
指導教授：尹慶鐘

■ 同意

本人茲將本著作，以非專屬、無償授權國立交通大學與台灣聯合大學系統圖書館：基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，與回饋社會與學術研究之目的，國立交通大學及台灣聯合大學系統圖書館得不限地域、時間與次數，以紙本、光碟或數位化等各種方法收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行線上檢索、閱覽、下載或列印。

論文全文上載網路公開之範圍及時間：

本校及台灣聯合大學系統區域網路	■ 中華民國 97 年 8 月 30 日公開
校外網際網路	■ 中華民國 98 年 8 月 30 日公開

授權人：楊忻岳

親筆簽名：楊 忻 岳

中華民國 95 年 8 月 30 日

國立交通大學

博碩士紙本論文著作權授權書

(提供授權人裝訂於全文電子檔授權書之次頁用)

本授權書所授權之學位論文，為本人於國立交通大學機械工程系所
固控組，95學年度第二學期取得碩士學位之論文。

論文題目：壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳

指導教授：尹慶鐘

■ 同意

本人茲將本著作，以非專屬、無償授權國立交通大學，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，與回饋社會與學術研究之目的，國立交通大學圖書館得以紙本收錄、重製與利用；於著作權法合理使用範圍內，讀者得進行閱覽或列印。

本論文為本人向經濟部智慧局申請專利(未申請者本條款請不予理會)的附件之一，申請文號為：_____，請將論文延至____年____月____日再公開。

授權人：楊忻岳

親筆簽名： 楊 忻 岳

中華民國 95 年 8 月 30 日

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 機械工程 學系碩士班 楊炘岳 君

所提論文(中文) 壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳

(英文) Circumferential ridge wave propagation in
piezoelectric tubes

合於碩士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員：蕭國樑

馬烈清

楊明化

指導教授：李慶中

系主任：周以榮 教授

中華民國 96 年 7 月 27 日

壓電圓管脊緣撓性波的周向波傳

研究生：楊炘岳

指導教授：尹慶中 博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘 要

圓管脊緣撓性波的波傳問題迄今尚無確切解，通常仰賴數值解析或經驗公式。本文探討壓電圓管脊緣撓性波的頻散特性與共振模態，以分離變數法將圓柱體截面的位移表示成截面座標的函數與周向波傳因子的乘積，以雙維有限元素法與漢彌頓原理推導脊緣撓性波的頻散方程式，數值解析行進波的頻散曲線及駐波的共振頻率，應用於超音波馬達的最佳化設計及相鄰共振頻率之模態隔離。

實驗方面以網路分析儀量測兩端自由之壓電圓管的阻抗曲線，將共振頻率量測值與脊緣撓性波的頻散曲線比較，驗證數值解析的正確性。本文以簡單體法反算壓電圓管的幾何參數與彈性係數，策略性的先反算前者，在據以反算後者，有效地提高彈性係數反算的準確性。採用高階軸向模態的共振頻率量測值，可以減少目標函數局部極小值的發生。

關鍵字：壓電圓管、脊緣撓性波、頻散曲線、雙維有限元素法、簡單體法

Circumferential Ridge Wave Propagation in Piezoelectric Tubes

Student: Shin-Yueh Yang

Advisor: Dr. Ching-Chung Yin

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTARCT

Flexural ridge wave propagation around a circular cylindrical tube has no exact solution up to the present. It is used to be solved numerically or using an empirical formula. This thesis investigates the dispersive properties of ridge waves traveling circumferentially around the piezoelectric tubes and their resonant modes. Based on separation of variables, the displacements of ridge wave are represented as the product of a cross-sectional coordinate depending function and the propagator along the circumference of tube. The dispersion equation of ridge waves is formulated by using Hamilton's principle and so-called bi-dimensional finite element method. Dispersion curves of traveling waves and resonant frequencies corresponding to standing waves are solved numerically. Several applications are illustrated such as optimal design for ultrasonic motors and modal separation of structure among adjacent resonant frequencies.

The impedance curves of a free-free piezoelectric tube are measured by a network analyzer. The measured resonant frequencies are compared with the predicted dispersion curves of ridge waves. Validity of the present numerical approach has been verified. Geometric parameters and elastic constants of the piezoelectric tube are determined through an inverse scheme based on the measured resonant frequencies by using simplex method. A good accuracy in

inversion for elastic constants can be strategically achieved by determining the geometric parameters first. Then it is followed by seeking the best likelihood of elastic constants. The number of local minima during inversion can be reduced if more measured resonant frequencies of higher order axial modes are included in the objective function.

Keywords: piezoelectric tube, flexural ridge waves, dispersion curves,
bi-dimensional finite element method, simplex method



誌謝

在此論文定稿之際，感謝指導教授 尹慶中博士兩年來的悉心指導，使學生論文得以順利完成，在此致上由衷的謝意。同時感謝馬劍清教授、蕭國模教授及楊哲化教授撥冗擔任學生口試委員，給予學生指教與指正。此外，也謝謝學長王多聞、許世明、游泰和、李雨青給予焯岳生活與學業上的幫助，加上同學施文斌、蘇裕為、李振良兩年來的互相扶持與幫助，使研究的過程更加順利。以及學弟蔡汶志、潘權文、嚴承侯謝謝你們過去一年的陪伴，讓焯岳的研究所生涯增色許多，也祝福你們論文順利。當然大學同窗好友璽尹、鼎育、舜傑和淞暘，也因為你們的鼓勵，焯岳才能順利完成研究所學業。

政良最感謝的是偉大的雙親，楊振坤先生與鄭蘭英女士，你們是焯岳精神上最大的支柱，求學之路有你們的支持、呵護與寬容，讓焯岳在無後顧之憂下完成碩士學位，也感謝大姐劭芸與二姐舒婷你們的支持與鼓勵。還有許多不及備載曾幫助焯岳的朋友，衷心感謝外，政良僅以此論文獻給我摯愛的雙親、家人、及好友。

目 錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iv
目錄	v
表目錄	vii
圖目錄	viii
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 文獻回顧	1
1.3 內容簡述	3
第二章 理論分析	5
2.1 壓電材料的特性方程式	5
2.2 漢彌頓原理	7
2.3 雙維有限元素分析	8
2.4 頻散方程式	10
2.5 元素矩陣的變換	13
2.6 脊緣位移的修正	16
第三章 實驗量測與材料係數反算	18
3.1 電極設計與塗佈	18
3.2 共振頻率量測	19
3.3 簡單體法	19
3.4 目標函數	20
3.5 結構參數的反算	21

3.6 材料係數的靈敏度分析	22
3.7 材料係數的反算	24
第四章 結論與未來展望	26
4.1 結論	26
4.1.1 數值分析	26
4.1.2 實驗量測與反算	27
4.2 未來展望	27
參考文獻	29
附錄 A	31
附錄 B	33
附表	35
附圖	39



表目錄

表 1 實驗值與結構參數反算前理論值	34
表 2 實驗值與結構參數反算前理論差值之差值	34
表 3 實驗值與結構參數反算後理論值	35
表 4 實驗值與結構參數反算後理論差值之差值	35
表 5 理論的材料係數值	36
表 6 結構參數反算後, 反算兩材料係數	36
表 7 結構參數反算後, 反算三材料係數	37
表 8 結構參數反算前, 反算兩材料係數	37



圖目錄

	頁次
圖 2.1 圓柱型聲波導示意圖	39
圖 2.2 銅管的幾何外形	39
圖 2.3 銅管脊緣撓性波相速度與波數之頻散曲線	40
圖 2.4 銅管脊緣撓性波頻率與波數之頻散曲線	40
圖 2.5 壓電圓管的幾何外形	41
圖 2.6 壓電圓管脊緣撓性波頻率與波數之頻散曲線	41
圖 2.7 修正前的銅管脊緣撓性波徑向位移分佈	42
圖 2.8 修正前的銅管脊緣撓性波周向位移分佈	42
圖 2.9 修正後的銅管脊緣撓性波徑向位移分佈	43
圖 2.10 修正後的銅管脊緣撓性波周向位移分佈	43
圖 2.11 修正後的壓電圓管脊緣撓性波徑向位移分佈	44
圖 2.12 修正後的壓電圓管脊緣撓性波周向位移分佈	44
圖 3.1 AutoCAD 繪製的網版設計圖	45
圖 3.2 實際完成的網版	45
圖 3.3 佈好兩花瓣電極的壓電圓管	46
圖 3.4 實驗量測示意圖	46
圖 3.5 網路分析儀與放大器	47
圖 3.6 底部無拘束的壓電圓管脊緣撓性波頻散曲線	47
圖 3.7 (2,1)模態的阻抗曲線	48
圖 3.8 (2,2)模態的阻抗曲線	48
圖 3.9 (2,1)模態的阻抗曲線局部放大圖	49
圖 3.10 (2,2)模態的阻抗曲線局部放大圖	49
圖 3.11 (2,3)模態的阻抗曲線	50

圖 3.12 (3,1)模態的阻抗曲線	50
圖 3.13 (3,2)模態的阻抗曲線	51
圖 3.14 (3,3)模態的阻抗曲線	51
圖 3.15 (4,1)模態的阻抗曲線	52
圖 3.16 (4,2)模態的阻抗曲線	52
圖 3.17 (4,3)模態的阻抗曲線	53
圖 3.18 (5,1)模態的阻抗曲線	53
圖 3.19 (5,2)模態的阻抗曲線	54
圖 3.20 (5,3)模態的阻抗曲線	54
圖 3.21 (6,1)模態的阻抗曲線	55
圖 3.22 (6,2)模態的阻抗曲線	55
圖 3.23 (6,3)模態的阻抗曲線	56
圖 3.24 修正前壓電圓管脊緣撓性波頻散曲線與實驗值的比較	56
圖 3.25 簡單體法反算示意圖	57
圖 3.26 簡單體法反算程式流程圖	57
圖 3.27 內徑 R_{in} 的靈敏度測試	58
圖 3.28 高度 h 的靈敏度測試	58
圖 3.29 結構幾何參數 R_{in} 、 h 的反算收斂性測試	59
圖 3.30 結構幾何參數 R_{in} 、 h 的反算結果	59
圖 3.31 幾何參數反算修正後之壓電圓管脊圓撓性波頻散曲線 與實驗值比較	60
圖 3.32 彈性係數 C_{11} 的靈敏度測試	60
圖 3.33 彈性係數 C_{12} 的靈敏度測試	61
圖 3.34 彈性係數 C_{13} 的靈敏度測試	61
圖 3.35 彈性係數 C_{33} 的靈敏度測試	62

圖 3.36 彈性係數 C_{44} 的靈敏度測試	62
圖 3.37 壓電係數 e_{15} 的靈敏度測試	63
圖 3.38 壓電係數 e_{31} 的靈敏度測試	63
圖 3.39 壓電係數 e_{33} 的靈敏度測試	64
圖 3.40 介電係數 ϵ_{11} 的靈敏度測試	64
圖 3.41 介電係數 ϵ_{33} 的靈敏度測試	65
圖 3.42 用 $m=1$ 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的收斂性 測試結果	65
圖 3.43 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的 收斂性測試結果	66
圖 3.44 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的 收斂性測試結果	66
圖 3.45 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的 收斂性測試結果	67
圖 3.46 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的 收斂性測試結果	67
圖 3.47 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的 收斂性測試結果	68
圖 3.48 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的 收斂性測試結果	68
圖 3.49 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的 收斂性測試結果	69
圖 3.50 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的 收斂性測試結果	69
圖 3.51 用 $m=1$ 、 2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的	

收斂性測試結果	70
圖 3.52 用 $m=1、2$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面)的 收斂性測試結果	70
圖 3.53 用 $m=1、2$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的 收斂性測試結果	71
圖 3.54 用 $m=1、2$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{44} 平面)的 收斂性測試結果	71
圖 3.55 用 $m=1、2$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面)的 收斂性測試結果	72
圖 3.56 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的 收斂性測試結果	72
圖 3.57 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面) 的收斂性測試結果	73
圖 3.58 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	73
圖 3.59 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	74
圖 3.60 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面) 的收斂性測試結果	74
圖 3.61 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	75
圖 3.62 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	75
圖 3.63 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	76

圖 3.64 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	76
圖 3.65 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	77
圖 3.66 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面) 的收斂性測試結果	77
圖 3.67 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	78
圖 3.68 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	78
圖 3.69 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{33} 平面) 的收斂性測試結果	79
圖 3.70 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面) 的收斂性測試結果	79
圖 3.71 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	80
圖 3.72 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{33} 平面) 的收斂性測試結果	80
圖 3.73 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面) 的收斂性測試結果	81
圖 3.74 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{13} 、 C_{33} 平面) 的收斂性測試結果	81
圖 3.75 用 $m = 1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{44} 、 C_{33} 平面) 的收斂性測試結果	82
圖 3.76 結構參數反算後，再反算兩個彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的結果	82

圖 3.77 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面) 的 結 果	83
圖 3.78 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面) 的 結 果	83
圖 3.79 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面) 的 結 果	84
圖 3.80 無結構參數反算，直接反算兩個彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的 結 果	84



第一章 緒論

1.1 研究背景

楔形聲波導的研究始於 1970 年代初期，Lagasse [1]於 1972 年發現楔形體尖端的導波行為後，楔形體的導波波傳研究逐漸受到重視。研究中發現，楔形體在無截斷(truncation free)的狀態下，沿著楔形體頂端波傳的反對稱波(antisymmetrical flexural waves)，能量集中在離楔形體頂端大約一個波長的範圍內，且無頻散(dispersion free)的特性。而 Mckenna *et al* [2]以平板邊緣波傳的撓性波近似楔形體導波，發現在楔形體有截角的狀態下，撓性波的相速度會隨著頻率的增加而改變的頻散現象。

為了描述楔形體導波的波傳行為，許多研究已建立了與實驗趨勢相符的數學模型，但由於楔形體導波的波傳行為涉及複雜的幾何外型與邊界值問題，目前尚未有精確的解析解，只能以數值方法分析以求其近似解。

Yin and Yu [3]以數值模擬的結果發現，導波的橢圓形運動造成了楔形體頂端的周向位移過小，即使撓性波的能量局限在楔形的頂端，超音波馬達也無法提供足夠的扭力轉動轉子，並提出將轉子設計於周向位移最大處的新型超音波馬達。本研究結合 Tominaga *et al* [4]提出利用脊緣波導的新型線型超音波馬達與 Yin and Yu [3]提出的新型轉子設計概念，針對壓電圓管脊緣的波傳行為進行探討，同時配合單一幾何外型、不同的幾何參數進行比較，作為應用脊緣波導驅動之超音波馬達設計的最佳化參考。

1.2 文獻回顧

Lagasse[1]及 Maradudin *et al* [5]於 1972 年分別以數值計算方式，證明楔形體頂端在一定範圍的角度內具有波導(waveguide)的功能，反對稱導波沿著楔形體頂端波傳，其能量大部分局限在距離楔形體頂端大約一個波長

的範圍內，相速度比相同波長的雷利波(Rayleigh wave)波速慢，該導波在楔形體無截(truncation)平時，不具有頻散現象。

Lagasse *et al* [6]於 1973 年，從數值分析結果歸納出簡單的經驗公式，當頂角角度的整數倍小於或等於 90° 時，各反對稱導波模態之波傳速度可表示為 $V = V_R \sin(n\theta)$ ，其中 V_R 代表雷利波波速， θ 為楔形體頂角角度， n 為導波的模態數。

Lagasse [7]於 1973 年，以變分法(variation principle)搭配有限元素法探討線型聲波導的波傳行為，此方法適用於各種不同的幾何截面，對於聲波導的波傳研究，提供一個重要的探索工具。

Mckenna *et al* [2]於 1974 年，將頂角角度很小的無限長楔形體近似為薄板，應用板殼理論，推導無截平及頂角截平的楔形體導波相速度與波數的關係，發現頻散現象在真實的楔形體中是無法避免的，頂角的截平越大，頻散現象越明顯。

Jia and Billy [8]於 1992 年，以 Nd:YAG 脈衝雷射激發源，在楔形體頂端瞬間加熱膨脹生成彈性波，並利用光學干涉儀(interferometer)接收訊號，再於不同的偵測點量得兩組波形訊號，由兩組波形的相位差求得相速度。

Krylov [9]於 1994 年，以幾何聲學(geometrical acoustics)計算水中楔形體之導波波傳速度，發現導波受到水的影響，波速比在真空中慢，波速的減少與楔形體頂角角度呈現非線性的關係。此研究亦預測應用低速的楔形波導，可發展出類似水中紅魚運動時的推進器。Krylov 與 Pritchard [10]-[11]終於在 2007 年，發展出類似雙體船的楔形體推進器模型。

Hladky-Hennion [12]於 1996 年，以雙維(bi-dimensional)有限元素法，分析線型與圓柱型楔形體聲波導的波傳行為，並與 Lagasse *et al* [6]歸納出的經驗公式及 Jia and Billy [8]的實驗結果作比較，驗證了此方法。

Yang 和 Liaw [13]於 1998 年，結合三維有限元素分析和雷射超音波的

實驗技術，針對線型楔形體與碟型楔形體(disk-typed wedges)進行分析與量測，將時域下量測到的波傳訊號經二維快速傅立葉轉換(2D-FFT)，獲得導波的相速度頻散曲線。該研究發現，碟型楔形體導波的波傳受到曲率的影響而產生頻散現象，相速度頻散曲線隨著頻率的增加呈現負的斜率變化。

Krylov [14]於 1999 年，繼續以幾何聲學為基礎，推導出更簡單的解析解，用以描述圓錐楔形體和類似圓錐楔形體導波的波傳行為，當曲率半徑遠大於導波波長時，其結果與 Hladky-Hennion [9]的有限元素分析結果互相比較，有很好的的一致性。

陳俊男[15]於 2002 年，參考 Lagasse [7]與 Hennion-Hladky [9]的研究，以數值解析線型及圓柱型楔形聲波導之頻散方程式，並探討楔形體底座之邊界條件、曲率對楔形體導波波傳的影響。

Tominaga *et al* [4]於 2005 年，提出一種矩形結構的線形超音波馬達，根據 Lagasse *et al* [6]的定義，單一模態的撓性振動會被局限在脊緣的特性，產生沿著脊緣波傳的行進波，矩形結構上方的滑塊由於撓性波的橢圓形運動軌跡，使得滑塊朝著波傳的反方向移動。

物理問題的理論解包含解析解與數值解兩種，楔形體波導基座的幾何外形不可能為無限值，因此實際應用上，楔形體聲波導問題沒有解析解，必須仰賴數值解析。

Yin and Yu [3]於 2006 年，由數值模擬結果發現楔形體頂端的導波周向位移過小，導致超音波馬達無法提供足夠的扭力轉動轉子，提出將轉子設計於周向位移最大處的新型超音波馬達。

1.3 內容簡述

本研究以壓電圓管為對象，分析壓電圓管脊緣撓性波的波傳現象，探討波傳頻散曲線與振動共振頻率兩者間的關係，內容分為四章。第二章根

據陳俊男[15]與陳三本[16]對壓電材料的介紹，推導壓電圓管聲波導的頻散方程式；應用雙維有限元素的分析方法，計算壓電圓管聲波導的頻散曲線，提供一個連續的方法尋找共振頻率，並探討各模態對應的周向位移變化，作為超音波馬達的設計參考。

第三章是以網路分析儀進行阻抗量測，將實驗的結果與雙維有限元素法的結果進行比較，再應用 Caceci and Cacheris [17]撰寫的簡單體法數值程式，反算壓電圓管的幾何參數與材料係數。第四章則為本文的結論與未來展望。



第二章 理論分析

本章應用漢彌頓原理與有限元素法，推導適用波傳分析的雙維有限元素，撰寫雙維有限元素數值程式，分析圓柱型壓電管脊緣聲波導的頻散曲線，並應用能量的觀點將各模態位移予以正規化(normalization)，比較不同幾何外形的超音波馬達定子基座之模態位移。

2.1 壓電材料的特性方程式

本研究採用壓電陶瓷材料 PZT-4，為橫向等向性材料(transversely isotropic material)。壓電材料具有正逆壓電效應，若對壓電材料施加正向壓力，壓電體為了抵抗電偶極矩壓縮變短的趨勢，產生電壓以保持原狀態，稱為機械能轉換成電能的正壓電效應。當壓電材料受到電場作用時，電偶極矩被拉長，壓電體會依電場方向而產生形變，稱為電能轉換成機械能之逆壓電效應。壓電結構受電場或機械力作用下，本構方程式如下：

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl} S_{kl} - e_{kil} E_k \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} - \varepsilon_{ij}^S E_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中， T_{ij} 、 S_{kl} 為應力張量及應變張量， c_{ijkl} 是彈性勁度張量(elastic stiffness matrix)， e_{ikl} 是壓電常數(piezoelectric constants)張量， D_i 是電位移， E_k 是電場強度， ε_{ij}^S 是固定應變(constant strain)的介電(dielectric)常數張量。將(2.1)式的下標依 Voigt 表示法簡化，可改寫如下：

$$\begin{aligned} T_p &= c_{pq} S_q - e_{kp} E_k \\ D_i &= e_{iq} S_q - \varepsilon_{ik}^S E_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

或

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{cS} - \mathbf{eE} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{eS} - \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.3)$$

經厚度方向(x_3 方向)高壓極化處理後，具橫向等向性的壓電陶瓷，其材料矩陣分別表示如下：

彈性勁度矩陣為

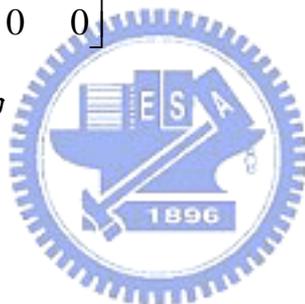
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

壓電常數矩陣為

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

固定應變之介電常數矩陣為

$$\boldsymbol{\varepsilon}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}$$



假設壓電圓管的極化方向為圓管的徑向，參考圖2.1所示的極座標系統， r 、 θ 、 z 軸分別對應 x_1 、 x_2 、 x_3 軸，則對應的特性矩陣分別表示如下：

彈性勁度矩陣為

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_{33} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

壓電常數矩陣為

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix}$$

固定應變之介電常數矩陣為

$$\boldsymbol{\varepsilon}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix}$$

應力張量 \mathbf{T} 、應變張量 \mathbf{S} 、位移向量 \mathbf{u} 、電位移 \mathbf{D} 、電場強度 \mathbf{E} 與電位能 Φ 則分別定義如下：

$$\mathbf{T} = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{z\theta} \quad \sigma_{r\theta} \quad \sigma_{rz}]^T$$

$$\mathbf{S} = [\varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad 2\varepsilon_{z\theta} \quad 2\varepsilon_{r\theta} \quad 2\varepsilon_{rz}]^T$$

$$\mathbf{u} = [u_r \quad u_z \quad u_\theta]^T$$

$$\mathbf{D} = [D_r \quad D_z \quad D_\theta]^T$$

$$\mathbf{E} = [E_r \quad E_z \quad E_\theta]^T$$

$$\Phi = \{\Phi\}$$



2.2 漢彌頓原理

考慮圓柱型聲波導在表面曳力(surface traction)為零的邊界條件下，當彈性體達到動態平衡時，由漢彌頓原理(Hamilton's principle)得知總勢能的一次變分為零，

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - H) dt = 0 \quad (2.4)$$

且在時間 t_1 與 t_2 之所有場變數(field variables)的一次變分為零，其中， T 與 H 為彈性體的總動能與焓(enthalpy)，材料內部的動能為

$$T = \frac{1}{2} \int_{vol} \dot{\mathbf{u}}^H \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{u}} dV = \frac{1}{2} \int_{\theta} \int_z \int_r \dot{\mathbf{u}}^H \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{u}} r dr dz d\theta \quad (2.5)$$

材料內部因機電效應所產生的焓定義為應變能與電勢能的差，

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{U} - \mathbf{E}^H \mathbf{D} = \mathbf{S}^H \mathbf{T} - \mathbf{E}^H \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta} \int_z \int_r (\mathbf{S}^H \mathbf{c} \mathbf{S} - \mathbf{S}^H \mathbf{e}^H \mathbf{E} - \mathbf{E}^H \mathbf{e} \mathbf{S} - \mathbf{E}^H \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E}) r dr dz d\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中， \mathbf{c} 為材料剛性矩陣， $\boldsymbol{\rho}$ 為一 3×3 的對角矩陣，代表彈性聲波導的密度，上標 H 表示 Hermitian 矩陣，代表共軛轉置 (conjugate transpose)，若材料剛性矩陣 \mathbf{c} 與密度矩陣 $\boldsymbol{\rho}$ 為實數對稱矩陣，則應變能與動能保證為正定 (positive definite)。上標點 (overdot) 代表對時間的偏微分，將圓柱型聲波導系統的拉格朗日函數 (Lagrangian function) L 表示為

$$L = T - H = \frac{1}{2} \int_{\theta} \int_z \int_r (\dot{\mathbf{u}}^H \boldsymbol{\rho} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{S}^H \mathbf{c} \mathbf{S} + \mathbf{S}^H \mathbf{e}^H \mathbf{E} + \mathbf{E}^H \mathbf{e} \mathbf{S} + \mathbf{E}^H \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E}) r dr dz d\theta \quad (2.7)$$

應用漢彌頓原理，將拉格朗日函數對時間積分一次的變分設為零，可推得圓柱型聲波導之運動方程式。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.8)$$



2.3 雙維有限元素分析

利用有限元素法將圓柱型聲波導的截面離散成許多個連續的小元素，元素內任意點的位移、電位分別表示成內插函數與節點位移、電位的乘積，本文所使用的元素為二維的四節點 Q4 等參單元 (isoparametric element)。

考慮圓柱型聲波導之撓性波沿著圓周周向波傳，波動在與周向垂直之截面維持共振型態，參考圖 2.1 之座標系統，位移與電位向量分別假設為

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r(r, z, t) \\ u_z(r, z, t) \\ ju_\theta(r, z, t) \end{Bmatrix} e^{jn\theta} \quad (2.9a)$$

$$\Phi = \Phi = \Phi(r, z, t) e^{jn\theta} \quad (2.9b)$$

其中， $n = kR$ ， k 為波數(wavenumber)， j 為複數 $\sqrt{-1}$ ，波傳因子 $e^{jn\theta}$ 中的 n 代表沿著圓周方面波傳的周向導波數目， R 為圓管中心至管壁中心線的距離。若為行進波， n 為正實數；若為駐波， n 為正整數。聲波導元素內部各點的位移分量以節點位移與內差函數表示如下：

$$u_r = (N_1 u_r^1 + N_2 u_r^2 + N_3 u_r^3 + N_4 u_r^4) e^{jn\theta} \quad (2.10a)$$

$$u_z = (N_1 u_z^1 + N_2 u_z^2 + N_3 u_z^3 + N_4 u_z^4) e^{jn\theta} \quad (2.10b)$$

$$u_\theta = j(N_1 u_\theta^1 + N_2 u_\theta^2 + N_3 u_\theta^3 + N_4 u_\theta^4) e^{jn\theta} \quad (2.10c)$$

$$\Phi = (N_1 \phi^1 + N_2 \phi^2 + N_3 \phi^3 + N_4 \phi^4) e^{jn\theta} \quad (2.10d)$$

其中 u_r 、 u_z 、 u_θ 為實數函數，為滿足頻率域的運動方程式， u_θ 須乘上複數 j ，就物理意義而言即 u_r 、 u_z 與 u_θ 的相位相差 90° 。將(2.10)式表示成矩陣形式，則

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{d} \quad (2.11a)$$

$$\Phi = \mathbf{N}_\phi \boldsymbol{\phi} \quad (2.11b)$$

其中，

$$\mathbf{u} = [u_r \quad u_z \quad u_\theta]^T \quad (2.12c)$$

$$\Phi = \{\Phi\} \quad (2.12d)$$

$$\mathbf{N}_u = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 \quad \mathbf{N}_4] \quad (2.12e)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & jN_i \end{bmatrix} e^{jn\theta} \quad (2.12f)$$

$$\mathbf{N}_\phi = N_i e^{jn\theta}, \quad N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (2.12g)$$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4]^T, \quad \mathbf{d}_i = [u_r^i \quad u_z^i \quad u_\theta^i] \quad (2.12h)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi^1 \quad \phi^2 \quad \phi^3 \quad \phi^4]^T \quad (2.12i)$$

此處 \mathbf{d} 為節點的位移向量， $\boldsymbol{\phi}$ 為節點的電位向量，上標 i 代表節點在元素內



的編號。將應變 \mathbf{S} 與電位能 Φ 表示成矩陣的形式，則

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_u \mathbf{d} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_\varphi \boldsymbol{\varphi} \quad (2.13b)$$

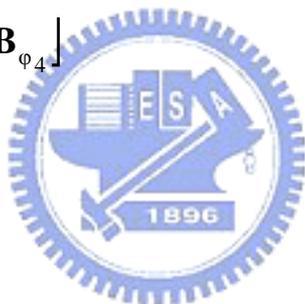
其中，

$$\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}_{u1} \quad \mathbf{B}_{u2} \quad \mathbf{B}_{u3} \quad \mathbf{B}_{u4}] \quad (2.13c)$$

$$\mathbf{B}_{ui} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & 0 \\ N_i / r & 0 & -n(N_i / r) \\ 0 & jn(N_i / r) & j(\partial N_i / \partial z) \\ jn(N_i / r) & 0 & j(\partial N_i / \partial r - N_i / r) \\ \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial r & 0 \end{bmatrix} e^{jn\theta} \quad (2.13d)$$

$$\mathbf{B}_\varphi = [\mathbf{B}_{\varphi1} \quad \mathbf{B}_{\varphi2} \quad \mathbf{B}_{\varphi3} \quad \mathbf{B}_{\varphi4}] \quad (2.13e)$$

$$\mathbf{B}_{\varphi i} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r \\ \partial N_i / \partial z \\ jn(N_i / r) \end{bmatrix} e^{jn\theta} \quad (2.13f)$$



2.4 頻散方程式

將(2.12)式與(2.13)式之單位元素中任意點位移 \mathbf{u} 、應變 \mathbf{S} 、電位能 Φ 、電場 \mathbf{E} 與內差函數的表示式，代入(2.5)式、(2.6)式與(2.7)式中，將之加總獲得全部元素之動能 T 、焓 H 與拉格朗日函數 L 的總和，分別表示如下：

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\theta} \int_z \int_r \dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{N}_u^H \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}} r dr dz d\theta = \frac{1}{2} \sum \dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\theta} \int_z \int_r (\mathbf{d}^H \mathbf{B}_u^H \mathbf{c} \mathbf{B}_u \mathbf{d} + \mathbf{d}^H \mathbf{B}_u^H \mathbf{e}^H \mathbf{B}_\varphi \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{B}_\varphi^H \mathbf{e} \mathbf{B}_u \mathbf{d} - \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{B}_\varphi^H \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_\varphi \boldsymbol{\varphi}) r dr dz d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum (\mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} + \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{k}_{\varphi u} \mathbf{d} - \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (2.14b)$$

$$L = T - H = \frac{1}{2} \sum (\dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} - \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \phi - \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \mathbf{d} + \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \phi) \quad (2.14c)$$

其中，

$$\mathbf{m} = \int_{\theta} \int_z \int_r \mathbf{N}_u^H \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_u r dr dz d\theta \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{k}_{uu} = \int_{\theta} \int_z \int_r \mathbf{B}_u^H \mathbf{c} \mathbf{B}_u r dr dz d\theta \quad (2.15b)$$

$$\mathbf{k}_{u\phi} = \int_{\theta} \int_z \int_r \mathbf{B}_u^H \mathbf{e}^H \mathbf{B}_{\phi} r dr dz d\theta \quad (2.15c)$$

$$\mathbf{k}_{\phi u} = \int_{\theta} \int_z \int_r \mathbf{B}_{\phi}^H \mathbf{e} \mathbf{B}_u r dr dz d\theta \quad (2.15d)$$

$$\mathbf{k}_{\phi\phi} = - \int_{\theta} \int_z \int_r \mathbf{B}_{\phi}^H \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_{\phi} r dr dz d\theta \quad (2.15e)$$

將(2.14)式代入(2.8)式，整理得

$$\delta \sum \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} - \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \phi - \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \mathbf{d} + \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \phi) \right\} dt = 0 \quad (2.16)$$

對(2.16)式進行變分運算，獲得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \delta \dot{\mathbf{d}} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \delta \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \phi dt \right. \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \delta \phi dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \delta \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \phi dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \delta \phi dt \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

再利用部分積分(integration by part)，將(2.17)式展開得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum \left\{ (\delta \dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \dot{\mathbf{d}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{d}^H \mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} dt) + (\dot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \delta \dot{\mathbf{d}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} \delta \mathbf{d} dt) - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} dt \right. \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} \delta \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \phi dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\phi} \delta \phi dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \mathbf{d} dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi^H \mathbf{k}_{\phi u} \delta \mathbf{d} dt \right. \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_2} \delta \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \phi dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi^H \mathbf{k}_{\phi\phi} \delta \phi dt \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

考慮在時間 t_1 與 t_2 時， $\delta \mathbf{d}^H = \delta \mathbf{d} = 0$ 的限制條件，將(2.18)式整理，並提出 $\delta \mathbf{d}^H$ 、 $\delta \boldsymbol{\varphi}^H$ 、 $\delta \mathbf{d}$ 及 $\delta \boldsymbol{\varphi}$ ，可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum \left\{ \delta \mathbf{d}^H \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} + \mathbf{k}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi}) dt + \delta \boldsymbol{\varphi}^H \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{k}_{\varphi u} \mathbf{d} + \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi}) dt \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\mathbf{d}}^H \mathbf{m} + \mathbf{d}^H \mathbf{k}_{uu} + \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{k}_{\varphi u}) dt \delta \mathbf{d} + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{d}^H \mathbf{k}_{u\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^H \mathbf{k}_{\varphi\varphi}) dt \delta \boldsymbol{\varphi} \right\} = 0 \quad (2.19) \end{aligned}$$

因此，圓柱型聲波導之運動方程式可表式如下：

$$\sum \{ \mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{k}_{uu} \mathbf{d} + \mathbf{k}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} \} = 0 \quad (2.20)$$

$$\sum \{ \mathbf{k}_{\varphi u} \mathbf{d} + \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} \} = 0 \quad (2.21)$$

$$\sum \{ \ddot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m} + \mathbf{d}^T \mathbf{k}_{uu} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{k}_{\varphi u} \} = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum \{ \mathbf{d}^T \mathbf{k}_{u\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{k}_{\varphi\varphi} \} = 0 \quad (2.23)$$

稍後在第 2.5 節中，將說明 \mathbf{m} 、 \mathbf{k}_{uu} 、 $\mathbf{k}_{u\varphi}$ 、 $\mathbf{k}_{\varphi u}$ 與 $\mathbf{k}_{\varphi\varphi}$ 為實數對稱矩陣，故(2.20)與(2.22)兩式恆等，(2.21)與(2.23)兩式亦恆等。將離散後的元素組合成全域矩陣(global matrix)，可獲得整個系統的運動方程式，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

若節點位移具有時諧因子 $e^{-i\omega t}$ ，將 $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{D}} e^{-i\omega t}$ 、 $\ddot{\mathbf{D}} = -\omega^2 \overline{\mathbf{D}} e^{-i\omega t}$ 、 $\boldsymbol{\Phi} = \overline{\boldsymbol{\Phi}} e^{-i\omega t}$ 與 $\ddot{\boldsymbol{\Phi}} = -\omega^2 \overline{\boldsymbol{\Phi}} e^{-i\omega t}$ 分別代入(2.24)式，可建立波數 k 與角頻率 ω 關係之頻散方程式，

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{D}} \\ \overline{\boldsymbol{\Phi}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

(2.25)式為特徵值問題，方程組的非零解(non-trivial solution)成立之充分條件為

$$\det \left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (2.26)$$

以銅管為計算例，圖 2.2 所示為幾何外型，圖 2.3 所示結果為本範例計算的波數與相速度頻散曲線圖，圖 2.4 為波數與頻率的頻散曲線圖。與 ANSYS 模擬結果比較，兩者的數值結果吻合。圖 2.5 為壓電圓管的幾何外型，圖 2.6 為壓電圓管脊緣撓性波波數與頻率的頻散曲線，分別針對有無電性影響進行比較，圖中實線部份係忽略壓電材料的電性影響，只分析結構特性的頻散曲線，虛線部份為考慮電性的影響，可以發現頻率明顯往高頻偏移，實心與空心點為 ANSYS 分別針對有無電性影響的分析結果。

2.5 元素矩陣的變換

(2.12g)式中的內插函數是以自然座標表示，在(2.12d)與(2.12f)中包括了內插函數對實際座標 r 與 z 的導函數，若要在自然座標內進行元素的面積分，需建立兩個座標系之間的導函數與元素面積之變換關係式。依照雙變數微分的鏈法則(chain rule)，內插函數 N_i 對自然座標 ξ 或 η 的偏微分可表示成

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (2.28)$$

若改寫成矩陣的形式，則為

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

其中， \mathbf{J} 稱為 Jacobian 矩陣，

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

若以自然座標表示對實際座標 r 與 z 的偏微分，則為

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

其中，

$$\Gamma_{11} = \frac{J_{22}}{\det(\mathbf{J})}, \quad \Gamma_{12} = -\frac{J_{12}}{\det(\mathbf{J})} \quad (2.32a)$$

$$\Gamma_{21} = -\frac{J_{21}}{\det(\mathbf{J})}, \quad \Gamma_{22} = \frac{J_{11}}{\det(\mathbf{J})} \quad (2.32b)$$

根據以上的關係，圓柱型聲波導之元素質量矩陣(2.15a)可寫成

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & \mathbf{m}_{13} & \mathbf{m}_{14} \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & \mathbf{m}_{23} & \mathbf{m}_{24} \\ \mathbf{m}_{31} & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{m}_{33} & \mathbf{m}_{34} \\ \mathbf{m}_{41} & \mathbf{m}_{42} & \mathbf{m}_{43} & \mathbf{m}_{44} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_{u_i}^H(\xi, \eta) \rho \mathbf{N}_{u_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} r d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.34)$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ 。圓柱型聲波導之元素剛度矩陣(2.15b)則可表示成

$$\mathbf{k}_{uu} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^a & \mathbf{k}_{12}^a & \mathbf{k}_{13}^a & \mathbf{k}_{14}^a \\ \mathbf{k}_{21}^a & \mathbf{k}_{22}^a & \mathbf{k}_{23}^a & \mathbf{k}_{24}^a \\ \mathbf{k}_{31}^a & \mathbf{k}_{32}^a & \mathbf{k}_{33}^a & \mathbf{k}_{34}^a \\ \mathbf{k}_{41}^a & \mathbf{k}_{42}^a & \mathbf{k}_{43}^a & \mathbf{k}_{44}^a \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^a &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{u_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{c} \mathbf{B}_{u_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A & B & C \\ \overline{B} & D & E \\ \overline{C} & \overline{E} & F \end{bmatrix} r d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.36)$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，(2.37)式中 \mathbf{k}_{ij}^a 矩陣詳述於附錄 A。而(2.15c)式則可表示成

$$\mathbf{k}_{u\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^b & \mathbf{k}_{12}^b & \mathbf{k}_{13}^b & \mathbf{k}_{14}^b \\ \mathbf{k}_{21}^b & \mathbf{k}_{22}^b & \mathbf{k}_{23}^b & \mathbf{k}_{24}^b \\ \mathbf{k}_{31}^b & \mathbf{k}_{32}^b & \mathbf{k}_{33}^b & \mathbf{k}_{34}^b \\ \mathbf{k}_{41}^b & \mathbf{k}_{42}^b & \mathbf{k}_{43}^b & \mathbf{k}_{44}^b \end{bmatrix} \quad (2.37)$$


其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^b &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{u_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{e}^T \mathbf{B}_{\varphi_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} r d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.38)$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，(2.38)式中 \mathbf{k}_{ij}^b 矩陣詳述於附錄 B。 (2.15d)式則可表示成

$$\mathbf{k}_{\varphi u} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^c & \mathbf{k}_{12}^c & \mathbf{k}_{13}^c & \mathbf{k}_{14}^c \\ \mathbf{k}_{21}^c & \mathbf{k}_{22}^c & \mathbf{k}_{23}^c & \mathbf{k}_{24}^c \\ \mathbf{k}_{31}^c & \mathbf{k}_{32}^c & \mathbf{k}_{33}^c & \mathbf{k}_{34}^c \\ \mathbf{k}_{41}^c & \mathbf{k}_{42}^c & \mathbf{k}_{43}^c & \mathbf{k}_{44}^c \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}^c &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\phi_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{e} \mathbf{B}_{\phi_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} r d\xi d\eta\end{aligned}\quad (2.41)$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，(2.40)式中 \mathbf{k}_{ij}^c 矩陣詳述於附錄 B。(2.15e)式則可表示成

$$\mathbf{k}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^d & \mathbf{k}_{12}^d & \mathbf{k}_{13}^d & \mathbf{k}_{14}^d \\ \mathbf{k}_{21}^d & \mathbf{k}_{22}^d & \mathbf{k}_{23}^d & \mathbf{k}_{24}^d \\ \mathbf{k}_{31}^d & \mathbf{k}_{32}^d & \mathbf{k}_{33}^d & \mathbf{k}_{34}^d \\ \mathbf{k}_{41}^d & \mathbf{k}_{42}^d & \mathbf{k}_{43}^d & \mathbf{k}_{44}^d \end{bmatrix}\quad (2.41)$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}^d &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\phi_i}^H(\xi, \eta) \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_{\phi_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D r d\xi d\eta\end{aligned}\quad (2.42)$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，(2.43)式中 \mathbf{k}_{ij}^d 矩陣詳述於附錄 B。

2.6 脊緣位移的修正

圓柱型聲波導頻散方程式是一特徵值問題，所求得的特徵向量都是正規化(normalize)之後的結果，正規化後的特徵長度大小為 1。倘若欲將特徵向量做其他方式的正規化，則需另外處理。假設修正後的位移為特徵值對應的特徵向量得之位移乘上比例常數 A ，如下所示

$$U_r = \overline{AU_r} \quad (2.43a)$$

$$U_z = \overline{AU_z} \quad (2.43b)$$

$$U_\theta = \overline{AU_\theta} \quad (2.43c)$$

其中， $\overline{U_r}$ 、 $\overline{U_z}$ 、 $\overline{U_\theta}$ 為修正前的位移分量， U_r 、 U_z 、 U_θ 為修正後的位移分量。

令圓形管壁內單位時間的動能與應變能總和為 1 單位能量，由於一個週期內的彈性波應變能與動能相等，故兩者總和為

$$2(\pi A^2 \omega^2 \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}) = 1 \quad (2.45)$$

比例常數 A 為

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2\pi \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}}} \quad (2.46)$$

如此即可還原出單位時間、單位能量對應之 U_r 、 U_z 與 U_θ 的真正大小。以銅管為例，圖 2.7 與圖 2.8 分別為修正前的徑向位移與周向位移分佈，圖中的橫軸 Λ 為壁心線的距離與高度的比值，圖 2.9 與圖 2.10 分別為修正後的徑向位移與周向位移分佈，圖 2.11 與圖 2.12 分別為壓電圓管修正後的徑向位移與周向位移分佈。修正前後有明顯的差異，修正後的位移分佈也比較合理。



第三章 實驗量測與材料係數反算

本研究以 HP 8751A 網路分析儀量測壓電圓管的阻抗頻率響應，阻抗的最低極值對應不同模態的共振頻率。為了區分不同軸向模態對應的共振頻率，特別設計了模態感測器，進行特定模態的共振頻率量測，避免共振頻率相近難以辨識的情形。

在超音波馬達的設計上，如何正確又有效的掌握共振頻率，是非常關鍵的要素。在共振頻率的數值模擬上，常常會發生數值模擬結果與實驗值之間存有誤差。原因可能出自於材料性質的不均勻性、真實的幾何尺寸或邊界條件無法如模型般完美。本文依據雙維有限元素分析結果，以簡單體法反算材料係數，並探討反算參數的靈敏度及收斂性。

3.1 電極設計與塗佈



本研究採用的PZT-4壓電陶瓷圓管是寰辰科技公司所製造，以粉末冶金的方式製成圓管，再進行極化。進行實驗前，先以硝酸將電極清洗掉，佈置特殊的模態感測電極，以網版印刷的方式將電極印在壓電圓管上。圖3.1與圖3.2分別為AutoCAD設計的電極及最後完成的網版圖，中央較粗的電極為驅動電極，其他分成三段的電極為感測電極。依照不同的周向模態數 n ，分別以 180° 、 120° 、 90° 、 72° 與 60° 為間隔，將感測電極設計於對應的波谷處。感測電極設計成三段的原因，是為了區分不同的軸向模態數 m 對應的共振頻率，將於下一節做介紹。

塗佈電極前需先將網版緊貼在壓電圓管表面，在網版上塗抹銀膠，再以刮刀使銀膠完全通過網版上的電極，最後把佈好電極的壓電圓管送入烤箱，以 120°C 烘烤10分鐘，使銀膠固化，完成電極佈置，圖3.3為佈置好兩花瓣的電極圖。

3.2 共振頻率量測

本研究在共振頻率量測上，採用 HP 8751A 網路分析儀量測壓電圓管的阻抗曲線圖，如圖 3.4 與圖 3.5 所示。HP 8751A 具有函數產生器、訊號擷取及分析的功能，量測時依照模擬的結果將頻寬調整至對應的共振頻率範圍，HP8751A 輸出 1V 的正弦波，經 nF HAS-4051 放大器增益電壓 100 倍後，接至驅動電極，再由感測電極感應壓電圓管變形產生的電壓變化。為了近似壓電圓管未使用前的狀況，減少邊界條件造成的影響，本實驗將壓電圓管放置於泡棉之上，近似兩端無拘束的情況。

圖 3.6 為壓電圓管兩端無拘束情況下，所對應的頻散曲線圖與 ANSYS 的結果比較，圖 3.7~圖 3.23 所示為實際量測出的阻抗曲線，其中，圖 3.7 與圖 3.8 分別代表 $(n, m)=(2, 1)$ 與 $(2, 2)$ 模態所對應的阻抗響應，圖 3.7 為量測三段電極的中間電極的阻抗，圖 3.8 為量測三段電極的底部電極之結果，比較兩圖可以發現，雖然量測的頻寬相同，由於感測電極的位置不同，卻得到不同的阻抗曲線。因此，配合模態分佈，將感測電極分段即可區分出不同軸向模態 m 的頻率。圖 3.24 為實驗值與理論頻散曲線的對照圖，理論頻散曲線是由壓電管實際尺寸的平均值進行模擬，實驗值與理論值整理於表 1，兩者對應的差值列於表 2。

3.3 簡單體法

簡單體法是根據幾何原理尋找最佳化的方法，基本想法是以 $N+1$ 個頂點(vertices)來建立 $N+1$ 維空間，尋求最可能的 N 個參數。例如 $N=2$ 代表在空間中形成一個三角形結構， $N=3$ 則代表空間中形成一個四面體結構，由各頂點目標函數值的大小，決定三角形或四面體移動的方向，當目標函數值達到最小值時，此時的參數即為最佳解。

如圖 3.25 所示，以 $N=2$ 為例，在三維空間中建立三個頂點，分別為目標函數值最大的 W 點、目標函數值最小的 B 點與目標函數值介於兩者間的 O 點，搜尋最佳解的流程可分成以下四個步驟：

1. 根據最高點來建立反射(reflection)點 R ：

假設最大值 W 點到另兩點連線的線段中點 M 之距離為 d ，由 WM 線段延伸 d 至反射點 R ，當 R 點的目標函數值介於目標函數值最小與最大之間時，則在反射點 R 建立新的頂點，取代最大值 W 點。

2. 建立延伸(expansion)點 E ：

如果反射點 R 的目標函數值比最低點 B 小，則由 WM 線段延伸 $2d$ 至 E 點；比較 R 點與 E 點的目標函數值，接受目標函數值較小的點以取代最大值點 W 。

3. 建立收縮(contraction)點 C ：

如果反射點 R 的目標函數值比最大值 W 點大，在 WM 線段中點處建立收縮點 C ，若 C 點的目標函數值比最高點 W 小，則以 C 點取代 W 點。

4. 收縮 O 點與 W 點至 S 點(shrinkage)：

若 C 點的目標函數值比最大值 W 點大，將 O 點與 W 點分別沿線段 OB 與 WB ，向 B 點收縮至 S 點，建立新的三角頂點。

由上述的四個步驟，簡單體法將尋找一個目標函數值較小的點來取代目標函數值最大的點，形成一個新的三角形，重複此四步驟直到找到最小的目標函數值為止，程式流程如圖 3.26 所示。

3.4 目標函數

在進行材料參數反算的過程中，最重要的是定義目標函數，好的目標函數除了可以提高反算的精確度之外，還可節省運算的時間。通常目標函數的設定是以實驗值與數值模擬結果之間的差值為基準，找出誤差最小的參

數。本文定義目標函數為各撓性模態對應的共振頻率值與頻散曲線數值模擬結果的差值平方和，如下所示：

$$F_{Object} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{Experiment}^i - f_{Theory}^i)^2 \right]$$

其中， F_{Object} 為目標函數， $f_{Experiment}^i$ 為各模態所對應的共振頻率實驗值， f_{Theory}^i 為各模態的波數 k 對應的共振頻率理論值， N 為周向模態的實驗數目， M 為軸向模態的實驗值數目。

3.5 結構參數的反算

在進行材料參數反算前，首先須對結構的幾何參數進行反算。由於本文所使用的壓電圓管，在外形尺寸上有誤差存在，經由游標卡尺量測後，圓管在不同圓周處的高度分佈大約在 12.55mm~12.73mm，管壁厚分佈大約在 1.98mm~2.04mm，無法完全吻合模擬的均勻幾何外形。

由表 2 中可以發現，周向模態數 $n=3$ 及 4 的實驗值與理論值之差距比其他模態大很多。不同的周向模態所對應的電極位置不同，推測為尺寸分佈不均造成的影響。軸向模態方面則以 $m=3$ 的差距最大，極有可能是理論值假設均勻尺寸造成的影響。因此本文第一階段進行結構參數反算，先得到最可能的均勻幾何尺寸，近似實際圓管的幾何外形，再進行第二階段的材料係數反算。

在進行結構參數反算前，先探討各結構參數的靈敏度。假設圓管外徑為定值，結構的尺寸參數為內半徑 R_{in} 與高度 h 。圖 3.27 與圖 3.28 所示，為兩參數分別增加 0.5mm 後的周向撓性波頻散曲線變化與理論模型曲線的比較。當 R_{in} 增加 0.5mm 後，三條頻散曲線皆往低頻偏移，其中 $m=1$ 、2 隨著 k 增加偏移量也增加， $m=3$ 的偏移較似水平偏移。增加高度 h 只會使得 $m=3$ 曲線較明顯的往低頻偏移， $m=2$ 曲線稍微往低頻偏移一點， $m=1$ 曲

線則幾乎沒有變化。

將實驗量測的共振頻率進行反算之前，需討論程式的收斂條件與收斂性。收斂條件是整個反算過程的一個重要步驟，是決定反算參數精確度的重要因素，本文中收斂條件定義為

$$|X^w - X^b| < 1\mu\text{m}$$

其中， X^w 代表各點中與目標函數的差值最大點對應的參數， X^b 代表各點中與目標函數的差值最小點對應的參數，當最大點與最小點的參數差值小於 $1\mu\text{m}$ 時，代表各點的距離已相當接近，判定為收斂。

如圖 3.29 所示，黑點為初始猜值，空心點為最後收斂的值，各參數的初始猜值為理論模型值 $\times [1 \pm \text{亂數}(0.0 \sim 0.1)]$ ，理論模型值為 $R_{in}=11\text{mm}$ 、 $h=12.5\text{mm}$ ，由圖 3.29 中可以發現隨機猜測的十組參數皆收斂至理論值，排除目標函數具有其他局部最小值的可能性。

最後以實驗量測的共振頻率進行反算，收斂情形如圖 3.30 所示，收斂值為 $R_{in}=11.01\text{mm}$ 、 $h=12.77\text{mm}$ 。由圖 3.31 中可以發現，修正後外形所得到的頻散曲線已明顯的降低與實驗值之間的誤差，尤其是 $m=3$ 的頻散曲線。修正後的頻率與實驗值整理於表 3 中，兩者差值列於表 4 中。

3.6 材料係數的靈敏度分析

壓電材料獨立的係數包含了五個彈性係數、三個壓電係數與兩個介電係數，在進行材料係數反算前，先針對各係數的靈敏度進行探討。

彈性係數靈敏度：

在彈性係數部分，首先探討的是 C_{11} 改變後對頻散曲線的影響。圖 3.32 所示為 C_{11} 改變為目標值的 120% 時對頻散曲線造成的影響，當 C_{11} 增加時， $m=1$ 及 2 曲線的頻率增加，隨著波數 k 增加，頻率的增加量有越來越大的

趨勢，而 $m=3$ 曲線以近似水平的方式向往高頻偏移，三條頻散曲線皆有很明顯的變化。

接下來探討 C_{12} 改變對頻散曲線的影響。如圖 3.33 所示，當 C_{12} 變大時，三條頻散曲線皆往低頻偏移， $m=1$ 及 2 的共振頻率隨著 k 增加，有越往低頻偏移的趨勢， $m=3$ 曲線則往低頻平行偏移。

再觀察 C_{13} 改變的影響，如圖 3.34 所示， C_{13} 增加後，頻散曲線的變化趨勢如同 C_{12} 皆往低頻偏移，變化量很明顯的比 C_{12} 的影響小很多，尤其是在 $m=1$ 及 2 的頻散曲線， $m=3$ 的量雖然變小，但還是比 $m=1$ 及 2 的改變明顯，因此 $m=3$ 的頻散曲線對於 C_{13} 有較高的靈敏度。

接著探討 C_{33} 的靈敏度，如圖 3.35 所示，當 C_{33} 增加為 120% 後，對應的三條頻散曲線幾乎沒有什麼變化，只有 $m=3$ 的頻散曲線略微上升，且隨著 k 增加，往高頻的偏移量有略微減少的趨勢。

最後探討 C_{44} 的改變對頻散曲線的影響，在圖 3.36 中，當 C_{44} 改變為 120% 後，三條頻散曲線皆略為往高頻偏移，隨著 k 的增加，頻率變化量略微增加，三者的變化量並非特別明顯。 C_{44} 與 C_{13} 的影響程度不同，後者對於 $m=3$ 曲線有較大的影響，因此在反算的優先順序上， C_{44} 排在 C_{13} 之後。

壓電係數靈敏度：

在壓電係數部分，所探討的分別為 e_{15} 、 e_{31} 與 e_{33} ，在圖 3.37 ~ 圖 3.39 中，可以發現當 e_{15} 、 e_{31} 與 e_{33} 增加為 120% 後，所對應的頻散曲線皆略為往高頻偏移，每條頻散曲線的偏移量皆不明顯，尤其是 e_{33} 所對應的頻散曲線幾乎沒有變化。

介電係數靈敏度：

在介電係數部份， ϵ_{11} 與 ϵ_{33} 增加為 120% 後所對應的頻散曲線分別呈現於圖 3.40 與圖 3.41。 ϵ_{11} 的改變對於頻散曲線幾乎沒有變化， ϵ_{33} 對於頻散

曲線的改變量也不明顯，三條頻散曲線都略微往低頻偏移。

在分別討論彈性係數、壓電係數與介電係數的影響之後，發現彈性係數影響頻散曲線的變化量比壓電係數與介電係數高，代表彈性係數的靈敏度較佳，尤其以 C_{11} 與 C_{12} 最為明顯，其次為 C_{13} 。 $m=3$ 的頻散曲線對於後者有靈敏度，其他的係數靈敏度皆較低。因此本文在材料係數反算時僅以彈性係數進行討論，反算的優先順序為 $C_{11} > C_{12} > C_{13} > C_{44} > C_{33}$ 。

3.7 材料係數的反算

將共振頻率量測值進行材料係數反算之前，先對程式的收斂條件與收斂性進行討論。材料係數反算收斂條件定義如下：

$$|C_{ij}^w - C_{ij}^b| < 1\text{MPa}$$

其中， C_{ij}^w 代表各點中與目標函數差值最大點所對應的材料係數， C_{ij}^b 代表各點中與目標函數差值最小點所對應的材料係數，當兩者的材料係數差值小於1MPa時，判定為收斂。

在反算程式的收斂性測試上，分別針對採用 $m=1$ 、 $m=1, 2$ 與 $m=1, 2, 3$ 曲線的三種方式，能夠達到收斂的係數個數進行討論，反算過程中的初始值為表5中的材料係數 $\times [1 \pm \text{亂數}(0.0 \sim 0.3)]$ 。

採用 $m=1$ 頻散曲線進行反算：

圖3.42～圖3.45為只採用 $m=1$ 曲線討論兩個係數與三個係數的收斂情形，圖3.42顯示若只採用 $m=1$ 曲線反算兩個係數的情形下，隨機給予十組材料係數都會收斂到理論值。反算三個係數的情況下，由圖3.43～圖3.45中可發現，隨機給予十組材料係數只有七組會收斂到理論值，另外三組沒有收斂到理論值，最後收斂的 C_{11} 介於135.28～144.15GPa， C_{12} 介於71.63～85.45GPa， C_{13} 介於73.65～75.89GPa，因此判定沒有收斂。

採用 $m=1$ 、2 頻散曲線進行反算：

圖 3.46~圖 3.55 所示為採用 $m=1$ 、2 曲線探討兩個至四個係數收斂的情況。圖 3.46 顯示反算兩個係數的收斂情形如同先前只採用 $m=1$ 曲線的狀態，十組係數皆收斂到理論值。圖 3.47 ~圖 3.49 表示三個係數收斂的情形，效果比只使用 $m=1$ 時的效果好，十組係數全部收斂到理論值。圖 3.50 ~圖 3.55 表示四個係數收斂的情形，隨機給予十組係數只有七組收斂到理論值，剩下三點的收斂結果為 C_{11} 介於 135.27~140.39GPa， C_{12} 介於 74.19~79.14GPa， C_{13} 介於 68.88~76.18GPa， C_{44} 介於 25.48~25.97GPa，雖然 C_{44} 的分佈範圍相當接近理論值的 C_{44} ，但另三個材料係數的收斂值與理論值相差較大，因此判定沒有收斂。

採用 $m=1$ 、2、3 頻散曲線進行反算：

若採用 $m=1$ 、2、3 曲線時，分別討論兩個至五個係數的收斂情況，測試結果如圖 3.56 ~圖 3.75 所示。圖 3.56 ~圖 3.65 分別表示反算二至四個係數的收斂結果，十組隨機的係數皆能收斂至理論值。圖 3.66 ~圖 3.75 則顯示五個係數的收斂情形， C_{11} 介於 13.18~145.14GPa， C_{12} 介於 70.23~83.82GPa， C_{13} 介於 57.51~87.09GPa， C_{44} 介於 25.24~26.30GPa， C_{33} 介於 83.29~139.46GPa，各收斂點的結果分散較廣，比較接近理論值的點只有兩個。造成這個現象的原因是因為 C_{33} 的靈敏度非常的低，不適合進行反算。綜合以上所述，採用三條頻散曲線反算，能夠收斂的係數最多，實際進行材料係數反算時，將採用三條頻散曲線進行反算。

根據共振頻率的量測值分別反算兩個彈性係數與三個彈性係數，結果如圖 3.76 ~圖 3.79 所示，收斂值與參考值間的差值列於表 6 與表 7 中，使用的參考值為 PZT4 的材料係數[19]，反算結果與參考值非常接近。另外，未使用結構參數反算的結果整理於圖 3.80 與表 8 中，可以明顯的發現先進結構係數反算，再反算材料係數的策略是必要的。

第四章 結論與未來展望

本文採用雙維有限元素分析推導壓電圓管的頻散方程式，計算壓電圓管脊緣撓性波的頻散曲線及共振模態，雙維有限元素分析與 ANSYS 的數值結果吻合。實驗方面以網路分析儀量測壓電圓管的共振頻率，實驗數據以簡單體法反算結構尺寸與材料係數。本章總結數值分析、實驗量測與反算的結果，提供日後相關研究的參考。

4.1 結論

4.1.1 數值分析

圓管的共振模態分類包含為周向模態數 n 與軸向模態數 m 。從彈性波的觀點出發，當 n 為整數時，順時針及逆時針方向波傳的圓管脊緣撓性波將合成為駐波，當 n 不為整數時，則為雙向傳遞的行進波。本研究的基本概念以此出發，比較雙維有限元素的波傳分析與 ANSYS 的三維振動數值分析結果，不論是在等向性材料或壓電材料圓管的分析上，都有相當好的結果。

在圓管的問題上，軸向模態與周向模態的共振頻率是交錯出現的，並非依照模態數的順序由低至高出現，模態的辨識很費時。以 ANSYS 分析結果為例，共振模態由低頻至高頻呈現，選擇特定的模態需畫出各模態的變形圖才能辨識。雙維有限元素分析提供連續變化的圓管周向模態與軸向模態之共振頻率，省去辨識的時間，即使幾何複雜的結構也不會無法判定模態。雙維有限元素的另一優點是以波傳因子 $e^{in\theta}$ 作為圓周方向的內插函數，在高周向模態數時具有優勢，不需擔心因周向元素數目不足，產生較大的分析誤差。

雙維有限元素分析可將頻散曲線作為 2D 的地圖，提供超音波馬達設計

時模態分離的參考，另外可針對馬達轉子與定子接觸點的周向位移探討，尋找兩者的最佳接觸點。

4.1.2 實驗量測與反算

實驗量測上，可以依照不同的共振模態設計感測電極位置，達到增強或降低特定模態訊號的功能，但是對於周向模態數 $n=1$ 或周向膨脹模態(hoop mode)的效果不大。在電極設計上，除了將原本的感測電極分段外，讓驅動電極與周向模態數相同，可讓阻抗曲線得到最好的訊噪比。

由於壓電陶瓷的非等向性燒結特性，壓電圓管的幾何尺寸呈現不均勻分佈，在不同的周向模態數，共振頻率的量測值與數值分析結果的差異很大，原因可能出自於不同的周向模態數對應的感測點不同，使得外形不均勻的影響特別明顯。因此，在反算材料係數前，先針對幾何外形的差異進行反算，可以獲得一個誤差值最小的幾何外形，減少材料係數反算的誤差值。反算後可以明顯的修正頻散曲線的趨勢，特別是 $m=3$ 的頻散曲線。

在材料係數反算中，能比對的實驗數據僅為少數模態的共振頻率，必須策略性的進行取捨，因此只能針對各係數中敏感度較高的係數進行反算，無法對壓電與介電係數的影響進行探討。反算結果顯示高敏感度的 C_{11} 與 C_{12} 值相當準確，若與較低敏感度的材料係數同時反算，誤差值會增大。如果能增加比對的實驗數據，應可解決這個問題。

4.2 未來展望

根據數值模擬的結果，發現以彈性波波傳的觀念分析振動問題具有優勢。尤其是在二維以上空間的結構，共振頻率無法依照對應的模態數順序排列，造成共振頻率與共振模態配對辨識的困擾。由頻散曲線分析可以依序計算各個模態的共振頻率，配合實驗量測的頻散曲線，可以建立一個有

別於傳統振動量測的方法。

本研究曾試圖以雷射超音波實驗方法，量測壓電圓管脊緣撓性波的頻散曲線，但是掌握暫態訊號的量測技術尚不純熟，無法避免圓管另一方向回傳波的影響，因此以結構共振頻率的量測數據進行幾何參數及材料係數的反算。將來若要進行圓管脊緣撓性波頻散曲線的量測，建議先以圓管半徑較大的圓管進行技術的掌握，讓各個軸向模態頻散曲線的分離情況改善，增加頻散曲線的辨識度，或以光學技巧提高訊息的解析度。

若能得到圓管脊緣撓性波頻散曲線，應可反算得到較多的材料係數，增加反算的精確度。先將結構尺寸與靈敏度高的材料常數 C_{11} 與 C_{12} 一塊反算，再進一步反算靈敏度低的其他材料常數，反算的收斂程度會提高。



參考文獻

- [1] P. E. Lagasse, "Analysis of a dispersion free guide for elastic waves," *Electrics Letters*, **8**(4), 372-373, 1972.
- [2] J. Mckenna, G. D. Boyd and R. N. Thurston, "Plate theory solution for guided flexural acoustic waves along the tip of a wedge," *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, **21**(3), 178-186, 1974.
- [3] C.-C. Yin and T.-H. Yu, "An ultrasonic motor driven by traveling cylindrical wedge waves," Proc. of 2006 *IEEE Ultrasonics Symposium*, 156-159, 2006.
- [4] M. Tominaga, R. Kaminaga, J. R. Friend, K. Nakamura and S. Ueha, "An ultrasonic linear motor using ridge-mode traveling waves," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, **52**(10), 1735-1742, 2005.
- [5] A. A. Maradudin, R. F. Walls and R. L. Ballard, "Vibrational edge modes in finite crystals," *Physics Rev. B*, **6**, 1106-1111, 1972.
- [6] P. E. Lagasse, I. M. Mason and E. A. Ash, "Acoustic surface waveguides-analysis and assessment," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **21**(4), 225-236, 1973.
- [7] P. E. Lagasse, "Higher-order finite element analysis of topographic guides supporting elastic waves," *Journal of Acoustical Society of America*, **53**, 1116-1122, 1973.
- [8] X. Jia and M. de Billy, "Observation of the dispersion behavior of surface acoustic waves in a wedge waveguide by laser ultrasonics," *Applied Physics Letters*, **61**, 2970-2972, 1992.
- [9] V. V. Krylov, "Propagation of wedge acoustic waves along wedges imbedded in water," Proc. of 1994 *IEEE Ultrasonics Symposium*, 793-796, 1994.

- [10] V. V. Krylov and G. V. Pritchard (2007), “Experimental confirmation of the propulsion of marine vessels employing guided flexural waves in attached elastic fins,” *Journal of Fluids and Structures*, **23**(2), 297-307
- [11] V. V. Krylov and G. V. Pritchard (2007), “Experimental investigation of the aquatic propulsion caused by localized flexural wave propagation in immersed wedges and plates,” *Applied Acoustics*, **68**(1), 97-113
- [12] A. C. Haldky-Hennion, “Finite element analysis of the propagation of acoustic wave in waveguides,” *Journal of Sound and Vibration*, **194**(2), 119-136, 1996
- [13] C.-H. Yang and J.-S. Liaw, “Measurements and finite element simulations of guided waves propagation along linear and circular wedges,” Proc. of 1998 *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1139-1142, 1998.
- [14] V. V. Krylov, “Localized vibration modes propagation along edges of cylindrical and conical wedge-like structures,” *Journal of Sound and Vibration*, **227**(1), 215-221, 1999.
- [15] 陳俊男，線型與圓柱型聲波導的雙維有限元素分析，國立交通大學機械工程學系碩士論文，新竹市，台灣，民國九十一年。
- [16] 陳三本，相位陣列壓電探頭之超音波場分析，國立交通大學機械工程學系碩士論文，新竹市，台灣，民國八十九年。
- [17] M. S. Caceci and W. P. Cacheris, “Fitting curves to data,” *Byte*, **9**(5), 340-362, 1984.
- [18] 蔡坤義，雷射超音波於壓電材料特性之量測，長庚大學機械工程學系博士論文，桃園縣，台灣，民國九十四年。
- [19] 吳朗，壓電陶瓷，29-31，全欣資訊圖書，台北市，民國83年。

附錄 A

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^a &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{u_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{c} \mathbf{B}_{u_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A & B & C \\ \bar{B} & D & E \\ \bar{C} & \bar{E} & F \end{bmatrix} r d\xi d\eta \end{aligned}$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，

$$A = Z_i Z_j C_{11} + (X_i Z_j + Z_i X_j) C_{13} + X_i X_j C_{33} + (Y_i Y_j + n^2 Z_i Z_j) C_{44}$$

$$B = Z_i Y_j C_{12} + X_i Y_j C_{13} + Y_i X_j C_{44}$$

$$C = n Z_i (X_j - Z_j) C_{44} - n X_i Z_j C_{13} - n Z_i Z_j C_{11}$$

$$D = Y_i Y_j C_{11} + X_i X_j C_{44} + n^2 Z_i Z_j C_{66}$$

$$E = n Z_i Y_j C_{66} - n Y_i Z_j C_{12}$$

$$F = n^2 Z_i Z_j C_{11} + Y_i Y_j C_{66} + (X_i - Z_i)(X_j - Z_j) C_{44}$$

$$\bar{B} = Y_i Z_j C_{12} + Y_i X_j C_{13} + X_i Y_j C_{44}$$

$$\bar{C} = n Z_j (X_i - Z_i) C_{44} - n Z_i X_j C_{13} - n Z_i Z_j C_{11}$$

$$\bar{E} = n Y_i Z_j C_{66} - n Z_i Y_j C_{12}$$

各係數中 X_i 、 Y_i 與 Z_i 分別表示如下：

$$X_i = \frac{\partial N_i}{\partial r} = \Gamma_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$Y_i = \frac{\partial N_i}{\partial z} = \Gamma_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$Z_i = \frac{N_i}{r}$$

其中，

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{J_{22}}{\det(\mathbf{J})} \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{J_{12}}{\det(\mathbf{J})}$$

$$\Gamma_{21} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{J_{21}}{\det(\mathbf{J})} \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{J_{11}}{\det(\mathbf{J})}$$



附錄 B

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}^b &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{u_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{e}^T \mathbf{B}_{\varphi_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} r d\xi d\eta\end{aligned}$$

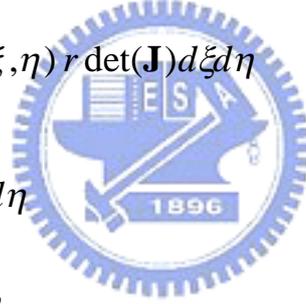
此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，

$$A = (Y_i Y_j + n^2 Z_i Z_j) e_{15} + Z_i X_j e_{31} + X_i X_j e_{33}$$

$$B = X_i Y_j e_{15} + Y_i X_j e_{31}$$

$$C = n(X_i - Z_i) Z_j e_{15} - n Z_i X_j e_{31}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}^c &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\varphi_i}^H(\xi, \eta) \mathbf{e} \mathbf{B}_{u_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} r d\xi d\eta\end{aligned}$$



此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，

$$\bar{A} = (Y_i Y_j + n^2 Z_i Z_j) e_{15} + X_i Z_j e_{31} + X_i X_j e_{33}$$

$$\bar{B} = Y_i X_j e_{15} + X_i Y_j e_{31}$$

$$\bar{C} = n Z_i (X_j - Z_j) e_{15} - n X_i Z_j e_{31}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}^d &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{\varphi_i}^H(\xi, \eta) \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_{\varphi_j}(\xi, \eta) r \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D r d\xi d\eta\end{aligned}$$

此處， $i, j = 1, 2, 3, 4$ ，

$$D = (Y_i Y_j + Z_i Z_j) \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^S + X_i X_j \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^S$$

各係數中的 X_i 、 Y_i 與 Z_i 分別表示如下：

$$X_i = \frac{\partial N_i}{\partial r} = \Gamma_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$Y_i = \frac{\partial N_i}{\partial z} = \Gamma_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$Z_i = \frac{N_i}{r}$$

其中，

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{J_{22}}{\det(\mathbf{J})} \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{J_{12}}{\det(\mathbf{J})}$$

$$\Gamma_{21} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{J_{21}}{\det(\mathbf{J})} \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{J_{11}}{\det(\mathbf{J})}$$



表 1 實驗值與結構參數反算前理論值

(kHz)	m=1		m=2		m=3	
	實驗值	理論值	實驗值	理論值	實驗值	理論值
n=2	5.913	6.039	8.960	9.178	63.920	64.967
n=3	16.260	16.803	22.265	22.988	68.903	70.839
n=4	30.558	31.445	38.170	38.896	79.010	80.764
n=5	48.905	49.314	56.620	56.912	94.078	94.893
n=6	69.488	69.817	76.923	76.977	112.093	112.512

表 2 實驗值與結構參數反算前理論差值之差值

(Hz)	m=1	m=2	m=3
n=2	126	218	1047
n=3	543	723	1936
n=4	887	726	1754
n=5	409	292	815
n=6	329	54	419

表 3 實驗值與結構參數反算後理論值

(kHz)	m=1		m=2		m=3	
	實驗值	理論值	實驗值	理論值	實驗值	理論值
n=2	5.913	6.011	8.960	9.110	63.920	64.022
n=3	16.260	16.725	22.265	22.804	68.903	69.769
n=4	30.558	31.302	38.170	38.609	79.010	79.634
n=5	48.905	49.101	56.620	56.542	94.078	93.754
n=6	69.488	69.532	76.923	76.537	112.093	111.378

表 4 實驗值與結構參數反算後理論差值之差值

(Hz)	m=1	m=2	m=3
n=2	98	150	102
n=3	465	539	866
n=4	744	439	624
n=5	196	-78	-324
n=6	44	-386	-715

表 5 理論的材料係數值

彈性係數(GPa)				
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}
139	77.8	74.3	115	25.6
壓電係數(Coulomb/m ²)			介電係數	
e_{15}	e_{31}	e_{33}	ϵ_{11}/ϵ_0	ϵ_{33}/ϵ_0
12.7	-5.6	15.1	730	635

※ $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ farads/m

表 6 結構參數反算後，反算兩材料係數

	C_{11}	C_{12}
理論值(GPa)	139	77.8
反算值(GPa)	138.723	77.458
差值	0.199%	0.440%

表 7 結構參數反算後，反算三材料係數

	C_{11}	C_{12}	C_{13}
理論值(GPa)	139	77.8	74.3
反算值(GPa)	137.466	75.833	73.004
差值	1.104%	2.528%	1.744%

表 8 結構參數反算前，反算兩材料係數

	C_{11}	C_{12}
理論值(GPa)	139	77.8
反算值(GPa)	133.393	72.146
差值	4.034%	7.267%

波傳方向

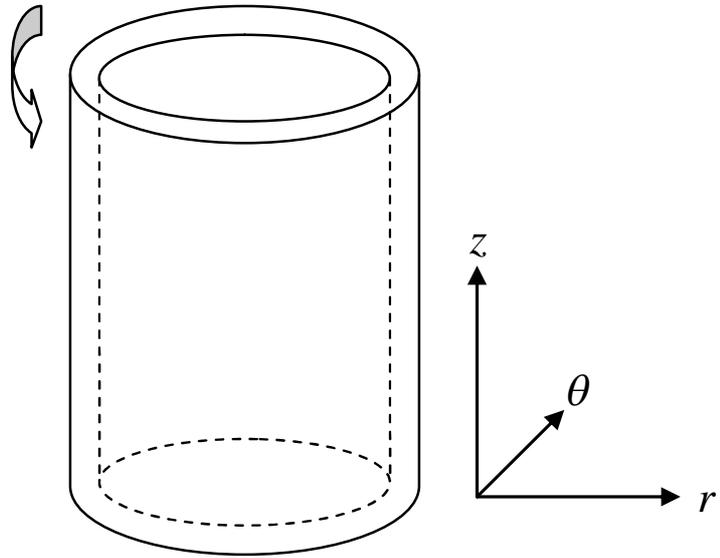


圖2.1 圓柱型聲波導示意圖

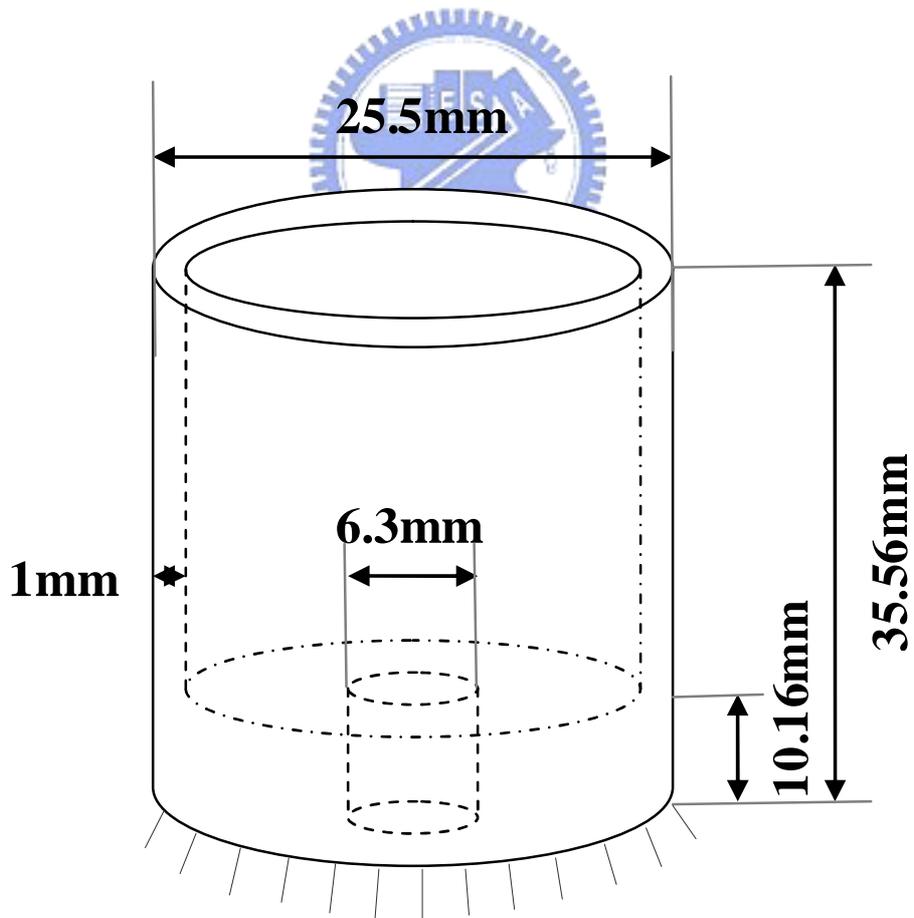


圖2.2 銅管的幾何外形

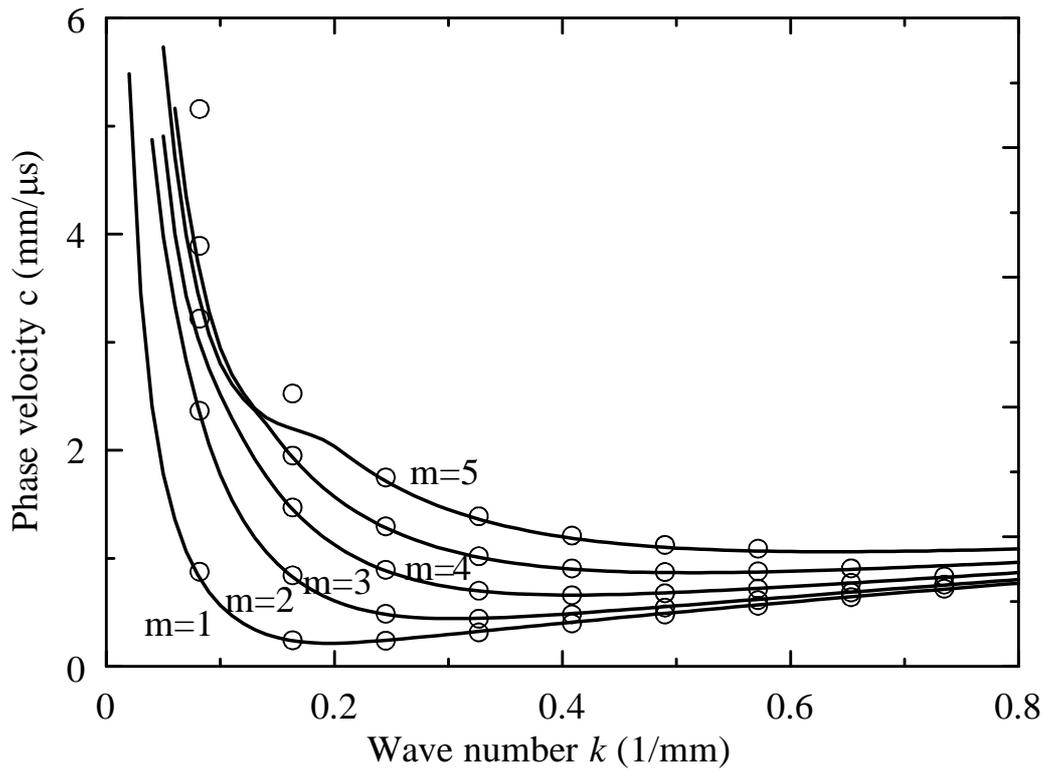


圖 2.3 銅管脊緣撓性波相速度與波數之頻散曲線

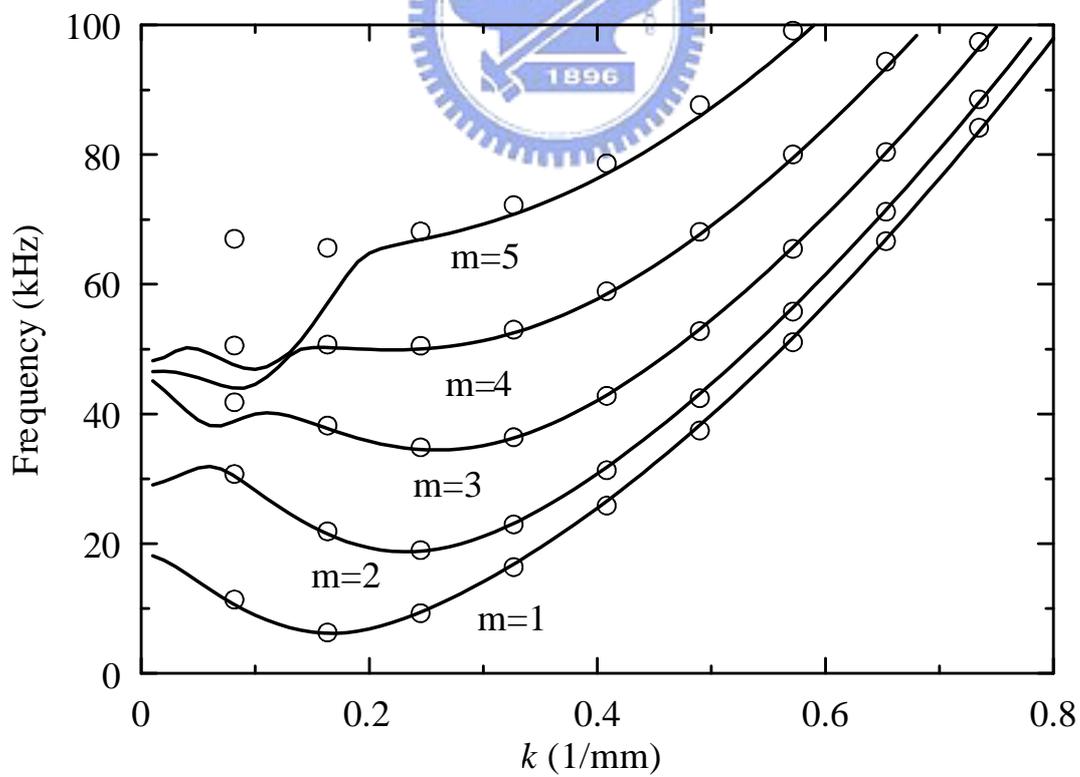


圖 2.4 銅管脊緣撓性波頻率與波數之頻散曲線

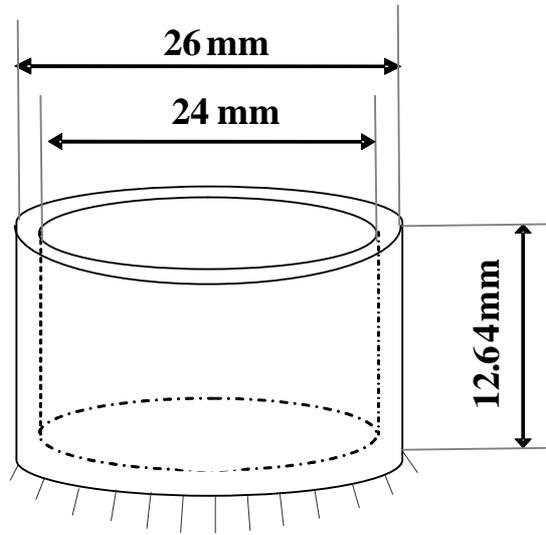


圖 2.5 壓電圓管的幾何外形

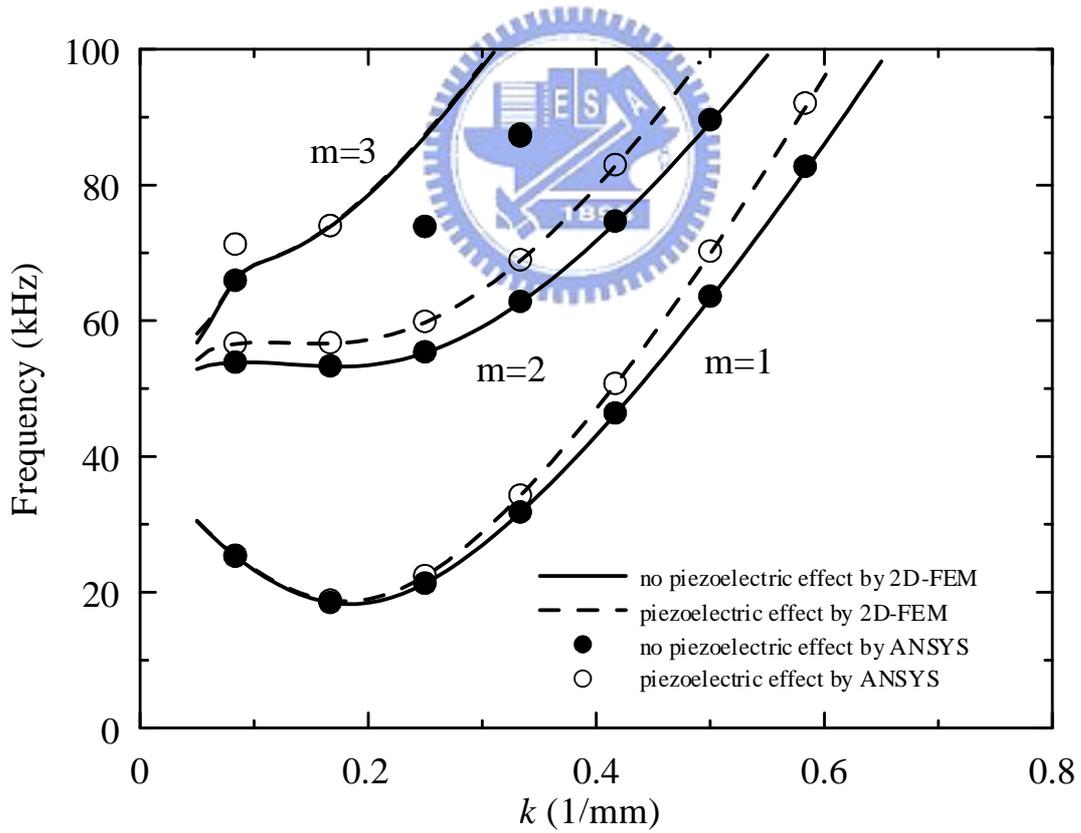


圖 2.6 壓電圓管脊緣撓性波頻率與波數之頻散曲線

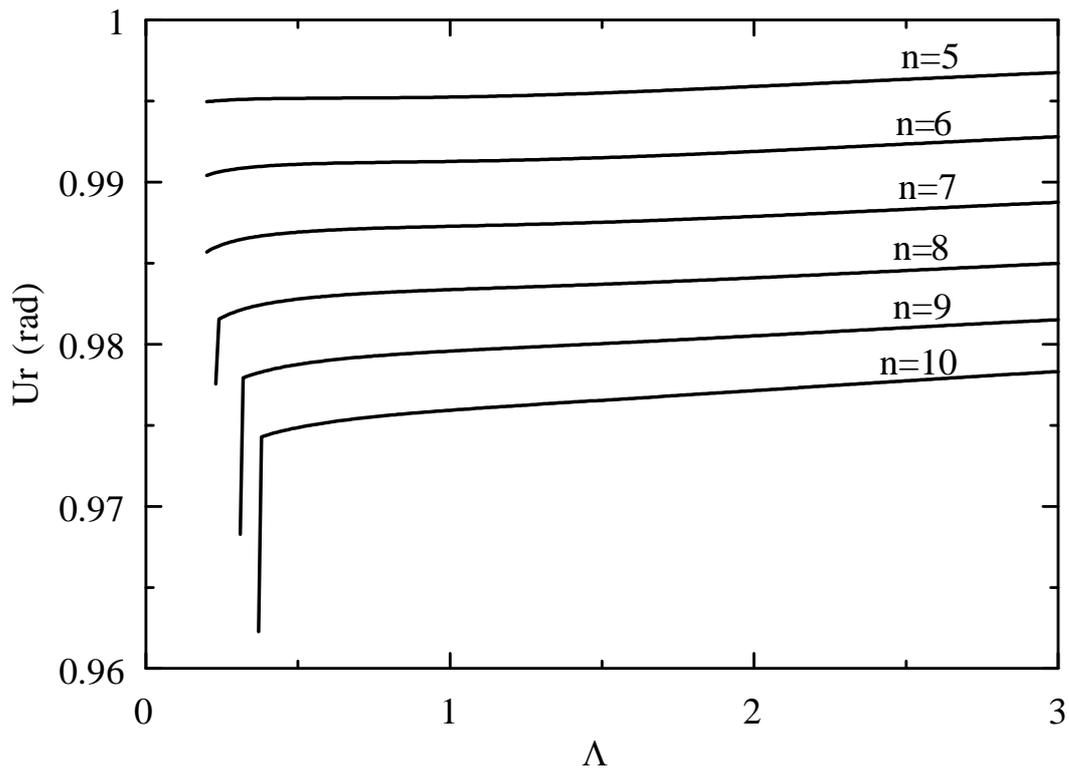


圖2.7 修正前的銅管脊緣撓性波徑向位移分佈

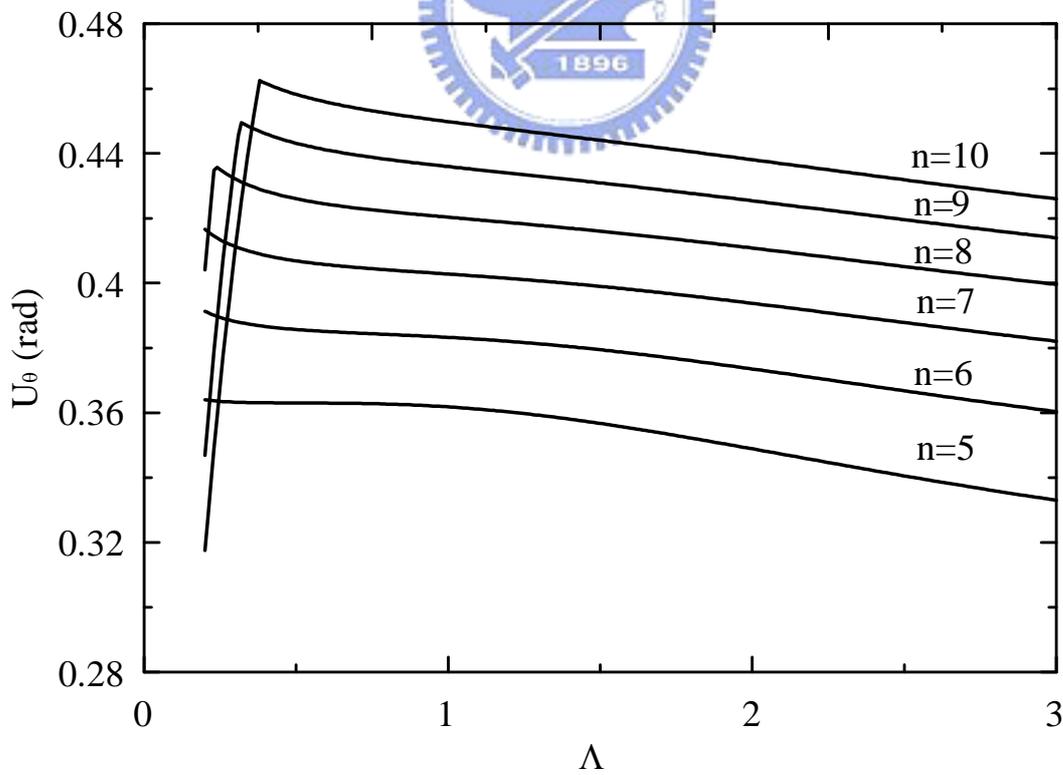


圖2.8 修正前的銅管脊緣撓性波周向位移分佈

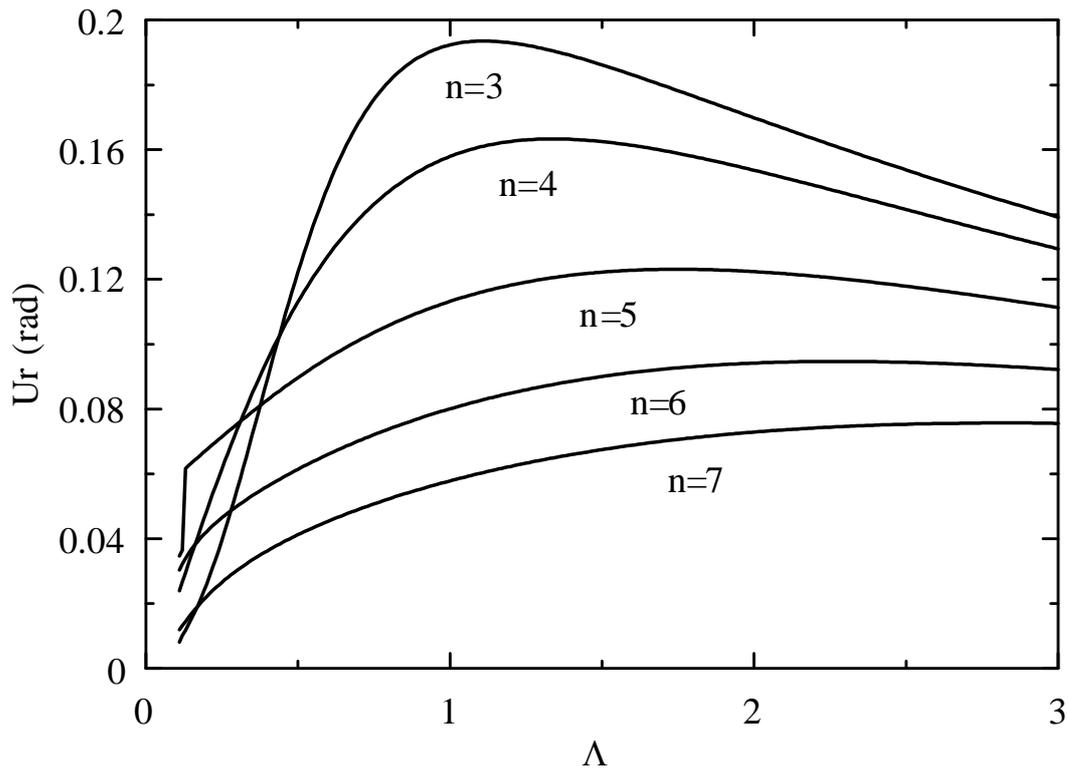


圖2.9 修正後的銅管脊緣撓性波徑向位移分佈

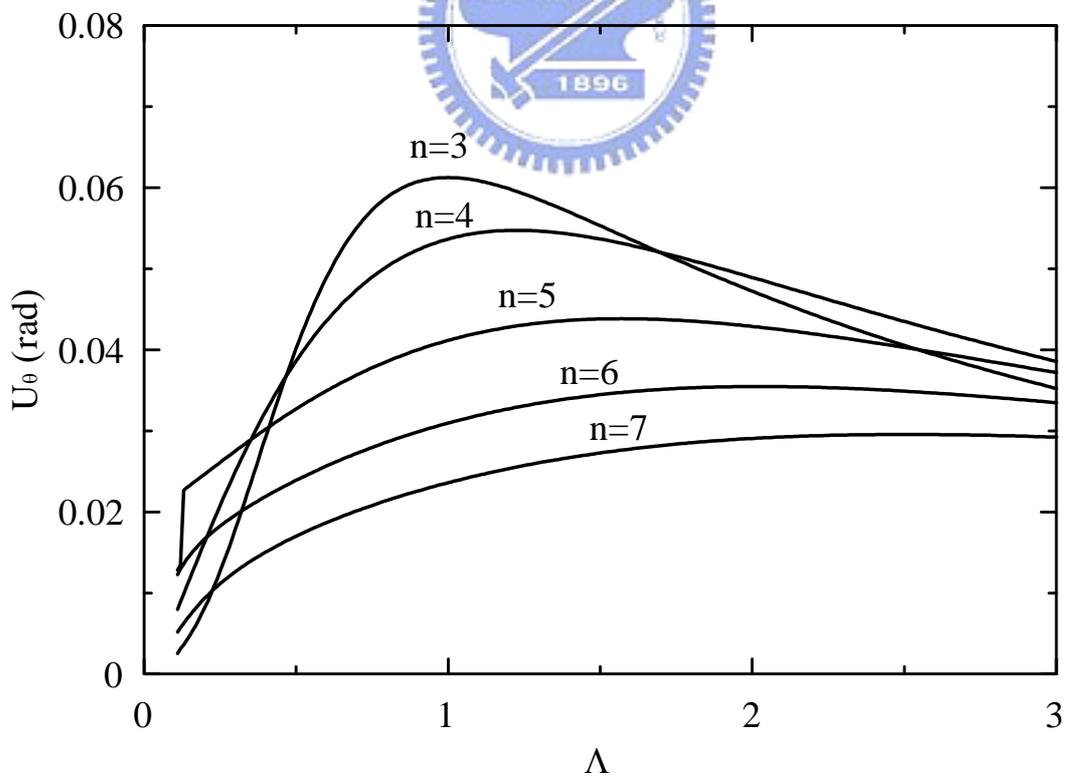


圖2.10 修正後的銅管脊緣撓性波周向位移分佈

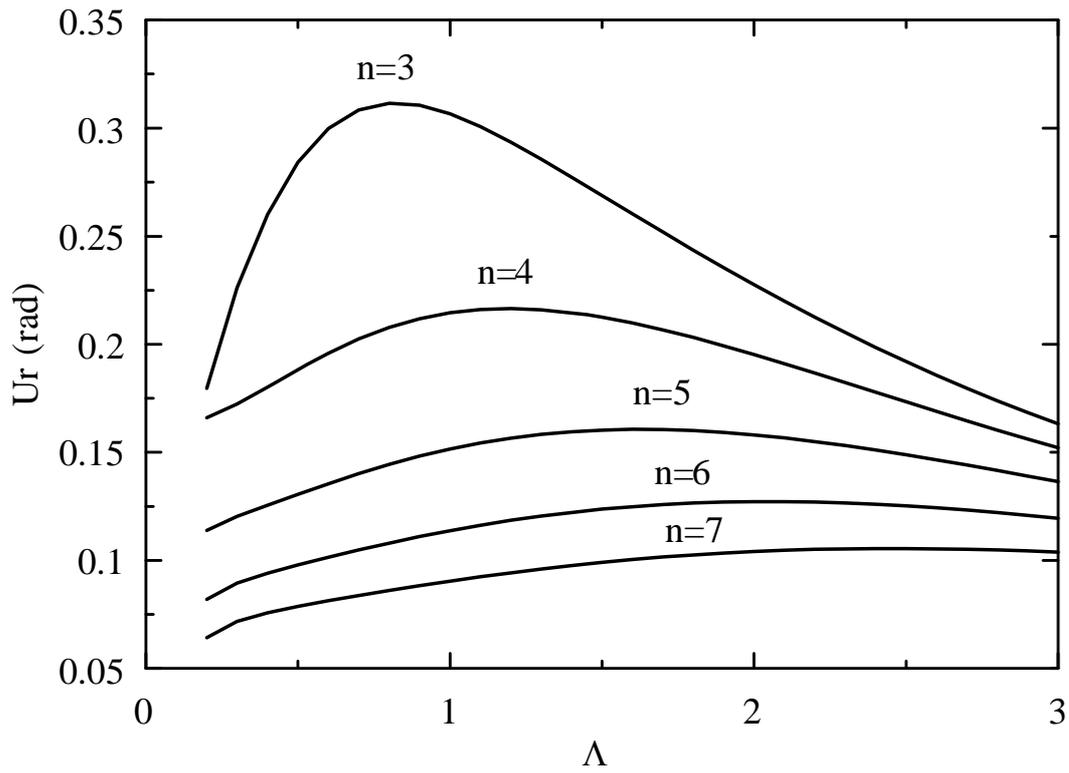


圖2.11 修正後的壓電圓管脊緣撓性波徑向位移分佈

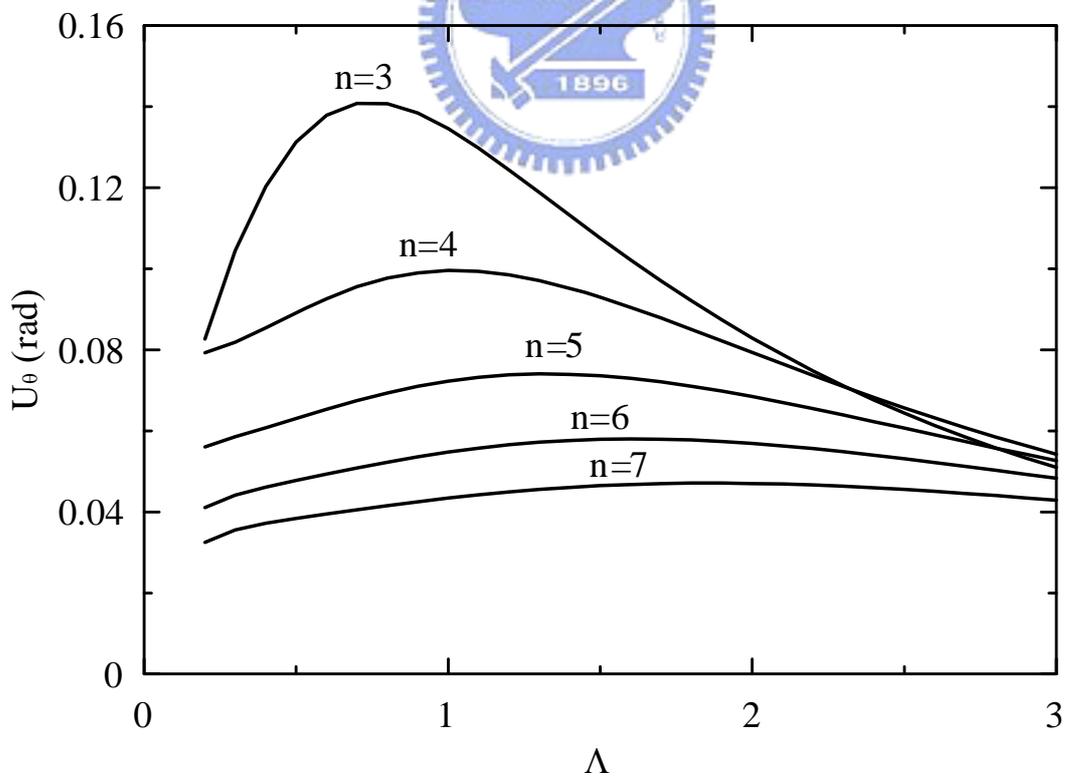


圖2.12 修正後的壓電圓管脊緣撓性波周向位移分佈

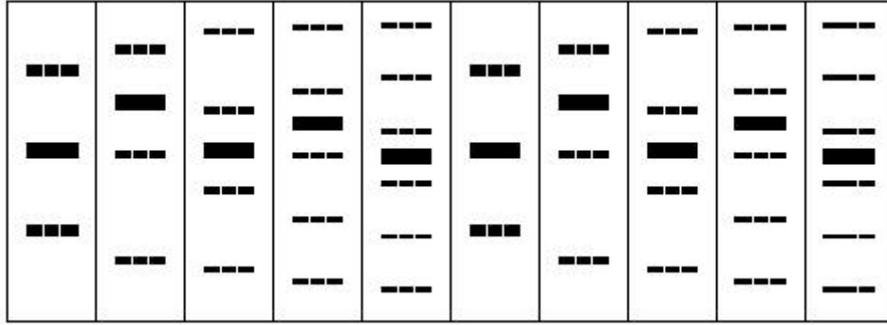


圖3.1 AutoCAD繪製的網版設計圖

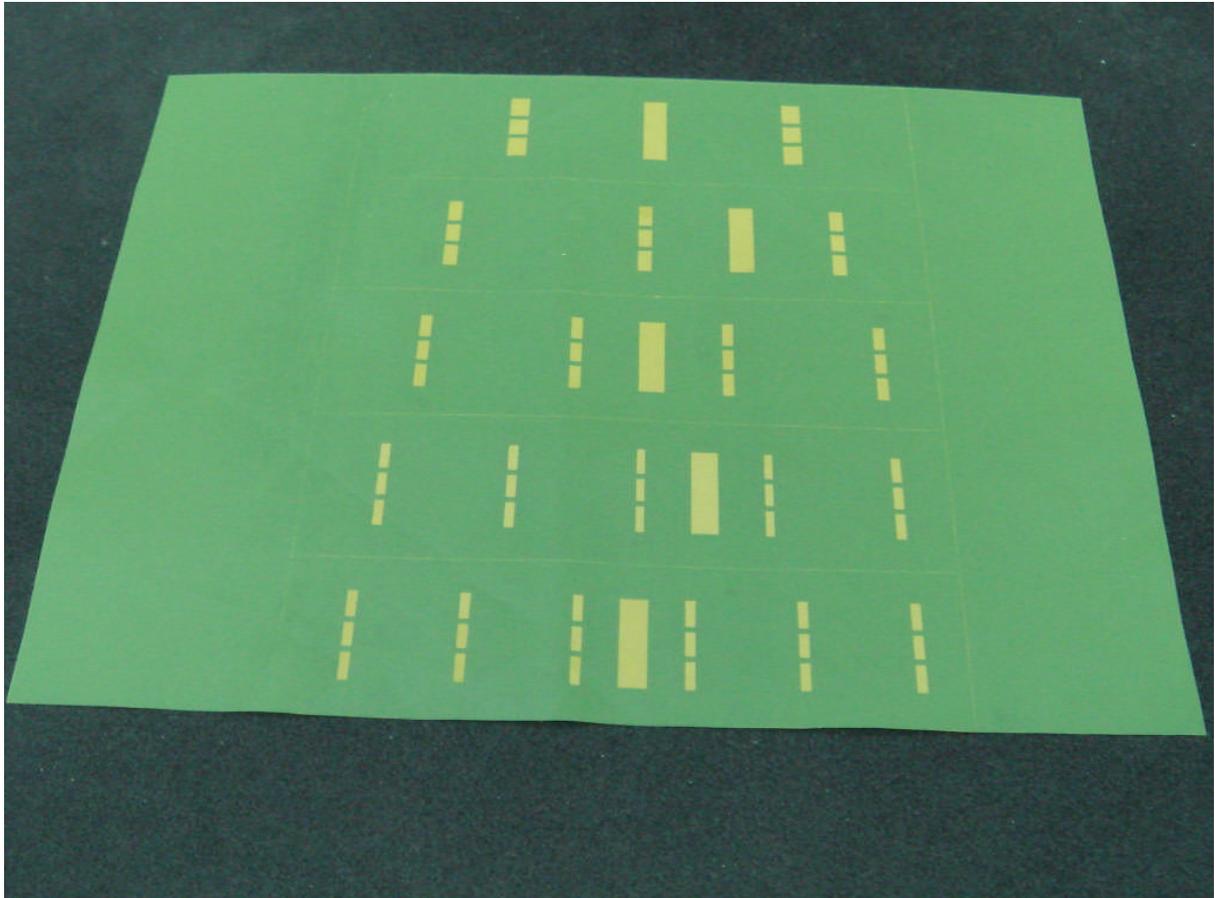


圖3.2 實際完成的網版圖

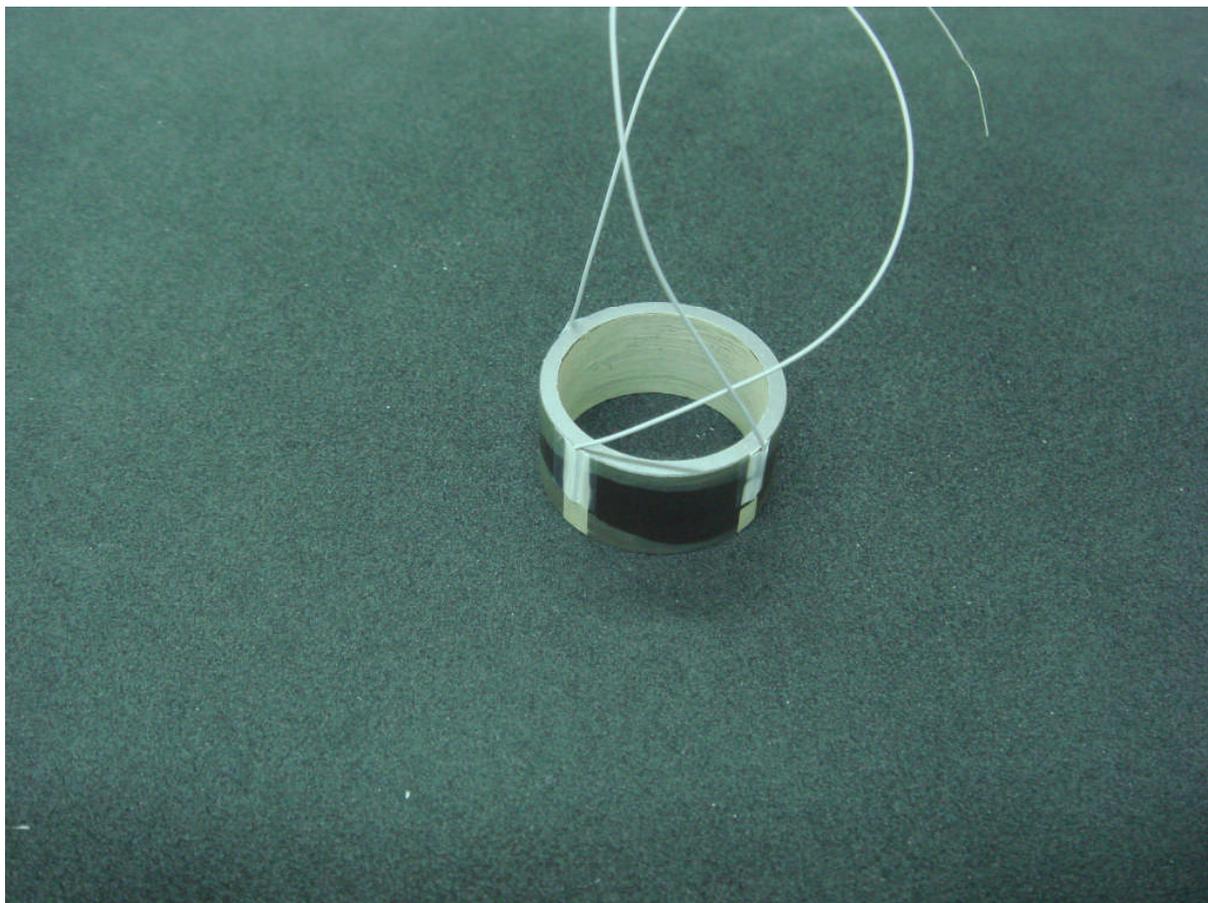


圖 3.3 佈好兩花瓣電極的壓電圓管

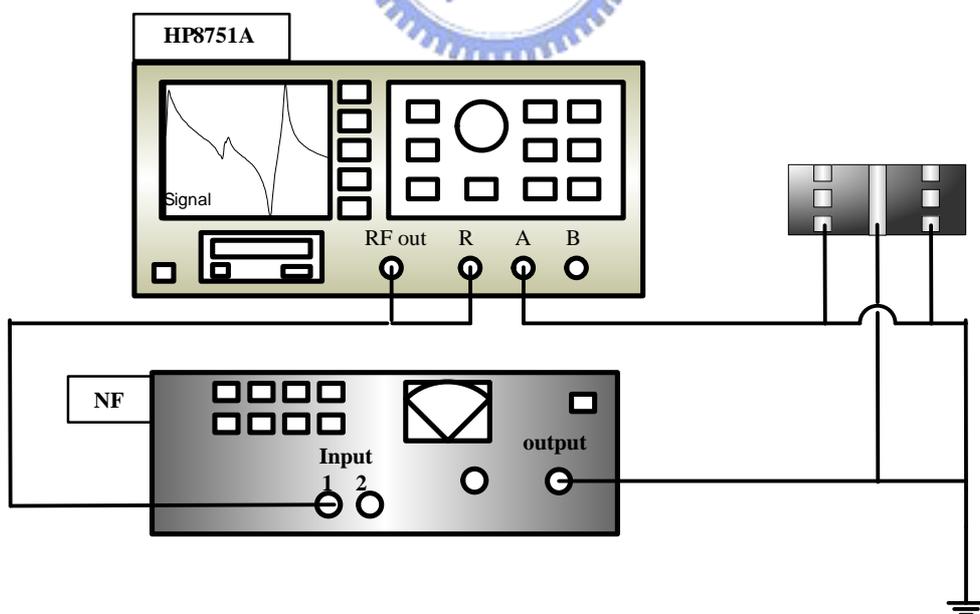


圖 3.4 實驗量測示意圖



圖 3.5 網路分析儀與放大器

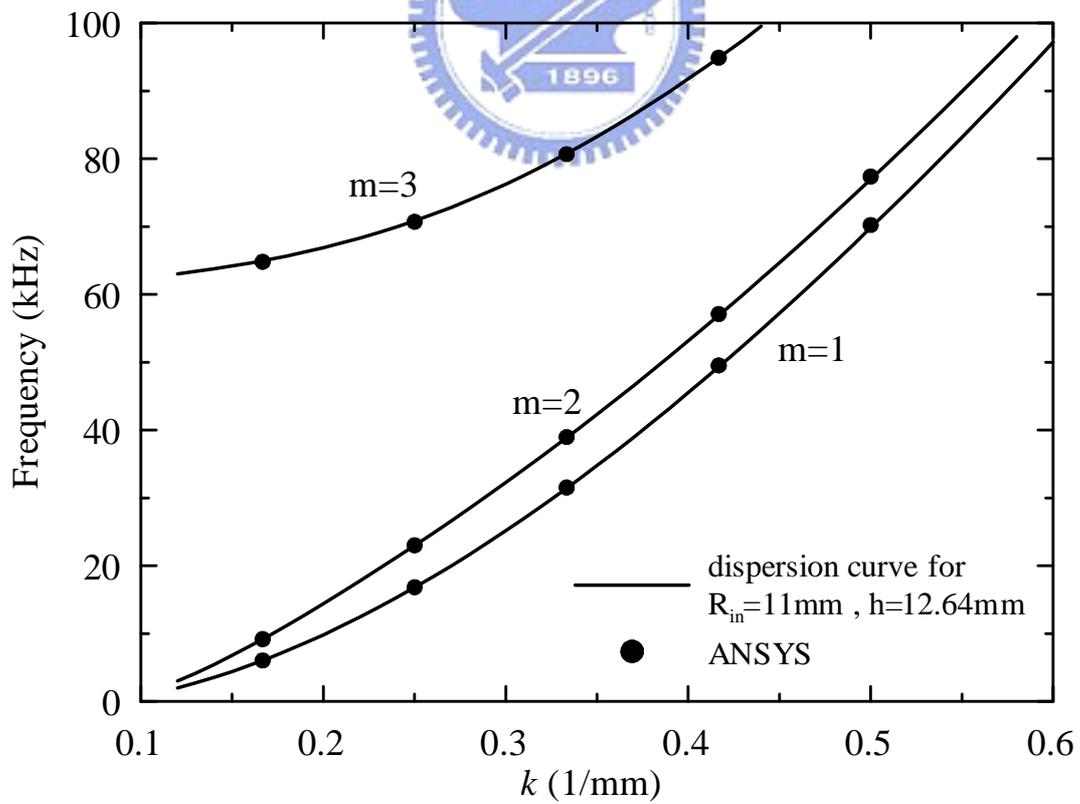


圖 3.6 底部無拘束的壓電圓管脊緣撓性波頻散曲線

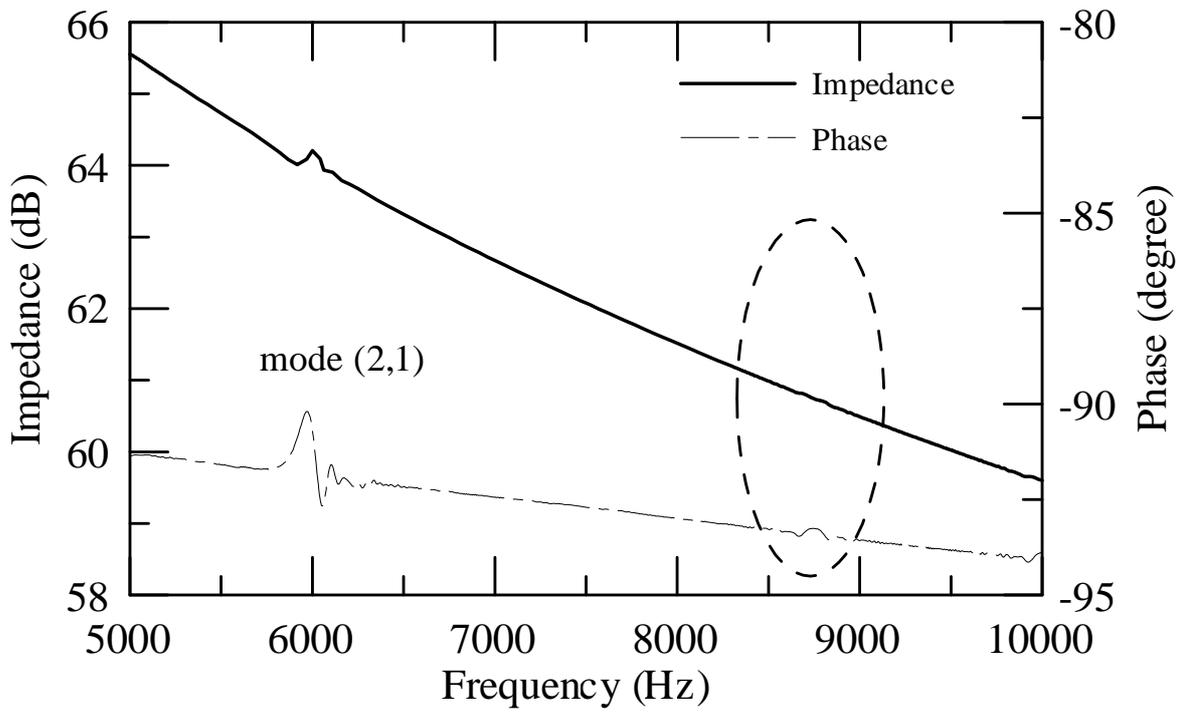


圖3.7 (2,1)模態的阻抗曲線

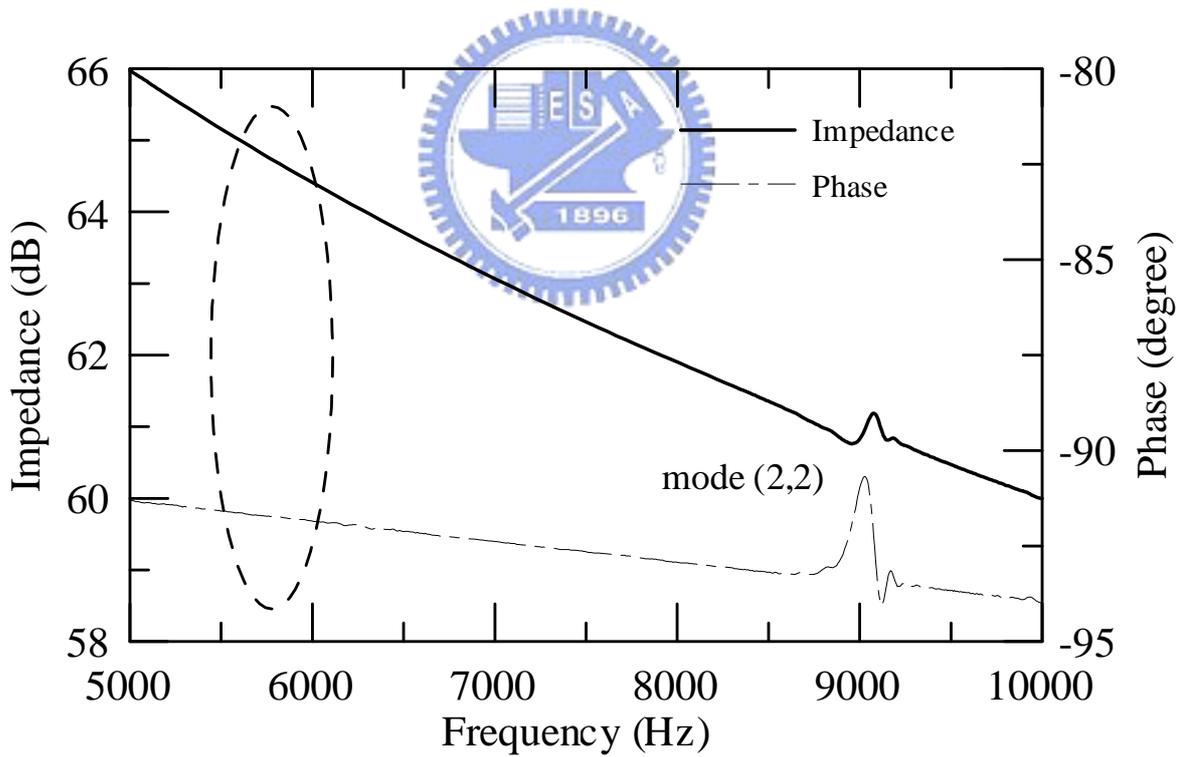


圖3.8 (2,2)模態的阻抗曲線

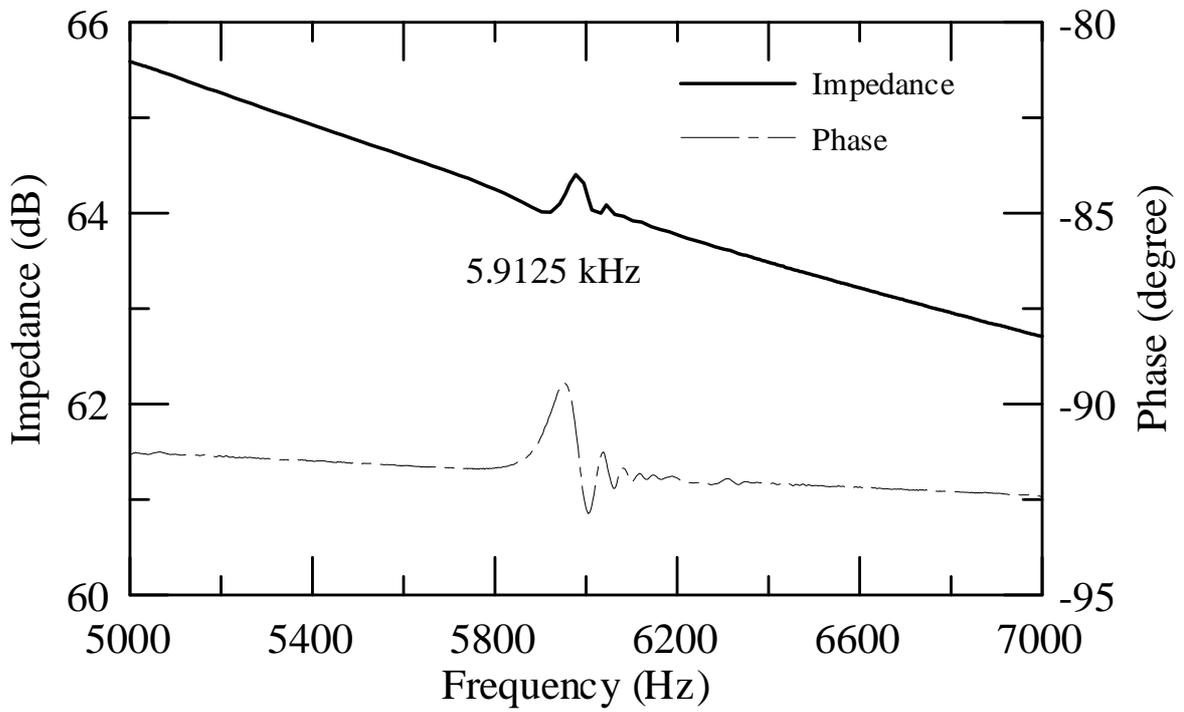


圖3.9 (2,1)模態的阻抗曲線局部放大圖

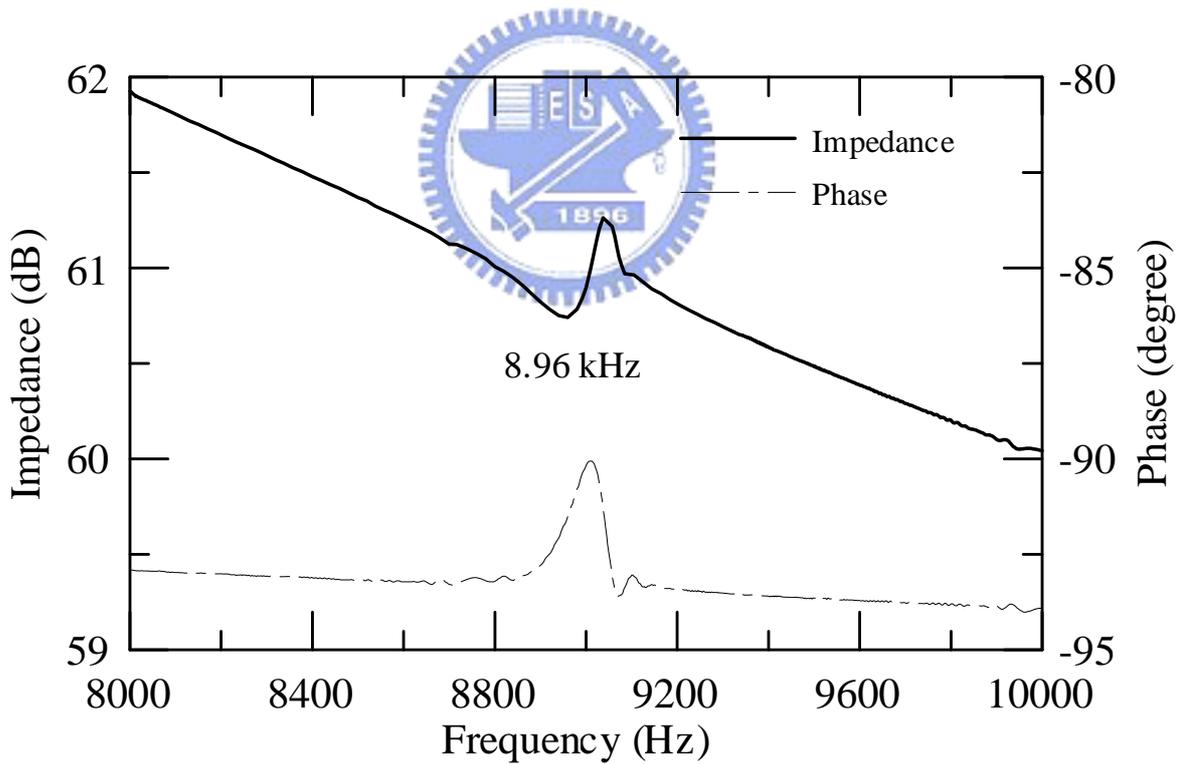


圖3.10 (2,2)模態的阻抗曲線局部放大圖

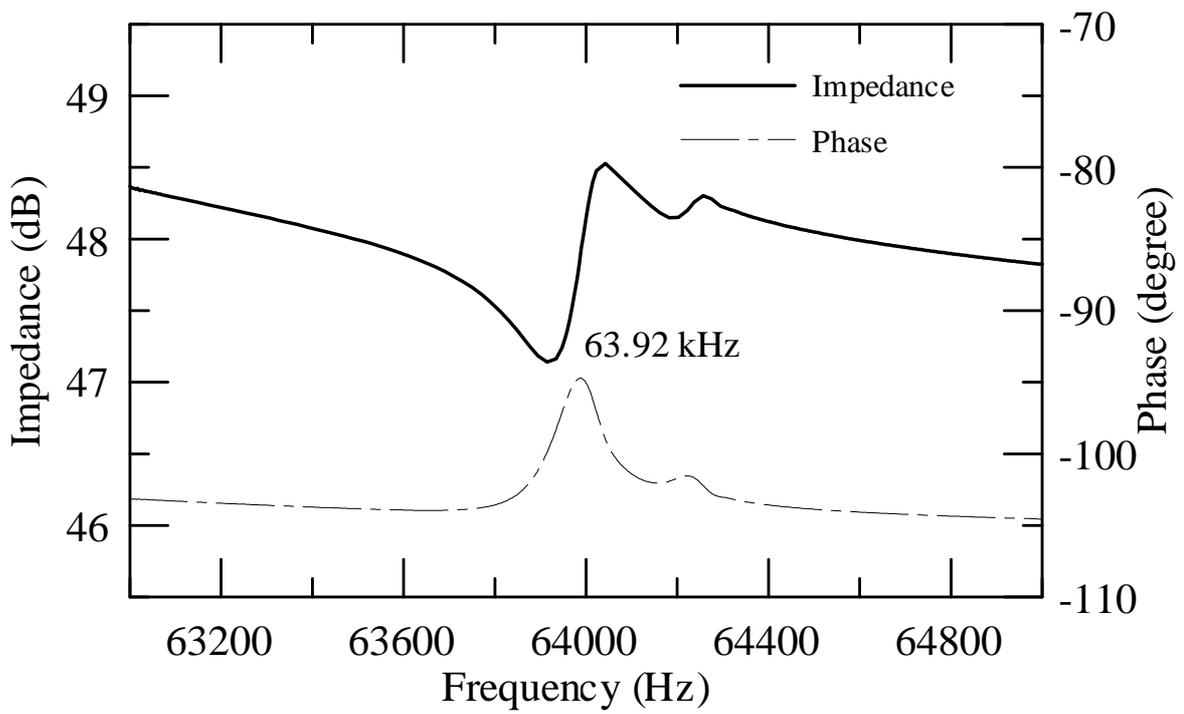


圖3.11 (2,3)模態的阻抗曲線

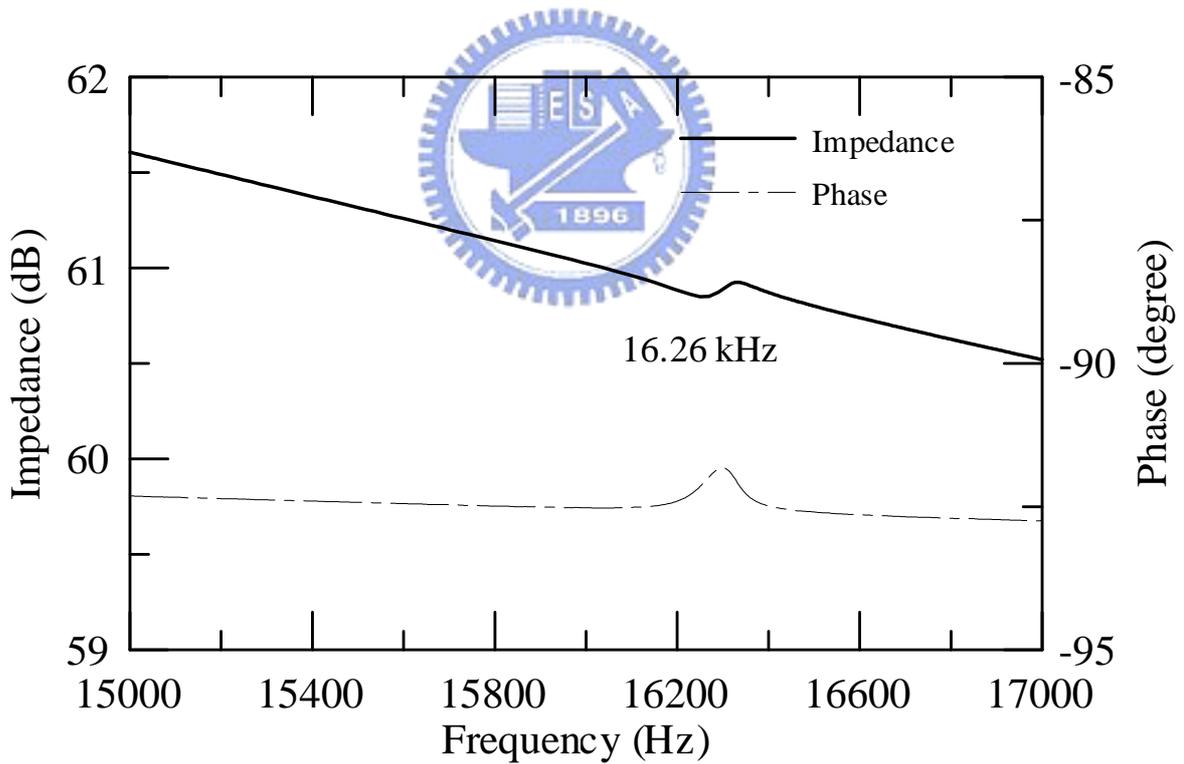


圖3.12 (3,1)模態的阻抗曲線

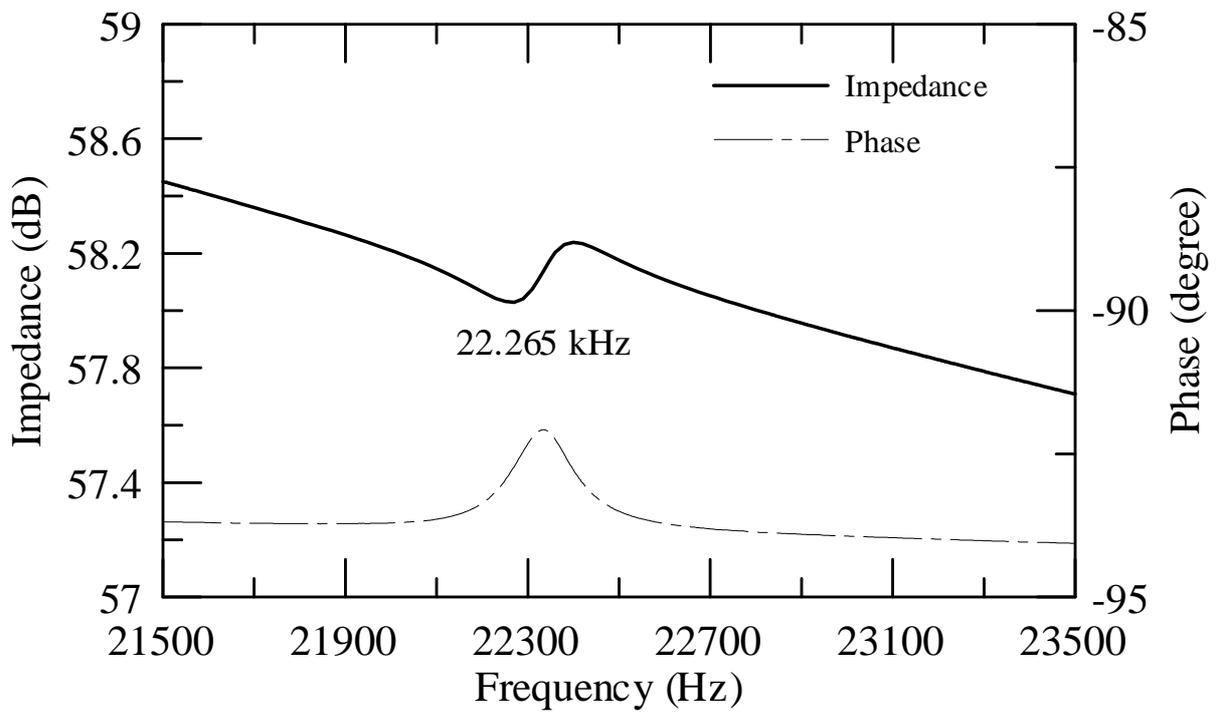


圖3.13 (3,2)模態的阻抗曲線

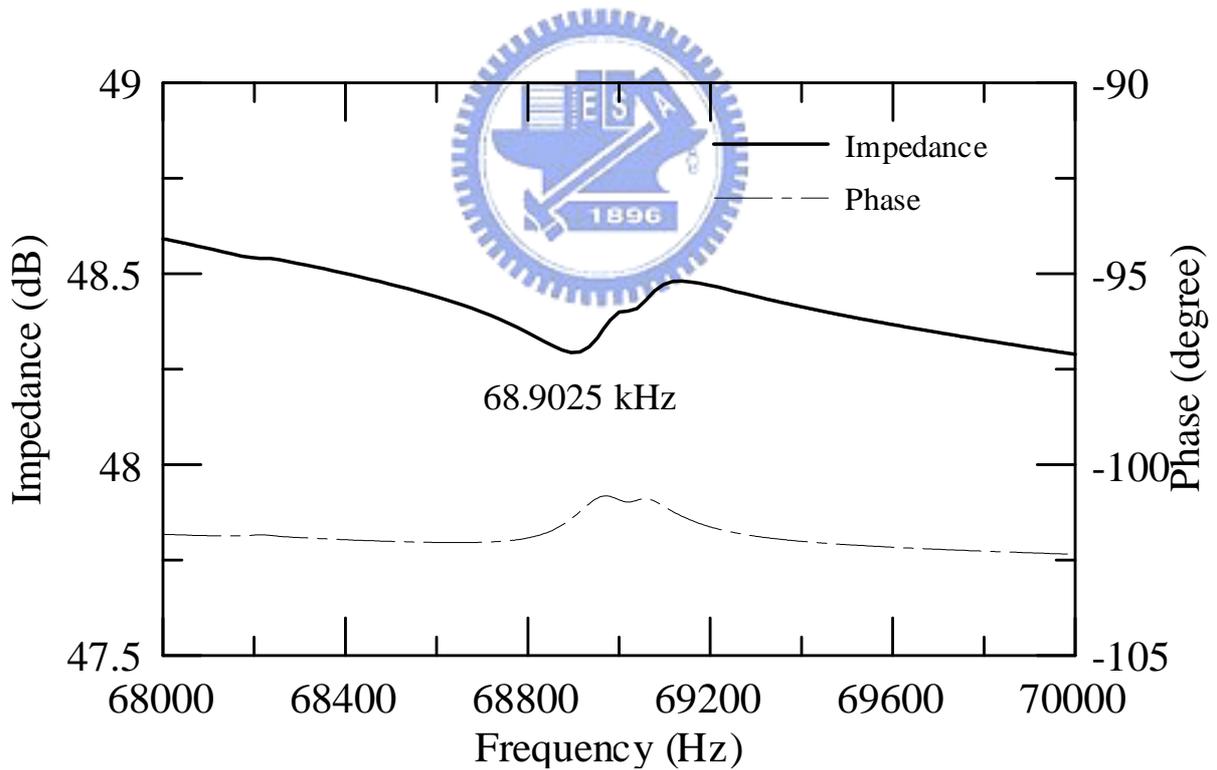


圖3.14 (3,3)模態的阻抗曲線

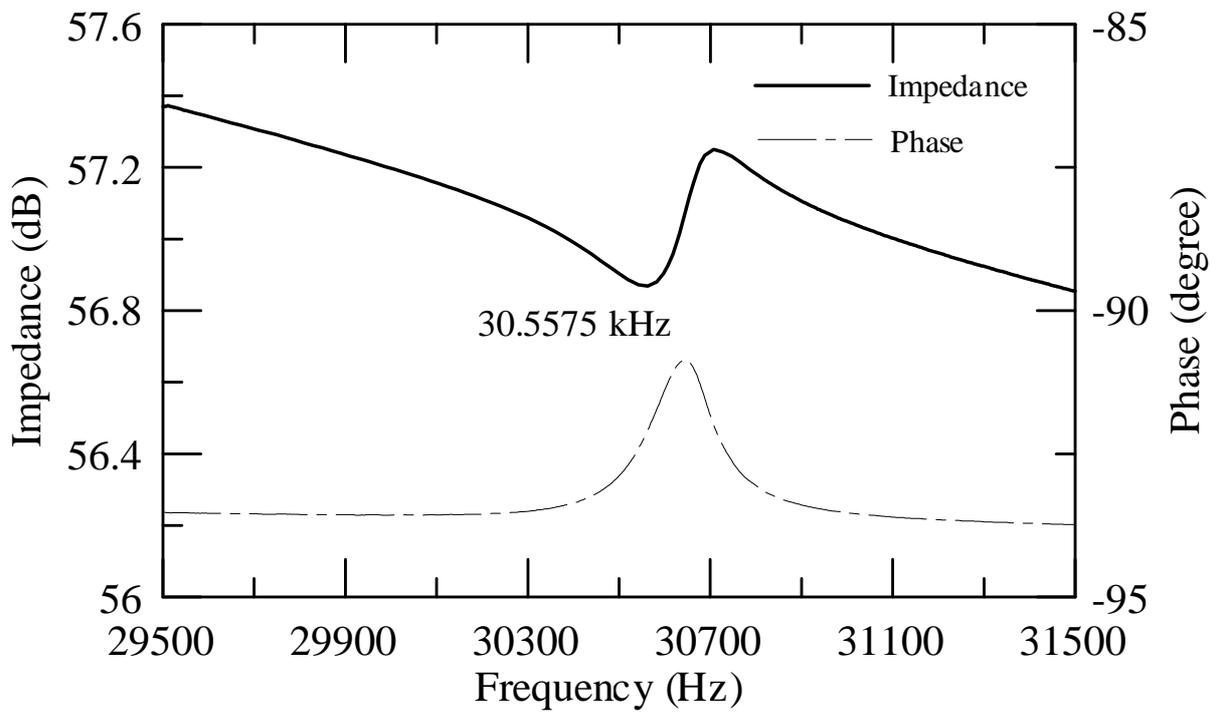


圖3.15 (4,1)模態的阻抗曲線

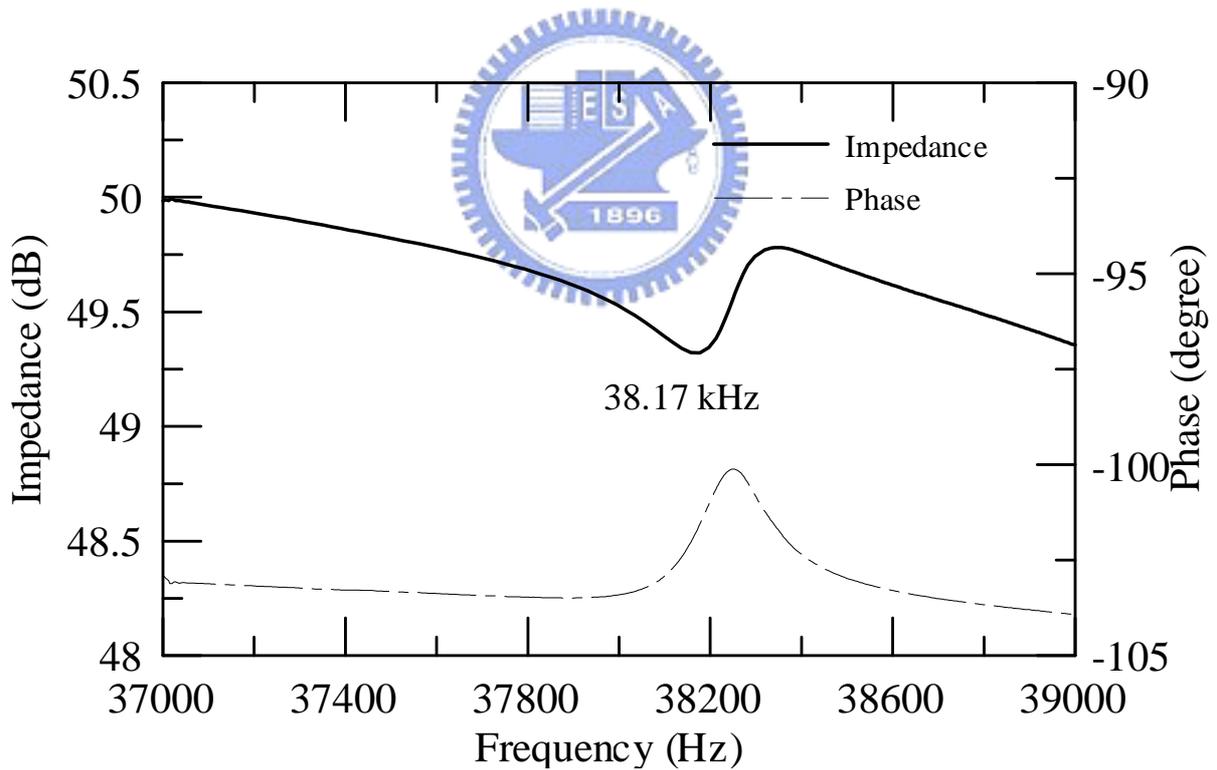


圖3.16 (4,2)模態的阻抗曲線

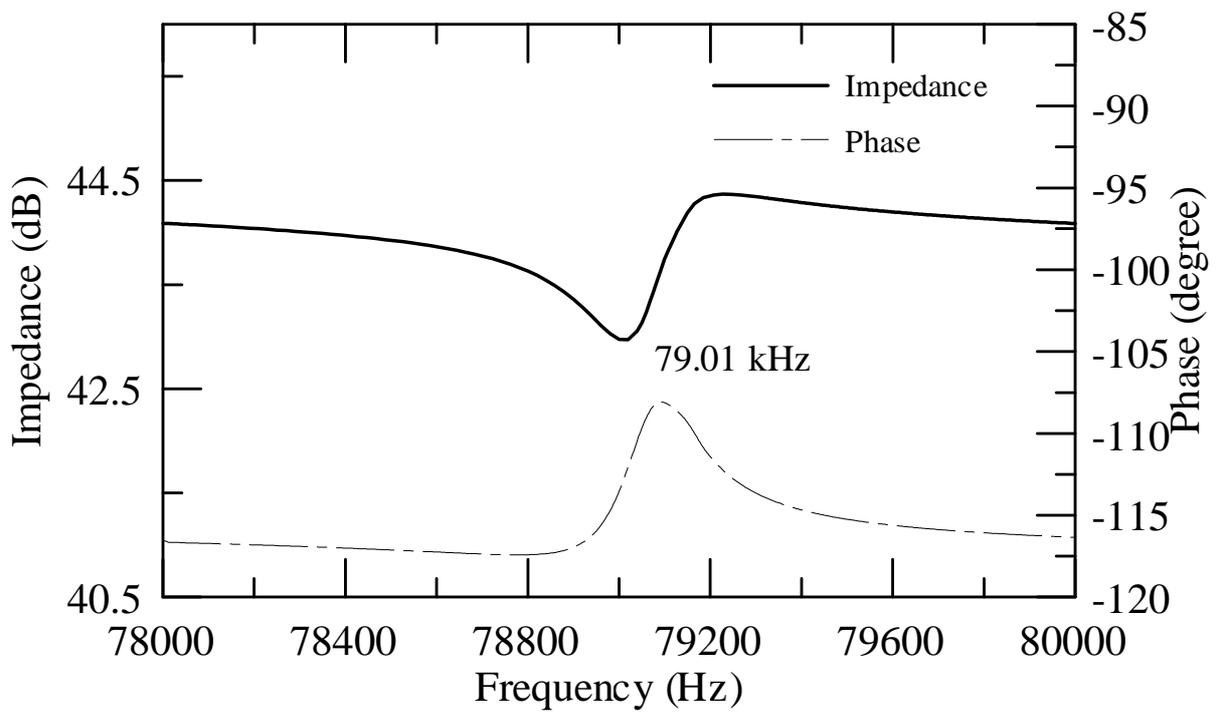


圖3.17 (4,3)模態的阻抗曲線

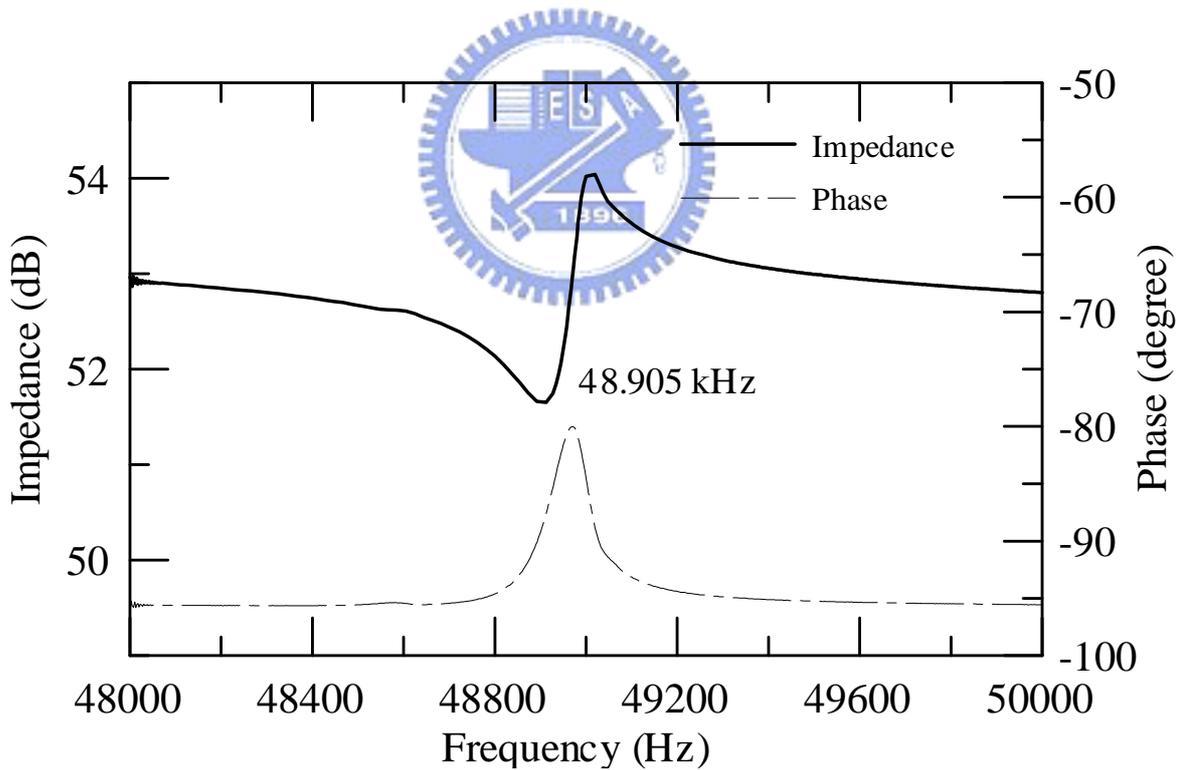


圖3.18 (5,1)模態的阻抗曲線

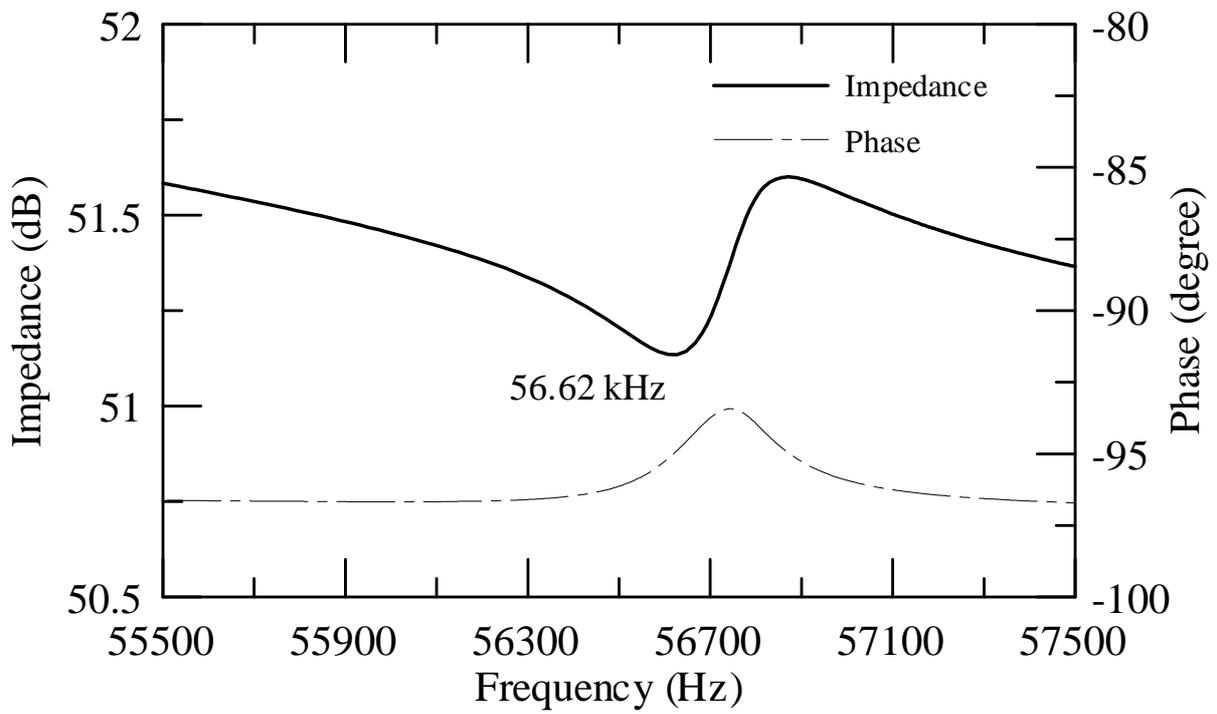


圖3.19 (5,2)模態的阻抗曲線

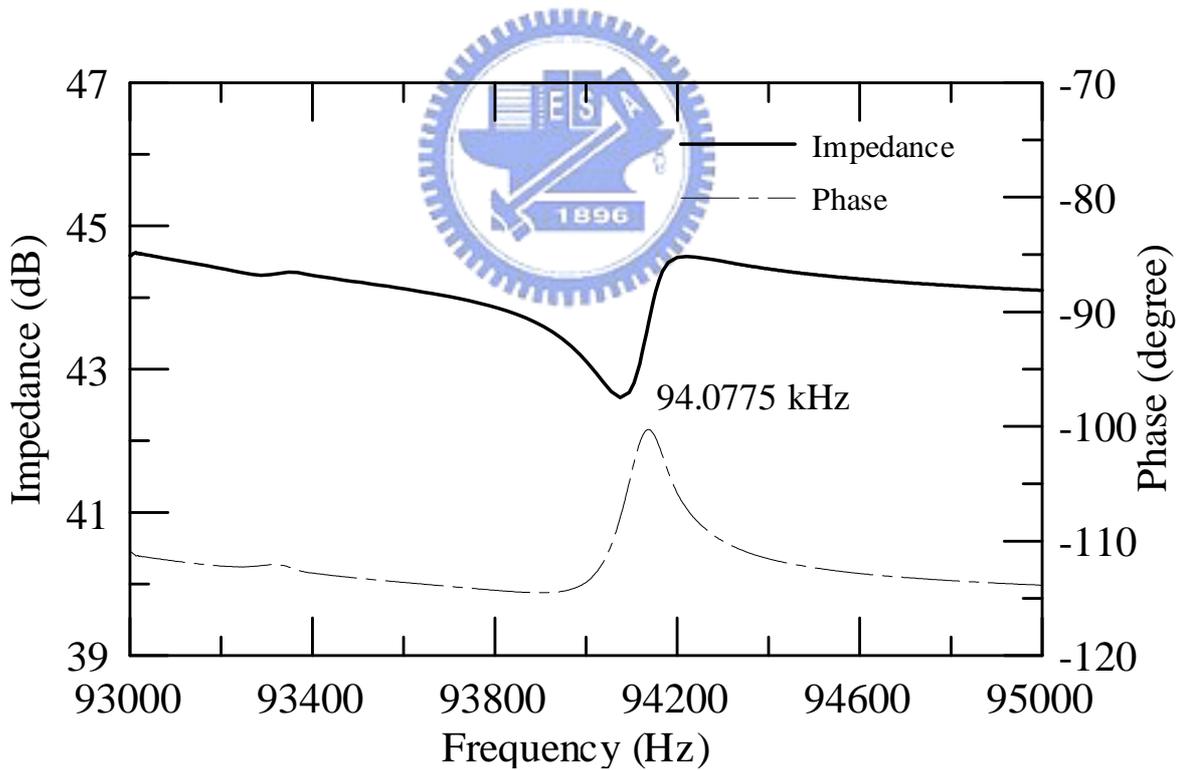


圖3.20 (5,3)模態的阻抗曲線

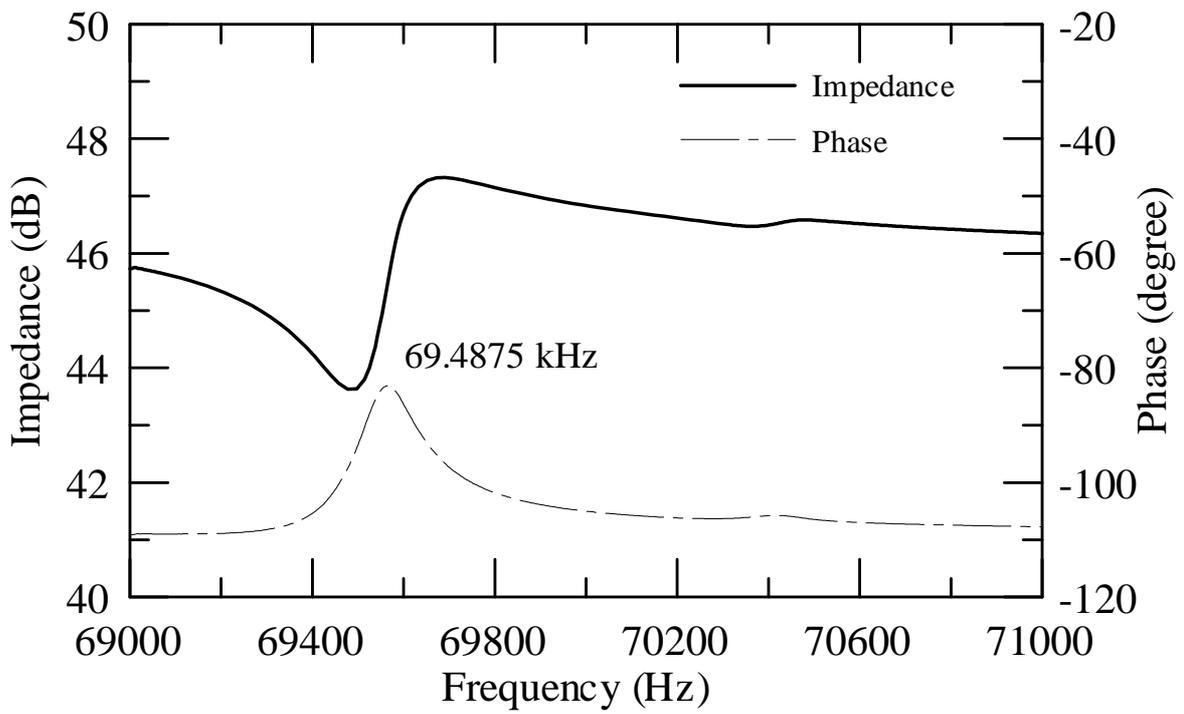


圖3.21 (6,1)模態的阻抗曲線

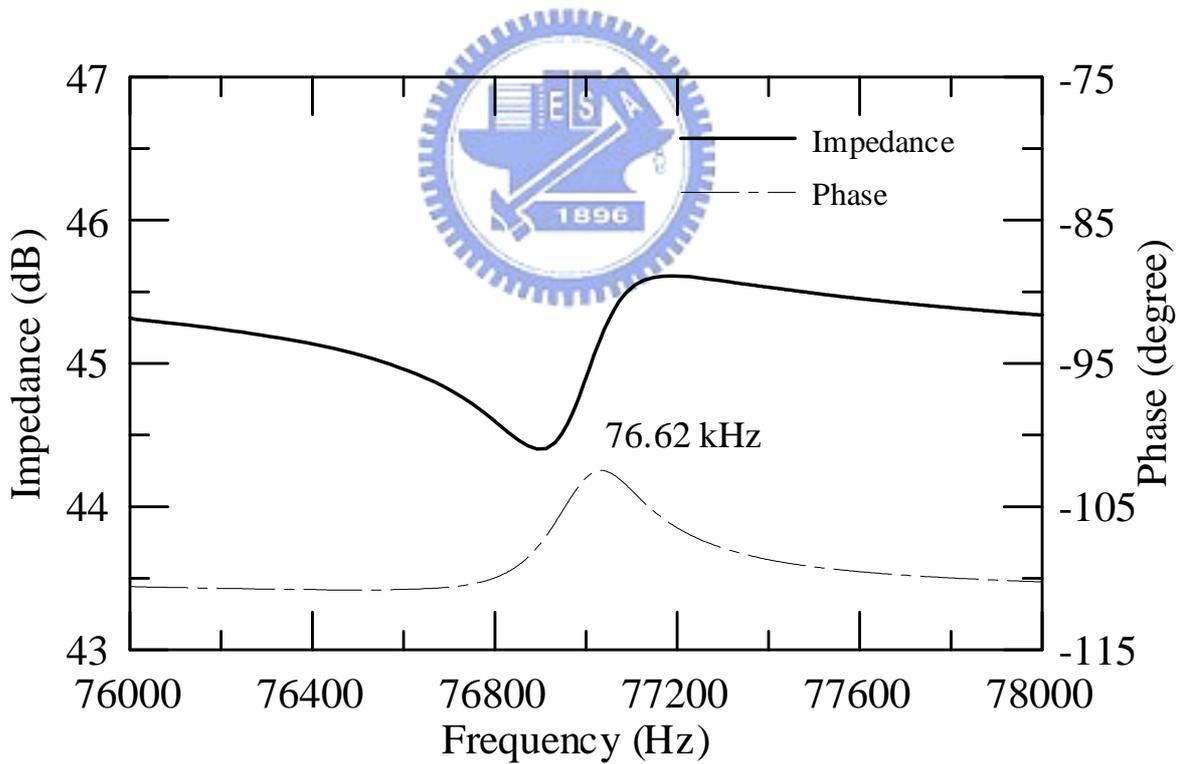


圖3.22 (6,2)模態的阻抗曲線

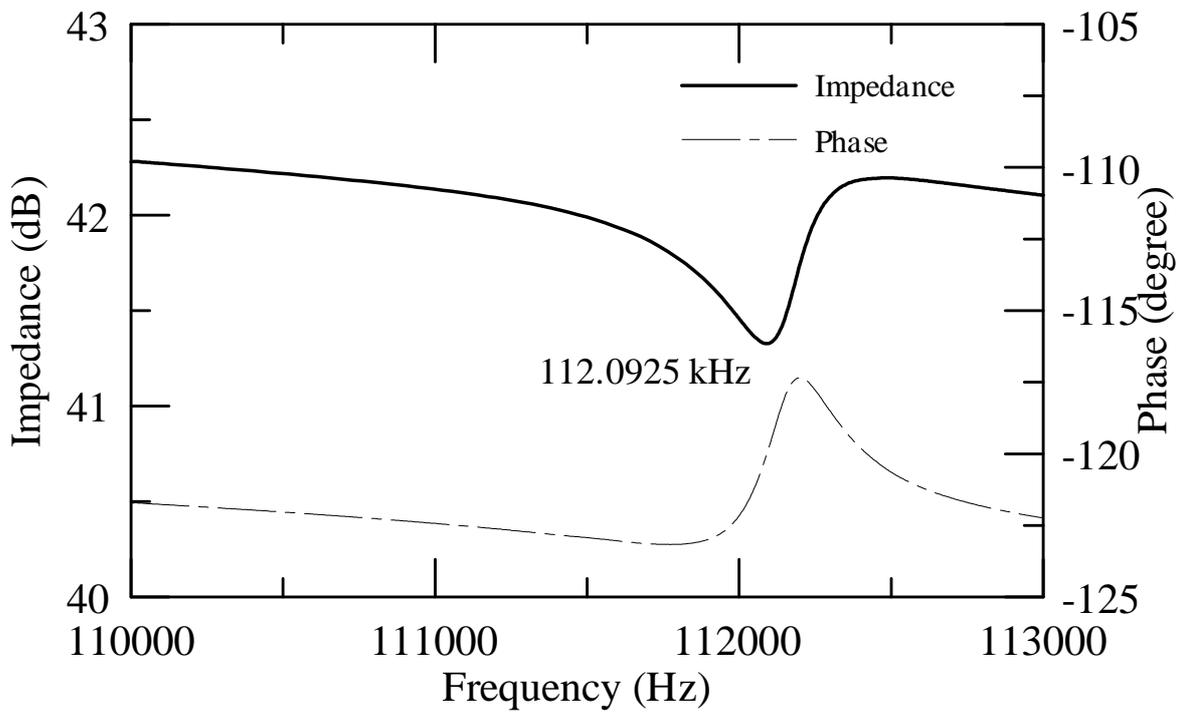


圖 3.23 (6,3)模態的阻抗曲線

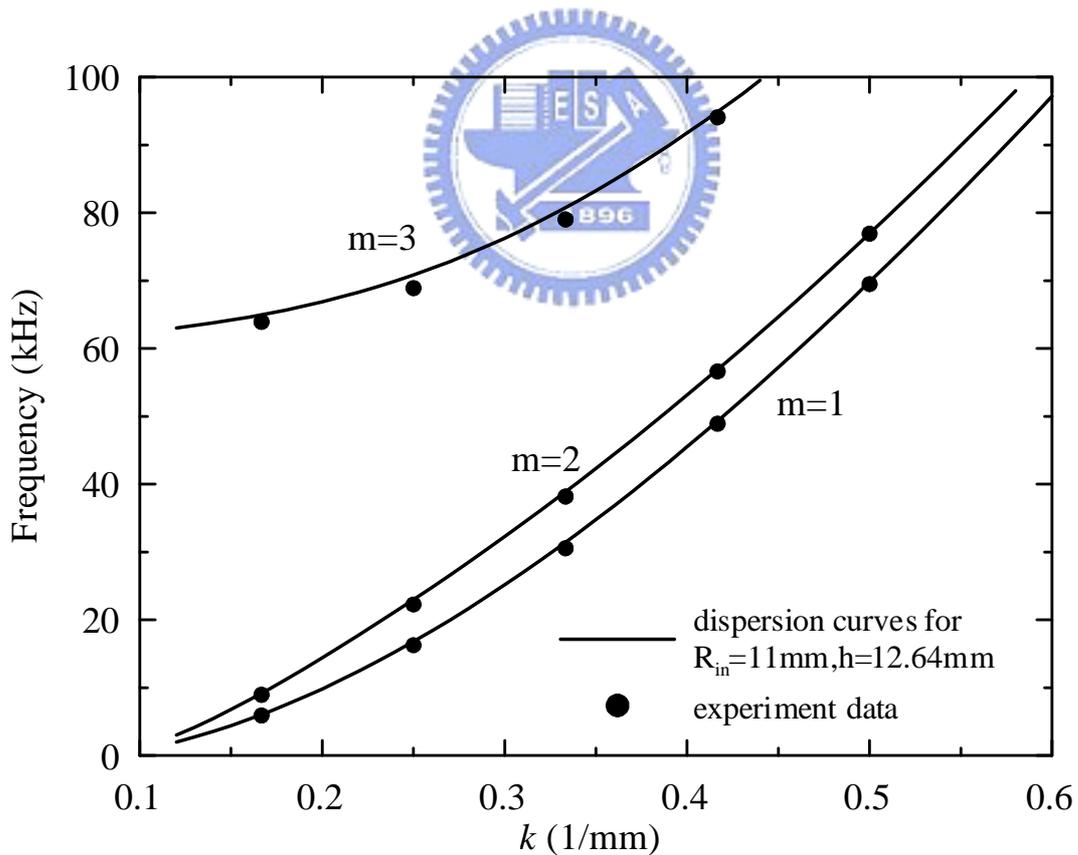


圖3.24 修正前壓電圓管脊緣撓性波頻散曲線與實驗值的比較

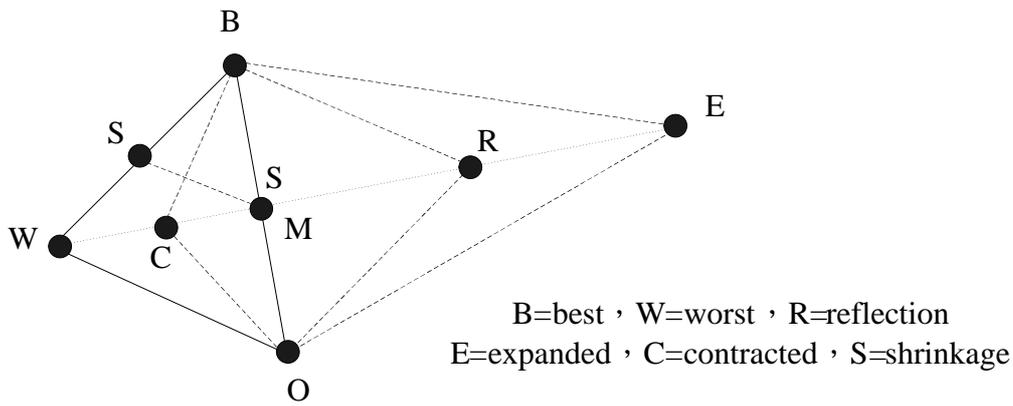


圖3.25 簡單體法反算示意圖

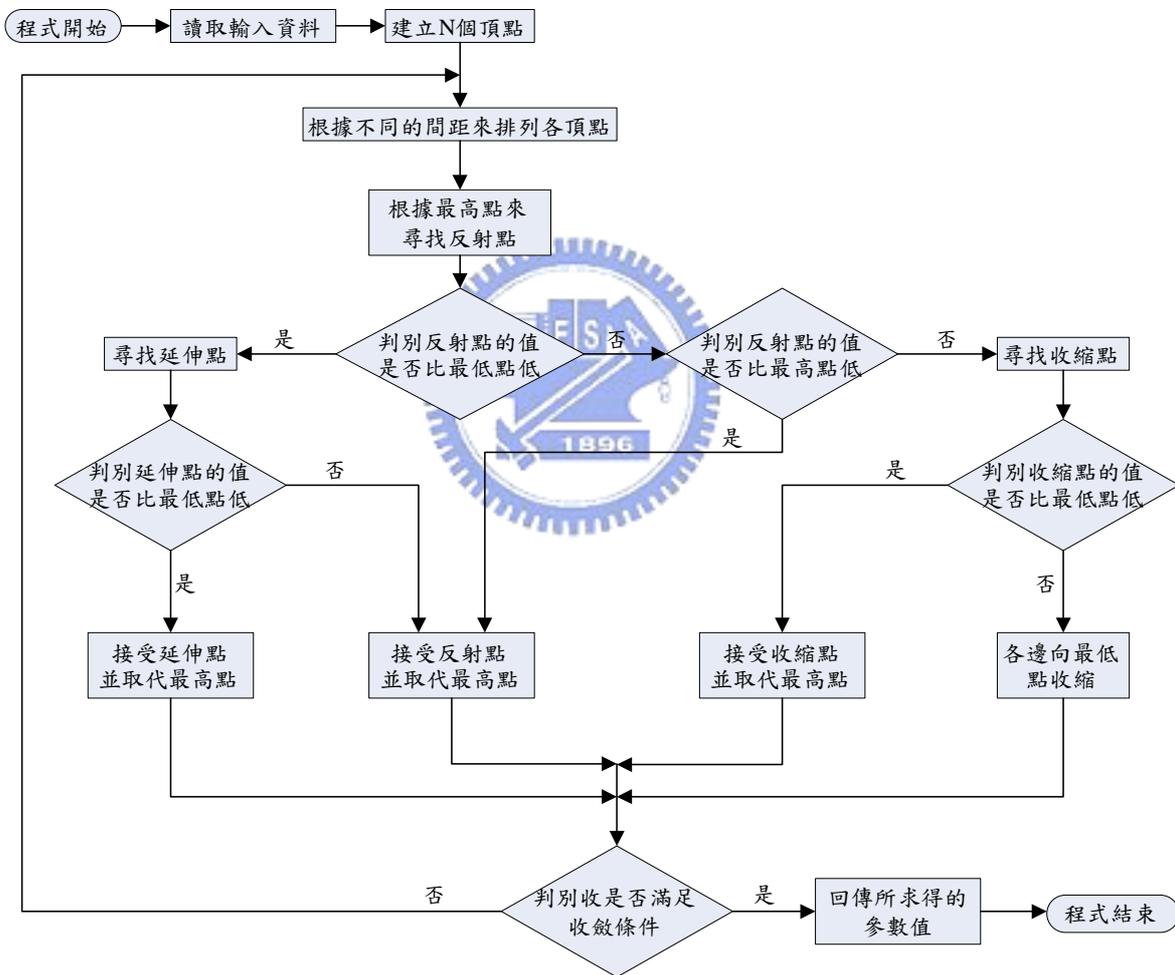


圖3.26 簡單體法反算程式流程圖

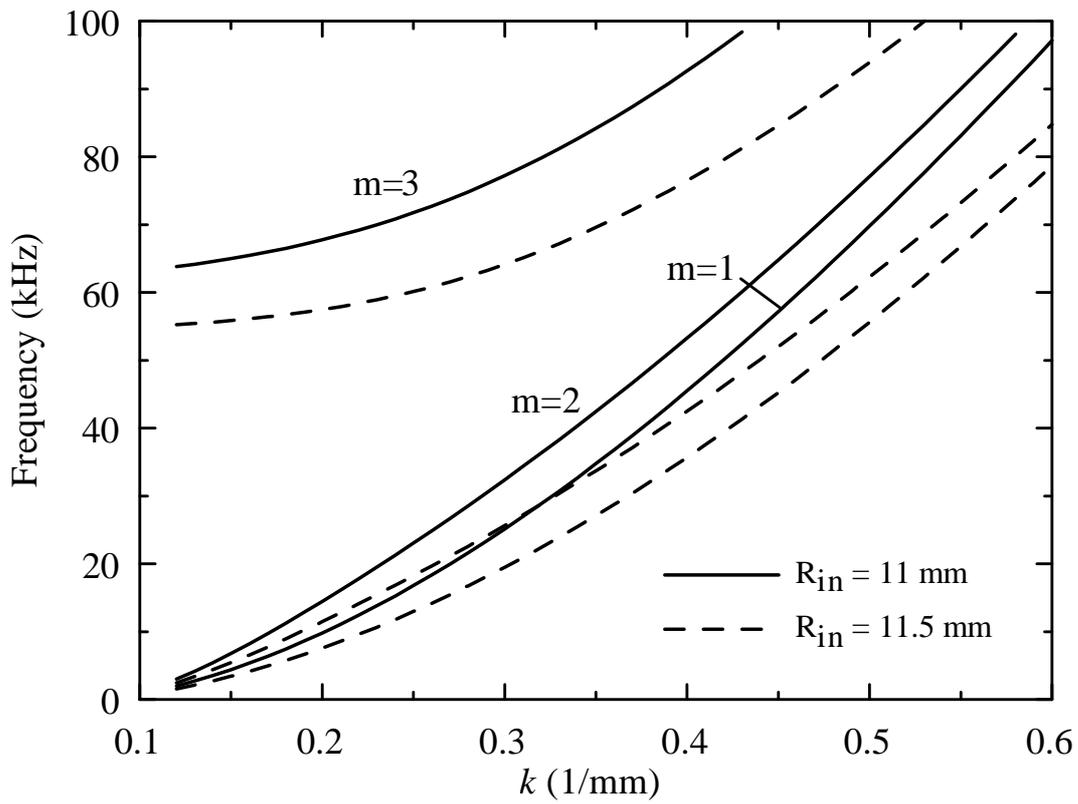


圖3.27 內徑 R_{in} 的靈敏度測試

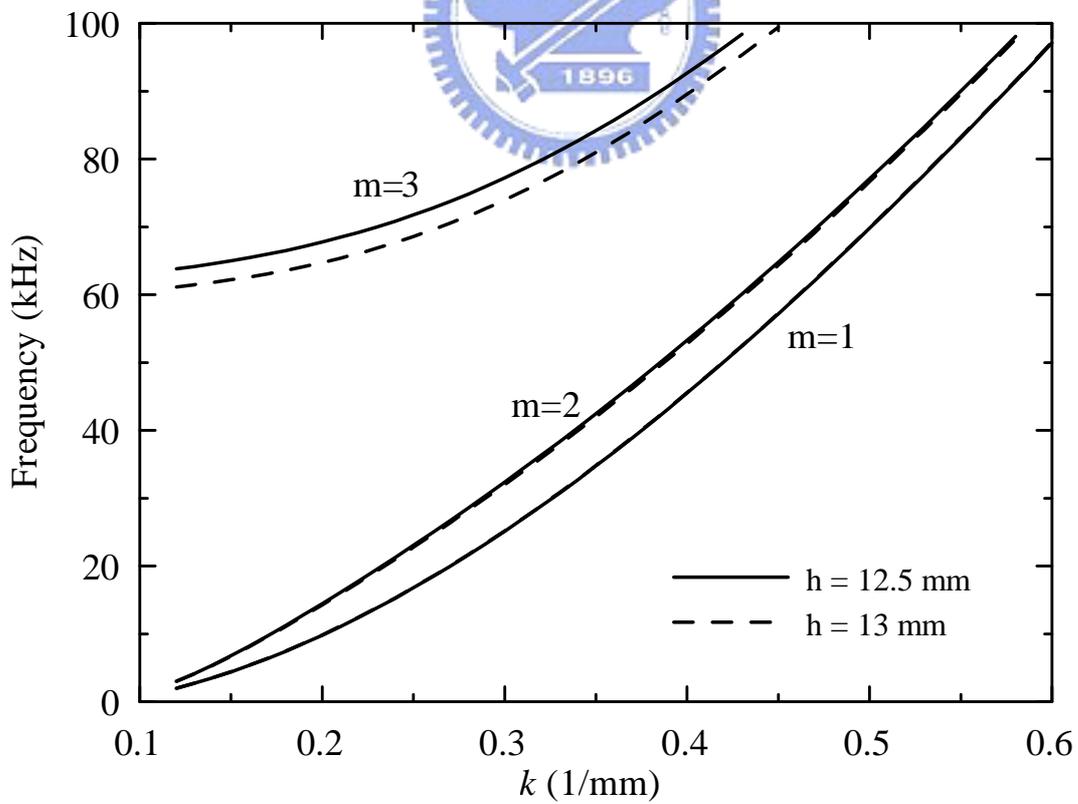


圖3.28 高度 h 的靈敏度測試

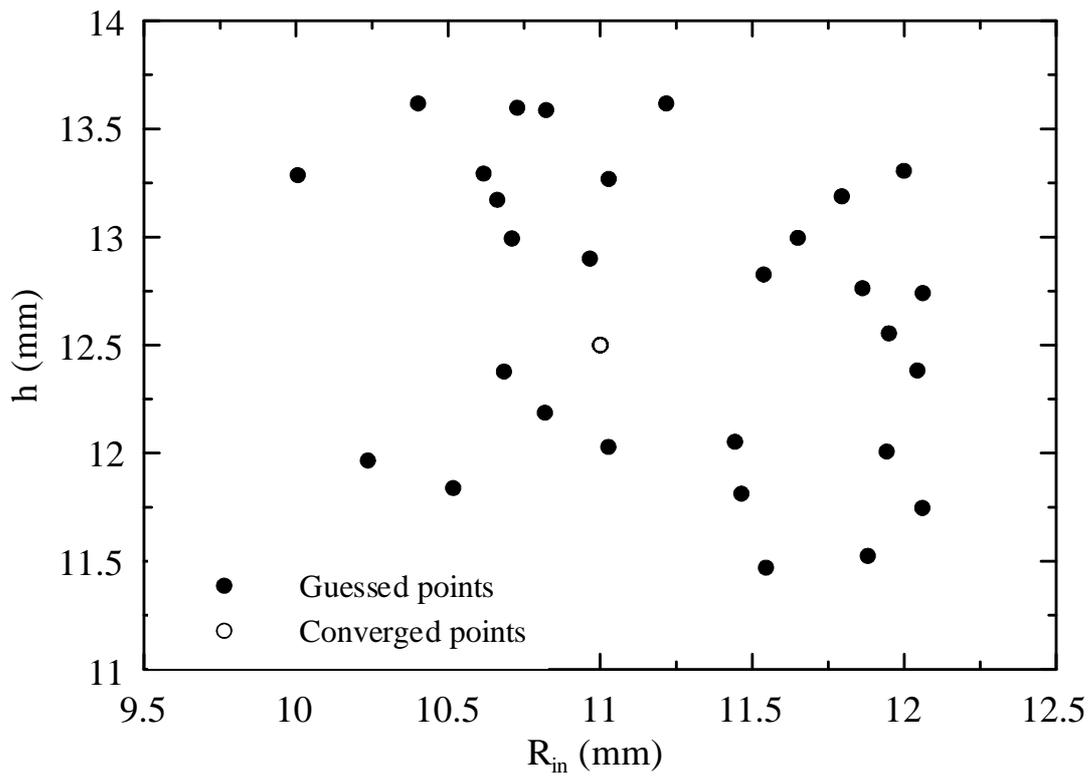


圖3.29 結構幾何參數 R_{in} 、 h 的反算收斂性測試

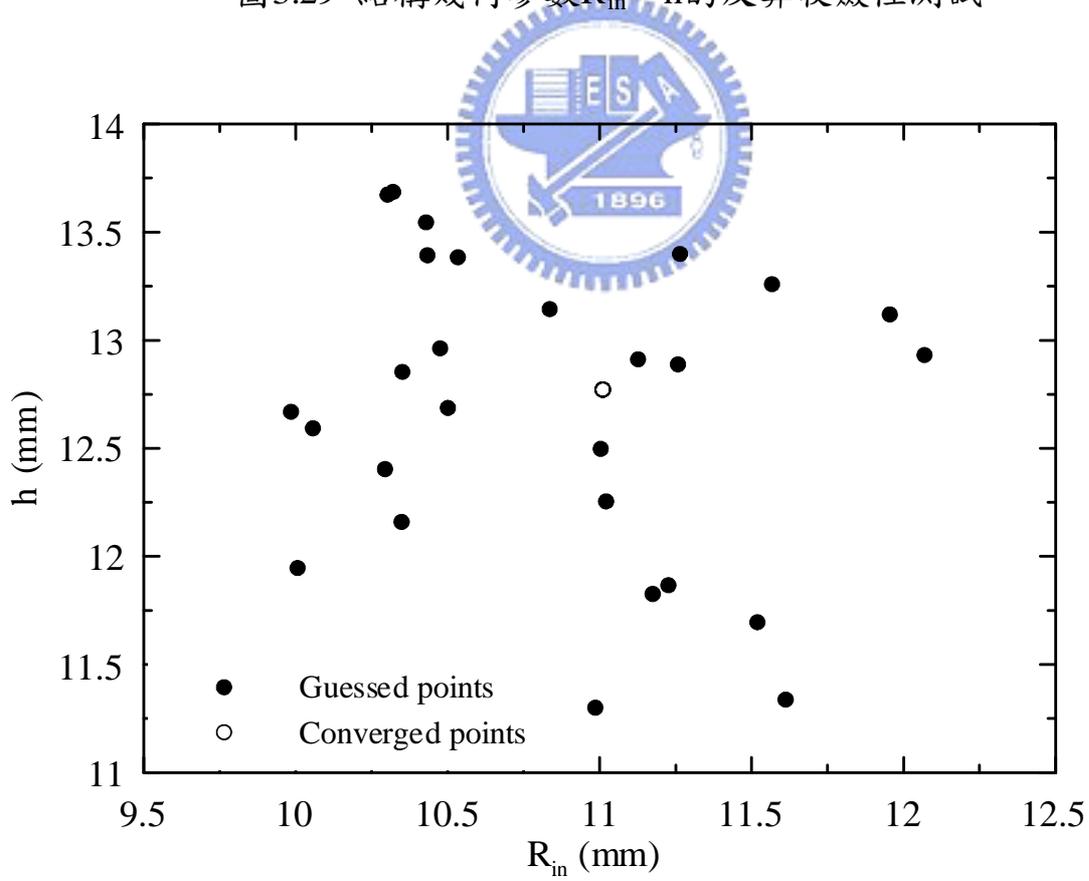


圖3.30 結構幾何參數 R_{in} 、 h 的反算結果

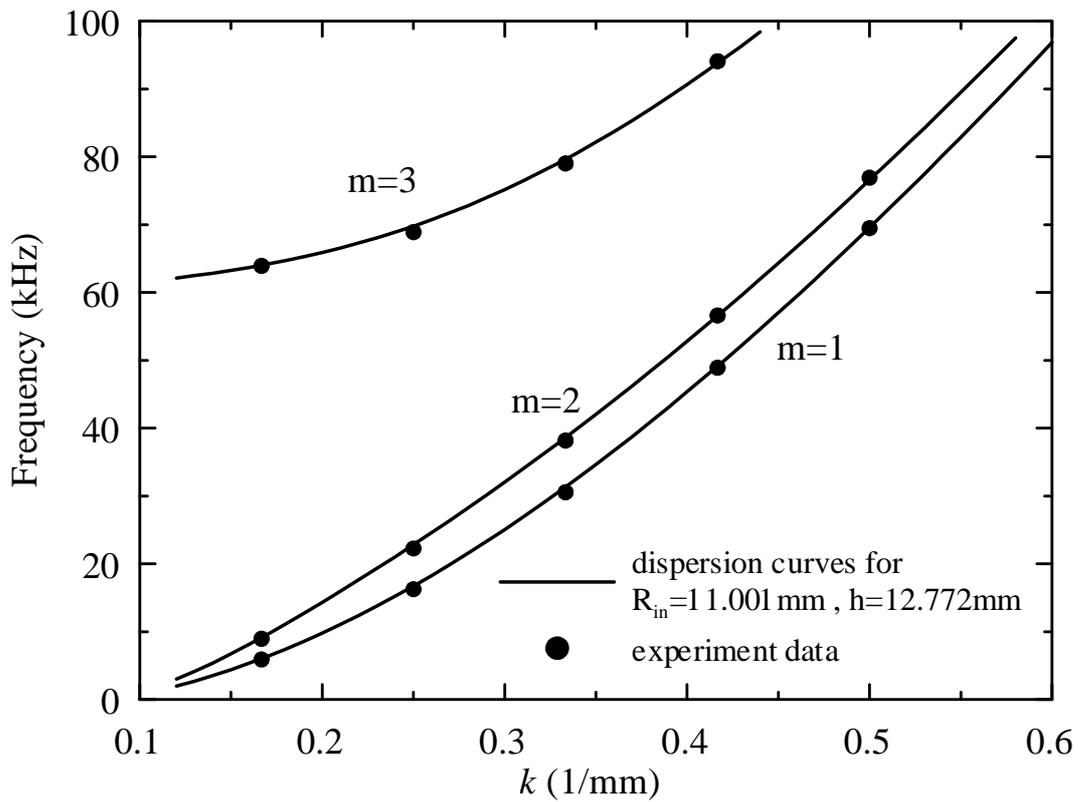


圖3.31 幾何參數反算修正後之壓電圓管脊圓撓性波頻散曲線

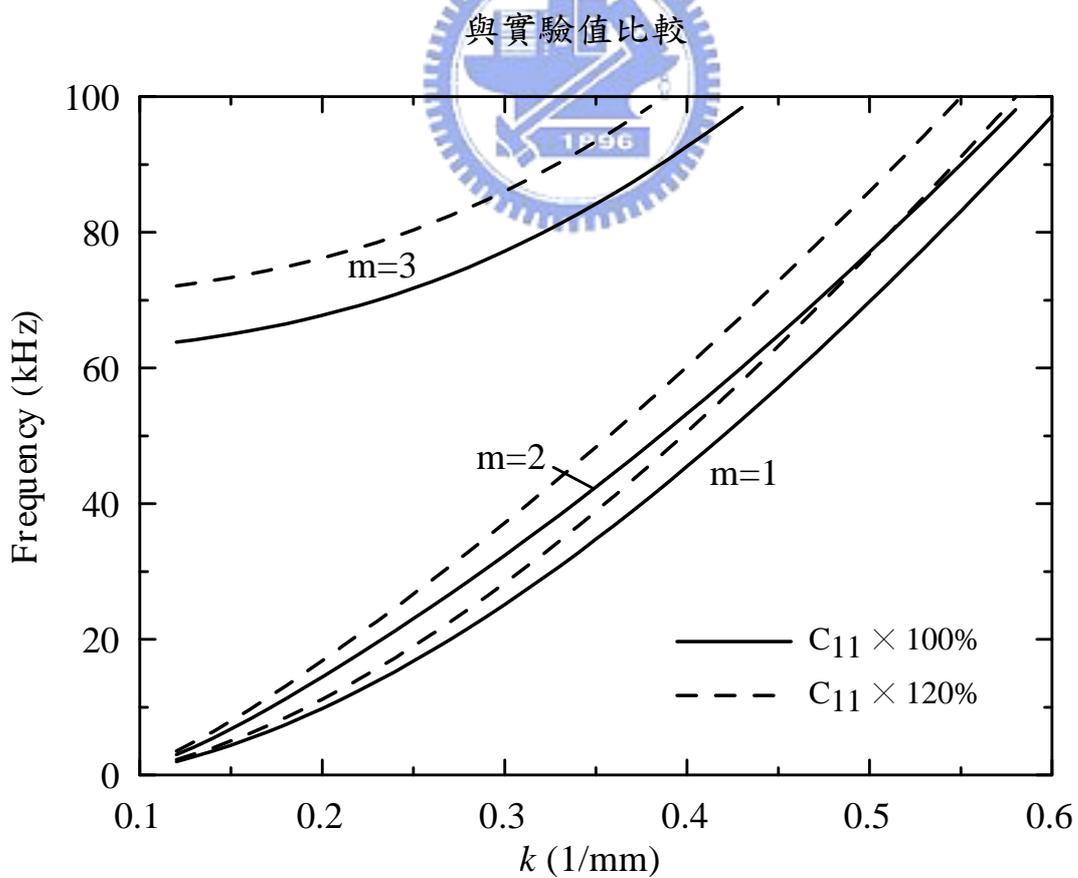


圖3.32 彈性係數 C_{11} 的靈敏度測試

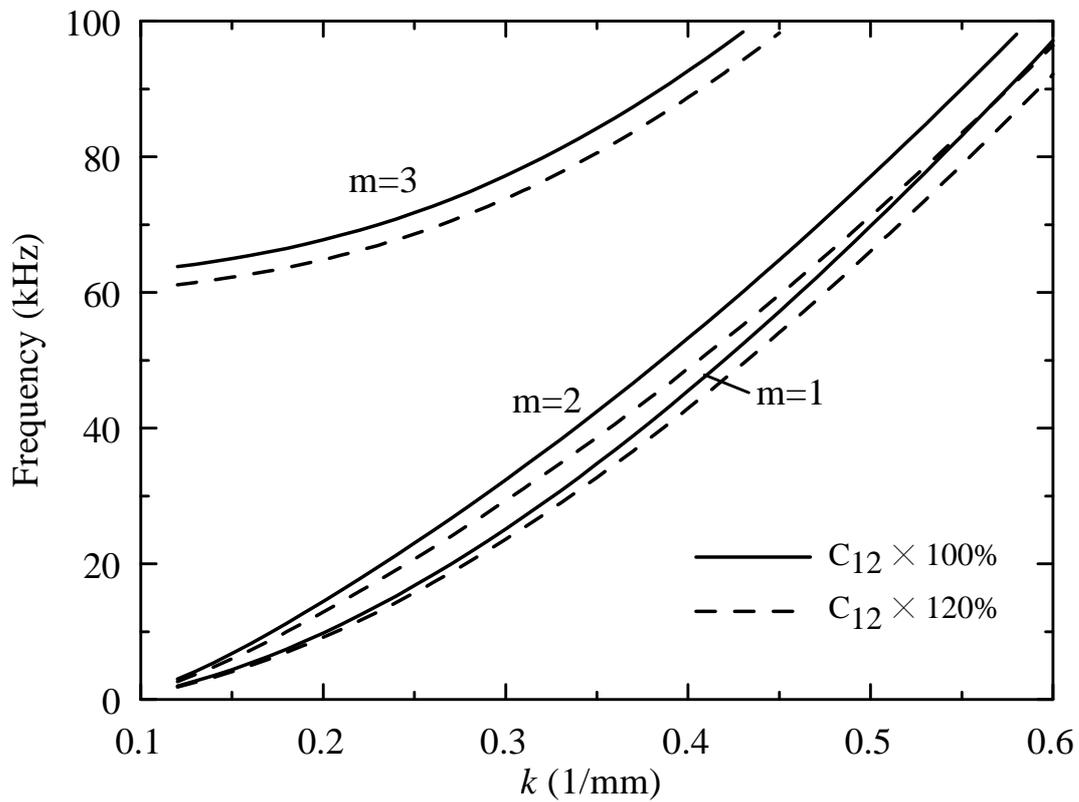


圖3.33 彈性係數 C_{12} 的靈敏度測試

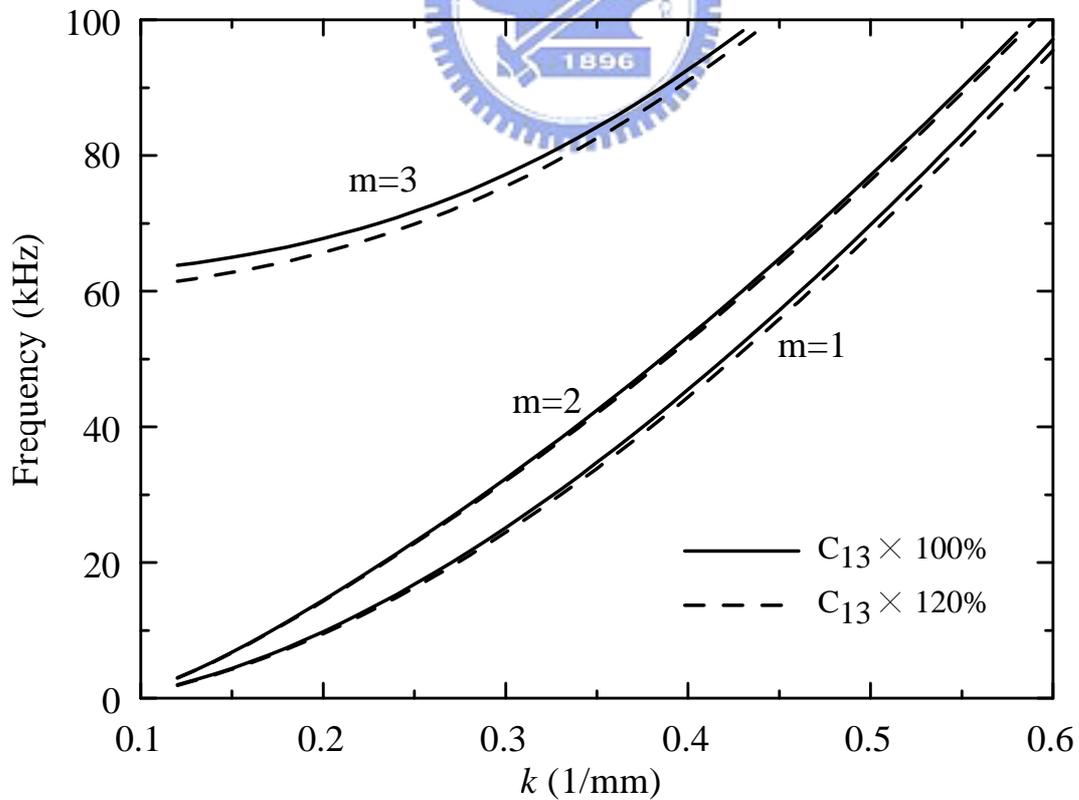


圖3.34 彈性係數 C_{13} 的靈敏度測試

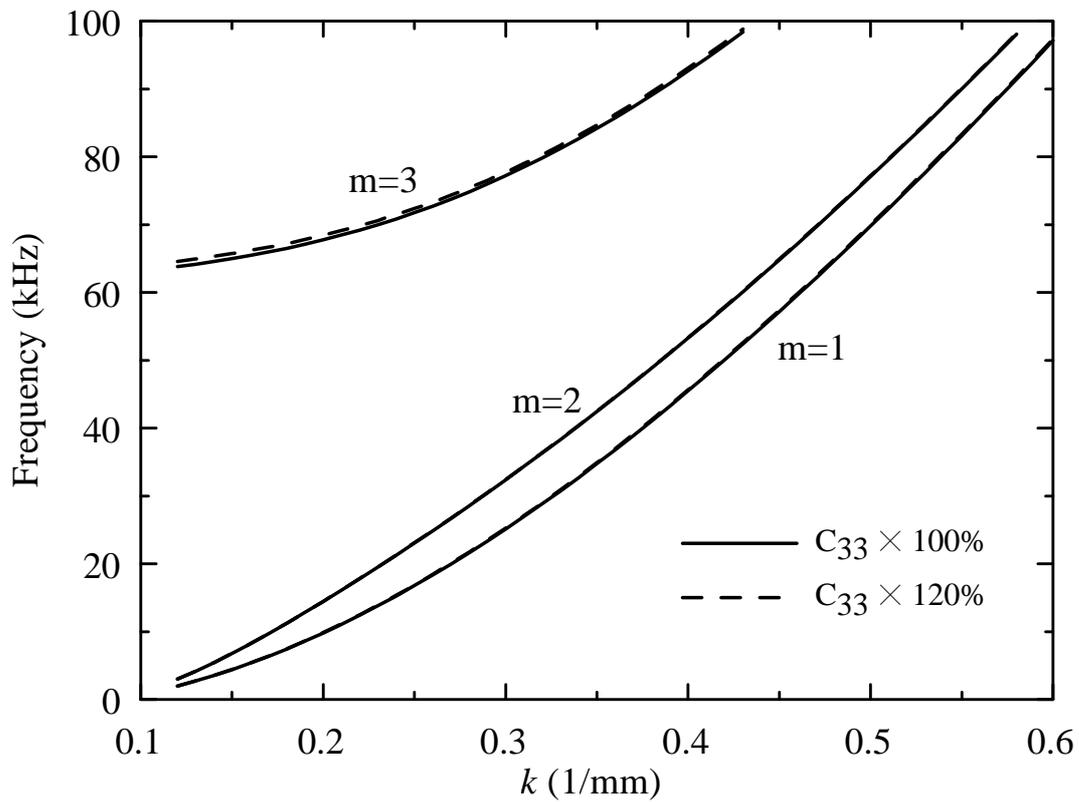


圖3.35 彈性係數 C_{33} 的靈敏度測試

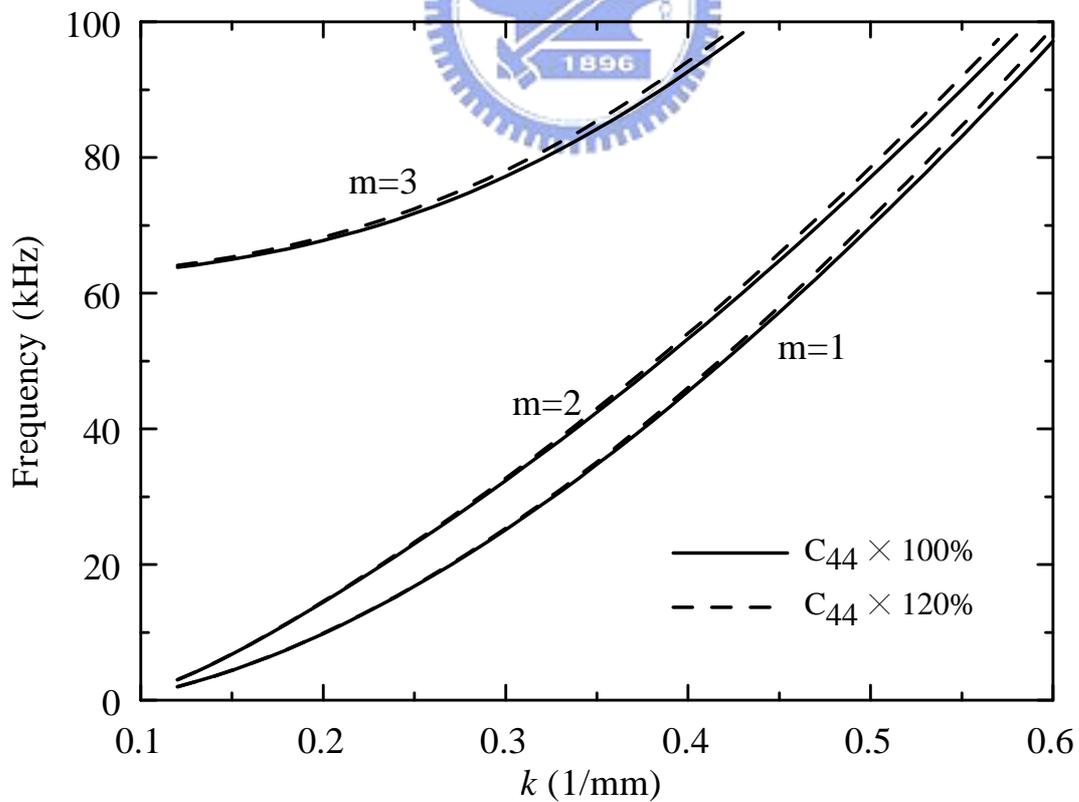


圖3.36 彈性係數 C_{44} 的靈敏度測試

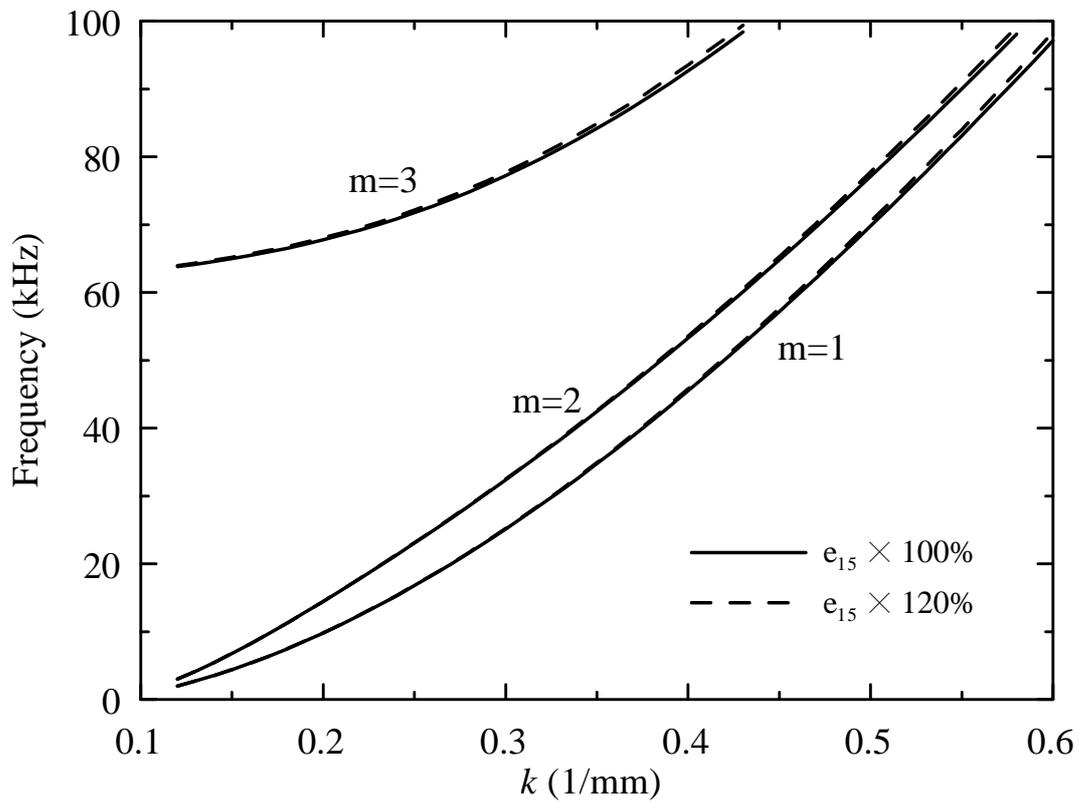


圖3.37 壓電係數 e_{15} 的靈敏度測試

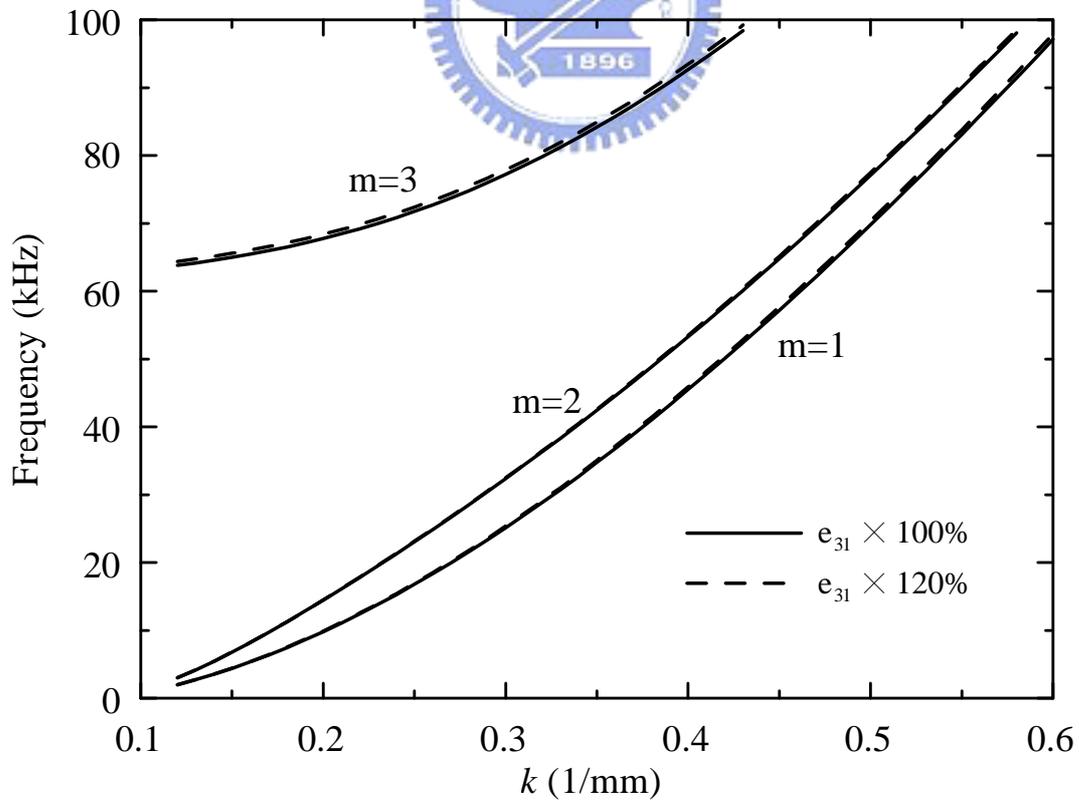


圖3.38 壓電係數 e_{31} 的靈敏度測試

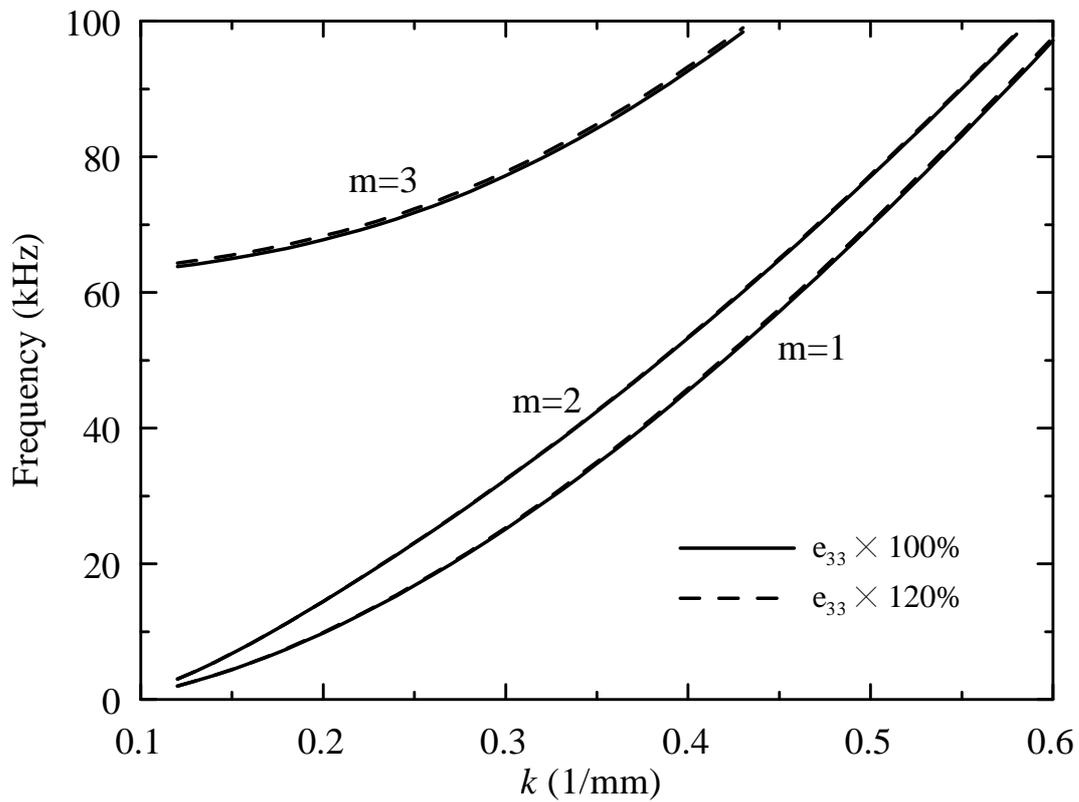


圖3.39 壓電係數 e_{33} 的靈敏度測試

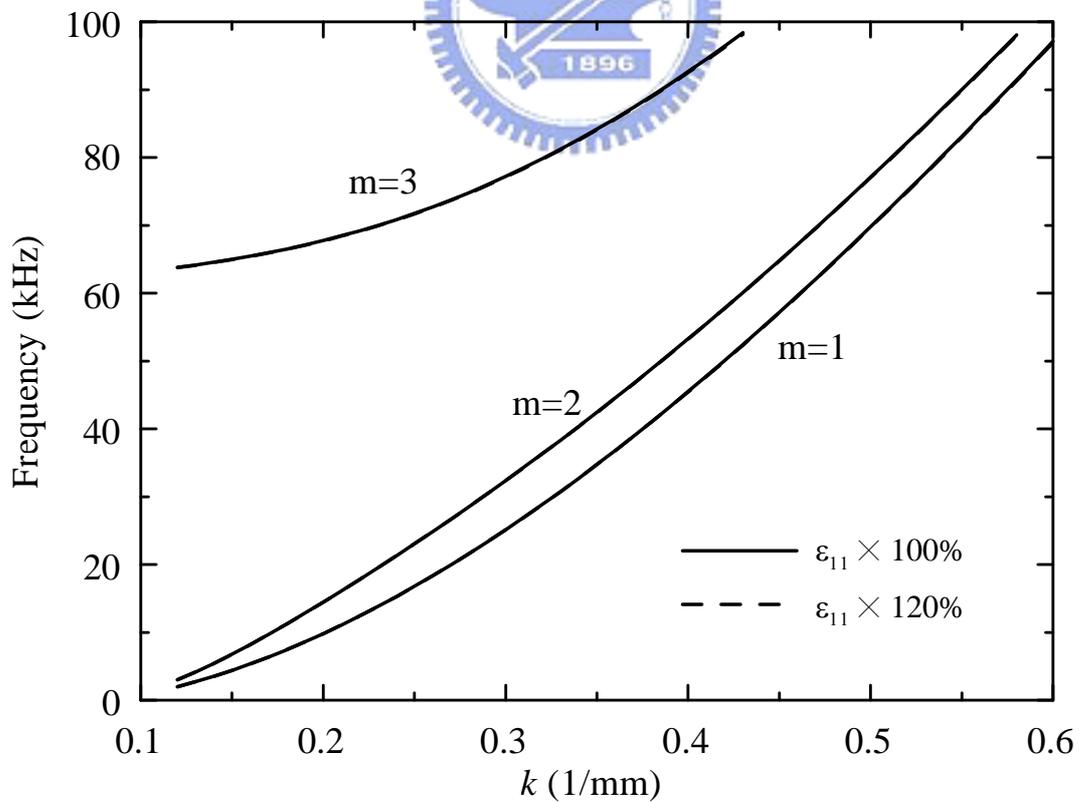


圖3.40 介電係數 ϵ_{11} 的靈敏度測試

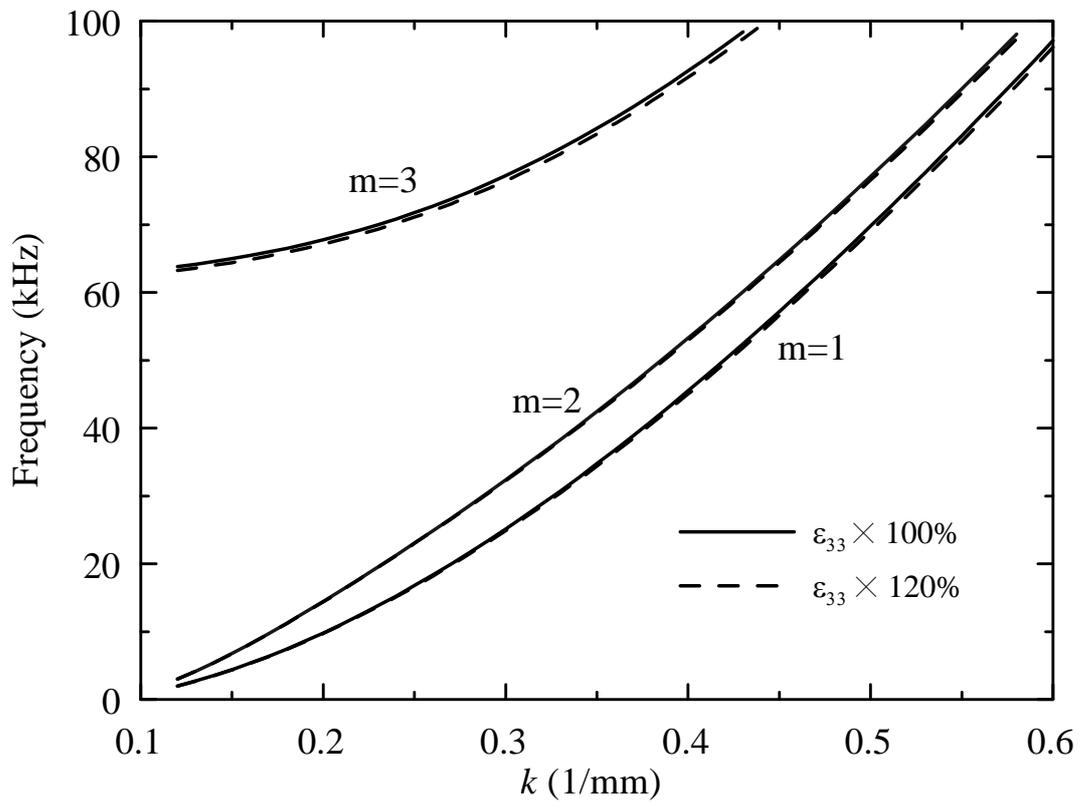


圖3.41 介電係數 ϵ_{33} 的靈敏度測試

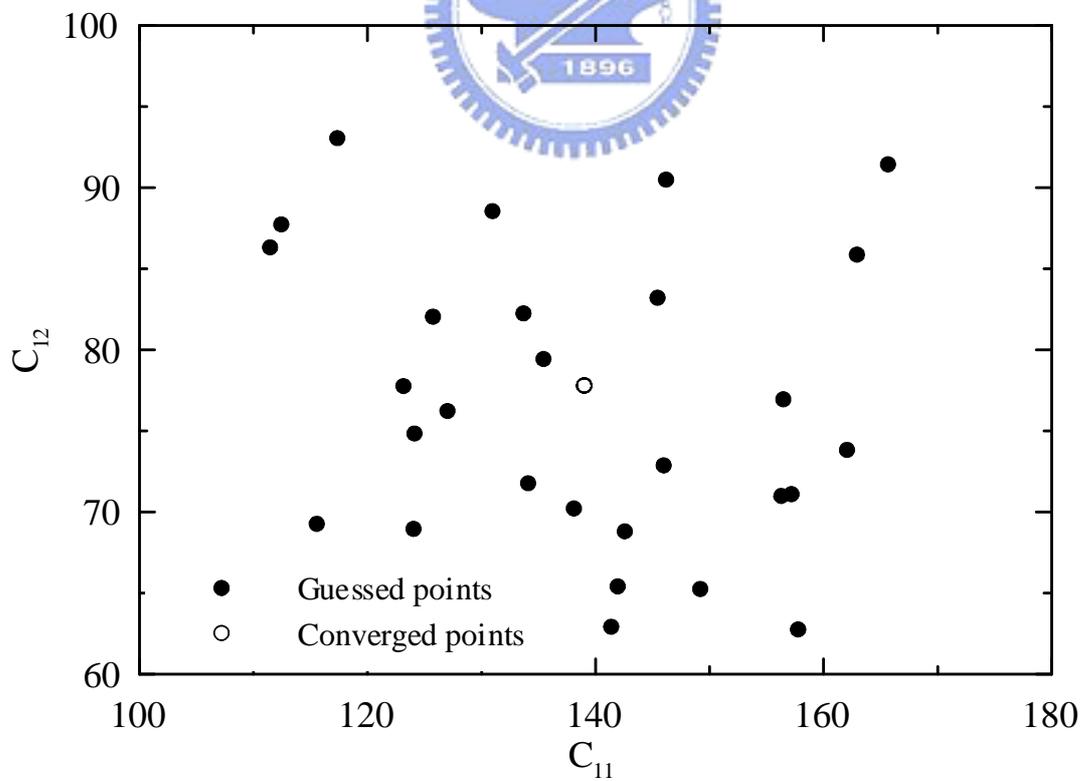


圖3.42 用 $m=1$ 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的收斂性測試結果

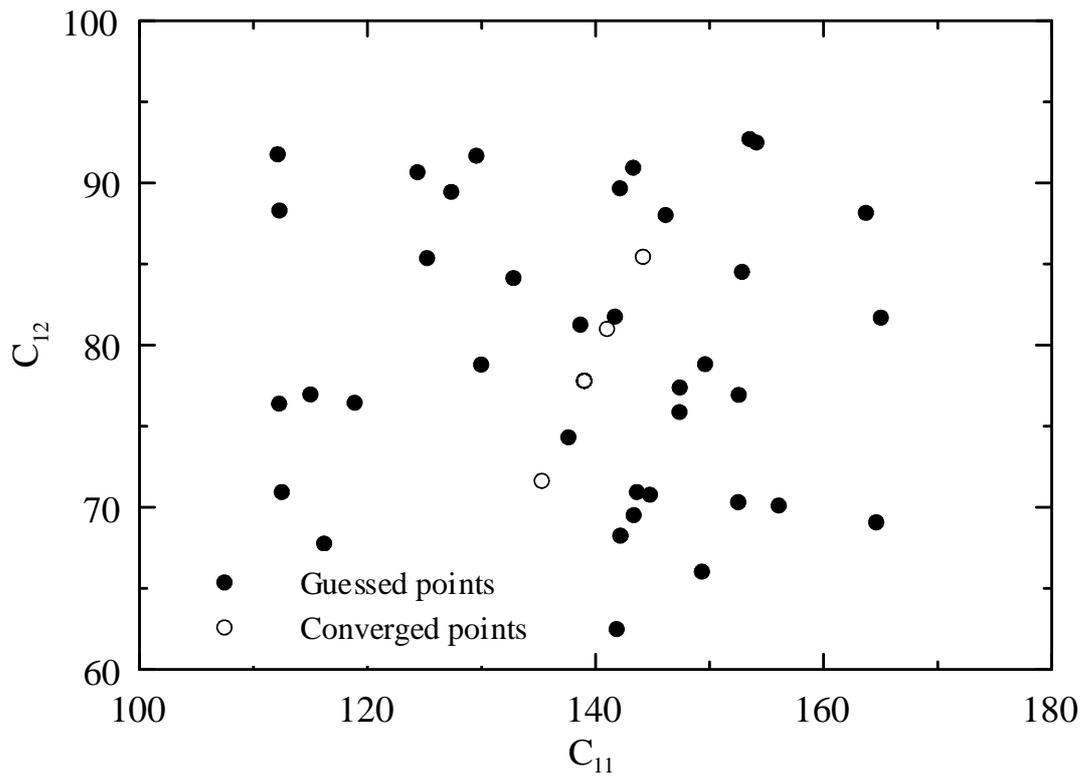


圖3.43 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的收斂性測試結果

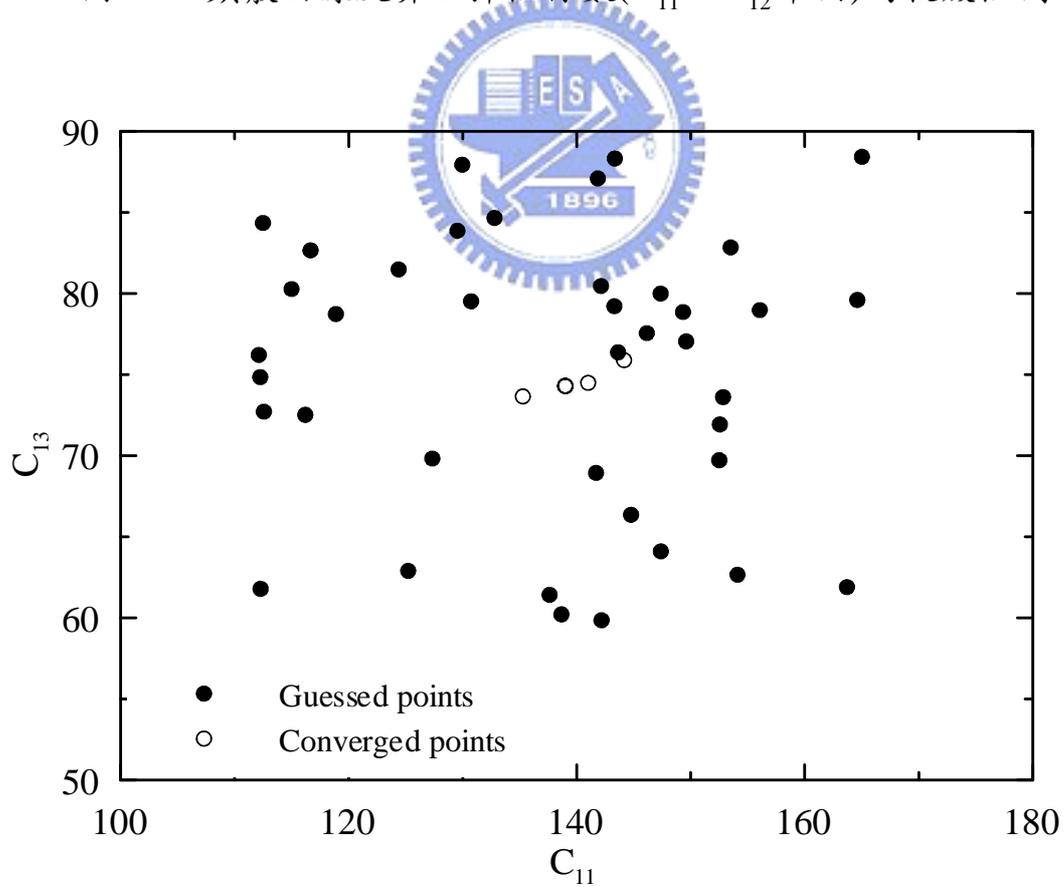


圖3.44 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的收斂性測試結果

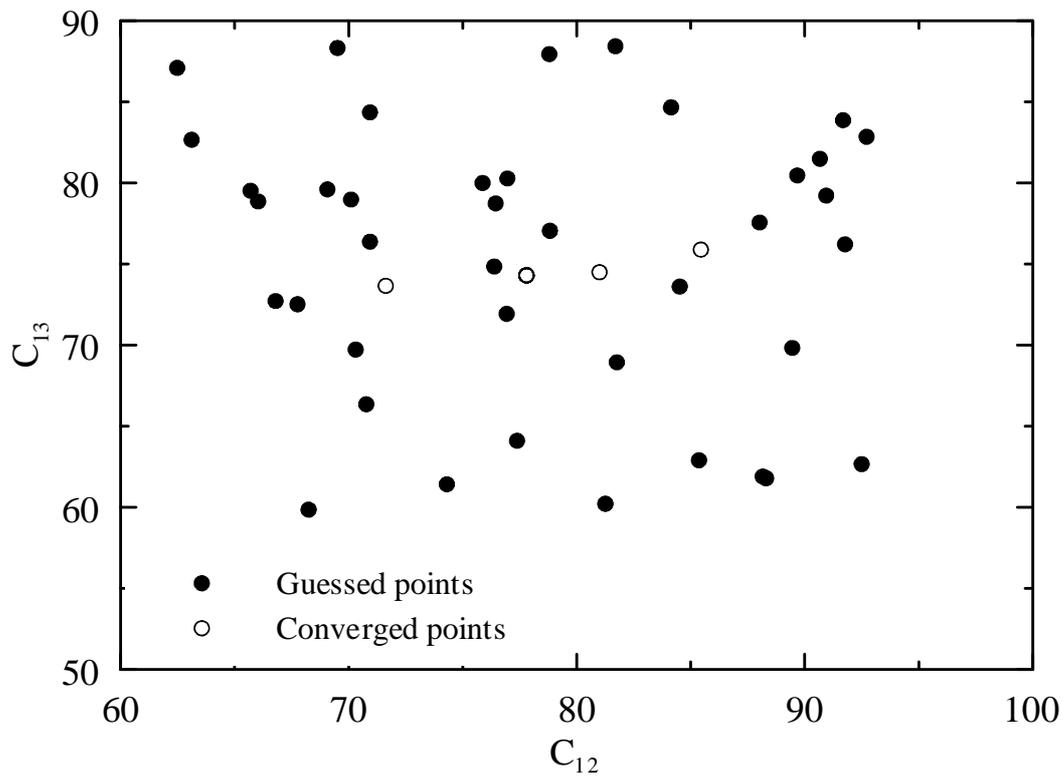


圖3.45 用 $m=1$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的收斂性測試結果

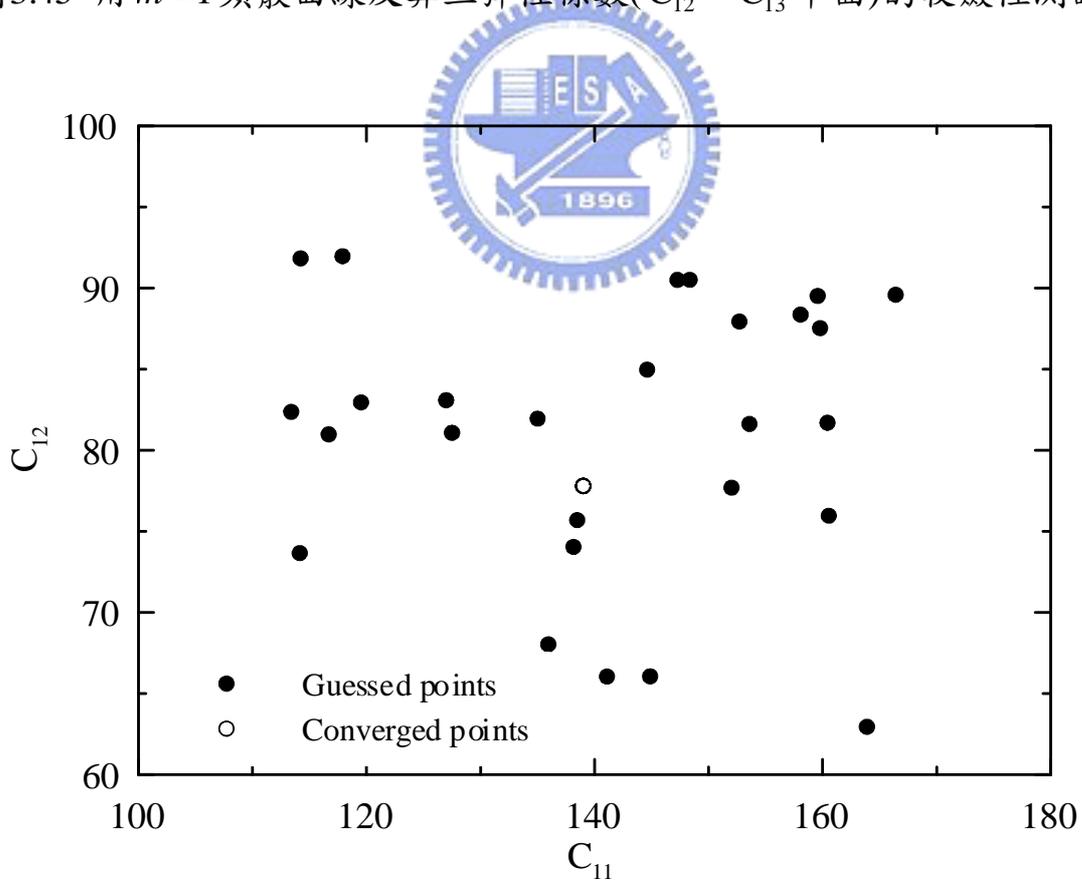


圖3.46 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的收斂性測試結果

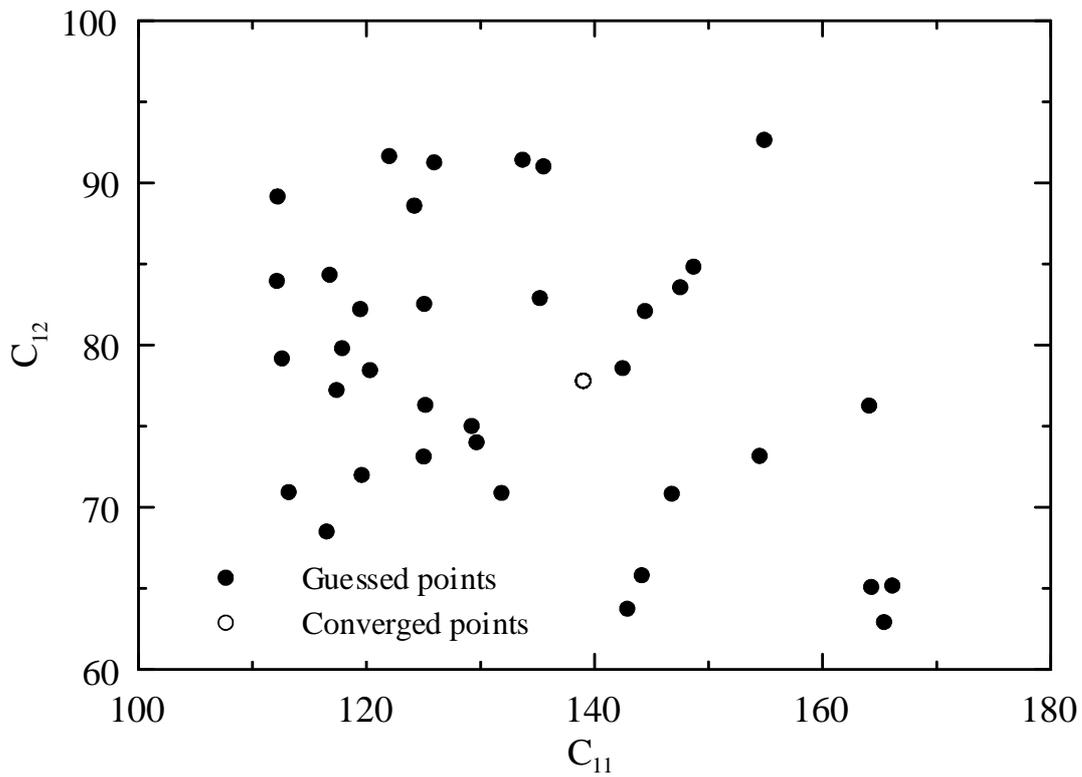


圖3.47 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的

收斂性測試結果

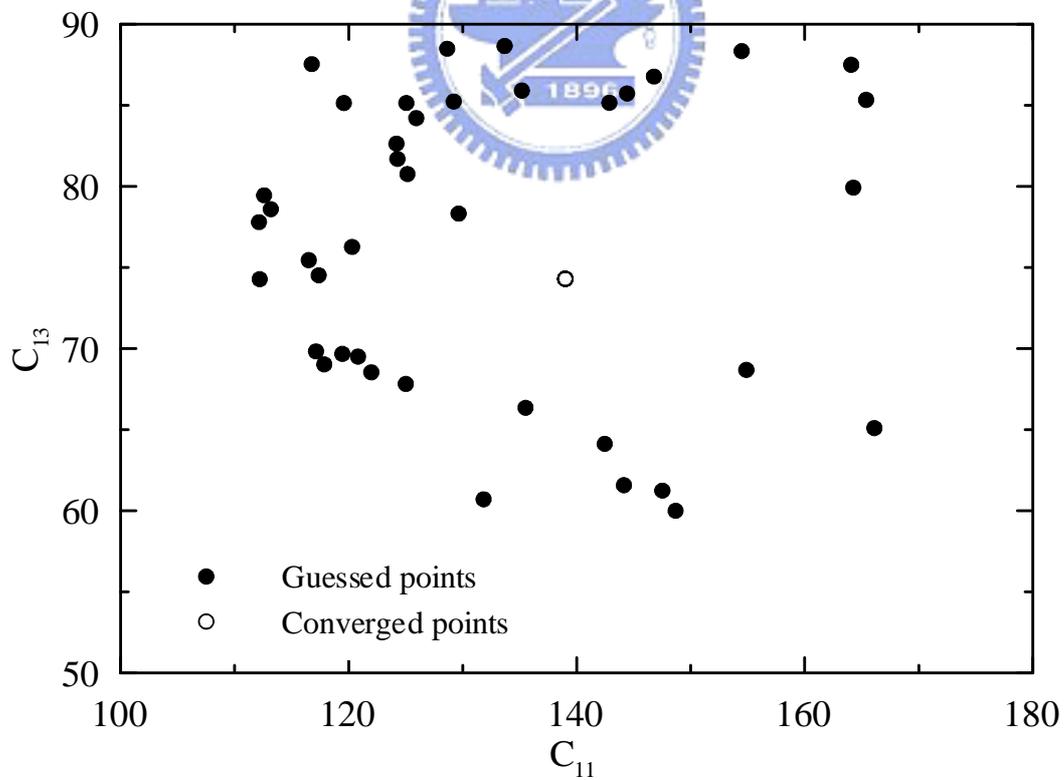


圖3.48 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

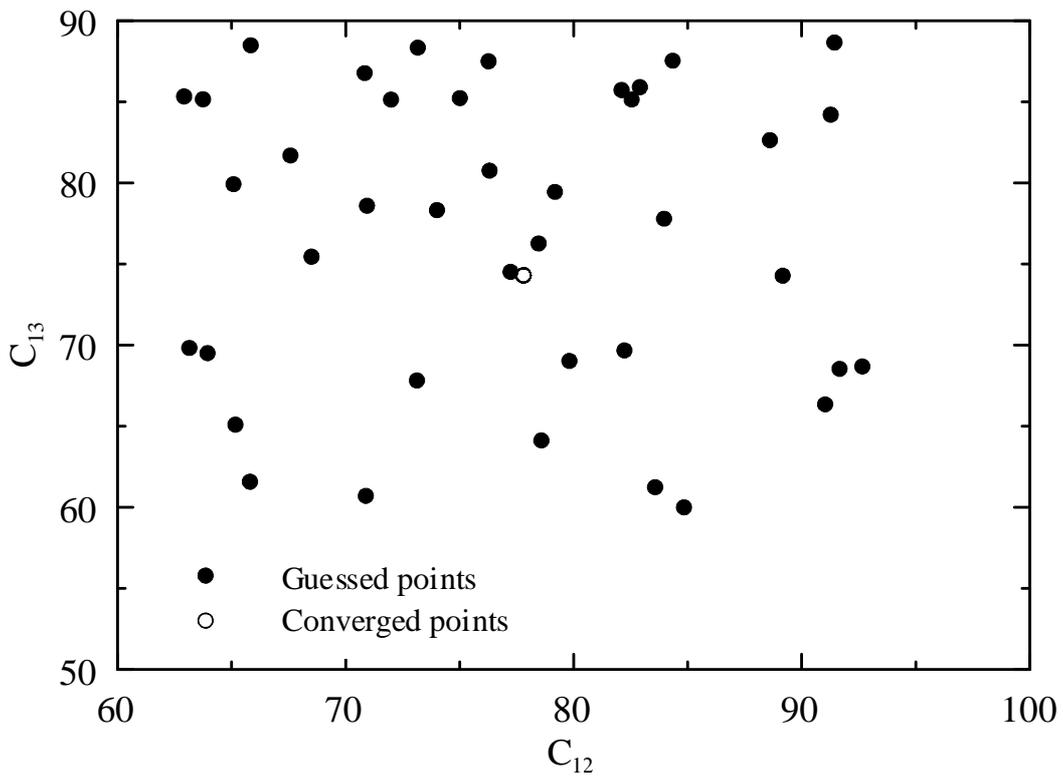


圖3.49 用 $m = 1, 2$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

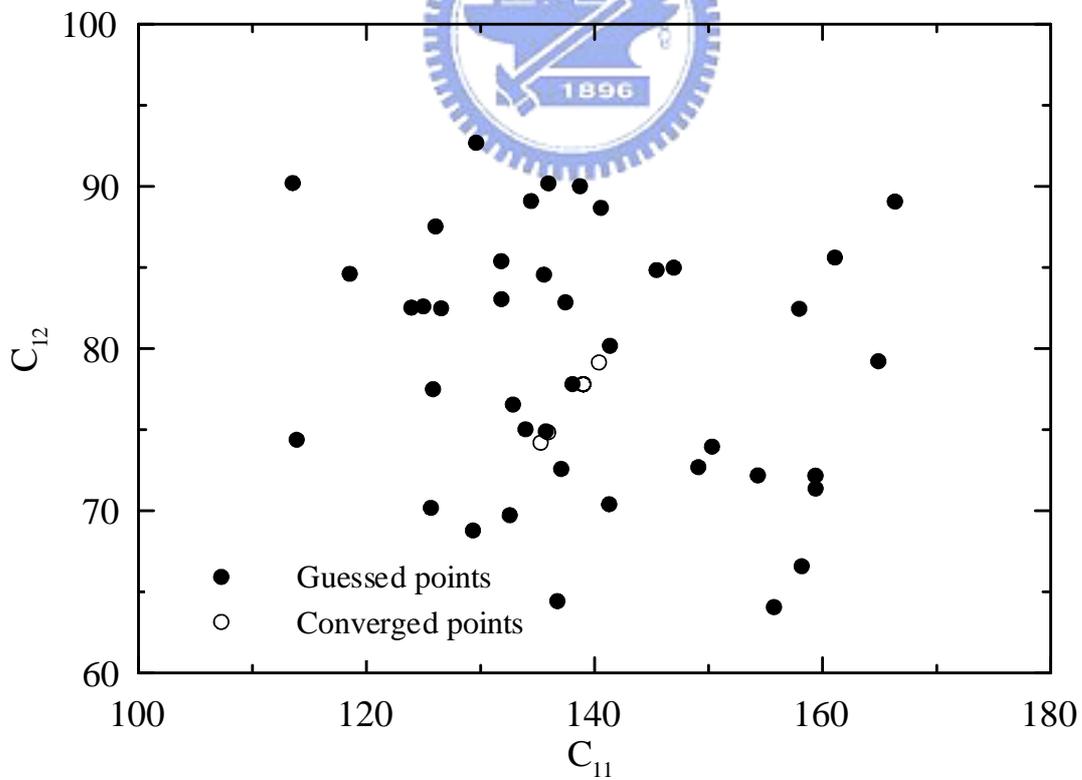


圖3.50 用 $m = 1, 2$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的

收斂性測試結果

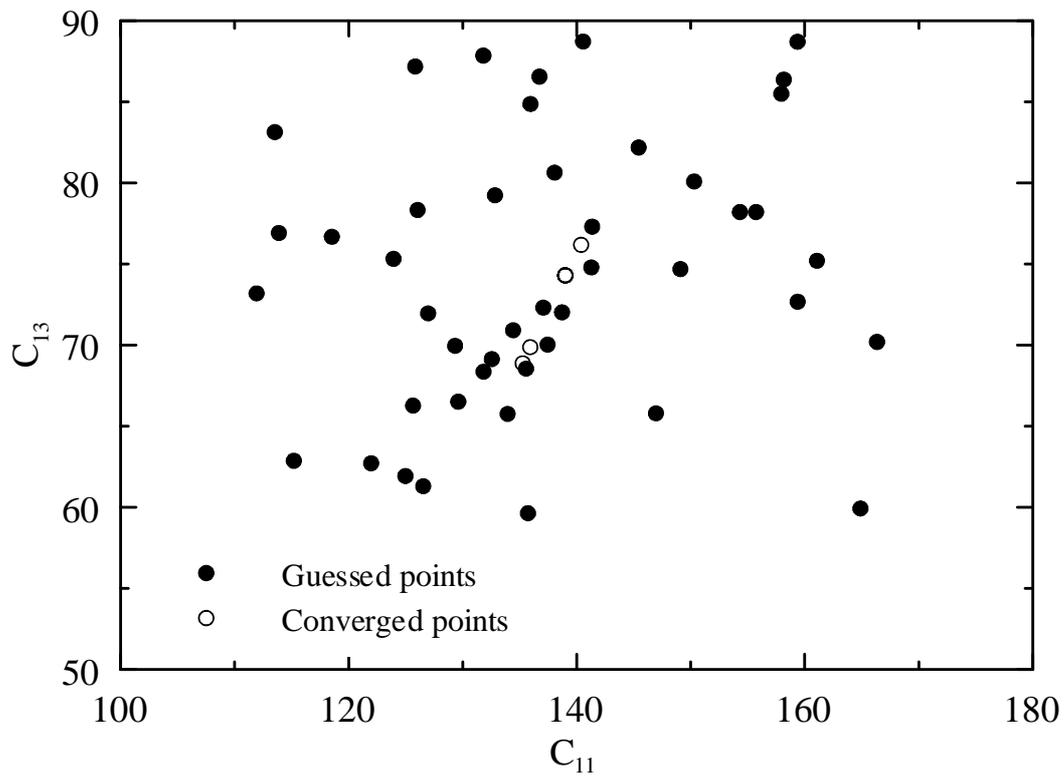


圖3.51 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

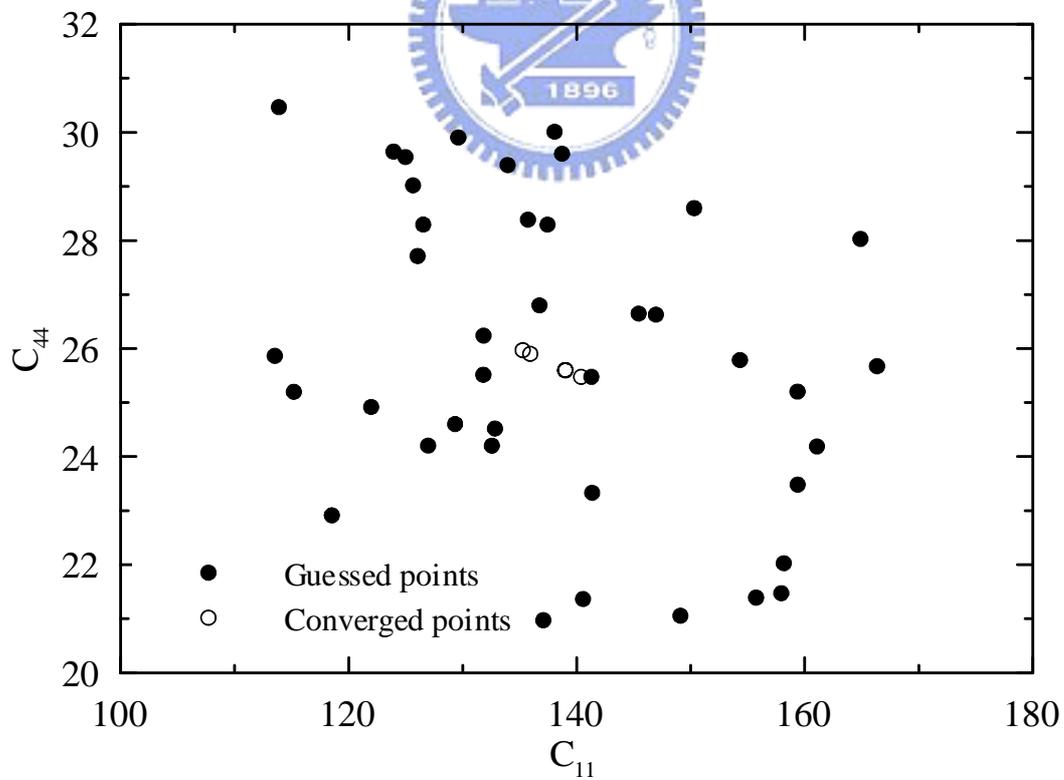


圖3.52 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

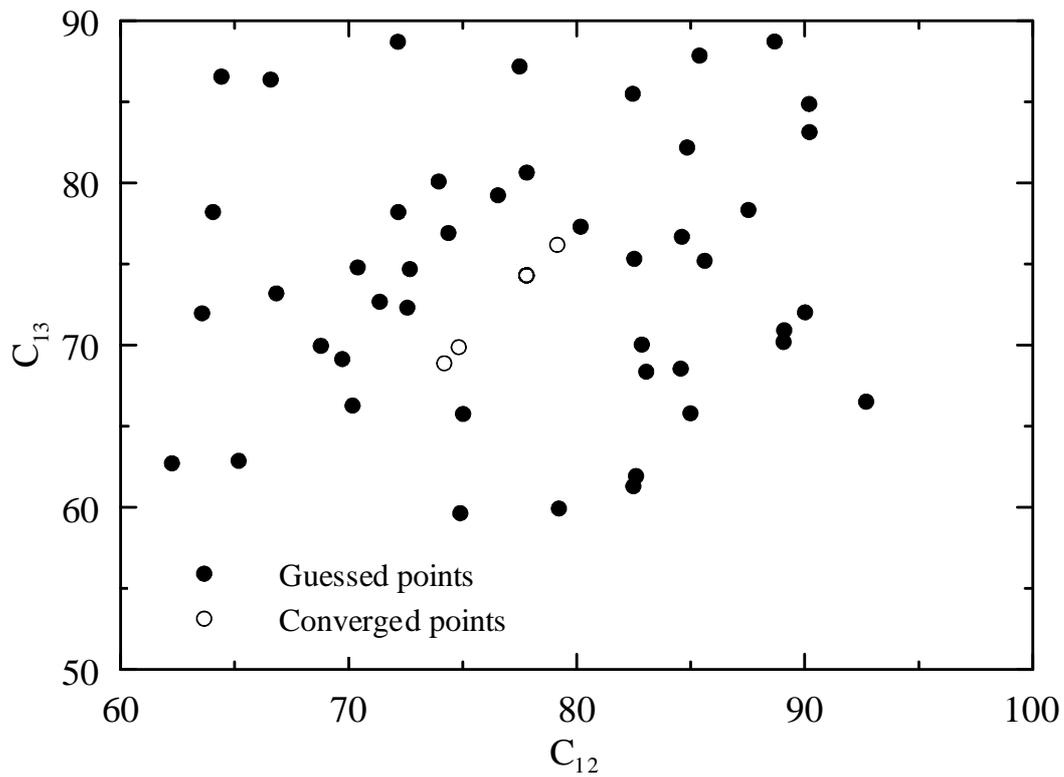


圖3.53 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

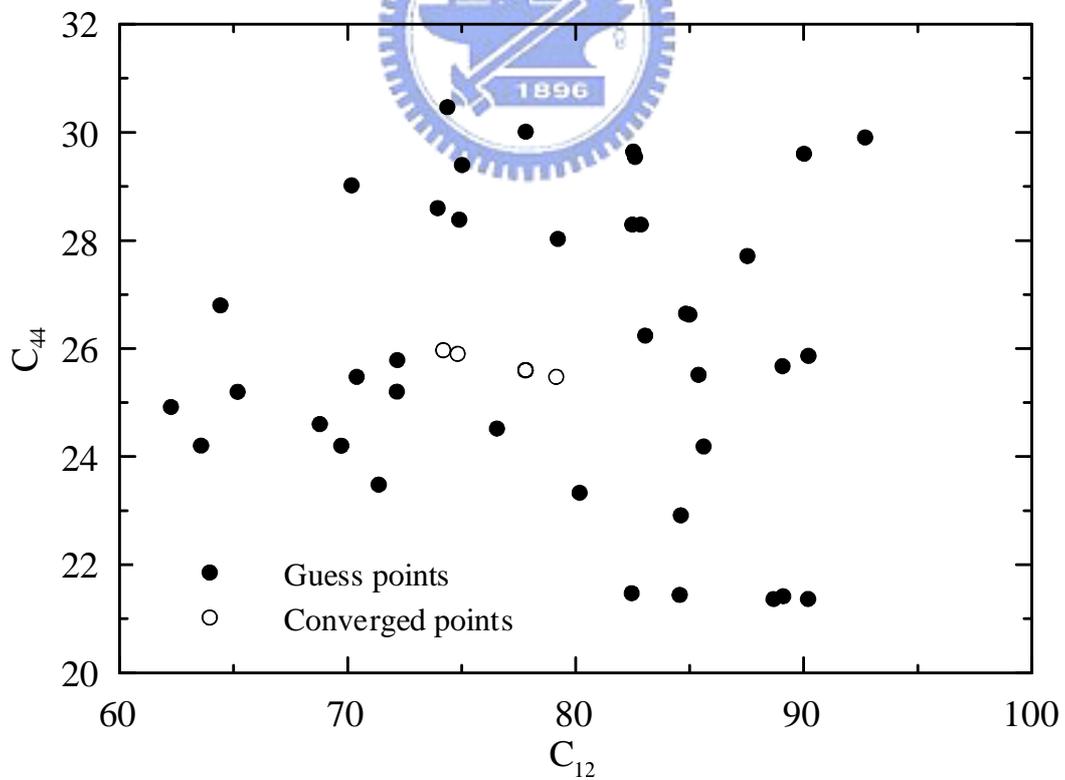


圖3.54 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

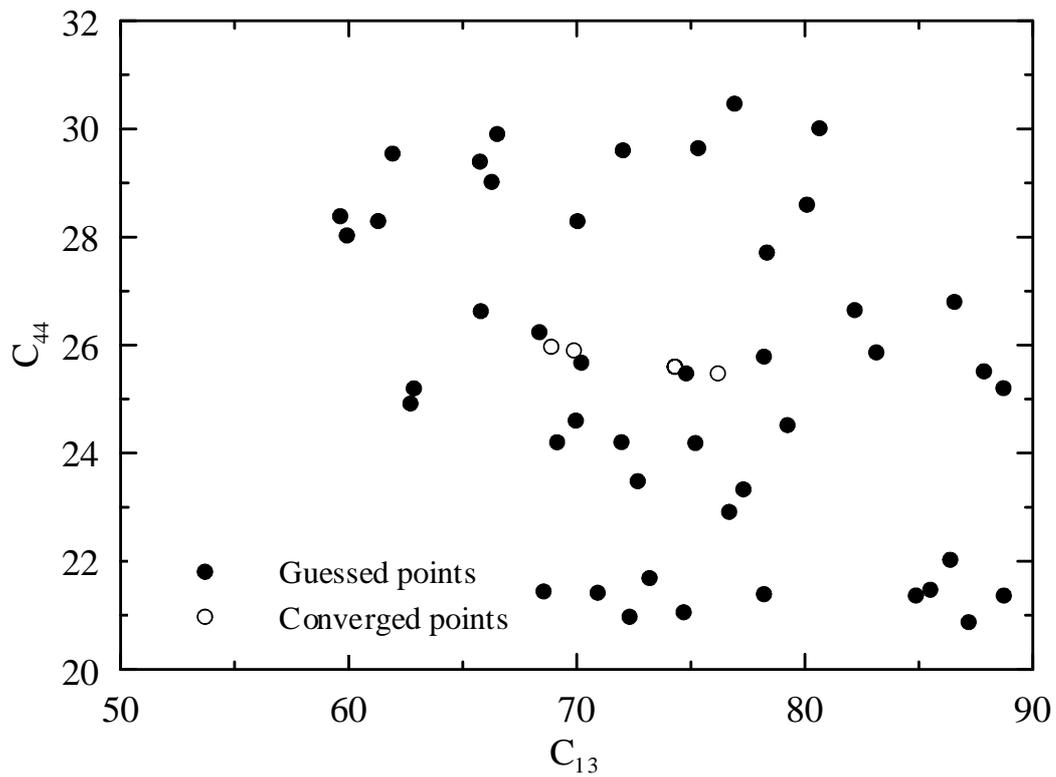


圖3.55 用 $m=1$ 、2 頻散曲線反算四彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

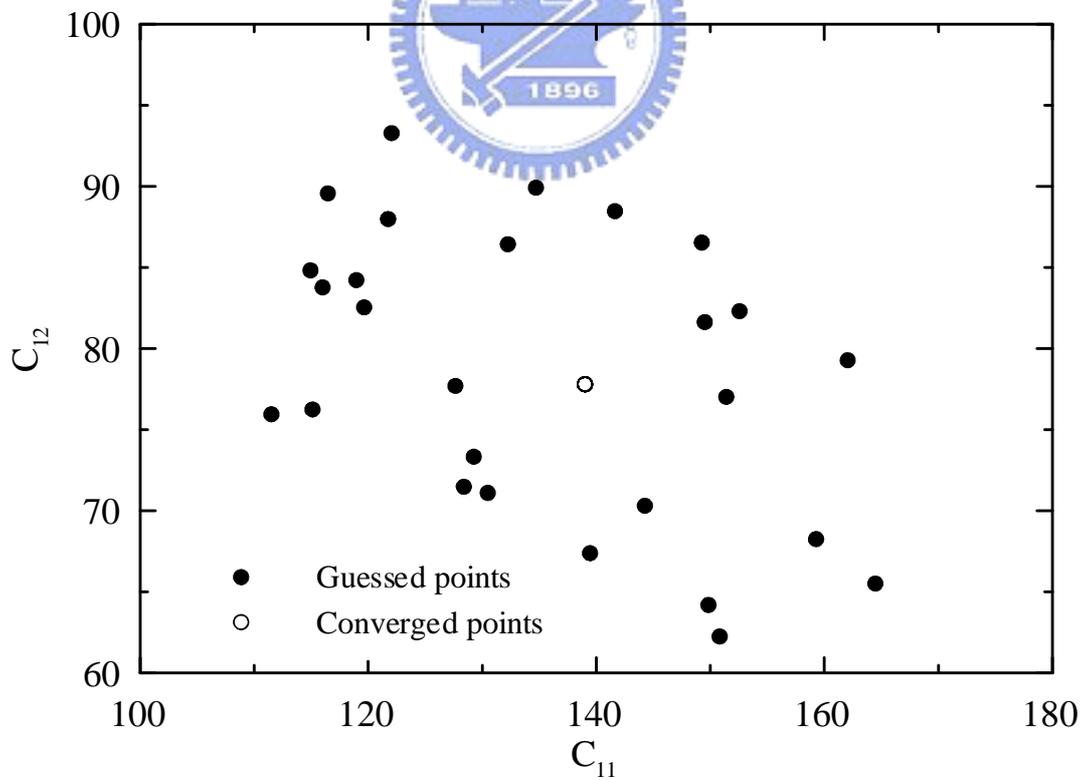


圖3.56 用 $m=1$ 、2、3 頻散曲線反算兩彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的

收斂性測試結果

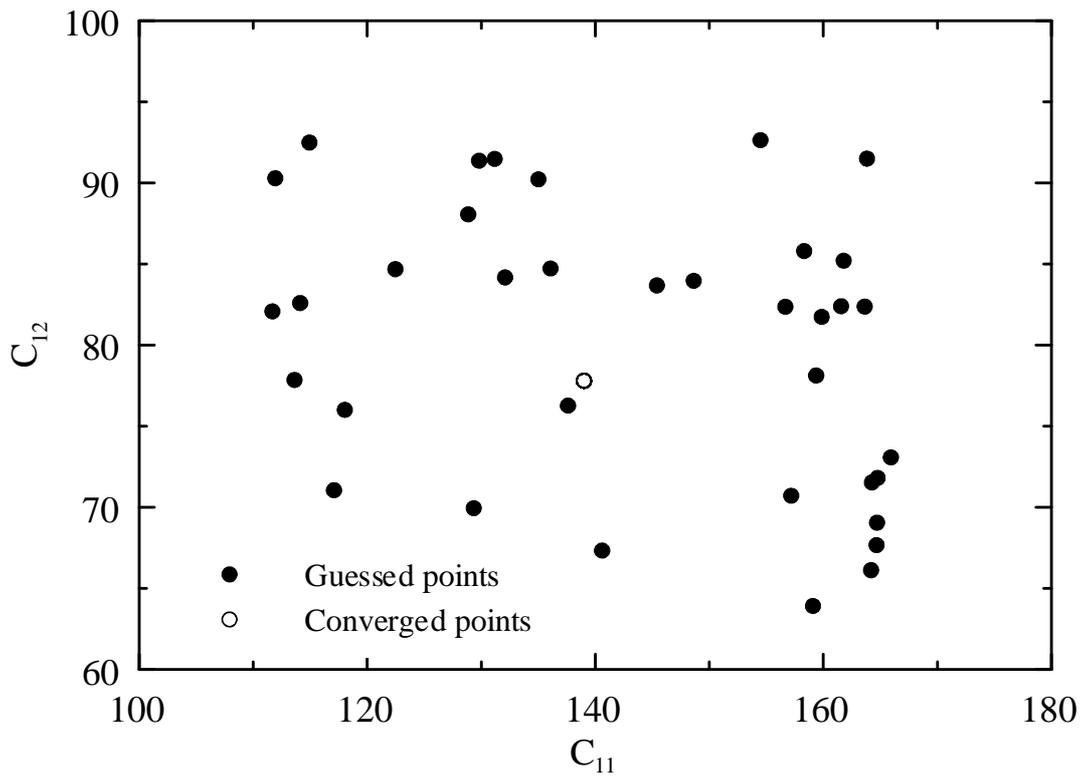


圖3.57 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的

收斂性測試結果

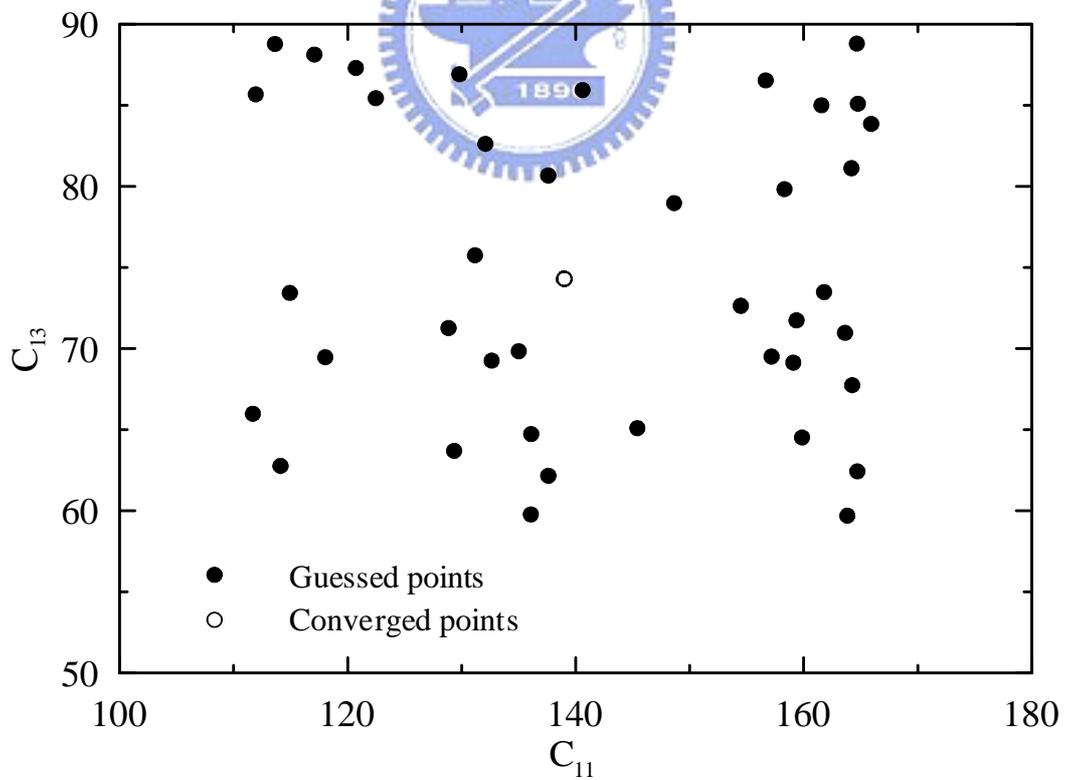


圖3.58 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

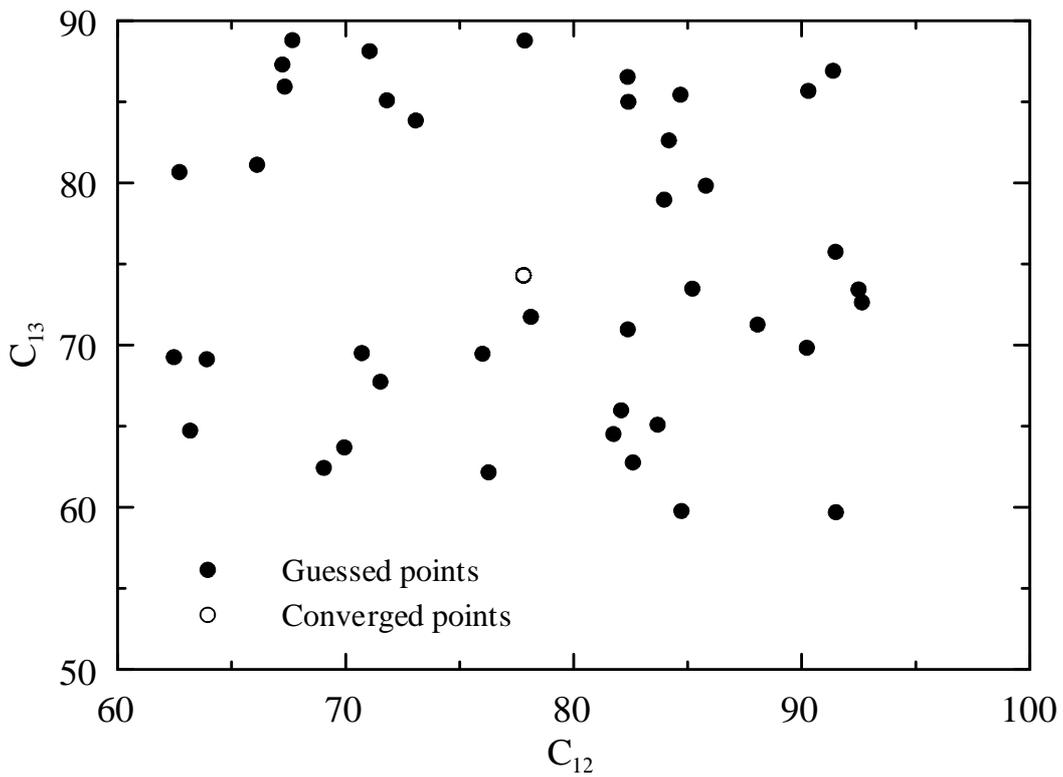


圖3.59 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算三彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

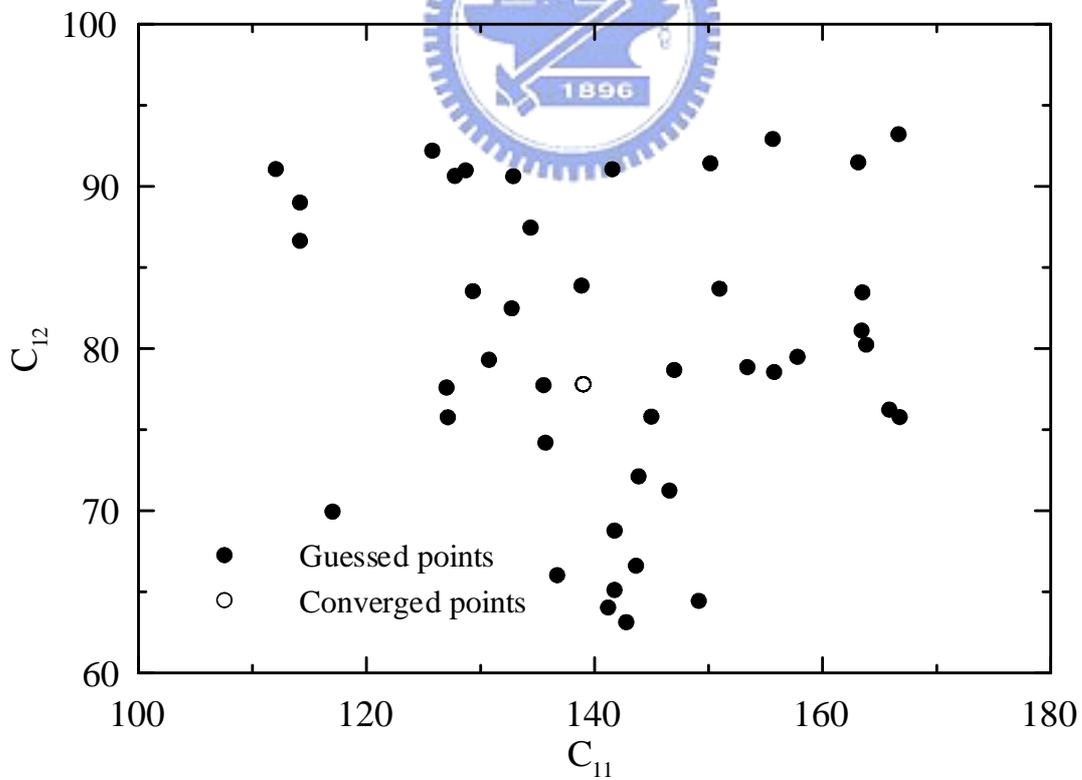


圖3.60 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的

收斂性測試結果

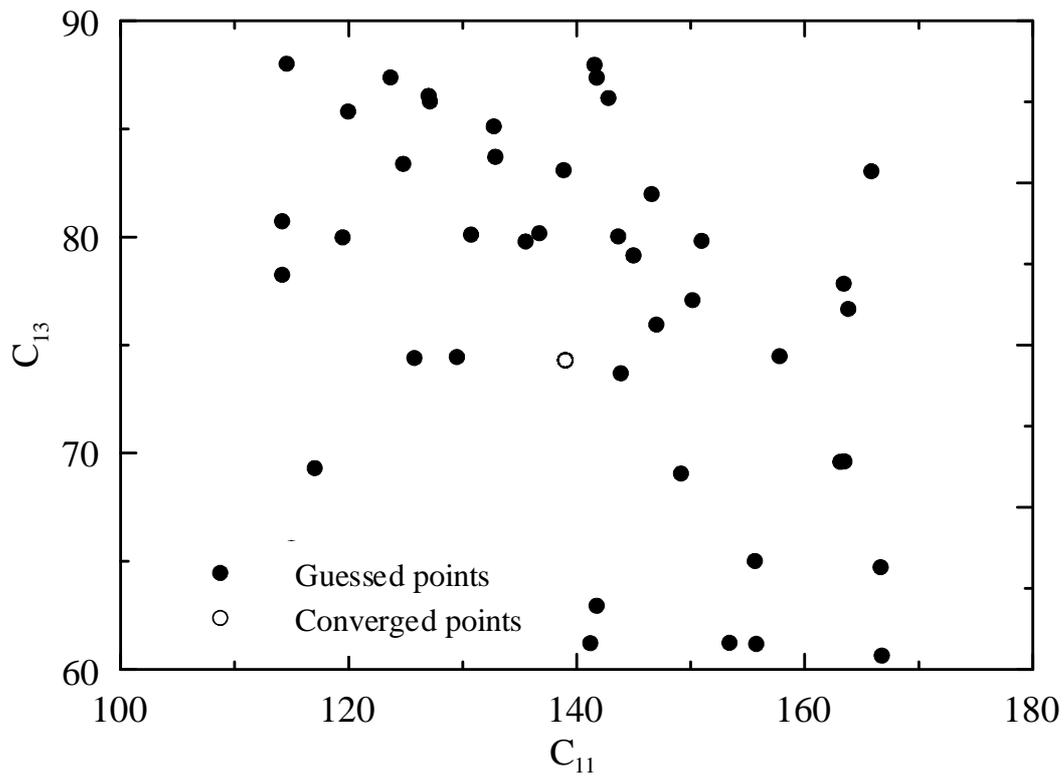


圖3.61 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

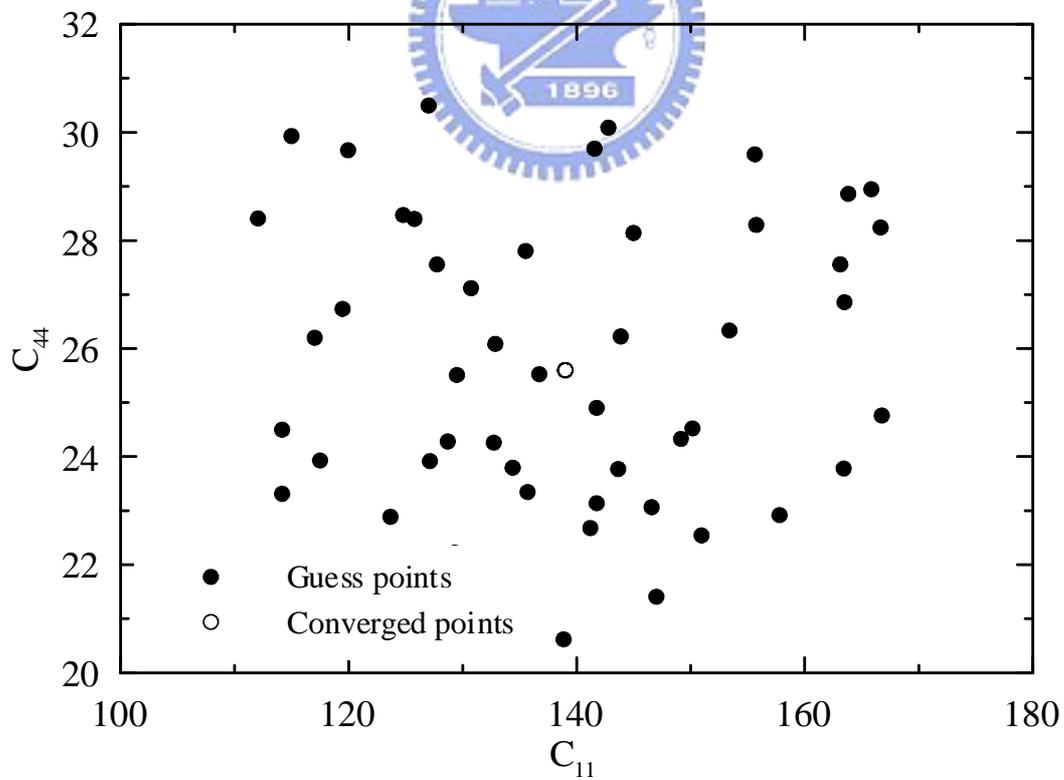


圖3.62 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

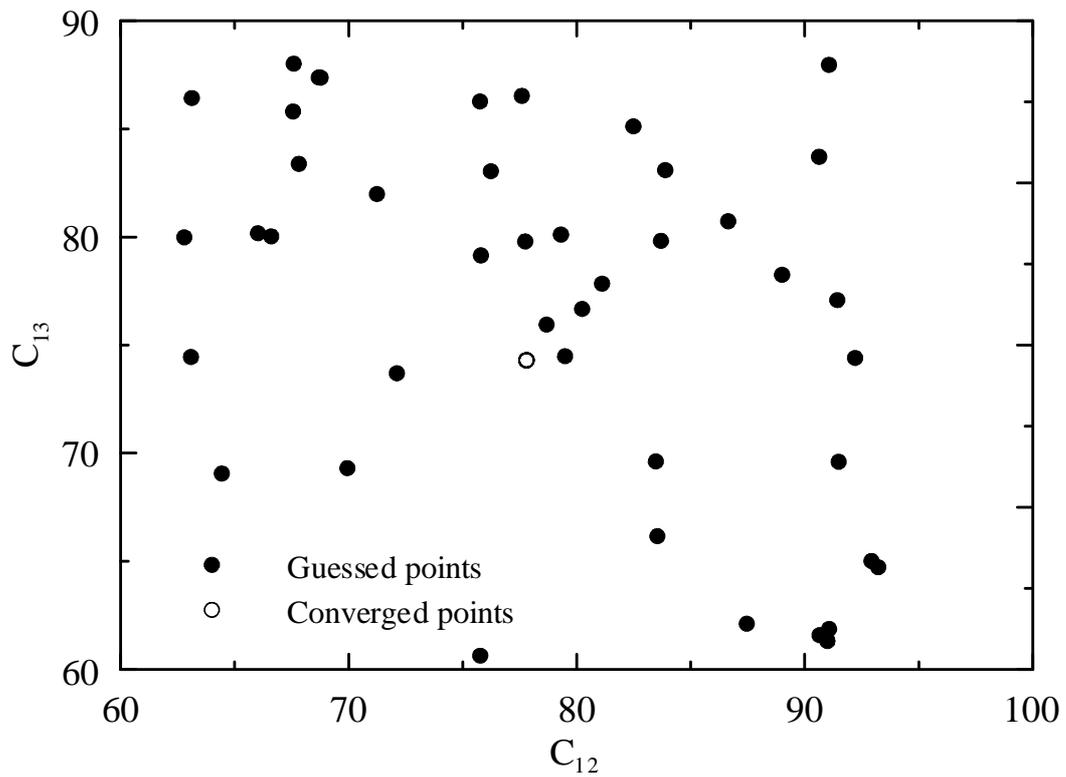


圖3.63 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

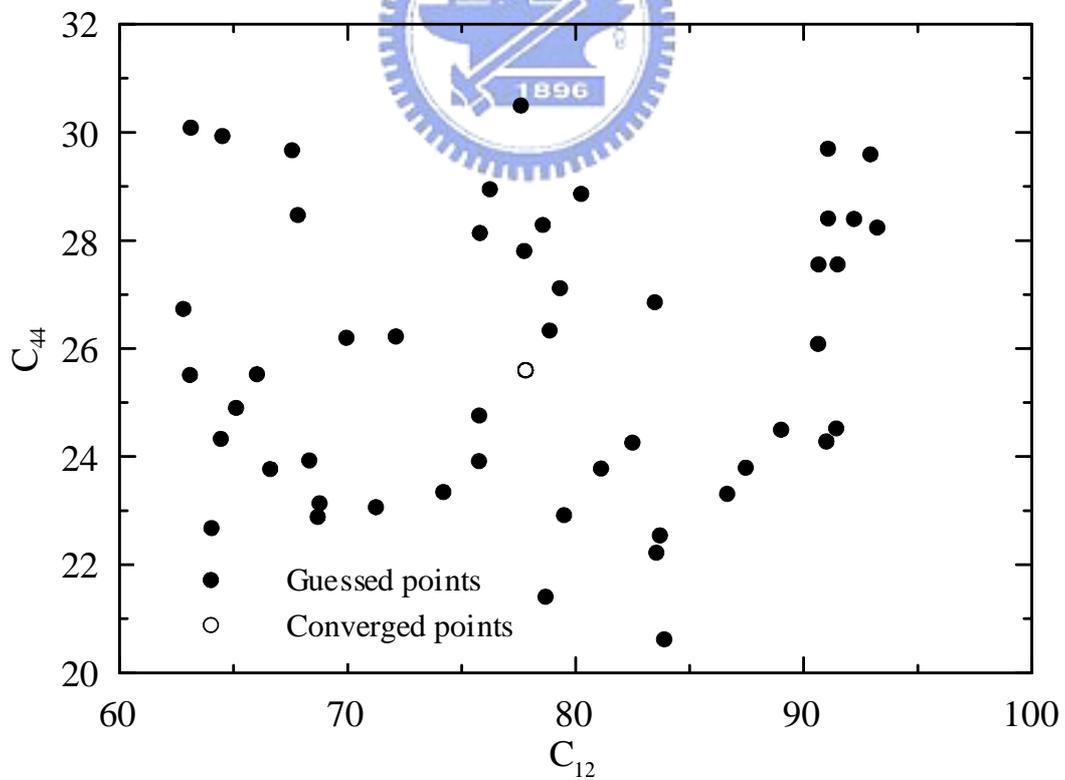


圖3.64 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

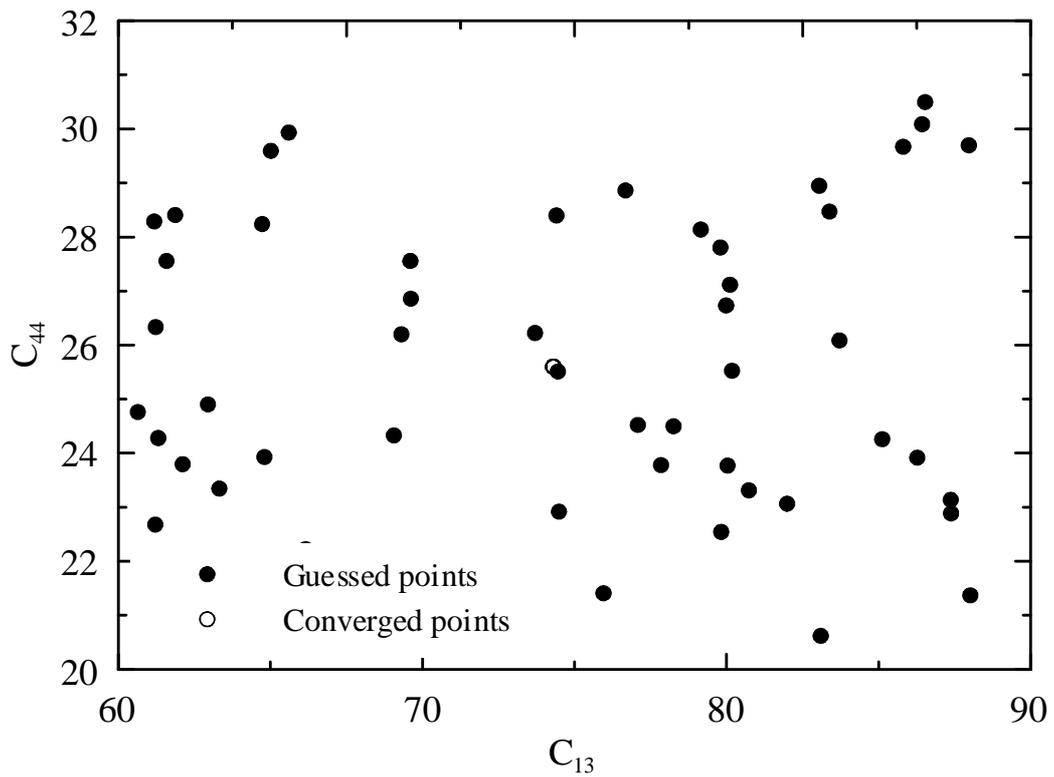


圖3.65 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算四彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

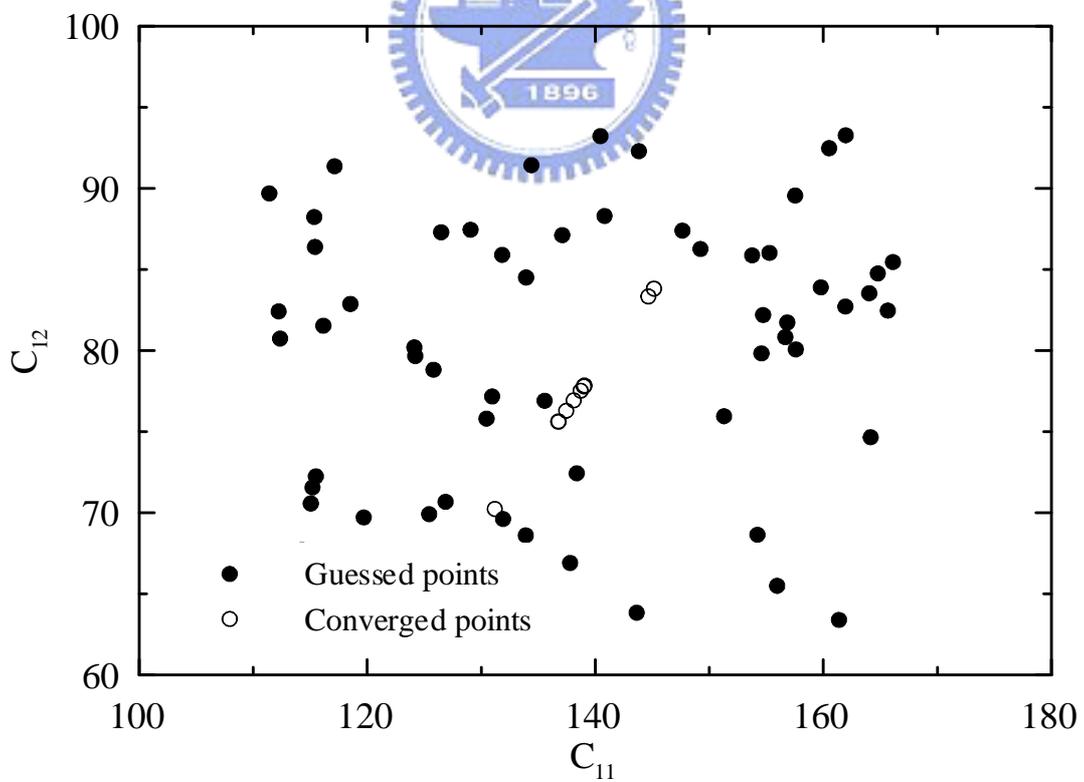


圖3.66 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的

收斂性測試結果

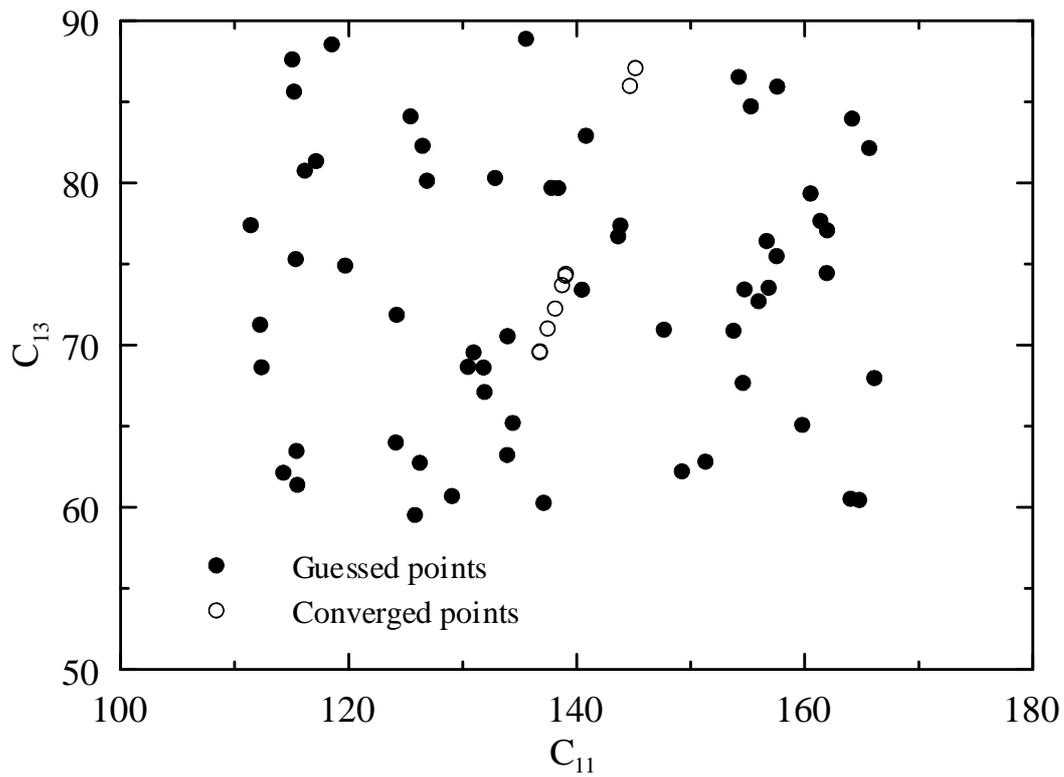


圖3.67 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

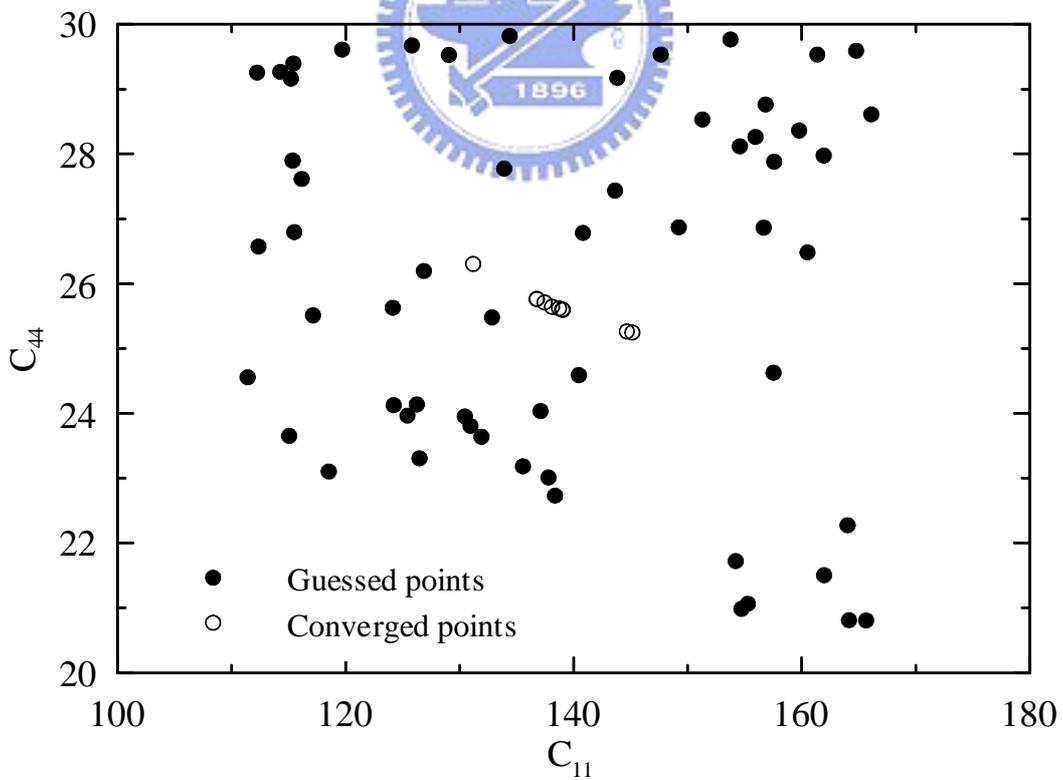


圖3.68 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

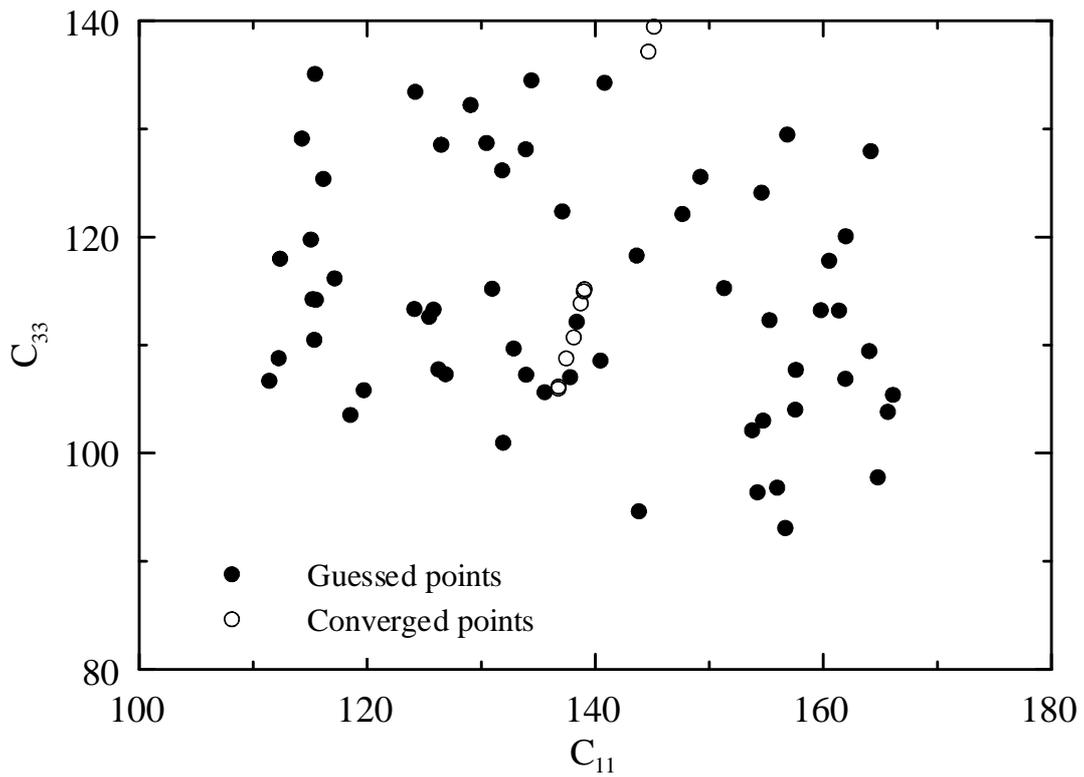


圖3.69 用 $m=1$ 、2、3 頻散曲線反算五彈性係數(C_{11} 、 C_{33} 平面)的

收斂性測試結果

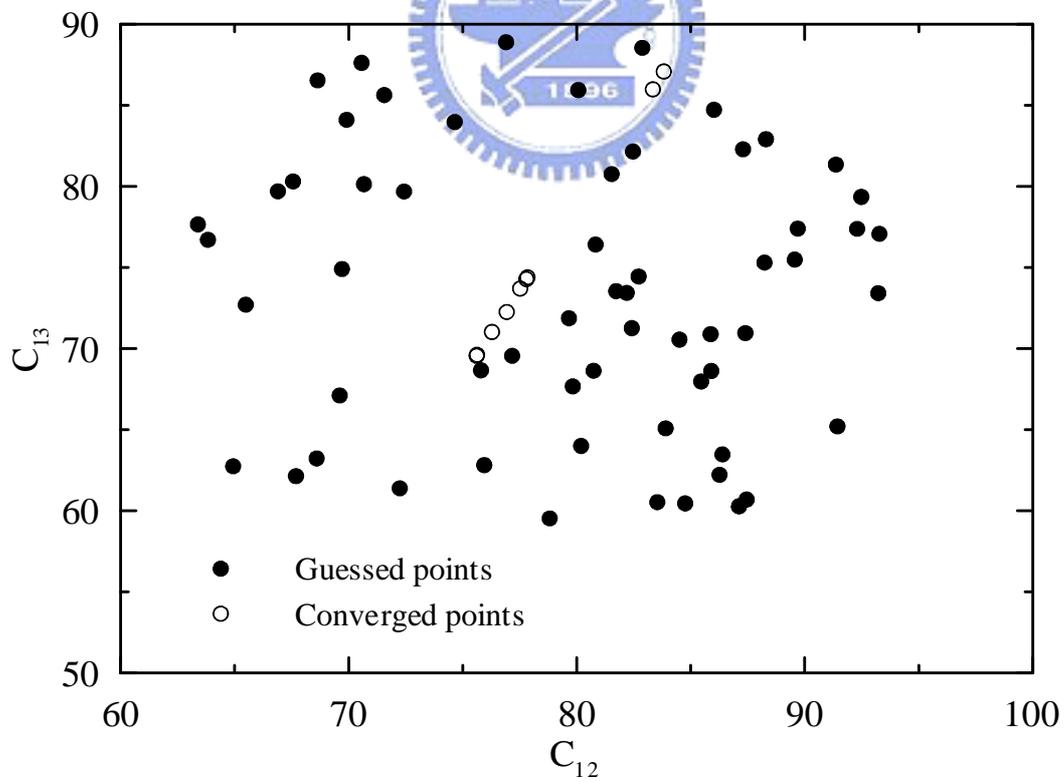


圖3.70 用 $m=1$ 、2、3 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的

收斂性測試結果

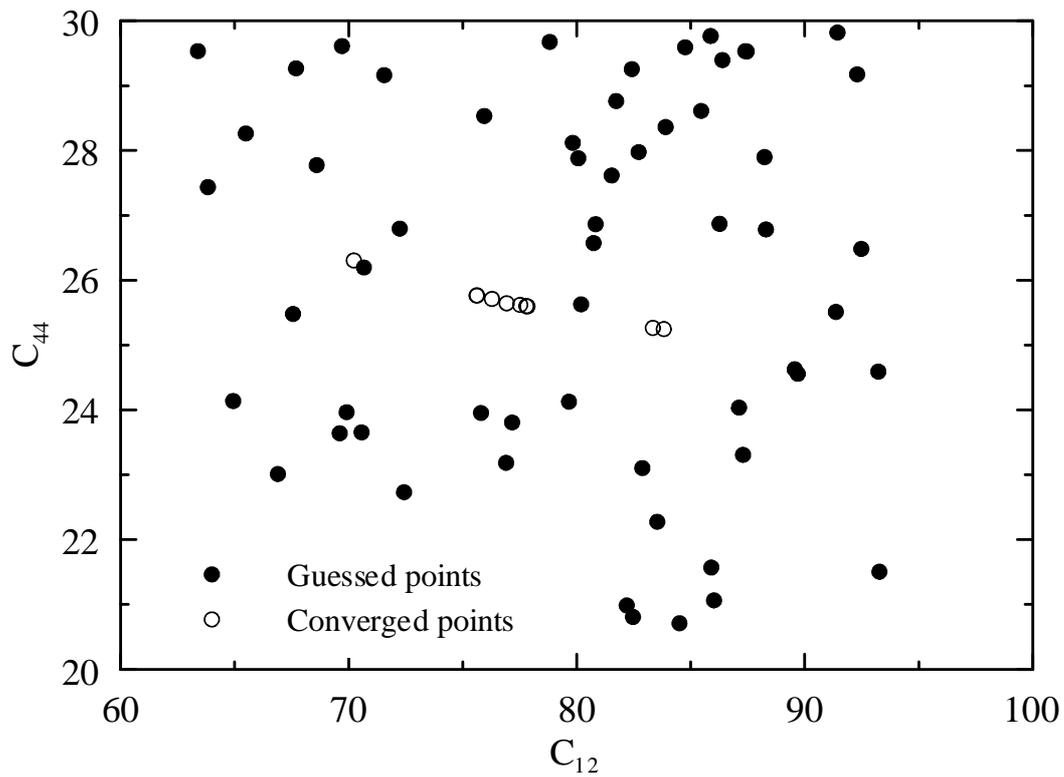


圖3.71 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

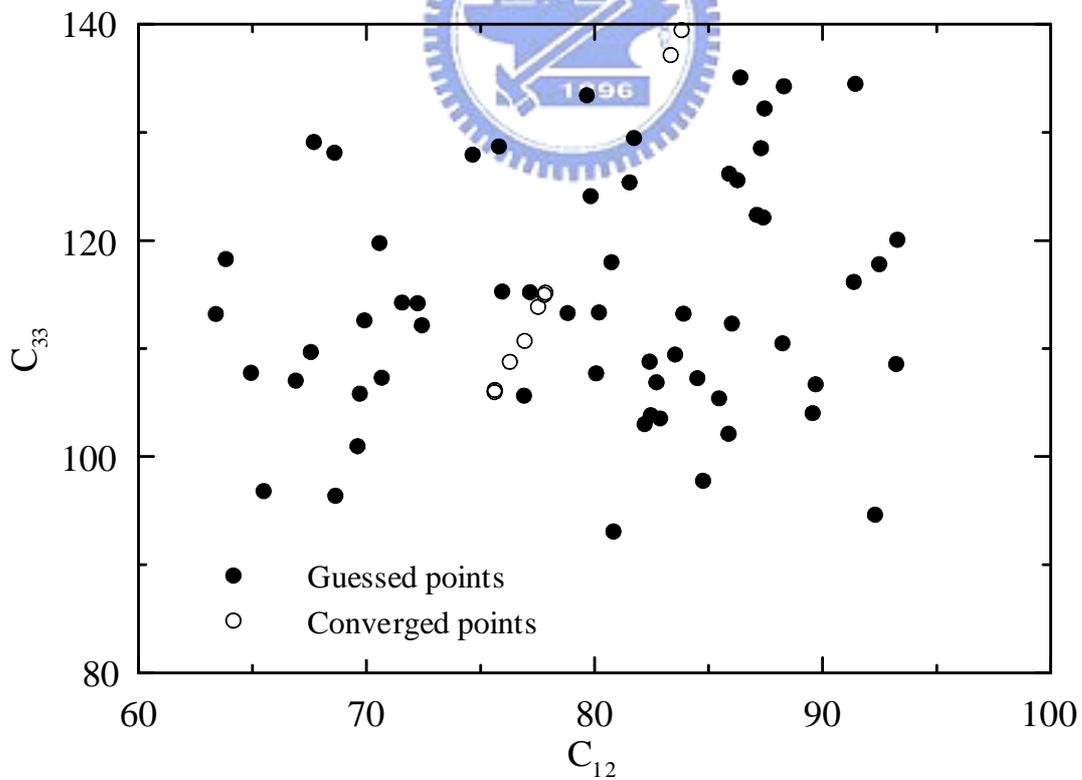


圖3.72 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{12} 、 C_{33} 平面)的

收斂性測試結果

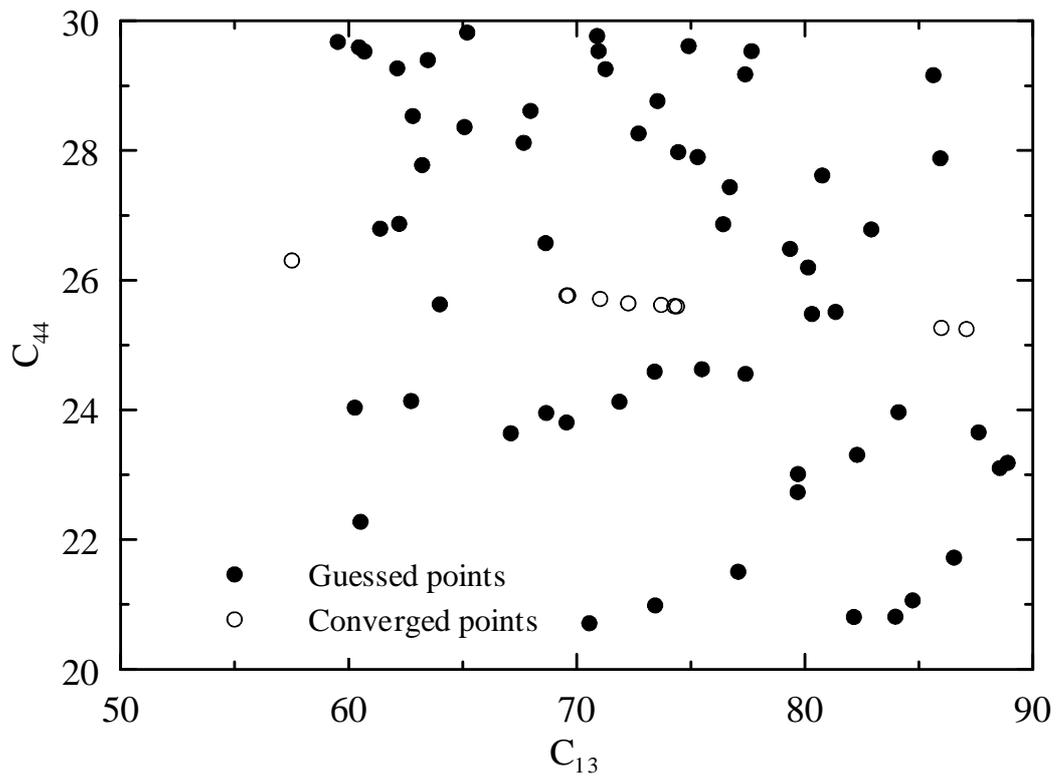


圖3.73 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{13} 、 C_{44} 平面)的

收斂性測試結果

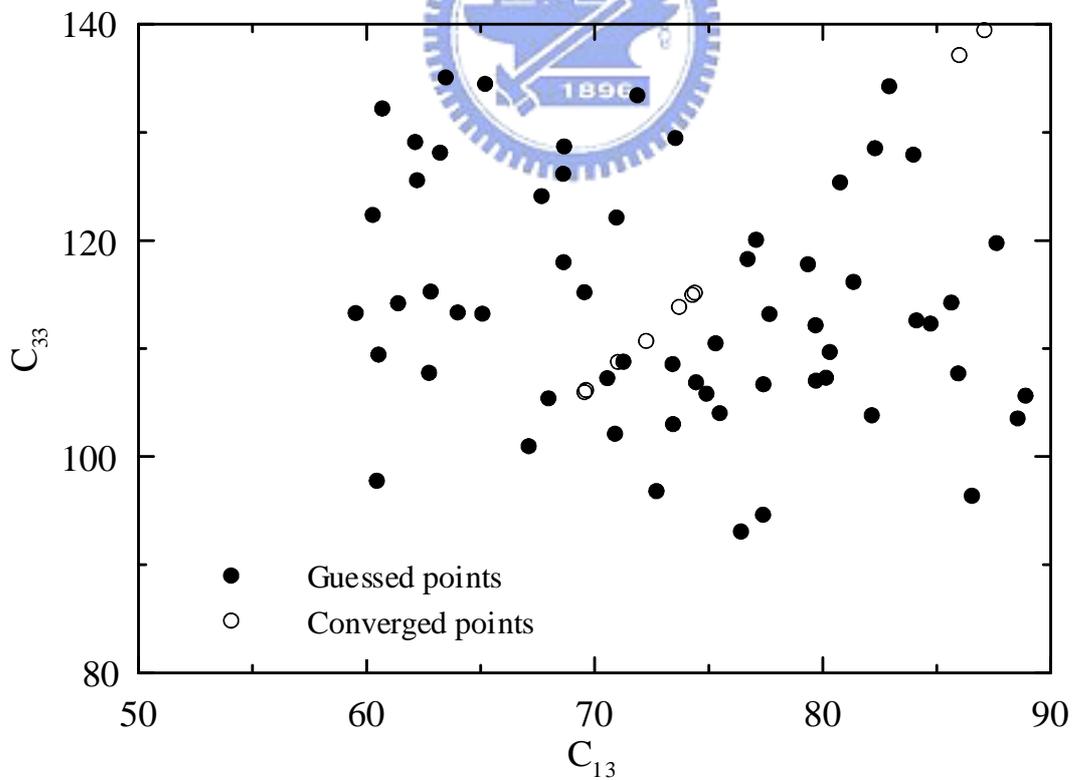


圖3.74 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{13} 、 C_{33} 平面)的

收斂性測試結果

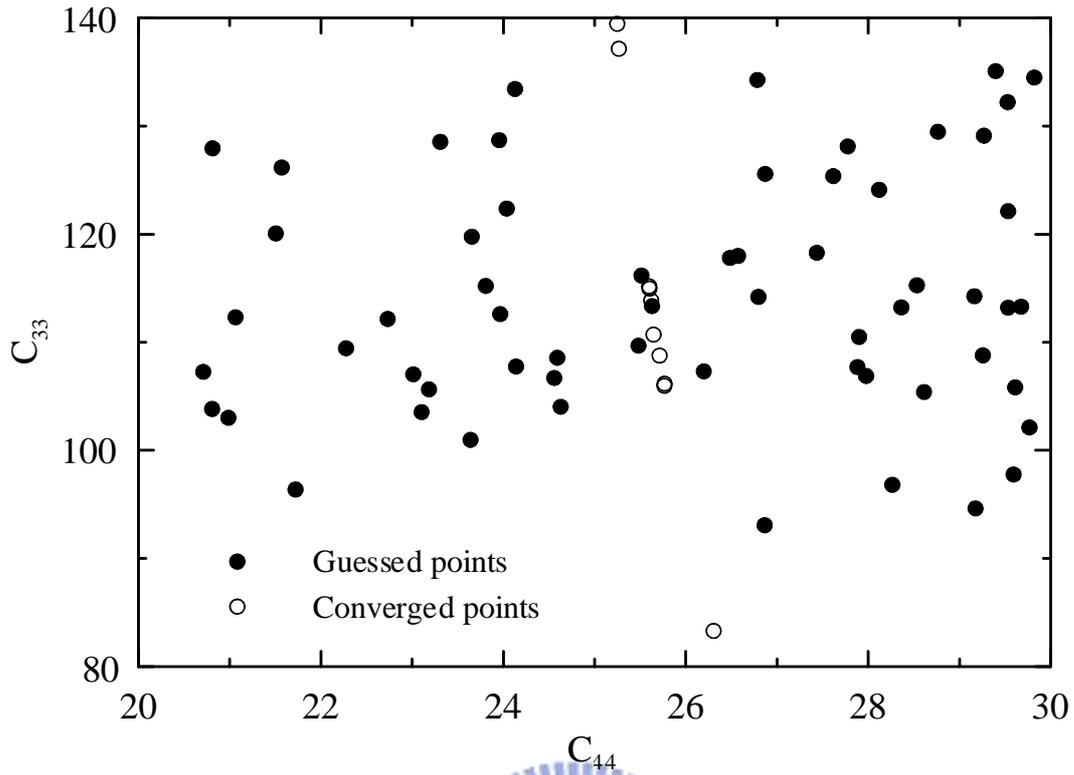


圖3.75 用 $m=1、2、3$ 頻散曲線反算五彈性係數(C_{44} 、 C_{33} 平面)的
收斂性測試結果

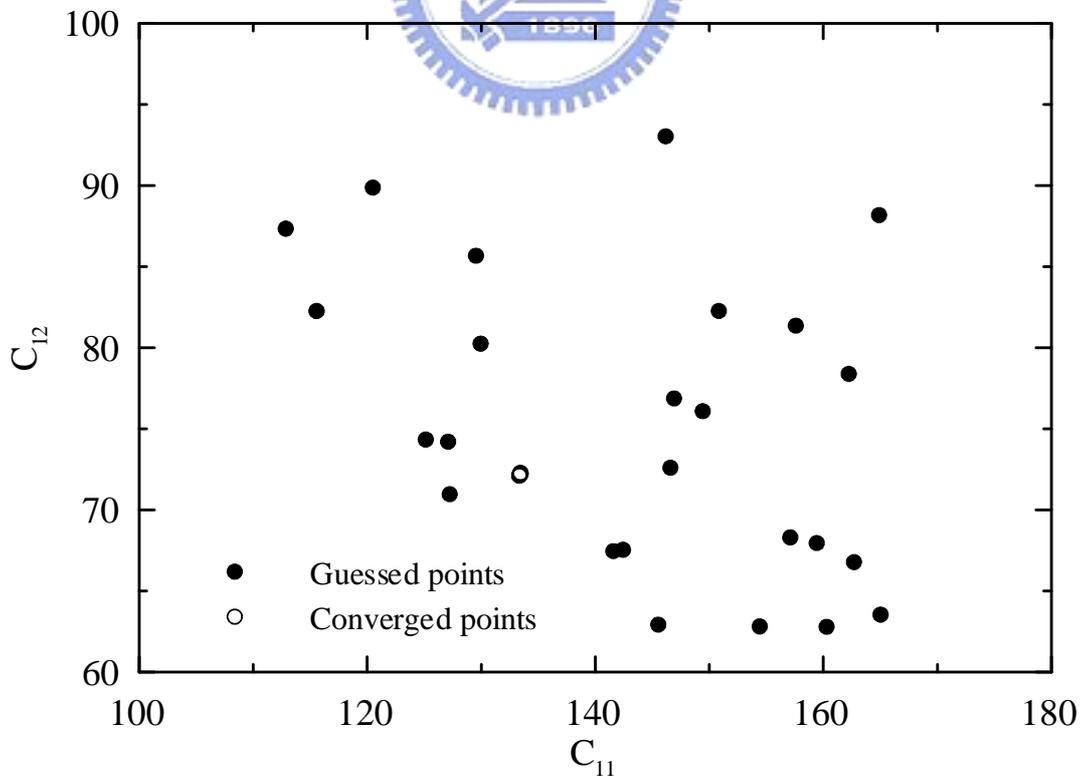


圖3.76 結構參數反算後，再反算兩個彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的結果

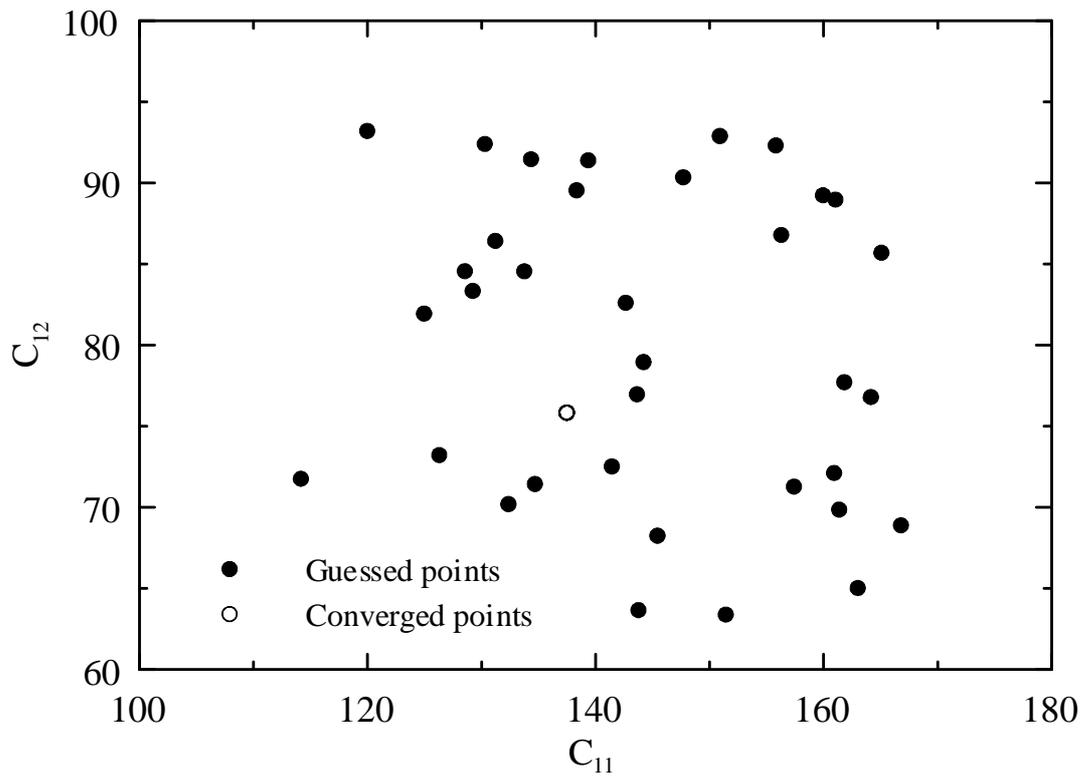


圖3.77 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{11} 、 C_{12} 平面)的結果

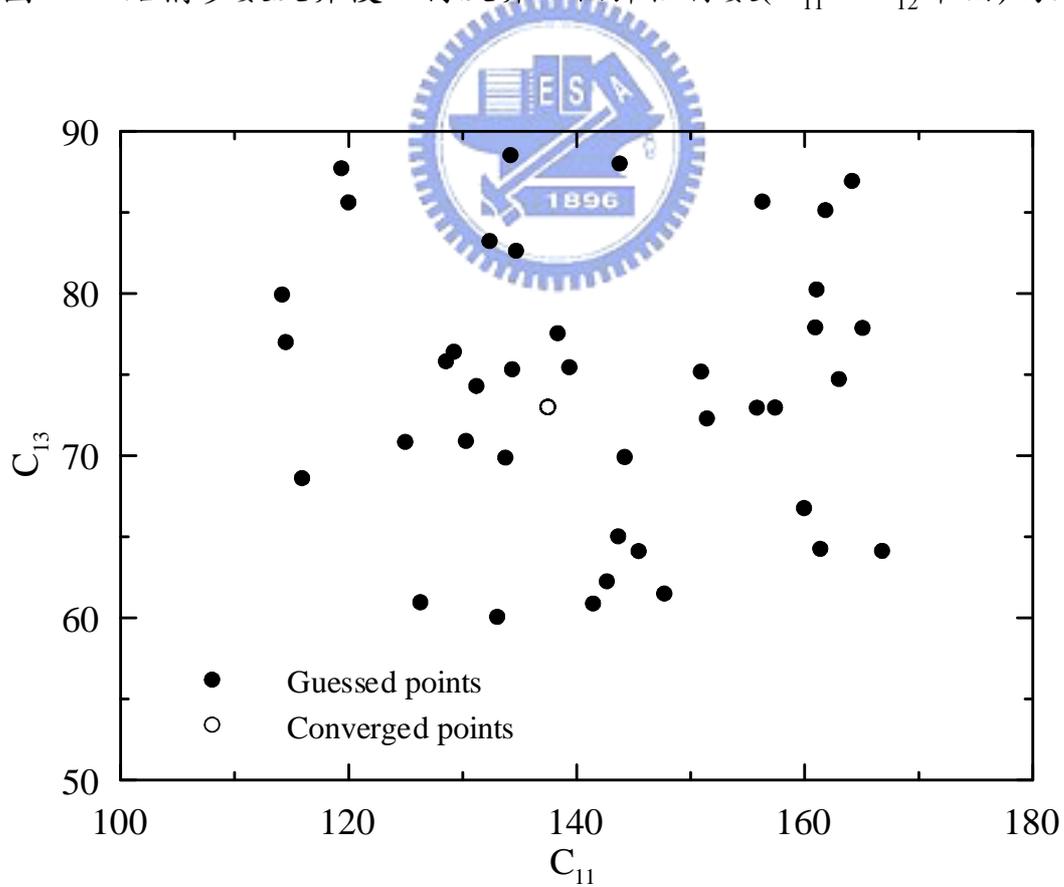


圖3.78 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{11} 、 C_{13} 平面)的結果

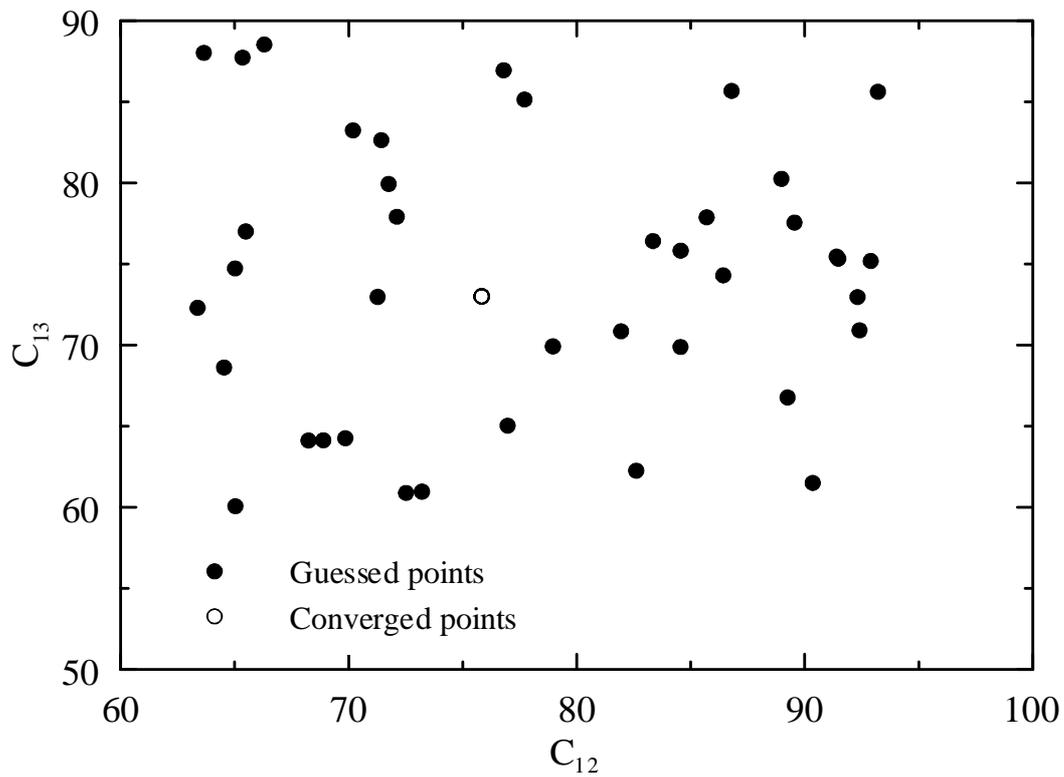


圖3.79 結構參數反算後，再反算三個彈性係數(C_{12} 、 C_{13} 平面)的結果

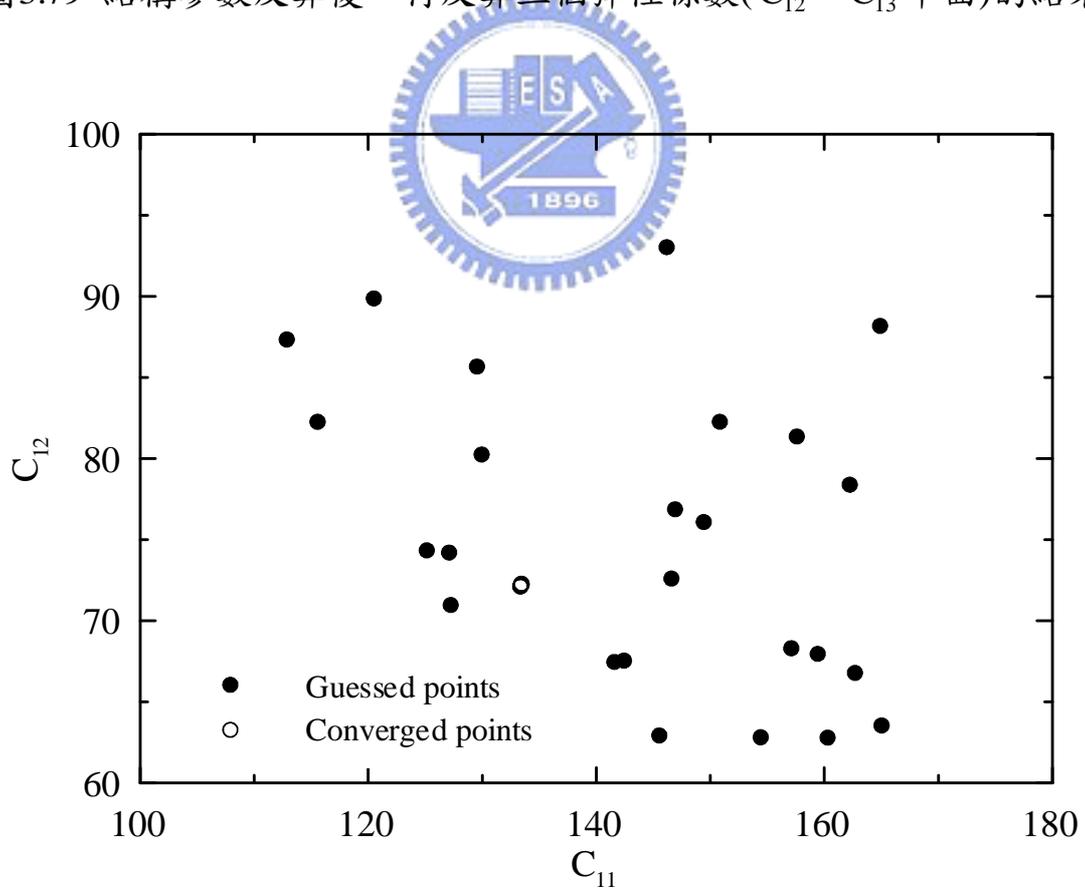


圖3.80 無結構參數反算，直接反算兩個彈性係數 C_{11} 、 C_{12} 的結果