

國立交通大學

顯示科技研究所

碩士論文

新式可變延遲量的延遲片

New Type Variable Compensator

研究生：戴愷均

指導教授：趙于飛 教授

中華民國 九十六年七月

新式可變延遲量的延遲片

New Type Variable Compensator

研究生：戴愷均

Student : Kai-Chun Tai

指導教授：趙于飛

Advisor : Dr. Yu-Faye Chao

國立交通大學

顯示科技所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Display Institute

of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Display Institute

July 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

新式可變延遲量的延遲片

研究生：戴愷均

指導教授：趙于飛

國立交通大學
顯示科技研究所



傳統的可變延遲量延遲片如 Berek compensator 或是 Soleil - Babinet compensator 均是利用延遲量 $R = \Delta n \times d$ (d 為厚度) 的觀念，藉由改變厚度來達到改變延遲量的目的，而後由於液晶的發現，又有人提出可以藉由改變電壓而達到改變光通過的液晶層的 Δn 值，來達到改變延遲量的效果；之前本實驗室使用邦加球的概念提出採用三塊延遲片來合成一塊可變延遲量延遲片的想法，我們採用實驗室內操作過程簡單且重複性高的穿透式偏光儀之量測技術來測量此一結構的相位延遲與光軸位置，其結果並以理論驗證。

New type Variable compensator

Student : Kai-Chun Tai

Advisor : Dr. Yu-Faye Chao

Institute of Display
National Chiao Tung University

Abstract



In stead of using the thickness of wave plate to vary the phase retardation in compensator, such as conventional Berek and Soleil- Babinet compensator, we propose to combine three fixed wave plates to form a variable compensator by rotating the middle half wave plate. In this work, we derive the linear relationship between the phase retardation and azimuth angle of the half wave plate. This model is designed by Poincare sphere first. The phase retardation and the azimuth angle of the wave plates are measured by the three intensity measurement technique of polarimetry. The linear relation is confirmed by this experimental measurement.

誌 謝

這份論文宣告了我的碩士生活到了尾聲，感謝實驗室的大家長—趙于飛老師這一年來的細心指教，讓我學習到許多研究實驗的態度方法，老師親切的態度，讓我在實驗室的生活愉快而充實。柏儒學長的幫助，讓我快速的進入實驗室的狀況，順利的開始實驗，進而得以完成這篇論文；柏儒學長，修銘學長與俊逸學長等三位博士班學長豐富的學養與知識，對我獲益良多。

實驗室內的同學們，振佑，智偉，還有兆峻，謝謝你們，碩士生活因為有大家而充實，愉快，雖然時間不長，但絕對是難忘的一段回憶。

最後謝謝多年來家人們默默的支持與栽培，我才能在學生生涯走的這麼遠，這麼順利。

目 錄

| | |
|--------------------------------|-----|
| 中文摘要 | i |
| 英文摘要 | ii |
| 誌謝 | iii |
| 目錄 | iv |
| 圖表目錄 | vi |
| | |
| 第一章 序論 | 1 |
| | |
| 第二章 基本原理 | 4 |
| 2.1. 光波的偏振理論 | 4 |
| 2.2. 斯托克斯參數與穆勒矩陣 | 7 |
| 2.3. 瓊斯向量與瓊斯矩陣 | 11 |
| 2.4. 單光軸晶體的特性 | 13 |
| 2.5. 傳統的相位可變延遲片 | 15 |
| 2.6. 三片延遲片組成的相位可變延遲片 | 18 |
| | |
| 第三章 實驗步驟 | |
| 3.1. 量測系統架構 | 21 |
| 3.2. 偏光片與析光片之夾角的校正 | 22 |
| 3.3. 延遲片之夾角與延遲量的量測原理 | 23 |
| 3.4. 可變延遲量延遲片的方位角與延遲量的量測 | 25 |
| | |
| 第四章 實驗結果與討論 | 26 |
| 4.1. 三片延遲片個別的量測結果 | 26 |
| 4.2. 可變延遲量延遲片的量測結果 | 29 |
| 4.3. 各式可變延遲量延遲片的規格 | 36 |

| | |
|---|----|
| 第五章 結論 | 39 |
| 參考文獻 | 40 |
| 附錄一 使用 Mueller Matrix 尋找可變延遲量延遲片合成方位角與 延遲量 | 41 |
| 附錄二 Melles Griot 的 Soleil-Babinet Compensator 規格 .. | 43 |
| 附錄三 Three intensity 量測得到的可變延遲量延遲片的延遲量與 方位角 (Matlab 計算程式) | 44 |



圖 表 目 錄

| | | |
|-------|---|----|
| 圖 2-1 | 電場向量之橢圓偏振 | 6 |
| 表 2-1 | 偏振態與史托克斯向量關係對照表 | 8 |
| 圖 2-2 | 邦加球圖 | 10 |
| 圖 2-3 | Berek compensator 結構圖 | 15 |
| 圖 2-4 | Soleil - Babinet compensator 結構圖 | 16 |
| 圖 2-5 | Liquid crystal variable compensator 理論圖 | 17 |
| 圖 2-6 | 三片延遲片所組成的可變延遲量延遲片示意圖 | 18 |
| 圖 2-7 | 當 $\theta_1=0^\circ$ 時，延遲量對 θ_2 的關係圖 | 20 |
| 圖 3-1 | 量測系統架構 | 21 |
| 圖 3-2 | 可變延遲量延遲片的量測系統結構 | 25 |
| 圖 4-1 | Q2 的方位角(C 角) V.S 延遲量的關係 | 26 |
| 圖 4-2 | 改變 P 角，半波延遲片的轉盤刻度與實際量測到的方位角 關係圖 | 27 |
| 圖 4-3 | 改變 P 角，半波延遲片的轉盤刻度與實際量測到的延遲量 關係圖 | 28 |
| 圖 4-4 | $P = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ，可變延遲量延遲片方位角與半 波延遲片方位角關係圖 | 29 |
| 圖 4-5 | $P = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ，可變延遲量延遲片延遲量與半 波延遲片方位角關係圖 | 30 |
| 表 4-1 | 延遲量斜率的平均值與標準差 | 31 |
| 圖 4-6 | 延遲量的理論值與四組量測值圖 | 31 |
| 圖 4-7 | 方位角的理論值與四組量測值圖 | 32 |
| 圖 4-8 | 延遲量的標準差與半波延遲片方位角關係圖 | 32 |
| 圖 4-9 | 增加補償片的系統示意圖 | 34 |

| | | |
|--------|---|----|
| 圖 4-10 | 增加補償片的延遲量與半波延遲片方位角關係理論圖 . | 34 |
| 圖 4-11 | 元件理想，兩塊四分之一波長延遲片方位角有誤差時，延 遲量與半波延遲片方位角關係圖 | 35 |
| 圖 4-12 | New Focus 的 Berek Compensator 的 indicator 與延遲量 及傾角的關係圖 | 36 |
| 表 4-2 | Melles Griot 公司生產的 Soleil-Babinet Compensator 規 格 | 37 |
| 圖 4-13 | Melles Griot 生產的 Soleil-Babinet Compensator .. | 37 |
| 圖 4-14 | 液晶調變延遲量延遲片與電壓關係圖 | 38 |



第一章 序論

在自然界中，有兩種晶體，一種為屬於各向異性 (anisotropic medium) 的吸收性材料，晶體中有一個特定的軸向(稱為主軸或光軸)。當入射光的電場振動方向垂直於光軸時，會被晶體吸收，此時出射光即為入射光的電場振動方向平行於光軸的光。此特性稱為線性二向性 (linear dichroism)。既有吸收性材料，則另一種材料即為各向異性的非吸收性材料，根據電場振動的方向入射光可分為 TE 波與 TM 波，當入射光通過此種晶體時，TE 波與 TM 波所看到的折射率不同，因此出射光會分歧成兩道光線射出，若入射光由某種角度射入此晶體，使得 TE 波與 TM 波看到的折射率相同，入射光的角度即為此晶體的光軸；根據光軸的數目又可分為單光軸與雙光軸晶體，如 (quartz) 即為單光軸晶體，雙光軸晶體如雲母 (mica) 等，像是 quartz 與 mica 是常用的延遲片材料。

本實驗室即是利用偏極光量測上述材料的一些特性，像是光軸的位置等等。在 1690 年，Christian Huygens (1629-1695) 是第一個發現了光的偏振現象的科學家；偏極光的研究始於丹麥科學家 Erasmus Bartholinus (1625-1698) 在 1669 年發現光在方解石晶體 (calcite) 有雙折射現象；在 1852 年，Stokes (1819-1903) 提出 Stokes parameters，其意義在於任何光的偏振態均可用四個實數來表示。1940 年初，H. Mueller 提出了利用 Stokes parameters 為基礎而發展出可將偏光元件寫成 4×4 的矩陣表示系統，亦即 Mueller Matrix；也是在 1940 年代，R. Clark Jones 發展出另一套偏光元件與偏極光的表示式，即 Jones Matrix 與 Jones Vectors，與 Mueller Matrix 不同的地方在於 Jones Matrix 為 2×2 的矩陣，且

矩陣內元素可為複數，非像 Mueller Matrix 為實數。

橢圓偏光術 (Ellipsometry) [1] 在量測技術中一直都是很重要的應用，其原理是利用一已知偏振態的偏極光入射一待測物，藉由量測經過待測物而偏振態改變的出射光，改變數次入射光的偏振態可得到數組出射光的量測數據，計算可得到待測物的光學特性。橢圓偏光術一般可分為三類：

1. 反射式橢圓偏光術 (Reflection or Surface Ellipsometry)：
此一方法可用來測量物質(液體或固體，薄膜或塊狀均可)的光學特性；也可用來監測薄膜表面厚度變化；測量外加電場，磁場，壓力或溫度光學特性的變化。
2. 穿透式橢圓偏光術 (Transmission Ellipsometry)：
應用於量測塊狀物質的線性吸收特性 (Linear Dichroism)，圓偏吸收特性 (Circular Dichroism)，雙折射性質 (birefringence) 以及上述光學性質的色散現象。
3. 散射式橢圓偏光術 (Scattering Ellipsometry)：
多應用於遙測

橢圓偏光儀 (Ellipsometer) 一詞首先被 Rothen 所使用，用來表達根據反射式橢圓偏光術所發展出來的量測儀器；為了與反射式橢圓偏光儀有所區別，根據穿透式橢圓偏光術所發展的量測儀器被稱為偏光儀 (Polarimeter)。

橢圓偏光儀中主要使用的偏光元件有~: 偏光片 (Polarizer)，補波片 (Compensator)，待測物 (Sample)，與析光片 (Analyzer) 等。量測系統依照所使用的偏光元件與順序作命名，如 PSA，PCSA 系統等。

本實驗室內有一套發展已久的穿透式橢圓偏光儀量測技術，操作簡單且重複性高，故選取此方法來量測三塊延遲片合成的可變延遲量延遲片光學參數。

本文第二章介紹偏振光的基本原理，包括 Jones Matrix ， Mueller Matrix ， Stokes parameters ，還有可變延遲量延遲片的原理。第三章介紹量測系統與三個亮度量測法原理。第四章為實驗量測的結果與所有可變延遲量延遲片的比較。



第二章 基本原理

2.1. 光波的偏振理論

Christian Huygens 根據光在晶體內傳播的研究首先提出光並非為一個純量，套用 Newton 的話，光有“方向性”，用現在的術語則是偏振。如果根據波動的觀念，光波除了有兩個橫波項外，應另有一項縱波項，但在 1818 年，由 Fresnel 與 Arago 的一連串實驗數據，他們被迫下了一個結論，光無縱波項的存在；而 Maxwell 利用數學的方法提出 Maxwell's equations 解釋了在真空中，光的確沒有縱波項的存在。

光的偏振是由空間中某處的電場向量隨時間的關係來表示的，假設在真空中僅有兩個橫波項，假設單波長光波的傳播方向為 Z 方向，則此時 X 方向與 Y 方向的電場分別為

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad (2-1a)$$

$$E_y(z,t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \quad (2-2b)$$

其中的

$$\tau = \omega t - kz$$

E_{0x} 與 E_{0y} 為最大振幅， δ_y 與 δ_x 為相位；由 (2-1a) 式與 (2-1b) 式可寫成

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \quad (2-2a)$$

$$\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y \quad (2-2b)$$

因此可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (2-3a)$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin (\delta_y - \delta_x) \quad (2-3b)$$

將 (2-3a) 式與 (2-3b) 式平方相加

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_x(z,t)}{E_{0x}} \frac{E_y(z,t)}{E_{0y}} \cos (\delta) = \sin^2 (\delta) \quad (2-4)$$

其中 $\delta = \delta_y - \delta_x$

上式為一個橢圓方程式，任何的偏振狀態可由 (2-4) 式表示；根據 E_{0x} ， E_{0y} 與 δ 的不同，(2-4) 式可退化為許多特殊的形式；

1. $E_{0y} = 0$ ， $E_{0x} \neq 0$ ：此時為垂直線偏光。
2. $E_{0x} = 0$ ， $E_{0y} \neq 0$ ：此時為水平線偏光。
3. $\delta = 0$ ， $E_{0x} = E_{0y}$ ： -45° 線偏光。
4. $\delta = \pi$ ， $E_{0x} = E_{0y}$ ： 45° 線偏光。
5. $E_{0x} = E_{0y}$ ， $\delta = \pi/2$ ， $\delta = 3\pi/2$ ：(2-4) 式會退化為

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

此時為圓偏振光。

再回到 (2-4) 式，接下來討論 E_{0x} ， E_{0y} 與 δ 以及橢圓旋轉的角度 ψ ，橢圓率角度 χ 的數學關係。如圖 2-1，我們看到一個旋轉的橢圓， ox 與 oy 為旋轉的座標軸， ox' 與 oy' 為新的旋轉後的座標軸，而 ψ 為 ox 與 ox' 間的夾角，則

$$E_x' = E_x \cos \psi + E_y \sin \psi \quad (2-5a)$$

$$E_y' = E_y \cos \psi - E_x \sin \psi \quad (2-5b)$$

可得

$$\left(\frac{E_x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y'}{b}\right)^2 = 1 \quad (2-6)$$

由 (2-1) 式，(2-5) 式，(2-6) 式，可得

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \psi + E_{0y}^2 \sin^2 \psi + 2E_{0x} E_{0y} \cos \psi \sin \psi \sin \delta$$

$$b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \psi + E_{0y}^2 \cos^2 \psi - 2E_{0x} E_{0y} \cos \psi \sin \psi \sin \delta$$

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (2-7)$$

利用 (2-7) 式即可將 E_{0x} , E_{0y} 與 δ 等物理意義的變數與幾何意義的變數 ψ 連結起來。

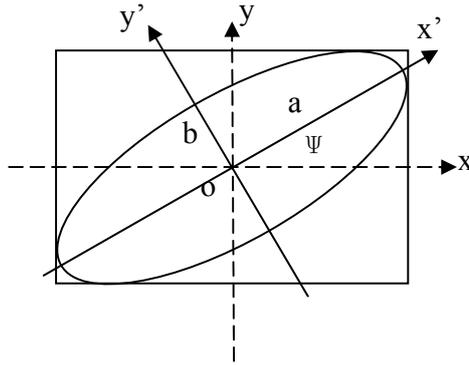


圖 2-1 電場向量之橢圓偏振

這裡先引進一個輔助角 α , 定義為

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \quad (2-8)$$

利用輔助角, 可得到

$$\tan 2\psi = (\tan 2\alpha) \cos \delta$$

同樣的, 橢圓率角度 χ 的定義是

$$\tan \chi = \frac{\pm b}{a} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$$

同樣利用輔助角

$$\sin 2\chi = (\sin 2\alpha) \sin \delta \quad (2-9)$$

2.2. 史托克斯參數 (Stokes parameters) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

將 (2-4) 式取時間平均可得到

$$\left\langle \frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} \right\rangle + \left\langle \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} \right\rangle - 2 \frac{\langle E_x(t) E_y(t) \rangle}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (2-10)$$

$$\langle E_i(t) E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t) E_j(t) dt \quad i, j = x, y$$

(2-10) 式同乘 $4E_{0x}^2 E_{0y}^2$ ，可得到

$$4E_{0y}^2 \langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2 \langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0y} E_{0x} \langle E_x(t) E_y(t) \rangle \cos(\delta) = 2E_{0y} E_{0x} \sin^2(\delta) \quad (2-11)$$

且

$$\begin{aligned} \langle E_x^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0x}^2 \\ \langle E_y^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0y}^2 \\ \langle E_x(t) E_y(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0x} E_{0y} \cos(\delta) \end{aligned}$$

故 (2-11) 式可寫成

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0y} E_{0x} \cos(\delta))^2 = (2E_{0y} E_{0x} \sin(\delta))^2 \quad (2-12)$$

從 (2-12) 式，可以得到所謂的 Stokes vector 四個參數的物理意義

$$S_0 = E_{0y}^2 + E_{0x}^2 \quad (2-13a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2-13b)$$

$$S_2 = 2E_{0y} E_{0x} \cos(\delta) \quad (2-13c)$$

$$S_3 = 2E_{0y} E_{0x} \sin(\delta) \quad (2-13d)$$

S_0 代表光的強度， S_1 描述的是水平或是垂直的偏振態， S_2 描述的是線性 $\pm 45^\circ$ 的偏振態，而 S_3 描述的是右圓或是左圓的偏振態。

將 (2-13) 式內四個史托克斯參數寫成行向量的形式就稱為史托克斯向量。

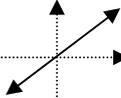
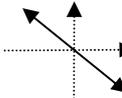
| 偏振態 | 水平線 偏光 | 垂直線 偏光 | + 45°線 偏光 | -45°線 偏光 | 右旋圓 偏光 | 左旋圓 偏光 |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| 史托克斯 向量 | $\begin{bmatrix} E_{0x}^2 \\ E_{0x}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} E_{0y}^2 \\ -E_{0y}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 2E_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ -2E_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2E_0^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2E_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2E_0^2 \end{bmatrix}$ |
| 偏振態 圖示 |  |  |  |  |  |  |

表 2-1 偏振態與史托克斯向量關係對照表，假設光前進方向為出紙面

利用 (2-8) 式，前一節所提到輔助角的觀念，可以將史托克斯向量的通式化為具有物理意義的形式。

$$S = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha)\cos\delta \\ \sin(2\alpha)\sin\delta \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

在上一節中，還提到橢圓率角 χ ，利用這個角度，可以將 (2-14) 式寫成另一個形式的通式

$$S = S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\chi)\cos(2\psi) \\ \cos(2\chi)\sin(2\psi) \\ \sin(2\chi) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

(2-15) 式讓我們聯想到直角座標與圓座標的轉換關係式

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (2-16)$$

與 (2-15) 式比較，當 $\theta = 90^\circ - 2\chi$ ， $\phi = 2\psi$ 時，(2-15) 式的 S_1 ， S_2 ， S_3 與 (2-16) 式的 x ， y ， z 在形式會一樣，因此我們可以利用 S_1 ， S_2 ， S_3 為直角座標的三個座標軸，描繪一個半徑為 S_0 的球面，此即為邦加球 (Poincaré sphere)。由此可知，(2-15) 式表達的即是任一偏振態的在邦加球上的幾何意義；利用邦加球，我們可以很輕易的描述任何一個偏振態。

我們再回顧一下 (2-12) 式，球體的任何一點的關係式為

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

若此時為純偏振光，則等號成立，由此可知球面上任何一點均為純偏振光 (pure polarized light)；若為部分偏振光，則大於符號成立，在圖上為球面內的任何一點，這也是使用史托克斯向量的優點之一，可以用來表示部分偏振光 (partially polarized light)，瓊斯向量只可表示純偏振光。在邦加球上，因為已經作歸一的動作，故球面半徑為 1，若為部份偏振，則此時的半徑將是偏光率 P ($0 \leq P \leq 1$)。偏光率 P 的定義為

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad \begin{cases} P=1 & \text{pure polarized light} \\ 0 < P < 1 & \text{partially polarized light} \\ P=0 & \text{unpolarized light} \end{cases}$$

而相對於史托克斯向量是用來描述光的任一偏振態，Mueller Matrix 則是用來表示各種偏光元件的運算矩陣 (Operator)，其通常為 4×4 階的矩陣。

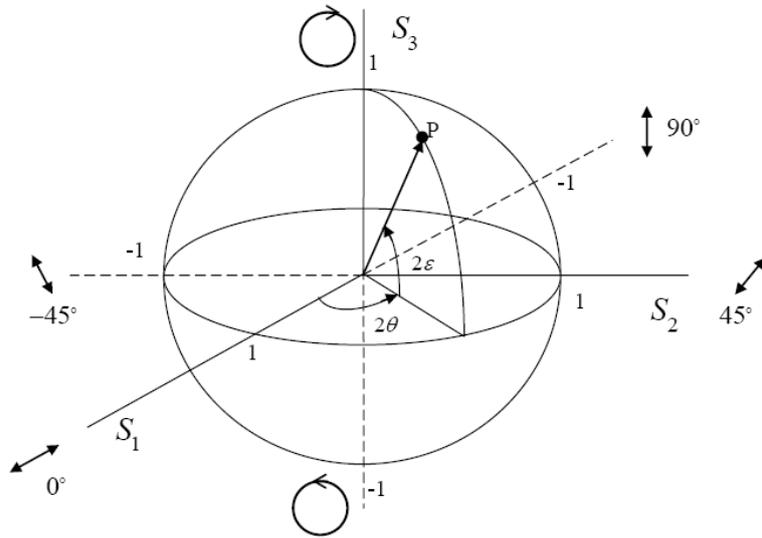


圖 2-2 邦加球，經過歸一化，故球半徑為 1。

若偏光片或析光片的夾角為 P 時，其 Mueller Matrix 為：

$$M(P) = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \cos 2P \sin 2P & 0 \\ \sin 2P & \cos 2P \sin 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

若延遲片（又稱補波片）的方位角為 C ，相位延遲量為 Δ ，其 Mueller Matrix 為：

$$M(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & \sin(4C) \sin^2 \frac{\Delta}{2} & \sin(2C) \sin \Delta \\ 0 & \sin(4C) \sin^2 \frac{\Delta}{2} & m_{33} & -\cos(2C) \sin \Delta \\ 0 & -\sin(2C) \sin \Delta & \cos(2C) \sin \Delta & \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

$$m_{22} = \cos^2(2C) + \cos \Delta \sin^2(2C)$$

$$m_{33} = \cos^2(2C) \cos \Delta + \sin^2(2C)$$

2.3. 瓊斯向量 (Jones vectors)與瓊斯矩陣 (Jones Matrix)

若將 (2-1) 式寫成 2×1 階的矩陣，則是另一種偏極光的表示法，此 2×1 階的矩陣即為 R. Clark Jones 所使用的瓊斯向量，此種表示法較簡單，直接以平面電場的分布來表示光的偏振態，以複數型式表示可寫成

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

上式為直角座標表示，也可採用以右旋偏振光 (Right-hand Circularly Polarized Light) 與左旋偏振光 (Left-hand Circularly Polarized Light) 為基底 (basis) 的圓座標表示法。

若偏光片或析光片的夾角為 P 時，其瓊斯矩陣為：

$$\begin{bmatrix} \cos^2(2P) & \sin P \cos P \\ \sin P \cos P & \sin^2(2P) \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

若延遲片 (又稱補波片) 的方位角為 C ，相位延遲量為 Δ ，其瓊斯矩陣為：

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} \cos^2\theta + e^{-\frac{i\phi}{2}} \sin^2\theta & i \sin 2\theta \sin \frac{\phi}{2} \\ i \sin 2\theta \sin \frac{\phi}{2} & e^{-\frac{i\phi}{2}} \cos^2\theta + e^{\frac{i\phi}{2}} \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

由這樣我們可以知道穆勒矩陣的幾個優點：

1. Jones matrix 會因座標不同，而有不同型式，但 Mueller matrix 的型式卻固定不變。
2. Mueller matrix 各個元素皆為實數，方便矩陣元素間乘積之運

算。

3. 配合 Stokes vector 可方便地表示部分偏振態。

4. Mueller matrix 與 Stokes vector 相乘之後，其第一行第一列之值即為光強度值。



2.4. 單光軸晶體的特性

可利用折射率橢球 (index ellipsoid) 來說明異向性晶體的光學特性，折射率橢球的式子[6]如下

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (2-22)$$

假設晶體的光軸 (Optical axis) 為 Z 軸：

1. 當 $n_x \neq n_y \neq n_z$ 時，此晶體為雙光軸晶體 (biaxial crystal)，如雲母 (Mica)
2. 當 $n_x = n_y \neq n_z$ 時，此晶體為單光軸晶體 (uniaxial crystal)，定義 $n_x = n_y = n_o$ 為尋常折射率 (Ordinary index of refraction)，而 $n_z = n_e$ 為非尋常折射率 (Extraordinary index of refraction)。

而單軸晶體依 n_o 與 n_e 的關係又可分為

1. 正單光軸晶體： $n_e > n_o$ ，如石英 (quartz)
2. 負單光軸晶體： $n_e < n_o$ ，如方解石 (Calcite)

以常用來製作延遲片的石英 (Quartz) 為例，假設光沿著 X 軸前進，則光的電場分量 E_y 與 E_z 將感受到不同的折射率 n_e 與 n_o 。所以 E_y 與 E_z 前進的波速並不相同，因此光在石英晶體中前進一段距離 d 後，將會產生一相位差 (phase shift) 或稱為 相位延遲 (phase retardation)，此為雙折射性質最重要的物理現象。如果以瓊斯矩陣 J_c 來表示一厚度為 d 的單光軸晶體，則

$$J_c = \begin{bmatrix} \exp(-in_o \frac{\omega}{c} d) & 0 \\ 0 & \exp(-in_e \frac{\omega}{c} d) \end{bmatrix}$$

假設入射光為線性偏振光：

$$|E\rangle_{in} = \begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix}$$

則出射光為

$$|E\rangle_{out} = J_c |E\rangle_{in} = \begin{bmatrix} \exp(-in_o \frac{\omega}{c} d) & 0 \\ 0 & \exp(-in_e \frac{\omega}{c} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$= \begin{bmatrix} E_{ox} \exp(-in_o \frac{\omega}{c} d) \\ E_{oy} \exp(-in_e \frac{\omega}{c} d) \end{bmatrix}$$

所以由 (2-23) 式可得相位延遲 Δ

$$\Delta = \delta_y - \delta_x = \frac{\omega}{c} (n_e - n_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d \quad (2-24)$$

所以影響相位延遲的條件有入射光的波長 λ ，經體本身的雙折射率，以及晶體厚度 d 。

2.5. 傳統的相位可變延遲片 (variable compensator)

以往的相位可變延遲片大致上可分為三種類型，第一種類型為 Berek compensator，第二種為 Soleil-Babinet compensator，第三種為 Liquid crystal variable compensator。

(a) Berek compensator：在 1913 年由 Max Berek 發明的 Berek compensator，其結構如圖 2-4

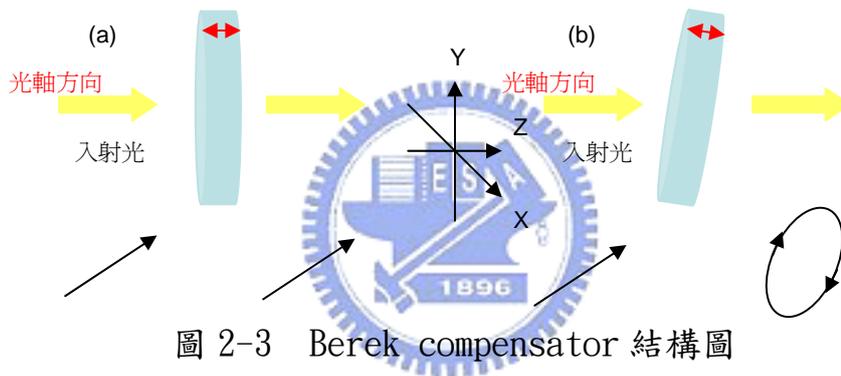


圖 2-3 Berek compensator 結構圖

一開始光軸方向與入射光的方向平行（z 方向），如圖(a)，故入射光在 X 與 Y 方向只看到折射率 n_o ，故在 X 方向與 Y 方向的光不會有延遲量出現，出射光的偏振態與入射光一致。若將此元件有傾角 θ ，根據

$$\frac{1}{N_e^2} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} \quad (2-25)$$

則在 Y 方向入射光會看到 N_e ，則此時 X 軸與 Y 軸的延遲量為

$$\text{Retardation} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}}} - n_o \right) \times \frac{\text{thickness}}{\sin\theta} \quad (2-26)$$

由於 Berek compensator 是利用傾角 θ 來產生所需延遲量，故此種延

遲片用在小角度的效果較佳，延遲量過大則所需傾角也越大，在校正光路時可能會出現問題。

(b) Soleil-Babinet compensator :

結構如圖，由兩個楔型且光軸同一方向的雙折射性材料與一個矩形且光軸與楔型材料互相垂直的材料所組成，矩形材料的厚度為 X_1 ，兩楔型材料的厚度為 X_2 ，材料的雙折射率為 Δn ，則由 (2-24) 式，延遲量為

$$\text{Retardation} = \Delta n \times (X_2 - X_1) / \lambda \quad (2-27)$$

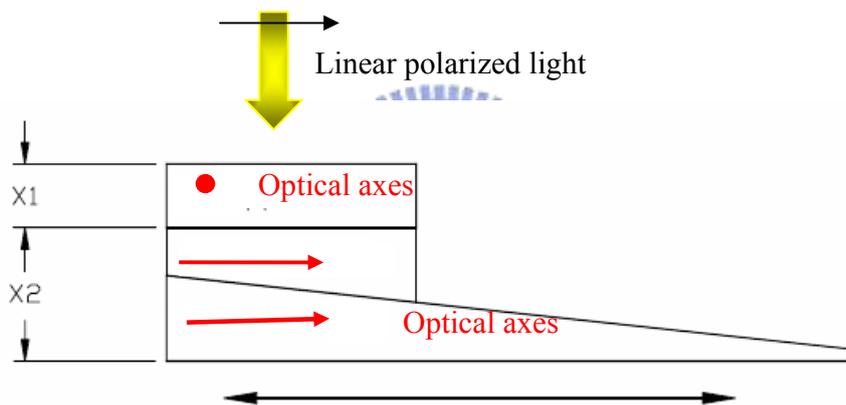


圖 2-4 Soleil-Babinet compensator 結構圖。 X_1 ， X_2 分別為光軸垂直出紙面與平行於紙面的晶體厚度

(c) Liquid crystal variable compensator[10] :

液晶相位可變延遲片是使用 Nematic 型的液晶，此種延遲片與前述兩種最大的不同在於這種類型的延遲片需要使用交流電壓來驅動，才能任意的改變延遲量。結構如圖 2-6。在未加電壓時，液晶分子為水平排列，因為液晶分子的光軸與液晶分子的長軸平行，所以此時延遲量為最大；當增加電壓時，液晶分子傾角亦增加延遲量則開始減少。

此種延遲片因為液晶分子在電壓增加到最大時，接近上下兩基板的

液晶分子仍然不會完全垂直於基板，故此種延遲片最小的延遲量無法到接近零度的延遲量；且因為需要 rms 電壓驅動，所以電壓的穩定性也會影響延遲量的穩定性。

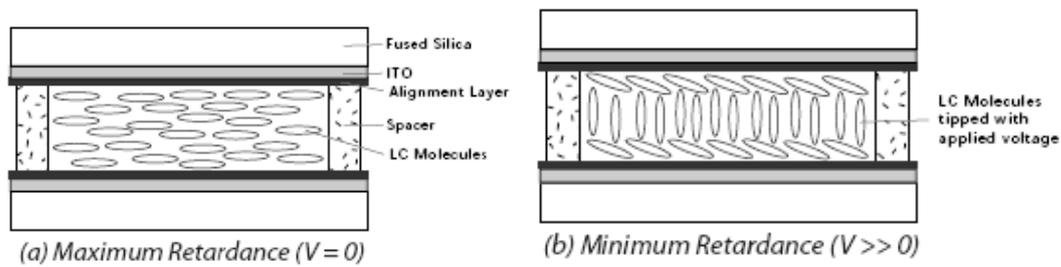


圖 2-5 液晶相位可變延遲片結構圖。(a)為未加電壓時，此時延遲量最大 (b)為外加電壓至產生最小延遲亮時液晶分子的排列



2.6. 三片延遲片組成的相位可變延遲片

圖 3-1 為此論文所提出的可變延遲量延遲片的結構是由三塊延遲片，此結構與目前市面上可見的可變延遲量延遲片的工作原理不同，以下為推導得出可由兩片 1/4 波延遲片與一片半波延遲片可得到一塊相位可變延遲片的過程。

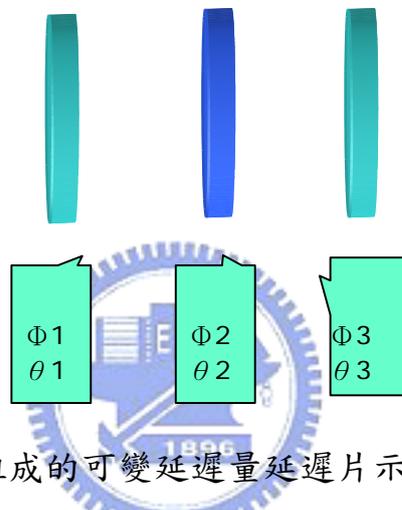


圖 2-6. 三片延遲片所組成的可變延遲量延遲片示意圖，數字 1, 2, 3 代表個別延遲片的所在位置， Φ 代表延遲量， θ 代表方位角

根據圖 2-6 的順序，三片延遲片的 Jones Matrix 表示式為

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(-\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) + i(\cos(2\theta_2) + i\cos(2(\theta_2 - \theta_3)) - \cos(2(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3))))$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\sin(2(\theta_1 - \theta_2)) + i\sin(2\theta_2) + \sin(2(\theta_2 - \theta_3)) - i\sin(2(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)))$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}(-\sin(2(\theta_1 - \theta_2)) + i(\sin(2\theta_2) + i\sin(2(\theta_2 - \theta_3)) - \sin(2(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3))))$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}i(i(\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) + i\cos(2\theta_2) + \cos(2(\theta_2 - \theta_3)) + \cos(2(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3))))$$

(2-28)

而一般延遲片的 Jones Matrix 表示式為

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} \cos^2 \theta + e^{-\frac{i\phi}{2}} \sin^2 \theta & i \sin 2\theta \sin \frac{\phi}{2} \\ i \sin 2\theta \sin \frac{\phi}{2} & e^{-\frac{i\phi}{2}} \cos^2 \theta + e^{\frac{i\phi}{2}} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

由 2-29 式可知，利用矩陣的對角線和 (trace)，可得 $2 \cos(\Phi/2)$ ；

假設此結構亦可等效為一塊延遲片，則將 (2-28) 式做同樣的處理，即可得到此結構的延遲量關係式。

所以 a_{11} 項與 a_{22} 項相加，可得

$$a_{11} + a_{22} =$$

$$\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}i(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)} ((-1 + e^{i\Phi_1})(-1 + e^{i\Phi_2})(1 + e^{i\Phi_3}) \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + (-1 + e^{i\Phi_1})(1 + e^{i\Phi_2})(-1 + e^{i\Phi_3}) \cos(2\theta_1 - 2\theta_3) + (1 + e^{i\Phi_1})(1 + e^{i\Phi_2})(1 + e^{i\Phi_3}) + (-1 + e^{i\Phi_2})(-1 + e^{i\Phi_3}) \cos(2\theta_2 - 2\theta_3)) \quad (2-30)$$

若 $\theta_1 = \theta_3 = 0$ ，可將 (2-30) 式進一步化簡為

$$2 \cos\left(\frac{\Phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) - 2 \cos(2\theta_2) \sin\left(\frac{\Phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \quad (2-31)$$

因為我們希望此結構的延遲量改變與延遲片 2 的方位角的改變有關，當 $\Phi_2 = \pi$ ， $\Phi_1 = \Phi_3 = \frac{\pi}{2}$ 時，(2-31) 式可化簡為

$$-2 \cos(2\theta_2) \quad (2-32)$$

將以上假設的條件

$$\Phi_2 = \pi$$

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 = \theta_3 = 0$$

代入 (2-28) 式，可得

$$\begin{pmatrix} -\cos(2\theta_2) & i \sin(2\theta_2) \\ i \sin(2\theta_2) & -\cos(2\theta_2) \end{pmatrix} \quad (2-33)$$

整理後可得

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi + 2\theta_2) & -i\sin(\pi + 2\theta_2) \\ -i\sin(\pi + 2\theta_2) & \cos(\pi + 2\theta_2) \end{pmatrix} \quad (2-34)$$

在此再回到 (2-29) 式的矩陣，將 $\theta = -45^\circ$ 代入 (2-29) 式，可得

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\Phi}{2} & -i\sin\frac{\phi}{2} \\ -i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

由 (2-35) 式，可得 (2-34) 可等效於方位角為 -45° ，延遲量

$$\Phi = 2\pi + 4\theta_2 \quad (2-36)$$

的延遲片；或者亦可等效於方位角為 45° ，延遲量

$$\Phi = 2\pi - 4\theta_2$$

對 (2-36) 式微分，可得到延遲量對 θ_2 的關係式斜率為 4，由圖 2-7 即可看出延遲量對 θ_2 為線性的關係。

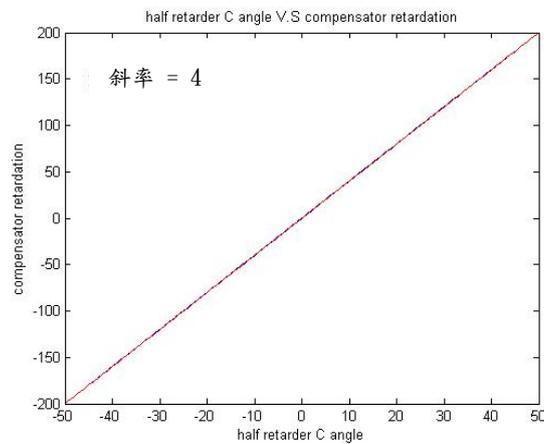


圖 2-7 當 $\theta_1=0^\circ$ 時，延遲量對 θ_2 的關係圖

第三章 實驗步驟

3.1. 量測系統架構

實驗基本設置如下：

雷射光源：He-Ne Laser：Melles Griot laser 10mw

偏光片及析光片：Melles Griot 03FPG sheet polarizer

光偵測器：Thorlabs PDA55 silicon pin diode

Spectral Range：400-1100 nm

偏光片與析光片均使用機械作旋轉，故解析度可達百分之一度

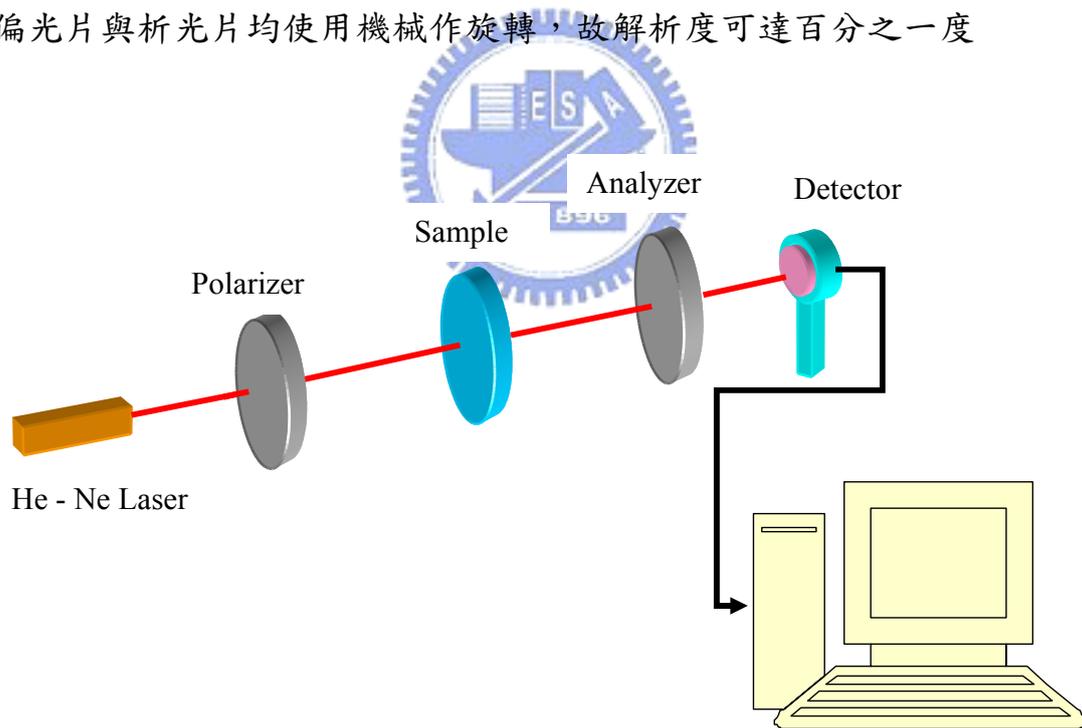


圖3-1 量測系統架構

3.2. 偏光片與析光片之夾角的校正

為了降低系統誤差，在開始整個量測之前我們必須確定的是偏光片 (Polarizer) 及檢光片 (Analyzer) 的相對座標，令檢光片的方位角 ($a=0$) 為系統的 X 軸，只要量出偏極片與檢光片的偏差角就可以完成校正。考慮通過偏光片 (P) 的雷射光為線性偏極光，且與 X 軸夾角 p ，檢光片與 X 軸夾角 a 。

$$S = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & 0 \\ \cos(2a) & \cos^2(2a) & \cos(2a)\sin(2a) & 0 \\ \sin(2a) & \sin(2a)\cos(2a) & \sin^2(2a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2p) \\ \sin(2p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

光偵測器可量得光的強度，即為 Stokes Vector 的第一項，可由 S_0 表示

$$S_0 = f(a) = I_0 \cos^2(a - p) \quad (3-2)$$

由

$$2f(0) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} I_0 \cos(2p) \quad (3-3)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} I_0 \sin(2p) \quad (3-4)$$

由 (3-3) 式與 (3-4) 式，故可得

$$P = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}(f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{2\pi}{3}))}{2f(0) - f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{2\pi}{3})} \right) \quad (3-5)$$

3.3. 延遲片之夾角與延遲量的量測原理

如圖 3-1 所示，設入射光偏光角 p ，垂直入射待量測延遲片 (sample)。一樣可測得析光片方位角在 0° ， 60° ， 120° 時的強度值，一樣使用這三個強度作計算，得到延遲片的方位角 (θ) 與延遲量 (δ)。

其光學 Mueller matrix 表示如下

$$S = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & 0 \\ \cos(2a) & \cos^2(2a) & \cos(2a)\sin(2a) & 0 \\ \sin(2a) & \sin(2a)\cos(2a) & \sin^2(2a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2p) \\ \sin(2p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

與3-1節所提的觀念一致，由光偵測器所量到的光強度可由 Stokes Vector 的第一項所表示：

$$S_0 = f(a) = \frac{I_0}{2} [1 + \cos(2a - 2\theta)\cos(2\theta - 2p) - \cos(\delta)\sin(2a - 2\theta)\sin(2\theta - 2p)] \quad (3-7)$$

所以

$$I_0 = \frac{2}{3} [f(0) + f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{2\pi}{3})] \quad (3-8)$$

$$I_a = [2f(0) - f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{2\pi}{3})] / [f(0) + f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{2\pi}{3})] \quad (3-9)$$

$$I_b = \sqrt{3} [f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{2\pi}{3})] / [f(0) + f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{2\pi}{3})] \quad (3-10)$$

最後可得

$$\tan \theta = \frac{\cos 2p - I_a}{I_b - \sin 2p} \quad (3-11)$$

$$\cos \delta = \frac{I_b - I_a \tan(2\theta)}{\sin(2p) - \cos(2p) \tan(2\theta)} \quad (3-12)$$

由 (3-11) 式與 (3-12) 可得

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\cos 2p - I_a}{I_b - \sin 2p} \right) \quad (3-13)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left(\frac{I_b - I_a \tan(2\theta)}{\sin(2p) - \cos(2p) \tan(2\theta)} \right) \quad (3-14)$$



3.4. 可變延遲量延遲片的方位角與延遲量的量測

根據第二章的計算量測，我們可將可變延遲量延遲片視為單一延遲片；故這邊沿用量測普通延遲片的系統；一樣使用 PSA 的結構；量測條件的設定是將前後兩塊四分之一波長延遲片的方位角固定在 0° ，以這組數據來量測並與理論作對照。旋轉中間的半波延遲片，半波延遲片的方位角從 -45° 到 45° ，每 3° 度量測一次。實際上的結構如圖 3-2。

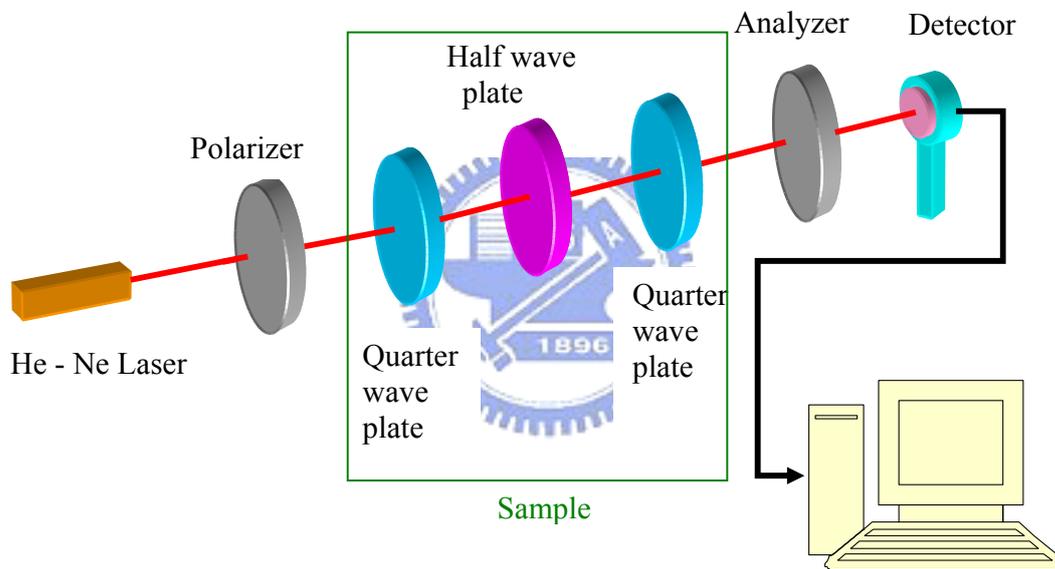


圖3-2 可變延遲量延遲片的量測系統結構

第四章 實驗結果與討論

4.1. 三片延遲片個別的量測結果

4.1.1 四分之一延遲片量測結果

選用的四分之一延遲片的材質為 Mica，公司為 Knight Optical Ltd.，型號是 RYM2506。

將析光片起始位置視為 X 軸（零度角），偏光片的方位角（P 角）擺在 45° ，量測靠近析光片的延遲片 Q2 的結果如圖 4-1

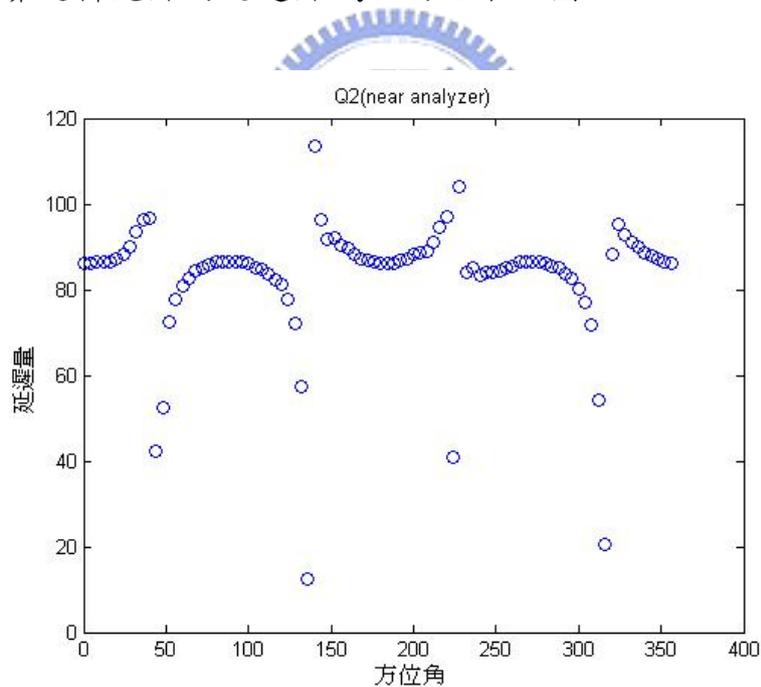


圖4-1 Q2的方位角(C角) V.S 延遲量的關係

圖中可看出大部分位置的延遲量均在87度附近，圖中有某些奇點是因為量測系統造成的，而非原本本身的因素，原因會在4-1-2節與二分之一延遲片的量測結果一起作討論

4.1.2 二分之一延遲片量測結果

選用的二分之一延遲片的材質為 Mica，出產公司一樣為 Knight Optical Ltd.，型號是 RQM2506。

將析光片起始位置視為 X 軸（零度角），偏光片的方位角擺在 15°, 30°, 60°, 75°，量測靠近析光片的延遲片 H2 的結果如圖 4-2。

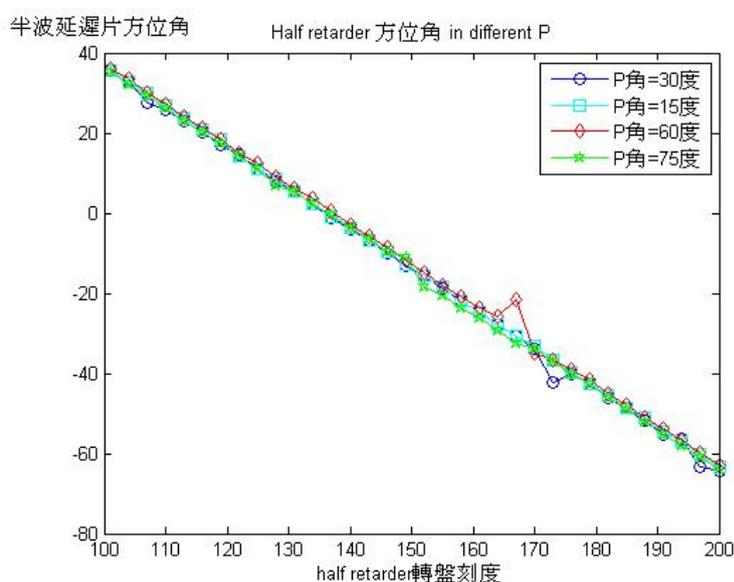


圖 4-2 改變 P 角，半波延遲片的轉盤刻度與實際量測到的方位角關係圖

由公式 (3-14) 的分母可化簡成

$$-\sec(2\theta)\sin(2\theta - 2p) \quad (4-1)$$

當 $\theta - p = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 公式 (3-14) 的分母會為零，故在使用三個強度量測法量測延遲片的延遲量時，在延遲片的方位角與偏光片的方位角關係等於這些角度時，量測的結果會出現奇點 (Singular point)。同理，(3-13) 式的分母可化簡成

$$2 \cos(2\theta) \sin^2\left[\frac{\delta}{2}\right] \sin(2\theta - 2p) \quad (4-2)$$

故當 $\theta - p$ 為上述特定角度時，公式 (3-13) 的分母會為零，故使用三個強度量測法量測延遲片的方位角，在延遲片的方位角與偏光片的方位角關係等於這些角度時，會出現奇點。由以上可知在 $\theta - p$ 為上述特定角度時，量測結果會出現較大的誤差，要解決此問題可另取 P 角做量測即可取得待測延遲片的參數。

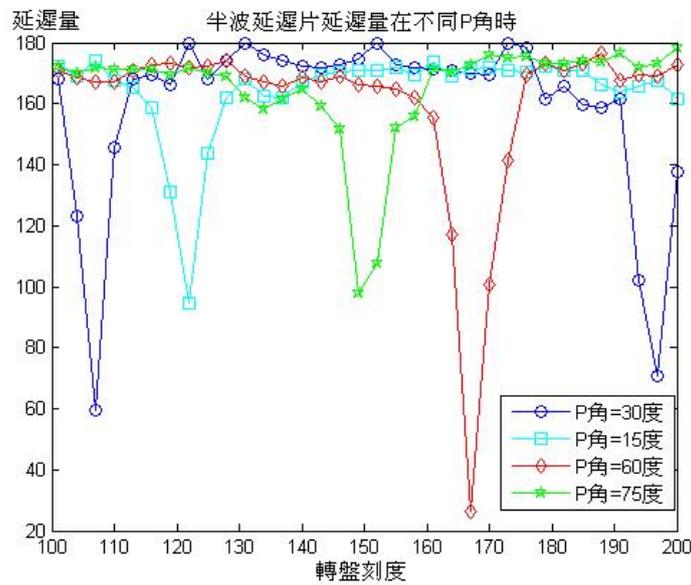


圖 4-3 改變 P 角，半波延遲片的轉盤刻度與實際量測到的延遲量關係圖

4.2. 可變延遲量延遲片的量測結果

4.2.1 可變延遲量延遲片在不同 P 角時的量測結果

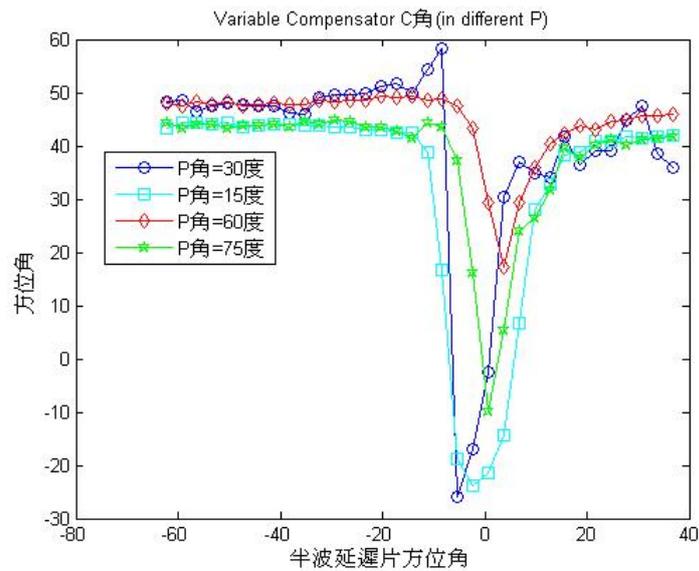


圖 4-4 P = 15°、30°、60°、75°，可變延遲量延遲片方位角與半波延遲片方位角關係圖

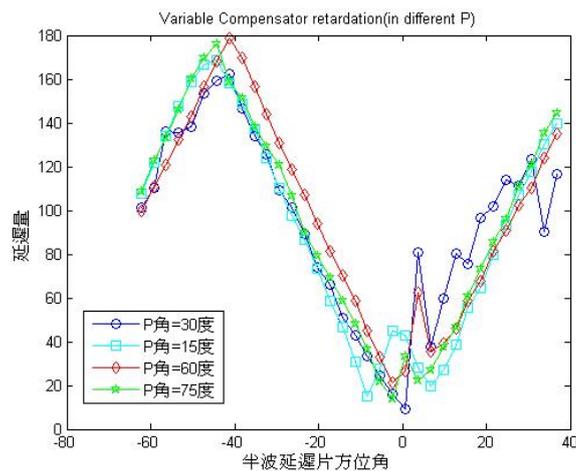


圖 4-5 P = 15°、30°、60°、75°，可變延遲量延遲片延遲量與半波延遲片方位角關係圖

在 4.1.2 節裡，選擇了 $P = 15^\circ$ 、 30° 、 60° 、 75° ，量測半波延遲片，在這裡也一樣選擇這些角度作量測，量得的方位角與延遲量如圖 4-4，圖 4-5。

4.2.2 可變延遲量延遲片在不同 P 角時的量測結果討論

一般使用 PSA 系統作量測的時候，最常使用的 P 角為 45° ，但在這裡無法使用，因為根據之前所提到邦加球的觀念，當 $\theta_1 = \theta_3 = 0^\circ$ 時，合成的 $\theta = 45^\circ$ ，因此若 $P = \pm 45^\circ$ 時，兩者剛好在邦卡球上的同一軸，旋轉的軸心與旋轉軸在同一直線上，所以不能以 $P = \pm 45^\circ$ 當做量測的角度。

圖 4-4 可發現這邊量測所得的方位角奇點出現的位置，與 P 角的選擇無關，接下來我們討論這些奇點的出現的原因是因為量測系統所產生的還是元件的誤差所造成的。

先以量測系統這邊來做討論，一樣使用 Mathematic 來運算，使用 Mueller Matrix 依據 P-Q1-H2-Q3-A 的順序相乘，可得到 Stokes Vector 第一項為

$$S_0 = f(a) = \frac{I_0}{2} [\cos(2p)\cos(4\theta_2)\cos(2a) + 2\cos^2(p)(1 + \sin(2a)\sin(2p))]$$

與 3-2 節相同的步驟得到 $f(0)$ 、 $f(\pi/3)$ 、 $f(2\pi/3)$ ，依照 (3-8) 至 (3-11) 式，可得此時

$$I_b - \sin 2p = 2\cos^2 p \sin p - \sin(2p) \quad (4-3)$$

由 (4-3) 式可知僅當 $p = 0^\circ$ 、 $\pm 90^\circ$ 、 $\pm 180^\circ$ 時，才有可能出現奇

點，所以此時奇點的出現與量測系統無關，應與元件有關；

4.2.3 可變延遲量延遲片量測結果與考慮誤差後的理論圖形

選擇 $P=75^\circ$ ，個別量測元件得到 $Q1=93^\circ$ ， $Q3=87^\circ$ ， $H2=171^\circ$ ，由此可畫出經過修正後的理論線；量測多組後，可找出延遲量斜率的平均值與延遲量斜率的標準差，如表 4-1。圖 4-6 為延遲量的理論值與四組量測值圖，圖 4-7 為方位角的理論值與四組量測值圖。

| | |
|-------|-------|
| 理論值斜率 | 3.920 |
| 第一組斜率 | 3.929 |
| 第二組斜率 | 3.931 |
| 第三組斜率 | 3.936 |
| 第四組斜率 | 3.938 |
| 平均值 | 3.934 |
| 標準差 | 0.004 |

表 4-1 延遲量斜率的平均值與標準差

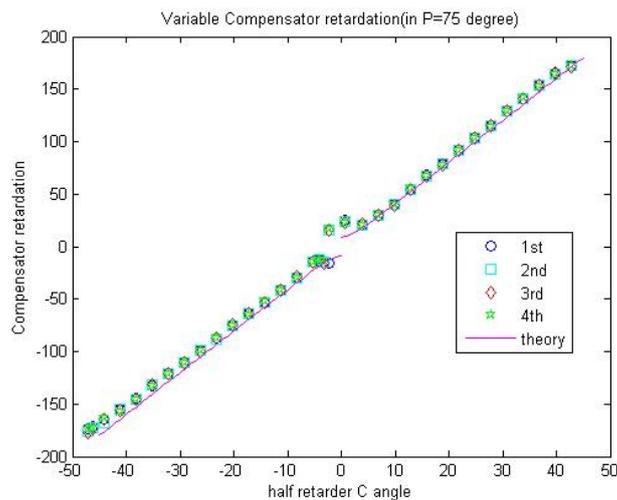


圖 4-6 延遲量的理論值與四組量測值圖

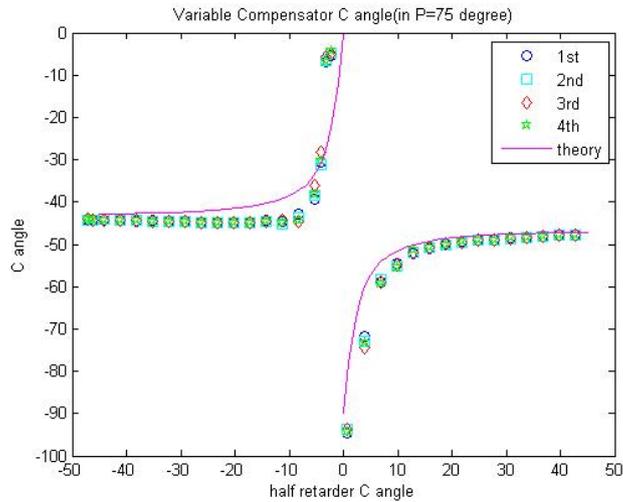


圖 4-7 方位角的理論值與四組量測值圖

standard deviation (degree)

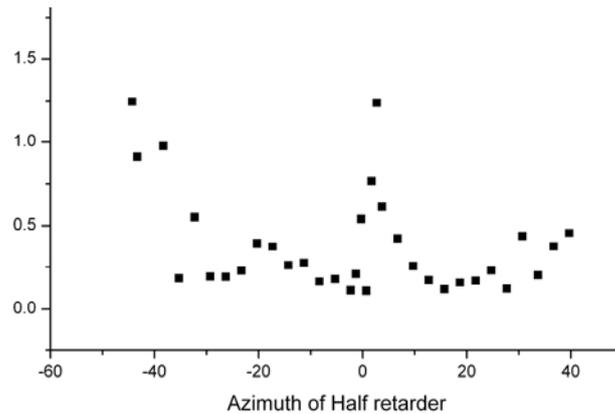


圖 4-8 延遲量的標準差與半波延遲片方位角關係圖，單位為度(Degree)
標準差均在 1.5° 內。

根據之前的理論，當 $\theta_2 < 0^\circ$ 時，此時的延遲量應為負值。因為 three intensity 量測公式是利用三角函數來做運算，而延遲量的公式有無法判斷正負號的問題，所以在使用電腦做運算後，需要自行判斷此時的延遲量為正值或負值。在實驗上可以再加一塊四分之一波長延遲片，或是直接量測經過可變延遲量延遲片的 Stokes Vectors，即可判斷出當 $\theta_2 < 0^\circ$ 時，可變延遲量延遲片的延遲量為負值；當 $\theta_2 > 0^\circ$

時，此時的延遲量為正值。

因為元件本身的不完美效應，三片延遲片的實際延遲量並非 90° 與 180° ，所以在半波延遲片方位角為零的附近區域，延遲量無法補償到 10° 以內，且方位角在這個區域並非為定值；另一個不理想的區域在半波延遲片方位角為 45° 附近，在這裡延遲量也無法達到 180° 的延遲量，這個現象與量測系統無關，故高度仰賴元件的理想性是這種可變延遲量延遲片的缺點；但若所需的是準確的四分之一波長延遲片，由圖 4-6 圖 4-7，則這種形式的可變延遲量延遲片可提供很準確的延遲量，這附近的延遲量的標準差依照我們的量測系統均在 0.25° 以下，搭配機械轉角也可以達到 0.04° 的解析度，而這個區域的方位角也很穩定。

4.2.4 增加補償片

因為這套系統可準確的提供 90° 度附近的延遲量，如果我們在這系統後再加第四片四分之一波長延遲片，第四片延遲片的延遲量不需太精準，且第四片延遲片的方位角與可變延遲量延遲片的方位角相差 90° ，則經過四片後的延遲量應為可變延遲量延遲片的延遲量 δ_1 與第四片延遲片的延遲量 δ_2 相減的值，如此可得到小的延遲量，此觀念類同 4.3 節內的液晶可變延遲量延遲片的補償片的觀念。

假設可變延遲量延遲片的延遲量為 Φ_V ，方位角為 θ_V ；第四塊延遲片的延遲量為 Φ_4 ，方位角為 θ_4 ，且 $\theta_4 = \theta_V + \frac{\pi}{2}$ 。

則兩塊延遲片相乘後的 Jones Matrix 為

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i(\Phi_4 - \Phi_V)}{2}} \cos^2 \theta_V + e^{-\frac{i(\Phi_4 - \Phi_V)}{2}} \sin^2 \theta_V & i \sin 2\theta_V \sin \frac{(\Phi_4 - \Phi_V)}{2} \\ i \sin 2\theta_V \sin \frac{(\Phi_4 - \Phi_V)}{2} & e^{-\frac{i(\Phi_4 - \Phi_V)}{2}} \cos^2 \theta_V + e^{\frac{i(\Phi_4 - \Phi_V)}{2}} \sin^2 \theta_V \end{pmatrix}$$

跟瓊斯矩陣內中延遲片的通式相比，可知此時延遲量為 $\Phi_4 - \Phi_V$ ，我們可以利用可變延遲量延遲片的線性區域（延遲量為 90° 度附近），再加

第四塊四分之一波長的延遲片，此延遲片的延遲量可以不必是很理想的 90 度延遲量，且方位角與可變延遲量延遲片的方位角差 90 度，得到可線性變化的小角度延遲量，圖 4-10 為利用此一概念得到的延遲量理論圖

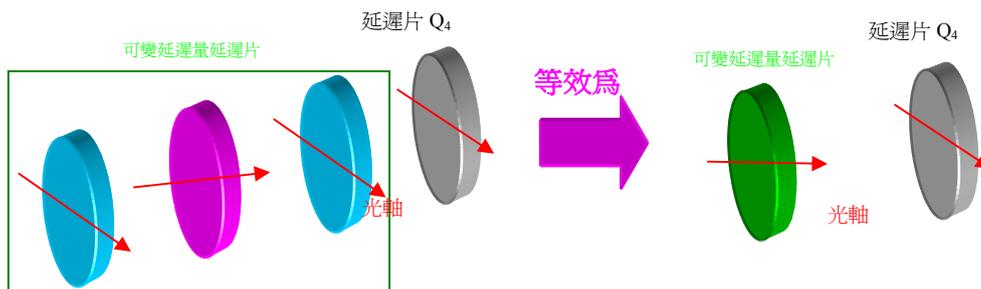


圖 4-9 增加補償片的系統示意圖

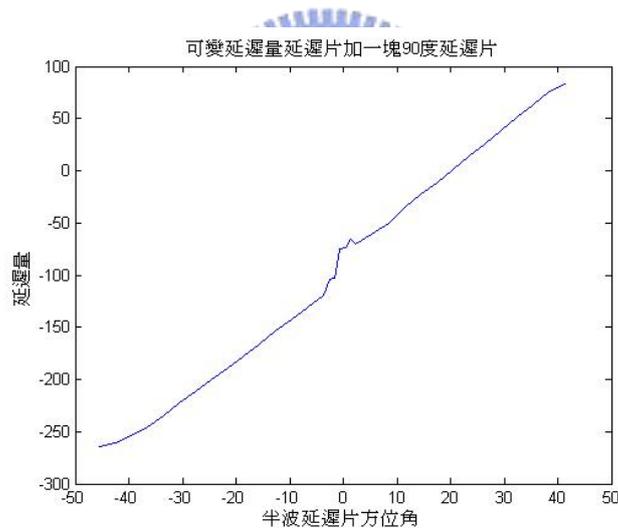


圖 4-10 增加補償片的延遲量與半波延遲片方位角關係理論圖

4.2.5 前後兩塊四分之一波長延遲片方位角未對齊的影響

藉由 Matlab (附錄三) 可以推算前後兩塊四分之一波長延遲片方位角未對齊的影響，如圖 4-11；圖 4-11 是以三個元件延遲量均理想，但兩塊四分之一波長延遲片方位角差 1° ， 0.75° ， 0.5° ， 0.25° ，與 0° 為條

件畫圖，可看到方位角即使相差一度，在 90 度附近的延遲量也不會受到影響。因為我們設定的使用範圍在 90 度延遲量附近，因此在實用上，即使前後兩塊方位角有誤差，對我們使用可變延遲量延遲片的影響是極小的。

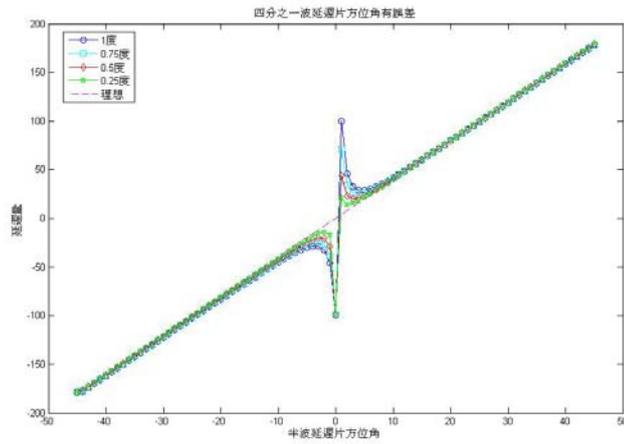


圖 4-11 元件理想，兩塊四分之一波長延遲片方位角差 1° ， 0.75° ， 0.5° ， 0.25° ，與 0° 的延遲量與半波延遲片方位角關係圖

4.3. 各式可變延遲量延遲片的規格

4.3.1 Berek Compensator

目前市面上有的是 New Focus 所銷售的，型號 5540 [9]，使用 indicator 調整光軸的傾角，公式如下：

傾角與延遲量 (R) 的關係：

$$\theta_R = \sin^{-1}(0.284\sqrt{\lambda R}) \quad (4-4)$$

Indicator 與傾角的關係式：

$$I = 50.22 - 71\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_R\right) \quad (4-5)$$

圖 4-12 為 New Focus 所生產的 Berek compensator 的轉盤刻度 (indicator) 與延遲量 R 的關係圖，利用 (4-4) (4-5) 式所畫出的，延遲量很明顯的為非線性，操作上會較其他的補償片複雜。利用改變刻度 (indicator) 來改變延遲量，之前所提過它的原理是靠傾角的改變來增加延遲量，理論上這個元件應該針對用來補償小角度的延遲量。

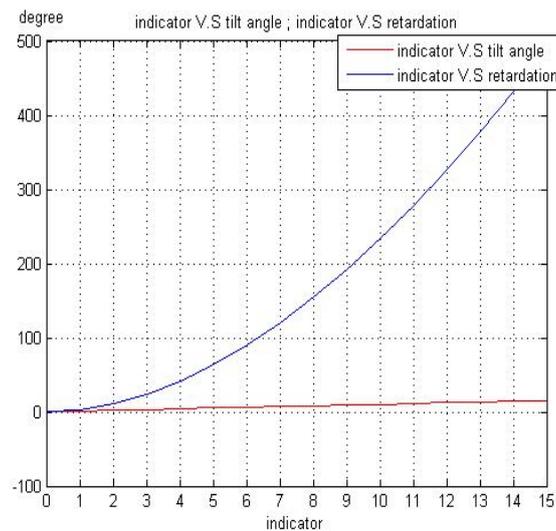


圖 4-12 New Focus 的 Berek Compensator 的 indicator 與延遲量 (藍線) 以及傾角 (紅線) 的關係圖 (針對 632.8 nm 波長的雷射)。

4.3.2 Soleil-Babinet Compensator

目前市面上有許多家公司都有生產，如 Thorlab 等已經做到將系統利用 Labview 軟體與電腦做連結；不過我選擇 Melles Griot 公司生產的產品，元件使用的材料為 Quartz，圖 4-13 為此種元件的圖形，表 4-3 為公司網站上表列的元件規格。

| | |
|------------------------|--|
| Wavelength Range | 250 - 3500 nm |
| Materials | quartz |
| Retardation Range | 0 to $4\lambda \pm 82\%$ at $\lambda = 300$ nm 0 to $2\lambda \pm 81\%$ at $\lambda = 546$ nm 0 to $1\lambda \pm 80.5\%$ at $\lambda = 1000$ nm 0 to $0.5\lambda \pm 80.5\%$ at $\lambda = 2000$ nm |
| Retardation Resolution | 0.001λ , at $\lambda = 632.8$ nm |
| Wavefront Distortion | $\leq \lambda/4$ or less at 632.8 nm |
| Clear Aperture | 10 mm diameter |
| Temperature Limits | -20°C to $+80^{\circ}\text{C}$ |

表 4-2 Melles Griot 公司生產的 Soleil-Babinet Compensator 規格

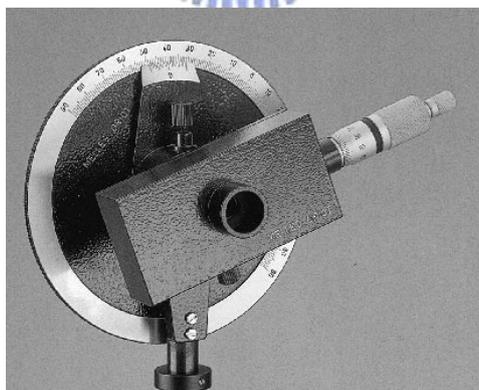


圖 4-13 Melles Griot 所生產的 Soleil-Babinet Compensator

在操作上，刻度與延遲量是線性的關係，且解析度有 0.36 度，延遲量可變化的範圍 $0 \sim 360^{\circ}$ ，應算是可用性極高的補償片

4.3.3 Liquid crystal variable compensator

這種利用液晶補償的元件有許多廠商都有生產，這裡選擇 meadowlark optics 的產品作代表。

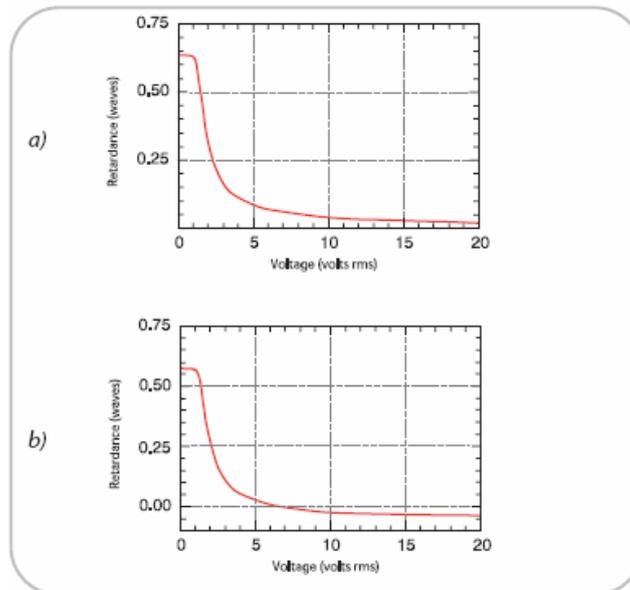


圖 4-14 液晶調變延遲量延遲片與電壓關係圖(波長 632.8 nm , 溫度 21°C) a)未加補償片 b)增加一片補償片

之前提過此種延遲片因為液晶分子在電壓增加到最大時，接近上下兩基板的液晶分子仍然不會完全垂直於基板，故此種延遲片最小的延遲量無法到接近零度的延遲量，如圖 4-14 所示（圖 4-14 為 meadowlark optics 公司網頁上所取的資料），通常需要再增加一片補償片才能補償到接近零度的延遲量；且因為需要 rms 電壓驅動，所以電壓的穩定性也會影響延遲量的穩定性，對這種結構而言，延遲量的解析度由驅動系統決定，所以這邊先略過。由圖形可知未加補償片時最小延遲量約可到 30 nm，以波長為 632.8nm 為例，此時最小延遲量以度為單位為 17.07°。

第五章 結論

這種新式的可變延遲量延遲片最大的優點即是它的高解析度，如果可以搭配機械轉角，解析度可以到 0.04° 。在結構上，所需元件為三塊延遲片，而延遲量的改變依靠半波延遲片方位角的變化，旋轉半波延遲片不會對光路有影響，對光路的校正上也很容易，半波延遲片方位角的與延遲量為線性關係，操作簡單，在尋找零點時由半波延遲片的方位角來判斷即可。對一般實驗室而言，三塊延遲片的成本也遠比一塊可變延遲量延遲片低。對一般的光學實驗室，如需要準確的 90° 的延遲量，這種可變延遲量延遲片是很好的選擇。

理論上三塊延遲片前後兩塊延遲片的延遲量需相同，因此在某些特定的區域即半波延遲片方位角在 0° 無法產生小延遲量而在 45° 無法產生 180° ，需增加一塊補償片才可使用小延遲量。而其他延遲片如 Soleil-Babinet Compensator，Berek Compensator 應不需補償片才可使用小的延遲量，而其中 Soleil-Babinet Compensator 目前有查到的規格，針對 632.8 nm 波長而言，解析度可達到 0.36° 。

參考文獻

- [1] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, "Ellipsometry and Polarized Light", North-Holland, 1987, pp.153-156
- [2] 林志佳, "石英式四分之一波長補波片旋光性之影響", 國立交通大學光電所碩士論文, 1996
- [3] Y. F. Chao, W. C. Lee, C. S. Hung and J. J. Lin, "A three-intensity technique for polarizer-sample-analyzer photometric ellipsometry and polarimetry," J.Phys.D.Appl.Phys.31, 1968-1974, 1998
- [4] E. Collett, "Polarized Light : Fundamentals and Applications," Marcel Dekker, 1993, pp.1-2, pp.21-52, pp.67-89, pp.187-221
- [5] E. Hecht, "Optics", 4th, pp.356-357
- [6] Amnon Yariv and Pochi Yeh, "Optical Waves in Crystals", John Wiley, 1984, pp.77-pp.78, pp.82-pp.89
- [6] 林柏儒, "扭轉向列型液晶盒相對橢圓延遲片之等效," 國立交通大學光電所碩士論文, 2002
- [7] 洪振盛, "利用偏光儀量測補波片之方位角及其相位延遲," 國立交通大學光電所碩士論文, 1994
- [9] New Focus, model 5540 user's manual
http://www.newfocus.com/products/documents/manuals/5540_Manual_RevA.pdf
- [10] Meadowlark Optics, catalog, Liquid Crystals
http://www.meadowlark.com/catalog/Liquid_Crystals.pdf
- [11] 劉育承, "光彈調變式橢圓偏光儀對扭轉是液晶盒的量測," 國立交通大學電子物理所碩士論文, 2005

附錄一 使用 Mueller Matrix 尋找可變延遲量延遲片合成方位角與延遲量

已知三片延遲片為兩片四分之一波長延遲片夾一片半波延遲片，且兩片四分之一波長延遲片的方位角一樣，這樣的結構所得的 Mueller Matrix 為

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & -\sin^2(2(\theta_2 - \theta_3))\sin(4\theta_3) & -\cos 2\theta_3 \sin(4(\theta_2 - \theta_3)) \\ 0 & -\sin^2(2(\theta_2 - \theta_3))\sin(4\theta_3) & a_{33} & -\sin 2\theta_3 \sin(4(\theta_2 - \theta_3)) \\ 0 & \cos 2\theta_3 \sin(4(\theta_2 - \theta_3)) & \sin 2\theta_3 \sin(4(\theta_2 - \theta_3)) & \cos(4(\theta_2 - \theta_3)) \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{22} = \frac{1}{4}(2 + \cos(4\theta_2) + \cos(4(\theta_2 - 2\theta_3)) + 2\cos(4(\theta_2 - \theta_3)) - 2\cos(4\theta_3))$$

$$a_{33} = \frac{1}{4}(2 - \cos(4\theta_2) - \cos(4(\theta_2 - 2\theta_3)) + 2\cos(4(\theta_2 - \theta_3)) + 2\cos(4\theta_3))$$

而單塊延遲片的 Mueller Matrix 為

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)\cos\Phi & -\sin^2(2(\theta_2 - \theta_3))\sin(4\theta_3) & \sin 2\theta \sin\Phi \\ 0 & -\sin^2(2(\theta_2 - \theta_3))\sin(4\theta_3) & \cos^2(2\theta)\cos\Phi + \sin^2(2\theta) & -\cos 2\theta \sin\Phi \\ 0 & -\sin 2\theta \sin\Phi & \cos 2\theta \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$$

(1)與(2)每個位置的元素個別作比較，假設(1)式為延遲片，則此元件的延遲量

$$\phi = 4(\theta_2 - \theta_3) \quad (3)$$

由(1)式與(2)式的 24，42，34，34 項可知合成的方位角僅與 θ_3 有關，可找出合成的方位角為

$$\theta = \theta_3 - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

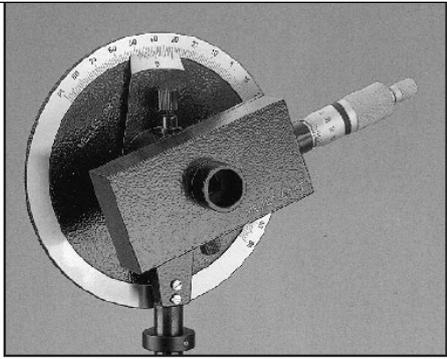
根據(3)式(4)式的條件，(2)式與(1)式會一模一樣，故此元件可視為一

片延遲片且延遲量



附錄二 Melles Griot 生產的 Soleil-Babinet Compensator 資料

- Singlets
- Doublets & Triplets
- Cylindrical Optics
- Mirrors
- Prisms & Retroreflectors
- Beamsplitters, Windows, Optical Flats
- Polarization Components**
- Filters
- High Energy Laser Optics
- Diode Laser Optics



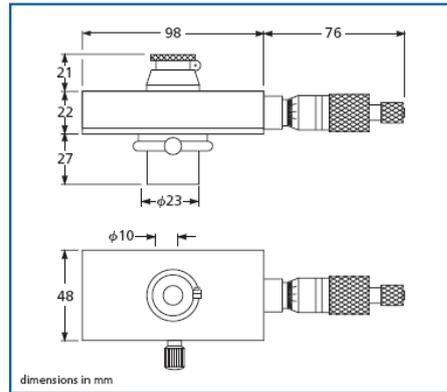
Soleil-Babinet Compensator and Divided-Circle Rotating Mount

The Soleil-Babinet compensator is a continuously adjustable retardation plate.

- Retardation is wavelength dependent, and varies from zero up to two full wavelengths (at 546.1 nm) from 250 nm to 3500 nm.
- Relative retardation is adjusted by turning a micrometer screw.
- The selected retardation value is constant over the entire working aperture of the compensator.
- The compensator comes with a certificate of the retardation vs wavelength.

The Soleil-Babinet compensator is constructed from a pair of crystalline quartz wedges stacked one on top of the other. The lower wedge, separated from the first by a small air space, is moved by a micrometer screw that varies the effective plate thickness. The retardation exhibited by the emergent beam is proportional to the total thickness of the fixed and effective plates.

Melles Griot also offers a nonmagnetic-metal divided-circle rotating mount, 04 SBM 001, which is ideal for orienting the compensator about its optic axis.



04 SBC 001 Soleil-Babinet compensator

SPECIFICATIONS: SOLEIL-BABINET COMPENSATORS

Wavelength Range: 250–3500 nm

Materials:

Schlieren-free crystalline quartz and non-magnetic metals

Retardation Range:

0 to $4\lambda \pm 2\%$ at $\lambda = 300$ nm

0 to $2\lambda \pm 1\%$ at $\lambda = 546$ nm

0 to $1\lambda \pm 0.5\%$ at $\lambda = 1000$ nm

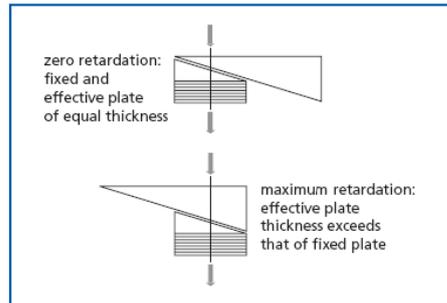
0 to $0.5\lambda \pm 0.5\%$ at $\lambda = 2000$ nm

Retardation Resolution: 0.001λ at $\lambda = 632.8$ nm

Wavefront Distortion: $\leq \lambda/4$ or less at 632.8 nm

Clear Aperture: 10-mm diameter

Temperature Limits: -20°C to $+80^\circ\text{C}$



Soleil-Babinet compensator

SPECIFICATIONS: DIVIDED-CIRCLE ROTATING MOUNTS

Diameter: 140 mm

Calibration: $\pm 90^\circ$ (from zero at top) in 1° steps

Vernier Precision: ± 3 arc minutes

Post Diameter: 12 mm

Soleil-Babinet Compensator and Divided Circle Rotating Mount

| PRODUCT NUMBER | |
|-------------------------------|------------|
| Soleil-Babinet Compensator | 04 SBC 001 |
| Divided-Circle Rotating Mount | 04 SBM 001 |

附錄三 Three intensity 量測得到的可變延遲量 延遲片的延遲量與方位角 (Matlab 計算程式)

```
% 替換每個元件的參數則可得到不同條件下，經由 Three intensity 所量測到的光學參數
% 在 f0 =
subs(S1, {a,p,y1,y2,y3,x1,x3}, {0,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0})
f60 =
subs(S1, {a,p,y1,y2,y3,x1,x3}, {pi/3,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0})
f120 =
subs(S1, {a,p,y1,y2,y3,x1,x3}, {2*pi/3,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0})
內對元件參數作替換的動作

% 偏振光的偏振態
L = [1;1;0;0];

%Polarizer
p = sym('p');
p1 = [1 cos(2*p) sin(2*p) 0];
p2 = [cos(2*p) (cos(2*p))^2 cos(2*p)*sin(2*p) 0];
p3 = [sin(2*p) cos(2*p).*sin(2*p) (sin(2*p))^2 0;0 0 0 0];
pp = [p1;p2;p3];

% 第一塊延遲片
% x 為方位角; y 為延遲量
x1 = sym('x1');
y1 = sym('y1');
r11 = [1 0 0 0];
r21 = [0 (cos(2.*x1)).^2+cos(y1).*(sin(2.*x1)).^2
sin(4.*x1).*(sin(y1/2)).^2 sin(2.*x1).*sin(y1)];
r31 = [0 sin(4.*x1).*(sin(y1/2)).^2
cos(y1).*(cos(2.*x1)).^2+(sin(2.*x1)).^2 -cos(2.*x1).*sin(y1)];
r41 = [0 -sin(2.*x1).*sin(y1) cos(2.*x1).*sin(y1) cos(y1)];
r1=[r11;r21;r31;r41];

% 第二塊延遲片
x2 = sym('x2');
y2 = sym('y2');
r12 = [1 0 0 0];
r22 = [0 (cos(2.*x2)).^2+cos(y2).*(sin(2.*x2)).^2
sin(4.*x2).*(sin(y2/2)).^2 sin(2.*x2).*sin(y2)];
r32 = [0 sin(4.*x2).*(sin(y2/2)).^2
cos(y2).*(cos(2.*x2)).^2+(sin(2.*x2)).^2 -cos(2.*x2).*sin(y2)];
r42 = [0 -sin(2.*x2).*sin(y2) cos(2.*x2).*sin(y2) cos(y2)];
r2=[r12;r22;r32;r42];

% 第三塊延遲片
x3 = sym('x3');
y3 = sym('y3');
```

```

r13 = [1 0 0 0];
r23 = [0 (cos(2.*x3)).^2+cos(y3).*(sin(2.*x3)).^2
sin(4.*x3).*(sin(y3/2)).^2 sin(2.*x3).*sin(y3)];
r33 = [0 sin(4.*x3).*(sin(y3/2)).^2
cos(y3).*(cos(2.*x3)).^2+(sin(2.*x3)).^2 -cos(2.*x3).*sin(y3)];
r43 = [0 -sin(2.*x3).*sin(y3) cos(2.*x3).*sin(y3) cos(y3)];
r3=[r13;r23;r33;r43];

%Analyzer
a = sym('a');
a1 = [1 cos(2.*a) sin(2.*a) 0];
a2 = [cos(2.*a) (cos(2.*a))^2 cos(2.*a)*sin(2.*a) 0];
a3 = [sin(2.*a) cos(2.*a)*sin(2.*a) (sin(2.*a))^2 0;0 0 0 0];
aa = [a1;a2;a3];

S = aa*r3*r2*r1*pp*L;
S1 = S(1);

% Three intensity 計算過程
% tt 為可變延遲量延遲片的方位角;rr 為可變延遲量延遲片的延遲量
% ttt 為可變延遲量延遲片的方位角(以度表示); rrr 為可變延遲量延遲片的延遲量(以度表示)

f0 =
subs(S1,{a,p,y1,y2,y3,x1,x3},{0,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0,0});
f60 =
subs(S1,{a,p,y1,y2,y3,x1,x3},{pi/3,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0});
f120 =
subs(S1,{a,p,y1,y2,y3,x1,x3},{2*pi/3,75*pi/180,87*pi/180,171*pi/180,93*pi/180,0,0});

I0 = f0+f60+f120;
Ia = (2*f0 - f60 - f120)/(f0+f60+f120);
Ib = (3^(1/2))*(f60 - f120)/(f0+f60+f120);
t1=(cos(2*p)-Ia)/(Ib-sin(2*p));
t = subs(atan((cos(2*p)-Ia)/(Ib-sin(2*p))),p,75*pi/180);
r = subs(acos((Ib-Ia*t1)/(sin(2*p)-cos(2*p)*t1)),p,75*pi/180);

for u = 1:1:91;
    xx = -pi/4:pi/180:pi/4;
    xx2 = xx(u);
    tt(u) = subs(t,x2,xx2);
    rr(u) = subs(r,x2,xx2);
end
tt;
rr;
ttt=tt*90/pi;
rrr=rr*180/pi;

```