

國立交通大學

土木工程研究所

碩士論文

桁架結構最佳化設計使用基因演算法與窄化空間技術

**Optimization of truss-structures by genetic algorithms with
narrowing space techniques**



研究生：張巍羸

指導教授：洪士林 博士

中華民國 九十六 年 八 月

桁架結構最佳化設計使用基因演算法與窄化空間技術

**Optimization of truss-structures by genetic algorithms with
narrowing space techniques**

研究生：張巍羸

Student : Wei-Ying Chang

指導教授：洪士林 博士

Advisor : Dr. Shih-Lin Hung

國立交通大學

土木工程研究所



Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Civil Engineering

July 2007

HsinChu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年八月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 土木工程 學系碩士班 張巍羸 君

所提論文：桁架結構最佳化設計使用基因演算法與窄化空間技術

合於碩士資格標準、業經本委員會評審認可。

口試委員：_____

洪士林

林昌佑

陳振華

黃炯寬

指導教授：洪士林 _____

系主任：洪士林 教授

中華民國 九十六 年 八 月 十五 日

桁架結構最佳化設計使用基因演算法與窄化空間技術

學生：張巍贏

指導教授：洪士林 博士

國立交通大學土木工程學系

摘要

基因演算法(Genetic algorithm, GA)是一種有效的全域搜尋技術，不僅可以處理離散變數(discrete variables)的最佳化問題，同時具有克服局部最小化的能力。以基因演算法處理離散斷面尺寸桁架結構最佳設計已是一個很普及的方法，然而隨著桁架結構桿件數目不斷增加，基因演算法搜尋空間亦隨之擴大，造成全域搜尋過程收斂緩慢。本論文針對桁架結構最佳化問題提出一個窄化空間技術，利用縮小搜尋空間的策略以提高基因演算法的收斂速度。首先以滿載應力設計(Fully stress design, FSD)概念建立最佳桁架拓樸，接著將滿載應力桁架結構透過一組啟發式法則放大其桿件斷面尺寸並將放大後的斷面尺寸作為搜尋空間的中心點，最後使用基因演算法於中心點鄰近空間進行搜尋。本論文所建立的窄化空間技術對最大與最小斷面尺寸限制、單載與多組載重條件、壓力桿件挫屈等問題上均有著墨。經由八個平面與空間桁架的數值案例測試，證實窄化空間技術確能輔助基因演算法讓桁架結構最佳化設計的電腦計算成本大幅減少。

關鍵字：桁架結構最佳化設計、基因演算法(GA)、窄化空間技術

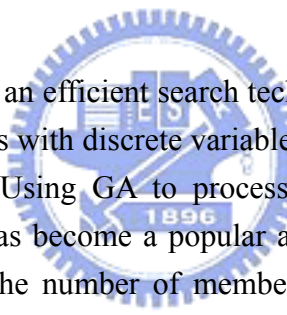
Optimization of truss-structures by genetic algorithms with narrowing space techniques

Student: Wei-Ying Chang

Advisor: Dr. Shih-Lin Hung

**Department of Civil Engineering
College Engineering
National Chaio Tung University**

Abstract



Genetic algorithm (GA) is an efficient search technique in global space. It can not only deal with optimization problems with discrete variables, but also has ability to overcome the local minimization problems. Using GA to process the optimization design of discrete cross-section size for trusses has become a popular approach. For this problems the search space of GA may expand as the number of members of truss increasing; consequently it makes the process of global searching to converge slowly. This study proposes a narrowing search space technique for optimization design of trusses; it based on the strategy that reduces search space of GA to improve the speed of convergence. First it uses concept of fully stress design (FSD) to figure out optimal topology of a truss; then it takes a set of heuristic rules to enlarge cross-section sizes of a truss structure that was designed by FSD and takes the cross-section size that was enlarged to be the center of search space; finally it searches solutions of the problem nearby the center by GA. The narrowing space techniques that were implemented by this study were applied to solve constrained optimization problems that include maximum and minimum cross-section size constraints, single load and multi-load case, and buckling stress constraints etc. Total eight planar and space truss design problems have been adapted to verify the performance of the proposed approach. The result reveals that the narrowing space techniques assist GA to reduce a lot of computational costs of optimization designs of truss structures.

Keywords: Design optimization of truss structures, Genetic algorithm, Narrowing space technique

誌謝

光陰似箭，在新竹交大兩年的求學生涯即將邁向終點，這段期間讓我成長了許多。首先要感謝我的指導教授洪士林博士，無論是在專業知識或是待人處世上都讓我獲益良多，對於學生在修課和論文的撰寫上，教授提供了許多的協助與指導並且給予學生自行發揮的空間。感激之情溢於言表，在此誠心地祝福教授在未來的日子身體健康、平安快樂。

此外，還要感謝 IICAE 研究室的大學長詹君治博士，總是不辭辛勞的遠從中壢到新竹給予我指導，在這兩年的研究所生涯，無論是在學業上或是在論文的研究及寫作上都耐心的帶領著我，啟發我的思考也拓展了我的視野。在此至上深深的謝意。

在論文口試期間，要感謝交通大學黃炯憲教授、林昌佑教授與高雄大學陳振華教授提供了很多寶貴的意見及建議，讓論文的疏漏之處得以修補及改進。在此深表感謝。

另外，要感謝研究室的成員們，感謝博士班的子軒及勇奇學長，這段求學的過程中提供了許多的建議與協助。感謝博育、濬鴻、宏安、宏宇、心農及忠錦學長，在這期間分享許多你們寶貴的經驗。感謝振剛及瀨云同學，這段期間陪我一起研究、共同奮鬥與努力。還要感謝學弟怡廷、世賢及承禹，因為你們研究室添加了許多活力。

最後要感謝我最親愛的家人，一直覺得我是很幸運的人可以生長在這麼好的家庭，在求學的過程中不斷的給我支持與鼓勵，尤其要感謝父母的養育與栽培，讓我可以順利的獲得碩士學位。僅以此論文獻給所有愛我的人及我愛的人。

目錄

	頁次
摘要	i
Abstract	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	ix
符號說明	xi
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究方法	2
1.4 論文章節及架構	3
第二章 理論與方法	5
2.1 結構最佳化設計簡介	5
2.2 桁架結構分析	7
2.3 基因演算法	11
2.4 啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計	13
第三章 基因演算法與窄化空間技術	16
3.1 整體架構	16
3-2 包含最大斷面限制的設計	17
3.3 包含多組載重條件的設計	18
3.4 包含挫屈限制的設計	20
3.5 窄化空間技術與基因演算法的整合	22

第四章	數值案例測試	24
4.1	不含挫屈限制的桁架尺寸最佳化設計	24
4.2	不含挫屈限制的桁架尺寸與拓樸最佳化設計	28
4.3	含挫屈限制的桁架尺寸最佳化設計	31
4.4	含挫屈限制的桁架尺寸與拓樸最佳化設計	34
4.5	結果討論	37
第五章	結論與建議	39
5.1	結論	39
5.2	未來展望	39
參考文獻	40
附表	42
附圖	86



表目錄

	頁次
表 4.1.1 例一，滿載應力設計收斂過程	42
表 4.1.2 例一， A_F 經結構分析後節點位移	43
表 4.1.3 例一，啟發式最佳化設計搜尋的過程	43
表 4.1.4 例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	43
表 4.1.5 例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	44
表 4.1.6 例一，最佳化結果比較表	45
表 4.1.7 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力	45
表 4.1.8 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移	46
表 4.1.9 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力	46
表 4.1.10 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移	46
表 4.1.11 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力	47
表 4.1.12 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移	47
表 4.1.13 例二，空間 25 根桿件桁架，桿件編號與節點編號之關係表	48
表 4.1.14 例二，空間 25 根桿件桁架，斷面連結情形	48
表 4.1.15 例二，空間 25 根桿件桁架，設計條件	49
表 4.1.16 例二，載重條件排序的情形	49
表 4.1.17 例二，第一次搜尋結果在第一組載重條件下各節點位移	50
表 4.1.18 例二，兩次啟發式方法搜尋的初始情形與結果	50
表 4.1.19 例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	50
表 4.1.20 例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	51
表 4.1.21 例二，最佳化結果比較表	52
表 4.1.22 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的節點位移	52
表 4.1.23 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的桿件應力	53
表 4.1.24 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的節點位移	53

表 4.1.25	例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的桿件應力	54
表 4.2.1	例一，啟發式最佳化設計搜尋的過程	55
表 4.2.2	例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	55
表 4.2.3	例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	56
表 4.2.4	例一，最佳化結果比較表	56
表 4.2.5	例一，Case 1 及Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移	57
表 4.2.6	例一，Case 1 及Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力	57
表 4.2.7	例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移	57
表 4.2.8	例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力	58
表 4.2.9	例二，各桿件群組的容許應力	58
表 4.2.10	例二，桁架最佳拓樸的桿件群組及編號	58
表 4.2.11	例二，載重條件排序的情形	59
表 4.2.12	例二，兩次啟發式方法搜尋的初始情形與結果	59
表 4.2.13	例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	59
表 4.2.14	例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	60
表 4.2.15	例二，最佳化結果比較表	60
表 4.2.16	例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的節點位移	61
表 4.2.17	例二，化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的桿件應力	61
表 4.2.18	例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的節點位移	62
表 4.2.19	例二，化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的桿件應力	62
表 4.3.1	例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程	63
表 4.3.2	例一，啟發式方法搜尋Cycle 3 的結果經結構分析後各節點位移	64
表 4.3.3	例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	65
表 4.3.4	例一，最佳化結果比較表	66
表 4.3.5	窄化搜尋空間下最佳化的結構經結構分析後各節點位移	66
表 4.3.6	窄化搜尋空間下最佳化的結構經結構分析後各桿件應力	67

表 4.3.7	例二，空間 25 桿的桁架結構所受的載重條件	67
表 4.3.8	例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 5).....	68
表 4.3.9	例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 6~Cycle 10).....	69
表 4.3.10	例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	69
表 4.3.11	例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	70
表 4.3.12	例二，最佳化結果比較表	70
表 4.3.13	例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	71
表 4.3.14	例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	71
表 4.3.15	例二，Case 2 及Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移.....	72
表 4.3.16	例二，Case 2 及Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	72
表 4.4.1	例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 6).....	73
表 4.4.2	例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 7~Cycle 10).....	74
表 4.4.3	例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	74
表 4.4.4	例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	75
表 4.4.5	例一，最佳化結果比較表	75
表 4.4.6	例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	76
表 4.4.7	例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	76
表 4.4.8	例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	76
表 4.4.9	例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	77
表 4.4.10	例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	77
表 4.4.11	例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	77
表 4.4.12	例二，桁架最佳拓樸的桿件群組及編號	78
表 4.4.13	例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 3).....	78
表 4.4.14	例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 4~Cycle 9).....	79
表 4.4.15	例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距	80
表 4.4.16	例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸	80

表 4.4.17	例二，最佳化結果比較表	81
表 4.4.18	例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	81
表 4.4.19	例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	82
表 4.4.20	例二，Case 2 及Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移	82
表 4.4.21	例二，Case 2 及Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力	83
表 4.5.1	本文各案例Case 1~Case 3 與啟發式方法最佳化結果的相對誤差	84
表 4.5.2	本文各案例基因演算法染色體二位元字串長度比較	84
表 4.5.3	本文各案例Case 1~Case 3 最佳結果與啟發式方法相差最大的斷面	85



圖目錄

	頁次
圖 2.1	區域座標系統下的桿件端點力與桿件端點位移 86
圖 2.2	區域座標系統下的桁架桿件與全域座標系統座標軸間的夾角 86
圖 2.3	全域座標系統下的桿件端點力與桿件端點位移 87
圖 2.4	基因演算法流程圖 88
圖 2.5	啟發式桁架最佳化斷面尺寸設計流程圖 89
圖 3.1	基因演算法與窄化空間技術整體架構的流程 90
圖 3.2	啟發式方法在多組載重條件下桁架最佳化設計流程圖 91
圖 3.3	考慮挫屈限制的啟發式方法流程圖 92
圖 4.1.1	例一，平面 10 根桿件桁架示意圖 93
圖 4.1.2	例一，啟發式最佳化設計收斂過程 93
圖 4.1.3	例一，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程 94
圖 4.1.4	例一，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程 94
圖 4.1.5	例一，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程 95
圖 4.1.6	例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程 95
圖 4.1.7	空間 25 根桁架示意圖 96
圖 4.1.8	例二，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程 97
圖 4.1.9	例二，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程 97
圖 4.1.10	例二，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程 98
圖 4.1.11	例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程 98
圖 4.2.1	例一，平面十根桿件桁架的最佳拓撲形式 99
圖 4.2.2	例一，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程 99
圖 4.2.3	例一，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程 100
圖 4.2.4	例一，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程 100

圖 4.2.5	例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	101
圖 4.2.6	例二，空間 25 根桿件桁架的最佳拓樸形式示意圖	101
圖 4.2.7	例二，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程	102
圖 4.2.8	例二，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程	102
圖 4.2.9	例二，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程	103
圖 4.2.10	例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	103
圖 4.3.1	例一，平面 15 根桿件桁架示意圖	104
圖 4.3.2	例一，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程	104
圖 4.3.3	例一，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程	105
圖 4.3.4	例一，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程	105
圖 4.3.5	例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	106
圖 4.3.6	例二，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程	106
圖 4.3.7	例二，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程	107
圖 4.3.8	例二，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程	107
圖 4.3.9	例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	108
圖 4.4.1	例一，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程	109
圖 4.4.2	例一，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程	109
圖 4.4.3	例一，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程	110
圖 4.4.4	例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	110
圖 4.4.5	例二，空間 25 根桿件桁架的最佳拓樸形式示意圖	111
圖 4.4.6	例二，基因演算法對Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程	111
圖 4.4.7	例二，基因演算法對Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程	112
圖 4.4.8	例二，基因演算法對Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程	112
圖 4.4.9	例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程	113

符號說明

- A : 桿件斷面積
- $A_i^{(0)}$: 進行啟發式修正時之第 i 根桿件初始斷面
- $A_i^{(1)}$: 經啟發式一次修正後第 i 根桿件斷面。
- $A_i^{(2)}$: 經啟發式二次修正後第 i 根桿件斷面。
- A_i : 第 i 根桿件斷面積
- $A_{F,i}$: 第 i 根桿件經修正後面積
- A_{\min} : 設計之最小斷面積
- A_{\max} : 設計之最大斷面積
- A_i^L : 第 i 根桿件可選擇的斷面尺寸下限
- A_i^U : 第 i 根桿件可選擇的斷面尺寸上限
- $\{d\}$: 桁架結構位移向量
- d_F : 無束制自由度方向的節點變位向量
- d_R : 受束制自由度方向的節點變位向量
- d_s^l : 窄化空間中心與其下限的間距
- d_s^u : 窄化空間中心與其上限的間距
- E : 材料的楊氏係數(Young's modulus)
- E_i : 第 i 根桿件之楊氏係數
- $\{F\}$: 全域座標系統下的桿件端點力向量
- I_i : 第 i 根桿件修正敏感度
- $I_{c,i}$: 第 i 根桿件的慣性矩
- K : 放大修正敏感度之正實數
- K_c : 有效長度係數
- K_s : 挫屈公式中的桿件斷面形狀常數
- $[k]$: 區域座標系統下的桿件勁度矩陣
- $[K]$: 全域座標系統下的桿件勁度矩陣
- l : 桿件長度
- l_i : 第 i 根桿件長度
- $P_{cr,i}$: 第 i 根桿件的挫屈臨界載重
- $\{P\}$: 桁架結構所受的外力向量
- P_F : 作用於無束制自由度方向的節點力向量
- P_R : 作用於受束制自由度方向的節點力向量
- $\{Q\}$: 區域座標系統下的桿件端點力向量
- S_i : 第 i 根桿件內力
- $[S]$: 整體結構的勁度矩陣

- $[T]$: 座標轉換矩陣
 u_i : 只有單位力施在特點上時，第 i 根桿件內力
 $\{v\}$: 全域座標系統下的桿件端點位移向量
 W_a : 啟發式方法搜尋所得的桁架的結構總重
 W_b : 依據挫屈限制放大桿件斷面尺寸後所得的桁架的結構總重
 W_i : 第 i 根桿件重量
 γ : FSD 迭代公式中的鬆弛係數
 ρ_i : 第 i 根桿件材料密度
 σ_i : 第 i 根桿件所受應力
 $\sigma_{i,allow}$: 第 i 根桿件之容許應力
 σ_{allow}^L : 桿件之容許應力下限
 σ_{allow}^U : 桿件之容許應力上限
 σ_i^{cn} : 第 i 根桿件在第 n 組載重條件作用下的桿件應力
 δ_j : 第 j 個自由度所受位移
 δ_{allow}^L : 自由度之容許位移下限
 δ_{allow}^U : 自由度之容許位移上限
 $\{\delta\}$: 區域座標系統下的桿件端點位移向量
 Δ : 以單位載重法計算出的特定點位移
 Δ_{allow} : 設計容許位移
 Δ_i : 以單位載重法計算出的特定位移部分項
 Δ_F : A_F 經結構分析後控制點位移
 Δ_{real} : 一次修正後面積 $A_i^{(2)}$ 經結構分析所得到的特定點位移
 $\Delta'(K)$: 近似容許位移之特定點位移函數

第一章 緒論

1.1 研究動機

桁架結構系統是一種多組件(Multi-component)系統，由多根線形桿件以鉸接的方式連接所組合而成。就力學的觀點而言，當外力只作用於桁架的節點上時，桁架主要利用桿件的伸長、縮短來抵抗外力，因此桿件可視為只產生張應力或壓應力而忽略彎矩及剪應力。另一方面，桁架結構具備質輕及省料的特性適合組合成大跨度的結構物，再加上具備施工快速及良好之空間穿透性，所以被廣泛的應用在橋樑、廠房及建築結構上。結構最佳化的目的是在滿足所要求的限制條件下找出最節省材料的設計方式，經過最佳化後的結構可以有效降低自重、體積和建材採購成本。雖然桁架結構在力學分析上較其他形式的結構簡單，但是考量結構最佳化設計時仍有一定的難度，因為許多的限制條件和節省材料的設計之間往往是互相抵觸的，要在兩者之間取得平衡點常常需要複雜的計算或多次的搜尋，不易以人工計算的方式完成正確的最佳化設計。

由於計算機快速的發展，利用計算機處理結構最佳化設計可縮短設計週期並提高設計精度，因此用計算機來處理桁架結構最佳化設計成為至今最普遍的方法。用計算機求解桁架最佳化問題時，設計目標是在符合所有限制條件下求得最小結構總重，因此首先依據設計變數和設計目標間的關係建立出目標函數作為搜尋的指標，並結合所有限制條件訂出懲罰機制，接著開始在有限的設計變數值中進行搜尋。搜尋時將不同的設計變數值代入目標函數計算，在符合所有限制條件下較輕的結構總重會對應出較小的目標函數值，若設計違反限制條件時懲罰機制會增加目標函數值，因此若能找出最小的目標函數值即代表找到了最佳設計的解[1]。

由過去的文獻可知，最佳化方法中的梯度法[2,3]及基因演算法[4-8]已成功的應用於桁架結構最佳化設計上。由於函數的梯度方向為函數變化率最大的方向，因此梯度法由函數的梯度方向決定搜尋方向，又因梯度為零處即為函數極值發生處，所以梯度

法在函數梯度為零時停止搜尋。梯度為零處找到的極值有可能只是局部極值而非全域極值，因此搜尋起始點的不同往往會收斂到不同的結果，很可惜目前尚無方法可以決定最佳起始點。基因演算法則是先利用亂數產生初始代案例群，再利用模擬生物演化的運算機制，讓新一代的案例群較前一代的案例群更逼近最佳解，經歷週而復始的世代更替後有機會找出非常接近最佳解的答案。由於基因演算法採取全域多點同時搜尋的方式，不同於梯度法僅由單一起始點進行搜尋，因此克服了梯度法可能會落入局部最佳解的障礙。另一方面，工程師對桁架結構設計時，桿件斷面尺寸的選擇通常是離散的，正好符合基因演算法適合處理離散搜尋空間的特性，但當設計變數增加時電腦計算量也會大增，造成計算過於耗時，雖然可以藉由電腦硬體的擴充如增加記憶體容量與採用多顆微處理器進行平行運算來節省計算時間，卻需要付出更多的成本在電腦的硬體上。

1.2 研究目的



由於基因演算法處理桁架最佳化設計時有計算耗時或電腦硬體成本昂貴之缺點，本文提出一個窄化搜尋空間的技術，利用縮小搜尋空間的策略以提高基因演算法的收斂速度。窄化搜尋空間技術使用兩個策略加速基因演算法收斂：(1)尋找桁架最佳拓樸；(2)決定搜尋空間中心點。桁架最佳拓樸可能較初始桁架拓樸少幾根桿件、節點，桿件減少代表搜尋變數減少，節點減少表示結構矩陣縮小，兩者都可降低電腦計算量。搜尋空間中心點指的是一個經簡單計算取得的設計結果，如果搜尋空間中心點距離最佳解的距離越近，基因演算法可使用越窄的搜尋範圍去完成搜尋。本論文利用滿載應力設計尋找桁架最佳拓樸，及使用啟發式方法決定搜尋空間中心點。為提高窄化搜尋空間技術的實用性，該技術針對下列設計束制條件分別有因應策略，例如：最大和最小斷面尺寸的限制、避免桿件挫屈的限制及多組載重條件的限制。

1.3 研究方法

本研究開發一套提升基因演算法搜尋效率的窄化空間技術的，研究的方法簡述如下：

1. 資料蒐集

首先蒐集和桁架最佳化設計相關的論文和研究報告，藉此了解學術界對此問題的研究情形和成果。另一方面，基於程式開發和啟發式法則建立的需求，蒐集結構矩陣、程式語言及最佳化設計的相關資料及工具書。

2. 建立啟發式法則與前處理架構

桁架結構最佳化的過程主要針對桿件斷面尺寸進行調整，但同時考慮多種限制條件時，處理的步驟及流程成為控制效能及結果的關鍵，因此需要由基礎的力學觀念為依據搭配經驗法則建立出適合計算機演算的基因演算法前處理架構。

3. 基因演算法的建構

確認基因演算法的輸入參數和細部情形，並配合前處理架構建立基因演算法的搜尋空間及初始代。

4. 撰寫程式

由於窄化空間技術的架構中包含許多複雜的計算及迭代，並且為了讓整個方法的測試更加便利，因此學生以 Java 程式語言開發一個自動化的程式讓基因演算法與窄化空間技術能確實的整合。

5. 數值案例測試及程式修正

透過數個自創及文獻所提的桁架最佳化設計問題，對撰寫好的程式進行測試，驗證程式的可行性，並修正流程及程式錯誤發生處。

6. 撰寫論文

彙整本研究之相關理論、成果及結論撰寫成論文。

1.4 論文章節及架構

本研究之論文架構分為五個章節，第一章為緒論，說明本研究的動機、目的及方法。第二章為理論與方法，簡要的介紹結構最佳化設計、桁架結構分析、基因演算法及啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計。第三章為基因演算法與窄化空間技術，說明基因演算法與窄化空間技術的整體架構、包含最大與最小斷面限制的設計、包含多組載重

條件的設計、包含挫屈限制的設計及窄化空間技術與基因演算法的整合。第四章為數值案例測試，包含了文獻上所提的案例和自創案例，用來驗證窄化空間技術的可行性，並比較最佳化過程的效率。第六章為結論與建議，本章節對基因演算法結合窄化空間技術應用於桁架結構最佳化設計的研究提出結論及未來的展望。



第二章 理論與方法

2.1 結構最佳化設計簡介

結構最佳化設計的概念，最早是由 Michell 在 1904 年時所提出的桁架理論中呈現，但在 50 年代以前最佳化設計方法僅限於古典的微分法和變分法。到了 50 年代末期數學規劃方法首次用於結構最佳化，並且在二次世界大戰期間發展成為一個新的數學分支。在數學規劃方法的基礎上發展而來的最佳化設計包含了循序線性規劃法 (SLP)、循序二次規劃法 (SQP)、整數規劃法 (IP) 等，隨著電子計算機在 60 年代之後被引入結構設計領域，解決了一些從前不能解決的較複雜問題，於是數學規劃方法逐步形成被認同的有效設計方法。然而數學規劃方法和一些傳統的數學最佳化方法，如：共軛梯度法 (Conjugate gradient method)、牛頓法 (Newton's method)、最陡降法 (Steepest descent method) 等，這些方法通常需要求得目標函數的梯度以進行最佳化設計，因此無法適用到許多問題上，特別是一些很難或無法求得梯度的問題，而且只順著梯度方向搜尋，若無適當的初始值，極易陷入局部極值。另一方面，不需求得函數梯度的最佳化設計方法也被提出，如基因演算法 (GA)、隨機搜尋法 (Random search method)、螞蟻演算法 (Ant-algorithm) 等。這些方法通常利用電腦產生隨機的設計變數組合，針對目標函數做全域搜尋以求得最佳解，但缺點是對於設計變數數量過於龐大的最佳化問題需花費相當高的計算成本。

若一個結構的設計能滿足所有的限制條件，則稱此設計為可行設計。對於一般的結構，會有多種可行設計，而結構最佳化設計則是在眾多可行設計之中以系統化的方法求出最經濟的設計。一般而言結構最佳化設計可分為結構的尺寸最佳化設計 (Size optimization design)、型態最佳化設計 (Configuration optimization design) 和拓樸最佳化設計 (Topology optimization design) 這三個部分。而這三個部分之中，尺寸最佳化設計在 1960 年時首先被 Schmit [9] 提出。所謂的尺寸最佳化設計是針對特定外形的結構，

在不改變外型的情況下對結構桿件的斷面尺寸進行最佳化，因為結構的外形保持不變，所以易於以結構矩陣或有限元素法的技巧進行結構分析。型態最佳化設計是針對連續性的結構邊界外型或框架式結構的節點位置進行調整，使結構達成最佳化設計的目的。拓樸最佳化設計則是結構在固定的節點位置之下，尋求最佳的桿件配置和最佳的桿間斷面尺寸設計。隨著電腦的快速發展，電腦輔助設計及有限元素分析軟體也迅速被開發，使得結構最佳化的領域從尺寸最佳化設計進展到型態最佳化設計和拓樸最佳化設計，亦有拓樸最佳化設計和型態最佳化設計相互結合等之相關研究[10]。

對於桁架結構最佳化設計的問題而言，會考慮的限制條件包含：桿件所受應力需在容許應力的範圍之內、節點的位移需在容許位移的範圍之內、桿間斷面尺寸需在可選擇的斷面尺寸範圍內以及受壓桿件應考慮挫屈限制。在符合所有限制條件之下，通常會將問題目標訂為求結構總重的最小值。因此對於一個含有 n 根桿件及有 m 個自由度的桁架而言，其目標函數與限制函數可表成如下的形式：

目標函數：

$$\text{minimize } f(A) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i \quad (2-1)$$

限制函數：

$$\sigma_{allow}^L \leq \sigma_i \leq \sigma_{allow}^U \quad i=1 \text{ to } n \quad (2-2)$$

$$\delta_{allow}^L \leq \delta_j \leq \delta_{allow}^U \quad j=1 \text{ to } m \quad (2-3)$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad i=1 \text{ to } n \quad (2-4)$$

$$\sigma_{cr,i} \leq \sigma_i \quad \text{when } \sigma_i < 0 \quad (2-5)$$

其中：

ρ_i ：第 i 根桿件材料密度。

A_i ：第 i 根桿件斷面積。

l_i ：第 i 根桿件長度。

σ_i ：第 i 根桿件所受應力。

δ_j : 第 j 個自由度所受位移。

σ_{allow}^L : 桿件之容許應力下限。

σ_{allow}^U : 桿件之容許應力上限。

δ_{allow}^L : 自由度之容許位移下限。

δ_{allow}^U : 自由度之容許位移上限。

A_i^L : 第 i 根桿件可選擇的斷面尺寸下限。

A_i^U : 第 i 根桿件可選擇的斷面尺寸上限。

$\sigma_{cr,i}$: 第 i 根桿件挫屈應力。

2.2 桁架結構分析



直接勁度法是目前結構分析軟體廣泛使用的方法，對於結構體中任一自由度方向的勁度是由端點包含此自由度的所有桿件提供而得，因此整體結構的勁度矩陣可依照自由度疊加各桿件的勁度矩陣而獲得[11]。當結構體的變形未超出線彈性範圍時，就結構體中的任一桿件而言，桿件端點位移(Member end displacement)和桿件端點力(Member end force)的關係可表示成如下的形式：

$$\{Q\} = [k]\{\delta\} \quad (2-6)$$

其中：

$\{Q\}$: 區域座標系統(Local coordinate system)下的桿件端點力向量。

$[k]$: 區域座標系統下的桿件勁度矩陣。

$\{\delta\}$: 區域座標系統下的桿件端點位移向量。

(2-6)式是在區域座標系統下所寫出的，對於一空間桁架的桿件端點力和桿件端點位移在區域座標系統下如圖 2.1 所示，圖中的桿件端點位移 δ_{by} 、 δ_{bz} 、 δ_{ey} 與 δ_{ez} 在桿件變形很微小的情形下不會使桿件內產生任何力量，因此在計算桿件端點力時可忽略這些桿件端點位移的影響，依據(2-6)式可將圖 2.1 中的桿件端點力和桿件端點位移表示成如下的關係：

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

(2-7)式中的勁度矩陣可依據材料力學的觀念推導得下列的形式：

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

桁架的桿件端點位移和桿件端點力在區域座標系統和全域座標系統(Global coordinate system)中往往會有不同的表示方式，因此將桿件端點位移和桿件端點力由全域座標系統轉換成區域座標系統需透過下列關係式進行轉換：

$$\{Q\} = [T]\{F\} \quad (2-9)$$

$$\{\delta\} = [T]\{v\} \quad (2-10)$$

其中：

$[T]$ ：座標轉換矩陣。

$\{F\}$ ：全域座標系統下的桿件端點力向量。

$\{v\}$ ：全域座標系統下的桿件端點位移向量。

圖 2.2 表示出區域座標系統下的空間桁架桿件與全域座標系統座標軸間的夾角，而圖 2.3 為全域座標系統下的桿件端點力與桿件端點位移，比較圖 2.2 與圖 2.3 可得座標轉換矩陣的形式如下：

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

依據(2-9)式與(2-10)式，空間桁架的桿件端點力和桿件端點位移在全域座標系統和區域座標系統的轉換可表示成如下的形式：

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

若考慮將桿件端點力由區域座標系統轉換至全域座標系統，可由下列關係式進行轉換：

$$\{F\} = [T]^T \{Q\} \quad (2-14)$$

將(2-14)式中的 $\{Q\}$ 用(2-6)式代入得：

$$\{F\} = [T]^T [k] \{\delta\} \quad (2-15)$$

將(2-15)式中的 $\{\delta\}$ 用(2-10)式代入得：

$$[F] = [T]^T [k][T]\{v\} \quad (2-16)$$

類似(2-6)式表示區域座標系統下桿件端點力和桿件端點位移間的關係，全域座標系統下桿件端點力和桿件端點位移間的關係可表示成如下形式：

$$\{F\} = [K]\{v\} \quad (2-17)$$

(2-17)式中的 $[K]$ 為全域座標系統下的桿件勁度矩陣，比較(2-16)式與(2-17)式可得：

$$[K] = [T]^T [k][T] \quad (2-18)$$

將(2-8)式與(2-11)式代入(2-18)式，可得空間桁架結構的單一桿件在全域座標系統下的桿件勁度矩陣，其形式如下：

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2\theta_x & C\theta_x C\theta_y & C\theta_x C\theta_z & -C^2\theta_x & -C\theta_x C\theta_y & -C\theta_x C\theta_z \\ C\theta_x C\theta_y & C^2\theta_y & C\theta_y C\theta_z & -C\theta_x C\theta_y & -C^2\theta_y & -C\theta_y C\theta_z \\ C\theta_x C\theta_z & C\theta_y C\theta_z & C^2\theta_z & -C\theta_x C\theta_z & -C\theta_y C\theta_z & -C^2\theta_z \\ -C^2\theta_x & -C\theta_x C\theta_y & -C\theta_x C\theta_z & C^2\theta_x & C\theta_x C\theta_y & C\theta_x C\theta_z \\ -C\theta_x C\theta_y & -C^2\theta_y & -C\theta_y C\theta_z & C\theta_x C\theta_y & C^2\theta_y & C\theta_y C\theta_z \\ -C\theta_x C\theta_z & -C\theta_y C\theta_z & -C^2\theta_z & C\theta_x C\theta_z & C\theta_y C\theta_z & C^2\theta_z \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

(2-19)式中 $C\theta_x$ 代表 $\cos\theta_x$ 、 $C\theta_y$ 代表 $\cos\theta_y$ 及 $C\theta_z$ 代表 $\cos\theta_z$ 。計算出各桿件在全去座標系統下的桿件勁度矩陣之後，按照自由度疊加勁度就可求出整體結構的勁度矩陣 $[S]$ 。此時整體結構的勁度矩陣、節點變位 $\{d\}$ 與節點力 $\{P\}$ 之間的關係可表示成如下式子：

$$\{P\} = [S]\{d\} \quad (2-20)$$

透過(2-20)式求解結構的節點變位時，由於結構中有部分的節點受到支承束制，造成部分自由度方向的節點變位為零，因此可將(2-20)式改寫成如下的形式：

$$\begin{Bmatrix} P_F \\ P_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{FF} & S_{FR} \\ S_{RF} & S_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_F \\ d_R \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

其中：

P_F ：作用於無束制自由度方向的節點力向量。

P_R ：作用於受束制自由度方向的節點力向量。

S_{FF} 、 S_{FR} 、 S_{RF} 、 S_{RR} ：整體結構勁度矩陣中的次矩陣。

d_F ：無束制自由度方向的節點變位向量。

d_R ：受束制自由度方向的節點變位向量。

由於已知 d_R 的內容為零，因此可由下列式子求得 d_F ：

$$\{d_F\} = [S_{FF}]^{-1} \{P_F\} \quad (2-22)$$

透過(2-22)式求結構的節點變位，計算機不需在記憶體中儲存整體勁度矩陣和節點力的所有內容，並且節省計算量，可以有效的提升計算效率。

2.3 基因演算法

達爾文(Charles Darwin)在經過了多年的觀察與研究之後，於 1859 年在他的著作「物種原始(On the Origin of Species by Means of Nature Section)」提出「物競天擇，適者生存，不適者淘汰。」的生物演化規則。到了 1960 年密西根大學的 John Holland 教授和他的同事爲了發展人工智慧系統參考達爾文的演化理論提出基因演算法的概念，但是直到 1975 年 John Holland 才在他的著作”Adaptation in Nature and Artificial System”提出基因演算法的基本架構，並由他的學生 David Goldberg 在 1989 年發表著作”Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”詳細說明基因演算法的理論和應用，而且發展出一套基因演算法的電腦程式 SGA(Simple Genetic Algorithms)，奠定了日後基因演算法發展的基礎。

在演化理論中，每種生物體會將它們的特徵傳遞到下一代，而傳遞生物體特徵的媒介就是各生物體細胞中的染色體，染色體是由基因組成的基因鏈，每種基因紀錄著不同的生物特徵。每個生物體因為擁有不同的特徵所以對環境的適應力也會有所不同，對環境適應力較高的個體會有較高的存活率，因此優良的基因也會有較大的機率延續到後代，同時生物體透過交配及突變的機制使得上下代之間個體的特徵不完全相同，讓適應力更強的後代有出現的機會。演化的機制會引導生物族群的特徵向適合存活於自然環境的方向發展，而基因演算法就是模擬整個演化的機制所發展出針對問題求最佳解的搜尋技術。

基因演算法是一種隨機性的搜尋法，不同於一般傳統的搜尋法需要初始設計值，基因演算法由電腦以亂數產生一群初始的設計值組，稱為族群(Population)，而設計值組會以類似染色體的資料結構(Chromosome-like Data Structure)進行編碼。並使用一些演化運算元(Operators)如交配(Crossover)、突變(Mutation)及複製(Reproduction)對大量的染色體作運算，運算後產生的子代除了能保存親代中優良的特徵之外，也可能因為交配和突變而出現比親代優良的特徵。基因演算法運作的基本流程如圖 2.4 所示，重要的運算程序包含：

1. 產生初始族群

進行基因演算法之前由使用者先行設定族群的個體數目、設計變數的數目及每個設計變數的搜尋空間，在由電腦以隨機亂數的方式產生初始族群。一般而言，所設定的個體數目愈多，會有較大的機率搜尋到好的解，但是也會讓運算的速度較慢。而設計變數的數目及搜尋空間愈大，所需搜尋的範圍會愈廣，使得找出最佳解的難度提高，亦即要獲得最佳解所需演化的世代數愈多。

2. 計算適應值

在完成一代的演化之後就需對所有新產生的個體以適應度函數計算個體的適應值，適應值愈高表示個體具有較佳的特質，將來有較大機會被複製。

3. 編碼與解碼

要運用演化運算元運算前需對設計變數值進行編碼(code)的準備動作，首先依照各設計變數的變數值範圍大小與多寡，將其映射為一定長度的二進位位元的子字串，再把所有的子字串連起來成為一個完整的字串，此字串稱為染色體。但在計算適應值之前需將其轉換回實際的設計變數值，稱之為解碼(decode)。

4. 擇優與複製

為了演化出更為優良的後代，需經過擇優的程序每次選出一對優良的染色體進行複製，讓原有族群中適應值較高的個體有較大的機會被複製，而淘汰適應值較差的個體。一般較常用的擇優方法有輪盤法(Roulette wheel selection)、比較選取法(Tournament selection)及排序選取法(Rank selection)…等。本研究擇優的方法採用輪盤法，其作法首先依照每個個體的適應值大小來分割輪盤的面積配置，適應值愈大，在輪盤上會佔有較大的面積比例，接著隨機選取輪盤上的一點，最後複製該點所對應到的個體。

5. 交配

每次經過擇優與複製後會有一對染色體成為親代，接著進行交配的程序，將兩個染色體中某些位元字串互相交換，以達到產生新子代的效果。一般交配的方式有單點交配(One-point crossover)、雙點交配(Two-point crossover)與均勻交配

(Uniform crossover)…等。本研究採用均勻交配。另一方面，是否要進行交配的程序則由「交配率」決定，而本研究的交配率均設為 0.8。

6. 突變

在基因演算法中若缺乏突變的機制，經過數代的演化之後，整個族群會很快的趨於一致性，不再有新的搜尋空間。突變時會將染色體中的某一個位元由 1 變為 0 或由 0 變為 1。但是突變發生的機率不適合設定的太高，因為太高的突變率會破壞原有的優良個體使得整個搜尋難以收斂。本研究設定每個位元的突變率為 0.003。

近年來基因演算法被大量的應用在桁架結構斷面最佳化設計上。1999 年，Crossley, Cook and Fanjoy [12]以雙層淘汰賽篩選法作為基因演算法的擇優方法，並應用於桁架結構最佳化設計上，和其他方法比較的結果可驗證基因演算法求解上的優勢。2000 年，Sama K.C. and Adeli [13]提出模糊理論(Fuzzy)和基因演算法結合的 Fuzzy GA，應用於桁架最佳化設計時可改善對限制條件的估算讓搜尋到的最佳重量更低並且提升計算的效率。2003 年，Nicholas, Kamran and Zouheir [14]將有限元素軟體(ANSYS)與基因演算法結合，並以多個桁架斷面尺寸與形狀的最佳化設計案例進行測試，結論中說明此方法富有彈性且適用於各種結構，但也提出基因演算法雖然可以成功地收斂在全域最佳解，但是卻需要花費非常多的電腦計算時間來完成。

2.4 啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計

應力限制和位移限制是進行桁架結構最佳化的過程中最常考慮的限制條件，也由於這些限制條件增加了桁架結構最佳化設計的困難度。啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計可以在不需要梯度資訊與大量計算下，快速的搜尋出最佳解的近似值[1]。由於滿載應力設計(Fully stress design, FSD)迭代後的收斂斷面可滿足應力限制，因此進行啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計時，將滿載應力設計後的收斂斷面以一組啟發式法則放大桿間斷面尺寸讓讓結構同時滿足應力限制和位移限制。桁架之滿載應力設計的斷面修正

公示如下：

$$A_{F,i} = A_i \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i,allow}} \right)^\gamma \quad (2-23)$$

其中：

$A_{F,i}$ ：第 i 根桿件經修正後面積。

A_i ：第 i 根桿件原斷面。

σ_i ：第 i 根桿件所受應力。

$\sigma_{i,allow}$ ：第 i 根桿件之容許應力。

γ ：鬆弛係數，介於 $0 \sim 1$ 。(本文採 1)。

為了使設計斷面可以同時滿足應力與位移限制要求，因此透過一正實數 α 縮放 FSD 收斂後的斷面來當作初始斷面，再經啟發式法則的修正，使得最終設計斷面可以同時滿足應力與位移限制，整個設計的流程如圖 2.5 所示，其方法說明如下：

1. 利用滿載應力法獲得滿足容許應力之面積 $A_{F,i}$ ，經由結構分析後得最大位移 Δ_F 與其相對的節點位置，並將其位置當作控制點。
2. 藉由 α 值等倍縮放 $A_{F,i}$ 當作啟發式修正之初始斷面，如下：

$$A_i^{(0)} = \alpha \times A_{F,i} \quad (2-24)$$

3. 由單位載重法計算每根桿件在 Δ_F 方向所造成的部分位移量 Δ_i ，如下：

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{S_i u_i l_i}{E_i A_i^{(0)}} = \sum_{i=1}^N \Delta_i \quad (2-25)$$

其中： S_i 為實際載重所造成的第 i 桿件內力， u_i 是作用在 Δ_F 方向上之單位力所造成的第 i 桿件內力， l_i 是第 i 根桿件之長度， E_i 為第 i 根桿件之楊氏係數。

4. 定義斷面修正敏感度 I_i ：

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{if } (\Delta_i \leq 0 \text{ or } A_{F,i} \cong 0) \\ \frac{\Delta_i}{W_i} & \text{else} \end{cases} \quad (2-26)$$

$$\text{令 } \Delta'_i(K) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i}{(1 + KI_i)^{0.5}} = \Delta_{\text{allow}} \quad (2-27)$$

計算出 K 值後代入下式完成第一次修正。

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_{\min} & \text{if } A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} \leq A_{\min} \\ A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} & \text{else} \end{cases} \quad (2-28)$$

5. 將 $A_i^{(1)}$ 經結構分析並獲得控制點真實位移量 Δ_{real} ，再經下式完成第二次修正：

$$A_i^{(2)} = \begin{cases} A_{\min} & \text{if } A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{\text{real}}}{\Delta_{\text{allow}}} \leq A_{\min} \\ A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{\text{real}}}{\Delta_{\text{allow}}} & \text{else} \end{cases} \quad (2-29)$$

其中 A_{\min} 為設計之最小斷面積。

6. 更新 α 值，其修改原則為： $A_i^{(2)}$ 經結構分析後，當結果為可行設計時，則縮小 α 值；相反的當結果為不可行設計時，則放大 α 值。其縮放範圍為 $0 \sim \Delta_F / \Delta_{\text{allow}}$ 。
7. 藉由 α 變數之修改，重複步驟 2~6 直到收斂。

由上述的步驟可知啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計將原本多變數的桁架最佳化問題轉換成對單一變數 α 的搜尋問題，針對此一特性本文採用黃金切割搜尋 (Golden section search) 方法來尋找最輕的結構總重。

第三章 基因演算法與窄化空間技術

3.1 整體架構

基因演算法雖然是一種適用於全域搜尋的最佳化方法，但是在搜尋空間較龐大時因下列幾項特性造成電腦硬體及時間成本過度的消耗：

1. 基因演算法會將設計變數編碼成二進位元字串，因此較大的搜尋空間就需要較長的字串來表示，使得演算法進行過程中對記憶體空間需求大增。
2. 搜尋空間較大時需要較大族群的個體數目才能讓搜尋維持穩定，因此造成記憶體空間需求增加，且每一次的迭代要花更多的時間來計算個體適應值。
3. 在較大的搜尋空間下要找出理想的解需要更多的迭代次數，造成計算時間的需求增加。

由以上幾點特性可以得知，當基因演算法的搜尋空間增加時，對於計算時間和記憶體空間的消耗不會只是線性的增加，因此在基因演算法搜尋前讓搜尋空間有效的縮減可以顯著的減少記憶體及時間的消耗。另一方面，透過啟發式方法進行桁架結構最佳化設計，雖然不一定能直接求得最佳解，但可以在少次的迭代及少量的計算量下，快速的搜尋出最佳解的近似值。本文提出一套窄化空間的技術，在執行基因演算法之前先以啟發式方法進行搜尋取得一組近似最佳解的設計，再將基因演算法的搜尋空間縮減至此設計結果的附近，讓基因演算法在桁架結構最佳化問題的搜尋空間有效的縮減，達到節省電腦記憶體及計算時間的目的。

對於一些實際應用上常見的限制條件如：包含最大斷面的限制、包含多組載重條件與包含挫屈的限制，由於啟發式方法並未完整的考慮這些常見的限制條件，造成求解包含這些限制條件的問題時無法有效縮減基因演算的搜尋空間，因此本研究針對這些限制條件提出新的法則及搜尋策略並和啟發式桁架斷面尺寸最佳化整合，讓窄化空間技術應用的層面更加廣泛。基因演算法與窄化空間技術整體架構的流程如圖 3.1。

3-2 包含最大斷面限制的設計

工程師在進行桁架結構設計時，為了讓建造的成本更低，對於桿件斷面的選擇通常會遷就於已被工廠大量生產的桿件斷面尺寸，因此桿件斷面在選擇時會受到最大斷面尺寸與最小斷面尺寸的限制。啟發式方法修正桁架桿件斷面時已將最小斷面尺寸的限制納入考量，但缺乏最大斷面尺寸限制的考量。為了對包含最大斷面限制的桁架結構最佳化問題窄化搜尋空間，須對啟發式法則進行部份的補充和修正，首先(2-24)式需修正成如下的形式：

$$A_i^{(0)} = \begin{cases} A_{\text{Max}} & \text{if } \alpha \times A_{F,i} \geq A_{\text{Max}} \\ \alpha \times A_{F,i} & \text{else} \end{cases} \quad (3-1)$$

其中 A_{Max} 為設計之最大斷面積。而(2-26)式、(2-28)與(2-29)式分別修改成(3-2)~(3-4)式，如下：

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{if } (\Delta_i \leq 0 \text{ or } A_{F,i} \cong 0 \text{ or } A_i^{(0)} \geq A_{\text{Max}}) \\ \frac{\Delta_i}{W_i} & \text{else} \end{cases} \quad (3-2)$$

$$A_i^{(1)} = \begin{cases} A_{\text{min}} & \text{if } A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} \leq A_{\text{min}} \\ A_{\text{Max}} & \text{if } A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} \geq A_{\text{Max}} \\ A_i^{(0)} \cdot (1 + KI_i)^{0.5} & \text{else} \end{cases} \quad (3-3)$$

$$A_i^{(2)} = \begin{cases} A_{\text{min}} & \text{if } A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{\text{real}}}{\Delta_{\text{allow}}} \leq A_{\text{min}} \\ A_{\text{Max}} & \text{if } A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{\text{real}}}{\Delta_{\text{allow}}} \geq A_{\text{Max}} \\ A_i^{(1)} \cdot \frac{\Delta_{\text{real}}}{\Delta_{\text{allow}}} & \text{else} \end{cases} \quad (3-4)$$

要特別注意的是啟發式方法修正桁架斷面時以(3-1)式與(3-3)式對桿件斷面放大，再以(3-4)式對桿件斷面微調，若桿件為最小設計斷面積時在放大的過程中通常不會超出斷面尺寸可選擇的範圍，但是當桿件為最大設計斷面積時，在放大的過程必定會超出斷面尺寸可選擇的上限，因此需由(3-1)式讓滿載應力設計的斷面在放大 α 倍後不可超出最大設計斷面積，並且由(3-2)式讓斷面超出最大設計斷面的斷面修正敏感度 I_i 為零，

如此已達最大設計斷面積的桿件在(3-3)式中不會再次被放大。

3.3 包含多組載重條件的設計

啟發式方法修正桁架斷面主要是針對單一載重條件的情況下，將產生最大位移的節點視為控制點，因此只要控制點可以滿足容許位移限制，則其餘節點亦可以同時滿足。對於多組載重條件的情況，啟發式方法只能在其中一組載重條件明顯的控制最大位移的情形下才可使用。為了對一般性多組載重條件下的桁架結構最佳化問題窄化搜尋空間，本文嘗試修改啟發式方法處理單一載重條件的流程並增加部分法則，如圖 3.2 所示其修改及新增的要點如下：

1. 滿載應力設計的結果滿足所有載重條件的應力限制

由於桁架受多組載重作用，因此滿載應力設計的過程中應同時考慮各種載重條件進行迭代，則迭代收斂後的最終斷面 A_F 才可同時滿足多組載重條件下的應力限制要求。所以在多組載重條件的情形下滿載應力設計的公式應修正如下：

$$A_{F,i} = \text{Max} \left[A_i \cdot \left(\frac{\sigma_i^{lc1}}{\sigma_{i,\text{allow}}} \right)^\gamma, A_i \cdot \left(\frac{\sigma_i^{lc2}}{\sigma_{i,\text{allow}}} \right)^\gamma, \dots, A_i \cdot \left(\frac{\sigma_i^{lcn}}{\sigma_{i,\text{allow}}} \right)^\gamma \right] \quad (3-5)$$

其中 σ_i^{lc1} 、 σ_i^{lc2} ... σ_i^{lcn} 為第 i 根桿件在第一組、第二組...第 n 組載重條件作用下的桿件應力。

2. 對載重條件重新排序

由於滿載應力設計收斂後的桁架結構在不同的載重條件下，可能會在不同的節點發生最大位移，且最大位移的大小也不同，因此在進行啟發式方法放大桿件斷面之前先將各組載重條件按照其所造成的最大位移值來排序。另外，需要注意有些結構設計對每個節點會有不同的位移限制，因此排序時先判斷位移是否超過容許位移，再比較位移的大小進行排序。

3. 依序對各組載重條件進行啟發式方法將桿件放大

啟發式方法主要是針對單一載重條件下的最大位移進行桿件斷面的放大，所以一

次只針對一組載重條件利用啟發式方法放大桿件斷面，由圖 2.5 可知每次放大桿件斷面之後需檢查結構是否滿足應力限制和位移限制，但是在考慮多組載重條件下，檢查結構的桿件是否滿足應力限制時須對所有的載重條件進行檢查，而檢查結構的節點是否滿足位移限制時則是對已執行過啟發式方法的載重條件進行檢查。例如：一桁架結構設計時需考慮三組不同的載重條件，三組載重條件也經過排序，若此時對第二組載重條件進行啟發式方法放大桿件斷面，則過程中每次檢查應力限制時在三組載重條件作用下每根桿件的應力都不超過容許應力才算滿足應力限制，而每次檢查位移限制時要考慮在第一組和第二組載重條件作用下，所有節點的位移都不超過容許位移才算滿足位移限制。

4. 搜尋所得桁架結構以剩下未經搜尋的載重條件檢查是否滿足位移限制

在多組載重條件的情形下，會出現找出前幾組載重條件作用下滿足位移限制和應力限制的桁架結構之後，亦會滿足接下來的幾組載重條件作用下的位移限制和應力限制，此時就可結束啟發式方法的搜尋不須對下一組載重條件進行啟發式方法。

5. 縮小單一組載重條件下啟發式方法搜尋所得的桿件斷面

在考慮單一載重條件下啟發式方法會對 A_F 的放大倍數 α 進行搜尋，最後找出一組符合應力限制及位移限制的桁架結構也會對應一個 α 值。但是對於多組載重條件的情形，第一組載重條件下以啟發式方法搜尋出的桁架結構，以第二組載重條件作用此結構，可能會出現不滿足位移限制的情形，因此需將第一組載重條件搜尋的結果重新以第二組載重條件進行搜尋，但是若在第一組載重條件下搜尋結果對應的 α 值大於一，直接以第二組載重條件重新搜尋過程中會出現所對應的 α 值過小很容易造成誤差，所以在第一組載重條件下搜尋結果所對應的 α 值若大於一，需先將搜尋所得的桿件斷面除 α 值再以第二組載重條件進行搜尋。

6. 重新進行結構分析

考慮前一組載重條件作用以啟發式方法搜尋所得的桁架結構，在下一組載重條件作用下的節點位移和桿件應力會和之前結構分析的結果不同，因此必須再進行結構分析確認最大位移的值和發生位置。

3.4 包含挫屈限制的設計

隨著科技快速的進步，建築材料的強度也日益提高，設計上桁架桿件愈趨細長，但是細長的桿件在受壓時容易發生挫屈的情形，因而危害整個結構物的安全，所以挫屈限制的考量在桁架結構最佳化設計中已成了重要的課題。由於啟發式方法進行桁架斷面尺寸的修正時未將挫屈限制納入考量，為了對包含挫屈限制的桁架結構最佳化問題窄化搜尋空間，本文亦嘗試修改啟發式方法的流程並增加部分法則，如圖 3.3 所示其修改及新增的要點如下：

1. 啟發式方法放大桿件斷面後加入挫屈限制的檢查

對於桁架受壓的桿件檢查是否滿足挫屈限制，可依據尤拉(Euler)挫屈公式，其形式如下：

$$P_{cr,i} = -\frac{\pi^2 EI_{c,i}}{(K_c l_i)^2} \quad (3-6)$$

其中 $P_{cr,i}$ 為第 i 根桿件的挫屈臨界載重， $I_{c,i}$ 為第 i 根桿件的慣性矩， K_c 為有效長度係數，其大小和桿件的邊界束制條件有關。在桿件斷面形狀固定的情形下，可由(3-6)式推導成如下的形式：

$$P_{cr,i} = -\frac{K_s EA_i^2}{l_i^2} \quad (3-7)$$

其中 K_s 為一常數，其大小和桿件的斷面形狀相關。

在不考慮挫屈限制的條件下，啟發式方法放大桿件斷面後只檢查是否滿足應力限制和位移限制，因此只要同時滿足應力限制和位移限制的設計即為可行設計。但是啟發式方法針對已經滿足應力限制的桁架結構放大部分的桿件斷面，若放大桿件後將挫屈限制加入檢查的項目，會出現部份會發生挫屈的桿件在啟發式方法中一直沒有被放大斷面尺寸，也使得搜尋的過程中無法找出符合可行設計的桁架結構，因此在搜尋的法則中需要設定搜尋終止條件，讓程式跳離搜尋的機制進行下一階段的程序。

2. 檢查搜尋所得桁架結構是否滿足挫屈限制

由於啟發式方法搜尋所得的桁架結構未必能滿足挫屈限制，因此必須對啟發式搜尋的結果進行挫屈限制的檢查，若檢查的結果不符合挫屈限制，則進入下一階段的程序對產生挫屈的桿件進行放大，若檢查的結果符合挫屈限制，則結束整個啟發式方法的最佳化過程。

3. 放大不滿足挫屈限制的桿件斷面尺寸

經啟發式方法搜尋所得的桁架結構已能滿足應力限制和位移限制，但是可能會有部分的桿件無法符合挫屈限制的要求，因此可以根據(3-7)式放大桿件斷面調整桿件的挫屈臨界載重，讓桿件的挫屈臨界載重恰等於目前桿件所受的載重。但是桿件斷面尺寸放大之後，由(2-8)式或(2-19)式可知桿件的勁度矩陣也會變動，造成結構內部的應力重新分配，桿件所受的載重也會有所提升。因此需要重複進行結構分析和桿件斷面尺寸放大的迭代過程，當桿件所承受的載重和桿件的挫屈臨界載重之間的差值收斂到可容許的範圍內時即可停止迭代，本文取 10^{-7} 為兩種載重間的容許差值。

4. 計算(由挫屈限制)放大桿件斷面尺寸前後結構總重的差值

假設啟發式方法搜尋所得的桁架的結構總重為 W_a ，而依據挫屈限制放大桿件斷面尺寸後所得的桁架的結構總重為 W_b ，當 $W_b - W_a$ 的值在低於容許值時即可結束整個啟發式方法的最佳化過程，本文設 $W_b - W_a$ 的值為 10^{-2} 時結束啟發式方法的最佳化過程。

5. 縮小已滿足挫屈限制的桁架的斷面尺寸並以啟發式方法重新搜尋

當 $W_b - W_a$ 的值未低於容許值時，必須縮小斷面尺寸再以啟發式方法重新搜尋。在依據挫屈限制放大桿件斷面尺寸的過程中，只針對會發生挫屈的受壓桿件進行放大，其餘桿件的斷面尺寸不會被放大，因此縮小斷面尺寸時將未被放大的桿件換成滿載應力設計收斂時的斷面尺寸，而放大過的桿件則將斷面尺寸除啟發式方法搜尋終止時所對應的 α 值。

3.5 窄化空間技術與基因演算法的整合

對於桁架結構最佳化問題啟發式方法搜尋的結果通常不是最佳，但是可以在少量的搜尋次數與結構分析次數下完成設計。本文嘗試利用啟發式方法作為基因演算法在桁架結構最佳化問題的前處理機制，透過啟發式方法搜尋的結果縮減基因演算法的搜尋空間。

然而要整合以啟發式方法為前處理機制的窄化空間技術與基因演算法仍需克服一些問題。首先基因演算僅能處理離散變數的最佳化問題，因此搜尋前需給定所有可選擇的桿件斷面尺寸，因為可選的斷面尺寸有最大值和最小值的限制，所以啟發式方法需克服包含最大斷面與最小斷面的限制，對於這方面的限制條件本文已在 3.2 節中詳細說明了啟發式方法經改良後的處理過程。另一方面，啟發式方法的搜尋是在連續的搜尋空間中進行，因此由啟發式方法所搜尋出的桁架結構的斷面尺寸 $A_i^{(2)}$ 通常無法和基因演算法搜尋時可選擇的斷面尺寸相合，造成啟發式方法搜尋的結果無法直接作為基因演算初始族群的個體。本文處理的方法分為兩種方式。第一種方式是先給定一組合理的斷面尺寸的上下間距值 d_s^u 及 d_s^l ，接著將啟發式方法搜尋所得的桿件斷面尺寸和所有可選擇的斷面尺寸比對，淘汰尺寸值在 $A_i^{(2)} + d_s^u$ 以上及 $A_i^{(2)} - d_s^l$ 以下的可選擇斷面，因此基因演算法搜尋時的可選擇斷面尺寸的範圍會大幅縮小。但是要注意原來的可選擇的斷面尺寸有最大值和最小值的限制，因此 $A_i^{(2)} + d_s^u$ 不可大於最大斷面尺寸的值且 $A_i^{(2)} - d_s^l$ 不可小於最小斷面尺寸的值。第二種方式是直接指定每個桿件可選擇的尺寸數目，縮減搜尋空間後只在 $A_i^{(2)}$ 附近的數個離散斷面尺寸進行搜尋。

基因演算法的搜尋空間在縮減後，需考慮的是染色體的長度可以隨著搜尋空間的縮減而使用較短的二位元字串構成，由於本文所使用的基因演算法依照斷面尺寸大小對應成二進位編碼，因此需先計算各桿件可選擇的斷面尺寸數目，接著產生小於或等於斷面尺寸數目的整數亂數以組成初始族群的個體，最後基因演算法再依照這些整數所對應的桿件尺寸來計算適應值或計算所對應的二進位值以產生染色體。例如：經窄

化搜尋空間後某根桿件可選擇的斷面尺寸剩下 1.8、2.0、2.2、2.4 in²，因此可選擇的斷面尺寸數目為 4，基因演算利用亂數產生初始族群時這根桿件所對應的亂數必須是 小於或等於 4 的正整數，若產生的亂數是 3 則這根桿件對應的斷面尺寸為 2.2(in²)，而其所對應的二進位值為 10。如此在接下來基因演算法的流程中才能順利的執行，而不至於有對應錯誤的情形。



第四章 數值案例測試

為了探討窄化空間技術和基因演算法整合後在不同的限制條件下的效能與結果，本文利用文獻蒐集到的六個及自行設定的兩個平面與空間桁架案例進行測試。4.1~4.4節探討的內容及案例如下：

4.1 節討論不含挫屈限制桁架尺寸最佳化設計：

例一：10 根桿件的平面桁架（單一載重條件，文獻案例）

例二：25 根桿件的空間桁架（多組載重條件，文獻案例）

4.2 節討論不含挫屈限制桁架尺寸與拓樸最佳化設計：

例一：10 根桿件的平面桁架（單一載重條件，文獻案例）

例二：25 根桿件的空間桁架（多組載重條件，文獻案例）

4.3 節討論含挫屈限制桁架尺寸最佳化設計：

例一：15 根桿件的平面桁架（單一載重條件，文獻案例）

例二：25 根桿件的空間桁架（單一載重條件，文獻案例）

4.4 節討論含挫屈限制桁架尺寸與拓樸最佳化設計

例一：15 根桿件的平面桁架（單一載重條件，自行設定的案例）

例二：25 根桿件的空間桁架（單一載重條件，自行設定的案例）

本文會在各案例完成最佳化設計後，以圖說明其收斂過程，並且將節點位移及桿件應力分別以表格方式呈現，以說明最佳斷面滿足設計的限制條件。對於每個案例測試的結果將與文獻中相同案例的結果互相比較，若探討本研究自行設定的案例時，本文會在未經窄化搜尋空間的情況下以基因演算法進行搜尋，再將其結果與結合窄化空間技術的基因演算法搜尋的結果互相比較。

4.1 不含挫屈限制的桁架尺寸最佳化設計

例一：平面 10 根桿件桁架

如圖 4.1.1 所示，為一平面 10 根桿件的懸臂桁架。先前有一些研究已對此案例做過最佳化設計，如：Rajeev and Krishnamoorthy [10]，Elperin [14]，而本文也採用此案例作為第一個測試。其材料密度為 0.1lb/in^3 ，彈性係數 $E=10000\text{ ksi}$ ，桿件容許應力為 $\pm 25\text{ ksi}$ ，各節點容許位移為 $\pm 2\text{ in}$ (水平與垂直方向)，桿件可選斷面為 64 種，分別為 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, ..., 30.0, 30.5, 31.0, 31.5 in^2 ，受力情形為節點 2 與節點 4 各受一 100 kips 向下垂直力。

首先將 10 根桿件的斷面尺寸皆設為 1 in^2 進行滿載應力設計，表 4.1.1 為滿載應力設計經 40 次迭代後收斂的結果，由於滿載應力設計最終收斂結果會出現極小值之斷面，為了使結構分析過程中避免分母為零(Divide by zero)的錯誤發生，故將極小值以 10^{-4} 代替。因此 $A_{F,i}$ 分別為 8.0000, 0.0001, 8.0000, 4.0000, 0.0001, 0.0001, 5.6569, 5.6569, 5.6569, 0.0001 in^2 。 A_F 斷面經結構分析後節點位移如表 4.1.2 所示，結構的最大位移發生在節點 2，且最大位移量 Δ_F 約為 7.2 in 往下，因此將節點 2 設為控制點進行啟發式方法搜尋。

表 4.1.3 為啟發式方法的搜尋過程，過程中僅經過了 14 次的搜尋就達到收斂條件，其收斂的過程如圖 4.1.2 所示。收斂後各桿件的斷面尺寸分別為 30.0753, 0.1006, 23.006, 15.0377, 0.1006, 0.1006, 8.7747, 21.2660, 21.2665, 0.1006 in^2 ，相對應的結構總重為 5080.4054 lb。接著窄化基因演算法的搜尋空間，以啟發式方法收斂的結果作為搜尋空間中心點，將搜尋空間縮減到中心點附近，為了探討搜尋空間縮減程度的不同對基因演算法搜尋效率和結果的影響，本文以三種不同的程度窄化搜尋空間，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.1.4 所示，表 4.1.5 為窄化搜尋空間後各桿件可選擇的斷面尺寸。

基因演算法對三種窄化後的搜尋空間進行搜尋，其收斂的情形分別如圖 4.1.3~4.1.5 所示。為了比較窄化空間技術對基因演算法的影響，本文另外以基因演算法對未經窄化的空間進行搜尋，其收斂的情形如圖 4.1.6 所示。表 4.1.6 為本文基因演算法的

最佳化設計結果和先前文獻的結果做比較，而表 4.1.7~4.1.12 為 Case 1~Case 3 最佳化設計後的結構經結構分析得到的桿件應力和節點位移，顯然在三種窄化的搜尋空間下所得的結構都能符合應力限制及位移限制。由表 4.1.6 可以發現採用窄化空間技術後基因演算法搜尋的結果明顯優於文獻的結果，其中對 Case2 和 Case 3 的窄化空間搜尋所得的結構總重均為 5070.42 lb，但是 Case 3 的搜尋空間較 Case 2 大一些，因此基因演算法在採用同樣 150 的族群大小的情況下，對 Case 2 的搜尋僅經過 61 個世代就找到收斂時的結構總重，而在 Case 3 的搜尋空間下卻需經歷 177 個世代的搜尋。在表 4.1.6 中顯示 Case 1 的搜尋空間下雖然經歷 63 個世代的搜尋就找到收斂時的結構總重 5077.88 lb，但是相較於 Case 2 及 Case 3 的搜尋空間下找到的結構總重是較差的，可能是 Case 1 將搜尋空間縮減的過小，以致於無法找到更佳的结果。就搜尋的效率而言，不論使用何種最佳化設計方法，過程中大部分的時間皆花費在結構分析計算上，因此本文以結構分析的計算次數作為比較計算成本的依據，對於計算成本的節省百分比本文計算的方式如下：

$$\text{Computational cost saving} = \frac{\text{GA結構分析總次數} - \text{相對方法的結構分析總次數}}{\text{GA結構分析總次數}} \times 100\% \quad (4-1)$$

在 Case 3 的搜尋空間下比沒有採用窄化空間技術的情形計算成本節省了 84.73%，而 Case 1 和 Case 2 的搜尋空間下結構分析的計算成本分別節省了 96.14%及 96.27%，由此可知採用窄化空間技術後基因演算法的搜尋效率明顯提升許多。

例二：空間 25 根桿件桁架

空間 25 根桿件如圖 4.1.7 所示，共有 10 個節點，桿件與節點關係可參考表 4.1.13。先前的研究如：Ringertz[15]與 Wu and Chow[16]對此結構都作過最佳化設計。其材料密度為 0.1lb/in^3 ，彈性係數為 10000 ksi，斷面為分組設計，如表 4.1.14 共分為 8 組，桿件可選斷面為 16 種，分別為 0.01，0.4，0.8，1.2，...，5.6，6.0 in^2 ，各節點位移限制為 0.35 in，容許應力為 40 ksi，受力情形如表 4.1.15。

結構經滿載應力設計收斂的結果 $A_{F,i}$ 分別為 0.0001，0.3497，0.4926，0.0001，0.0001，0.0934，0.2914，0.3641 in^2 。由於此案例需考慮兩組載重條件，依照 3.3 節所

提的設計流程，首先將各組載重條件按照其所造成的最大位移值來排序，經結構分析後第一組載重條件作用下結構的最大位移發生於 1 號節點大小為 2.046 in，第二組載重條件作用下結構的最大位移發生於 1 號節點處，大小為 2.333 in，因此載重條件重新排序後的情形如表 4.1.16。進行啟發式方法時先在第二組載重條件下搜尋，搜尋後各群組斷面的尺寸分別為 0.0100，1.3096，2.8062，0.0100，0.0100，0.8221，1.3739，3.2277 in²，結構總重為 520.0382 lb。接著再進行結構分析確認第一組載重條件作用下結構是否能滿足應力及位移的限制條件，分析後各節點位移如表 4.1.17，最大位移發生在 1 號和 2 號節點處，大小約為 0.442 in，已經超過容許位移 0.35 in，因此需以第一次搜尋的結果為初始值進行第二次的啟發式方法的搜尋。表 4.1.18 是兩次啟發式方法搜尋的初始條件與結果，第二次搜尋後各群組斷面的尺寸分別為 0.8084，0.0100，1.8542，3.1714，0.0100，0.0100，0.6923，1.7166，2.5948 in²，結構總重為 545.7115 lb。

接下來縮減基因演算法的搜尋空間，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.1.9 所示，表 4.1.20 為各窄化的搜尋空間下各桿件可選擇的斷面尺寸。圖 4.1.8~4.1.10 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.1.11 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.1.21 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計結果和先前文獻的結果比較，在 Case 1、Case 2 及 Case 3 的搜尋空間下基因演算法最後都收斂到相同的結果，各群組斷面的斷面尺寸分別為 0.01、1.6、3.2、0.01、0.01、0.8、2.0、2.4 in²，相對應的結構總重為 551.61 lb 亦明顯的優於文獻的結果。表 4.1.22~4.1.25 為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的結果分別在第一組及第二組載重條件下桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制和位移限制的條件。

基因演算法搜尋時，由於 Case 1 和 Case 2 的搜尋空間相較於原來的搜尋空間明顯大幅縮減，因此本文將其族群大小設為 50，而 Case 3 和未採用窄化空間技術的對照組採用的族群大小為 100。Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 12、39 與 25 代，相較於未採用窄化空間技術的對照組所需的世代數 1630，採用窄化空間

技術後基因演算法達到收斂結果時的世代數顯著的減少。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.63%、98.80%與 98.47%。

4.2 不含挫屈限制的桁架尺寸與拓樸最佳化設計

例一：平面 10 根桿件桁架

此例題針對 4.1 節例一的桁架結構同時考慮尺寸與拓樸最佳化設計，所有的設計條件除了桿件可選的斷面尺寸不同之外其餘的條件不變，其桿件可選的斷面尺寸為 32 種，分別為 0.1, 1.0, 2.0, ..., 30.0, 31.0 in²，先前的研究如：Hajela, Lee and Lin [17] 與 Deb and Gulati [18] 都對此結構作過尺寸與拓樸最佳化設計。

首先對結構進行滿載應力設計，其收斂結果同 4.1 節例一，接著依照滿載應力設計的結果決定桁架最佳的桿件和節點配置。決定桁架桿件配置的方法主要是將滿載應力設計後斷面尺寸接近零的桿件移除，當與某一節點相連接的所有桿件都被移除時，則移除該節點。但是為了避免結構出現不穩定的情形，仍需加入一些法則判斷結構的拓樸形式是否合理[19]，因此本文採用以下的法則：

1. 對於有外加荷載作用的節點不可刪除，在平面桁架結構的情形下與該節點連接的桿件數不可小於 2，若只有兩根桿與該節點相連時兩桿不可在同一直線上；在空間桁架結構的情形下與該節點連接的桿件數不可小於 3，若只有三根桿件與該節點連接時任兩桿不可在同一直線上。
2. 位於支承處的節點不可刪除，且與該節點相連接的桿件數必須大於等於 1。
3. 沒有外加荷載作用且不是位在支承處的節點只要沒有桿件與其相連時即可刪除。但有桿件與該節點相連時則節點不可刪除，若在平面桁架結構的情形下有桿件與該節點相連時與該節點連接的桿件數不可小於 2，當只有兩根桿與該節點相連時兩桿不可在同一直線上；在空間桁架結構的情形下與該節點連接的桿件數不可小於 3，當只有三根桿件與該節點連接時任兩桿不可在同一直線上。

依照法則最後移除了編號 2、5、6、10 的桿件及 1 號節點。爲了在接下來的程序中順利進行結構分析，因此須對桿件及節點重新編號，如圖 4.2.1 為桁架的最佳拓樸形式及其節點與桿件重新編號的情形。

表 4.2.1 為啟發式方法的搜尋過程，過程中僅經過了 15 次的搜尋就達到收斂條件，收斂後各桿件的斷面尺寸分別為 1.0755，30.0951，22.1330，15.0475，6.0838，21.2804，21.2804 in²，相對應的結構總重為 4898.4988 lb。接著窄化基因演算法的搜尋空間，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.2.2 所示，表 4.2.3 為各窄化的搜尋空間下各桿件可選擇的斷面尺寸。圖 4.2.2~4.2.4 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.2.5 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.2.4 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計結果和先前文獻的結果比較，在 Case 1、Case 2 及 Case 3 的搜尋空間下基因演算法最後收斂的桿件斷面有些微的差異，但收斂時所對應的結構總重均為 4912.85 lb，和文獻的結果中最佳的結構總重相同。其中 Case 1 和 Case 2 收斂的結果相同，各桿件的斷面尺寸分別為 30.0，24.0，16.0，6.0，21.0，20.0 in²，而 Case 3 收斂時各桿件的斷面尺寸分別為 31.0，24.0，15.0，6.0，20.0，21.0 in²。而表 4.2.5~4.2.8 為 Case 1~Case 3 最佳化設計後的結構經結構分析得到的桿件應力和節點位移，顯然在三種窄化的搜尋空間下搜尋所得的結構都能符合應力限制及位移限制。

本例題基因演算法的族群大小均設為 150，表 4.2.4 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 9、18 與 25 代，相較於未採用窄化空間技術的對照組所需的世代數 1365，採用窄化空間技術後基因演算法達到收斂結果時的世代數顯著的減少。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.34%、98.68%與 98.17%。

例二：空間 25 根桿件桁架

此例題以 4.1 節例二的桁架結構進行尺寸與拓樸最佳化設計，所用的設計條件除了桿件的容許壓應力和桿件可選的斷面尺寸不同之外其餘的條件不變，桿件的容許應

力如表 4.2.9，而桿件可選的斷面尺寸為 18 種，分別為 0.120，0.195，0.332，0.519，0.630，0.718，1.014，1.200，1.400，1.680，1.964，2.260，3.330，5.400，6.900，8.200，9.340，10.110 in²。先前對此結構作過尺寸與拓樸最佳化設計的研究如：Chai, Shi and Sun [20]與 Kaveh and Kalatjari [21]。

對結構進行滿載應力設計，其收斂結果 $A_{F,i}$ 分別為 0.0，1.2317，1.1250，0.0，0.0，0.5528，1.7098，1.3328 in²。由滿載應力設計的結果判斷結構的拓樸形式，因此移除了編號 1、10、11、12、13 的桿件，接著對桿件及桿件群組重新編號如表 4.2.10，而圖 4.2.6 為桁架最佳拓樸形式的情形。

接著按照各組載重條件造成結構的最大位移值對載重條件重新排序，經結構分析後第一組載重條件作用下結構的最大位移發生於 1 號節點大小為 0.600 in，第二組載重條件作用下結構的最大位移發生於 1 號節點處，大小為 0.644 in，因此載重條件重新排序後的情形如表 4.2.11。進行啟發式方法時先以第二組載重條件作用的情形搜尋，再以第一組載重條件進行第二次的啟發式搜尋。表 4.2.12 是兩次啟發式方法搜尋的初始條件與結果，第二次搜尋後各組斷面尺寸分別為 1.9189，2.7775，0.7441，1.8776，2.6290 in²，對應的結構總重為 549.1283 lb。

接下來縮減基因演算法的搜尋空間，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限間的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.2.13 所示，表 4.2.14 為各窄化的搜尋空間下各桿件群組可選擇的斷面尺寸。圖 4.2.7~4.2.9 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.2.10 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.2.15 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計結果和先前文獻的結果比較，在三種窄化空間的情形下均搜尋到與文獻[21]相同的結果。表

4.2.16~4.2.19 為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的结果分別在第一組及第二組載重條件下桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制和位移限制的條件。

本例題在窄化空間的情形下基因演算法的族群大小均設為 100，表 4.2.15 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 3、10 與 50 代。對於未採用窄

化空間技術的情形下將基因演算法的族群大小設為 150，在經歷了 3990 個世代後基因演算法才搜尋到 573.21 lb 的結構總重。顯然採用窄化空間技術後基因演算法達到收斂結果時的世代數大幅的減少。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.94%、99.83%與 99.16%。

4.3 含挫屈限制的桁架尺寸最佳化設計

例一：平面 15 根桿件桁架

如圖 4.3.1 所示，為一個 15 根桿件 8 個節點的平面桁架，對此結構進行尺寸最佳化設計但需考量不讓受壓桿件發生挫屈，先前有一些研究已對此案例做過最佳化設計，如：Wu and Chow [22]，Hwang and He [23]。其材料密度為 0.1lb/in^3 ，彈性係數 $E=10000\text{ ksi}$ ，桿件容許應力為 $\pm 25\text{ ksi}$ ，各節點容許位移為 $\pm 3.5\text{ in}$ (水平與垂直方向)，桿件可選的斷面尺寸為 32 種，分別為 0.111, 0.141, 0.174, 0.220, 0.270, 0.287, 0.347, 0.440, 0.539, 0.954, 1.081, 1.174, 1.333, 1.488, 1.764, 2.142, 2.697, 2.800, 3.131, 3.565, 3.813, 4.805, 5.592, 6.572, 7.192, 8.525, 9.300, 10.850, 13.330, 14.290, 17.170, 19.180 in^2 ，受力情形為節點 8 受一 10 kips 向下垂直力。桿件的挫屈臨界載重可由(3-7)式計算而得，式中的常數 K_s 在此例題中設為 12.5。

以啟發式方法對包含挫屈限制的結構最佳化問題進行搜尋，可依照 3.3 節所提的設計流程。首先以滿載應力設計求出滿足容許應力的設計，滿載應力設計收斂的結果各桿件的斷面尺寸分別為 0.8000, 0.8000, 0.0, 1.2000, 0.4000, 0.4000, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5657, 0.0, 0.0, 0.5657, 0.5657, 0.0 in^2 。接著以滿載應力設計收斂的結果為啟發式搜尋的初始斷面，按照圖 3.3 的流程，在考量挫屈限制的情形下，啟發式方法搜尋時結構的斷面尺寸及總重量的變化情形如表 4.3.1。在第一個循環(Cycle 1)的搜尋中，啟發式搜尋的結果各桿件的斷面尺寸分別為 0.9705, 0.9705, 0.1110, 1.4558, 0.4853, 0.4853, 0.1110, 0.1110, 0.1110, 0.6863, 0.1110, 0.1110, 0.6863, 0.6863, 0.1110 in^2 ，而此時所對應的 α 值與結構總重分別為 1.2856 和 98.3261 lb。將啟發式方

法搜尋所得的結果進行結構分析後發現，桿件編號 4, 5, 6, 11, 13, 15 會發生挫屈，因此將這幾根桿件的斷面尺寸放大，讓桿件所受的壓應力恰等於 Euler buckling stress。依照挫屈限制放大斷面尺寸的結果，各桿件的斷面尺寸分別為 0.9705, 0.9705, 0.1110, 1.8182, 1.1513, 1.0041, 0.1110, 0.1110, 0.1110, 0.6863, 0.9676, 0.1110, 1.6869, 0.6863, 0.7672 in²，此時所對應的結構總重為 159.5482 lb。接著計算配合挫屈條件放大桿件斷面尺寸前後的結構總重差值 159.5482-98.3261=61.2221 lb，此差值未小於圖 3.3 中所提的收斂門檻值 10⁻² lb，所以需以相同的進行下一循環。按照圖 3.3 的流程，接著調整桿件斷面尺寸作為下一循環搜尋的初始值，調整斷面尺寸的方式可參照 3.4 節與圖 3.3，調整完後各桿件的斷面尺寸分別為 0.8000, 0.8000, 0.0, 1.4142, 0.8955, 0.7810, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5657, 0.7526, 0.0, 1.3122, 0.5657, 0.5968 in²。經過三個循環的收斂後，第三次尋環在調整斷面尺寸的程序進行完成後，所得到的結構經結構分析後各節點的位移情形如表 4.3.2，已能滿足位移限制的要求，因此不再進行下一循環的搜尋，直接以第三次循環在調整斷面尺寸的程序進行前的結果當作窄化空間技術縮減收斂空間的參考標準，得到各桿件的斷面尺寸分別為 0.7154, 0.7154, 0.1110, 1.7581, 1.1672, 0.9458, 0.1110, 0.1110, 0.1110, 0.5059, 1.0268, 0.1110, 1.6348, 0.5059, 0.8542 in²。

本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，由於本案例所給的可選擇的斷面尺寸不是等間距，因此窄化搜尋空間時直接指定各斷面可選擇的斷面尺寸的數目，表 4.3.3 為各窄化的搜尋空間下各桿件群組可選擇的斷面尺寸。圖 4.3.2~4.3.4 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.3.5 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.3.4 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計結果和先前文獻的結果比較，本文以基因演算法搜尋到的結構總重均較兩篇文獻最佳化設計的结果還輕，其中 Case 1~Case 3 的情形下均搜尋到相同的結果，而且由表 4.3.4 可知在窄化空間的情形下基因演算法可以輕易搜尋到較輕的結構總重。表 4.3.5~4.3.6 分別為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的结果經結構分析後桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制、位移限制及挫屈限制的條件。

本例題在窄化空間的情形下基因演算法的族群大小均設為 150，表 4.3.4 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 1、40 與 190 代。對於未採用窄化空間技術的情形下將基因演算法的族群大小設為 150，在經歷了 4458 個世代後基因演算法才搜尋到 180.464 lb 的結構總重。顯然採用窄化空間技術後基因演算法達到收斂結果時的世代數大幅的減少。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.98%、99.10%與 95.74%。

例二：空間 25 根桿件桁架

此例題對 4.1 節例二的桁架結構進行尺寸最佳化設計，但增加了挫屈限制的考量，所用的設計條件除了載重條件和桿件可選的斷面尺寸不同之外其餘的條件不變，結構所受的載重條件如表 4.3.7，而桿件可選的斷面尺寸為 30 種，分別為 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，0.6，0.7，0.8，0.9，1.0，1.1，1.2，1.3，1.4，1.5，1.6，1.7，1.8，1.9，2.0，2.1，2.2，2.3，2.4，2.5，2.6，2.8，3.0，3.2，3.4 in²。以啟發式方法進行包含挫屈限制的最佳化設計，桿件的挫屈臨界載重可由(3-7)式計算而得，式中的常數 K_s 在此例題中設為 12.5。

結構經滿載應力設計收斂的結果 $A_{F,i}$ 分別為 0.0，0.0548，0.4634，0.0，0.2597，0.1078，0.0112，0.5516 in²。接著以 $A_{F,i}$ 為啟發式方法的初始值進行搜尋，搜尋過程如表 4.3.8~4.3.9，在第一次的循環(Cycle 1)中，啟發式方法搜尋的結果有部分的受壓桿件不能滿足挫屈限制，此時各桿件群組的斷面尺寸分別為 0.1000，0.5598，3.3874，0.1000，2.8150，1.1632，0.1285，3.3874 in²，所對應的結構總重和 α 值分別為 492.84 lb 與 7.2541。按照圖 3.3 所示的流程，對發生挫屈的桿件放大其斷面尺寸讓結構能滿足挫屈限制條件，經多次的迭代當結構滿足挫屈限制條件時各桿件群組的斷面尺寸 $A_{C,i}$ 分別為 0.1000，0.6089，3.3874，0.1000，2.8150，1.1632，0.9691，3.3874 in²，所對應的結構總重為 556.3113 lb，由於此時所對應的結構總重和啟發式方法搜尋所得的結構總重的差為 556.3113-492.84=63.4713 lb，此差值已大於 0.01 lb，需調整斷面尺寸

作為下一個循環的初始值。由圖 3.3 所提的方法調整後各桿件群組的斷面尺寸分別為 0.0, 0.0839, 0.4634, 0.0, 0.2597, 0.1078, 0.1336, 0.5516 in²。按照同樣的方式進行十個循環的搜尋後得到收斂的結果，此時各桿件群組的斷面尺寸分別為 0.1000, 0.6767, 2.7944, 0.1000, 1.5663, 1.0537, 1.0403, 3.3265 in²，所對應的結構總重為 509.7538 lb。

接著以啟發式方法收斂的結果為基準縮減基因演算法的搜尋空間，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.3.10 所示，表 4.3.11 為各窄化的搜尋空間下各桿件群組可選擇的斷面尺寸。圖 4.3.6~4.3.8 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.3.9 為基因演算法在未窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.3.12 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計結果和先前文獻的結果比較，本文以基因演算法搜尋到的結構總重均較兩篇文獻最佳化設計的結果還輕，其中 Case 1 的窄化空間下所搜尋到的結構總重較 Case 2 及 Case 3 稍微重一些，是因為 Case 1 將搜尋空間縮減的過小造成編號 5 的桿件群組的斷面尺寸無法再往下降。表 4.3.13~4.3.16 分別為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的結果經結構分析後桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制、位移限制及挫屈限制的條件。

本例題在窄化空間的情形下基因演算法的族群大小均設為 150，表 4.3.12 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 2、34 與 276 代。對於未採用窄化空間技術的情形下將基因演算法的族群大小設為 150，在經歷了 2247 個世代後基因演算法才搜尋到 517.46 lb 的結構總重。顯然採用窄化空間技術後基因演算法達到收斂結果時的世代數大幅的減少。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.91%、98.49%與 87.72%。

4.4 含挫屈限制的桁架尺寸與拓樸最佳化設計

例一：平面 10 根桿件桁架

此例題針對 4.1 節例一的桁架結構同時考慮尺寸與拓樸最佳化設計並且增加了挫屈限制的考量，所有的設計條件除了桿件可選的斷面尺寸不同外其餘條件不變，其桿件可選的斷面尺寸為 72 種，分別為 0.1, 1.0, 2.0, ..., 69.0, 70.0, 71.0 in²。本例題假設所有的桿件斷面均為圓形，各桿件的挫屈臨界載重計算的公式如下：

$$P_{cr,i} = -\frac{\pi^2 EI_{c,i}}{l_i^2} = -\frac{\pi^2 E \left(\frac{\pi r_i^4}{4} \right)}{l_i^2} = -\frac{\pi E (\pi r_i)^2}{4l_i^2} = -\frac{\pi EA_i^2}{4l_i^2} \quad (4-2)$$

其中： r_i 為桿件的半徑， A_i 為桿件的斷面尺寸。將(4-2)式與(3-7)式比較可得：

$$K_s = \frac{\pi}{4} \quad (4-3)$$

由於本例題的設計條件同 4.1 節例一，因此滿載應力設計的結果也會相同。因此桁架最佳拓樸形式也會和 4.2 節例一相同，可直接參考圖 4.2.1。接著以啟發式方法對包含挫屈限制的結構最佳化問題進行搜尋，搜尋的過程如表 4.4.1~4.4.2，經過了十個循環的搜尋後得到各桿件的斷面尺寸分別為 17.5932, 57.4477, 40.6217, 12.4402, 68.3172, 12.4402 in²，所對應的結構總重為 8908.7009 lb。接下來縮減基因演算法的搜尋空間，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.4.3 所示，表 4.4.4 為各窄化的搜尋空間下各桿件群組可選擇的斷面尺寸。圖 4.4.1~4.4.3 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.4.4 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.4.5 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計的結果比較，在窄化的搜尋空間下仍然可搜尋到較佳的結構總重，但是在窄化的搜尋空間下所搜尋到的結果 Case 3 優於 Case 2，Case 2 又優於 Case 1，會造成這樣的結果主要是編號 4 的桿件斷面隨著搜尋空間的放大而可以找到較小的斷面尺寸。表 4.4.6~4.4.11 分別為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的结果經結構分析後桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制、位移限制及挫屈限制的條件。

本例題基因演算法的族群大小均設為 150，表 4.4.5 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 15、18 與 57 代。未採用窄化空間技術的情形下基因

演算法在經歷了 2117 個世代後基因演算法才搜尋到 8974.05 lb 的結構總重。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了 99.29%、99.15%與 97.31%。

例二：空間 25 根桿件桁架

此例題與 4.3 節例二採用相同的桁架結構進行拓樸與尺寸最佳化設計，所採用的設計條件也與 4.3 節例二相同。因此本例題滿載應力設計的結果也會和 4.3 節例二相同，不同的是本例題接著以滿載應力設計的結果決定結構的最佳拓樸形式，得到如圖 4.4.5 的結構，而桿件及桿件群組重新編號的情形如表 4.4.12。接下來以啟發式方法對包含挫屈限制的結構最佳化問題進行搜尋，搜尋的過程如表 4.4.13~4.4.14，經過了九個循環的搜尋後得到各桿件群組的斷面尺寸分別為 0.6456，2.8009，1.5700，1.0627，1.0415，3.3343 in²，所對應的結構總重為 507.3746 lb。

在縮減基因演算法的搜尋空間的程序上，本例題亦將窄化後的搜尋空間分成三種情形討論，各窄化搜尋空間中心與其上下限間的間距 d_s^u 及 d_s^l 如表 4.4.15 所示，表 4.4.16 為各窄化的搜尋空間下各桿件群組可選擇的斷面尺寸。圖 4.4.6~4.4.8 為基因演算法在各窄化的搜尋空間下收斂的情形，而圖 4.4.9 為基因演算法在未經窄化搜尋空間的情形下收斂的情形。表 4.4.17 為基因演算法在各搜尋空間下的最佳化設計的結果比較，在窄化的搜尋空間下仍然可搜尋到較佳的結構總重。在 Case 1 的窄化空間下所搜尋到的結構總重較 Case 2 及 Case 3 稍微重一些，是因為 Case 1 將搜尋空間縮減的過小造成編號 3 的桿件群組的斷面尺寸無法再往下降。表 4.4.18~4.4.21 分別為 Case 1~Case 3 的搜尋空間下最佳化設計的結果經結構分析後桿件應力和節點位移的情形，顯然都能滿足載重限制、位移限制及挫屈限制的條件。

本例題基因演算法的族群大小均設為 150，表 4.4.17 中顯示 Case 1、Case 2 和 Case 3 達到收斂結果的世代數分別為 2、21 與 80 代。未採用窄化空間技術的情形下基因演算法在經歷了 1480 個世代後基因演算法才搜尋到 516.75 lb 的結構總重。就結構分析的計算量 Case 1、Case 2 和 Case 3 較未採用窄化空間技術的對照組分別節省了

99.86%、98.58%與 94.59%。

4.5 結果討論

1. 對於求解桁架結構最佳化的問題以基因演算法配合窄化空間技術，確實較未採用窄化空間技術的基因演算法更容易搜尋到較佳的設計結果。
2. 對於求解桁架結構最佳化的問題採用窄化空間技術後，確實能大幅減少基因演算法達到收斂時的世代數，因此使得過程中電腦花費在結構分析的計算量節省了 87.72%以上。
3. 比較各案例最佳化的結果可以發現，對搜尋空間縮減幅度較大的 Case 1 相較於 Case 2 或 Case 3 確實能減少基因演算法達到收斂的世代數及節省結構分析的計算量，但是也因為收斂空間縮減的太小容易錯過更好的設計結果。
4. 由於啟發式方法在連續的搜尋空間下搜尋，而基因演算法是對離散的搜尋空間進行搜尋，因此在本文測試的案例中除了 4.1 節例一與 4.4 節例一之外其餘的案例由啟發式方法搜尋得到的結構總重相較於窄化空間後 Case 1~Case 3 的結果還輕。表 4.5.1 為各案例 Case 1~Case 3 與啟發式方法最佳化結果的相對誤差，可以發現啟發式方法搜尋的結果已相當接近 Case 1~Case 3 的結果。
5. 表 4.5.2 為本文各案例基因演算法染色體二位元字串長度比較，可以發現採用窄化空間技術之後，二位元字串的長度明顯減少許多，這會讓基因演算法在執行過程中佔用更少的記憶體空間，提升執行時的效能。若最佳化問題更複雜，含有大量的設計變數時，採用窄化空間技術會讓電腦效能的差異更加明顯。
6. 由 4.1 節例二與 4.2 節例二的執行結果，證實本文所提的搜尋策略用於啟發式方法求解含多組載重條件的最佳化問題上，能讓搜尋的結果落於最佳解附近。
7. 由 4.3 節與 4.4 節各案例的執行結果，證實本文所提的搜尋策略用於啟發式方法求解含有挫屈限制的最佳化問題上，能讓搜尋的結果落於最佳解附近。
8. 表 4.5.3 為各案例 Case 1~Case 3 最佳結果與啟發式方法相差最大的斷面，除了 4.1 節例一、4.2 節例一與 4.4 節例一的差值大於 1 in^2 之外，其餘的案例的差值都小

於 1 in^2 。雖然給定的可選擇斷面尺寸的間距會影響差值大小，但是表 4.5.3 的結果提供了窄化空間中心與其上下限的間距 d_s^u 及 d_s^l 設定上的參考，對於大部分的案例建議將 d_s^u 及 d_s^l 的值設定在 2 以下可讓基因演算法在窄化空間下搜尋出最佳設計。



第五章 結論與建議

5.1 結論

本研究針對桁架結構最佳化問題提出一個窄化空間技術以提高基因演算法的收斂速度。數個實測案例已證實，窄化空間技術確能輔助基因演算法讓桁架結構最佳化設計的電腦計算成本大幅減少。以下為本論文研究之結論。

1. 窄化空間技術先利用啟發式方法尋找一個近似最佳解，接著在近似解的周圍進行搜尋，由於近似解與最佳解的距離頗近，因此基因演算法能在非常窄的搜空間內找到最佳解，同時達到降低計算成本的目的。
2. 窄化空間技術已考慮斷面尺寸限制問題、多組載重條件同時考慮問題、壓力桿件挫屈等問題，以滿足大多數桁架結構設計問題的需要，實用性頗高。
3. 由於啟發式方法將多變數的桁架設計問題轉換為單變數問題處理，因此其計算量不會隨設計變數增加而遞增。會影響啟發式方法計算量的因素為挫屈限制及載重條件的數目，不過和基因算法的計算量相比仍然相當小。
4. 如果不考慮離散斷面且不要求最佳解，啟發式搜尋已足以提供一個相當好的設計，作為桁架斷面尺寸最佳化及桁架拓撲最佳化問題的近似解。

5.2 未來展望

1. 本研究的整個設計流程以 Java 撰寫，程式執行前須將設計條件以純文字檔的格式儲存，程式執行完成後須手動開啟另一個純文字檔讀取執行結果。未來希望可以開發圖形使用者介面，讓程式更具親和力，並可直接將執行結果以圖形直接呈現。
2. 本文以啟發式方法搜尋的結果作為縮減搜尋空間的參考中心，並成功的與基因演算法結合，未來希望可以更進一步探討，將窄化空間技術與其他的最佳化方法結合。

參考文獻

- [1] 鄭博育,「啟發式桁架斷面尺寸最佳化設計」,國立交通大學,碩士論文,民國94年。
- [2] John K.V., Ramakrishnan, C.V. and Sharma, K.G., “Minimum weight design of truss using improved move limit method of sequential linear programming”, Computers and Structures, 27(5), pp.583-591, 1987.
- [3] Saka M.P., “Optimum design of pin-jointed steel structures with practical applications”, Journal of Structural Engineering, 116(10), pp.2599-2620, 1990.
- [4] Adeli H. and Cheng N.T., “Integrated genetic algorithm for optimization of space truss”, Journal of Aerospace Engineering, 6(4), pp.315-328, 1993.
- [5] Adeli H. and Cheng N.T., “Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization”, Journal of Aerospace Engineering, 7(1), pp.104-118, 1994.
- [6] Adeli H and Kumar S., “Distributed genetic algorithm for structural optimization”, Journal of Aerospace Engineering, 8(3), pp.159-163, 1995.
- [7] Koumousis V.K. and Georgiou P.G., “Genetic algorithms in discrete optimization of steel truss roofs”, Journal of Computing in Civil Engineering, 8(3), pp.309-325, 1994.
- [8] Lee K.S. and Geem Z.W., “A new structural optimization method based on the harmony search algorithm”, Computers and Structures, 82, pp.781-798, 2004.
- [9] Schmit, L. A., “Structural design by systematic synthesis”, Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York; pp. 105-122. , 1960.
- [10] S. Rajeev and C.S. Krishnamoorthy, “Genetic algorithms-based methodologies for design optimization of trusses”, Journal of Structural Engineering, 123(3), pp.350-358, 1997.
- [11] Aslam Kassimali, Matrix analysis of structures, Bill Stenquist, California, 1999.
- [12] Crossley A.W., Cook A.M., Fanjoy D.W., “Using the two-branch tournament genetic algorithms for multiobjective design”, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 37(2), pp.261-267, 1999.
- [13] Sama K.C. and Adeli H., “Fuzzy genetic algorithm for optimization of steel structures”, Journal of Structural Engineering, 126(5), pp.596-604, 2000.
- [14] Elperin T, “Monte Carlo structural optimization in discrete variable with annealing algorithm”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, pp.815-821, 1988.
- [15] U.T. Ringertz, “On methods for discrete structural optimization”, Engineering Optimization, 13, pp.47-64, 1988.
- [16] S.J. Wu and P.T. Chow, “Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of

- trusses”, Computers and Structures, 56(6), pp.979-991, 1995.
- [17] P. Hajela, E. Lee and C.Y. Lin, “Genetic algorithm in structural topology optimization”, Topology Design of Structures, pp.117-134, Sesimbra, Portugal, June 1992.
- [18] K. Deb and S. Gulati, “Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms”, Finite Elements in Analysis and Design, 37, pp.447-465, 2001.
- [19] 朱朝艷等, 「複合形遺傳算法在離散變量桁架結構拓樸優化設計中的應用」, 四川大學學報(工程科學版), 第三十六卷, 第五期, 6-10 頁, 2004 年 9 月。
- [20] Chai S, Shi LS and Sun HC, “An application of relative difference quotient algorithm to topology optimization of truss structures with discrete variables”, Structural Optimization, 18, pp.48-55, 1999.
- [21] A. Kaveh and V. Kalatjari, “Topology optimization of trusses using genetic algorithm, force method and graph theory”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58, pp.771-791, 2003.
- [22] S.J. Wu and P.T. Chow, “Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms”, Computers and Structures, 55(4), pp.695-702, 1995.
- [23] S.F. Hwang and R.S. He, “Engineering optimization using a real-parameter genetic-algorithm-based hybrid method”, Engineering Optimization, 38(7), pp.833-852, 2005.



附表

表 4.1.1 例一，滿載應力設計收斂過程

No.	A ₁ (in ²)	A ₂ (in ²)	A ₃ (in ²)	A ₄ (in ²)	A ₅ (in ²)	A ₆ (in ²)	A ₇ (in ²)	A ₈ (in ²)	A ₉ (in ²)	A ₁₀ (in ²)
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	7.4443	1.2141	8.5557	2.7859	0.6584	1.2141	6.4428	4.8709	3.9399	1.7170
2	7.2423	0.9266	8.7577	3.0734	0.1690	0.9266	6.7284	4.5853	4.3464	1.3105
3	7.2560	0.7410	8.7440	3.2590	0.0030	0.7410	6.7091	4.6047	4.6089	1.0480
4	7.3895	0.6100	8.6105	3.3900	0.0005	0.6100	6.5202	4.7935	4.7942	0.8627
5	7.5046	0.4953	8.4954	3.5047	0.0001	0.4953	6.3575	4.9562	4.9563	0.7005
6	7.6027	0.3973	8.3973	3.6027	0.0000	0.3973	6.2187	5.0950	5.0950	0.5619
7	7.6849	0.3151	8.3151	3.6849	0.0000	0.3151	6.1024	5.2113	5.2113	0.4456
8	7.7527	0.2473	8.2473	3.7527	0.0000	0.2473	6.0067	5.3071	5.3071	0.3498
9	7.8075	0.1925	8.1925	3.8075	0.0000	0.1925	5.9291	5.3847	5.3847	0.2722
10	7.8513	0.1487	8.1487	3.8513	0.0000	0.1487	5.8671	5.4466	5.4466	0.2102
11	7.8859	0.1141	8.1141	3.8859	0.0000	0.1141	5.8182	5.4955	5.4955	0.1614
12	7.9129	0.0871	8.0871	3.9129	0.0000	0.0871	5.7801	5.5336	5.5336	0.1232
13	7.9337	0.0663	8.0663	3.9337	0.0000	0.0663	5.7506	5.5631	5.5631	0.0937
14	7.9498	0.0502	8.0502	3.9498	0.0000	0.0502	5.7279	5.5858	5.5858	0.0710
15	7.9620	0.0380	8.0380	3.9620	0.0000	0.0380	5.7106	5.6031	5.6031	0.0537
16	7.9713	0.0287	8.0287	3.9713	0.0000	0.0287	5.6974	5.6163	5.6163	0.0405
17	7.9784	0.0216	8.0216	3.9784	0.0000	0.0216	5.6874	5.6263	5.6263	0.0306
18	7.9837	0.0163	8.0163	3.9837	0.0000	0.0163	5.6799	5.6339	5.6339	0.0230
19	7.9878	0.0122	8.0122	3.9878	0.0000	0.0122	5.6742	5.6396	5.6396	0.0173
20	7.9908	0.0092	8.0092	3.9908	0.0000	0.0092	5.6699	5.6439	5.6439	0.0130
21	7.9931	0.0069	8.0069	3.9931	0.0000	0.0069	5.6666	5.6471	5.6471	0.0098
22	7.9948	0.0052	8.0052	3.9948	0.0000	0.0052	5.6642	5.6495	5.6495	0.0073
23	7.9961	0.0039	8.0039	3.9961	0.0000	0.0039	5.6624	5.6514	5.6514	0.0055
24	7.9971	0.0029	8.0029	3.9971	0.0000	0.0029	5.6610	5.6527	5.6527	0.0041
25	7.9978	0.0022	8.0022	3.9978	0.0000	0.0022	5.6600	5.6538	5.6538	0.0031
26	7.9984	0.0016	8.0016	3.9984	0.0000	0.0016	5.6592	5.6545	5.6545	0.0023
27	7.9988	0.0012	8.0012	3.9988	0.0000	0.0012	5.6586	5.6551	5.6551	0.0017
28	7.9991	0.0009	8.0009	3.9991	0.0000	0.0009	5.6582	5.6556	5.6556	0.0013
29	7.9993	0.0007	8.0007	3.9993	0.0000	0.0007	5.6578	5.6559	5.6559	0.0010
30	7.9995	0.0005	8.0005	3.9995	0.0000	0.0005	5.6576	5.6561	5.6561	0.0007
31	7.9996	0.0004	8.0004	3.9996	0.0000	0.0004	5.6574	5.6563	5.6563	0.0006
32	7.9997	0.0003	8.0003	3.9997	0.0000	0.0003	5.6573	5.6564	5.6564	0.0004
33	7.9998	0.0002	8.0002	3.9998	0.0000	0.0002	5.6572	5.6565	5.6565	0.0003
34	7.9998	0.0002	8.0002	3.9998	0.0000	0.0002	5.6571	5.6566	5.6566	0.0002
35	7.9999	0.0001	8.0001	3.9999	0.0000	0.0001	5.6570	5.6567	5.6567	0.0002
36	7.9999	0.0001	8.0001	3.9999	0.0000	0.0001	5.6570	5.6567	5.6567	0.0001
37	7.9999	0.0001	8.0001	3.9999	0.0000	0.0001	5.6570	5.6568	5.6568	0.0001
38	8.0000	0.0001	8.0001	4.0000	0.0000	0.0001	5.6569	5.6568	5.6568	0.0001
39	8.0000	0.0000	8.0000	4.0000	0.0000	0.0000	5.6569	5.6568	5.6568	0.0001
40	8.0000	0.0000	8.0000	4.0000	0.0000	0.0000	5.6569	5.6568	5.6568	0.0000

表 4.1.2 例一， A_F 經結構分析後節點位移

Joint displacement(in)		
Joint No.	X Translation	Y Translation
1	1.45917E+0	-6.64078E+00
2	-1.79999E+0	-7.19996E+00
3	8.99993E-01	-2.69998E+00
4	-9.00007E-01	-2.70002E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.3 例一，啟發式最佳化設計搜尋的過程

No.	α	A_1 (in ²)	A_2 (in ²)	A_3 (in ²)	A_4 (in ²)	A_5 (in ²)	A_6 (in ²)	A_7 (in ²)	A_8 (in ²)	A_9 (in ²)	A_{10} (in ²)	Weight (lb)
1	2.225	29.607	0.100	24.438	14.804	0.100	0.100	12.606	20.935	20.935	0.100	5267.928
2	2.225	29.607	0.100	24.438	14.804	0.100	0.100	12.606	20.935	20.935	0.100	5267.928
3	1.900	29.828	0.100	23.689	14.914	0.100	0.100	10.785	21.091	21.091	0.100	5176.126
4	1.700	29.966	0.100	23.287	14.983	0.100	0.100	9.659	21.188	21.189	0.100	5121.709
5	1.576	30.052	0.101	23.063	15.026	0.101	0.101	8.963	21.249	21.250	0.101	5089.084
6	1.576	30.052	0.101	23.063	15.026	0.101	0.101	8.963	21.249	21.250	0.101	5089.084
7	1.576	30.052	0.101	23.063	15.026	0.101	0.101	8.963	21.249	21.250	0.101	5089.084
8	1.546	30.072	0.101	23.013	15.036	0.101	0.101	8.799	21.264	21.264	0.101	5081.507
9	1.546	30.072	0.101	23.013	15.036	0.101	0.101	8.799	21.264	21.264	0.101	5081.507
10	1.546	30.072	0.101	23.013	15.036	0.101	0.101	8.799	21.264	21.264	0.101	5081.507
11	1.546	30.072	0.101	23.013	15.036	0.101	0.101	8.799	21.264	21.264	0.101	5081.507
12	1.546	30.072	0.101	23.013	15.036	0.101	0.101	8.799	21.264	21.264	0.101	5081.507
13	1.544	30.074	0.101	23.009	15.037	0.101	0.101	8.784	21.265	21.266	0.101	5080.826
14	1.542	30.075	0.101	23.006	15.037	0.101	0.101	8.775	21.266	21.267	0.101	5080.405

表 4.1.4 例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	1.0	1.8	3.0
d_s^l (in ²)	1.0	1.8	3.0

表 4.1.5 例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Member No.	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	4	29.5, 30.0, 30.5, 31.0
	2	3	0.1, 0.5, 1.0
	3	4	22.5, 23.0, 23.5, 24.0
	4	4	14.5, 15.0, 15.5, 16.0
	5	3	0.1, 0.5, 1.0
	6	3	0.1, 0.5, 1.0
	7	4	8.0, 8.5, 9.0, 9.5
	8	4	20.5, 21.0, 21.5, 22.0
	9	4	20.5, 21.0, 21.5, 22.0
	10	3	0.1, 0.5, 1.0
2	1	7	28.5, 29.0, 29.5, 30.0, 30.5, 31.0, 31.5
	2	4	0.1, 0.5, 1.0, 1.5
	3	7	21.5, 22.0, 22.5, 23.0, 23.5, 24.0, 24.5
	4	7	13.5, 14.0, 14.5, 15.0, 15.5, 16.0, 16.5
	5	4	0.1, 0.5, 1.0, 1.5
	6	4	0.1, 0.5, 1.0, 1.5
	7	7	7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5, 10.0
	8	7	19.5, 20.0, 20.5, 21.0, 21.5, 22.0, 22.5
	9	7	19.5, 20.0, 20.5, 21.0, 21.5, 22.0, 22.5
	10	4	0.1, 0.5, 1.0, 1.5
3	1	9	27.5, 28.0, 28.5, 29.0, 29.5, 30.0, 30.5, 31.0, 31.5
	2	7	0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
	3	12	20.5, 21.0, 21.5, 22.0, 22.5, 23.0, 23.5, 24.0, 24.5, 25.0, 25.5, 26.0
	4	12	12.5, 13.0, 13.5, 14.0, 14.5, 15.0, 15.5, 16.0, 16.5, 17.0, 17.5, 18.0
	5	7	0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
	6	7	0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
	7	12	6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5, 10.0, 10.5, 11.0, 11.5
	8	12	18.5, 19.0, 19.5, 20.0, 20.5, 21.0, 21.5, 22.0, 22.5, 23.0, 23.5, 24.0
	9	12	18.5, 19.0, 19.5, 20.0, 20.5, 21.0, 21.5, 22.0, 22.5, 23.0, 23.5, 24.0
	10	7	0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

表 4.1.6 例一，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Elperin[14]	Rajeev and Krishnamoorthy[10]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	31.0	32.0	27.0	30.5	30.0	31.0
A2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
A3	20.0	23.5	23.5	24.0	23.5	23.0
A4	14.0	16.0	16.0	15.0	16.5	15.5
A5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
A6	0.1	0.1	0.5	0.5	0.5	1.0
A7	8.0	8.5	7.5	8.0	7.5	7.5
A8	22.5	20.0	21.0	20.5	21.0	21.0
A9	15.0	20.5	24.0	21.5	21.0	21.0
A10	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Weight (lb)	5792.4	5080.20	5097.15	5077.88	5070.42	5070.42
Population	—	—	150	150	150	150
Generation	—	—	1631	63	61	177
Computational cost Saving	—	—	—	96.14%	96.26%	89.15%



表 4.1.7 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力

Allowable Stress= ± 25 ksi	
Member Axial Stress(ksi)	
Member No.	Axial Stress
1	6.63
2	-0.55
3	-8.24
4	-6.67
5	22.05
6	-0.11
7	17.28
8	-7.05
9	6.58
10	0.78

表 4.1.8 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint displacement(in)		
Joint No.	X Translation	Y Translation
1	2.18881E-01	-1.99997E+00
2	-5.36741E-01	-1.99600E+00
3	2.38734E-01	-7.46662E-01
4	-2.96609E-01	-1.54063E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.9 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力

Allowable Stress= ± 25 ksi	
Member Axial Stress (ksi)	
Member No.	Axial Stress
1	6.75
2	-1.25
3	-8.40
4	-6.07
5	24.57
6	-0.25
7	18.37
8	-6.91
9	6.74
10	1.76

表 4.1.10 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint displacement(in)		
Joint No.	X Translation	Y Translation
1	1.98265E-01	-1.99891E+00
2	-5.20882E-01	-1.98995E+00
3	2.43098E-01	-7.40489E-01
4	-3.02428E-01	-1.62502E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.11 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力

Allowable Stress= ± 25 ksi	
Member Axial Stress(ksi)	
Member No.	Axial Stress
1	6.54
2	-1.27
3	-8.58
4	-6.46
5	24.95
6	-0.13
7	18.36
8	-6.91
9	6.74
10	1.80



表 4.1.12 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint displacement(in)		
Joint No.	X Translation	Y Translation
1	1.89470E-01	-1.99976E+00
2	-5.41493E-01	-1.99518E+00
3	2.35303E-01	-7.32890E-01
4	-3.08939E-01	-1.63099E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.13 例二，空間 25 根桿件桁架，桿件編號與節點編號之關係表

No.	B-Node	E-Node
1	1	2
2	1	4
3	2	3
4	1	5
5	2	6
6	2	5
7	2	4
8	1	3
9	1	6
10	3	6
11	4	5
12	3	4
13	5	6
14	3	10
15	6	7
16	4	9
17	5	8
18	3	8
19	4	7
20	6	9
21	5	10
22	3	7
23	4	8
24	5	9
25	6	10

表 4.1.14 例二，空間 25 根桿件桁架，斷面連結情形

Group number	Members
1	A ₁
2	A ₂ -A ₅
3	A ₆ -A ₉
4	A ₁₀ -A ₁₁
5	A ₁₂ -A ₁₃
6	A ₁₄ -A ₁₇
7	A ₁₈ -A ₂₁
8	A ₂₂ -A ₂₅

表 4.1.15 例二，空間 25 根桿件桁架，設計條件

限制條件

位移限制： Δ_j ，x 與 y 方向， $j=1,2$

應力限制： $-40 \text{ ksi} \leq \sigma_{\text{allow},i} \leq 40 \text{ ksi}$ ， $i=1\dots 25$

受力情形

No.	Joint	x (kips)	y (kips)	z (kips)
1	1	0	20	-5
	2	0	-20	-5
2	1	1	10	-5
	2	0	10	-5
	3	0.5	0	0
	6	0.5	0	0

材料性質

彈性係數： 10^4 ksi

材料密度： 0.1 lb/in^3

表 4.1.16 例二，載重條件排序的情形

Load case	Max Displacement			δ_{allow}	Sorting
	Locate	Direction	Value		
1	Joint 1	+y	2.046 in	0.35 in	2
2	Joint 1	+y	2.333 in	0.35 in	1

表 4.1.17 例二，第一次搜尋結果在第一組載重條件下各節點位移

Allowable displacement= ± 0.35 in			
Joint displacement			
Joint No.	X Translation	Y Translation	Z Translation
1	-2.41655E-02	4.41716E-01	-2.95537E-02
2	2.41655E-02	-4.41716E-01	-2.95537E-02
3	1.37047E-01	-3.73237E-02	-1.24327E-01
4	1.15214E-01	2.59192E-02	8.22756E-02
5	-1.37047E-01	3.73237E-02	-1.24327E-01
6	-1.15214E-01	-2.59192E-02	8.22756E-02
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.18 例二，兩次啟發式方法搜尋的初始情形與結果

Search	1		2	
	Initial	Result	Initial	Result
α	—	0.0877	—	0.8084
A1 (in ²)	0.0001	0.0100	0.0100	0.0100
A2 (in ²)	0.3497	1.3096	1.3096	1.8542
A3 (in ²)	0.4926	2.8062	2.8062	3.1714
A4 (in ²)	0.0001	0.0100	0.0100	0.0100
A5 (in ²)	0.0001	0.0100	0.0100	0.0100
A6 (in ²)	0.0934	0.8221	0.8221	0.6923
A7 (in ²)	0.2914	1.3739	1.3739	1.7166
A8 (in ²)	0.3641	3.2277	3.2277	2.5948
Weight (lb)	86.6184	520.0382	520.0382	545.7115

表 4.1.19 例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	0.38	0.7	1.1
d_s^l (in ²)	0.38	0.5	0.8

表 4.1.20 例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Group number	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	1	0.01
	2	2	1.60 , 2.00
	3	2	2.80 , 3.20
	4	1	0.01
	5	1	0.01
	6	2	0.40 , 0.80
	7	2	1.60 , 2.00
	8	2	2.40 , 2.80
2	1	2	0.01 , 0.40
	2	3	1.60 , 2.00 , 2.40
	3	3	2.80 , 3.20 , 3.60
	4	2	0.01 , 0.40
	5	2	0.01 , 0.40
	6	3	0.40 , 0.80 , 1.20
	7	3	1.60 , 2.00 , 2.40
	8	3	2.40 , 2.80 , 3.20
3	1	3	0.01 , 0.40 , 0.80
	2	5	1.20 , 1.60 , 2.00 , 2.40 , 2.80
	3	5	2.40 , 2.80 , 3.20 , 3.60 , 4.00
	4	3	0.01 , 0.40 , 0.80
	5	3	0.01 , 0.40 , 0.80
	6	5	0.01 , 0.40 , 0.80 , 1.20 , 1.60
	7	5	1.20 , 1.60 , 2.00 , 2.40 , 2.80
	8	5	2.00 , 2.40 , 2.80 , 3.20 , 3.60

表 4.1.21 例二，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Ringertz [15]	Wu and Chow [16]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	0.01	0.4	0.01	0.01	0.01	0.01
A2	1.6	2.0	2.8	1.6	1.6	1.6
A3	3.6	3.6	2.4	3.2	3.2	3.2
A4	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
A5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
A6	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
A7	2.0	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0
A8	2.4	2.4	2.8	2.4	2.4	2.4
Weight (lb)	568.69	563.52	572.44	551.61	551.61	551.61
Population	—	—	100	50	50	100
Generation	—	—	1630	12	39	25
Computational cost Saving	—	—	—	99.63%	98.80%	98.47%



表 4.1.22 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	-1.49706E-02	3.37977E-01	-2.62829E-02
2	1.49706E-02	-3.37977E-01	-2.62829E-02
3	8.90725E-02	-3.62363E-02	-1.00105E-01
4	8.04643E-02	2.75893E-02	6.10356E-02
5	-8.90725E-02	3.62363E-02	-1.00105E-01
6	-8.04643E-02	-2.75893E-02	6.10356E-02
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.23 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的桿件應力

Allowable Stress= ± 40 ksi					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	3.992	10	-1.153	19	4.706
2	-7.759	11	-1.153	20	4.706
3	7.715	12	-1.148	21	-6.093
4	7.715	13	-1.148	22	-1.223
5	-7.759	14	-2.873	23	-0.365
6	-5.831	15	1.484	24	-1.223
7	4.363	16	1.484	25	-0.365
	8	-5.831	17	-2.873	
	9	4.363	18	-6.093	



表 4.1.24 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的節點位移

Allowable displacement= ± 0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	1.40263E-02	3.40695E-01	-2.02189E-02
2	2.93954E-02	3.40695E-01	-3.02136E-02
3	1.20891E-02	-2.39161E-02	-1.15095E-01
4	-4.65988E-03	-2.39166E-02	-1.22833E-01
5	3.29373E-03	-1.52248E-02	7.59736E-02
6	4.13549E-03	-1.52252E-02	8.37125E-02
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.1.25 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的桿件應力

Allowable Stress= ± 40 ksi					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	2.049	10	-1.159	19	-3.483
2	-2.826	11	-1.159	20	2.088
3	-2.826	12	-2.233	21	2.163
4	1.716	13	-0.112	22	-5.198
5	2.260	14	-4.280	23	-5.893
6	2.392	15	3.267	24	3.615
7	-3.867	16	-4.657	25	4.311
	8	-3.667	17	-2.891	
	9	2.590	18	-3.559	



表 4.2.1 例一，啟發式最佳化設計搜尋的過程

No.	α	A_1 (in ²)	A_2 (in ²)	A_3 (in ²)	A_4 (in ²)	A_5 (in ²)	A_6 (in ²)	Weight (lb)
1	1.3751	29.9796	22.5808	14.9898	7.7786	21.1987	21.1987	4986.3570
2	1.3751	29.9796	22.5808	14.9898	7.7786	21.1987	21.1987	4986.3570
3	1.3751	29.9796	22.5808	14.9898	7.7786	21.1987	21.1987	4986.3570
4	1.1745	30.0593	22.2693	15.0297	6.6437	21.2551	21.2551	4927.4121
5	1.1745	30.0593	22.2693	15.0297	6.6437	21.2551	21.2551	4927.4121
6	1.1745	30.0593	22.2693	15.0297	6.6437	21.2551	21.2551	4927.4121
7	1.1271	30.0767	22.2026	15.0384	6.3758	21.2675	21.2675	4913.5666
8	1.0978	30.0872	22.1627	15.0436	6.2102	21.2749	21.2749	4905.0212
9	1.0797	30.0936	22.1386	15.0468	6.1079	21.2794	21.2794	4899.7441
10	1.0797	30.0936	22.1386	15.0468	6.1079	21.2794	21.2794	4899.7441
11	1.0797	30.0936	22.1386	15.0468	6.1079	21.2794	21.2794	4899.7441
12	1.0755	30.0951	22.1330	15.0475	6.0838	21.2804	21.2804	4898.4988
13	1.0755	30.0951	22.1330	15.0475	6.0838	21.2804	21.2804	4898.4988
14	1.0755	30.0951	22.1330	15.0475	6.0838	21.2804	21.2804	4898.4988
15	1.0755	30.0951	22.1330	15.0475	6.0838	21.2804	21.2804	4898.4988

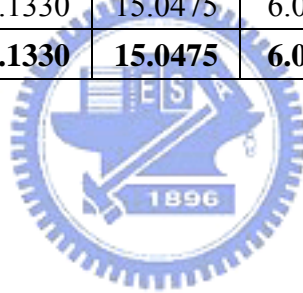


表 4.2.2 例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	2.0	3.0	3.0
d_s^l (in ²)	2.0	3.0	4.0

表 4.2.3 例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Member set No.	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	3	29.0, 30.0, 31.0
	2	4	21.0, 22.0, 23.0, 24.0
	3	4	14.0, 15.0, 16.0, 17.0
	4	4	5.0, 6.0, 7.0, 8.0
	5	4	20.0, 21.0, 22.0, 23.0
	6	4	20.0, 21.0, 22.0, 23.0
2	1	4	28.0, 29.0, 30.0, 31.0
	2	6	20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0, 25.0
	3	6	13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0
	4	6	4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0
	5	6	19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0
	6	6	19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0
3	1	5	27.0, 28.0, 29.0, 30.0, 31.0
	2	7	19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0, 25.0
	3	7	12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0
	4	7	3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0
	5	7	18.0, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0
	6	7	18.0, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0

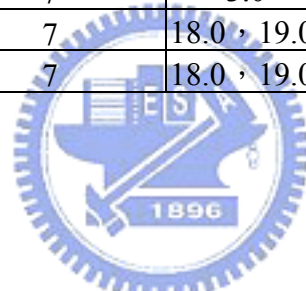


表 4.2.4 例一，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Hajela et al. [17]	Deb and Gulati [18]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	28.0	30.0	30.0	30.0	30.0	31.0
A2	24.0	24.0	22.0	24.0	24.0	24.0
A3	16.0	16.0	15.0	16.0	16.0	15.0
A4	6.0	6.0	7.0	6.0	6.0	6.0
A5	21.0	20.0	20.0	21.0	21.0	20.0
A6	22.0	21.0	23.0	20.0	20.0	21.0
Weight (lb)	4942.7	4912.85	4957.58	4912.85	4912.85	4912.85
Population	—	—	150	150	150	150
Generation	—	—	1365	9	18	25
Computational cost Saving	—	—	—	99.34%	98.68%	98.17%

表 4.2.5 例一，Case 1 及 Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	-5.25000E-01	-1.99899E+00
2	2.40000E-01	-7.24873E-01
3	-3.00000E-01	-1.99706E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.2.6 例一，Case 1 及 Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力

Allowable Stress= ± 25 ksi	
Member Axial Stress(ksi)	
Member No.	Axial Stress
1	6.67
2	-8.33
3	-6.25
4	23.57
5	-6.73
6	7.07

表 4.2.7 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點的位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	-5.40000E-01	-1.99851E+00
2	2.32258E-01	-7.41375E-01
3	-3.00000E-01	-1.99706E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.2.8 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件的應力

Allowable Stress= ± 25 ksi	
Member Axial Stress(ksi)	
Member No.	Axial Stress
1	6.45
2	-8.33
3	-6.67
4	23.57
5	-7.07
6	6.73

表 4.2.9 例二，各桿件群組的容許應力

Group number	Allowable compression stress (ksi)	Allowable tension stress (ksi)
1	35.092	40.0
2	11.590	40.0
3	17.305	40.0
4	35.092	40.0
5	35.092	40.0
6	6.759	40.0
7	6.759	40.0
8	11.082	40.0

表 4.2.10 例二，桁架最佳拓樸的桿件群組及編號

Group number	Members	FSD	Optimal topology	
		Area (in ²)	Group number	Members
1	1	0.0	—	—
2	2~5	1.2317	1	1~4
3	6~9	1.1250	2	5~8
4	10~11	0.0	—	—
5	12~13	0.0	—	—
6	14~17	0.5528	3	9~12
7	18~21	1.7098	4	13~16
8	22~25	1.3328	5	17~20

表 4.2.11 例二，載重條件排序的情形

Load case	Max Displacement			δ_{allow}	Sorting
	Locate	Direction	Value		
1	Joint 1	+y	0.600 in	0.35 in	2
2	Joint 1	+y	0.644 in	0.35 in	1

表 4.2.12 例二，兩次啟發式方法搜尋的初始情形與結果

Search	1		2	
	Initial	Result	Initial	Result
α	—	0.8108	—	0.8877
A1 (in ²)	1.2317	1.5791	1.5791	1.9189
A2 (in ²)	1.1250	2.4361	2.4361	2.7775
A3 (in ²)	0.5528	0.8237	0.8237	0.7441
A4 (in ²)	1.7098	1.7636	1.7636	1.8776
A5 (in ²)	1.3328	2.9650	2.9650	2.6290
Weight (lb)	347.4476	532.2600	532.2600	549.1283

表 4.2.13 例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	0.72	1.50	2.80
d_s^l (in ²)	0.52	0.52	0.52

表 4.2.14 例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Group number	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	3	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260
	2	2	2.260 , 3.330
	3	7	0.332 , 0.519 , 0.630 , 0.718 , 1.014 , 1.200 , 1.400
	4	3	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260
	5	2	2.260 , 3.330
2	1	5	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260 , 3.330
	2	2	2.260 , 3.330
	3	9	0.332 , 0.519 , 0.630 , 0.718 , 1.014 , 1.200 , 1.400 , 1.680 , 1.964
	4	5	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260 , 3.330
	5	2	2.260 , 3.330
3	1	5	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260 , 3.330
	2	3	2.260 , 3.330 , 5.400
	3	11	0.332 , 0.519 , 0.630 , 0.718 , 1.014 , 1.200 , 1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260 , 3.330
	4	5	1.400 , 1.680 , 1.964 , 2.260 , 3.330
	5	3	2.260 , 3.330 , 5.400

表 4.2.15 例二，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Chai et al. [20]	Kaveh and Kalatjari [21]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	1.964	1.680	1.400	1.680	1.680	1.680
A2	3.330	3.330	3.330	3.330	3.330	3.330
A3	0.519	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014
A4	1.964	1.964	2.260	1.964	1.964	1.964
A5	3.330	2.260	2.260	2.260	2.260	2.260
Weight (lb)	614.27	566.38	573.21	566.38	566.38	566.38
Population	—	—	150	100	100	100
Generation	—	—	3990	3	10	50
Computational cost Saving	—	—	—	99.94%	99.83%	99.16%

表 4.2.16 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	-1.66195E-02	3.40481E-01	-2.71446E-02
2	1.66195E-02	-3.40481E-01	-2.71446E-02
3	9.13592E-02	-2.60035E-02	-9.32715E-02
4	8.25084E-02	2.24783E-02	5.59515E-02
5	-9.13592E-02	2.60035E-02	-9.32715E-02
6	-8.25084E-02	-2.24783E-02	5.59515E-02
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.2.17 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第一組載重條件下的桿件應力

Allowable Stress					
Members		Tension Stress		Compression Stress	
1~4		40.0		11.590	
5~8		40.0		17.305	
9~12		40.0		6.759	
13~16		40.0		6.759	
17~20		40.0		11.082	
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	-7.516	8	4.648	15	4.735
2	7.516	9	-2.192	16	-6.176
3	7.516	10	1.076	17	-1.118
4	-7.516	11	1.076	18	-0.543
5	-6.251	12	-2.192	19	-1.118
6	4.648	13	-6.176	20	-0.543
7	-6.251	14	4.735		

表 4.2.18 例二，窄化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	1.27491E-02	3.46987E-01	-2.07911E-02
2	3.09763E-02	3.46987E-01	-3.10592E-02
3	9.47551E-03	-6.21238E-03	-1.08508E-01
4	-1.64009E-03	-4.52266E-03	-1.15703E-01
5	6.24732E-04	-2.68717E-03	7.11876E-02
6	7.21068E-03	-9.97453E-04	7.83833E-02
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.2.19 例二，化搜尋空間下最佳化的結構在第二組載重條件下的桿件應力

Allowable Stress					
Members		Tension Stress		Compression Stress	
1~4		40.0		11.590	
5~8		40.0		17.305	
9~12		40.0		6.759	
13~16		40.0		6.759	
17~20		40.0		11.082	
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	-2.801	8	2.746	15	2.068
2	-2.283	9	-3.387	16	2.145
3	1.765	10	2.568	17	-5.541
4	2.283	11	-3.684	18	-6.279
5	2.532	12	2.270	19	3.880
6	-4.136	13	-3.586	20	4.618
7	-3.922	14	-3.509		

表 4.3.1 例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程

Cycle	Step	α	A ₁ (in ²)	A ₂ (in ²)	A ₃ (in ²)	A ₄ (in ²)	A ₅ (in ²)	A ₆ (in ²)	A ₇ (in ²)	A ₈ (in ²)	A ₉ (in ²)	A ₁₀ (in ²)	A ₁₁ (in ²)	A ₁₂ (in ²)	A ₁₃ (in ²)	A ₁₄ (in ²)	A ₁₅ (in ²)	Weight (lb)	
0	FSD	—	0.8000	0.8000	0.0	1.2000	0.4000	0.4000	0.0	0.0	0.0	0.5657	0.0	0.0	0.5657	0.5657	0.0	72.0001	
1	Heuristic	Initial	—	0.8000	0.8000	0.0001	1.2000	0.4000	0.4000	0.0001	0.0001	0.0001	0.5657	0.0001	0.0001	0.5657	0.5657	0.0001	72.0001
		Result	1.2856	0.9705	0.9705	0.1110	1.4558	0.4853	0.4853	0.1110	0.1110	0.1110	0.6863	0.1110	0.1110	0.6863	0.6863	0.1110	98.3261
	Satisfy buckling constraints	—	0.9705	0.9705	0.1110	1.8182	1.1513	1.0041	0.1110	0.1110	0.1110	0.6863	0.9676	0.1110	1.6869	0.6863	0.7672	159.5482	
	Modify areas	—	0.8000	0.8000	0.0	1.4142	0.8955	0.7810	0.0	0.0	0.0	0.5657	0.7526	0.0	1.3122	0.5657	0.5968	120.6571	
2	Heuristic	Initial	—	0.8000	0.8000	0.0001	1.4142	0.8955	0.7810	0.0001	0.0001	0.0001	0.5657	0.7526	0.0001	1.3122	0.5657	0.5968	120.6571
		Result	1.0598	0.7591	0.7591	0.1110	1.3419	0.8497	0.7411	0.1110	0.1110	0.1110	0.5368	0.7141	0.1110	1.2451	0.5368	0.5663	121.7020
	Satisfy buckling constraints	—	0.7591	0.7591	0.1110	1.7598	1.1641	0.9525	0.1110	0.1110	0.1110	0.5368	1.0181	0.1110	1.6406	0.5368	0.8364	149.4811	
	Modify areas	—	0.8000	0.8000	0.0	1.6605	1.0984	0.8988	0.0	0.0	0.0	0.5657	0.9607	0.0	1.5481	0.5657	0.7892	138.2625	
3	Heuristic	Initial	—	0.8000	0.8000	0.0001	1.6605	1.0984	0.8988	0.0001	0.0001	0.0001	0.5657	0.9607	0.0001	1.5481	0.5657	0.7892	138.2625
		Result	1.0033	0.7154	0.7154	0.1110	1.4849	0.9823	0.8038	0.1110	0.1110	0.1110	0.5059	0.8591	0.1110	1.3844	0.5059	0.7058	130.8555
	Satisfy buckling constraints	—	0.7154	0.7154	0.1110	1.7581	1.1672	0.9458	0.1110	0.1110	0.1110	0.5059	1.0268	0.1110	1.6348	0.5059	0.8542	147.6690	
	Modify areas	—	0.8000	0.8000	0.0	1.7523	1.1633	0.9426	0.0	0.0	0.0	0.5657	1.0234	0.0	1.6293	0.5657	0.8513	144.1633	

表 4.3.2 例一，啟發式方法搜尋 Cycle 3 的結果經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ± 3.5 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	3.00104E-01	-3.00335E-01
3	6.00063E-01	-1.81868E+00
4	9.52250E-01	-3.10222E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	-2.05397E-01	-8.04964E-01
7	-3.08580E-01	-1.84127E+00
8	-4.35850E-01	-3.45441E+00



表 4.3.3 例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Member	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	2	0.539 , 0.954
	2	2	0.539 , 0.954
	3	1	0.111
	4	2	1.488 , 1.764
	5	2	1.081 , 1.174
	6	2	0.539 , 0.954
	7	1	0.111
	8	1	0.111
	9	1	0.111
	10	2	0.440 , 0.539
	11	2	0.954 , 1.081
	12	1	0.111
	13	2	1.488 , 1.764
	14	2	0.440 , 0.539
	15	2	0.539 , 0.954
2	1	3	0.539 , 0.954 , 1.081
	2	3	0.539 , 0.954 , 1.081
	3	2	0.111 , 0.141
	4	3	1.488 , 1.764 , 2.142
	5	3	1.081 , 1.174 , 1.333
	6	3	0.539 , 0.954 , 1.081
	7	2	0.111 , 0.141
	8	2	0.111 , 0.141
	9	2	0.111 , 0.141
	10	3	0.440 , 0.539 , 0.954
	11	3	0.954 , 1.081 , 1.174
	12	2	0.111 0.141
	13	3	1.488 , 1.764 , 2.142
	14	3	0.440 , 0.539 , 0.954
	15	3	0.539 , 0.954 , 1.081
3	1	4	0.539 , 0.954 , 1.081 , 1.174
	2	4	0.539 , 0.954 , 1.081 , 1.174
	3	3	0.111 , 0.141 , 0.174
	4	4	1.488 , 1.764 , 2.142 , 2.697
	5	4	1.081 , 1.174 , 1.333 , 1.488
	6	4	0.539 , 0.954 , 1.081 , 1.174
	7	3	0.111 , 0.141 , 0.174
	8	3	0.111 , 0.141 , 0.174
	9	3	0.111 , 0.141 , 0.174
	10	4	0.440 , 0.539 , 0.954 , 1.081
	11	4	0.954 , 1.081 , 1.174 , 1.333
	12	3	0.111 , 0.141 , 0.174
	13	4	1.488 , 1.764 , 2.142 , 2.697
	14	4	0.440 , 0.539 , 0.954 , 1.081
	15	4	0.539 , 0.954 , 1.081 , 1.174

表 4.3.4 例一，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Wu and Chow [22]	Hwang and He [23]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	2.800	1.081	0.954	0.954	0.954	0.954
A2	2.800	1.081	0.954	0.954	0.954	0.954
A3	4.805	0.287	0.111	0.111	0.111	0.111
A4	2.697	1.764	2.142	1.764	1.764	1.764
A5	2.697	1.333	2.142	1.174	1.174	1.174
A6	1.488	0.954	0.954	0.954	0.954	0.954
A7	1.488	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
A8	0.111	0.220	0.111	0.111	0.111	0.111
A9	2.697	0.174	0.111	0.111	0.111	0.111
A10	2.697	0.954	0.539	0.539	0.539	0.539
A11	1.333	0.287	1.081	1.081	1.081	1.081
A12	2.800	0.539	0.111	0.111	0.111	0.111
A13	1.333	1.174	2.142	1.764	1.764	1.764
A14	1.488	1.764	0.440	0.440	0.440	0.440
A15	3.565	1.081	0.954	0.954	0.954	0.954
Weight (lb)	483.279	182.472	180.464	157.897	157.897	157.897
Population	—	—	150	150	150	150
Generation	—	—	4458	1	40	190
Computational cost Saving	—	—	—	99.98%	99.10%	95.74%

表 4.3.5 窄化搜尋空間下最佳化的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ±3.5 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	2.95205E-01	-4.04118E-01
3	5.24977E-01	-1.45628E+00
4	7.85748E-01	-2.70167E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00
6	-1.80484E-01	-5.91758E-01
7	-3.00414E-01	-1.52969E+00
8	-3.95859E-01	-2.96244E+00

表 4.3.6 窄化搜尋空間下最佳化的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 25 ksi		
Member	Euler buckling stress (ksi)	Axial strss (ksi)
1	-8.281	24.600
2	-8.281	19.148
3	-0.964	21.731
4	-15.313	-15.040
5	-10.191	-9.994
6	-8.281	-7.954
7	-0.964	15.637
8	-0.964	6.117
9	-0.964	21.731
10	-2.339	17.136
11	-4.692	-4.538
12	-0.482	22.081
13	-7.656	-6.628
14	-1.910	24.388
15	-4.141	-3.576

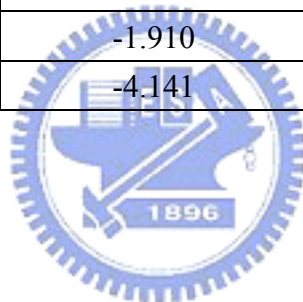


表 4.3.7 例二，空間 25 桿的桁架結構所受的載重條件

Joint	x (Kips)	y (Kips)	z (Kips)
1	1.0	-10.0	-10.0
2	0.0	-10.0	-10.0
3	0.5	0.0	0.0
6	0.6	0.0	0.0

表 4.3.8 例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 5)

Cycle	Step	α	A_1 (in ₂)	A_2 (in ₂)	A^3 (in ₂)	A_4 (in ₂)	A_5 (in ₂)	A_6 (in ₂)	A_7 (in ₂)	A_8 (in ₂)	Weight (lb)	
0	FSD	—	0.0	0.0548	0.4634	0.0	0.2597	0.1078	0.0112	0.5516	64.6230	
1	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.0548	0.4634	0.0001	0.2597	0.1078	0.0112	0.5516	64.6230
		Result	7.2541	0.1000	0.5598	3.3874	0.1000	2.8150	1.1632	0.1285	3.3874	492.8400
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6089	3.3874	0.1000	2.8150	1.1632	0.9691	3.3874	556.3113	
	Modify areas	—	0.0	0.0839	0.4634	0.0	0.2597	0.1078	0.1336	0.5516	75.0075	
2	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.0839	0.4634	0.0001	0.2597	0.1078	0.1336	0.5516	75.0075
		Result	6.5794	0.1000	0.5702	3.2108	0.1000	1.7483	0.7479	0.8990	3.3991	496.1928
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6328	3.2108	0.1000	1.7483	1.0532	1.0205	3.3991	530.3856	
	Modify areas	—	0.0	0.0962	0.4634	0.0	0.2597	0.1601	0.1551	0.5516	80.9960	
3	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.0962	0.4634	0.0001	0.2597	0.1601	0.1551	0.5516	80.9960
		Result	6.1831	0.1000	0.5957	2.8733	0.1000	1.6076	0.9911	0.9601	3.4000	503.0983
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6681	2.8733	0.1000	1.6076	1.0531	1.0273	3.4000	516.2318	
	Modify areas	—	0.0	0.1080	0.4634	0.0	0.2597	0.1703	0.1661	0.5516	83.1575	
4	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1080	0.4634	0.0001	0.2597	0.1703	0.1661	0.5516	83.1575
		Result	6.0762	0.1000	0.6565	2.8155	0.1000	1.5781	1.0349	1.0095	3.3516	507.5325
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6744	2.8155	0.1000	1.5781	1.0535	1.0359	3.3516	511.7257	
	Modify areas	—	0.0	0.1110	0.4634	0.0	0.2597	0.1734	0.1705	0.5516	83.8477	
5	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1110	0.4634	0.0001	0.2597	0.1734	0.1705	0.5516	83.8477
		Result	6.0444	0.1000	0.6709	2.8008	0.1000	1.5699	1.0480	1.0305	3.3341	509.0607
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6760	2.8008	0.1000	1.5699	1.0536	1.0389	3.3341	510.3515	
	Modify areas	—	0.0	0.1118	0.4634	0.0	0.2597	0.1743	0.1719	0.5516	84.0612	

表 4.3.9 例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 6~Cycle 10)

Cycle	Step	α	A_1 (in ₂)	A_2 (in ₂)	A^3 (in ₂)	A_4 (in ₂)	A_5 (in ₂)	A_6 (in ₂)	A_7 (in ₂)	A_8 (in ₂)	Weight (lb)	
6	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1118	0.4634	0.0001	0.2597	0.1743	0.1719	0.5516	84.0612
		Result	6.0348	0.1000	0.6749	2.7963	0.1000	1.5674	1.0519	1.0373	3.3288	509.5407
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6765	2.7963	0.1000	1.5674	1.0537	1.0399	3.3288	509.9348	
	Modify areas	—	0.0	0.1121	0.4634	0.0	0.2597	0.1746	0.1723	0.5516	84.1265	
7	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1121	0.4634	0.0001	0.2597	0.1746	0.1723	0.5516	84.1265
		Result	6.0318	0.1000	0.6762	2.7950	0.1000	1.5666	1.0532	1.0393	3.3272	509.6877
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6767	2.7950	0.1000	1.5666	1.0537	1.0401	3.3272	509.8079	
	Modify areas	—	0.0	0.1122	0.4634	0.0	0.2597	0.1747	0.1724	0.5516	84.1465	
8	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1122	0.4634	0.0001	0.2597	0.1747	0.1724	0.5516	84.1465
		Result	6.0309	0.1000	0.6766	2.7946	0.1000	1.5664	1.0535	1.0400	3.3267	509.7325
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6767	2.7946	0.1000	1.5664	1.0537	1.0402	3.3267	509.7692	
	Modify areas	—	0.0	0.1122	0.4634	0.0	0.2597	0.1747	0.1725	0.5516	84.1525	
9	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1122	0.4634	0.0001	0.2597	0.1747	0.1725	0.5516	84.1525
		Result	6.0307	0.1000	0.6767	2.7944	0.1000	1.5663	1.0536	1.0402	3.3265	509.7462
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6767	2.7944	0.1000	1.5663	1.0537	1.0402	3.3265	509.7574	
	Modify areas	—	0.0	0.1122	0.4634	0.0	0.2597	0.1747	0.1725	0.5516	84.1544	
10	Heuristic	Initial	—	0.0001	0.1122	0.4634	0.0001	0.2597	0.1747	0.1725	0.5516	84.1544
		Result	6.0306	0.1000	0.6767	2.7944	0.1000	1.5663	1.0537	1.0402	3.3265	509.7504
	Satisfy buckling constraints	—	0.1000	0.6767	2.7944	0.1000	1.5663	1.0537	1.0403	3.3265	509.7538	

表 4.3.10 例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	0.2	0.3	0.4
d_s^l (in ²)	0.2	0.3	0.4

表 4.3.11 例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Group number	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	3	0.1, 0.2, 0.3
	2	4	0.5, 0.6, 0.7, 0.8
	3	2	2.6, 2.8
	4	3	0.1, 0.2, 0.3
	5	4	1.4, 1.5, 1.6, 1.7
	6	4	0.9, 1.0, 1.1, 1.2
	7	4	0.9, 1.0, 1.1, 1.2
	8	2	3.2, 3.4
2	1	4	0.1, 0.2, 0.3, 0.4
	2	6	0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9
	3	4	2.5, 2.6, 2.8, 3.0
	4	4	0.1, 0.2, 0.3, 0.4
	5	5	1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8
	6	6	0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3
	7	6	0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3
	8	2	3.2, 3.4
3	1	5	0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5
	2	8	0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0
	3	6	2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2
	4	5	0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5
	5	8	1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9
	6	8	0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
	7	8	0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
	8	3	3.0, 3.2, 3.4

表 4.3.12 例二，最佳化結果比較表

Area (in ²)	Wu and Chow [22]	Hwang and HE [23]	This work			
			GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
A2	0.9	0.8	0.9	0.8	0.8	0.8
A3	3.0	3.0	2.6	2.8	2.8	2.8
A4	0.4	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
A5	1.0	0.5	0.6	1.5	1.4	1.4
A6	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1
A7	1.2	1.4	1.2	1.1	1.1	1.1
A8	3.0	3.0	3.4	3.2	3.2	3.2
Weight (lb)	525.20	520.97	517.46	516.37	514.87	514.87
Population	—	—	150	150	150	150
Generation	—	—	2247	2	34	276
Computational cost Saving	—	—	—	99.91%	98.49%	87.72%

表 4.3.13 例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	1.35549E-02	-3.49170E-01	-4.66276E-02
2	3.50103E-02	-3.48370E-01	-5.41582E-02
3	-1.05021E-03	5.73010E-03	5.52108E-02
4	7.93788E-03	5.80394E-03	5.03036E-02
5	-8.63535E-03	1.00601E-02	-1.18369E-01
6	1.70571E-02	1.03172E-02	-1.14140E-01
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.3.14 例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ±40 ksi					
Members		Euler buckling stress (ksi)			
1		-2.222			
2~5		-5.872			
6~9		-30.685			
10~11		-2.222			
12~13		-33.333			
14~17		-4.190			
18~21		-4.190			
22~25		-22.456			
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	2.861	10	-0.612	19	1.755
2	1.877	11	-0.567	20	-3.997
3	2.963	12	1.198	21	-3.777
4	-4.675	13	-3.426	22	2.862
5	-3.585	14	1.903	23	2.342
6	-6.155	15	-3.586	24	-5.989
7	2.486	16	1.625	25	-5.447
8	2.740	17	-3.865		
9	-5.900	18	1.617		

表 4.3.15 例二，Case 2 及 Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	1.34132E-02	-3.49592E-01	-4.67195E-02
2	3.51520E-02	-3.48792E-01	-5.42502E-02
3	-1.30778E-03	5.76991E-03	5.53326E-02
4	8.19545E-03	5.84375E-03	5.04253E-02
5	-9.39201E-03	1.01429E-02	-1.18713E-01
6	1.78137E-02	1.04000E-02	-1.14483E-01
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.3.16 例二，Case 2 及 Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ±40 ksi					
Members		Euler buckling stress (ksi)			
1		-2.222			
2~5		-5.872			
6~9		-30.685			
10~11		-2.222			
12~13		-31.111			
14~17		-4.190			
18~21		-4.190			
22~25		-22.456			
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	2.899	10	-0.617	19	1.769
2	1.892	11	-0.573	20	-4.037
3	2.978	12	1.267	21	-3.818
4	-4.698	13	-3.627	22	2.858
5	-3.609	14	1.903	23	2.338
6	-4.149	15	-3.586	24	-5.979
7	2.482	16	1.626	25	-5.437
8	2.736	17	-3.864		
9	-5.894	18	1.631		

表 4.4.1 例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 6)

Cycle	Step	α	A_1 (in ₂)	A_2 (in ₂)	A^3 (in ₂)	A_4 (in ₂)	A_5 (in ₂)	A_6 (in ₂)	Weight (lb)	
0	FSD	—	8.0000	8.0000	4.0000	5.6569	5.6569	5.6569	1583.9998	
1	Heuristic	Initial	—	8.0000	8.0000	4.0000	5.6569	5.6569	5.6569	1583.9998
		Result	3.6000	28.8000	28.8000	14.4000	20.3647	20.3647	20.3647	5702.4010
	Satisfy buckling constraints	—	28.8000	57.4477	40.6217	20.3647	68.3172	20.3647	10119.0408	
	Modify areas	—	8.0000	15.9577	11.2838	5.6569	18.9770	5.6569	2810.8439	
2	Heuristic	Initial	—	8.0000	15.9577	11.2838	5.6569	18.9770	5.6569	2810.8439
		Result	2.4534	19.6272	39.1506	27.6836	13.8785	46.5581	13.8785	6896.1219
	Satisfy buckling constraints	—	19.6272	57.4477	40.6217	13.8785	68.3172	13.8785	9128.3769	
	Modify areas	—	8.0000	23.4155	16.5573	5.6569	27.8459	5.6569	3720.7060	
3	Heuristic	Initial	—	8.0000	23.4155	16.5573	5.6569	27.8459	5.6569	3720.7060
		Result	2.2453	17.9623	52.5747	37.1759	12.7013	62.5222	12.7013	8354.0691
	Satisfy buckling constraints	—	17.9623	57.4477	40.6217	12.7013	68.3172	12.7013	8948.5718	
	Modify areas	—	8.0000	25.5858	18.0919	5.6569	30.4269	5.6569	3985.4835	
4	Heuristic	Initial	—	8.0000	25.5858	18.0919	5.6569	30.4269	5.6569	3985.4835
		Result	2.2075	17.6602	56.4813	39.9383	12.4876	67.1679	12.4876	8798.0342
	Satisfy buckling constraints	—	17.6602	57.4477	40.6217	12.4876	68.3172	12.4876	8915.9373	
	Modify areas	—	8.0000	26.0236	18.4015	5.6569	30.9475	5.6569	4038.8932	
5	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.0236	18.4015	5.6569	30.9475	5.6569	4038.8932
		Result	2.2007	17.6053	57.2693	40.4955	12.4488	68.1050	12.4488	8888.2485
	Satisfy buckling constraints	—	17.6053	57.4477	40.6217	12.4488	68.3172	12.4488	8910.0141	
	Modify areas	—	8.0000	26.1047	18.4588	5.6569	31.0439	5.6569	4048.7836	
6	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.1047	18.4588	5.6569	31.0439	5.6569	4048.7836
		Result	2.1994	17.5954	57.4152	40.5987	12.4418	68.2786	12.4418	8904.9762
	Satisfy buckling constraints	—	17.5954	57.4477	40.6217	12.4418	68.3172	12.4418	8908.9391	
	Modify areas	—	8.0000	26.1195	18.4693	5.6569	31.0615	5.6569	4050.5853	

表 4.4.2 例一，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 7~Cycle 10)

Cycle	Step		α	A_1 (in ²)	A_2 (in ²)	A^3 (in ²)	A_4 (in ²)	A_5 (in ²)	A_6 (in ²)	Weight (lb)
7	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.1195	18.4693	5.6569	31.0615	5.6569	4050.5853
		Result	2.1992	17.5936	57.4418	40.6175	12.4405	68.3102	12.4405	8908.0242
	Satisfy buckling constraints		—	17.5936	57.4477	40.6217	12.4405	68.3172	12.4405	8908.7439
	Modify areas		—	8.0000	26.1222	18.4712	5.6569	31.0646	5.6569	4050.9125
8	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.1222	18.4712	5.6569	31.0646	5.6569	4050.9125
		Result	2.1992	17.5932	57.4466	40.6209	12.4403	68.3159	12.4403	8908.5778
	Satisfy buckling constraints		—	17.5932	57.4477	40.6217	12.4403	68.3172	12.4403	8908.7085
	Modify areas		—	8.0000	26.1226	18.4715	5.6569	31.0652	5.6569	4050.9719
9	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.1226	18.4715	5.6569	31.0652	5.6569	4050.9719
		Result	2.1991	17.5932	57.4475	40.6215	12.4403	68.3170	12.4402	8908.6783
	Satisfy buckling constraints		—	17.5932	57.4477	40.6217	12.4403	68.3172	12.4402	8908.7021
	Modify areas		—	8.0000	26.1227	18.4716	5.6569	31.0653	5.6569	4050.9827
10	Heuristic	Initial	—	8.0000	26.1227	18.4716	5.6569	31.0653	5.6569	4050.9827
		Result	2.1991	17.5932	57.4477	40.6216	12.4402	68.3172	12.4402	8908.6965
	Satisfy buckling constraints		—	17.5932	57.4477	40.6217	12.4402	68.3172	12.4402	8908.7009

表 4.4.3 例一，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	3.0	5.0	7.0
d_s^l (in ²)	3.0	5.0	7.0

表 4.4.4 例一，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Member	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	6	15.0, 16.0, 17.0, 18.0, 19.0, 20.0
	2	6	55.0, 56.0, 57.0, 58.0, 59.0, 60.0
	3	6	38.0, 39.0, 40.0, 41.0, 42.0, 43.0
	4	6	10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0
	5	6	66.0, 67.0, 68.0, 69.0, 70.0, 71.0
	6	6	10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0
2	1	10	13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0
	2	10	53.0, 54.0, 55.0, 56.0, 57.0, 58.0, 59.0, 60.0, 61.0, 62.0
	3	10	36.0, 37.0, 38.0, 39.0, 40.0, 41.0, 42.0, 43.0, 44.0, 45.0
	4	10	8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0
	5	8	64.0, 65.0, 66.0, 67.0, 68.0, 69.0, 70.0, 71.0
	6	10	8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0
3	1	14	11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0, 19.0, 20.0, 21.0, 22.0, 23.0, 24.0
	2	14	51.0, 52.0, 53.0, 54.0, 55.0, 56.0, 57.0, 58.0, 59.0, 60.0, 61.0, 62.0, 63.0, 64.0
	3	14	34.0, 35.0, 36.0, 37.0, 38.0, 39.0, 40.0, 41.0, 42.0, 43.0, 44.0, 45.0, 46.0, 47.00
	4	14	6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0, 19.0
	5	10	62.0, 63.0, 64.0, 65.0, 66.0, 67.0, 68.0, 69.0, 70.0, 71.0
	6	14	6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0, 17.0, 18.0, 19.0

表 4.4.5 例一，最佳化結果比較表

Area (in ²)	GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	18.0	17.0	18.0	19.0
A2	63.0	58.0	58.0	58.0
A3	41.0	41.0	41.0	41.0
A4	7.0	10.0	8.0	6.0
A5	71.0	69.0	69.0	69.0
A6	12.0	13.0	13.0	12.0
Weight (lb)	8974.05	8859.88	8794.05	8677.32
Population	150	150	150	150
Generation	2117	15	18	57
Computational cost Saving	—	99.29%	99.15%	97.31%

表 4.4.6 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	-2.11943E-01	-1.98983E+00
2	4.23529E-01	-5.71100E-01
3	-1.24138E-01	-1.14237E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.4.7 例一，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 25 ksi		
Member	Euler buckling stress (ksi)	Axial strss (ksi)
1	-1.030	11.765
2	-3.515	-3.448
3	-2.485	-2.439
4	-0.303	14.142
5	-2.091	-2.050
6	-0.394	10.879

表 4.4.8 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	-2.11943E-01	-1.94277E+00
2	4.00000E-01	-5.47570E-01
3	-1.24138E-01	-1.39693E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.4.9 例一，Case 2 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 25 ksi		
Member	Euler buckling stress (ksi)	Axial strss (ksi)
1	-1.091	11.111
2	-3.515	-3.448
3	-2.485	-2.439
4	-0.242	17.678
5	-2.091	-2.050
6	-0.394	10.879

表 4.4.10 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ± 2.0 in		
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)
1	-2.11943E-01	-1.96594E+00
2	3.78947E-01	-5.26517E-01
3	-1.24138E-01	-1.82119E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.4.11 例一，Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 25 ksi		
Member	Euler buckling stress (ksi)	Axial strss (ksi)
1	-1.151	10.526
2	-3.515	-3.448
3	-2.485	-2.439
4	-0.182	23.570
5	-2.091	-2.050
6	-0.364	11.785

表 4.4.12 例二，桁架最佳拓撲的桿件群組及編號

Group number	Members	FSD	Optimal topology	
		Area (in ²)	Group number	Members
1	1	0.0	—	—
2	2~5	0.0548	1	1~4
3	6~9	0.4634	2	5~8
4	10~11	0.0	—	—
5	12~13	0.2597	3	9~10
6	14~17	0.1078	4	11~14
7	18~21	0.0112	5	15~18
8	22~25	0.5516	6	19~22

表 4.4.13 例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 0~Cycle 3)

Cycle	Step	α	A_1 (in ²)	A_2 (in ²)	A_3 (in ²)	A_4 (in ²)	A_5 (in ²)	A_6 (in ²)	Weight (lb)	
0	FSD	—	0.0548	0.4634	0.2597	0.1078	0.0112	0.5516	64.6229	
1	Heuristic	Initial	—	0.0548	0.4634	0.2597	0.1078	0.0112	0.5516	64.6229
		Result	7.2541	0.5598	3.3874	2.8150	1.1632	0.1285	3.3874	490.5903
	Satisfy buckling constraints	—	0.5930	3.3874	2.8150	1.1632	0.9694	3.3874	553.2554	
	Modify areas	—	0.0817	0.4634	0.2597	0.1078	0.1336	0.5516	74.8964	
2	Heuristic	Initial	—	0.0817	0.4634	0.2597	0.1078	0.1336	0.5516	74.8964
		Result	6.5868	0.5563	3.2172	1.7511	0.7492	0.9005	3.3990	493.7351
	Satisfy buckling constraints	—	0.6098	3.2172	1.7511	1.0628	1.0214	3.3990	528.0065	
	Modify areas	—	0.0926	0.4634	0.2597	0.1613	0.1551	0.5516	80.8977	
3	Heuristic	Initial	—	0.0926	0.4634	0.2597	0.1613	0.1551	0.5516	80.8977
		Result	6.1904	0.5744	2.8797	1.6101	1.0006	0.9615	3.4000	500.8386
	Satisfy buckling constraints	—	0.6385	2.8797	1.6101	1.0627	1.0294	3.4000	513.6048	
	Modify areas	—	0.1031	0.4634	0.2597	0.1717	0.1663	0.5516	83.0107	

表 4.4.14 例二，考慮挫屈限制的啟發式方法搜尋過程(Cycle 4~Cycle 9)

Cycle	Step		α	A_1 (in ₂)	A_2 (in ₂)	A^3 (in ₂)	A_4 (in ₂)	A_5 (in ₂)	A_6 (in ₂)	Weight (lb)
4	Heuristic	Initial	—	0.1031	0.4634	0.2597	0.1717	0.1663	0.5516	83.0107
		Result	6.0869	0.6255	2.8010	1.5783	1.0425	1.0100	3.3818	505.0395
	Satisfy buckling constraints		—	0.6459	2.8010	1.5783	1.0627	1.0338	3.3818	509.4990
	Modify areas		—	0.1061	0.4634	0.2597	0.1746	0.1698	0.5516	83.6350
5	Heuristic	Initial	—	0.1061	0.4634	0.2597	0.1746	0.1698	0.5516	83.6350
		Result	6.0577	0.6428	2.8070	1.5734	1.0577	1.0289	3.3415	506.6392
	Satisfy buckling constraints		—	0.6451	2.8070	1.5734	1.0627	1.0402	3.3415	507.9486
	Modify areas		—	0.1065	0.4634	0.2597	0.1754	0.1717	0.5516	83.8511
6	Heuristic	Initial	—	0.1065	0.4634	0.2597	0.1754	0.1717	0.5516	83.8511
		Result	6.0485	0.6441	2.8027	1.5709	1.0611	1.0386	3.3363	507.1706
	Satisfy buckling constraints		—	0.6455	2.8027	1.5709	1.0627	1.0411	3.3363	507.5413
	Modify areas		—	0.1067	0.4634	0.2597	0.1757	0.1721	0.5516	83.9124
7	Heuristic	Initial	—	0.1067	0.4634	0.2597	0.1757	0.1721	0.5516	83.9124
		Result	6.0457	0.6452	2.8014	1.5702	1.0622	1.0407	3.3348	507.3109
	Satisfy buckling constraints		—	0.6456	2.8014	1.5702	1.0627	1.0414	3.3348	507.4209
	Modify areas		—	0.1068	0.4634	0.2597	0.1758	0.1723	0.5516	83.9306
8	Heuristic	Initial	—	0.1068	0.4634	0.2597	0.1758	0.1723	0.5516	83.9306
		Result	6.0449	0.6455	2.8010	1.5700	1.0626	1.0413	3.3344	507.3526
	Satisfy buckling constraints		—	0.6456	2.8010	1.5700	1.0627	1.0415	3.3344	507.3852
	Modify areas		—	0.1068	0.4634	0.2597	0.1758	0.1723	0.5516	83.9360
9	Heuristic	Initial	—	0.1068	0.4634	0.2597	0.1758	0.1723	0.5516	83.9360
		Result	6.0447	0.6456	2.8009	1.5700	1.0627	1.0414	3.3343	507.3649
	Satisfy buckling constraints		—	0.6456	2.8009	1.5700	1.0627	1.0415	3.3343	507.3746

表 4.4.15 例二，各窄化搜尋空間中心與其上下限的間距

d_s	Case 1	Case 2	Case 3
d_s^u (in ²)	0.2	0.3	0.4
d_s^l (in ²)	0.2	0.3	0.4

表 4.4.16 例二，窄化搜尋空間後各桿件可選的斷面尺寸

Case	Group number	Number of Size	Cross-section area (in ²)
1	1	4	0.5, 0.6, 0.7, 0.8
	2	2	2.8, 3.0
	3	4	1.4, 1.5, 1.6, 1.7
	4	4	0.9, 1.0, 1.1, 1.2
	5	4	0.9, 1.0, 1.1, 1.2
	6	2	3.2, 3.4
2	2	6	0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9
	3	3	2.6, 2.8, 3.0
	5	6	1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8
	6	6	0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3
	7	6	0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3
	8	2	3.2, 3.4
3	2	8	0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0
	3	5	2.5, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2
	5	8	1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9
	6	8	0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
	7	8	0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4
	8	3	3.0, 3.2, 3.4

表 4.4.17 例二，最佳化結果比較表

Area (in ²)	GA	Case 1	Case 2	Case 3
A1	0.7	0.8	0.8	0.8
A2	3.0	2.8	2.8	2.8
A3	1.2	1.5	1.4	1.4
A4	1.2	1.1	1.1	1.1
A5	1.2	1.1	1.1	1.1
A6	3.0	3.2	3.2	3.2
Weight (lb)	516.75	514.12	512.62	512.62
Population	150	150	150	150
Generation	1480	2	21	80
Computational cost Saving	—	99.86%	98.58%	94.59%



表 4.4.18 例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ±0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	5.05732E-03	-3.49170E-01	-4.76243E-02
2	4.35009E-02	-3.48370E-01	-5.51493E-02
3	-7.23238E-04	4.76452E-03	5.46818E-02
4	7.61911E-03	4.90616E-03	4.98056E-02
5	-8.95413E-03	1.09579E-02	-1.18867E-01
6	1.73841E-02	1.12828E-02	-1.14669E-01
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.4.19 例二，Case 1 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 40 ksi					
Members		Euler buckling stress (ksi)			
1~4		-5.872			
5~8		-30.685			
9~10		-33.333			
11~14		-4.190			
15~18		-4.190			
19~22		-22.456			
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	2.188	9	1.112	17	-4.008
2	3.274	10	-3.512	18	-3.789
3	-4.363	11	1.852	19	2.877
4	-3.274	12	-3.636	20	2.357
5	-6.227	13	1.578	21	-5.975
6	2.413	14	-3.911	22	-5.432
7	2.667	15	1.606		
8	-5.973	16	1.744		

表 4.4.20 例二，Case 2 及 Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各節點位移

Allowable displacement= ± 0.35 in			
Joint	X Translation (in)	Y Translation (in)	Z Translation (in)
1	4.78367E-03	-3.49592E-01	-4.77375E-02
2	4.37745E-02	-3.48792E-01	-5.52624E-02
3	-9.56703E-04	4.79274E-03	5.47889E-02
4	7.85257E-03	4.93438E-03	4.99128E-02
5	-9.73490E-03	1.10523E-02	-1.19225E-01
6	1.81648E-02	1.13771E-02	-1.15027E-01
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

表 4.4.21 例二，Case 2 及 Case 3 最佳化後的結構經結構分析後各桿件應力

Allowable Stress = ± 40 ksi					
Members		Euler buckling stress (ksi)			
1~4		-5.872			
5~8		-30.685			
9~10		-33.111			
11~14		-4.190			
15~18		-4.190			
19~22		-22.456			
Axial Stress					
No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)	No.	Stress (ksi)
1	2.208	9	1.175	17	-4.050
2	3.293	10	-3.720	18	-3.831
3	-4.383	11	1.852	19	2.874
4	-3.293	12	-3.636	20	2.353
5	-6.223	13	1.578	21	-5.964
6	2.409	14	-3.911	22	-5.421
7	2.662	15	1.619		
8	-5.968	16	1.756		

表 4.5.1 本文各案例 Case 1~Case 3 與啟發式方法最佳化結果的相對誤差

Section	Example	Result			
		Heuristic method	Case 1	Case 2	Case 3
4.1	1	5080.41 lb	5077.88 lb	5070.42 lb	5070.42 lb
		Relative Error	-0.050%	-0.197%	-0.197%
	2	545.71 lb	551.61 lb	551.61 lb	551.61 lb
		Relative Error	+1.081%	+1.081%	+1.081%
4.2	1	4898.50 lb	4912.85 lb	4912.85 lb	4912.85 lb
		Relative Error	+0.293%	+0.293%	+0.293%
	2	549.13 lb	566.38 lb	566.38 lb	566.38 lb
		Relative Error	+3.141%	+3.141%	+3.141%
4.3	1	147.67 lb	157.90 lb	157.90 lb	157.90 lb
		Relative Error	+6.928%	+6.928%	+6.928%
	2	509.75 lb	516.37 lb	514.87 lb	514.87 lb
		Relative Error	+1.299%	+1.004%	+1.004%
4.4	1	8908.70 lb	8859.88 lb	8794.05 lb	8677.32 lb
		Relative Error	-0.548%	-1.287%	-2.597%
	2	507.37 lb	514.12 lb	512.62 lb	512.62 lb
		Relative Error	+1.330%	+1.035%	+1.035%

表 4.5.2 本文各案例基因演算法染色體二位元字串長度比較

Section	Example	Binary string length (bit)			
		GA	Case 1	Case 2	Case 3
4.1	1	60	20	26	36
	2	32	8	13	21
4.2	1	30	12	17	18
	2	25	9	12	14
4.3	1	75	15	25	30
	2	40	14	19	23
4.4	1	42	18	23	24
	2	30	10	15	17

表 4.5.3 本文各案例 Case 1~Case 3 最佳結果與啟發式方法相差最大的斷面

節	案例	最佳結果	與啟發式方法相差最大的斷面	
			斷面編號	差值 (in ²)
4.1	1	Case 2	A ₄	1.463
	2	Case 1	A ₇	0.2834
4.2	1	Case 1	A ₂	1.867
	2	Case 1	A ₂	0.5525
4.3	1	Case 1	A ₁ 、A ₂	0.2836
	2	Case 2	A ₅	0.1663
4.4	1	Case 3	A ₄	6.4402
	2	Case 2	A ₃	0.17



附圖

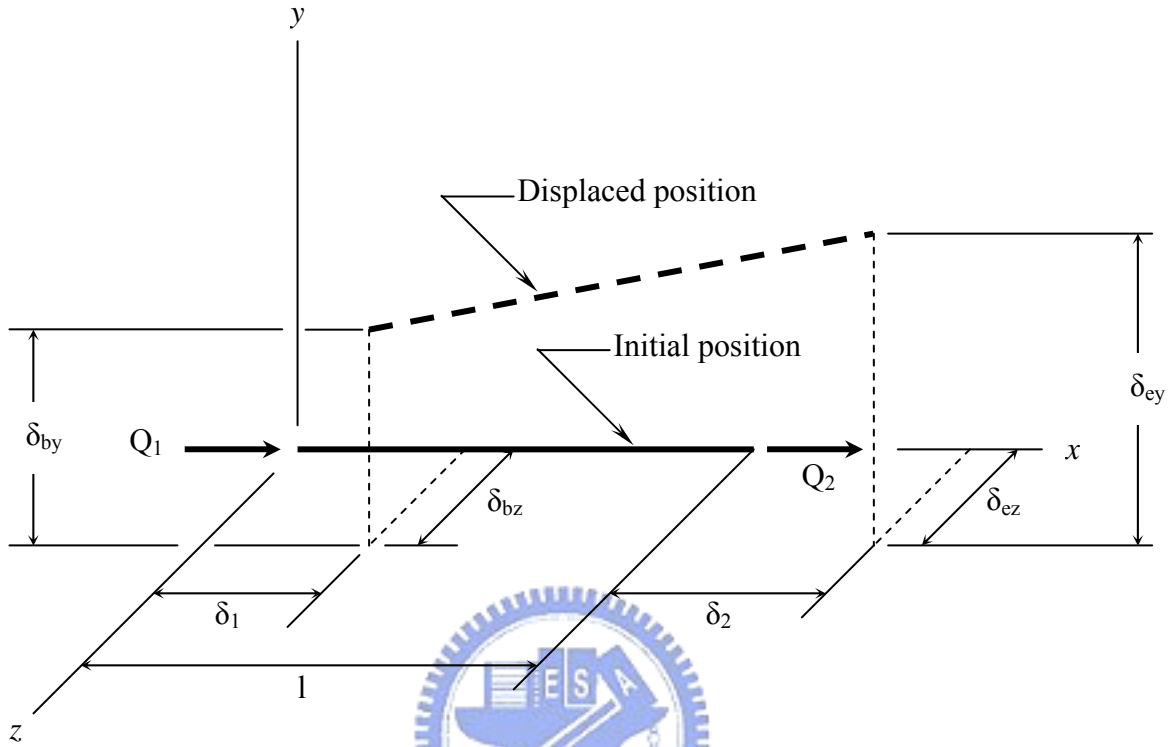


圖 2.1 區域座標系統下的桿件端點力與桿件端點位移

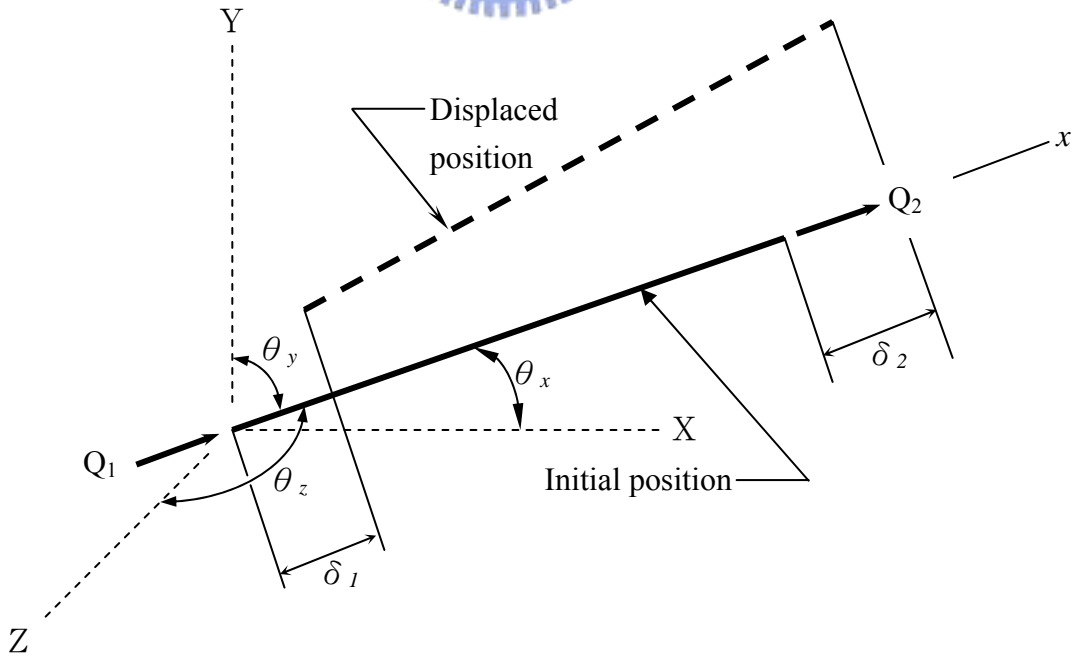


圖 2.2 區域座標系統下的桁架桿件與全域座標系統座標軸間的夾角

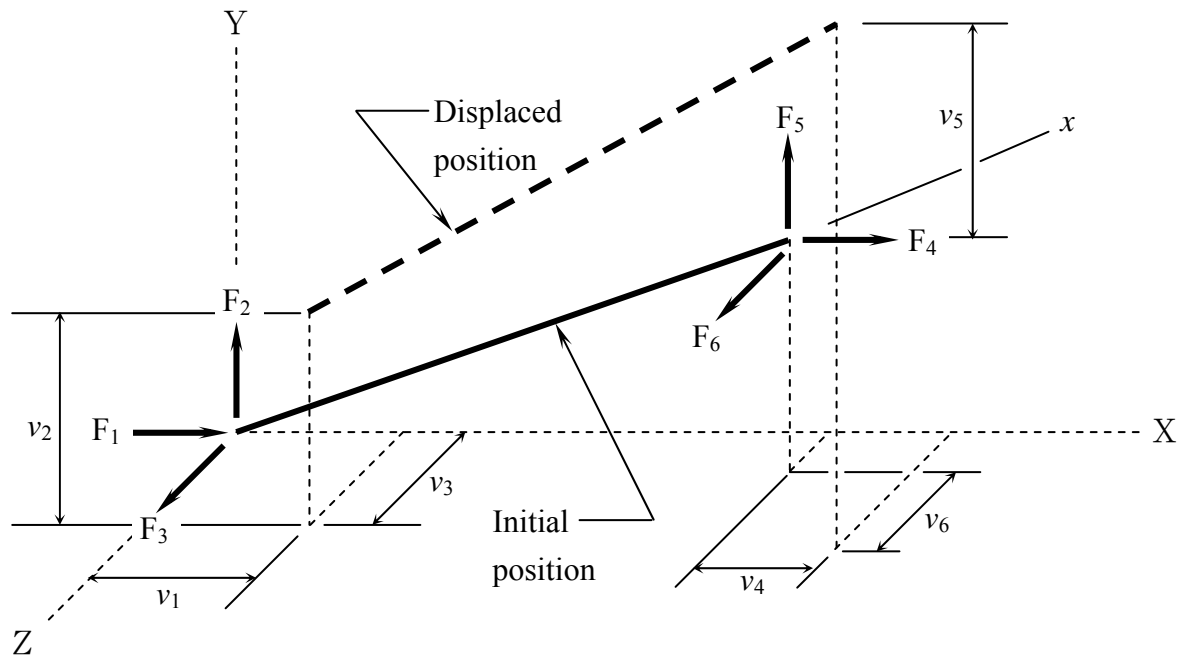


圖 2.3 全域座標系統下的桿件端點力與桿件端點位移



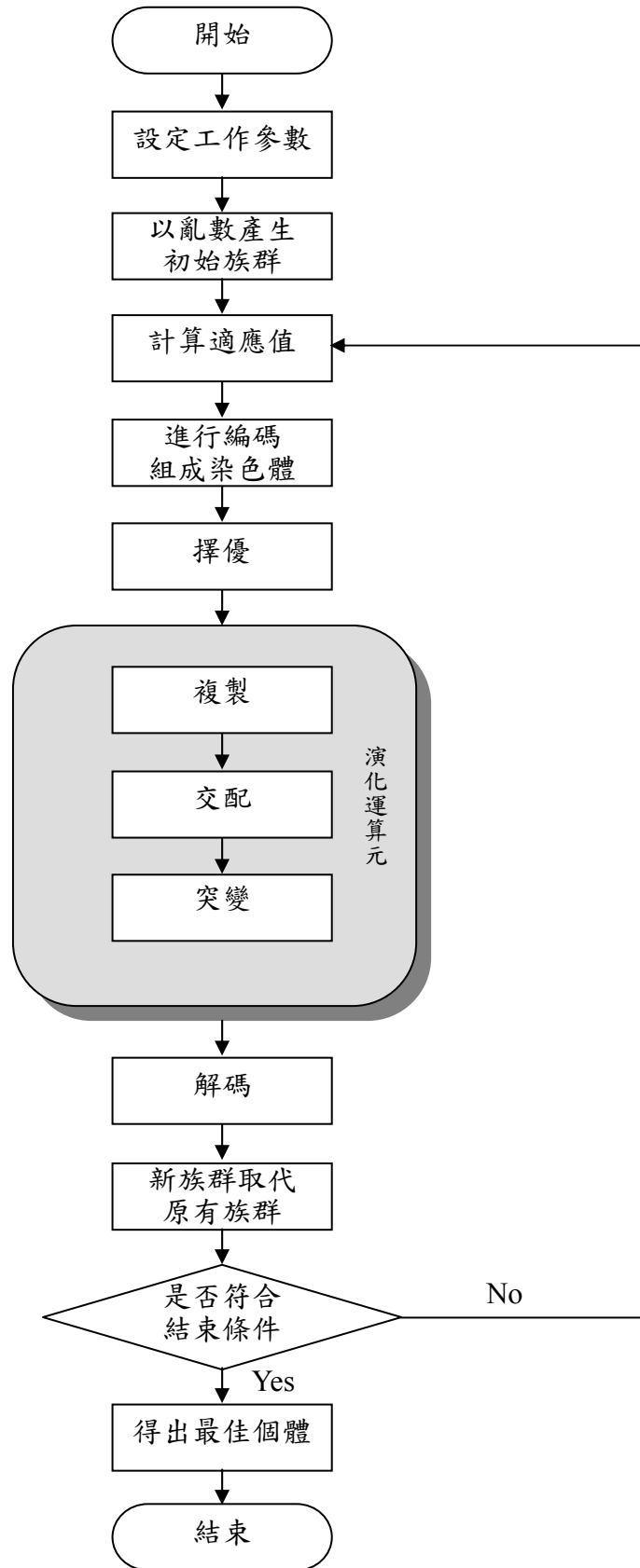


圖 2.4 基因演算法流程圖

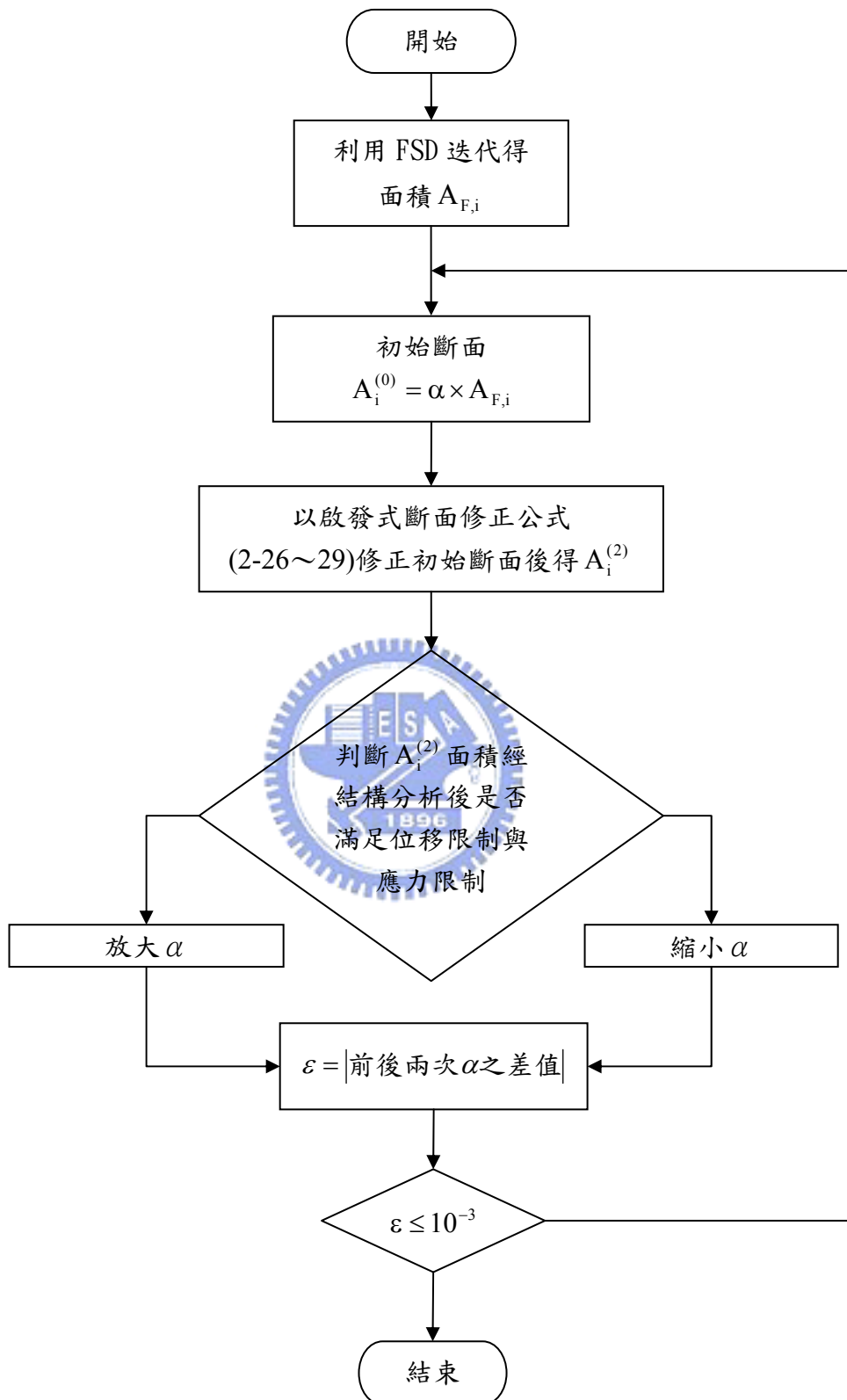


圖 2.5 啟發式桁架最佳化斷面尺寸設計流程圖

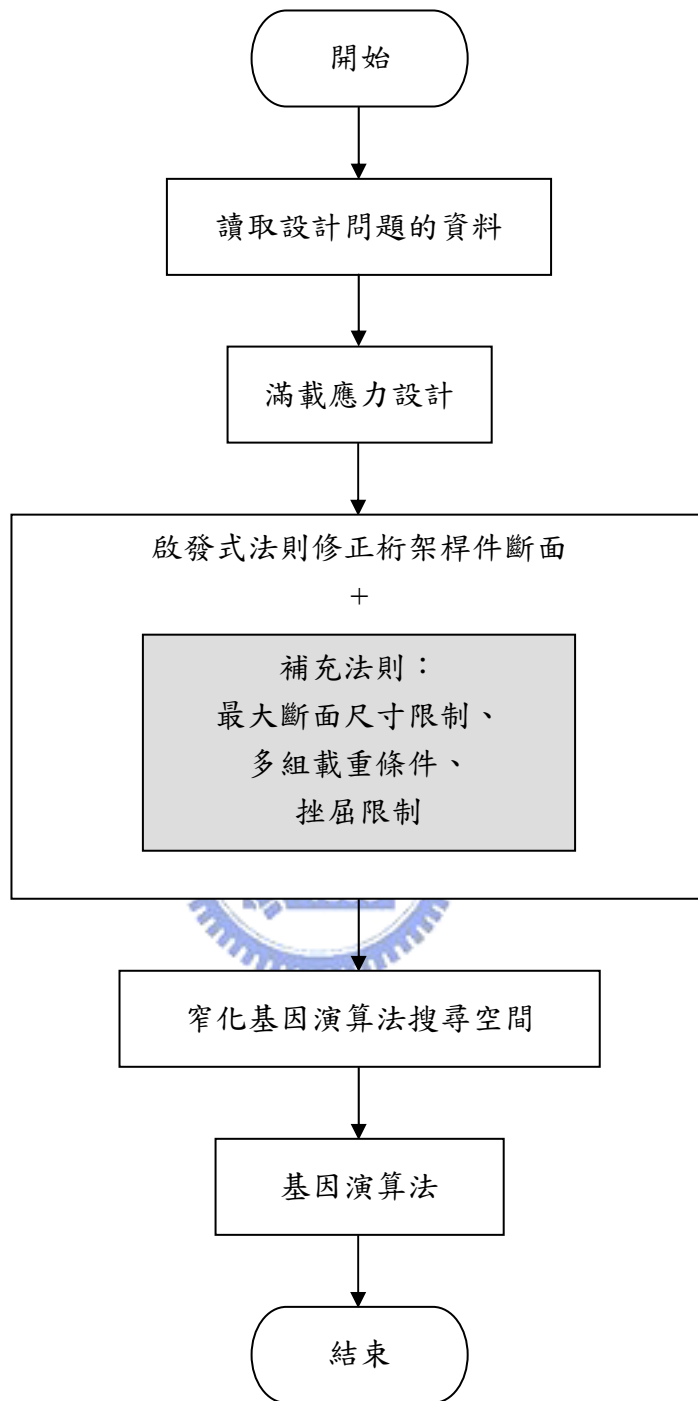


圖 3.1 基因演算法與窄化空間技術整體架構的流程

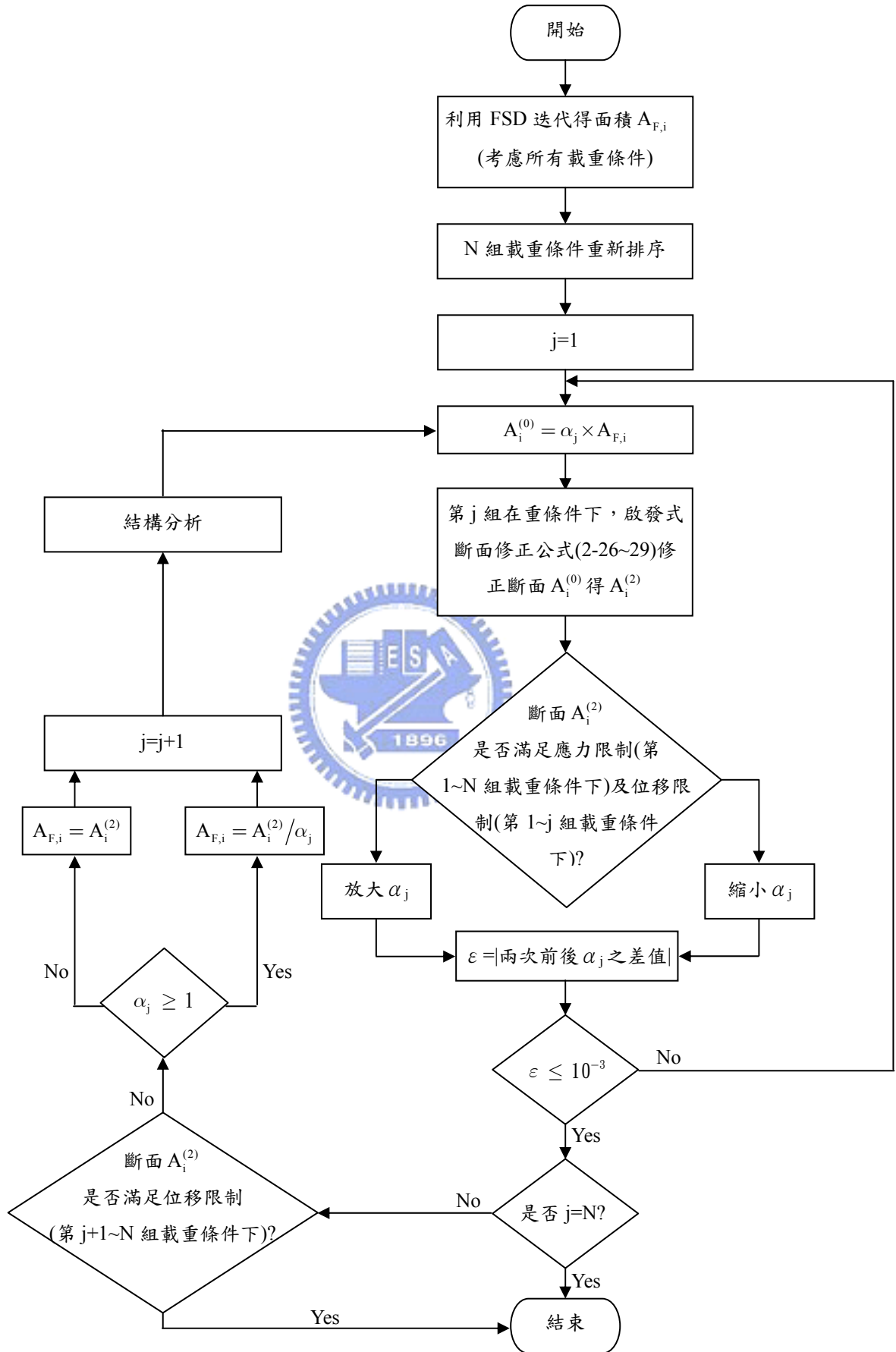


圖 3.2 啟發式方法在多組載重條件下桁架最佳化設計流程圖

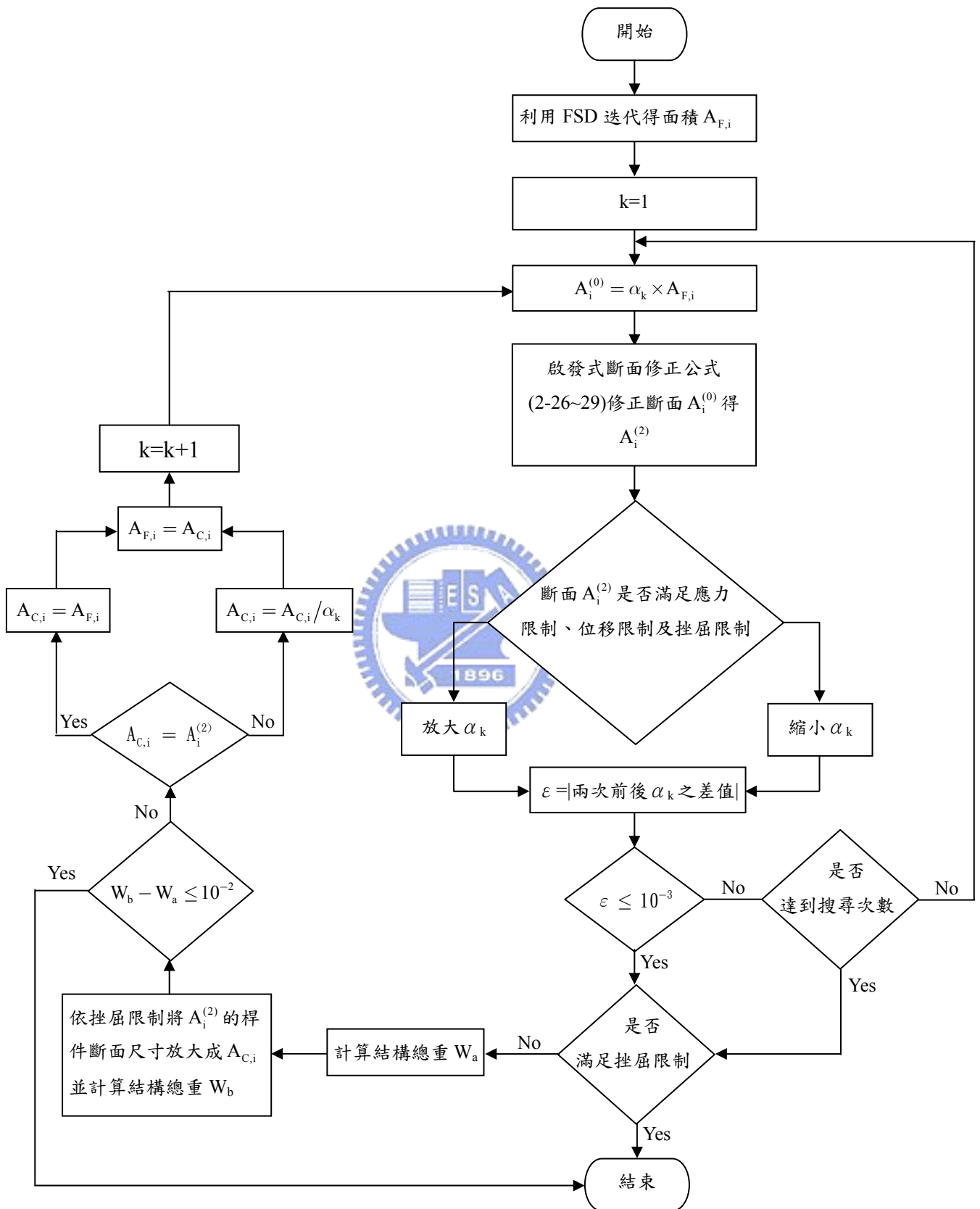


圖 3.3 考慮挫屈限制的啟發式方法流程圖

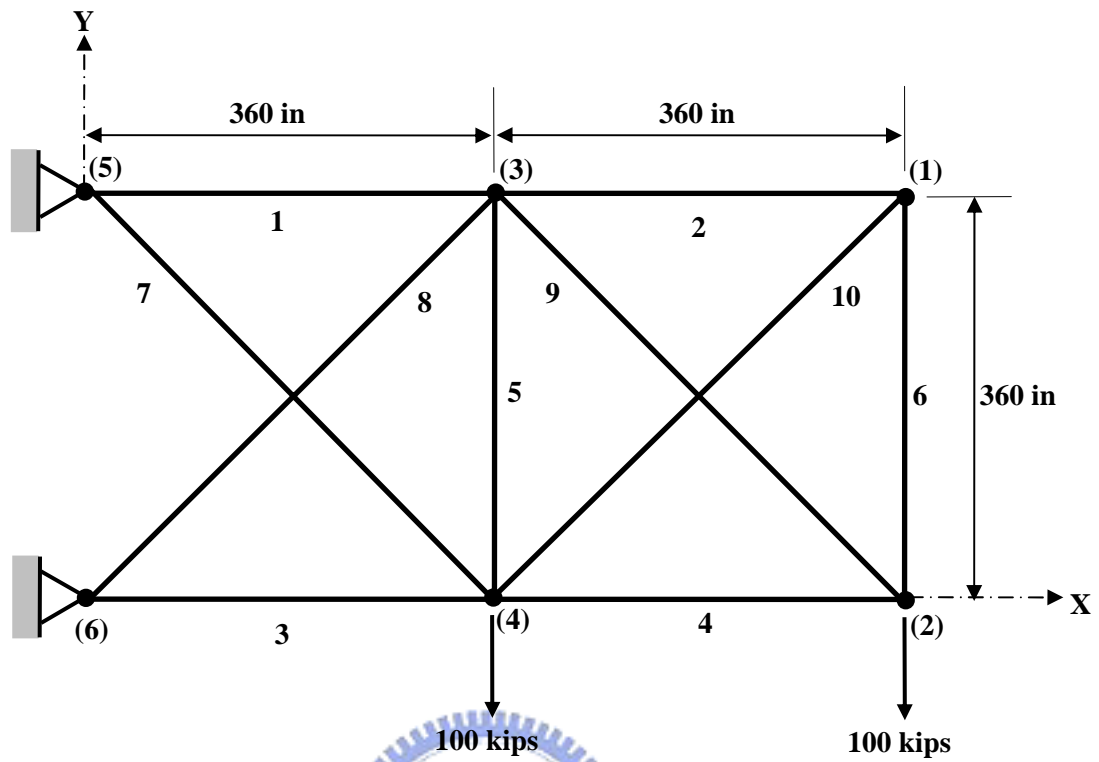


圖 4.1.1 例一，平面 10 根桿件桁架示意圖

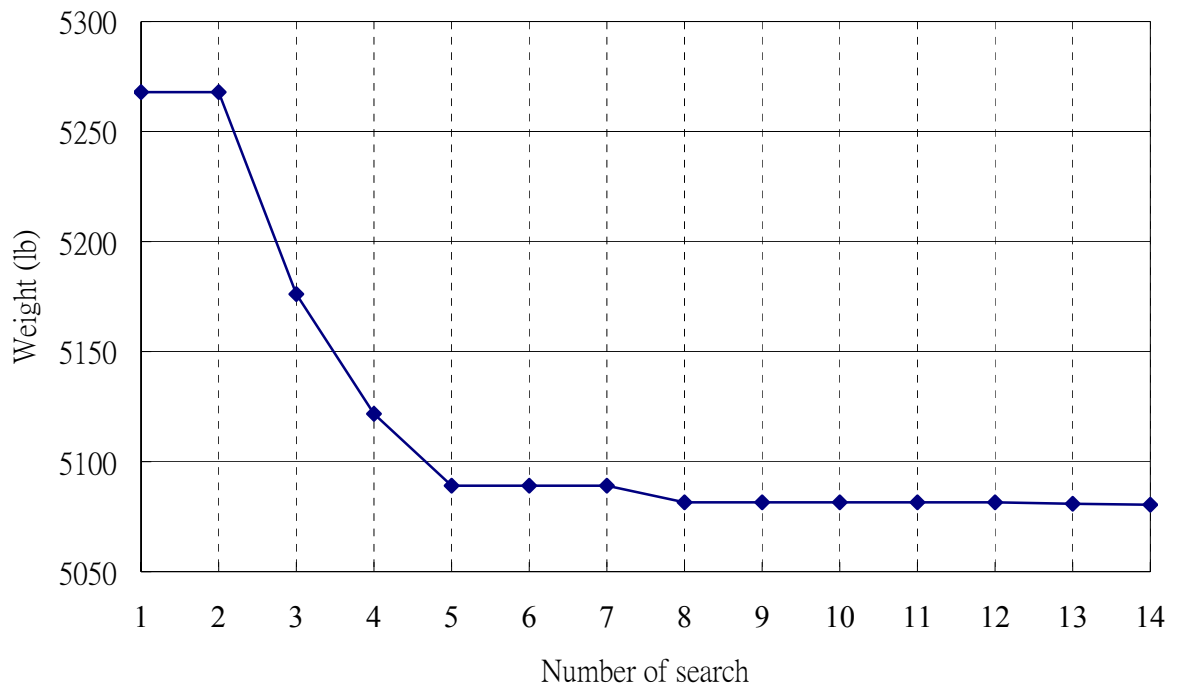


圖 4.1.2 例一，啟發式最佳化設計收斂過程

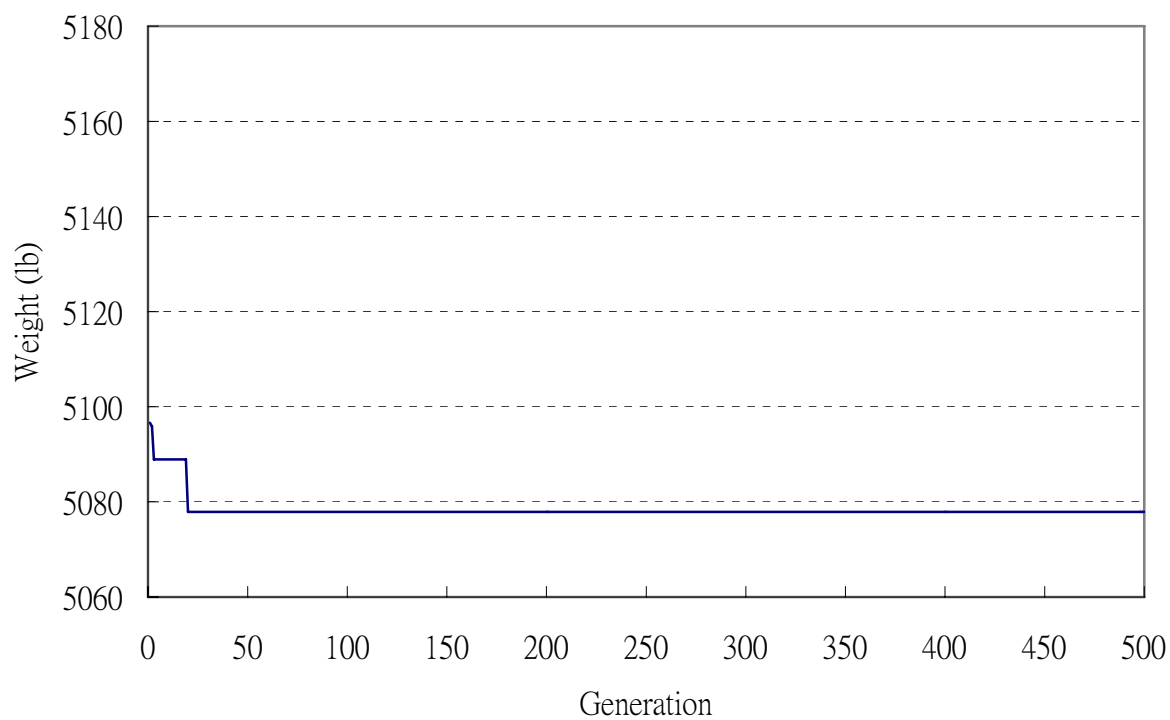


圖 4.1.3 例一，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

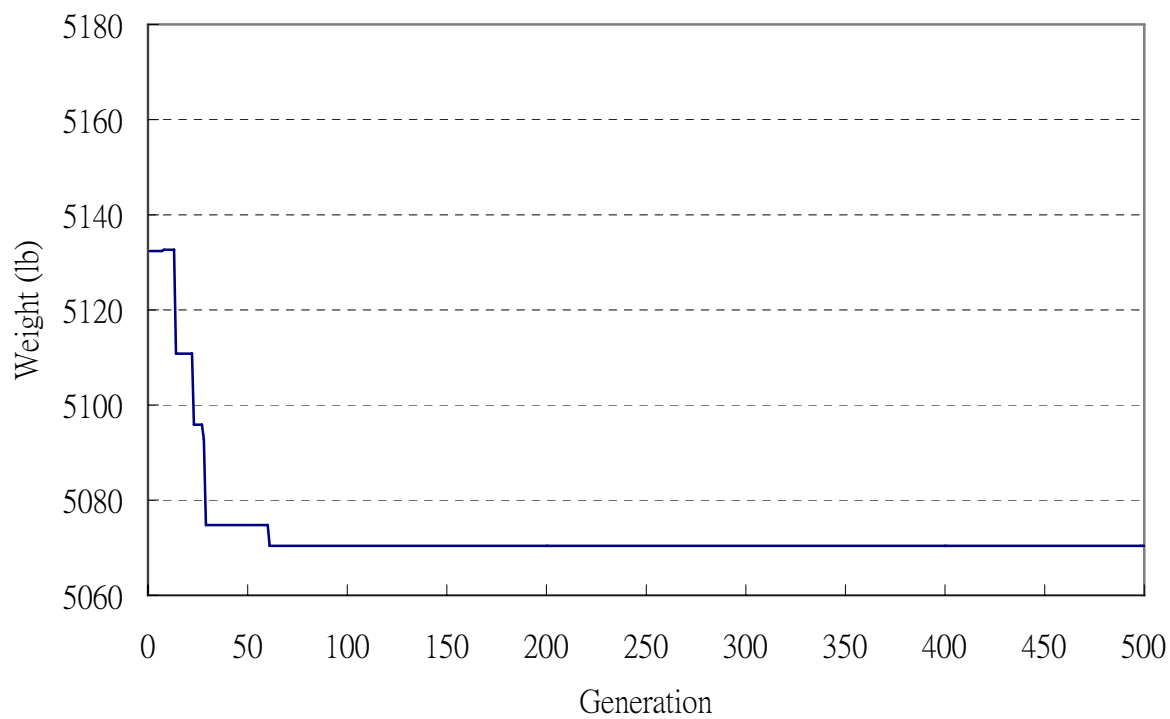


圖 4.1.4 例一，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

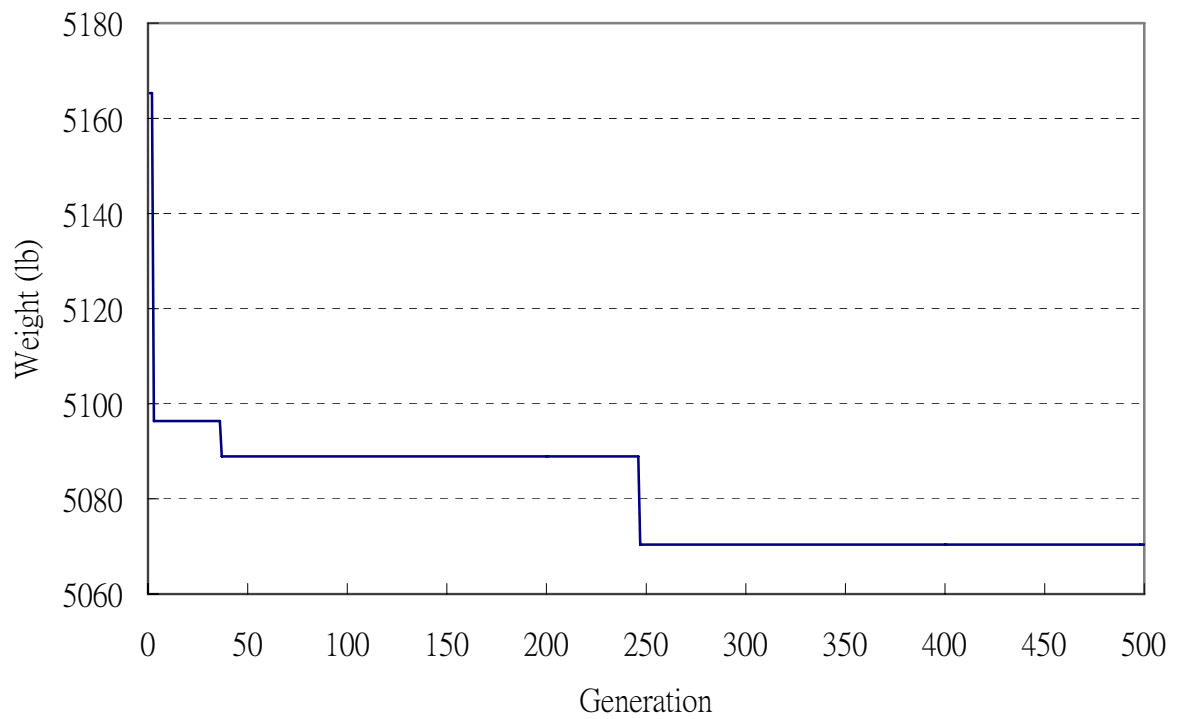


圖 4.1.5 例一，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

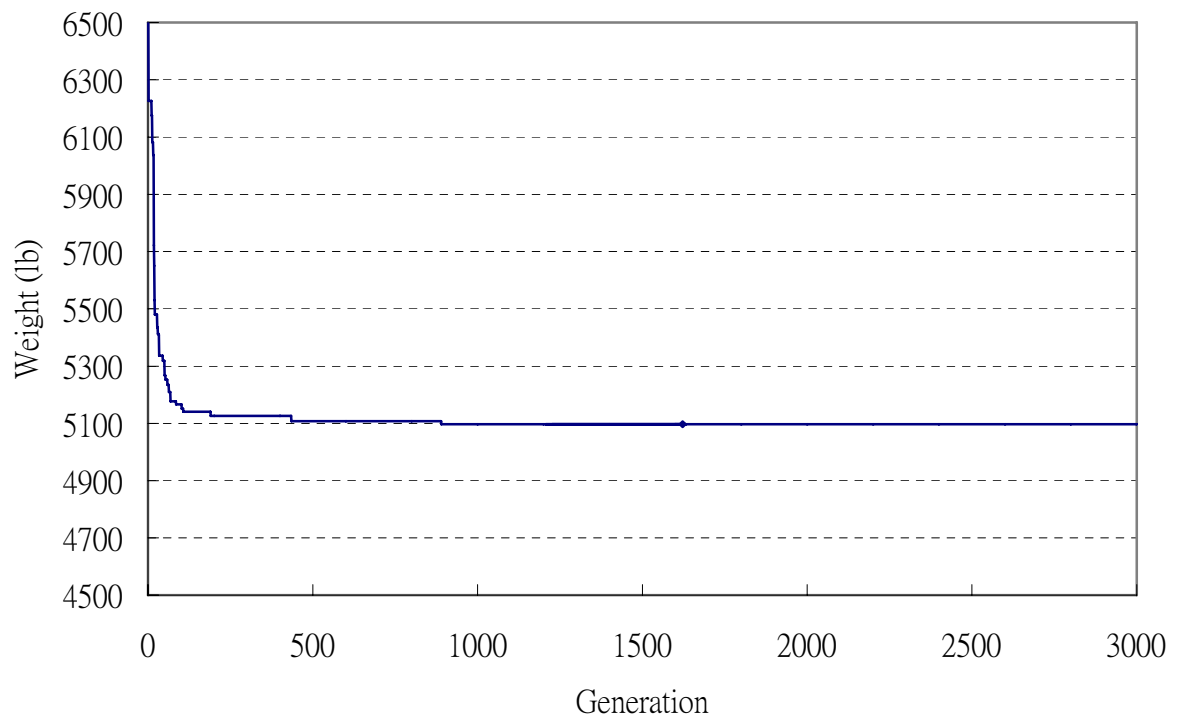


圖 4.1.6 例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

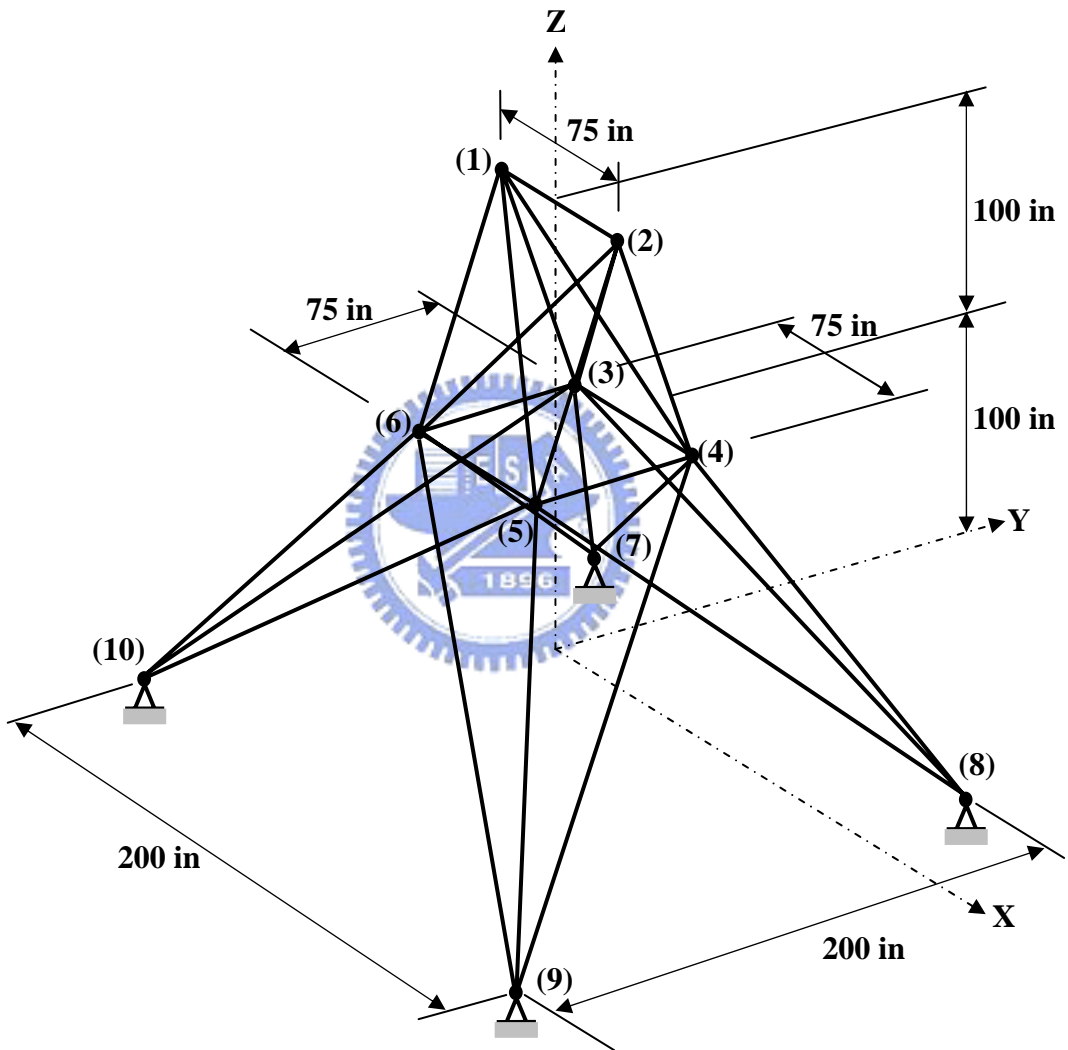


圖 4.1.7 空間 25 根桁架示意圖

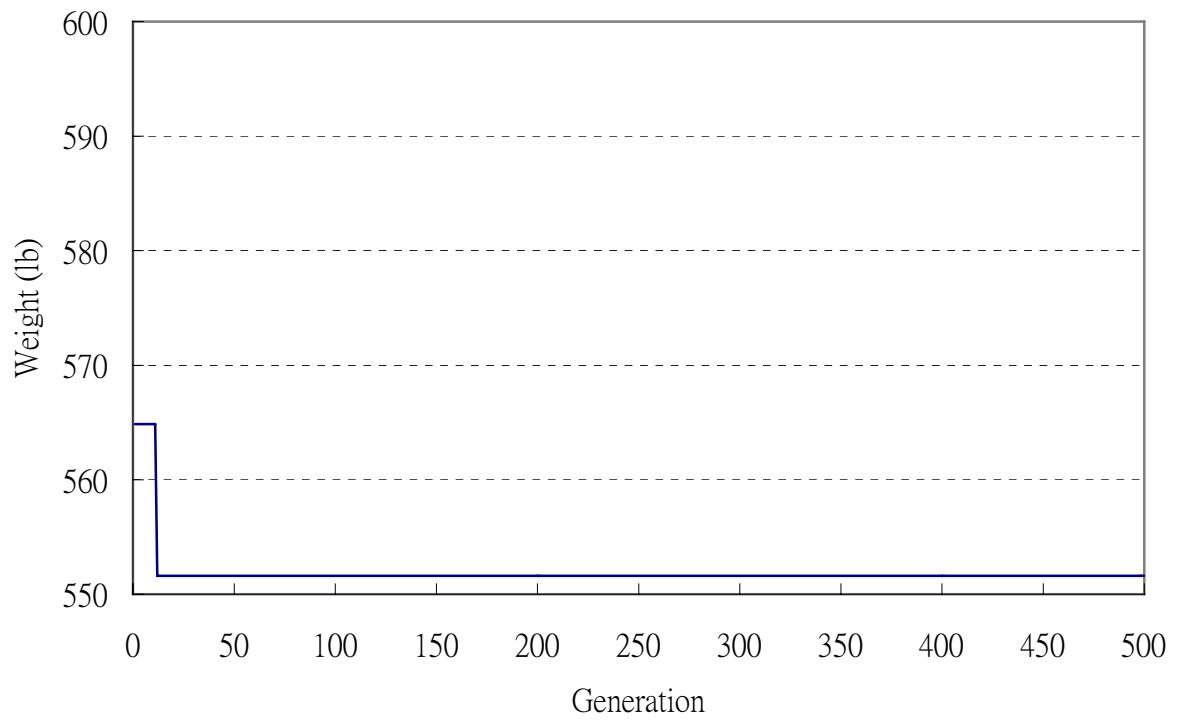


圖 4.1.8 例二，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

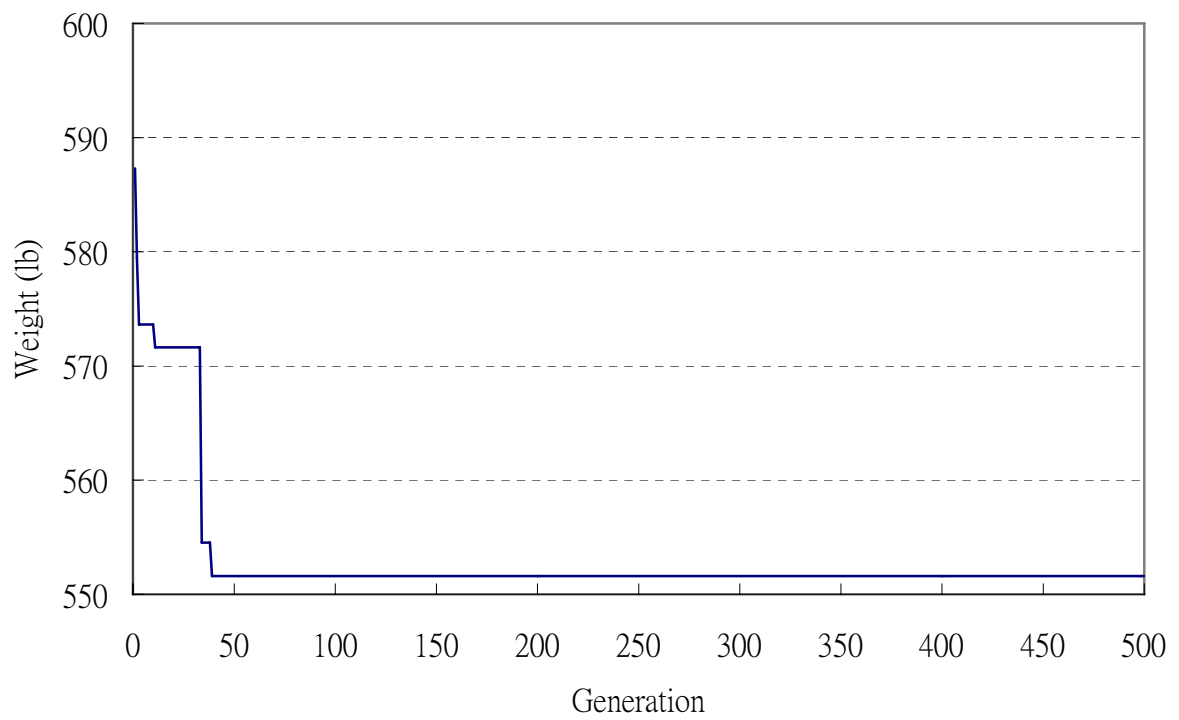


圖 4.1.9 例二，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

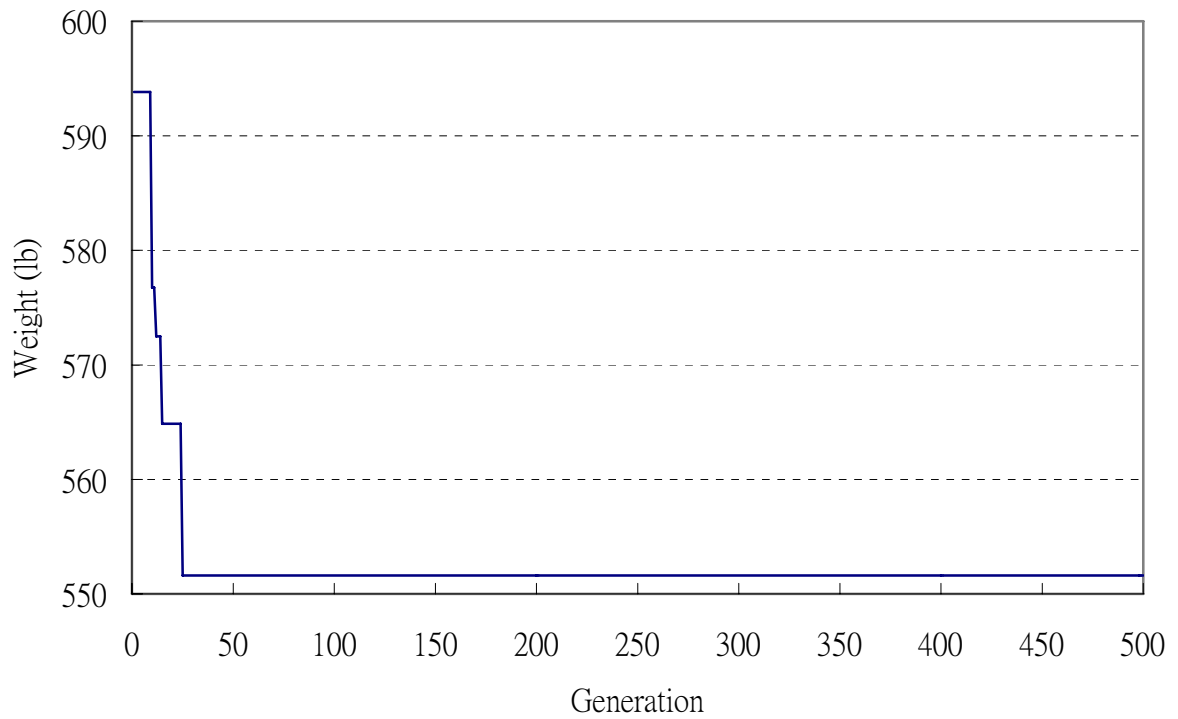


圖 4.1.10 例二，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

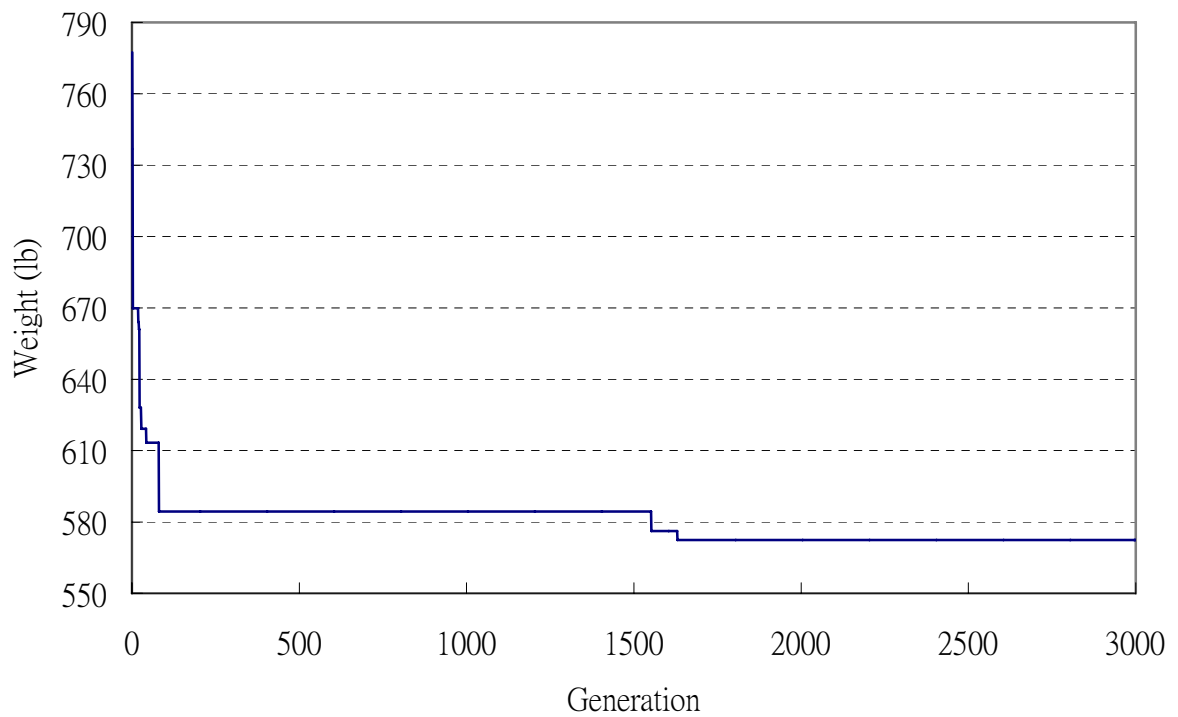


圖 4.1.11 例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

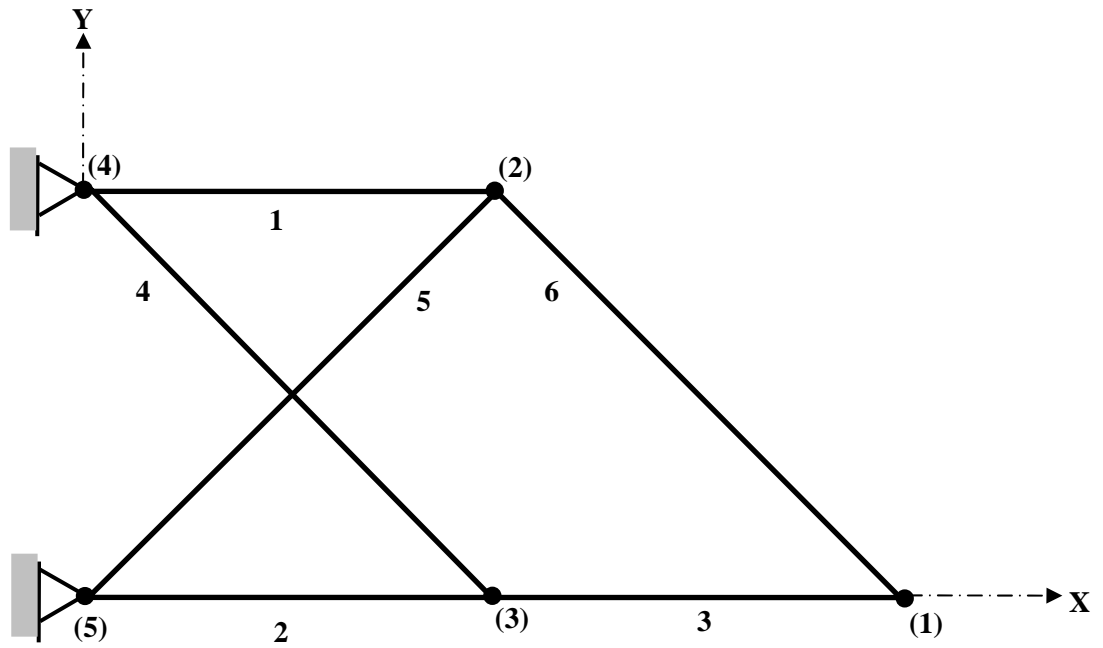


圖 4.2.1 例一，平面十根桿件桁架的最佳拓樸形式

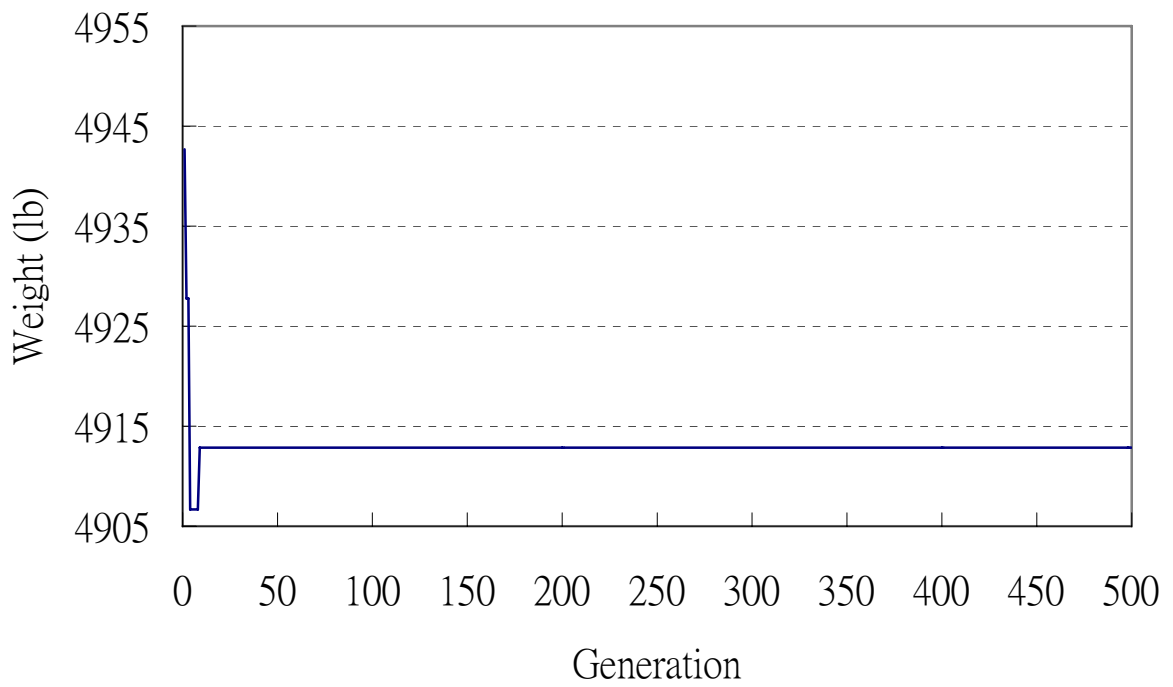


圖 4.2.2 例一，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

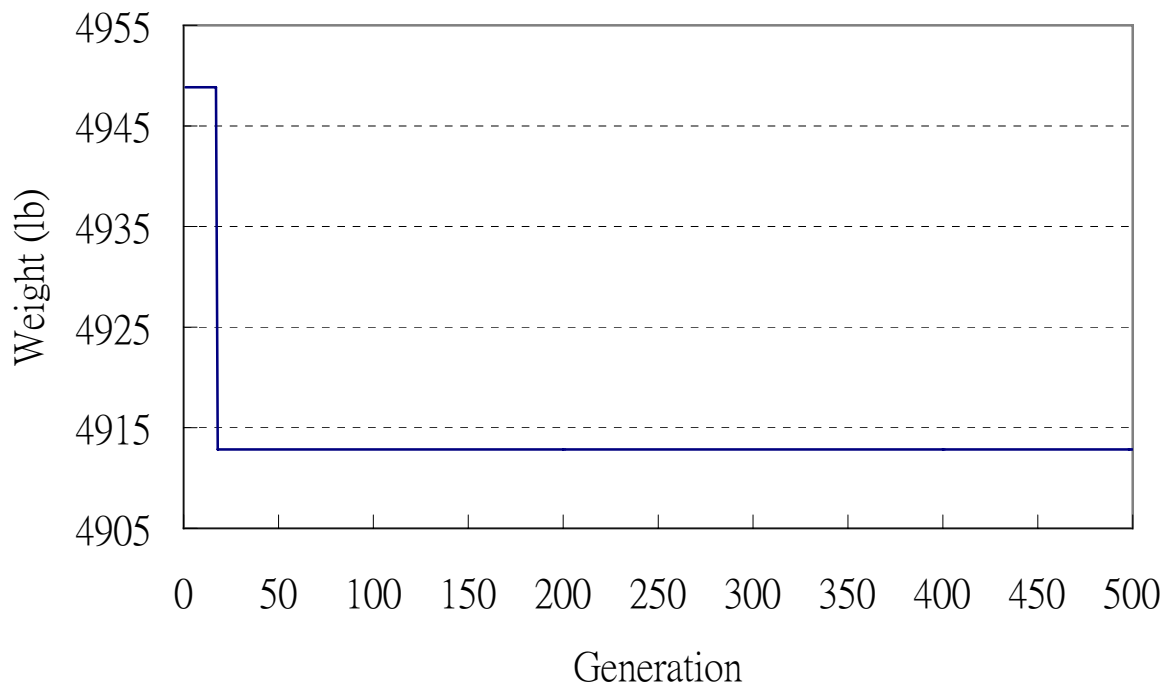


圖 4.2.3 例一，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

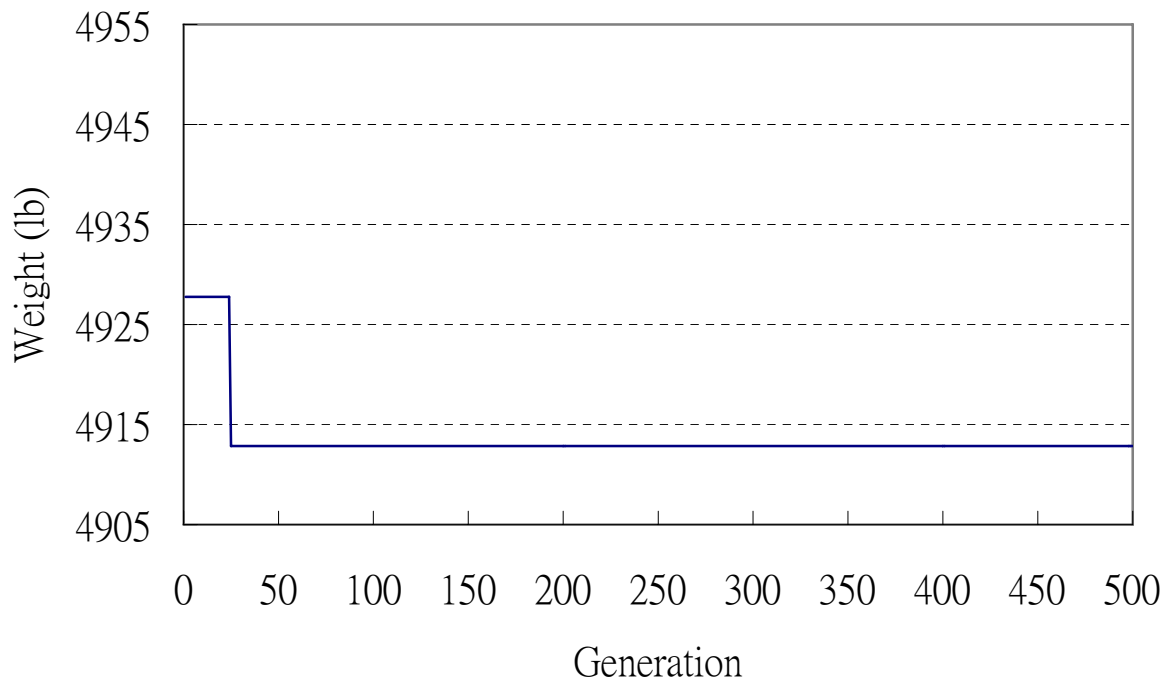


圖 4.2.4 例一，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

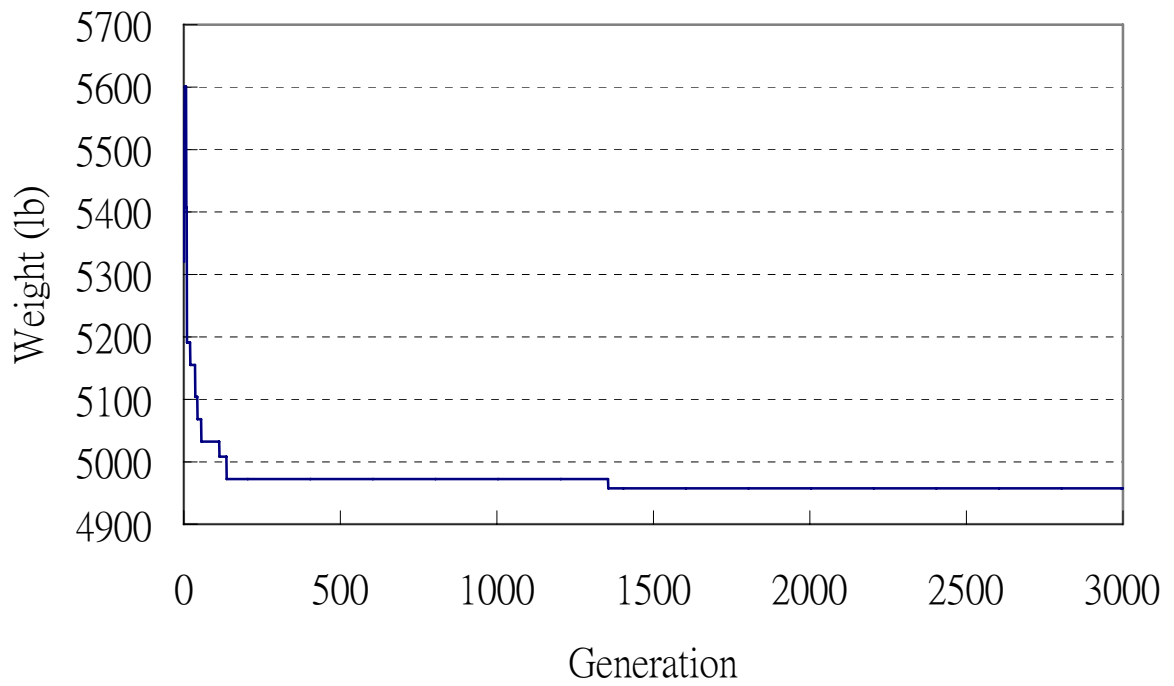


圖 4.2.5 例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

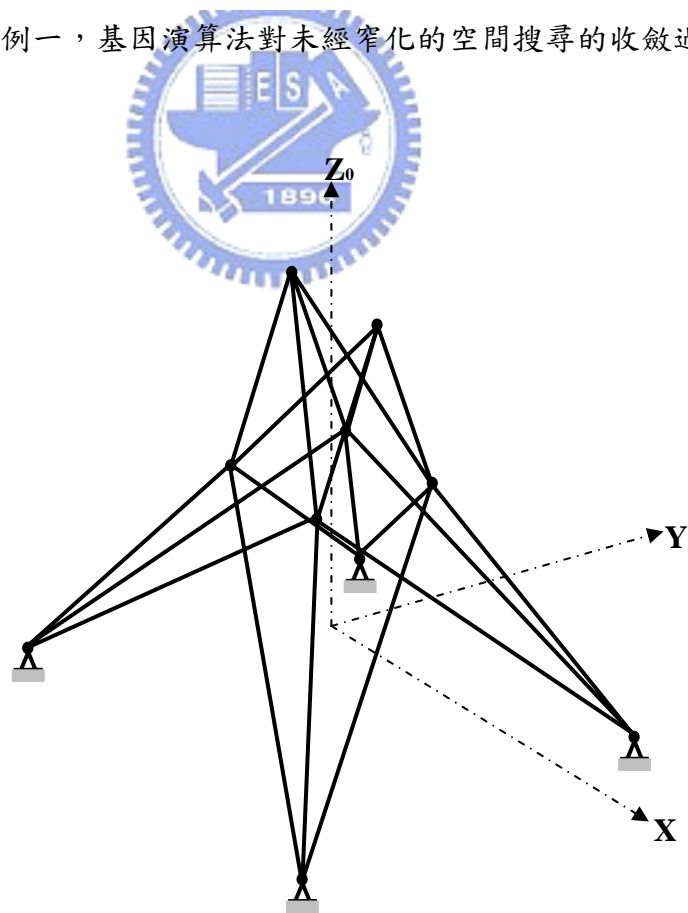


圖 4.2.6 例二，空間 25 根桿件桁架的最佳拓樸形式示意圖

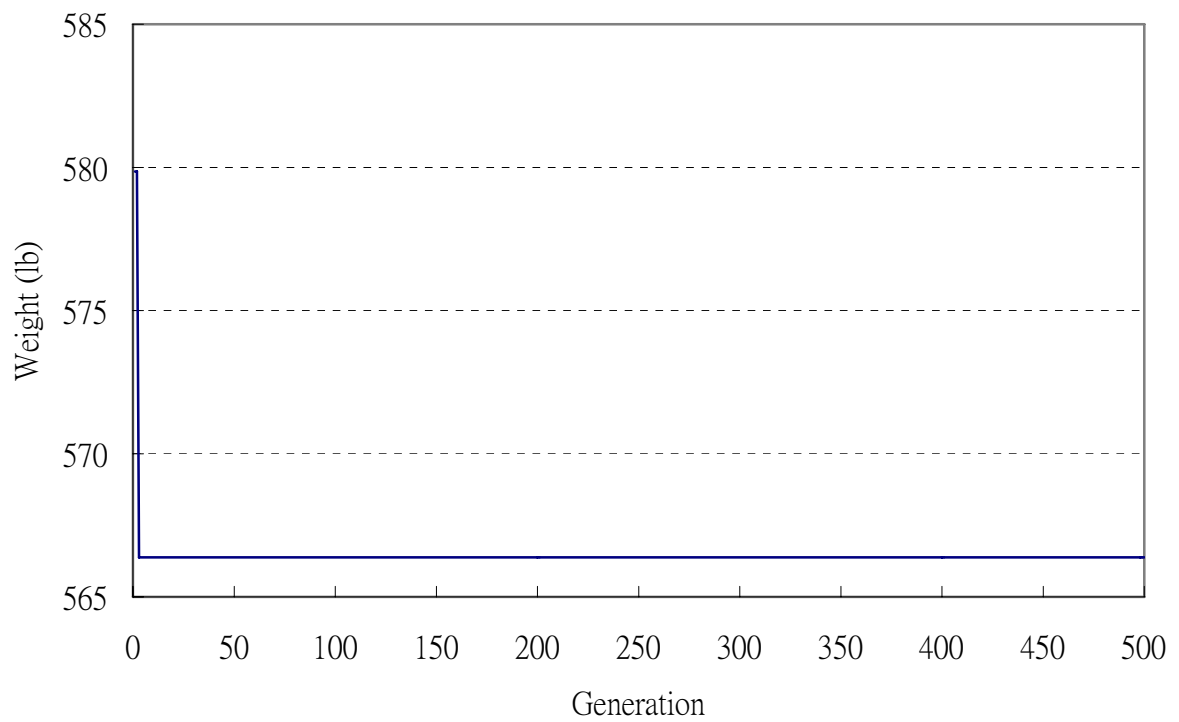


圖 4.2.7 例二，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

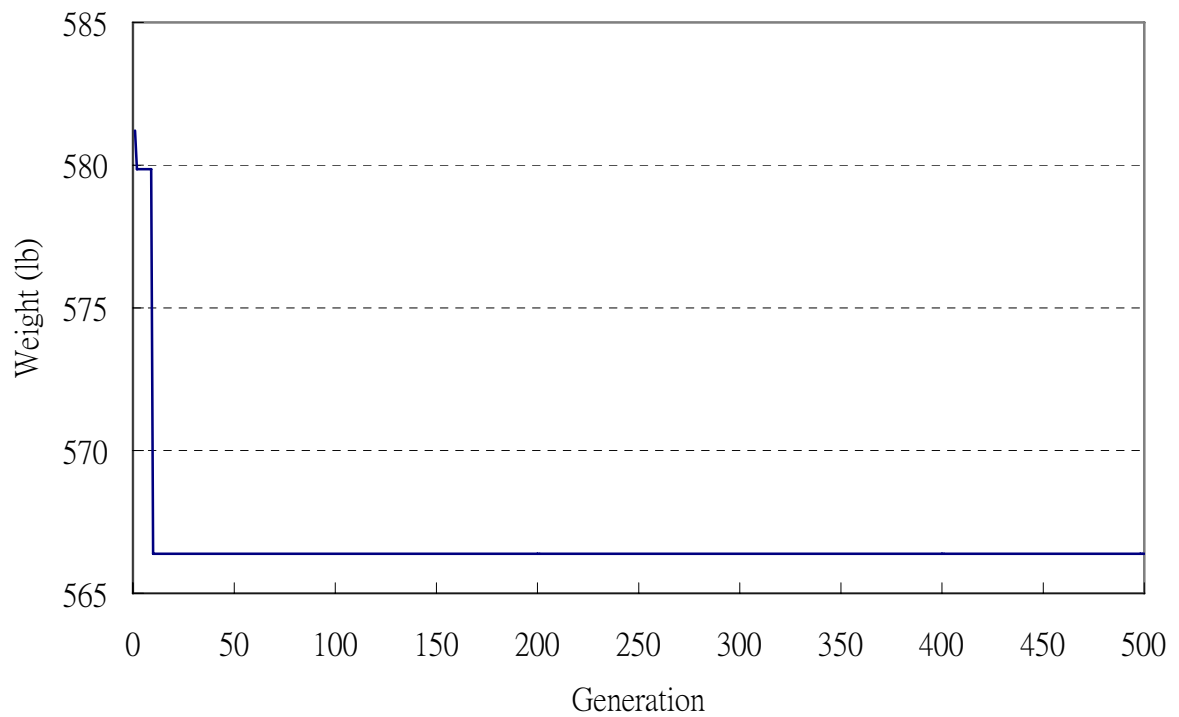


圖 4.2.8 例二，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

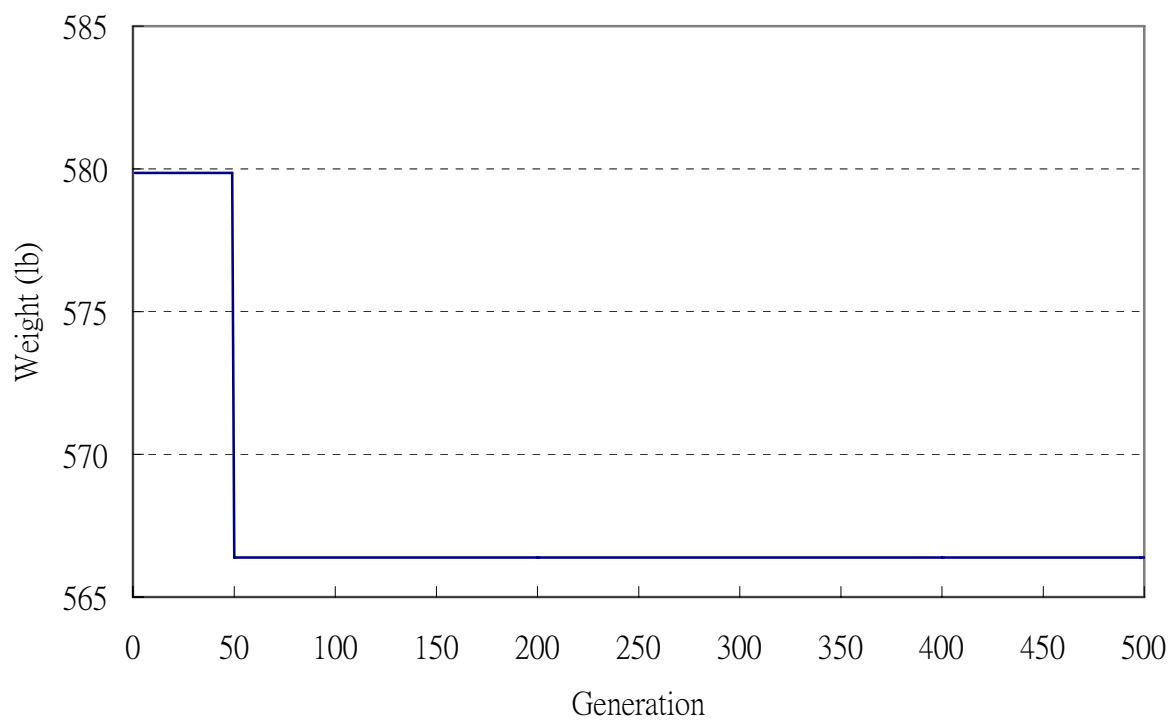


圖 4.2.9 例二，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

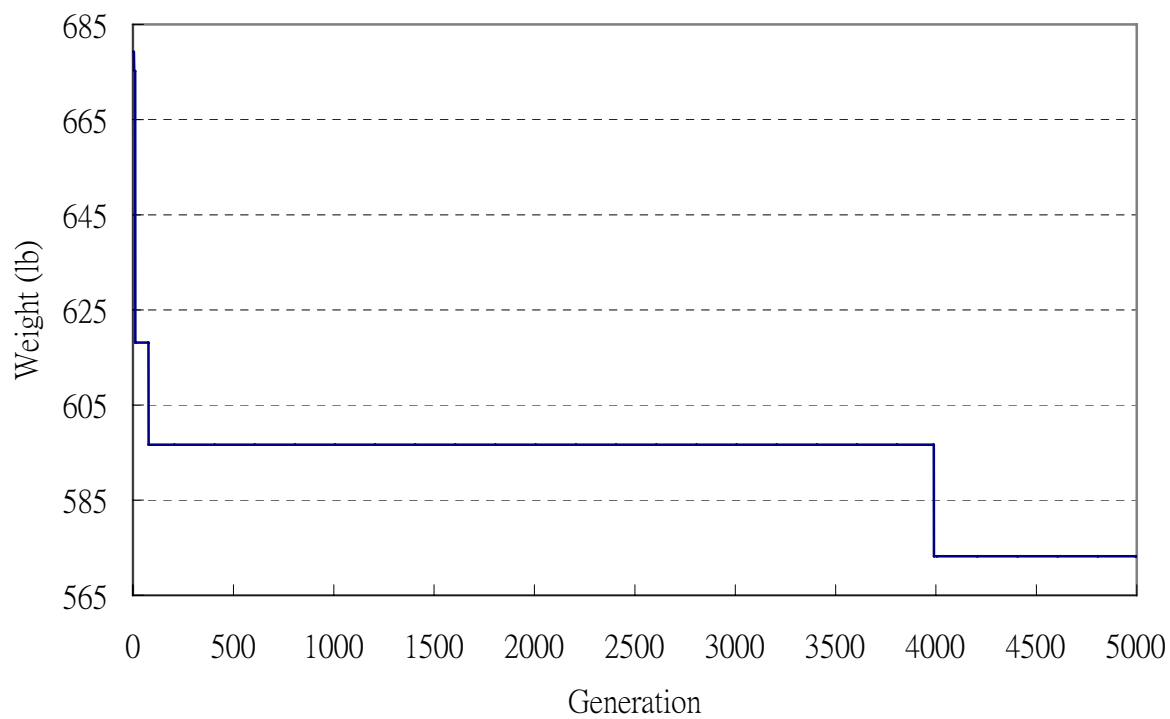


圖 4.2.10 例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

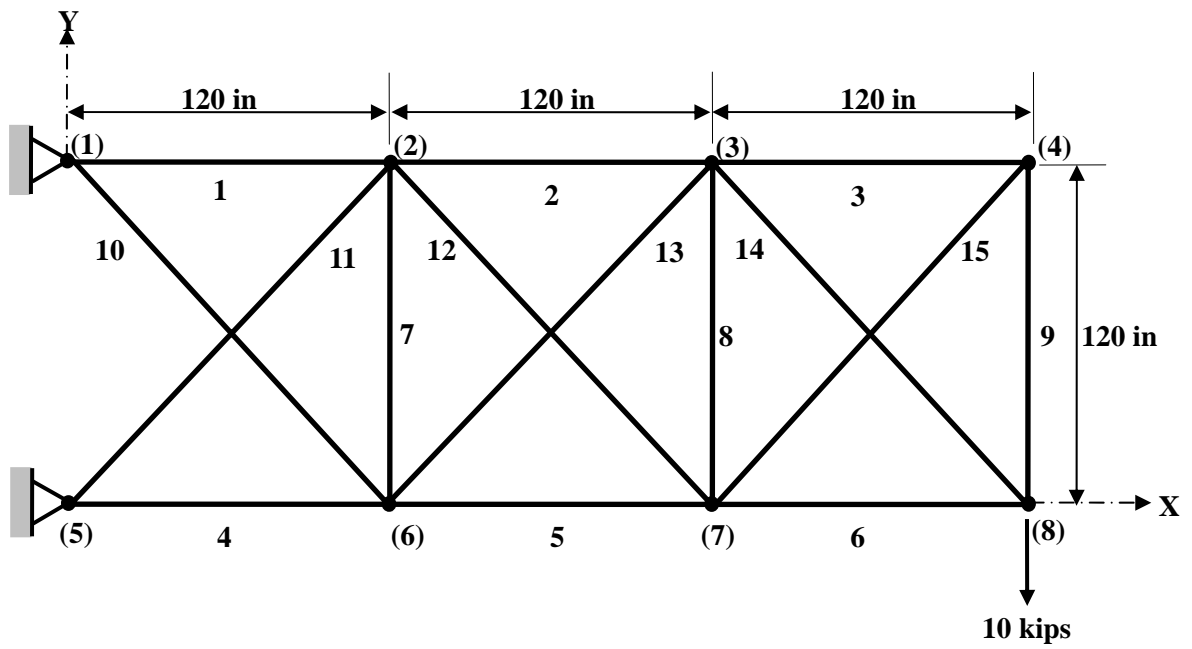


圖 4.3.1 例一，平面 15 根桿件桁架示意圖

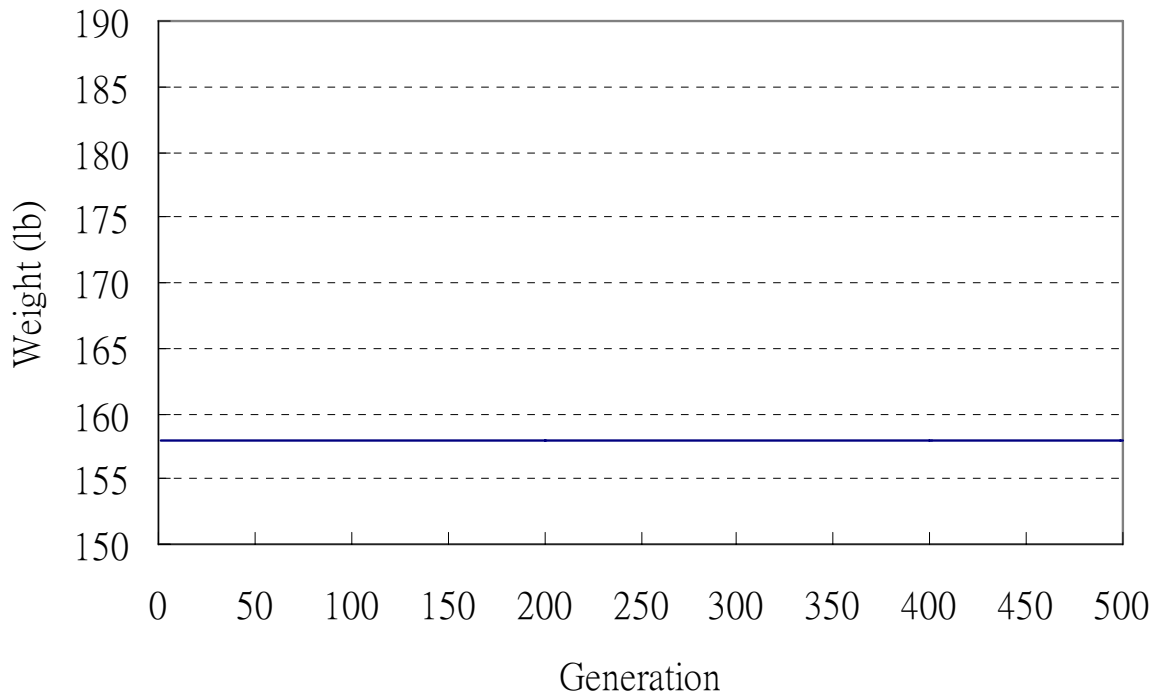


圖 4.3.2 例一，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

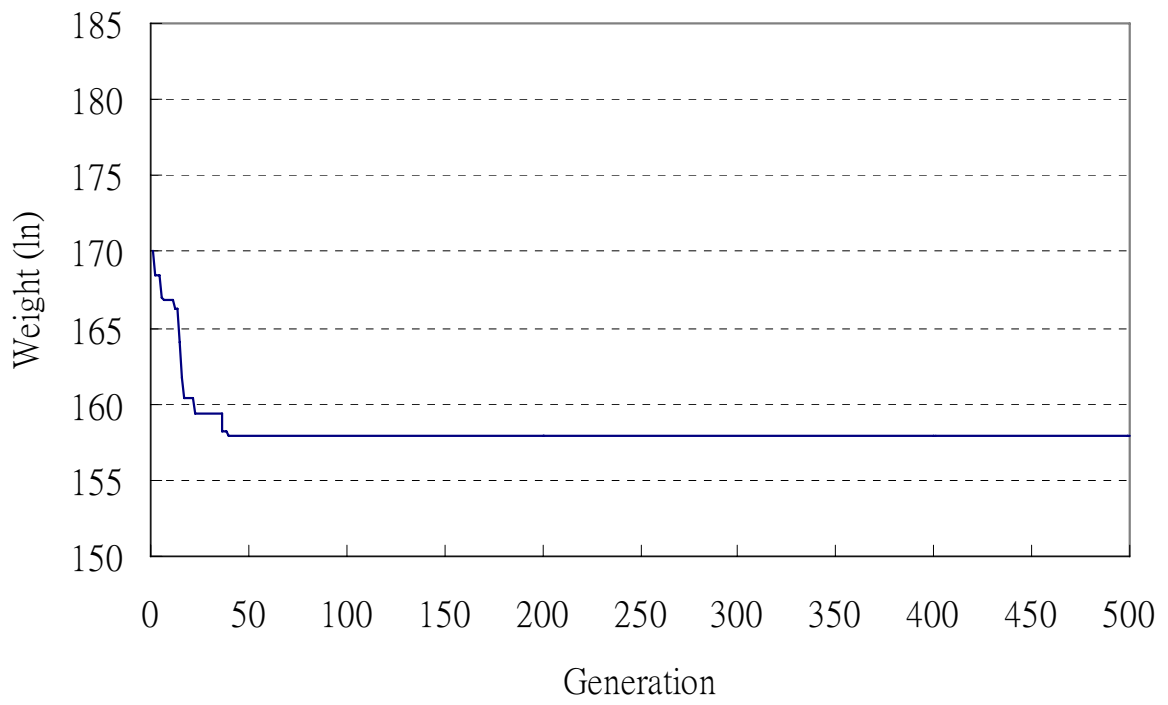


圖 4.3.3 例一，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

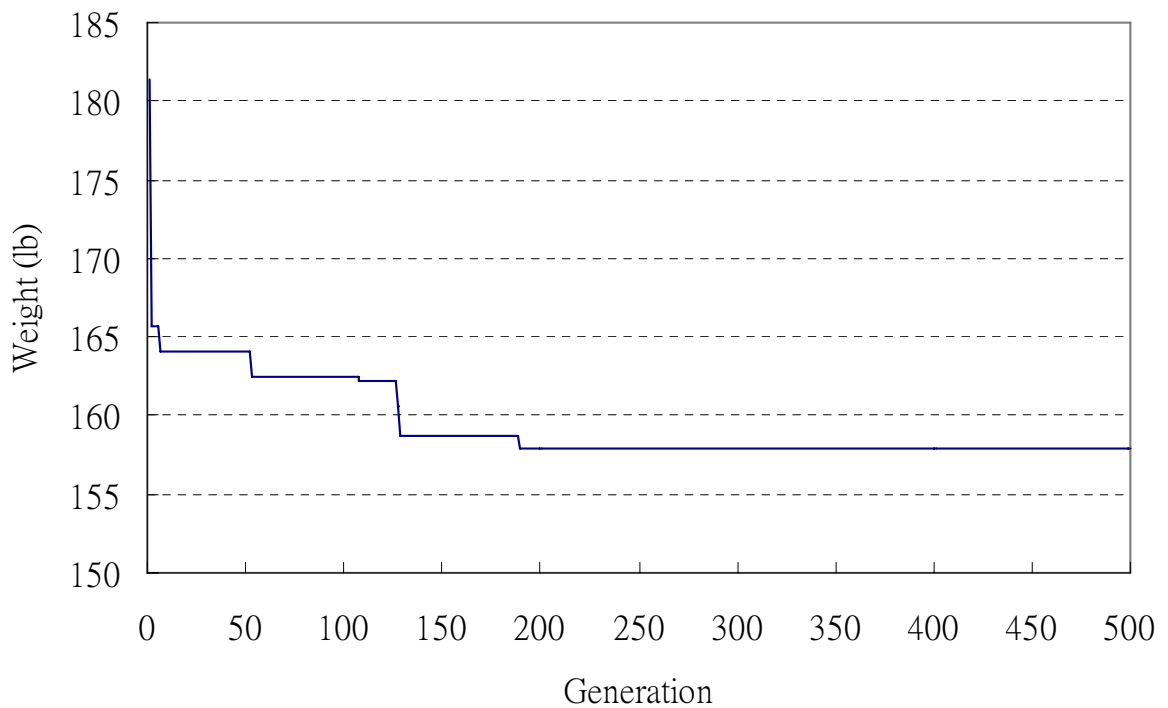


圖 4.3.4 例一，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

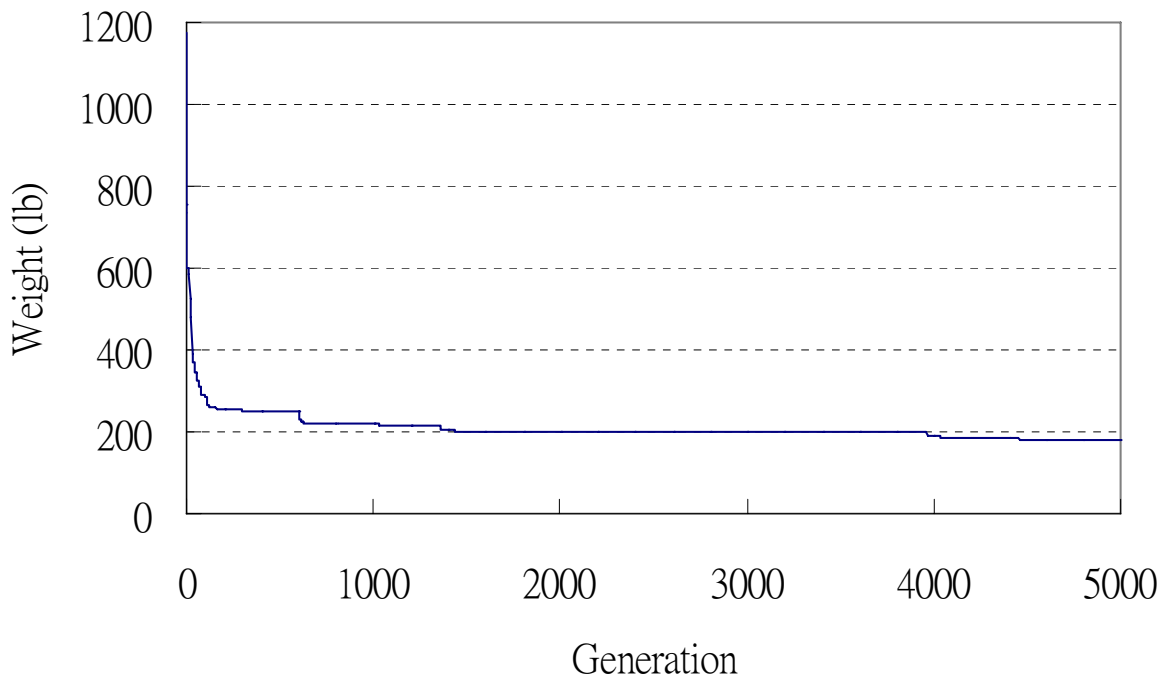


圖 4.3.5 例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

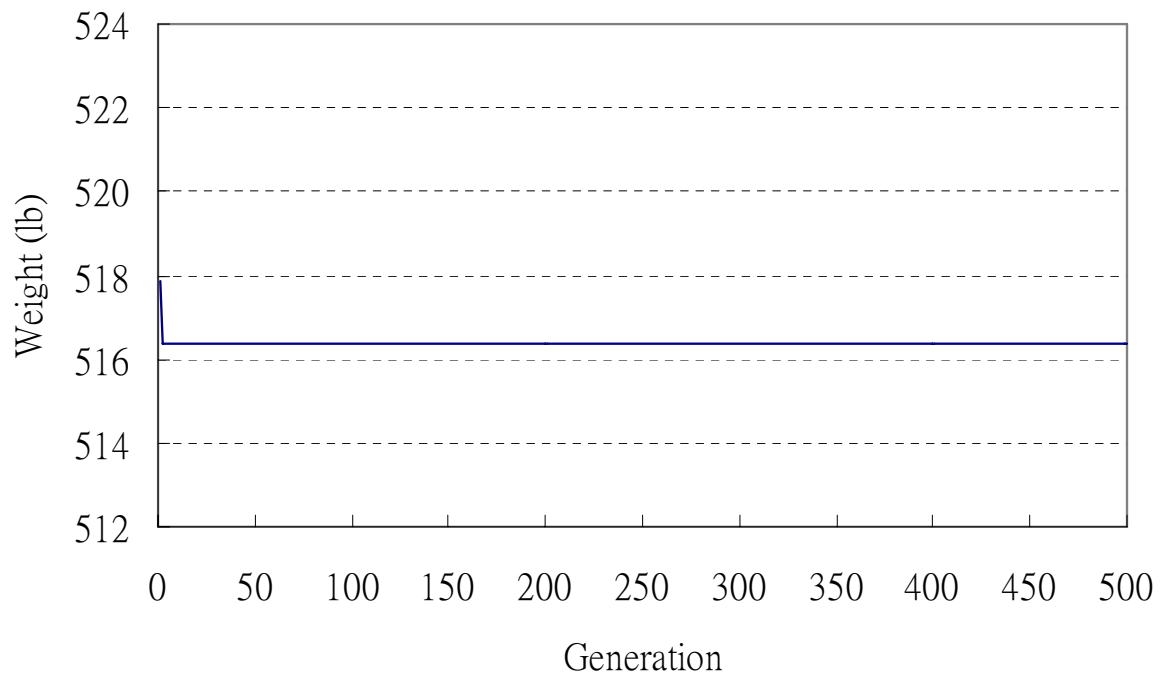


圖 4.3.6 例二，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

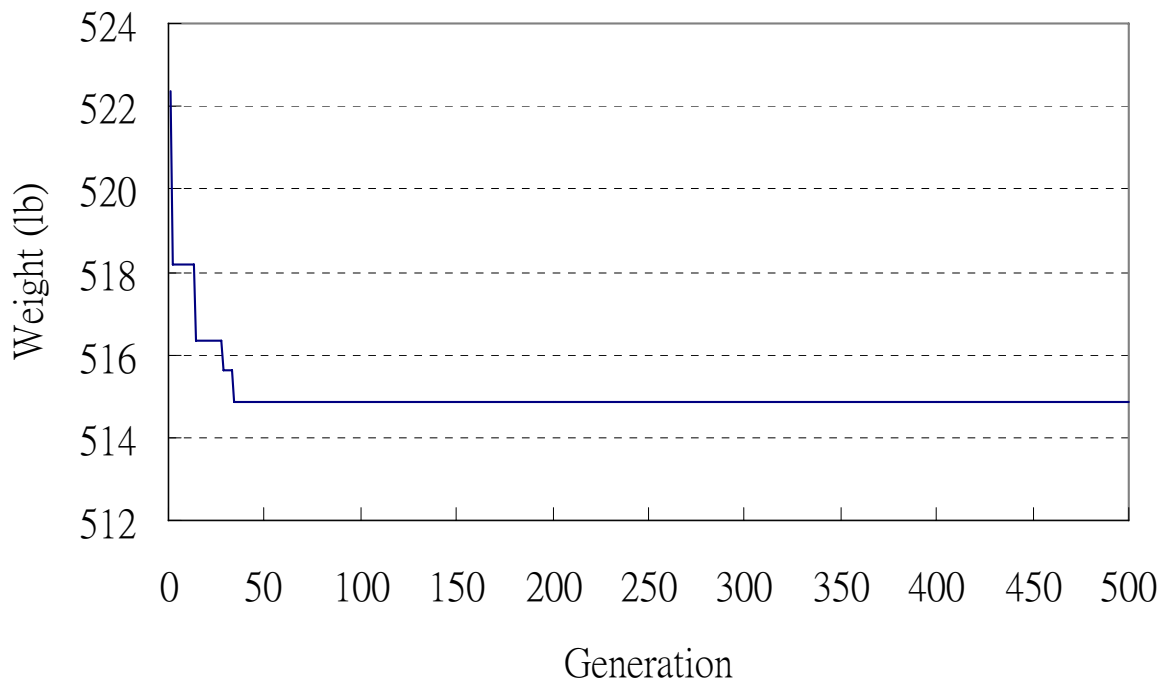


圖 4.3.7 例二，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

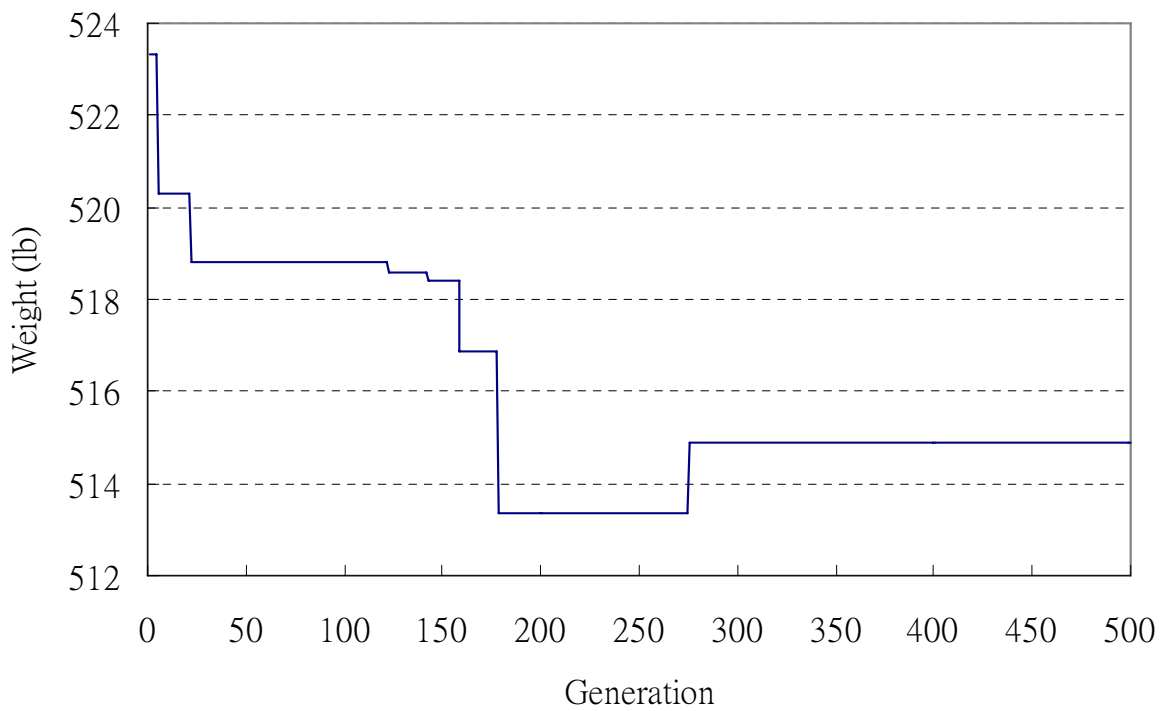


圖 4.3.8 例二，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

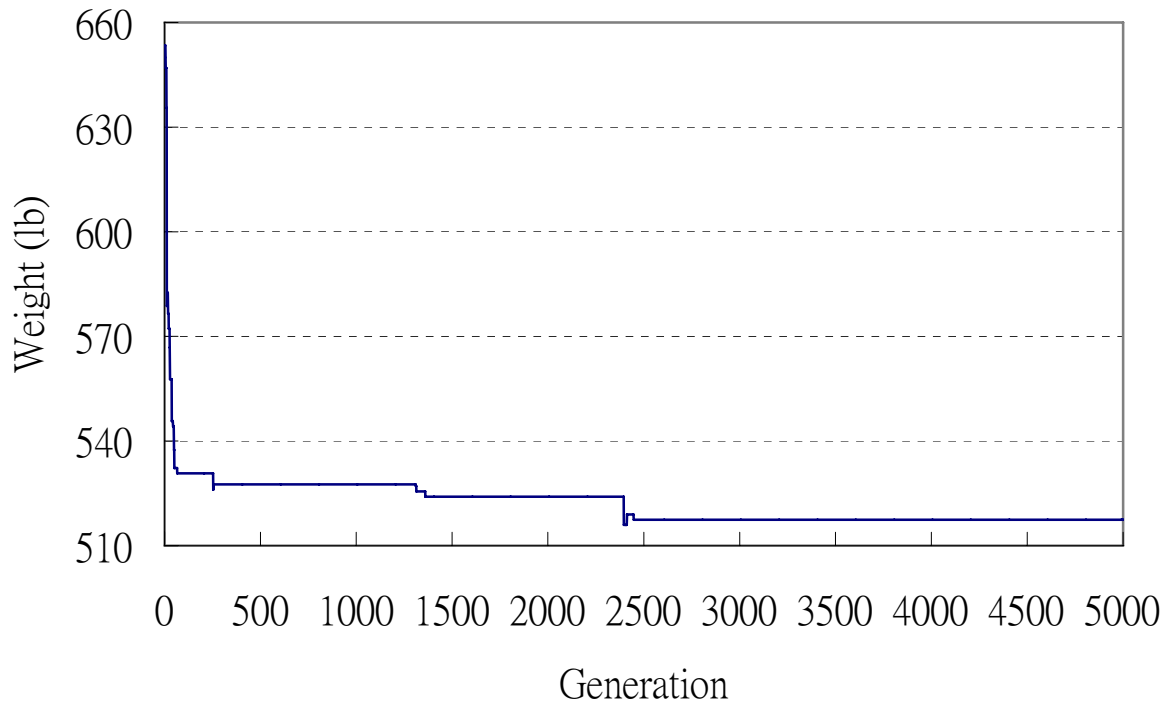


圖 4.3.9 例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程



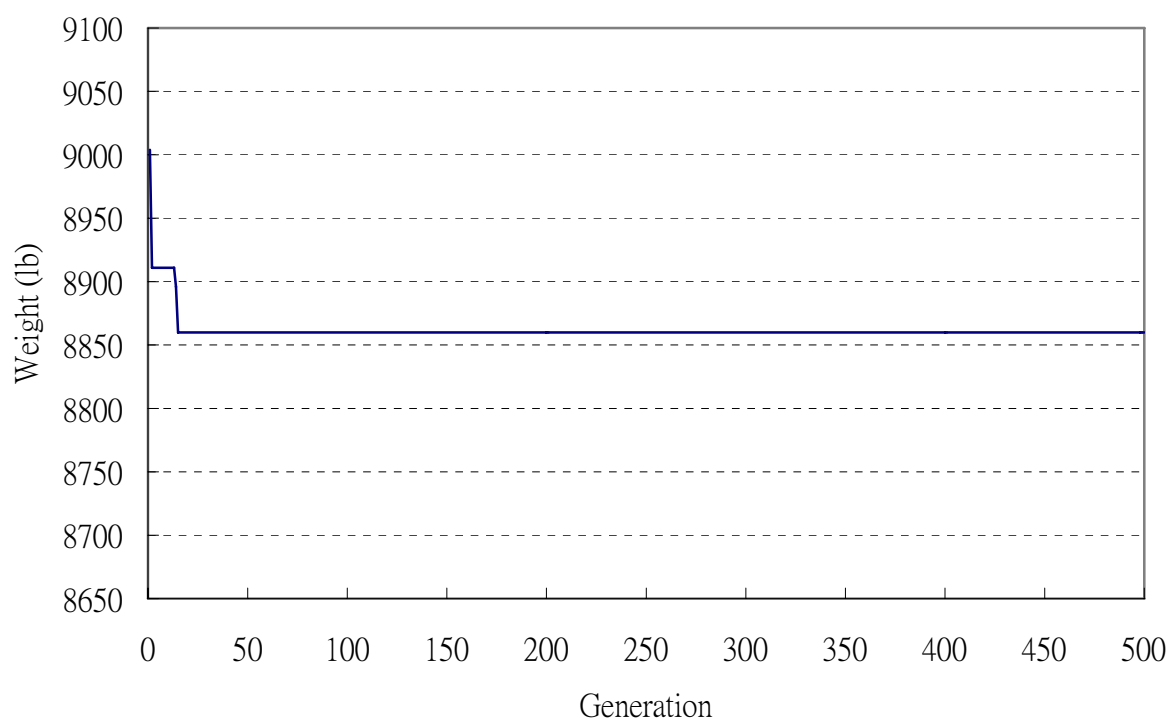


圖 4.4.1 例一，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

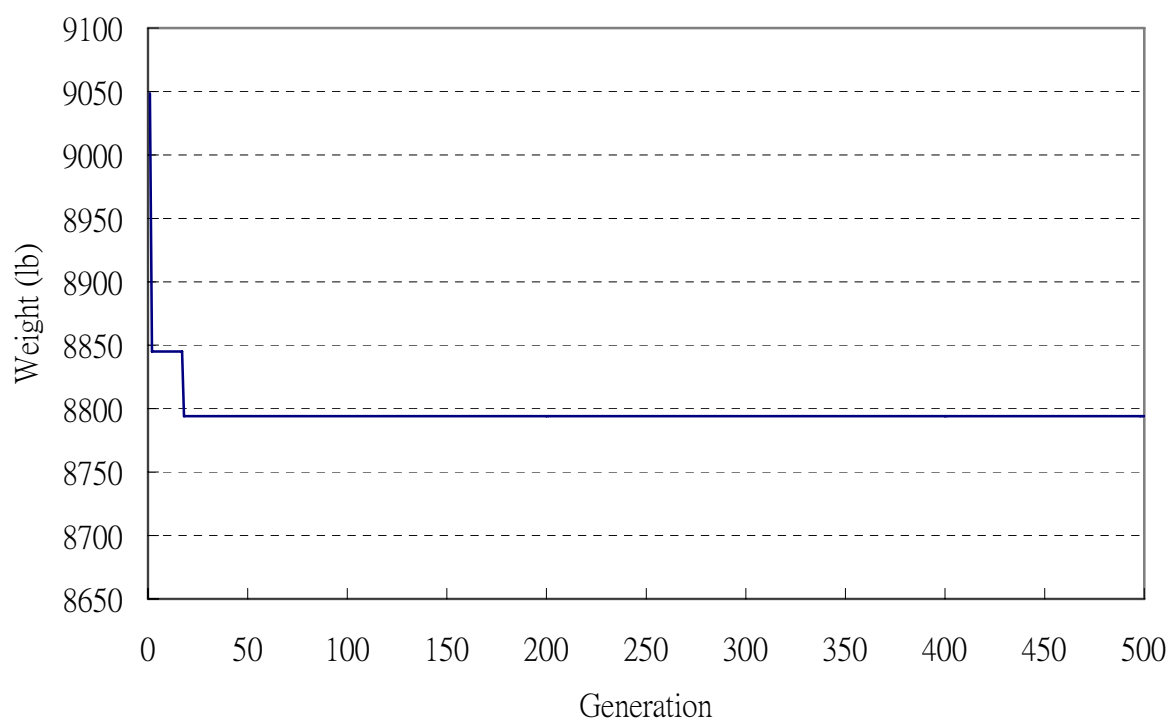


圖 4.4.2 例一，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

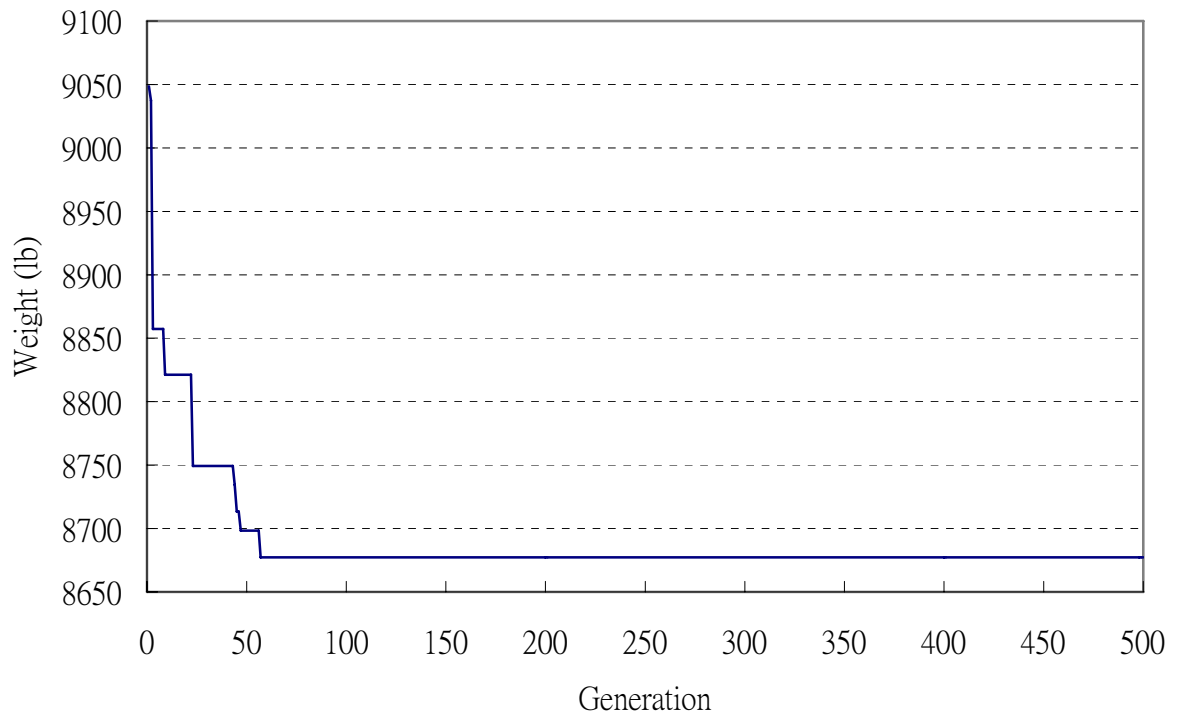


圖 4.4.3 例一，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

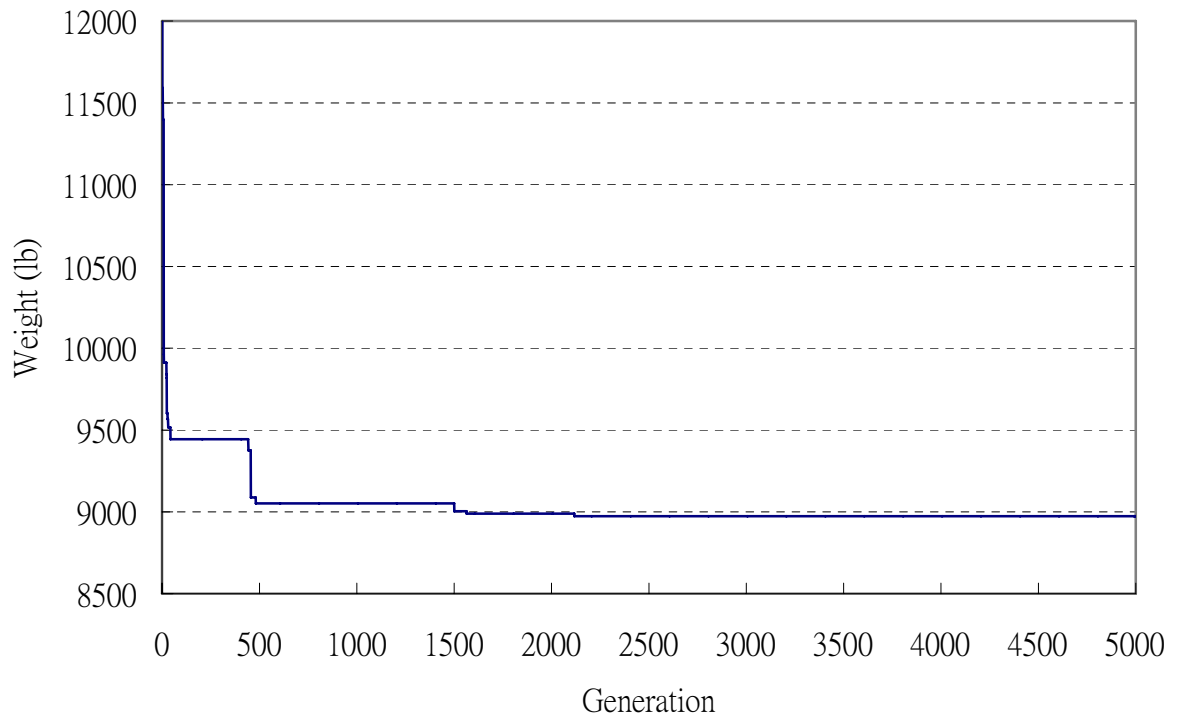


圖 4.4.4 例一，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

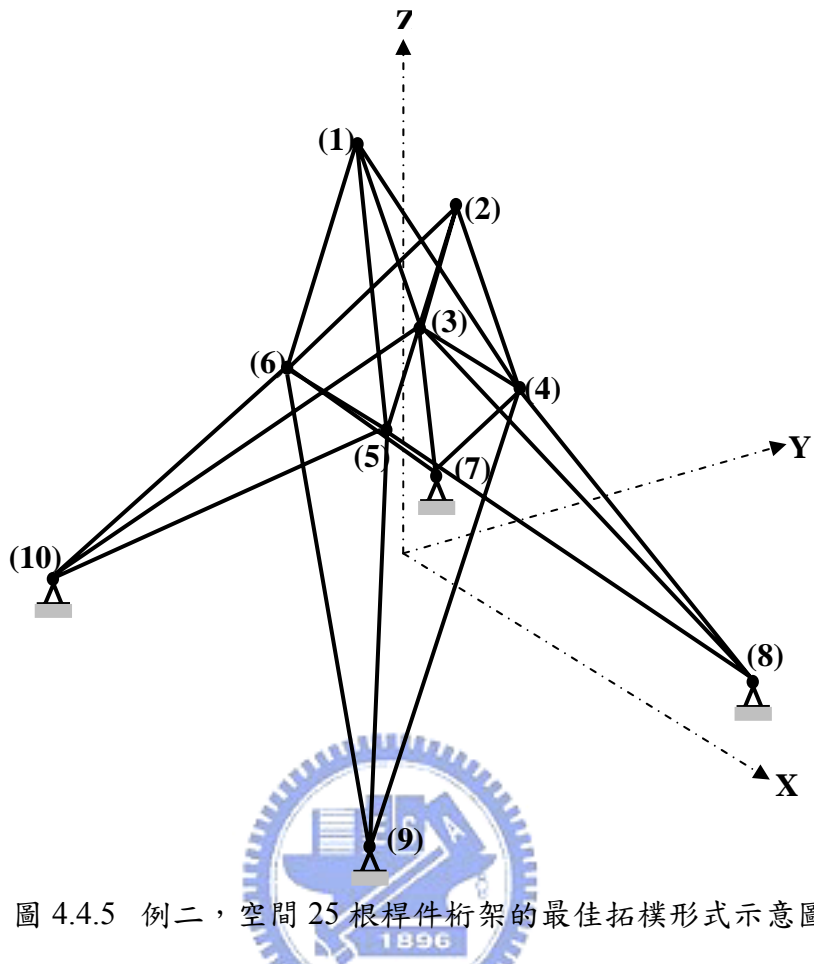


圖 4.4.5 例二，空間 25 根桿件桁架的最佳拓撲形式示意圖

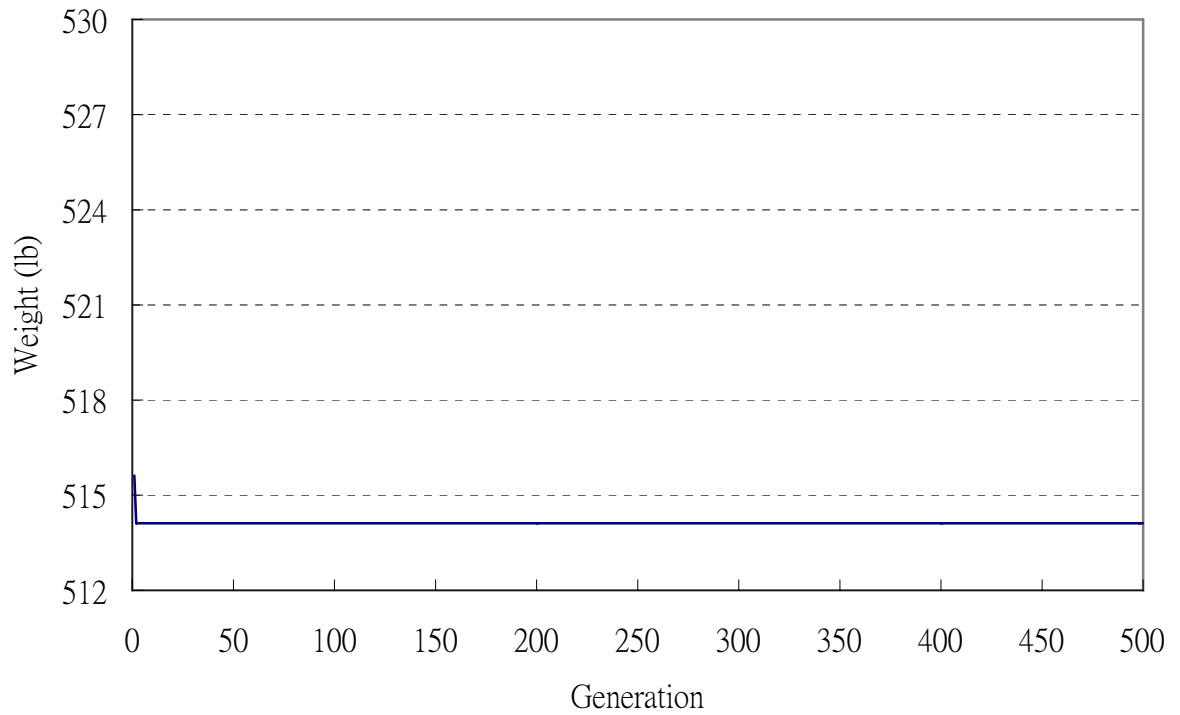


圖 4.4.6 例二，基因演算法對 Case 1 窄化空間搜尋的收斂過程

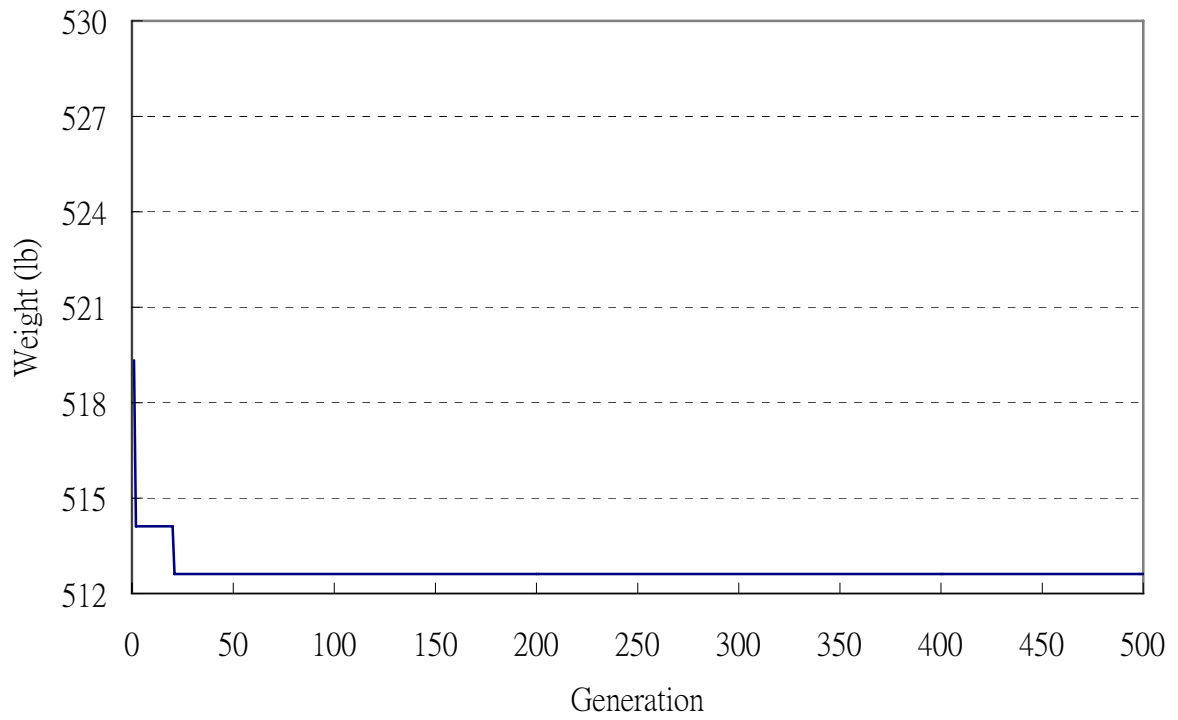


圖 4.4.7 例二，基因演算法對 Case 2 窄化空間搜尋的收斂過程

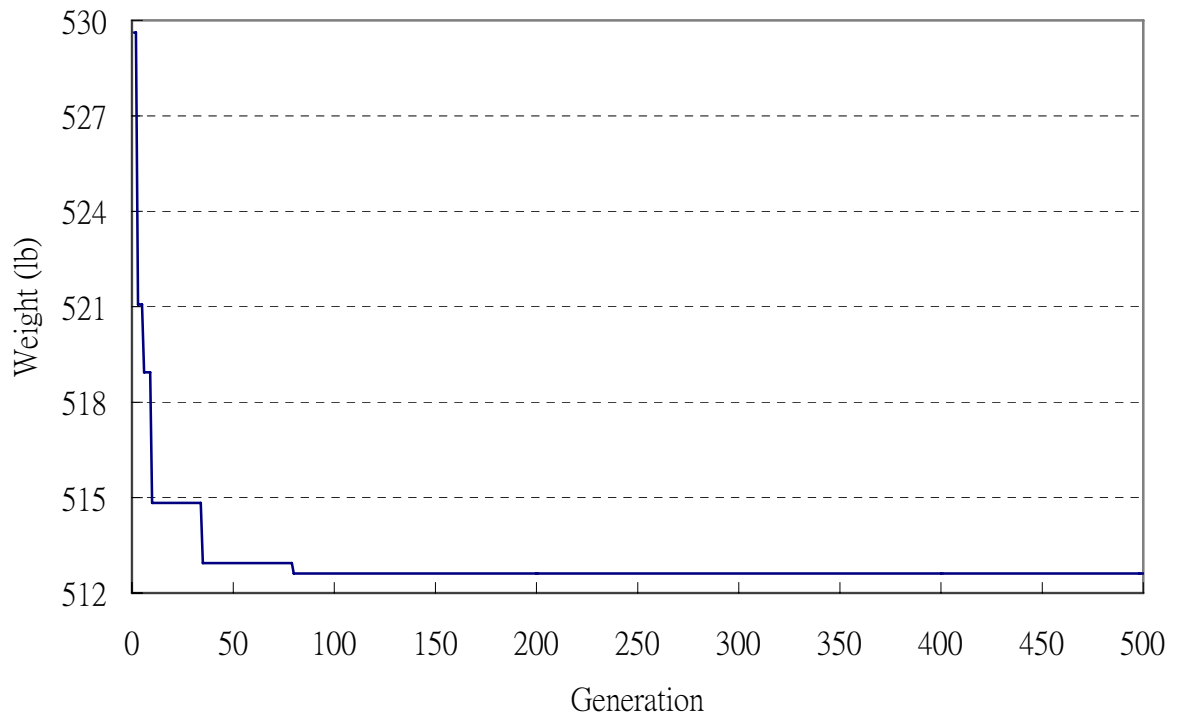


圖 4.4.8 例二，基因演算法對 Case 3 窄化空間搜尋的收斂過程

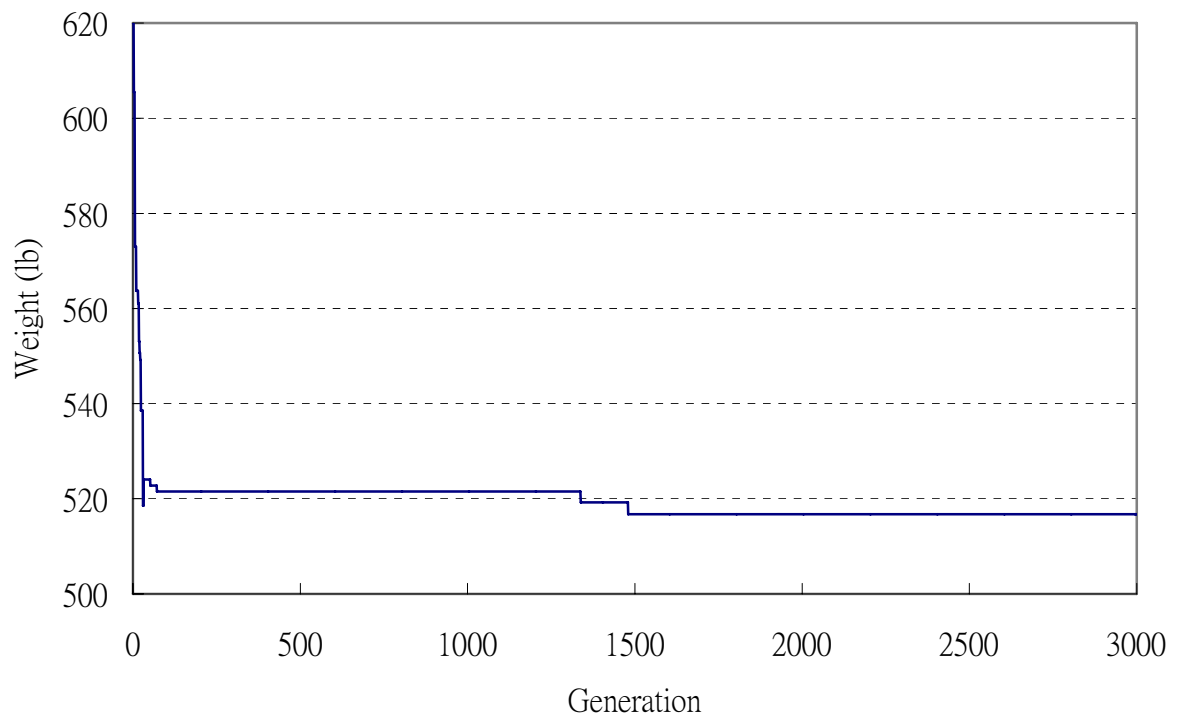


圖 4.4.9 例二，基因演算法對未經窄化的空間搜尋的收斂過程

