

國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

利用 Ritz 法分析懸臂斜形厚板振動

**Vibrations of cantilevered skew thick plates**

**via the Ritz method**

研究生：羅勝彥

指導教授：黃炯憲 博士

中華民國九十七年一月

# 利用 Ritz 法分析懸臂斜形厚板振動

研究生：羅勝彥

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘要

為獲得複雜的應力奇異性問題的精確數值解，準確地描述應力奇異行為是非常重要的。本研究以 Reddy 三階板理論建構厚板之平衡方程式，並推導其幾何奇異應力之漸近解角函數。於 Ritz 法之允許函數引入(1) 完備集之多項式函數及(2)可精確描述應力奇異行為之角函數，求解懸臂斜形板之自然振動頻率。以完整之收斂性分析驗證角函數可有效加速求解自然振動頻率之收斂速度。當斜角愈大時，角函數之效率愈高。最後，探討不同幾何形狀對懸臂斜形厚板自然振動頻率之影響。

# **Vibrations of cantilevered skew thick plates via the Ritz method**

Student : Sang-Yeng Lo

Adviser : C.S.Huang

Department of Civil Engineering

Natinoal Chiao Tung University

## **Abstract**

Correctly describing the behaviors of stress singularities is essential for obtaining accurate numerical solutions of complicated problems with stress singularities. This work derives asymptotic solutions on corner functions for thick plates with geometrically induced stress singularities based on Reddy's third order plate theory. Complete polynomial functions and corner functions which can accurately describe stress singularities are used for admissible functions of Ritz's method to solve the free vibration frequencies of cantilever skew plates. The effects of corner functions on obtaining accurate numerical solutions for native frequencies of plates are demonstrated through comprehensive convergence studies. Finally, accurate non-dimensional frequencies and mode shapes are tabulated for cantilevered skew thick plates having various geometrical shapes.

## 誌謝

在交大的求學生涯隨著這篇論文的完成及將進入了尾聲，回顧研究所這段時間的種種，首先要感謝指導教授 黃炯憲博士在課業上對我的教導與督促，讓我的論文能夠順利完成。而老師所帶給我的學習態度與處事精神更是我研究生涯中最珍貴的收穫，在這裡要表達我最誠摯的感謝。另外，也感謝劉俊秀老師、洪士林老師與鄭復平老師在口試期間對這份論文的寶貴建議，使本論文能夠更加完善。

這段時間以來承蒙博士班學長明儒與威智每每在深夜的時候與我一起在研究室努力，幫我排除了許多研究上的困難。碩班學長存峰、甚謙、加地、志偉與宇翔對我的照顧，讓我在修課上有人可以解惑，與你們在一起的時候總是笑語不斷。同窗好友增蔚、佳穎與嘉宜在整個研究所期間有人可以互相打氣、一起扶持。學弟石仲維、劉竟俞與李昱成總是幫研究室帶來許多的歡樂，也在我的研究上幫了許多的忙，使我可以順利畢業。階梯有氧幫的伶艷、榕崧、思棉、鈺澄、容瑩與陳晰，由於有你們的陪伴，讓我在學習之虞尚有可以鍛鍊體魄的好去處，除了讓我成功減重，更讓我成為了號稱階梯有氧助教的有氧王。高中死黨鈺芄與俊豪則是我吐苦水的對象，使我在心情鬱悶的時候有個傾吐的地方。有你們這些好友的陪伴，讓我的生活多采多姿。而與你們相處的時光也將成為我最珍貴的回憶。

除此之外，最要感謝的是我的父母及弟弟，謝謝你們對我一直以來的支持與鼓勵，成為我最主要的精神支柱，在這裡我要將獲得碩士學位的喜悅與你們分享。如今我即將進入人生的下一個階段，因為你們的支持及祝福，我將以更積極進取的心態面對接下來的挑戰，最後僅以此論文獻給所有愛護及關懷過我的人。

勝彥 2008年1月18日

# 目錄

頁次

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	vi
表目錄	.....	vii
圖目錄	.....	x
第一章	緒論.....	1
1.1	研究動機與方法.....	1
1.2	文獻回顧.....	2
1.3	內容概要.....	4
第二章	角函數推導.....	6
2.1	面外之角函數推導.....	6
2.1.1	級數解架構.....	10

2.1.2	特徵方程式與角函數.....	15
2.2	面內之角函數推導.....	18
2.2.1	級數解架構.....	19
第三章	懸臂斜形板之振動分析.....	23
3.1	以 Ritz 法求取自然振動頻率.....	23
3.1.1	位移場、應變場與應力場.....	23
3.1.2	應變能與動能.....	27
3.2	允許函數.....	29
第四章	數值資料結果.....	34
4.1	收斂性分析.....	34
4.2	懸臂斜形厚板數值結果.....	40
4.2.1	數值結果分析.....	40
4.2.2	振態圖.....	43
第五章	結論與建議.....	45
5.1	結論.....	45

5.2 建議..... 46

參考文獻 ..... 47



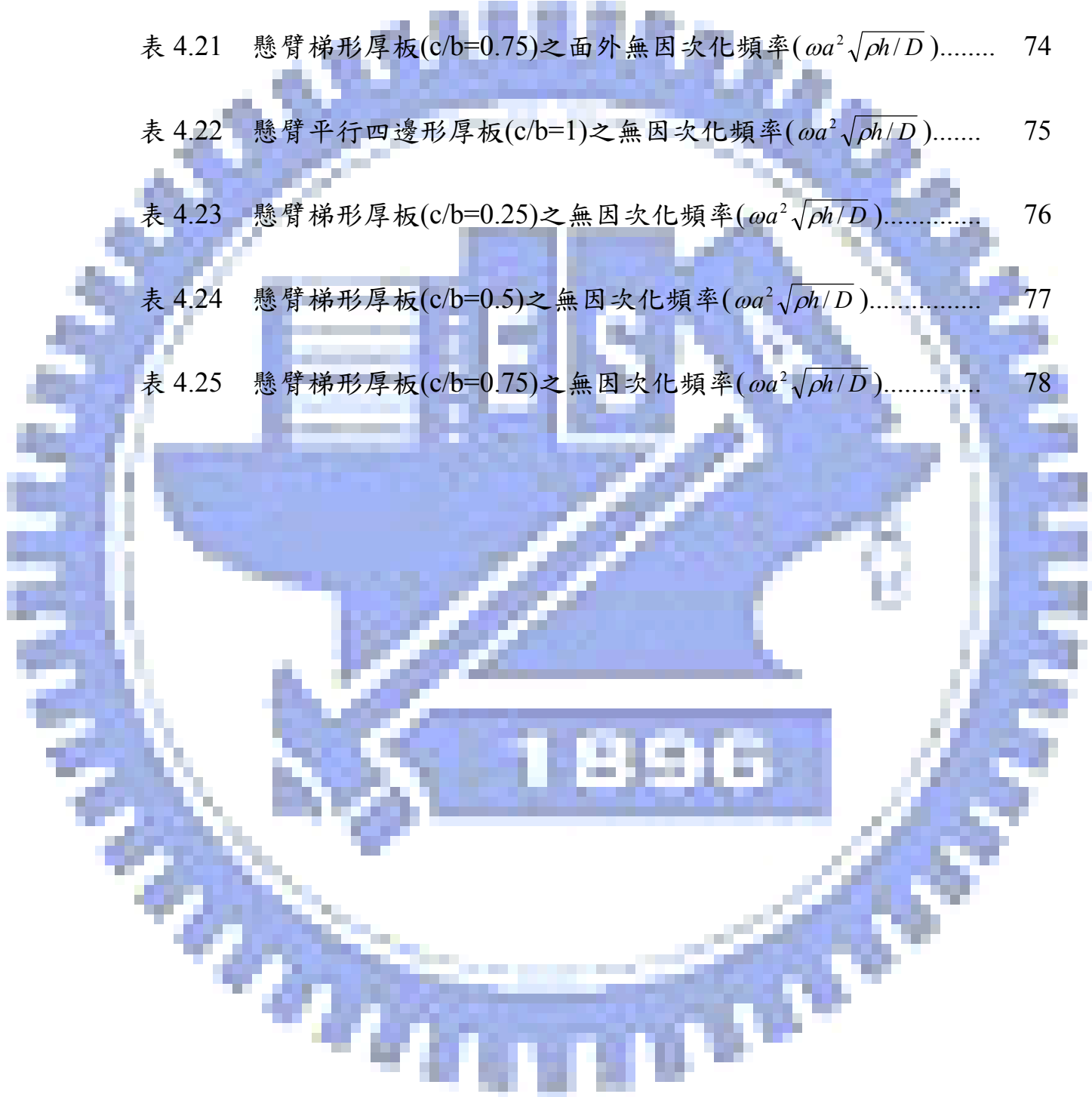
# 表目錄

	頁次
表 2.1 面外之線性齊次方程式係數.....	50
表 2.2 面內之線性齊次方程式係數.....	53
表 4.1 懸臂平行四邊形厚板面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ ).....	54
表 4.2 懸臂平行四邊形厚板無面外因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ ).....	55
表 4.3 懸臂平行四邊形厚板面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ ).....	56
表 4.4 懸臂平行四邊形厚板面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ ).....	57
表 4.5 懸臂平行四邊形厚板面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ ).....	58
表 4.6 懸臂平行四邊形厚板面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) 之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ ).....	59
表 4.7 懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ )	



	之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ ).....	60
表 4.8	懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ ).....	61
表 4.9	懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ ).....	62
表 4.10	懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ ).....	63
表 4.11	懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ ).....	64
表 4.12	懸臂平行四邊形厚板面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ ).....	65
表 4.13	懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	
	之收斂性分析.....	66
表 4.14	懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )之面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	67
表 4.15	懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )之面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	68
表 4.16	懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )之面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	69
表 4.17	懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )之面內無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	70
表 4.18	懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )之面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )	71

表 4.19	懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )之面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	72
表 4.20	懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )之面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	73
表 4.21	懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )之面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	74
表 4.22	懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	75
表 4.23	懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	76
表 4.24	懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	77
表 4.25	懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ).....	78



## 圖目錄

	頁次
圖 1.1 斜形板示意圖(固定於 $\theta=0$ 處).....	79
圖 3.1 卡氏座標與極座標之轉換關係.....	80
圖 4.1a 懸臂平行四邊形厚板振態圖 ( $\beta=30^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.1$ ).....	81
圖 4.1b 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=45^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.1$ ).....	82
圖 4.1c 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=60^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.1$ ).....	83
圖 4.1d 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=75^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.1$ ).....	84
圖 4.1e 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=30^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.2$ ).....	85
圖 4.1f 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=45^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.2$ ).....	86
圖 4.1g 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=60^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.2$ ).....	87
圖 4.1h 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=75^\circ$ , $c/b=1$ , $h/b=0.2$ ).....	88

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與方法

板元件於工程領域中的應用非常普遍且廣泛，特別是在土木、機械、航空工程。因此，板元件之振動行為一直是許多學者研究的重點。目前常利用來分析板之理論主要有三：古典板理論(CPT)、一階剪力板理論(FSDPT，又稱為 Mindlin 板理論)以及三階剪力板理論。

許多彈性問題中常遇到應力奇異之現象。奇異點(singularity)發生的原因有：(1)幾何形狀之不連續，如尖銳切角、裂縫或是邊界條件；(2)載重不連續，如單點荷重或是衝擊載重；(3)材料性質之不連續，如複合材料之接面。需找到能夠完整描述奇異點特性之漸近解，方能得到該彈性問題之準確數值解析解。

於古典板理論中，假設板變形前後，垂直於中平面之平面依舊垂直於中平面且保持平面(plane remain plane)，故忽略剪力變形之影響。在板之寬厚比( $L/h$ )遠大於 1 時可以接受。然而於現今工程上之需要，寬厚比愈來愈小，已不適用薄板理論，當厚度不斷增加，因剪應力造成之剪力變形及轉動慣量漸趨重要。

本論文主要利用三階板理論(third order plate)，透過 Ritz 法探討具有幾何應力奇異點之懸臂斜形厚板振動行為。針對本研究所欲探討之問題(參看圖 1.1)，茲將於允許函數數列中引進 Huang(2002)所得之漸近解，以描述彎矩與剪力奇異特性，並結合傳統之完備集允許函數。由於 Huang 所推導之漸近解能正確描述由邊界條件所引起之彎矩與剪力奇異特性，故其應能加速數值之收斂，以求得準確之數值解。

## 1.2 文獻回顧

針對板之奇異點研究的論文相當多。針對於邊界條件所造成之應力奇異性，許多學者利用彈性板理論及三維彈性板理論做過詳細的研究。於彈力平面問題，Williams(1952)首先針對等向薄板(isotropic thin plate)理論，探討因不同邊界條件而引起之應力奇異解問題。Hein 和 Erdogan(1971)則是利用殘餘值定理(residues theory)及 Mindlin 轉換，探討由兩種材料組合成之楔形區域(wedge-shaped-region)之應力奇異現象。Dempsey 和 Sinclair(1979)則將 Hein 和 Erdogan 之研究作進一步探討多種材料問題。Ting 和 Chou(1981)則探討非等向性板(Anisotropic composite plate)。利用三維彈性理論，Hartranft 和 Sih (1969)利用特徵函數展開法求解三維的裂縫問題。而 Xie 和 Chaudhuri(1998)則是探討層狀複合材料板於自由端開裂之應力奇異現象。利用板理論，Williams(1952)首先針對等向性薄板於受彎矩的情況下，探討因

邊界條件造成之應力奇異解問題。接著 Williams 和 Chapkis(1958)延伸 Williams(1952)之研究至正向板(orthotropic plate)。Ojikut 等人(1984)研究層狀複合薄板之應力奇異行為。Sinclair(2000)則考慮在薄板理論上以對數型態表示應力之奇異性。

在探討一階剪力板理論(FSDT)幾何應力奇異問題之研究不多。Burton 和 Sinclair(1986)利用位能函數(potential function)求取於不同邊界條件下 Mindlin 扇形板之奇異解問題。Huang 等人(1994)則利用 Bessel functions 求取徑向簡支承扇形 Mindlin 板之正確解，探討應力奇異問題。Huang(2001)引用 Xie 和 Chaudhuri(1998)之方法廣泛的將十種邊界條件下之奇異性問題以位移分量直接將平衡方程式解出。比較上述之文獻，相較於 Huang 等人(1994)所求得之正確解以及 Huang(2001)所得到之結果，Burton 和 Sinclair(1986)之解僅有描述彎矩之奇異性階數項可以符合，而無法描述剪力奇異性。而關於厚板幾何奇異性的研究則是寥寥可數；Huang(2002)針對三階厚板理論探討由邊界條件引起之奇異性問題漸近解。由於在不同板理論中，彎矩以及剪力奇異性階數皆有所不同，Huang(2004)探討於高階板理論中由邊界條件引起之奇異性問題。

研究斜形板振動的問題，有利用有限元素法者：Kanaka 和 Hinton(1980)分析各種不同邊界條件之菱形板振動頻率；McGee 和 Butalia(1992)配合不

同板理論(Mindlin 板理論、高階剪力變形板理論(HOSDPT)、3-D 彈性理論)分析斜三角形板之振動頻率；McGee 等人(1994)於不同板理論(Mindlin 板理論、高階剪力變形板理論(HOSDPT))，分析由 clamped 與 free 邊界條件不同所組合而成之菱形板。利用 Ritz 法分析者：Liew 等人(1993)用此法求取不同邊界條件之平行四邊形厚板振動頻率；Karanasena 等人(1996)則是分析斜三角形板。然而這些文獻中，並沒有考慮應力奇異性之特性。

觀察上述前人關於厚版振動之研究(如 McGee 等人(1994)，Liew 等人(1993))，其數值解均未考慮奇異點之特性。如上述文章之收斂性分析，於奇異性愈明顯之案例中，其收斂性效果愈差。相信於允許函數中引進 Huang(2003)所得可描述奇異性之漸近解，將可使吾人所得之數值解于準確性及收斂性上有較佳之效果；而本研究之完成相信亦可對三階厚板理論之應用有所貢獻。

### 1.3 內容概要

本論文之內容共分為五章，茲將簡述如下：

第一章 說明研究動機及目的，交代研究方法及內容。

第二章 推導於 Reddy 三階懸臂斜形板中，用於描述剪力及彎矩奇異性之



角函數(corner function)。

第三章 建構利用 Ritz 法於 Reddy 三階懸臂斜形板中求取自然振動頻率之程序。

第四章 針對不同幾何參數對懸臂斜形板自然振動頻率之影響做探討，並探討剪力及彎矩奇異性之角函數對於板之自然振動頻率收斂性造成之影響及效果。

第五章 本研究之結論及建議。



## 第二章 角函數推導

本論文利用 Ritz 法配合 Reddy 三階板理論分析懸臂斜形厚板之振動，將 Huang(2002)推導所得之角函數(Corner function)引入至完備允許函數序列中，正確描述懸臂板固定端鈍角處之奇異彎矩與剪力。本章所謂彎矩或剪力奇異性(Singularity)係指於某一處之彎矩或剪力無窮大。因考慮厚板，位移場可分為面外(out-of-plane)及面內(in-plane)位移分量；兩者可分開考量。

### 2.1 面外之角函數推導

Reddy(1999)所提出的三階板理論之位移場在極座標系統可表示成

$$u = z[\psi_r - \frac{4}{3}(\frac{z}{h})^2(\psi_r + w_r)] , \quad (2.1)$$

$$v = z[\psi_\theta - \frac{4}{3}(\frac{z}{h})^2(\psi_\theta + \frac{1}{r}w_\theta)] , \quad (2.2)$$

$$w = w(r, \theta) , \quad (2.3)$$

式(2.1)-(2.3)中，下標“ $\cdot, j$ ”為對任一獨立變數 $j$ 取偏微分， $u$ 、 $v$ 、 $w$ 分別為 $r$ 、 $\theta$ 、 $z$ 方向上之位移； $\psi_r$ 、 $\psi_\theta$ 分別為徑向與環向撓曲造成中平面(midplane)上之轉角。

利用變分法可以得到平衡方程式以及對應之邊界條件，於不施加荷重

下之平衡方程式為

$$C_1(P_{r,rr} + \frac{2}{r}P_{r,r} + \frac{1}{r^2}P_{\theta,\theta\theta} - \frac{1}{r}P_{\theta,r} + \frac{2}{r}P_{r\theta,r\theta} + \frac{2}{r^2}P_{r\theta,\theta}) + \frac{\bar{Q}_r}{r} + \bar{Q}_{r,r} + \frac{1}{r}\bar{Q}_{\theta,\theta} = 0, \quad (2.4)$$

$$\bar{M}_{r,r} + \frac{\bar{M}_r}{r} - \frac{\bar{M}_\theta}{r} + \frac{1}{r}\bar{M}_{r\theta,\theta} - \bar{Q}_r = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r}\bar{M}_{\theta,\theta} + \bar{M}_{r\theta,r} + \frac{2\bar{M}_{r\theta}}{r} - \bar{Q}_\theta = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } C_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad C_2 = \frac{4}{h^2}, \quad \bar{M}_{r\theta} = M_{r\theta} - C_1P_{r\theta}, \quad \bar{M}_\beta = M_\beta - C_1P_\beta, \quad \bar{Q}_\beta = Q_\beta - C_2R_\beta,$$

$h$  表示板的厚度，下標  $\beta$  為  $r$  或  $\theta$ 。於上式中，

$$\begin{Bmatrix} Q_\beta \\ R_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz, \quad (2.7a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_\beta \\ P_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta\beta} \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz, \quad (2.7b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{r\theta} \\ P_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta\beta} \begin{Bmatrix} z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz, \quad (2.7c)$$

$M_r$  為垂直於  $r$  面上沿  $\theta$  方向每單位長度的彎曲力矩， $M_\theta$  為垂直於  $\theta$  面上沿  $r$  方向每單位長度的彎曲力矩， $M_{r\theta}$  為垂直於  $r$  面或  $\theta$  面上沿  $\theta$  方向或沿  $r$  方向每單位長度的扭轉力矩， $Q_r$  為於垂直之  $r$  之面上沿  $z$  方向每單位長度

之剪力 (shear force intensity),  $Q_\theta$  為於垂直之  $\theta$  之面上沿  $z$  方向每單位長度之剪力。徑向( $\theta = \alpha$ )邊界須界定

$\psi_\theta$  or  $\bar{M}_\theta$ ,  $\psi_r$  or  $\bar{M}_{r\theta}$ ,

$$w \text{ or } \bar{Q}_\theta + C_1 \left( \frac{2}{r} P_{r\theta} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta} \right), \text{ 以及 } \frac{w_{,\theta}}{r} \text{ or } P_\theta, \quad (2.8)$$

環向邊界(在  $r = R$ )須界定

$\psi_\theta$  or  $\bar{M}_{r\theta}$ ,  $\psi_r$  or  $\bar{M}_r$ ,

$$w \text{ or } \bar{Q}_r + C_1 \left( \frac{P_r}{r} + P_{r,r} + \frac{2}{r} P_{r\theta,\theta} - \frac{P_\theta}{r} \right), \text{ 以及 } w_{,r} \text{ or } P_r, \quad (2.9)$$

對於一具等向性且彈性之板，由位移—應變、應力—應變關係以及式(2.7)可以建立力(resultant forces)與位移分量之關係，表示如下

$$Q_r = \frac{2Gh}{3}(\psi_r + w_{,r}), \quad Q_\theta = \frac{2Gh}{3}(\psi_\theta + w_{,\theta}),$$

$$R_r = \frac{Gh^3}{30}(\psi_r + w_{,r}), \quad R_\theta = \frac{Gh^3}{30}(\psi_\theta + w_{,\theta}),$$

$$M_{r\theta} = Gh^3 \left[ \frac{1}{12} \left( \psi_{\theta,r} - \frac{1}{r} \psi_\theta + \frac{1}{r} \psi_{r,\theta} \right) - \frac{1}{60r} \left( -\psi_\theta - \frac{2}{r} w_{,\theta} + \psi_{r,\theta} + 2w_{,r\theta} + r\psi_{\theta,r} \right) \right]$$

$$M_r = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{1}{15} \psi_{r,r} - \frac{1}{60} w_{,rr} \right) + \frac{\nu}{r} \left[ \frac{1}{15} (\psi_r + \psi_{\theta,\theta}) - \frac{1}{60} \left( w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
M_\theta &= \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{15} (\psi_r + \psi_{\theta,\theta}) - \frac{1}{60} (w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta}) \right] + \nu \left( \frac{1}{15} \psi_{r,r} - \frac{1}{60} w_{,rr} \right) \right\} , \\
P_{r\theta} &= \frac{Gh^5}{1680} \left[ 16\psi_{\theta,r} - \frac{16}{r} \psi_\theta + \frac{16}{r} \psi_{r,\theta} - \frac{10}{r} (w_{,r\theta} - \frac{w_{,\theta}}{r}) \right] , \\
P_r &= \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\psi_{r,r}}{105} - \frac{w_{,rr}}{336} + \frac{\nu}{r} \left[ \frac{1}{80} (\psi_r + \psi_{\theta,\theta}) - \frac{1}{336} (\psi_{\theta,\theta} + \psi_r + w_{,r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r}) \right] \right\} , \\
P_\theta &= \frac{Eh^2}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{105} (\psi_r + \psi_{\theta,\theta}) - \frac{1}{336} (w_{,r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r}) \right] + \nu \left( \frac{\psi_{r,r}}{105} - \frac{w_{,rr}}{336} \right) \right\} , \tag{2.10}
\end{aligned}$$

其中  $E$  為楊氏模數， $G$  為剪力模數， $\nu$  為柏松比。

將式(2.10)代入式(2.4)-(2.6)整理可得平衡方程式以位移分量表示

$$\begin{aligned}
&\psi_{r,rrr} + \frac{2}{r} \psi_{r,rr} + \frac{2}{r^2} \psi_{r,r\theta\theta} + \frac{1}{r^3} \psi_{r,\theta\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_{r,r} + \frac{1}{r^3} \psi_r + \frac{1}{r^3} \psi_{\theta,\theta\theta\theta} \\
&+ \frac{1}{r} \psi_{\theta,rr\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_{\theta,r\theta} + \frac{1}{r^3} \psi_{\theta,\theta} - \frac{5}{16} (w_{,rrr} + \frac{2}{r} w_{,rr} \\
&+ \frac{2}{r^2} w_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} - \frac{2}{r^3} w_{,r} + \frac{1}{r^4} w_{,\theta\theta\theta\theta} + \frac{4}{r^4} w_{,\theta\theta}) \\
&+ \frac{21(1-\nu)}{h^2} (\psi_{r,r} + \frac{1}{r} \psi_r + \frac{1}{r} \psi_{\theta,\theta} + w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}) = 0 , \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_{r,rr} + \left( \frac{1}{r} \psi_r \right)_{,r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \psi_{r,\theta\theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \psi_{\theta,\theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{r} \psi_{\theta,r\theta} \\
&- \frac{4}{17} (w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,r} - \frac{2}{r^3} w_{,\theta\theta}) \\
&- \frac{84(1-\nu)}{17h^2} (\psi_r + w_{,r}) = 0 , \tag{2.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{r} \psi_{r,r\theta} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \psi_{r,\theta} + \frac{1-\nu}{2} \psi_{\theta,rr} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{1}{r} \psi_{\theta} \right)_{,r} \\
& + \frac{1}{r^2} \psi_{\theta,\theta\theta} - \frac{4}{17} \left( \frac{1}{r} w_{,rr\theta} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{1}{r^3} w_{,\theta\theta\theta} \right) \\
& - \frac{84(1-\nu)}{17h^2} (\psi_{\theta} + w_{,\theta}) = 0, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

### 2.1.1 級數解架構

特徵函數展開逼近解曾於解決三維彈性問題時被 Hartranft and Sih (1969) 所採用。以特徵函數展開法應可得到式(2.11)-(2.13)的解。位移可以寫成下列之級數型式

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n+1} W_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \tag{2.14a}$$

$$\psi_r(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n} \Psi_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \tag{2.14b}$$

$$\psi_{\theta}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n} \Phi_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \tag{2.14c}$$

特徵值  $\lambda_m$  可為一複數。其中奇數之  $n$  於式(2.14)並不會提供任何一組有效解，因此不被考慮。

當  $r$  趨近於 0 時，正規條件(regularity condition)要求  $\psi_{\theta}$ 、 $\psi_r$ 、 $w$  以及  $w_r$  存在且為有限值。故特徵值  $\lambda_m$  之實數部份必須為正。從式(2.10)中的力與位

移分量關係可以發現，式(2.14)所提供解的型式與實數部份小於 1 之  $\lambda_m$ ，將會造成  $M_r$ 、 $M_\theta$ 、 $M_{r\theta}$ 、 $P_r$ 、 $P_\theta$  和  $P_{r\theta}$  於  $r=0$  處趨向無限大。但是，此解不會導致剪力 ( $Q_r$  及  $Q_\theta$ )、 $R_r$ 、以及  $R_\theta$  之奇異性。

將式(2.14) 引入式(2.11)-(2.13)整理可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n-3} \{ (\lambda_m+n+1)\Psi_{n,\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m+n-1)^2(\lambda_m+n+1)\Psi_n^{(m)} + \Phi_{n,\theta\theta\theta}^{(m)} \\
 & + (\lambda_m+n-1)^2\Phi_{n,\theta}^{(m)} - \frac{5}{16} [(\lambda_m+n-1)^2 + (\lambda_m+n-1)^2 W_n^{(m)} \\
 & + 2((\lambda_m+n)^2 + 1)W_{n,\theta\theta}^{(m)} + W_{n,\theta\theta\theta\theta}^{(m)}] \} + \frac{21(1-\nu)}{h^2} r^{\lambda_m+n-1} \{ (\lambda_m+n+1)\Psi_n^{(m)} \\
 & + \Phi_{n,\theta}^{(m)} + W_{n,\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m+n+1)^2 W_n^{(m)} \} = 0 \quad , \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n-2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \Psi_{n,\theta\theta}^{(m)} + [(\lambda_m+n)^2 - 1]\Psi_n^{(m)} + \left[ \frac{1+\nu}{2}(\lambda_m+n) - \frac{3-\nu}{2} \right] \Phi_{n,\theta}^{(m)} \right. \\
 & \left. - \frac{4}{17} [(\lambda_m+n+1)^2(\lambda_m+n-1)W_n^{(m)} + (\lambda_m+n-1)W_n^{(m)} + (\lambda_m+n-1)W_{n,\theta\theta}^{(m)}] \right\} \\
 & - \frac{84(1-\nu)}{17h^2} r^{\lambda_m+n} \{ \Psi_n^{(m)} + (\lambda_m+n+1)W_n^{(m)} \} = 0 \quad , \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n-2} \left\{ \left[ \frac{1+\nu}{2}(\lambda_m+n) + \frac{3-\nu}{2} \right] \Psi_{n,\theta}^{(m)} + \Phi_{n,\theta\theta}^{(m)} + \frac{1-\nu}{2} [(\lambda_m+n)^2 - 1]\Phi_n^{(m)} \right. \\
 & \left. - \frac{4}{17} [(\lambda_m+n+1)^2 W_{n,\theta}^{(m)} + W_{n,\theta\theta\theta}^{(m)}] - \frac{84(1-\nu)}{17h^2} r^{\lambda_m+n} \{ \Phi_n^{(m)} + W_{n,\theta}^{(m)} \} \right\} = 0 \quad , \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

為滿足式(2.15)-(2.17)，不同  $r$  階數之係數必須為 0。因此，

$$\begin{aligned}
& (\lambda_m + n + 3)\Psi_{n+2,\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m + n + 1)^2(\lambda_m + n + 3)\Psi_{n+2}^{(m)} + \Phi_{n+2,\theta\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m + n + 1)^2\Phi_{n+2,\theta}^{(m)} \\
& - \frac{5}{16}[(\lambda_m + n + 1)^2(\lambda_m + n + 3)^2W_{n+2}^{(m)} + 2((\lambda_m + n + 2)^2 + 1)W_{n+2,\theta\theta}^{(m)} + W_{n+2,\theta\theta\theta}^{(m)}] \\
& = -\frac{21(1-\nu)}{h^2}\{(\lambda_m + n + 1)\Psi_n^{(m)} + \Phi_{n,\theta}^{(m)} + W_{n,\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m + n + 1)^2W_n^{(m)}\}, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(\lambda_m + n + 2)^2 - 1]\Psi_{n+2}^{(m)} + \frac{1-\nu}{2}\Psi_{n+2,\theta\theta}^{(m)} - \frac{3-\nu}{2}\Psi_{n+2,\theta}^{(m)} + \frac{1+\nu}{2}(\lambda_m + n + 2)\Phi_{n+2,\theta}^{(m)} \\
& - \frac{4}{17}[(\lambda_m + n + 3)^2(\lambda_m + n + 1)W_{n+2}^{(m)} + (\lambda_m + n + 1)W_{n+2,\theta\theta}^{(m)}] \\
& = \frac{84(1-\nu)}{17h^2}[\Psi_n^{(m)} + (\lambda_m + n + 1)W_n^{(m)}], \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\frac{1+\nu}{2}(\lambda_m + n + 2) + \frac{3-\nu}{2}]\Psi_{n+2,\theta}^{(m)} + \frac{1-\nu}{2}[(\lambda_m + n + 2)^2 - 1]\Phi_{n+2,\theta}^{(m)} + \Phi_{n+2,\theta\theta}^{(m)} \\
& - \frac{4}{17}[(\lambda_m + n + 2)W_{n+2,\theta}^{(m)} + W_{n+2,\theta\theta\theta}^{(m)}] = \frac{84(1-\nu)}{17h^2}\{\Phi_n^{(m)} + W_{n,\theta}^{(m)}\}, \quad (2.20)
\end{aligned}$$

考慮  $r$  之最低階數項(即取  $n=0$ )，可以建立以下方程式：

$$\begin{aligned}
& (\lambda_m + 1)\Psi_{0,\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m - 1)^2(\lambda_m + 1)\Psi_0^{(m)} + \Phi_{0,\theta\theta\theta}^{(m)} + (\lambda_m - 1)^2\Phi_{0,\theta}^{(m)} \\
& - \frac{5}{16}[(\lambda_m - 1)^2(\lambda_m + 1)^2W_0^{(m)} + 2(\lambda_m^2 + 1)W_{0,\theta\theta}^{(m)} + W_{0,\theta\theta\theta}^{(m)}] = 0, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$$(\lambda_m^2 - 1)\Psi_0^{(m)} + \frac{1-\nu}{2}\Psi_{0,\theta\theta}^{(m)} - \frac{3-\nu}{2}\Phi_{0,\theta}^{(m)} + \frac{(1+\nu)\lambda_m}{2}\Phi_{0,\theta}^{(m)}$$

$$-\frac{4}{17}[(\lambda_m + 1)^2(\lambda_m - 1)W_0^{(m)} + (\lambda_m - 1)W_{0,\theta\theta}^{(m)}] = 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(1+\nu)\lambda_m}{2} + \frac{3-\nu}{2} \right] \Psi_{0,\theta}^{(m)} + \frac{1-\nu}{2} (\lambda_m^2 - 1) \Phi_0^{(m)} + \Phi_{0,\theta\theta}^{(m)} \\ & - \frac{4}{17} [(\lambda_m + 1)^2 W_{0,\theta}^{(m)} + W_{0,\theta\theta\theta}^{(m)}] = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

針對式(2.21)-(2.23)所組成的常微分方程組，其通解為：

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(m)}(\theta, \lambda_m) = & B_0 \cos(\lambda_m + 1)\theta + B_1 \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ & + B_2 \cos(\lambda_m - 1)\theta + B_3 \sin(\lambda_m - 1)\theta, \end{aligned} \quad (2.24a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(m)}(\theta, \lambda_m) = & -B_1 \cos(\lambda_m + 1)\theta + B_0 \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ & + A_2 \cos(\lambda_m - 1)\theta + A_3 \sin(\lambda_m - 1)\theta, \end{aligned} \quad (2.24b)$$

$$\begin{aligned} W_0^{(m)}(\theta, \lambda_m) = & A_0 \cos(\lambda_m + 1)\theta + A_1 \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ & + (k_1 A_2 + k_2 B_3) \cos(\lambda_m - 1)\theta \\ & + (k_1 A_3 - k_2 B_2) \sin(\lambda_m - 1)\theta, \end{aligned} \quad (2.24c)$$

其中

$$k_1 = \frac{17}{16\lambda_m} \left( \frac{(1+\nu)\lambda_m}{2} + \frac{3-\nu}{2} \right),$$



$$k_2 = \frac{17}{16\lambda_m} \left( \frac{(1+\nu)\lambda_m}{2} - \frac{3-\nu}{2} \right),$$

係數  $A_i$  以及  $B_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 為由邊界條件決定之待定係數。

從徑向之邊界條件可求得式(2.24) 中  $\lambda_m$  以及  $A_i$  與  $B_i$  之關係，並依此建立平衡方程式(2.11)-(2.13)之完備級數解。據此從式(2.18)-(2.20)及邊界條件可求得對應於  $n > 1$  之  $W_n^{(m)}$ 、 $\Psi_n^{(m)}$ 、 $\Phi_n^{(m)}$  的解，但此部分不具任何應力奇異現象，故不予考慮。

除此之外，亦可將欲架構之級數解表示成以下之型式：

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n+l_1} \overline{W}_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \quad (2.25a)$$

$$\psi_r(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n+l_2} \overline{\Psi}_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \quad (2.25b)$$

$$\psi_\theta(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0,2}^{\infty} r^{\lambda_m+n+l_3} \overline{\Phi}_n^{(m)}(\theta, \lambda_m), \quad (2.25c)$$

其中  $l_i$  ( $i=1,2,3$ ) 為任意整數，且至少有一個為 0。經上述程序，將發現式(2.14)

所提供解之型式為唯一可以產生 Williams-type 應力奇異性之解。

## 2.1.2 特徵方程式與角函數

為決定因齊性邊界條件造成在扇形板頂點發生的 Williams-type 應力奇異行為，於式(2.14)之級數解中僅需由最低階數之  $r$  構成的漸近解。因此，僅需考慮於式(2.14)中  $n=0$  的解。令

$$\psi_{\theta 0}^{(m)} = r^{\lambda_m} \Phi_0^{(m)}(\theta, \lambda_m),$$

$$\psi_{r 0}^{(m)} = r^{\lambda_m} \Psi_0^{(m)}(\theta, \lambda_m), \quad (2.26)$$

$$w_0^{(m)} = r^{\lambda_m+1} W_0^{(m)}(\theta, \lambda_m),$$

此外，應力奇異性僅被沿著徑向邊緣的邊界條件所影響。茲列出以下四種沿著徑向邊緣之齊性邊界條件，當  $\theta = \alpha$  時：

$$\text{固定端： } w = \psi_r = \psi_\theta = \frac{w_{,\theta}}{r} = 0, \quad (2.27a)$$

$$\text{自由端： } \bar{M}_\theta = \bar{M}_{r\theta} = \bar{Q}_\theta + C_1 \left( \frac{2}{r} P_{r\theta} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta} \right) = P_\theta = 0, \quad (2.27b)$$

$$\text{第一型簡支承： } w = \psi_r = \bar{M}_\theta = P_\theta = 0, \quad (2.27c)$$

$$\text{第二型簡支承： } w = \bar{M}_\theta = \bar{M}_{r\theta} = P_\theta = 0. \quad (2.27d)$$

今考慮一角度為  $\alpha$  之扇形板，沿著其徑向邊緣之邊界條件分別為一固定

端以及一自由端。則當自由端角度  $\theta = \alpha$  時，將式(2.26)代入式(2.27b)中並引入式(2.10)之關係可以求得對應於  $r$  之最低階數的方程式：

$$a_{11}A_0 + a_{12}A_1 + a_{13}A_2 + a_{14}A_3 + a_{15}B_0 + a_{16}B_1 + a_{17}B_2 + a_{18}B_3 = 0, \quad (2.28a)$$

$$a_{21}A_0 + a_{22}A_1 + a_{23}A_2 + a_{24}A_3 + a_{25}B_0 + a_{26}B_1 + a_{27}B_2 + a_{28}B_3 = 0, \quad (2.28b)$$

$$a_{31}A_0 + a_{32}A_1 + a_{33}A_2 + a_{34}A_3 + a_{35}B_0 + a_{36}B_1 + a_{37}B_2 + a_{38}B_3 = 0, \quad (2.28c)$$

$$a_{41}A_0 + a_{42}A_1 + a_{43}A_2 + a_{44}A_3 + a_{45}B_0 + a_{46}B_1 + a_{47}B_2 + a_{48}B_3 = 0, \quad (2.28d)$$

$a_{ij}$  之完整描述將置於表 2.1。接著引入固定端角度  $\theta = 0$ ，亦可得到四方程式：

$$B_0 + B_2 = 0, \quad (2.29a)$$

$$-B_1 + A_2 = 0, \quad (2.29b)$$

$$A_0 + k_1B_2 + k_2B_3 = 0, \quad (2.29c)$$

$$(\lambda + 1)A_1 + (\lambda - 1)(k_1B_3 - k_2B_2) = 0, \quad (2.29d)$$

式(2.28)及式(2.29)架構一組由  $A_i$  和  $B_i$  組成的線性齊性代數方程式。為求得  $A_i$  和  $B_i$  之非零解，可以得到兩條特徵方程式，整理得  $\lambda_m$ ：

$$\sin^2 \alpha \lambda_m = \frac{4 - \lambda_m^2 (1 - \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 + \nu)(1 - \nu)}, \quad (2.30a)$$

$$\sin^2 \alpha \lambda_m = \frac{4 - \lambda_m^2 (1 + \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 - \nu)(1 + \nu)}, \quad (2.30b)$$

據此將  $\lambda_m$  代回式(2.28)和式(2.29)求得  $A_i$  和  $B_i$  並引入式(2.26)，則  $\psi_{\theta 0}^{(m)}$ 、 $\psi_{r\theta}^{(m)}$  和  $w_0^{(m)}$  之漸近解可以表示成：

$$\begin{aligned} \psi_{r\theta}^{(m)}(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_m} \left\{ \frac{1 + \lambda_m}{\lambda_m - 1} \cos(\lambda_m + 1)\theta - \eta_2 \sin(\lambda_m + 1)\theta \right. \\ \left. + \frac{1 + \lambda_m}{\lambda_m - 1} \cos(\lambda_m - 1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda_m - 1)\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2.31a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\theta 0}^{(m)}(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_m} \left\{ -\frac{1 + \lambda_m}{\lambda_m - 1} \sin(\lambda_m + 1)\theta - \eta_2 \cos(\lambda_m + 1)\theta \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m - 1)\theta + \eta_2 \cos(\lambda_m - 1)\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2.31b)$$

$$\begin{aligned} w_0^{(m)}(r, \theta) = B_3 r^{\lambda_m + 1} \left\{ \left( \frac{k_1(1 + \lambda_m)}{\lambda_m - 1} - k_2 \right) \cos(\lambda_m + 1)\theta \right. \\ \left. + \frac{(1 - \lambda_m)}{\lambda_m + 1} (k_1 \eta_1 - k_2 \eta_2) \sin(\lambda_m + 1)\theta \right. \\ \left. - \frac{k_1(1 + \lambda_m)}{\lambda_m - 1} + k_2 \right) \cos(\lambda_m - 1)\theta \\ \left. + (k_1 \eta_1 - k_2 \eta_2) \sin(\lambda_m - 1)\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2.31c)$$

其中  $\eta_1$  以及  $\eta_2$  分別為：

$$\eta_1 = \frac{(\lambda_m + 1)[(3 + \nu + \nu\lambda_m - \lambda_m)\cos(\lambda_m - 1)\alpha + (1 + \lambda_m)(1 - \nu)\cos(\lambda_m + 1)\alpha]}{(\lambda_m - 1)[(3 + \nu + \nu\lambda_m - \lambda_m)\sin(\lambda_m - 1)\alpha - (1 - \lambda_m)(1 - \nu)\sin(\lambda_m + 1)\alpha]},$$

$$\eta_2 = \frac{(3 + \nu + \nu\lambda_m - \lambda_m)\cos(\lambda_m - 1)\alpha + (1 + \lambda_m)(1 - \nu)\cos(\lambda_m + 1)\alpha}{(3 + \nu + \nu\lambda_m - \lambda_m)\sin(\lambda_m - 1)\alpha - (1 - \lambda_m)(1 - \nu)\sin(\lambda_m + 1)\alpha}.$$

## 2.2 面內之角函數推導

參照面外的公式推導，中平面之面內位移為

$$\bar{u}(r, \theta, z) = u_0(r, \theta), \quad (2.32a)$$

$$\bar{v}(r, \theta, z) = v_0(r, \theta), \quad (2.32b)$$

由變分法可以得到平衡方程式為

$$N_{r,r} + N_{r\theta,\theta}/r + (N_r - N_\theta)/r = 0, \quad (2.33a)$$

$$N_{r\theta,r} + N_{\theta,\theta}/r + 2N_{r\theta}/r = 0, \quad (2.33b)$$

其中  $N_r$ ， $N_\theta$  與  $N_{r\theta}$  為面內之力。

徑向( $\theta = \alpha$ )之邊界需界定

$$u_0 \text{ OR } N_{r\theta}, \quad v_0 \text{ OR } N_\theta, \quad (2.34a)$$

而環向( $r = R$ )之邊界需界定

$$u_0 \text{ OR } N_r, \quad v_0 \text{ OR } N_{r\theta}, \quad (2.34b)$$

力與位移分量之關係表示如下

$$N_r = \frac{\bar{D}_0}{r} u_0 + \bar{E}_0 u_{0,r} + \frac{\bar{D}_0}{r} v_{0,\theta}, \quad (2.35a)$$

$$N_\theta = \frac{\bar{E}_0}{r} u_0 + \bar{D}_0 u_{0,r} + \frac{\bar{E}_0}{r} v_{0,\theta}, \quad (2.35b)$$

$$N_{r\theta} = \frac{\bar{G}_0}{r} u_{0,\theta} - \frac{\bar{G}_0}{r} v_0 + \bar{G}_0 v_{0,r}, \quad (2.35c)$$

將式(2.35a)-(2.35c)代入式(2.33)，可以得到由位移分量表示之平衡方程

式如下

$$\bar{E}_0 \left( -\frac{u_0}{r^2} + \frac{u_{0,r}}{r} + u_{0,rr} + \frac{1-\nu}{2r^2} u_{0,\theta\theta} - \frac{3-\nu}{2r^2} v_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} v_{0,r\theta} \right) = 0, \quad (2.36a)$$

$$\bar{E}_0 \left( \frac{3-\nu}{2r^2} u_{0,\theta} + \frac{1+\nu}{2r} u_{0,r\theta} - \frac{1-\nu}{2r^2} v_0 + \frac{1-\nu}{2r} v_{0,r} + \frac{1-\nu}{2} v_{0,rr} + \frac{v_{0,\theta\theta}}{r^2} \right) = 0, \quad (2.36b)$$

## 2.2.1 級數解架構

以級數解將面內之位移展開可以得到

$$u_0(r, \theta) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} U_n(\theta, \lambda), \quad (2.37a)$$

$$v_0(r, \theta) = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} r^{\lambda+n} V_n(\theta, \lambda), \quad (2.37b)$$

將式(2.37)代入式(2.36)並僅考慮最低階之 $r$ 可以得到

$$\bar{E}_0 \left[ -1 + \lambda_m + \lambda_m(\lambda_m - 1) \right] U_0 + \frac{1-\nu}{2} \bar{E}_0 U_{0,\theta\theta} + \left[ -\frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda_m \right] \bar{E}_0 V_{0,\theta} = 0, \quad (2.38a)$$

$$\bar{E}_0 \left[ \frac{3-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda_m \right] U_{0,\theta} + \bar{E}_0 \frac{1-\nu}{2} \left[ \lambda_m - 1 + \lambda_m(\lambda_m - 1) \right] V_0 + \bar{E}_0 V_{0,\theta\theta} = 0, \quad (2.38b)$$

將式(2.38)整理可得通解形式如下

$$U_0^{(m)}(\theta, \lambda_m) = D_1 \cos(\lambda_m + 1)\theta + D_2 \sin(\lambda_m + 1)\theta$$

$$+ D_3 \cos(\lambda_m - 1)\theta + D_4 \sin(\lambda_m - 1)\theta , \quad (2.39a)$$

$$V_0^{(m)}(\theta, \lambda_m) = D_2 \cos(\lambda_m + 1)\theta - D_1 \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ + \tau_1 D_4 \cos(\lambda_m - 1)\theta - \tau_1 D_3 \sin(\lambda_m - 1)\theta , \quad (2.39b)$$

其中，

$$\tau_1 = \frac{3 + \lambda - \nu + \lambda\nu}{-3 + \lambda + \nu + \lambda\nu} , \quad (2.40a)$$

$$\hat{\tau}_1 = -1 + (-1 + \lambda_m)\mu_1 - \nu \cdot \lambda_m , \quad (2.40b)$$

當  $\theta = \alpha$  時，於自由端之邊界條件如下：

$$N_{r\theta} = N_\theta = 0 , \quad (2.41a)$$

當  $\theta = 0$  時，於固定端之邊界條件如下：

$$u_0 = v_0 = 0 , \quad (2.41b)$$

引入上述之邊界條件可以得到四組方程式：

$$N_{r\theta} = 0 : b_{11}D_1 + b_{12}D_2 + b_{13}D_3 + b_{14}D_4 = 0 , \quad (2.42a)$$

$$N_\theta = 0 : b_{21}D_1 + b_{22}D_2 + b_{23}D_3 + b_{24}D_4 = 0 , \quad (2.42b)$$

$$u_0 = 0 : \quad D_1 + D_3 = 0 , \quad (2.42c)$$

$$v_0 = 0 : \quad D_2 + \mu_1 D_4 = 0 , \quad (2.42d)$$

$b_{ij}$  之完整描述將置於表 2.2。

式(2.42)架構一組由  $D_i$  組成的線性齊性代數方程式。為求得有意義之解

$D_i$ ，特徵方程式中的  $\lambda_m$  可求得：

$$\sin^2 \alpha \lambda_m = \frac{4 - \lambda^2 (1 - \nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3 + \nu)(1 - \nu)} , \quad (2.43)$$

據此，式(2.39)中的  $U_0^{(m)}$  和  $V_0^{(m)}$  可以表示成：

$$U_0^{(m)}(r, \theta) = D_3 r^{\lambda_m} \{ -\cos(\lambda_m + 1)\theta + \delta_1 \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ + \cos(\lambda_m - 1)\theta + \delta_2 \sin(\lambda_m - 1)\theta \} , \quad (2.44a)$$

$$V_0^{(m)}(r, \theta) = D_3 r^{\lambda_m} \{ \delta_1 \cos(\lambda_m + 1)\theta + \sin(\lambda_m + 1)\theta \\ + \tau_1 \delta_2 \cos(\lambda_m - 1)\theta - \tau_1 \sin(\lambda_m - 1)\theta \} , \quad (2.44b)$$

其中，

$$\delta_1 = \frac{[(\lambda_m^2 - 1)(\nu - 1) - \lambda_m(-3 + \lambda_m + \nu + \nu\lambda_m)\cos 2\alpha + (-3 + \lambda_m + \nu + \nu\lambda_m)\cos 2\lambda_m\alpha]}{(-3 + \lambda_m + \nu + \nu\lambda_m)(\sin 2\lambda_m\alpha - \lambda_m \sin 2\alpha)} ,$$



$$\delta_2 = \frac{[3 - \lambda_m - \nu - \nu\lambda_m + \lambda_m(\nu+1)\cos 2\alpha + (\nu+1)\cos 2\lambda_m\alpha]}{(\nu+1)(\lambda_m \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_m\alpha)} \circ$$



### 第三章 懸臂斜形板之振動分析

本章以 Ritz 法為主，採用 Huang (2002)所推導之漸近解，佐以滿足幾何邊界條件之傳統完備集允許函數，探討含有奇異點之懸臂斜形厚板之振動行為。所考慮者為齊性(homogeneous)等向性(isotropic)板，雖 Reddy 三階板理論包含面內(in-plane)與面外(out-of-plane)之位移分量，但兩者不藕合(decoupled)。

#### 3.1 以 Ritz 法求取自然振動頻率

欲利用 Ritz 法求解自然振動頻率時，須先定義一能量函數

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max}^* , \tag{3.1}$$

其中  $T_{\max}^*$  : 一振動週期內最大動能

$U_{\max}$  : 一振動週期內最大應變能， $\omega$  為自然振動頻率

##### 3.1.1 位移場、應變場與應力場

於分析懸臂斜形板時，採用  $\xi$ - $\eta$  斜座標系統(參考圖 1.1)。將 Reddy 所提出三階板理論之位移場以  $\xi$ - $\eta$  座標表示如下：

$$u(x, y, z, t) = \cos \beta u_{\xi 0}(\xi, \eta, t) + z[\psi_{\xi}(\xi, \eta, t) - \sin \beta \psi_{\eta}(\xi, \eta, t)]$$

$$- \frac{4z^3}{3h^2} (\psi_{\xi} - \sin \beta \psi_{\eta} + \sec \beta \frac{\partial w_0}{\partial \xi} - \tan \beta \frac{\partial w_0}{\partial \eta}), \quad (3.2a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_{\eta 0}(\xi, \eta, t) + \sin \beta u_{\xi 0}(\xi, \eta, t) + z \cdot \cos \beta \psi_{\eta}(\xi, \eta, t)$$

$$- \frac{4z^3}{3h^2} (\cos \beta \psi_{\eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \eta}), \quad (3.2b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(\xi, \eta, t), \quad (3.2c)$$

式(3.2)中之 $u_{\xi 0}$ 、 $v_{\eta 0}$ 、 $w_0$ 、 $\psi_{\xi}$ 與 $\psi_{\eta}$ 分別為 $\xi$ - $\eta$ 座標系統中，板中平面之位移與轉角函數。

於笛卡爾座標系統應變與位移關係為

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

將式(3.2)代入應變-位移關係中可得應變之表示式

$$\varepsilon_{xx} = (u_{\xi 0, \xi} - \sin \beta u_{\xi 0, \eta}) + (z - C_1 z^3)(\psi_{\xi, \xi} \sec \beta - \tan \beta \psi_{\xi, \eta})$$

$$+ (z - C_1 z^3)(-\tan \beta \psi_{\eta, \xi} + \sin \beta \tan \beta \psi_{\eta, \eta})$$

$$- C_1 z^3 (\sec^2 \beta w_{, \xi \xi} - 2 \sec \beta \tan \beta w_{, \xi \eta} + \tan^2 \beta w_{, \eta \eta}), \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{yy} = \sin \beta u_{\xi 0, \eta} + v_{\eta 0, \eta} + (z - C_1 z^3) \psi_{\eta, \eta} + (-C_1 z^3) w_{, \eta \eta} , \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & (\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) u_{\xi 0, \eta} + \tan \beta u_{\xi 0, \xi} + [\sec \beta v_{\eta 0, \xi} - \tan \beta v_{\eta 0, \eta}] \\ & + (z - C_1 z^3) \psi_{\xi} + (z - C_1 z^3) (\psi_{\eta, \xi} - 2 \sin \beta \psi_{\eta, \eta}) \\ & - 2 C_1 z^3 (\sec \beta w_{, \xi \eta} - \tan \beta w_{, \eta \eta}) , \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{yz} = \cos \beta \psi_{\eta} (1 - C_1 z^2) + (1 - C_2 z^2) w_{, \eta} , \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xz} = (1 - C_2 z^2) \psi_{\xi} - (1 - C_2 z^2) \sin \beta \psi_{\eta} + (1 - C_2 z^2) (\sec \beta w_{, \xi}) - \tan \beta w_{, \eta} , \quad (3.7)$$

分別將  $u_{\xi 0}$ 、 $v_{\eta 0}$ 、 $\psi_{\xi}$ 、 $\psi_{\eta}$  與  $w$  以允許函數  $\bar{u}_{\xi i}$ 、 $\bar{v}_{\eta i}$ 、 $\bar{\psi}_{\xi i}$ 、 $\bar{\psi}_{\eta i}$  與  $\bar{W}_i$  代入

$$u_{\xi 0} = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ai} \bar{u}_{\xi i} , \quad (3.8a)$$

$$v_{\eta 0} = \sum_{i=1}^{\infty} N_{bi} \bar{v}_{\eta i} , \quad (3.8b)$$

$$\psi_{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ci} \bar{\psi}_{\xi i} , \quad (3.8c)$$

$$\psi_{\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} N_{di} \bar{\psi}_{\eta i} , \quad (3.8d)$$

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ei} \bar{W}_i , \quad (3.8e)$$

其中允許函數  $\bar{u}_{\xi i}$ 、 $\bar{v}_{\eta i}$ 、 $\bar{\psi}_{\xi i}$ 、 $\bar{\psi}_{\eta i}$  與  $\bar{W}_i$  包含多項式及角函數。則每一項允許

函數(admissible functions)所表示的位移場可以矩陣型式表示

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_o & 0 & (z - C_1 z^3) \hat{\psi}_\xi & (z - C_1 z^3) \hat{\psi}_{\eta 1} & -C_1 z^3 \cdot \hat{W}_1 \\ \bar{u}_{\xi i, \eta} \cdot \sin \beta & \bar{v}_{\eta i, \eta} & 0 & (z - C_1 z^3) \bar{\psi}_{\eta i, \eta} \cos \beta & -C_1 z^3 \cdot \hat{W}_{i, \eta \eta} \\ \hat{u}_i & \hat{v}_o & (z - C_1 z^3) \bar{\psi}_{\xi i, \eta} & (z - C_1 z^3) \hat{\psi}_{\eta 2} & -2C_1 z^3 \cdot \hat{W}_{2, \eta} \\ 0 & 0 & 0 & (1 - C_2 z^2) \bar{\psi}_{\eta i} \cos \beta & (1 - C_2 z^2) \bar{W}_{i, \eta} \\ 0 & 0 & (1 - C_2 z^2) \bar{\psi}_{\xi i} & (1 - C_2 z^2) \bar{\psi}_{\eta i} (-\sin \beta) & (1 - C_2 z^2) \hat{W}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{ai} \\ N_{bi} \\ N_{ci} \\ N_{di} \\ N_{ei} \end{Bmatrix}$$

$$= [B_k] \{N_i\}, \quad (3.9)$$

其中，

$$\hat{u}_o = \bar{u}_{\xi i, \xi} - \sin \beta \bar{u}_{\xi i, \eta}, \quad (3.10a)$$

$$\hat{u}_i = (\cos \beta - \sin \beta \tan \beta) \bar{u}_{\xi i, \eta} + \tan \beta \bar{u}_{\xi i, \xi}, \quad (3.10b)$$

$$\hat{v}_o = \sec \beta \cdot \bar{v}_{\eta i, \xi} - \tan \beta \bar{v}_{\eta i, \eta}, \quad (3.10c)$$

$$\hat{\psi}_\xi = \sec \beta \cdot \bar{\psi}_{\xi i, \xi} - \tan \beta \bar{\psi}_{\xi i, \eta}, \quad (3.10d)$$

$$\hat{\psi}_{\eta 1} = -\tan \beta \bar{\psi}_{\eta i, \xi} + \sin \beta \tan \beta \bar{\psi}_{\eta i, \eta}, \quad (3.10e)$$

$$\hat{\psi}_{\eta 2} = \bar{\psi}_{\eta i, \xi} - 2 \sin \beta \bar{\psi}_{\eta i, \eta}, \quad (3.10f)$$

$$\hat{W}_1 = \sec^2 \beta \bar{W}_{i, \xi \xi} - 2 \sec \beta \tan \beta \bar{W}_{i, \xi \eta} - \tan^2 \beta \bar{W}_{i, \eta \eta}, \quad (3.10g)$$

$$\hat{W}_2 = \sec \beta \bar{W}_{i, \xi} - \tan \beta \bar{W}_{i, \eta}, \quad (3.10h)$$

應變場與應力場之關係可以下式表示

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$= [D]\{\varepsilon\} = [D][B_k]\{N_i\}, \quad (3.11)$$

式(3.11)中

$$D_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (3.11a)$$

$$D_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (3.11b)$$

### 3.1.2 應變能與動能

將式(3.11)及式(3.9)代入應變能之表示式中，則應變能可以寫為

$$U_{\max} = \int_V \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \right\} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dz dA$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dz dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{N_i\}^T [B_k]^T [D] [B_k] \{N_i\} dz dA, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

此時令

$$[K] = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} [B_k]^T [D] [B_k] dz dA, \tag{3.13}$$

則最大應變能可以寫成

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{N_i\}^T [K] \{N_i\} dz dA. \tag{3.14}$$

將式(3.2)代入動能之表示式中，則最大動能可以表示為

$$\begin{aligned}
T_{\max} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \rho \omega^2 [u^2 + v^2 + w^2] dz dA \\
&= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{N_i\}^T [B_m]^T [B_m] \{N_i\} dz dA. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

令

$$[M] = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} [B_m]^T [B_m] dz dA, \tag{3.16}$$

則一週期內之最大動能為

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \{N_i\}^T [M] \{N_i\} dz dA, \quad (3.17)$$

其中  $[B_m]$  為

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \cos \beta \bar{u}_{\xi i} & 0 & (z - C_1 \cdot z^3) \bar{\psi}_{\xi i} & -(z - C_1 z^3) \sin \beta \bar{\psi}_{\eta i} & -C_1 z^3 \hat{W}_2 \\ \sin \beta \bar{u}_{\xi i} & \bar{v}_{\eta i} & 0 & (z - C_1 z^3) \cos \beta \bar{\psi}_{\eta i} & -C_1 z^3 \bar{W}_{i,\eta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{W}_i \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

### 3.2 允許函數

式(3.8)中之允許函數以  $\xi - \eta$  座標表示，可將其進一步假設為

$$u_{\xi 0}(\xi, \eta) = u_{\xi p}(\xi, \eta) + u_{\xi c}(r, \theta), \quad (3.19a)$$

$$v_{\eta 0}(\xi, \eta) = v_{\eta p}(\xi, \eta) + v_{\eta c}(r, \theta), \quad (3.19b)$$

$$\Psi_{\xi}(\xi, \eta) = \Psi_{\xi p}(\xi, \eta) + \Psi_{\xi c}(r, \theta), \quad (3.19c)$$

$$\Psi_{\eta}(\xi, \eta) = \Psi_{\eta p}(\xi, \eta) + \Psi_{\eta c}(r, \theta), \quad (3.19d)$$

$$W(\xi, \eta) = W_p(\xi, \eta) + W_c(r, \theta), \quad (3.19e)$$

其中下標 "p" 表示滿足傳統幾何邊界條件之允許函數，下標 "c" 為角函

數。



本論文所考慮者為一懸臂斜形板（參看圖 1.1），採用之形狀函數必須

滿足

$$u_{\xi}(0, \eta) = 0, v_{\eta}(0, \eta) = 0, \Psi_{\xi}(0, \eta) = 0, \Psi_{\eta}(0, \eta) = 0, W(0, \eta) = 0, W_{,\eta}(0, \eta) = 0 \quad (3.20)$$

故採用之形狀函數可假設如下

$$u_{\xi p}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.21a)$$

$$v_{\eta p}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J b_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.21b)$$

$$\Psi_{\xi p}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.21c)$$

$$\Psi_{\eta p}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.21d)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=2}^I \sum_{j=1}^J e_{ij} \xi^i \eta^{j-1}, \quad (3.21e)$$

式中之  $a_{ij}$ 、 $b_{ij}$ 、 $c_{ij}$ 、 $d_{ij}$  與  $e_{ij}$  為任意參數； $(I, J)$  為式(3.21)之上限，其值並無任何限制，此處為簡化其複雜性，茲假設  $I$  與  $J$  之值相同。

式(3.21)之函數於數學上為一多項式之完備集，理論上當  $I$  與  $J$  之值取至無限大時可以得到頻率之解析解。然而隨著  $I$  與  $J$  之值增大伴隨著的是病態矩陣(ill-condition matrix)的發生，將造成數值上求解的困難。加之無法描

述於銳角處(reentrant corner)所產生之彎矩奇異性，僅採用滿足傳統幾何邊界條件之允許函數於數值求解時不僅收斂緩慢，更於描述奇異性行為上有所誤差。為滿足於該處之奇異性以及加速其收斂，茲將代入由 Huang(2002)所推導用以描述於銳角處( $r=0$  處)之應力奇異性行為的角函數(corner functions)

$$u_{\xi c} = \sum_{k=1}^K B_k \operatorname{Re}(u_{\xi}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{B}_k \operatorname{Im}(u_{\xi}(r, \theta, \lambda_k)) , \quad (3.22a)$$

$$v_{\eta c} = \sum_{k=1}^K C_k \operatorname{Re}(v_{\eta}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{C}_k \operatorname{Im}(v_{\eta}(r, \theta, \lambda_k)) , \quad (3.22b)$$

$$\Psi_{\xi c} = \sum_{k=1}^K D_k \operatorname{Re}(\Psi_{\xi}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{D}_k \operatorname{Im}(\Psi_{\xi}(r, \theta, \lambda_k)) , \quad (3.22c)$$

$$\Psi_{\eta c} = \sum_{k=1}^K F_k \operatorname{Re}(\Psi_{\eta}(r, \theta, \lambda_k)) + \tilde{F}_k \operatorname{Im}(\Psi_{\eta}(r, \theta, \lambda_k)) , \quad (3.22d)$$

$$W_c = \sum_{l=1}^I A_l W(r, \theta, \bar{\lambda}_l) , \quad (3.22e)$$

式(3.22a)、(3.22b)、(3.22c)、(3.22d)及(3.22e)中代表彎矩奇異性之漸近解。

由於角函數 $u_r$ 、 $v_{\theta}$ 、 $\Psi_r$ 及 $\Psi_{\theta}$ 為極座標系統，為統一座標系，須將角函數之座標系統由極座標轉換到 $\xi$ - $\eta$ 座標。轉換過程如下(參看圖 1.1、圖 3.1)：

$$\bar{u} = v_{\theta} \cos \theta + u_r \sin \theta , \quad (3.23a)$$

$$\bar{v} = v_\theta \sin \theta - u_r \cos \theta , \quad (3.23b)$$

$$\Psi_{\bar{x}} = \Psi_\theta \cos \theta + \Psi_r \sin \theta , \quad (3.23c)$$

$$\Psi_{\bar{y}} = \Psi_\theta \sin \theta - \Psi_r \cos \theta , \quad (3.23d)$$

$$\text{且 } \Psi_\eta = \frac{\Psi_{\bar{y}}}{\cos \beta} , \quad \Psi_\xi = \Psi_{\bar{x}} + \tan \beta \cdot \Psi_{\bar{y}} , \quad (3.23e)$$

經轉換可得

$$u_\xi = \frac{(v_\theta \cos \theta + u_r \sin \theta)}{\cos \beta} , \quad (3.24a)$$

$$v_\eta = (\sin \theta - \cos \theta \tan \beta)v_\theta + (-\cos \theta - \sin \theta \tan \beta)u_r , \quad (3.24b)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\xi(r, \theta, \lambda_k) = & [\cos \theta + \tan \beta \sin \theta] \Psi_\theta(r, \theta, \lambda_k) \\ & + [\sin \theta - \tan \beta \cos \theta] \Psi_r(r, \theta, \lambda_k) , \end{aligned} \quad (3.24c)$$

$$\Psi_\eta(r, \theta, \lambda_k) = \frac{(\sin \theta \cdot (r, \theta, \lambda_k) - \cos \theta \cdot \Psi_r(r, \theta, \lambda_k))}{\cos \beta} , \quad (3.24d)$$

$$W(r, \theta, \lambda_k) = r^{\lambda_k} \sin \lambda_k \theta , \quad (3.24e)$$

其中

$$r = \left[ \left( \frac{b}{2} - \eta \right)^2 + \xi^2 - 2\xi \left( \frac{b}{2} - \eta \right) \sin \beta \right]^{1/2} ,$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\xi \cos \beta}{(b/2 - \eta) - \xi \sin \beta} \circ$$



## 第四章 數值資料結果

由於懸臂斜形板形狀之多樣性，因此無法對其所有形狀皆做探討。本章將針對懸臂斜形厚板中之平行四邊形板及梯形板進行數值分析，除探討角函數對其求自然振動頻率收斂性之影響外，並針對不同幾何參數於懸臂斜形板自然振動頻率所造成之差別進行分析。

### 4.1 收斂性分析

本研究於允許函數序列中引入角函數，以描述由邊界條件所造成的彎矩奇異性。為了解角函數對數值解收斂快慢之影響程度，本章節針對柏松比( $\nu$ )=0.3、寬厚比( $h/b$ )=0.1、0.2，斜角( $\beta$ )=45°、60°及75°，之懸臂斜形厚板進行面內模態及面外模態無因次化頻率之收斂性分析(參看表4.1~4.13)，期望能在不良矩陣(ill-conditioning matrix)發生前，求得該等板自然振動頻率之收斂解。本研究之數值結果是以 FORTRAN 程式語言撰寫而得，為求得其精確之收斂解，茲採用四倍精確度(quadral position)之浮點計算。

表 4.1~表 4.3 乃寬厚比( $h/b$ )為 0.1 的懸臂平行四邊形斜板於斜角 45°、60°、75° 面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析，其  $a/b$  等於 1.0。表 4.4~表 4.6 乃寬厚比( $h/b$ )為 0.2 的懸臂平行四邊形斜板於斜角 45°、60°、75°

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析,其  $a/b$  等於 1.0。表 4.7~表 4.12 為表 4.1~表 4.6 中所有案例之面內無因次化頻率( $\omega a \sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析。於所有案例中,所引用之角函數數目分別為 0 個、1 個、5 個、10 個和 15 個。表 4.1~表 4.6 中之  $(I, J)$  代表式(3.22a)~式(3.22e)的  $I$  和  $J$  之大小,多項式所引用之總項數為  $5 \times [(I-1) \cdot J + I] - 1$ ;角函數之數目(No. of corner functions)則代表式(4.23a)~式(4.23e)各所引用之項數,故所引用之總項數為  $5 \times [(I-1) \cdot J + I] - 1 + 5n_c$ 。此處對於表 4.1~表 4.12 之收斂性分析係針對前五個振態之無因次化頻率作為探討。表 4.13 為懸臂平行四邊形厚板不加角函數、僅考慮多項式項次之收斂性分析。

從表 4.1 所得到的收斂性分析中,可以觀察到以下之現象:

- a. 以第一振態為例,比較(4,4)不加角函數(多項式共 79 項)之頻率值為 4.574、(4,4)加 15 個角函數之頻率值為 4.396 以及(9,9)不加角函數(多項式共 404 項)之頻率值為 4.399,可以發現頻率值從 4.574 降至 4.396,僅需於五個位移函數各加 15 個角函數(共 75 項)。但若是以增加多項式的方式,則需增加 325 項多項式方可自 4.574 降至 4.399,但其值尚大於 4.396。由此可以知道角函數相較於多項式對於收斂性其效果較為明顯,影響亦較大。

b. 第一振態中，(8,8)不加角函數與加 10 個角函數頻率降低之百分比為 0.5221%，而(8,8)不加角函數與(9,9)不加角函數之頻率值減少之百分比為 0.1362%，二者相差 0.3859%。以此類推第二~第五個振態頻率差值百分比依次為 0.2828%、0.3998%、0.2458%、0.0222%。於此五個振態中，以前三振態之頻率差值最大，由此可以得知角函數對於低階振態的收斂性較快，具有更佳之效果。

c. 觀察每一個振態中(8,8)加 10 個角函數以及(9,9)加 10 個角函數之頻率值，可發現大部份之頻率值皆可達到至少三位有效位數之收斂。

而針對表 4.7 之內無因次化頻率所得到的收斂性分析中，可以觀察到以下之現象：

a. 以第一振態為例，比較(4,4)不加角函數之頻率值為 2.290、(4,4)加 15 個角函數之頻率值為 2.150 以及(9,9)不加角函數之頻率值為 2.165，可以發現頻率值從 2.290 降至 2.150，僅需於五個位移函數各加 15 個角函數(共 75 項)。但若是以增加多項式的方式，則需增加 325 項多項式方可自 2.290 降至 2.165，但其值尚大於 2.150。由此可以知道角函數針對面內模態，收斂性較諸多項式其效果亦較為明顯。

b. 第一振態中，可以觀察到當引用(6,6)加 5 個角函數，頻率值即收斂。第

二振態中，可以觀察到當引用(4,4)加 15 個角函數，頻率值即收斂。第三振態中，可以觀察到當引用(5,5)加 10 個角函數，頻率值即收斂。第四振態中，可以觀察到當引用(7,7)加 15 個角函數，頻率值即收斂。第五振態中，可以觀察到當引用(5,5)加 10 個角函數，頻率值即收斂。相較於面外之無因次化頻率，角函數明顯對於面內之無因次化頻率提供較佳之收斂效果。

- c. 觀察每一個振態中(8,8)加 10 個角函數以及(9,9)加 10 個角函數之頻率值，可發現所有頻率值皆可達到四位有效位數之收斂。

於表 4.1~表 4.12 亦列 Liew 等人(1993)、McGee 等人(1994)以及 Huang 等人(2005)所作相關斜形板之結果。Liew 等人(1993)應用 Mindlin 板理論，以 Ritz 法求解自然振動頻率。所引用之允許函數為多項式函數，其呈現之解答在斜角  $\beta \leq 30^\circ$  時包含 198 個自由度，而在  $\beta > 30^\circ$  時則有 222 個自由度，此處僅取  $\beta > 30^\circ$  者。McGee 等人(1994)利用高階斜形板理論(HSDPT) 佐以有限元素法求取自然振動頻率，其採用 64 拉格朗日等參數板元素(64 Lagrangian isoparametric plate elements)，總共包含 2448 個自由度。Huang 等人(2005)於 Mindlin 板理論中，利用 Ritz 法探討含有應力奇異點之振動行為，採用之剪力修正因子為  $\frac{5}{6}$ ，所採用之允許函數除完備集之多項式外，同時加入可描述應力奇異行為之角函數。其中 Liew 等人(1993)與 Huang 等人



(2005)雖採用相同之板理論，然因 Huang 等人(2005)於允許函數中加入角函數，準確的描述應力奇異性，其結果較諸 Liew 等人(1993)更為準確。將本論文與 Liew 等人(1993)、McGee 等人(1994)以及 Huang 等人(2005)所作之結果相比較，本論文所得之收斂解皆與其他文獻相彷彿。

由表 4.1~表 4.3 中，針對  $h/b=0.1$ 、 $a/b=1$ 、 $c/b=1$  之懸臂平行四邊形板，將其不同角度之第一振態頻率值，比較多項式(9,9)不加角函數以及(9,9)加 10 個角函數之頻率值。可以發現：

- a. 斜角  $45^\circ$  之斜形板，頻率值從 4.399 降至 4.381，頻率值降低了 0.41%；
- b. 斜角  $60^\circ$  之斜形板，頻率值從 5.094 降至 5.032，頻率值降低了 1.22%；
- c. 斜角  $75^\circ$  之斜形板，頻率值從 5.966 降至 5.734，頻率值降低了 3.89%；

另外同樣比較表 4.4~表 4.6 中，針對  $h/b=0.2$ 、 $a/b=1$ 、 $c/b=1$  之懸臂平行四邊形板，多項式(9,9)不加角函數以及(9,9)加 10 個角函數之頻率值，於不同角度之第一振態頻率值。整理可以得到以下數據：

- a. 斜角  $45^\circ$  之斜形板，頻率值從 4.196 降至 4.179，頻率值降低了 0.41%；
- b. 斜角  $60^\circ$  之斜形板，頻率值從 4.792 降至 4.733，頻率值降低了 1.23%；

c. 斜角  $75^\circ$  之斜形板，頻率值從 5.586 降至 5.363，頻率值降低了 3.99%；

綜觀上述由表 4.1~表 4.6 之比較可以得知，收斂與否，主要由兩個因素控制：

1. 允許函數之多項式引用項數之多少，當引用之多項式項次越多，所得到之解會越趨近收斂，如表 4.13 所示，當多項式增加至(16,16)時，所有的數值皆達到三位有效收斂；
2. 角函數引用項數之多少，當引用之角函數項次越多，所得到之解會越趨近收斂；

然兩者之影響有所差異。比較表 4.1 與表 4.13，以斜角  $\beta$  為 45 度的第一模態為例，(9,9)加 15 個角函數所得之值為 4.381，而(16,16)則為 4.383；由此可以得知：對於斜角較小之板，角函數對於增加其收斂性速度效果較不明顯，僅須增加多項式之項數，亦可以得到效果不錯之收斂解。而當斜角愈大時，比較表 4.3 與 4.13 斜角  $\beta$  為 75 度的第一模態，(9,9)加 15 個角函數所得之值為 5.295，而(16,16)則為 5.778，增加角函數所造成頻率值降低的百分比比較大，而增加多項式反而對於加速其收斂無甚影響。由此可以知道，斜角  $\beta$  的大小與收斂之特性有很大的關係；亦即當斜形板之斜角  $\beta$  愈大時，奇異性愈強，需要引入較多之角函數方能得到較佳之解。但僅增加多項式數量將會遭遇到數值上的困難(ill-conditioning)，如表 4.13 所示，增加多項

式數目最多可以到達(16,16)，當增加至(17,17)時則會出現病態矩陣而無法求解。

## 4.2 懸臂斜形厚板數值結果

### 4.2.1 數值結果分析

於此章節，將探討在不同幾何參數下，懸臂斜形厚板(參看圖 1.1)振動頻率的變化，其中柏松比 $\nu=0.3$ 。所分析之案例，於不同之角度( $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$ )，分為懸臂平行四邊形斜板( $c/b=1$ )以及三種不同比例之懸臂梯形斜板( $c/b=0.25$ 、 $c/b=0.5$ 、 $c/b=0.75$ )，其中每一種不同之懸臂斜形厚板再分別選三種不同之長寬比( $a/b=0.5$ 、 $a/b=1$ 、 $a/b=2$ )，及兩種不同之厚寬比( $h/b=0.1$ 、 $h/b=0.2$ )。茲將結果列於表 4.14~表 4.25，所採用之項數為(9,9)加上 10 個角函數( $n_c$ )。因為齊性材料，故面內模態與面外模態兩者不藕合，可分開討論其趨勢；表 4.14~表 4.17 為面內模態之無因次化頻率( $\omega a \sqrt{\rho/E}$ )，表 4.18~表 4.21 為面外模態之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )。為將面內與面外之無因次化頻率做一排序處理，於表 4.22~表 4.25 中所採用之無因次化頻率係考慮厚度之值( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )，於表 4.22~表 4.25 中面內模態之頻率將加註一符號(\*)以作區別。

針對面內模態之頻率，觀察表 4.14~表 4.17 可以整理得知以下之現象：

- a. 以表 4.14( $c/b=1$ )為例，比較相同之長寬比( $a/b=1$ )及斜角  $\beta=75^\circ$ ，厚寬比  $h/b$  為 0.1 時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 11.50，而厚寬比  $h/b$  為 0.2 時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 11.50，其頻率值不隨厚寬比之增加而變化，於表 4.15-表 4.17 中亦如此。
- b. 以表 4.14( $c/b=1$ )為例，比較相同之斜角  $\beta=30^\circ$ ，長寬比  $a/b$  為 0.5 時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 2.728，長寬比  $a/b$  為 1 時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 2.200，而長寬比  $a/b$  為 2 時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 1.365，其頻率值隨長寬比之增加而降低，於表 4.15-表 4.17 中亦如此。故若僅考慮長寬比之改變，其無因次化頻率值將隨著  $a/b$  之增加而增加。
- c. 於表 4.14-表 4.17 中，比較相同之長寬比( $a/b=1$ )、及斜角  $\beta=75^\circ$  時， $c/b=0.25$ (表 4.15)時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 0.649， $c/b=0.5$ (表 4.16)時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 0.808， $c/b=0.75$ (表 4.17)時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 1.012，而  $c/b=1$ (表 4.14)時所出現面內第一模態之無因次化頻率為 1.150，其頻率值隨  $c/b$  之增加而增加，於不同長寬比及斜角時亦如此。故若僅考慮  $c/b$  之改變，其無因次化頻率值將隨著  $c/b$  之增加而增加。

而觀察表 4.18~表 4.21 之結果，針對面外模態之頻率整理其現象如下：

- a. 於表 4.18( $c/b=1$ )中，比較相同長寬比( $a/b=1$ )以及厚寬比( $h/b=0.1$ )時。 $\beta=30^\circ$ 時其第一振態之頻率值為 3.857， $\beta=45^\circ$ 時其第一振態之頻率值為 4.381， $\beta=60^\circ$ 時其第一振態之頻率值為 5.032， $\beta=75^\circ$ 時其第一振態之頻率值為 5.734，隨著角度增加，頻率亦隨之變大，於表 4.19-表 4.21 中亦如此。故若僅考慮斜角  $\beta$  之改變，其無因次化頻率值將隨著  $\beta$  之增加而增加。
- b. 於表 4.18( $c/b=1$ )中，比較相同長寬比( $a/b=1$ )及斜角  $\beta=30^\circ$  時。厚寬比  $h/b=0.1$  之第一振態之頻率值為 3.857，厚寬比  $h/b=0.2$  時其第一振態之頻率值為 3.724，隨著厚度增加，頻率則隨之減小，於表 4.19-表 4.21 中亦如此。故若僅考慮厚寬比  $h/b$  之改變時，其無因次化頻率值將隨著厚寬比之增加而降低。
- c. 於表 4.18~表 4.21 中，比較相同斜角  $\beta=30^\circ$ 、長寬比( $a/b=0.5$ )以及厚寬比( $h/b=0.1$ )時。 $c/b=0.25$ (表 4.19)時其第一振態之頻率值為 3.991， $c/b=0.5$ (表 4.20)時其第一振態之頻率值為 3.872， $c/b=0.75$ (表 4.21)時其第一振態之頻率值為 3.851， $c/b=1$ (表 4.18)時其第一振態之頻率值為 3.845，隨著  $c/b$  增加，頻率則隨之減小，於不同厚寬比、長寬

比及斜角時亦如此。故於同一角度 $\beta$ 、厚寬比( $h/b$ )及長寬比( $a/b$ )的情況下， $c/b$ 值愈大，頻率值愈小。

綜觀表 4.22~表 4.25 中所有之數據，可以發現面內模態與面外模態之頻率值出現的順序並無一定之規律，然可發現，當斜角越大時，面內之振態會越在前面。以斜角 $\beta = 75^\circ$ 為例，無論何種幾何形狀，其面內振態之頻率均在第一或第二振態。

#### 4.2.2 振態圖

圖 4.1a~圖 4.1h 為不同斜角之懸臂平行四邊形厚板針對前五個頻率之振態圖，其邊界條件為僅一端固定之懸臂型式，其中面外之模態將以節點線圖之方式表示，節點線圖乃為取平板振動時，於 $w$ 方向上位移量為 0 的點連線而成。而面內之模態則將邊界處面內變形以虛線呈現。由圖 4.1 可以觀察得知：

a. 於圖 4.1a 中，長寬比 $a/b = 2$ 時第三個模態為受短邊方向之彎矩，此種模態於長寬比 $a/b = 1$ 時後退至第四個模態，而到 $a/b = 0.5$ 時則退到第五個模態之後。

b. 比較圖 4.1a 與圖 4.1b 中，長寬比 $a/b = 1$ 時，斜角 $\beta$ 為 30 度與斜角 $\beta$ 為 45

度第四及第五個模態互換。

c. 當斜角  $\beta$  角度增加時由軸向彎矩及扭矩所造成之影響亦隨之加劇。

d. 以圖 4.1a 中，斜角  $\beta=30^\circ$ 、長寬比  $a/b=0.5$ 、 $h/b=0.1$  為例，其面內之模態為第四個模態，而在圖 4.1e 中，當厚寬比變為  $h/b=0.2$  時，同樣的面內模態則為第三模態，且其第五模態亦為面內模態。觀察其餘組相同幾何條件下，僅改變寬厚比的振態圖，可發現大部分之振態在寬厚比提高以後，面內模態有往前移動的趨勢。



## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

本論文乃應用 Huang(2002)之成果，利用 Ritz 法探討含有奇異點之斜形板的振動行為。本論文所研究分析之案例主要有二：懸臂梯形斜板以及懸臂平行四邊形斜板。茲從本研究之結果於下作一完整的結論：

- a. 從斜形板之收斂性分析，可以發現多項式允許函數之項數愈多，其數值亦能愈逼近收斂值。其中多項式允許函數在沒有引用角函數時，所得到之數值解或許會收斂，然而卻不是一個精確值；相對而言，加入角函數可以加速自然振動頻率收斂之速度。
- b. 在 Ritz 法中若只增加滿足傳統邊界條件之多項式函數為允許函數 (admissible function)，而不引入角函數，數值一樣會收斂。然而隨著傾斜角度之增加，奇異性亦隨之增高；將造成為求得收斂解，須不斷增加多項式之項數，然此舉會因引入之項數過多造成數值上的困難 (ill conditioning) 而無法求解。

因此，引入角函數以加速其收斂速度為必要之行為。

- c. 觀察懸臂斜形板面外之無因次化頻率，其值將會隨著斜角  $\beta$  角度之增加



而增加；彎矩與剪力奇異性亦隨之增強。當  $a/b$  減小時，勁度則隨之增加，造成頻率之加大。而當懸臂斜形板之形狀由梯形越接近平行四邊形時，頻率亦隨之增加。

- d. 不論是懸臂平行四邊形厚板或是懸臂梯形厚板、斜角之大小，在其所有振態中，面內模態之頻率皆比面外模態之頻率下降幅度為大，此點說明了角函數在面內之振態效果較佳，收斂性亦較好。

## 5.2 建議

本論文利用 Ritz 法分析含有奇異點之懸臂平行四邊形厚板及懸臂梯形厚板的自然振動行為。求解上加入角函數，讓 Ritz 法於分析不論由邊界條件或幾何形狀所產生的應力奇異問題能更為精確。而利用 Ritz 法並引入角函數，此一作法亦可提供予後人用於研究其它不同邊界條件下具應力奇異點之厚板自然振動與力學行為。

## 參考文獻

- Burton, W. S., and Sinclair, G. B., “On the Singularities in Reissner’s Theory for the Bending of Elastic Plates”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 53, pp. 220-222. , 1986
- Dempsey, J. P., and Sinclair, G. B., “On the Stress Singularities in the Plate Elasticity of the Composite Wedge”, *Journal of Elasticity*, 9(4), pp. 373-391. , 1979
- Hanna, N. F., “Thick Plate Theories with Applications to Vibration”, PhD dissertation, Ohio State University, Columbus, OH, 1990.
- Hartranft, R. J., and Sih, G. C., “The Use of Eigenfunction Expansions in the General Solution of Three-Dimensional Crack Problems”, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 19(2), pp. 123-138. , 1969
- Hein, V. L., and Erdogan, F., “Stress Singularities in a Two-Material Wedge”, *International Journal for Fractural Mechanics*, 7(3), pp. 317-330. , 1971
- Huang, C. S., Leissa, A. W., and McGee, O. G., “Exact Analytical Solutions for the Vibrations of Sectorial Plates With Simply-Supported Radial Edges”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 60, pp. 478-483. , 1993
- Huang, C. S., McGee, O. G., and Leissa, A. W., “Exact Analytical Solutions for the Vibrations of Mindlin Sectorial Plates With Simply-Supported Radial Edges”, *International Journal of Solids and Structures*, 31(11), pp. 1609-1631. , 1994
- Huang, C. S., “On the Singularity Induced by Boundary Conditions in a Third-Order Thick Plate Theory”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 69, pp. 800-810. , 2002
- Huang, C. S., “Stress Singularities at Angular Corners in First-Order Shear Deformation Plate Theory”, *International Journal of Mechanical Science*, 45, pp. 1-20. , 2003
- Huang, C. S., “Corner Stress Singularities in a High-order Plate Theory”, *Computers & Structures*, 82, pp. 1657-1669 . , 2004
- Huang, C. S., Leissa, A. W., and Chang, M. J. “Vibrations of Skewed Cantilevered Triangular, Trapezoidal and Parallelogram Mindlin Plates with

- Considering Corner Stress Singularities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62, pp. 1789-1806. , 2005
- Leissa, A. W., Huang, C. S., and Chang, M. J., “Accurate Frequencies and Mode Shapes for Moderately Thick, Cantilevered, Skew Plates”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, submitted for publication, 2006.
- Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., and Wang, C.M., “Vibration of Thick Skew Plates based on Mindlin Shear Deformation Plate Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, 168(1), pp. 39-69. , 1993
- McGee, O. G., and Butalia, T. S., “Natural Vibrations of Shear Deformable Cantilevered Skew Thick Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 176(3), pp. 351-376. , 1994
- Ojikutu, I. O., Low, R. O., and Scott, R. A., “Stress Singularities in Laminated Composite Wedge”, *International Journal of Solids and Structures*, 20(8), pp. 777-790. , 1984
- Reddy, J. N., “Energy and Variational Methods in Applied Mechanics”, John Wiley, N.Y., 1984
- Sinclair, G. B., “Logarithmic Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates Under Bending”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 67, pp. 219-223. , 2000
- Ting, T. C., and Chou, S. C., “Edge Singularities in Anisotropic Composites”, *International Journal of Solids and Structures*, 17(11), pp. 1057-1068. , 1981
- William, M. L., “Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corner of Plates in Extension”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 19, pp. 526-528. , 1952
- William, M. L., “Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates Under Bending”, *proceeding of 1<sup>st</sup> U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME*, New York, pp. 325-329. , 1952
- William, M. L., and Chapkis, R. L., “Stress Singularities for a Sharp-Notched Polarly Orthotropic Plate”, *proceeding of 3<sup>rd</sup> U.S. National Congress of*

*Applied Mechanics, ASME*, New York, pp. 281-286. , 1952

Xie, M., and Chaudhuri, R. A., “Three Dimensional Stress Singularity at a Bimaterial Interface Crack Front”, *Composite Structures*, 40(2), pp. 137-147. , 1998



表 2.1 面外之線性齊次方程式之係數

自由端( $\theta = \alpha$ )邊界條件	線性齊次方程式之係數
$P_\theta = 0$ 式(2.28a)	$a_{11} = 5\lambda_m(1 + \lambda_m)\cos(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{12} = 5\lambda_m(1 + \lambda_m)\sin(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{13} = \frac{\rho_1}{\nu - 1}\cos(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{14} = -\frac{\rho_1}{\nu - 1}\sin(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{15} = -16\lambda_m\sin(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{16} = 16\lambda_m\cos(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{17} = \frac{\rho_2}{\nu - 1}\sin(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{18} = \frac{\rho_2}{\nu - 1}\cos(1 - \lambda_m)\alpha ,$
$\overline{M}_\theta = 0$ 式(2.28b)	$a_{21} = (\nu - 1)\lambda_m(1 + \lambda_m)\cos(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{22} = (\nu - 1)\lambda_m(1 + \lambda_m)\sin(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{23} = \xi_1\cos(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{24} = -\xi_1\sin(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{25} = -4(\nu - 1)\lambda_m\sin(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{26} = 4(\nu - 1)\lambda_m\cos(1 + \lambda_m)\alpha ,$ $a_{27} = \xi_2\sin(1 - \lambda_m)\alpha ,$ $a_{28} = \xi_2\cos(1 - \lambda_m)\alpha ,$

續表 2.1 面外之線性齊次方程式之係數

$\overline{M}_{r\theta} = 0$ <p>式(2.28c)</p>	$a_{31} = 8\lambda_m(1 + \lambda_m)\sin(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{32} = -8\lambda_m(1 + \lambda_m)\cos(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{33} = -(\lambda_m - 1)(-17 + 8k_1\lambda_m)\sin(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{34} = -(\lambda_m - 1)(-17 + 8k_1\lambda_m)\cos(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{35} = 34\lambda_m\cos(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{36} = 34\lambda_m\sin(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{37} = (\lambda_m - 1)(17 + 8k_2\lambda_m)\cos(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{38} = -(\lambda_m - 1)(17 + 8k_2\lambda_m)\sin(1 - \lambda_m)\alpha$ ,
$\frac{2}{r}P_{r\theta} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r}P_{\theta,\theta} = 0$ <p>式(2.28d)</p>	$a_{41} = -\gamma_1\sin(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{42} = \gamma_1\cos(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{43} = -\gamma_2\sin(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{44} = -\gamma_2\cos(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{45} = -\gamma_3\cos(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{46} = -\gamma_3\sin(1 + \lambda_m)\alpha$ , $a_{47} = -\gamma_4\cos(1 - \lambda_m)\alpha$ , $a_{48} = \gamma_4\sin(1 - \lambda_m)\alpha$ ,

其中

$$\rho_1 = -16(1 + \nu\lambda_m) + 5k_1\lambda_m(3 + \nu - \lambda_m + \nu\lambda_m)$$
 ,

$$\rho_2 = 16 + [-16 + 5(3 + \nu)k_2]\lambda_m + 5(\nu - 1)k_2\lambda_m^2 ,$$

$$\xi_1 = -4(1 + \nu\lambda_m) + (3 + \nu - \lambda_m + \nu\lambda_m)k_1\lambda_m ,$$

$$\xi_2 = 4 + [-4 + (3 + \nu)k_2]\lambda_m + (\nu - 1)k_2\lambda_m^2 ,$$

$$\gamma_1 = 5(\nu - 1)E\lambda_m(1 + \lambda_m)(1 - \lambda_m) ,$$

$$\gamma_2 = E(\lambda_m - 1)\lambda_m[2(-1 + \nu)(-8 + 5k_1\lambda_m) + 16(1 + \nu\lambda_m) - 5k_1\lambda_m(3 + \nu - \lambda_m + \nu\lambda_m)] ,$$

$$\gamma_3 = 16(\nu - 1)E\lambda_m(1 - \lambda_m) ,$$

$$\gamma_4 = E(\lambda_m - 1)\{16 + [-16 + 15k_2 + 5\nu k_2 - 16(\nu - 1)]\lambda_m - 5(\nu - 1)k_2\lambda_m^2\}$$

表 2.2 面內之線性齊次方程式之係數

自由端( $\theta = \alpha$ )邊界條件	線性齊次方程式之係數
$N_{r\theta} = 0$ 式(2.35a)	$b_{11} = \bar{E}_0 \lambda_m \sin(\lambda_m + 1)\alpha ,$ $b_{12} = -\bar{E}_0 \lambda_m \cos(\lambda_m + 1)\alpha ,$ $b_{13} = \frac{(\lambda_m - 1)(1 + \mu_1)}{2} \bar{E}_0 \sin(\lambda_m - 1)\alpha ,$ $b_{14} = -\frac{(\lambda_m - 1)(1 + \mu_1)}{2} \bar{E}_0 \cos(\lambda_m - 1)\alpha ,$
$N_\theta = 0$ 式(2.35b)	$b_{21} = (\nu - 1)\lambda_m \bar{E}_0 \cos(\lambda_m + 1)\alpha ,$ $b_{22} = (\nu - 1)\lambda_m \bar{E}_0 \sin(\lambda_m + 1)\alpha ,$ $b_{23} = -\hat{\mu}_1 \cdot \bar{E}_0 \cdot \cos(\lambda_m - 1)\alpha ,$ $b_{24} = -\hat{\mu}_1 \cdot \bar{E}_0 \cdot \sin(\lambda_m - 1)\alpha ,$



表 4.1 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	4.574	4.469	4.432	4.416	4.405	4.399	<4.385> [4.387] (4.401)
	1	4.550	4.453	4.420	4.404	4.394	4.388	
	5	4.411	3.399	4.392	4.388	4.385	4.383	
	10	4.400	4.394	4.387	4.384	4.382	4.381	
	15	4.396	4.392	4.387	4.384	4.382	4.381	
2	0	11.29	10.87	10.71	10.65	10.61	10.59	<10.52> [10.54] (10.55)
	1	11.19	10.85	10.70	10.64	10.61	10.59	
	5	10.79	10.67	10.60	10.58	10.57	10.56	
	10	10.67	10.60	10.58	10.58	10.56	10.56	
	15	10.62	10.59	10.58	10.57	10.56	10.56	
3	0	29.00	25.89	25.30	25.10	25.01	24.95	<24.72> [24.77] (24.82)
	1	28.91	25.87	25.30	25.09	24.99	24.93	
	5	25.81	25.11	24.95	24.89	24.87	24.85	
	10	25.11	24.96	24.91	24.88	24.85	24.84	
	15	25.05	24.93	24.89	24.86	24.85	24.84	
4	0	32.13	29.52	28.85	28.58	28.48	28.42	<28.24> [28.26] (28.32)
	1	32.02	29.51	28.84	28.57	28.47	28.41	
	5	29.74	28.67	28.50	28.39	28.36	28.34	
	10	28.65	28.49	28.42	28.37	28.35	28.34	
	15	28.52	28.46	28.39	28.36	28.35	28.34	
5	0	56.79	49.01	45.64	45.27	45.13	45.09	<44.97> [/ (/)
	1	56.78	48.97	45.63	45.26	45.13	45.08	
	5	52.96	46.99	45.47	45.21	45.11	45.08	
	10	47.78	45.73	45.33	45.15	45.10	45.08	
	15	47.32	45.58	45.27	45.13	45.08	45.08	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

[ ] : 表示 Liew 等人(1993)之研究結果

( / ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.2 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	5.812	5.381	5.224	5.196	5.125	5.094	<4.956> [5.049] (5.078)
	1	5.546	5.336	5.196	5.155	5.117	5.065	
	5	5.084	5.060	5.049	5.042	5.037	5.034	
	10	5.063	5.052	5.043	5.038	5.034	5.032	
	15	5.058	5.047	5.041	5.037	5.034	5.032	
2	0	16.37	15.41	15.17	15.07	15.01	14.98	<14.90> [14.90] (14.96)
	1	16.23	15.25	15.05	15.05	14.97	14.91	
	5	15.36	15.00	14.93	14.90	14.88	14.87	
	10	15.02	14.93	14.90	14.88	14.87	14.87	
	15	14.97	14.91	14.89	14.88	14.87	14.87	
3	0	36.55	30.54	28.70	28.08	27.77	27.59	<26.39> [27.08] (27.11)
	1	33.40	30.38	28.66	28.66	27.95	27.46	
	5	29.22	27.77	27.33	27.22	27.18	27.17	
	10	27.71	27.35	27.21	27.20	27.17	27.16	
	15	27.52	27.33	27.21	27.18	27.17	27.16	
4	0	47.82	41.50	39.72	39.66	38.84	38.71	<38.24> [38.33] (38.41)
	1	46.30	41.49	39.66	39.08	38.66	38.62	
	5	41.27	39.12	38.65	38.50	38.45	38.44	
	10	39.65	38.75	38.57	38.47	38.44	38.43	
	15	38.91	38.72	38.52	38.46	38.44	38.43	
5	0	68.96	61.61	53.64	52.38	51.99	51.85	<51.27> [/ (/)
	1	67.72	61.00	53.38	51.96	51.77	51.75	
	5	61.60	58.19	52.62	51.86	51.64	51.60	
	10	61.07	53.64	52.61	51.76	51.62	51.59	
	15	60.33	52.63	51.99	51.70	51.59	51.59	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

[ ] : 表示 Liew 等人(1993)之研究結果

( ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.3 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	9.078	7.212	6.499	6.204	6.055	5.966	<5.295>
	1	8.434	6.894	6.356	6.120	5.992	5.908	
	5	5.810	5.782	5.769	5.759	5.750	5.744	
	10	5.783	5.766	5.753	5.743	5.735	5.734	
	15	5.776	5.761	5.747	5.741	5.735	—	
2	0	32.76	27.57	25.13	24.21	23.77	23.52	<22.95>
	1	27.61	25.93	24.55	23.83	23.46	23.24	
	5	23.82	23.10	22.95	22.90	22.86	22.85	
	10	23.11	22.99	22.87	22.83	22.82	22.80	
	15	22.95	22.89	22.83	22.82	22.81	—	
3	0	68.12	51.48	44.81	42.21	41.26	40.78	<44.78>
	1	67.84	49.44	42.91	41.05	40.48	40.20	
	5	41.58	40.43	39.88	39.61	39.46	39.55	
	10	40.09	39.81	39.57	39.45	39.38	39.36	
	15	39.77	39.56	39.48	39.42	39.38	—	
4	0	68.12	67.02	62.44	60.74	58.18	57.75	<64.09>
	1	67.00	65.93	59.30	58.18	57.09	56.01	
	5	63.35	59.48	56.91	55.75	55.51	55.41	
	10	58.11	56.68	55.90	55.55	55.45	55.35	
	15	57.57	56.50	55.83	55.45	55.39	—	
5	0	174.6	121.2	83.54	74.39	72.14	71.43	<85.48>
	1	153.4	100.9	80.29	72.62	71.54	71.15	
	5	88.46	79.63	74.63	71.34	70.95	70.80	
	10	77.15	73.46	71.71	71.06	70.84	70.72	
	15	76.79	73.22	71.43	70.98	70.81	—	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

\* : 為面內(in-plane)模態之頻率

— : 病態矩陣(ill-conditioning)

表 4.4 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	4.357	4.266	4.232	4.214	4.203	4.196	<4.163> [4.171] (4.194)
	1	4.331	4.255	4.223	4.205	4.193	4.187	
	5	4.208	4.197	4.191	4.186	4.182	4.180	
	10	4.198	4.190	4.185	4.182	4.180	4.179	
	15	4.195	4.188	4.184	4.181	4.180	4.179	
2	0	10.07	9.781	9.678	9.631	9.608	9.594	<9.505> [9.524] (9.572)
	1	10.03	9.769	9.670	9.626	9.603	9.590	
	5	9.715	9.629	9.595	9.581	9.574	9.569	
	10	9.639	9.595	9.580	9.570	9.569	9.567	
	15	9.614	9.588	9.577	9.570	9.568	9.566	
3	0	23.69	22.06	21.57	21.37	21.25	21.18	<20.74> [20.78] (21.02)
	1	23.63	22.02	21.56	21.36	21.25	21.18	
	5	21.49	21.26	21.20	21.14	21.09	21.07	
	10	21.28	21.20	21.13	21.10	21.07	21.06	
	15	21.26	21.18	21.12	21.08	21.07	21.06	
4	0	25.90	24.11	23.88	23.79	23.75	23.73	<23.51> [23.56] (/)
	1	25.88	24.11	23.88	23.79	23.75	23.73	
	5	24.90	23.92	23.75	23.73	23.72	23.71	
	10	23.93	23.80	23.74	23.73	23.71	23.70	
	15	23.92	23.77	23.74	23.72	23.71	23.70	
5	0	43.40	38.43	36.84	36.70	36.63	36.61	<36.24> [/ (/)
	1	43.39	38.41	36.84	36.70	36.63	36.61	
	5	41.17	37.52	36.72	36.63	36.63	36.60	
	10	37.84	36.84	36.69	36.63	36.62	36.60	
	15	37.49	36.78	36.67	36.62	36.60	36.60	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

[ ] : 表示 Liew 等人(1993)之研究結果

( / ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.5 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	5.348	5.030	4.908	4.848	4.813	4.792	<4.709> [4.719] (4.771)
	1	5.177	5.004	4.886	4.823	4.787	4.767	
	5	4.777	4.756	4.747	4.742	4.738	4.735	
	10	4.762	4.749	4.743	4.738	4.734	4.733	
	15	4.756	4.747	4.741	4.737	4.734	4.732	
2	0	14.11	13.58	13.44	13.37	13.33	13.30	<13.17> [13.20] (13.32)
	1	13.93	13.43	13.35	13.29	13.26	13.23	
	5	13.49	13.28	13.24	13.22	13.21	13.20	
	10	13.28	13.24	13.22	13.21	13.20	13.20	
	15	13.27	13.23	13.21	13.21	13.20	13.20	
3	0	24.25	23.05	22.74	22.58	22.47	22.40	<22.05> [22.10] (22.49)
	1	23.15	22.39	22.31	22.27	22.25	22.23	
	5	22.22	22.17	22.16	22.16	22.16	22.16	
	10	22.17	22.16	22.16	22.16	22.16	22.16	
	15	22.16	22.16	22.16	22.16	22.16	22.16	
4	0	32.23	30.12	29.64	29.48	29.41	29.33	<28.97> [29.03] (/)
	1	31.93	29.90	29.56	29.39	29.38	29.32	
	5	30.80	29.63	29.39	29.33	29.31	29.30	
	10	29.82	29.46	29.36	29.32	29.29	29.29	
	15	29.66	29.40	29.35	29.30	29.29	29.29	
5	0	57.78	46.24	42.34	41.80	41.65	41.54	<40.97> [/ (/)
	1	56.81	45.99	42.11	41.68	41.56	41.50	
	5	48.53	45.27	42.04	41.63	41.52	41.49	
	10	45.45	42.89	41.81	41.58	41.51	41.49	
	15	45.13	42.36	41.71	41.56	41.50	41.49	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

[ ] : 表示 Liew 等人(1993)之研究結果

( / ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.6 懸臂平行四邊形厚板

面外無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	7.642	6.430	5.987	5.779	5.662	5.586	<5.227>
	1	6.991	5.953	5.821	5.729	5.621	5.552	
	5	5.462	5.435	5.413	5.395	5.382	5.364	
	10	5.433	5.411	5.395	5.377	5.369	5.363	
2	0	31.38	22.11	21.01	20.58	20.34	20.18	<18.85>
	1	24.21	21.08	20.57	20.27	20.08	19.96	
	5	20.36	19.88	19.77	19.72	19.69	19.66	
	10	19.86	19.75	19.71	19.67	19.65	19.64	
3	0	31.88	27.85	26.14	25.30	24.88	24.61	<22.86>
	1	31.26	27.83	25.98	25.13	24.73	24.49	
	5	24.45	24.05	23.91	23.84	23.79	23.76	
	10	24.02	23.94	23.86	23.81	23.76	23.75	
4	0	44.60	41.69	37.86	37.11	36.80	36.63	<30.66>
	1	43.53	41.00	37.02	36.96	36.67	36.44	
	5	38.56	36.93	36.30	36.15	36.09	36.04	
	10	36.92	36.43	36.16	36.08	36.06	36.04	
5	0	75.38	63.02	47.40	45.49	44.74	44.29	<40.99>
	1	72.90	60.71	46.23	44.85	44.19	43.92	
	5	47.88	45.90	44.18	43.22	43.08	42.98	
	10	45.08	43.99	43.53	43.12	43.02	42.97	

<> : 表示 Huang 等人(2005)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.7 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	2.290	2.225	2.195	2.179	2.170	2.165	(2.173)
	1	2.159	2.154	2.152	2.151	2.150	2.150	
	5	2.153	2.150	2.149	2.149	2.149	2.149	
	10	2.152	2.150	2.149	2.149	2.149	2.149	
	15	2.150	2.150	2.149	2.149	2.149	2.149	
2	0	4.737	4.715	4.706	4.701	4.698	4.696	()
	1	4.726	4.706	4.698	4.695	4.693	4.692	
	5	4.693	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
	10	4.691	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
	15	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
3	0	6.668	6.531	6.487	6.467	6.455	6.448	()
	1	6.490	6.439	6.432	6.430	6.429	6.429	
	5	6.438	6.429	6.428	6.428	6.428	6.428	
	10	6.429	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	
	15	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	
4	0	9.665	9.304	9.249	9.232	9.223	9.218	()
	1	9.662	9.283	9.228	9.213	9.208	9.206	
	5	9.369	9.229	9.204	9.201	9.200	9.200	
	10	9.244	9.206	9.202	9.201	9.200	9.200	
	15	9.213	9.204	9.201	9.200	9.200	9.200	
5	0	10.73	10.65	10.62	10.61	10.61	10.61	()
	1	10.72	10.64	10.61	10.60	10.60	10.60	
	5	10.64	10.61	10.60	10.60	10.60	10.60	
	10	10.62	10.60	10.60	10.60	10.60	10.60	
	15	10.61	10.60	10.60	10.60	10.60	10.60	

() : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態



表 4.8 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ )

Mode	No. of corner functions	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	2.074	1.979	1.937	1.913	1.899	1.890	(1.902)
	1	1.884	1.869	1.866	1.866	1.864	1.863	
	5	1.866	1.864	1.863	1.863	1.862	1.862	
	10	1.866	1.864	1.863	1.863	1.862	1.862	
	15	1.865	1.864	1.863	1.862	1.862	1.862	
2	0	4.782	4.611	4.548	4.515	4.495	4.481	/
	1	4.513	4.445	4.433	4.432	4.432	4.432	
	5	4.445	4.433	4.433	4.432	4.432	4.432	
	10	4.435	4.433	4.432	4.432	4.432	4.432	
	15	4.433	4.432	4.432	4.432	4.432	4.432	
3	0	6.896	6.161	6.154	6.131	6.120	6.112	/
	1	6.370	6.115	6.099	6.097	6.097	6.097	
	5	6.161	6.102	6.097	6.097	6.097	6.097	
	10	6.107	6.098	6.097	6.097	6.097	6.097	
	15	6.098	6.097	6.097	6.097	6.097	6.097	
4	0	9.765	9.755	9.165	9.053	9.002	8.972	/
	1	9.744	9.156	8.997	8.885	8.881	8.879	
	5	9.705	9.065	8.893	8.881	8.879	8.879	
	10	9.090	8.896	8.882	8.879	8.879	8.879	
	15	8.993	8.885	8.879	8.879	8.879	8.879	
5	0	12.16	11.85	11.84	11.83	11.83	11.82	/
	1	11.90	11.85	11.83	11.82	11.82	11.82	
	5	11.88	11.84	11.82	11.82	11.82	11.82	
	10	11.85	11.82	11.82	11.82	11.82	11.82	
	15	11.83	11.82	11.82	11.82	11.82	11.82	

( ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態



表 4.9 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.1, a/b=1, c/b=1, \beta=75^\circ$ )

Mode	No. of corner functions	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)					
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)
1	0	1.641	1.286	1.232	1.207	1.192	1.182
	1	1.398	1.191	1.164	1.156	1.152	1.151
	5	1.156	1.152	1.151	1.150	1.150	1.150
	10	1.153	1.151	1.151	1.150	1.150	1.150
	15	1.151	1.151	1.151	1.150	1.150	—
2	0	6.377	4.137	3.396	3.308	3.265	3.238
	1	4.843	3.435	3.170	3.150	3.146	3.144
	5	3.363	3.212	3.148	3.143	3.143	3.143
	10	3.156	3.146	3.144	3.143	3.143	3.143
	15	3.146	3.146	3.144	3.143	3.143	—
3	0	8.919	6.753	6.357	6.074	5.892	5.783
	1	8.071	6.405	6.222	5.740	5.637	5.616
	5	6.470	6.138	5.740	5.621	5.616	5.616
	10	5.889	5.678	5.619	5.616	5.616	5.616
	15	5.773	5.663	5.618	5.616	5.616	—
4	0	15.08	10.17	8.136	7.013	6.902	6.874
	1	12.56	8.214	7.318	6.830	6.804	6.802
	5	8.846	7.963	7.043	6.827	6.802	6.802
	10	7.293	6.936	6.817	6.803	6.802	6.802
	15	7.014	6.898	6.810	6.802	6.802	—
5	0	20.36	12.60	10.88	10.39	10.01	9.784
	1	15.34	11.17	10.53	10.29	9.877	9.515
	5	11.13	10.47	10.14	10.01	9.563	9.514
	10	10.58	10.23	10.03	9.585	9.522	9.514
	15	10.49	10.18	10.01	9.563	9.515	—

—: 病態矩陣(ill-conditioning)

表 4.10 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=45^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	2.290	2.226	2.196	2.180	2.170	2.164	(2.174)
	1	2.160	2.154	2.152	2.150	2.150	2.150	
	5	2.152	2.150	2.150	2.150	2.150	2.150	
	10	2.152	2.150	2.150	2.150	2.150	2.150	
	15	2.150	2.150	2.150	2.150	2.150	2.150	
2	0	4.826	4.716	4.706	4.702	4.698	4.696	(4.712)
	1	4.790	4.692	4.698	4.694	4.694	4.692	
	5	4.692	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
	10	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
	15	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	4.690	
3	0	6.668	6.530	6.488	6.466	6.456	6.448	/
	1	6.490	6.438	6.432	6.430	6.430	6.428	
	5	6.438	6.430	6.428	6.428	6.428	6.428	
	10	6.430	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	
	15	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	6.428	
4	0	9.666	9.304	9.248	9.232	9.224	9.218	/
	1	9.662	9.284	9.228	9.214	9.208	9.206	
	5	9.368	9.230	9.200	9.200	9.200	9.200	
	10	9.244	9.206	9.200	9.200	9.200	9.200	
	15	9.238	9.204	9.200	9.200	9.200	9.200	
5	0	10.73	10.65	10.62	10.61	10.61	10.61	/
	1	10.72	10.64	10.61	10.60	10.60	10.60	
	5	10.64	10.61	10.60	10.60	10.60	10.60	
	10	10.62	10.60	10.60	10.60	10.60	10.60	
	15	10.61	10.60	10.60	10.60	10.60	10.60	

( ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.11 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2, a/b=1, c/b=1, \beta=60^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						文獻
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	2.074	1.979	1.937	1.913	1.899	1.890	(1.902)
	1	1.884	1.869	1.866	1.864	1.864	1.863	
	5	1.866	1.864	1.863	1.863	1.862	1.862	
	10	1.866	1.864	1.863	1.863	1.862	1.862	
	15	1.865	1.864	1.863	1.862	1.862	1.862	
2	0	5.824	4.974	4.732	4.640	4.590	4.560	(4.500)
	1	5.402	4.956	4.720	4.616	4.564	4.536	
	5	4.670	4.528	4.498	4.488	4.484	4.482	
	10	4.526	4.504	4.490	4.484	4.480	4.480	
	15	4.512	4.496	4.486	4.482	4.480	4.480	
3	0	6.896	6.232	6.154	6.132	6.120	6.104	/
	1	6.663	6.115	6.099	6.096	6.096	6.096	
	5	6.230	6.102	6.098	6.096	6.096	6.096	
	10	6.106	6.098	6.096	6.096	6.096	6.096	
	15	6.102	6.096	6.096	6.096	6.096	6.096	
4	0	11.71	9.754	9.164	9.052	9.002	8.976	/
	1	10.97	9.335	9.024	8.901	8.880	8.878	
	5	10.16	9.064	8.892	8.880	8.878	8.878	
	10	9.260	8.896	8.882	8.880	8.878	8.878	
	15	9.088	8.886	8.880	8.878	8.878	8.878	
5	0	12.16	11.85	11.84	11.83	11.83	11.82	/
	1	12.00	11.85	11.83	11.82	11.82	11.82	
	5	11.88	11.84	11.82	11.82	11.82	11.82	
	10	11.85	11.82	11.82	11.82	11.82	11.82	
	15	11.84	11.82	11.82	11.82	11.82	11.82	

( ) : 表示 McGee 等人(1994)之研究結果

/ : 文獻中未包含面內模態

表 4.12 懸臂平行四邊形厚板

面內無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )之收斂性分析

( $h/b=0.2$ ,  $a/b=1$ ,  $c/b=1$ ,  $\beta=75^\circ$ )

Mode	No. of corner functions( $n_c$ )	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)					
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)
1	0	1.641	1.288	1.232	1.207	1.192	1.182
	1	1.461	1.258	1.183	1.156	1.153	1.151
	5	1.156	1.152	1.151	1.150	1.150	1.150
	10	1.153	1.151	1.151	1.150	1.150	1.150
2	0	4.996	4.136	3.396	3.308	3.266	3.238
	1	4.400	3.434	3.170	3.150	3.146	3.144
	5	3.362	3.212	3.148	3.144	3.142	3.142
	10	3.156	3.146	3.144	3.144	3.142	3.142
3	0	10.82	6.702	6.244	5.898	5.820	5.776
	1	9.856	6.432	5.899	5.644	5.632	5.620
	5	6.336	6.136	5.740	5.622	5.616	5.616
	10	5.812	5.668	5.620	5.616	5.616	5.616
4	0	16.07	10.70	8.136	7.012	6.902	6.874
	1	12.41	8.908	7.769	7.001	6.803	6.802
	5	10.00	8.288	7.042	6.828	6.802	6.802
	10	7.292	6.936	6.818	6.804	6.802	6.802
5	0	22.46	14.60	12.32	11.17	10.01	9.784
	1	21.78	14.19	11.92	10.80	9.577	9.520
	5	13.34	11.89	10.78	10.30	9.564	9.514
	10	11.28	10.83	10.08	9.584	9.522	9.514

表 4.13 懸臂平形四邊形厚板無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )之收斂性分析

Mode	$h/b$	$\beta$	(I,J) in Equations (3.22a)-(3.22e)						
			(10,10)	(11,11)	(12,12)	(13,13)	(14,14)	(15,15)	(16,16)
1	0.1	45	4.394	4.391	4.388	4.386	4.385	4.384	4.383
		60	5.078	5.068	5.060	5.053	5.049	5.045	5.042
		75	5.909	5.870	5.841	5.819	5.802	5.789	5.778
	0.2	45	4.191	4.187	4.185	4.183	4.182	4.181	4.180
		60	4.777	4.767	4.759	4.753	4.749	4.745	4.743
		75	5.535	5.497	5.469	5.448	5.431	5.417	5.406
2	0.1	45	10.58	10.57	10.57	10.56	10.56	10.56	10.56
		60	14.95	14.94	14.92	14.91	14.90	14.90	14.89
		75	11.76	11.71	11.67	11.64	11.62	11.60	11.59
	0.2	45	9.585	9.579	9.575	9.573	9.571	9.569	9.568
		60	9.416	9.394	9.378	9.366	9.357	9.349	9.344
		75	5.879	5.854	5.836	5.822	5.811	5.802	5.795
3	0.1	45	21.61	21.58	21.57	21.55	21.54	21.53	21.53
		60	18.83	18.79	18.76	18.73	18.71	18.70	18.69
		75	23.36	23.25	23.16	23.10	23.05	23.00	22.97
	0.2	45	10.81	10.79	10.78	10.78	10.77	10.77	10.76
		60	13.28	13.26	13.25	13.24	13.23	13.23	13.22
		75	16.09	16.02	15.97	15.93	15.90	15.87	15.85
4	0.1	45	24.91	24.89	24.87	24.86	24.85	24.84	24.84
		60	27.47	27.40	27.34	27.30	27.28	27.25	27.24
		75	32.19	32.05	31.94	31.86	31.80	31.75	31.70
	0.2	45	21.14	21.11	21.09	21.08	21.07	21.06	21.06
		60	22.36	22.32	22.29	22.27	22.26	22.24	22.23
		75	20.06	19.98	19.92	19.86	19.82	19.79	19.76
5	0.1	45	28.39	28.37	28.35	28.34	28.34	28.33	28.33
		60	38.63	38.58	38.54	38.51	38.50	38.48	38.47
		75	40.48	40.27	40.11	39.99	39.89	39.80	39.74
	0.2	45	23.48	23.47	23.46	23.46	23.46	23.46	23.46
		60	22.70	22.64	22.59	22.55	22.52	22.50	22.48
		75	24.43	24.29	24.19	24.11	24.05	24.00	23.96

表 4.14 懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )面內之無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	2.728	4.588	6.040	6.364	7.034
		45	2.556	4.568	6.376	6.936	7.918
		60	2.040	4.628	6.272	8.220	8.920
		75	1.177	3.208	5.316	6.788	8.344
	0.2	30	2.728	4.588	6.040	6.364	7.036
		45	2.556	4.568	6.376	6.936	7.916
		60	2.040	4.628	6.072	8.220	8.920
		75	1.177	3.208	5.316	6.788	8.344
1	0.1	30	2.200	4.904	6.296	13.67	18.19
		45	2.149	4.690	6.428	9.200	10.60
		60	1.862	4.432	6.097	8.879	11.82
		75	1.150	3.143	5.616	6.802	9.514
	0.2	30	2.200	4.904	6.296	13.67	18.19
		45	2.150	4.690	6.428	9.200	10.60
		60	1.862	4.480	6.096	8.878	11.82
		75	1.150	3.142	5.616	6.802	9.514
2	0.1	30	1.365	4.851	5.918	10.77	14.94
		45	1.242	4.379	4.637	9.915	14.27
		60	1.034	4.166	5.931	8.403	12.75
		75	0.604	2.702	5.205	6.215	8.800
	0.2	30	1.364	4.851	5.918	10.77	14.94
		45	1.242	4.379	4.637	9.913	14.26
		60	1.006	4.166	5.931	8.403	12.75
		75	0.604	2.702	5.207	6.213	8.800

表 4.15 懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )面內之無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	2.522	5.100	6.528	9.420	10.11
		45	2.168	4.936	6.496	9.504	10.66
		60	1.674	4.608	6.160	8.784	11.91
		75	0.979	3.095	5.720	6.698	8.062
	0.2	30	2.521	5.100	6.528	9.420	10.11
		45	2.168	4.936	6.496	9.504	10.66
		60	1.672	4.608	6.160	8.784	11.91
		75	0.979	3.095	5.720	6.698	8.062
1	0.1	30	1.969	5.168	6.324	10.22	13.27
		45	1.611	4.776	6.524	9.578	13.49
		60	1.179	3.984	6.018	8.246	9.611
		75	0.649	2.436	5.148	6.374	8.418
	0.2	30	1.969	5.168	6.324	10.22	13.27
		45	1.611	4.776	6.524	9.578	13.49
		60	1.170	3.984	6.018	8.246	9.610
		75	0.648	2.436	5.148	6.374	8.418
2	0.1	30	1.304	4.306	6.160	8.810	13.71
		45	1.044	3.663	6.055	7.860	12.54
		60	0.742	2.767	5.840	6.500	10.47
		75	0.395	1.541	3.591	6.155	6.685
	0.2	30	1.304	4.306	6.162	8.810	13.71
		45	1.044	3.663	6.056	7.860	12.54
		60	0.742	2.767	5.842	6.499	10.47
		75	0.395	1.541	3.591	6.154	6.684

表 4.16 懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )面內之無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	2.662	4.996	6.288	8.566	8.694
		45	2.424	6.416	8.952	9.272	9.376
		60	1.972	4.568	6.706	6.110	8.842
		75	1.170	3.200	5.711	6.830	9.590
	0.2	30	2.662	4.996	6.288	8.564	8.696
		45	2.430	6.416	8.952	9.272	9.376
		60	1.971	4.568	6.706	6.110	8.842
		75	1.174	3.200	5.711	6.830	9.590
1	0.1	30	2.045	6.444	10.48	12.68	14.34
		45	1.776	4.898	6.402	9.854	12.980
		60	1.386	4.550	6.122	8.664	12.610
		75	0.808	2.908	5.452	6.518	9.107
	0.2	30	2.046	6.444	10.48	12.68	14.34
		45	1.776	4.898	6.402	9.854	12.98
		60	1.386	4.550	6.122	8.664	12.61
		75	0.808	2.908	5.452	6.518	9.106
2	0.1	30	1.298	5.855	9.880	14.96	15.370
		45	1.079	4.220	5.808	9.095	14.15
		60	0.796	3.395	5.807	7.610	12.13
		75	0.438	2.000	4.628	6.035	7.710
	0.2	30	1.298	5.853	9.882	14.95	15.37
		45	1.079	4.220	5.808	9.097	14.15
		60	0.796	3.395	5.807	7.608	12.13
		75	0.438	2.000	4.628	6.037	7.708



表 4.17 懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )面內之無因次化頻率( $\omega a\sqrt{\rho/E}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	2.550	4.796	6.100	7.308	7.798
		45	2.530	6.384	7.996	8.312	9.816
		60	2.032	4.612	6.084	8.704	9.484
		75	1.163	3.172	6.820	8.931	10.60
	0.2	30	2.204	4.796	6.100	7.308	7.796
		45	2.530	6.384	7.996	8.312	9.816
		60	2.032	4.612	6.084	8.704	9.484
		75	1.163	3.172	6.820	8.931	10.60
1	0.1	30	2.141	5.004	6.432	10.06	11.17
		45	1.979	4.814	6.490	9.598	11.69
		60	1.646	4.466	6.132	8.906	12.39
		75	1.012	3.004	5.534	6.790	9.479
	0.2	30	2.140	5.004	6.432	10.06	11.17
		45	1.979	4.814	6.490	9.598	11.69
		60	1.646	4.466	6.132	8.906	12.39
		75	1.012	3.004	5.534	6.790	9.480
2	0.1	30	1.328	4.859	5.830	10.52	15.19
		45	1.153	4.538	5.845	9.760	14.52
		60	0.888	3.888	5.800	8.245	12.51
		75	0.509	2.420	5.735	6.020	14.33
	0.2	30	1.328	4.859	5.832	10.52	15.18
		45	1.152	4.538	5.845	9.761	14.52
		60	0.888	3.888	5.802	8.243	12.51
		75	0.509	2.420	5.742	6.018	14.33

表 4.18 懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )面外之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.845	5.709	9.883	17.14	19.87
		45	4.319	7.460	11.55	18.65	21.75
		60	4.828	12.16	16.04	21.64	25.19
		75	5.451	19.89	23.89	35.35	40.47
	0.2	30	3.459	4.908	8.094	13.13	13.80
		45	3.805	6.266	9.261	13.87	14.31
		60	4.205	9.323	12.16	13.54	16.45
		75	4.696	8.487	14.58	15.50	22.79
1	0.1	30	3.857	8.888	23.30	24.31	37.14
		45	4.381	10.56	24.84	28.34	45.08
		60	5.032	14.87	27.16	38.43	44.32
		75	5.734	22.80	39.36	55.35	70.72
	0.2	30	3.724	8.094	19.72	21.44	30.80
		45	4.179	9.567	21.06	23.70	36.60
		60	4.733	13.20	22.16	29.29	41.49
		75	5.363	19.64	23.75	36.04	42.97
2	0.1	30	3.689	15.24	24.27	44.88	68.96
		45	4.011	17.16	28.43	47.37	78.80
		60	4.422	20.12	36.03	54.06	90.05
		75	4.868	24.69	58.51	62.05	111.70
	0.2	30	3.646	14.30	22.76	41.47	61.52
		45	3.946	16.11	25.85	43.79	69.05
		60	4.323	19.43	30.82	49.54	78.32
		75	4.740	23.30	40.01	56.48	96.43

表 4.19 懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )面外之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.991	10.09	19.33	20.00	28.89
		45	4.257	11.73	21.11	22.52	31.45
		60	4.677	15.32	23.04	29.59	38.80
		75	5.148	19.94	22.77	38.53	43.36
	0.2	30	3.576	7.975	13.33	14.80	20.52
		45	3.766	8.904	13.68	16.11	21.78
		60	4.063	10.06	13.72	18.95	21.96
		75	4.480	7.721	14.29	16.76	22.68
1	0.1	30	4.326	16.51	25.23	37.47	57.00
		45	4.486	18.10	28.20	41.25	59.08
		60	4.746	20.90	34.31	49.02	68.66
		75	5.075	23.62	44.60	56.11	92.02
	0.2	30	4.156	14.50	20.35	30.67	44.87
		45	4.279	15.77	21.47	32.62	46.21
		60	4.496	17.98	22.39	37.25	48.05
		75	4.802	18.06	20.69	37.12	44.87
2	0.1	30	4.572	21.41	37.85	54.54	85.07
		45	4.648	21.93	44.24	56.77	92.28
		60	4.799	23.03	55.27	62.98	105.19
		75	4.995	24.32	61.59	85.65	114.82
	0.2	30	4.508	20.53	32.38	49.66	71.97
		45	4.570	20.99	36.32	50.87	77.27
		60	4.698	21.94	41.85	53.11	86.55
		75	4.882	23.11	39.47	56.19	82.67

表 4.20 懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )面外之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.872	7.872	16.17	19.88	25.19
		45	4.292	9.328	18.31	21.79	27.46
		60	4.800	13.12	21.72	26.16	33.58
		75	5.412	19.75	23.76	35.92	42.84
	0.2	30	3.477	6.472	12.39	13.80	18.31
		45	3.772	7.503	11.93	13.80	19.31
		60	4.156	9.696	13.52	15.27	20.82
		75	4.687	8.484	14.65	15.37	22.83
1	0.1	30	4.010	13.38	23.46	32.32	53.69
		45	4.293	15.12	26.45	35.33	55.41
		60	4.693	18.87	31.00	44.44	61.22
		75	5.161	23.47	42.69	55.31	88.70
	0.2	30	3.863	11.83	19.60	25.54	43.20
		45	4.100	13.22	21.17	29.37	44.34
		60	4.438	16.11	22.34	35.08	48.17
		75	4.846	19.23	21.89	38.87	44.01
2	0.1	30	4.063	20.30	29.19	51.70	75.89
		45	4.214	21.18	34.89	53.68	86.40
		60	4.434	22.84	46.34	58.19	103.3
		75	4.690	24.67	63.02	72.33	116.9
	0.2	30	4.011	19.36	25.88	47.08	65.70
		45	4.144	20.19	29.66	49.09	73.30
		60	4.340	21.71	35.73	52.87	85.70
		75	4.579	23.38	39.56	57.45	95.84

表 4.21 懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )面外之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.851	6.528	13.62	19.85	26.44
		45	4.311	8.076	14.49	21.32	23.51
		60	4.781	12.36	18.61	23.37	28.91
		75	4.974	5.820	19.76	27.04	35.35
	0.2	30	3.462	6.811	10.23	13.69	15.74
		45	3.798	6.686	11.36	11.62	14.00
		60	4.201	9.407	13.27	14.24	19.00
		75	4.723	8.476	14.22	14.56	15.50
1	0.1	30	3.901	10.74	23.25	28.51	47.96
		45	4.313	12.41	26.10	31.43	50.62
		60	4.866	16.43	29.25	41.73	57.03
		75	5.500	22.80	40.89	55.54	81.30
	0.2	30	3.763	9.649	19.63	24.62	38.94
		45	4.118	11.07	21.33	26.62	41.03
		60	4.588	14.33	22.92	32.60	45.46
		75	5.155	19.45	23.16	37.33	43.57
2	0.1	30	3.820	18.11	25.21	48.53	71.09
		45	4.054	19.60	29.91	50.78	82.22
		60	4.362	22.19	39.17	56.49	97.36
		75	4.702	24.93	61.90	64.86	114.7
	0.2	30	3.774	17.02	23.25	44.68	62.76
		45	3.988	18.49	26.53	46.68	70.97
		60	4.267	20.96	32.13	51.59	82.79
		75	4.582	23.54	39.55	57.42	98.58

表 4.22 懸臂平行四邊形厚板( $c/b=1$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.845	5.709	9.883	13.64*	17.14
		45	4.319	7.460	11.55	12.78*	18.65
		60	4.828	10.20*	12.16	16.04	21.64
		75	5.451	5.886*	16.04*	19.89	23.89
	0.2	30	3.459	4.908	6.819*	8.094	11.47*
		45	3.805	6.266	6.389*	9.261	11.42*
		60	4.205	5.099*	9.323	11.57*	12.16
		75	2.708*	4.696	7.302*	8.487	13.29*
1	0.1	30	3.857	8.888	22.00*	23.30	24.31
		45	4.381	10.56	21.49*	24.84	28.34
		60	5.032	14.87	18.62*	27.16	38.43
		75	5.734	11.50*	22.80	31.43*	39.36
	0.2	30	3.724	8.094	11.00*	19.72	21.44
		45	4.179	9.567	10.75*	21.06	23.45
		60	4.733	9.310*	13.20	22.16	22.40*
		75	5.363	5.750*	15.71*	19.64	23.75
2	0.1	30	3.689	15.24	24.27	27.29*	44.88
		45	4.011	17.16	24.83*	28.43	47.37
		60	4.422	20.12	20.67*	36.03	54.06
		75	4.868	12.08*	24.69	54.04*	58.51
	0.2	30	3.646	13.64*	14.30	22.76	41.47
		45	3.946	12.42*	16.11	25.85	43.79
		60	4.323	10.06*	19.43	30.82	41.66*
		75	4.740	6.039*	23.30	27.02*	40.01

\* : 面內(in-plane)模態之頻率

表 4.23 懸臂梯形厚板( $c/b=0.25$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.991	10.09	12.61*	19.33	20.00
		45	4.257	10.84*	11.73	21.11	22.52
		60	4.677	8.372*	15.32	23.04	23.08*
		75	3.776*	5.148	12.18*	19.94	22.77
	0.2	30	3.576	6.302*	7.975	12.75*	13.33
		45	3.766	5.421*	8.904	12.34*	13.68
		60	4.180*	10.06	11.52*	13.72	15.40*
		75	2.448*	4.480	7.721	7.738*	14.29
1	0.1	30	4.326	16.51	19.69*	25.23	37.47
		45	4.486	16.11*	18.10	28.20	41.25
		60	4.746	11.79*	20.90	34.31	40.08*
		75	5.075	6.485*	23.62	24.36*	44.60
	0.2	30	4.156	9.843*	14.50	20.35	25.84*
		45	4.279	8.053*	15.77	21.47	23.88*
		60	4.496	5.852*	17.98	19.92*	22.39
		75	3.242*	4.802	12.18*	18.06	20.69
2	0.1	30	4.572	21.41	26.08*	37.85	54.54
		45	4.648	20.87*	21.93	44.24	56.77
		60	4.799	14.84*	23.03	55.27	55.33*
		75	4.995	7.893*	24.32	30.82*	61.59
	0.2	30	4.508	13.04*	20.53	32.38	43.06*
		45	4.570	10.44*	20.99	36.32	36.63*
		60	4.698	7.421*	21.94	27.67*	41.85
		75	3.947*	4.882	15.41*	23.11	35.91*

\* : 面內(in-plane)模態之頻率

表 4.24 懸臂梯形厚板( $c/b=0.5$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.872	7.872	13.31*	16.17	19.88
		45	4.292	9.328	12.12*	18.31	21.79
		60	4.800	9.861*	13.12	21.72	22.84*
		75	5.412	5.850*	15.95*	19.75	23.76
	0.2	30	3.477	6.472	6.655*	12.39	12.49*
		45	3.772	6.075*	7.503	11.93	13.80
		60	4.156	4.927*	9.696	11.42*	13.52
		75	2.934*	4.687	8.001*	8.484	14.28
1	0.1	30	4.010	13.38	20.45*	23.46	32.32
		45	4.293	15.12	17.76*	26.45	35.33
		60	4.693	13.86*	18.87	31.00	44.44
		75	5.161	8.084*	23.47	29.08*	42.69
	0.2	30	3.863	10.23*	11.83	19.60	25.54
		45	4.100	8.882*	13.22	21.17	24.49*
		60	4.438	6.928*	16.11	22.34	22.75*
		75	4.042*	4.846	14.54*	19.23	21.89
2	0.1	30	4.063	20.30	25.96*	29.19	51.70
		45	4.214	21.18	21.58*	34.89	53.68
		60	4.434	15.92*	22.84	46.34	58.19
		75	4.690	8.755*	24.67	40.00*	63.02
	0.2	30	4.011	12.98*	19.36	25.88	47.08
		45	4.144	10.79*	20.19	29.66	42.20*
		60	4.340	7.962*	21.71	33.95*	35.73
		75	4.378*	4.579	20.00*	23.38	39.56

\*：面內(in-plane)模態之頻率



表 4.25 懸臂梯形厚板( $c/b=0.75$ )之無因次化頻率( $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ )

$a/b$	$h/b$	$\beta$	Mode Number				
			1	2	3	4	5
0.5	0.1	30	3.851	6.528	12.75*	13.62	19.85
		45	4.311	8.076	12.65*	14.49	21.33*
		60	4.781	10.16*	12.36	18.61	23.06*
		75	4.974	5.820	5.965*	16.40*	19.76
	0.2	30	3.462	5.510*	6.811	10.23	11.99*
		45	3.798	6.326*	6.686	11.36	11.62
		60	4.201	5.081*	9.407	11.53*	13.27
		75	2.918*	4.723	7.930*	8.476	14.22
1	0.1	30	3.901	10.74	21.41*	23.25	28.51
		45	4.313	12.41	19.79*	26.10	31.43
		60	4.866	16.43	16.46*	29.25	41.73
		75	5.500	10.12*	22.80	30.05*	40.89
	0.2	30	3.763	9.649	10.70*	19.63	24.62
		45	4.118	9.896*	11.07	21.33	24.07*
		60	4.588	8.231*	14.33	22.33*	22.92
		75	5.060*	5.155	15.02*	19.45	23.16
2	0.1	30	3.820	18.11	25.21	26.55*	48.53
		45	4.054	19.60	23.05*	29.91	50.78
		60	4.362	17.76*	22.19	39.17	56.49
		75	4.702	10.17*	24.93	48.40*	61.90
	0.2	30	3.774	13.28*	17.02	23.25	44.68
		45	3.988	11.52*	18.49	26.53	45.38*
		60	4.267	8.882*	20.96	32.13	38.88*
		75	4.582	5.085*	23.54	24.20*	39.55

\* : 面內(in-plane)模態之頻率

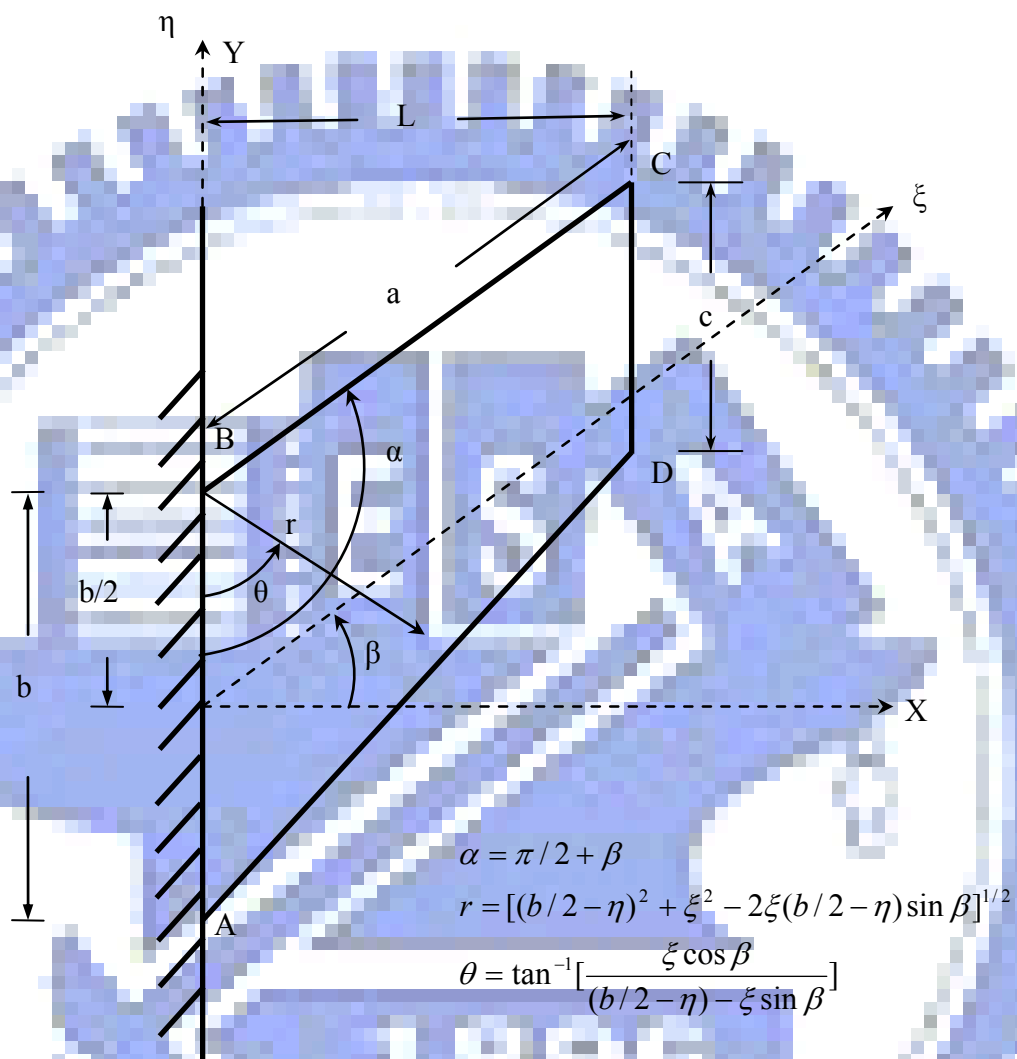


圖 1.1 斜形板示意圖(固定於 $\theta = 0$ 處)

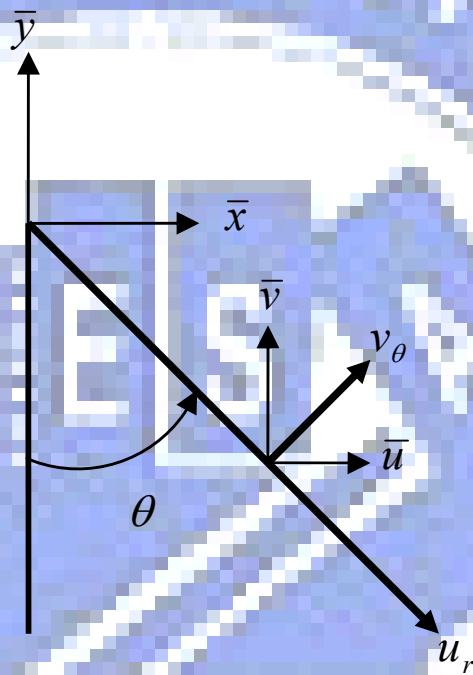
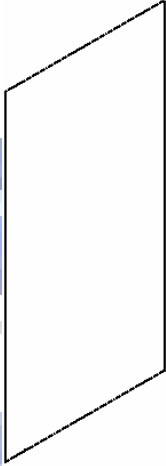

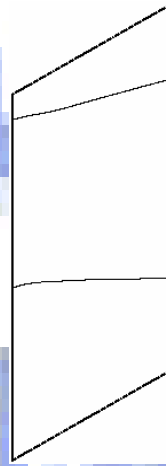

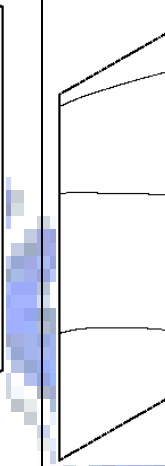


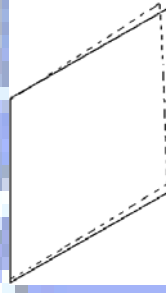

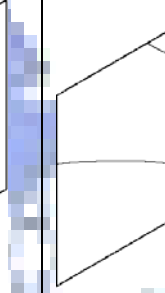

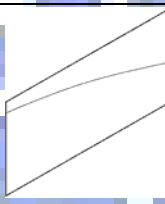
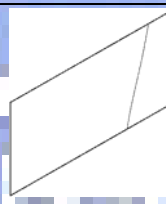
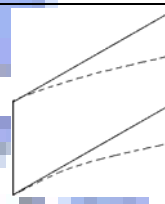
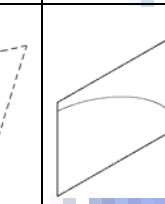


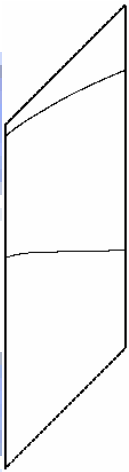

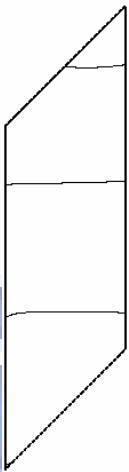
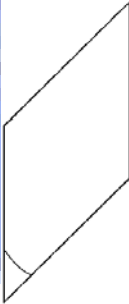


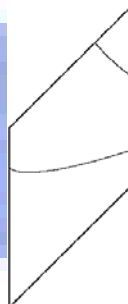

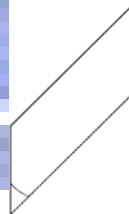
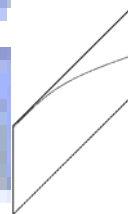
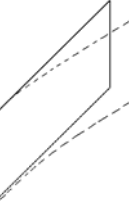
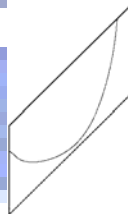
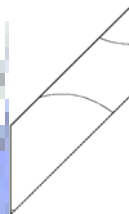


圖 3.1 卡氏座標與極座標之轉換關係

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
30°	0.5	 (3.845)	 (5.709)	 (9.883)	 (13.64*)	 (17.14)
	1	 (3.857)	 (8.888)	 (22.00*)	 (23.30)	 (24.31)
	2	 (3.689)	 (15.24)	 (24.27)	 (27.29*)	 (44.88)

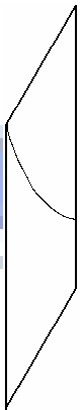
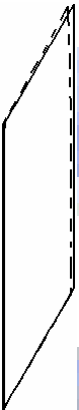





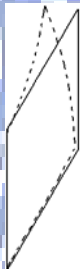







\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1a 懸臂平行四邊形厚板振態圖 ( $\beta=30^\circ$ ,  $c/b=1$ ,  $h/b=0.1$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
45°	0.5	 (4.319)	 (7.460)	 (11.55)	 (12.78*)	 (18.65)
	1	 (4.381)	 (10.56)	 (21.49*)	 (24.84)	 (28.34)
	2	 (4.011)	 (17.16)	 (24.83)	 (28.43)	 (47.37)












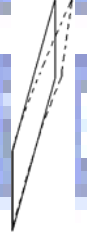



\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1b 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta = 45^\circ$ ,  $c/b = 1$ ,  $h/b = 0.1$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
$60^\circ$	0.5	 (4.828)	 (10.20*)	 (12.16)	 (16.04)	 (21.64)
	1	 (5.032)	 (14.87)	 (18.62*)	 (27.16)	 (38.43)
	2	 (4.422)	 (20.12)	 (20.67*)	 (36.03)	 (54.06)

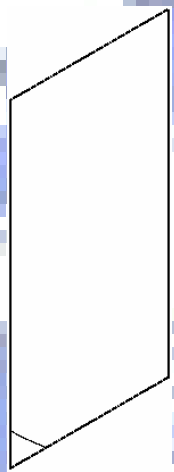
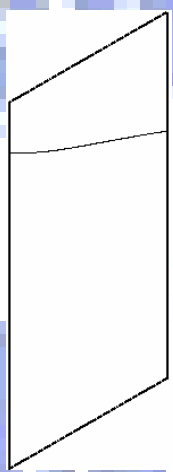
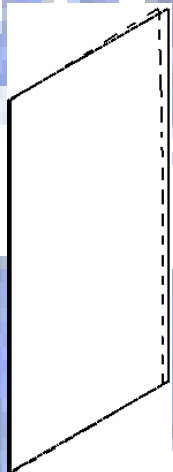
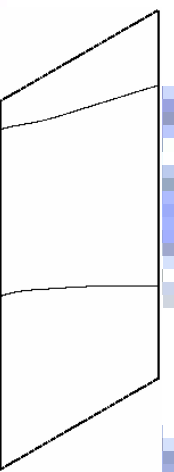
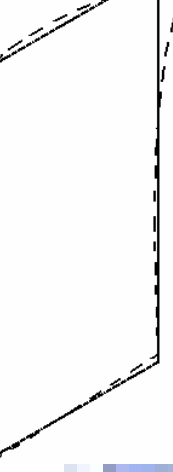
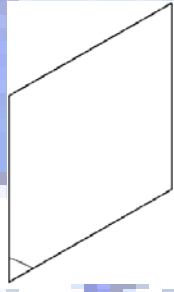
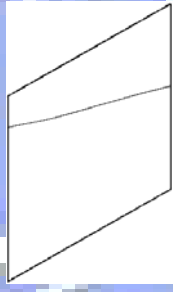
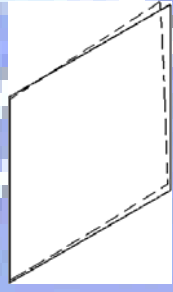
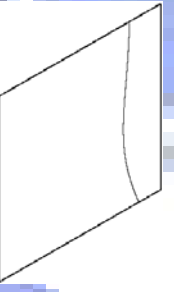
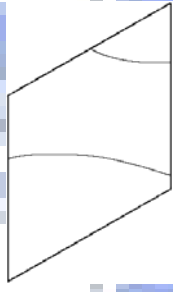
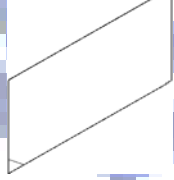
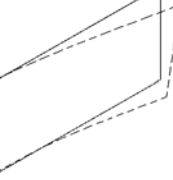
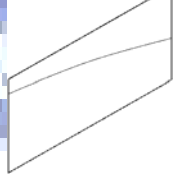
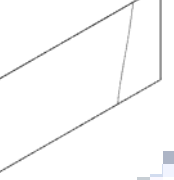
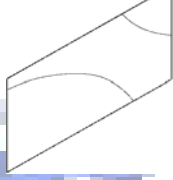
\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1c 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta = 60^\circ$ ,  $c/b = 1$ ,  $h/b = 0.1$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
$75^\circ$	0.5	 (5.451)	 (5.886*)	 (16.04*)	 (19.89)	 (23.89)
	1	 (5.734)	 (11.50)	 (22.80)	 (31.43*)	 (39.36)
	2	 (4.868)	 (12.08*)	 (24.69)	 (54.04*)	 (58.51)

\*：面內(in-plane)之模態

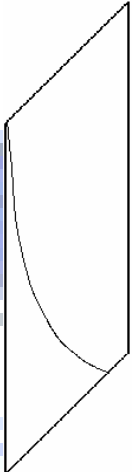

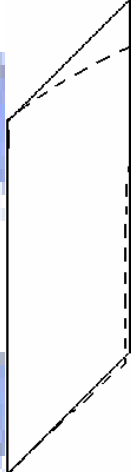
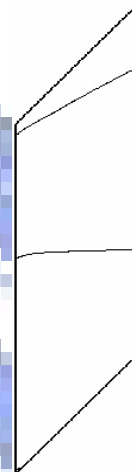

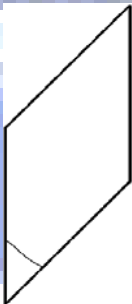
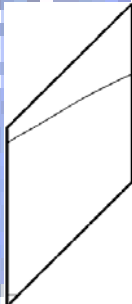
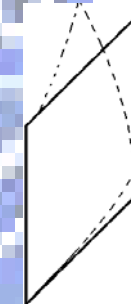
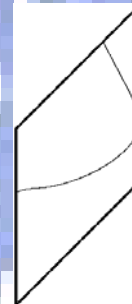

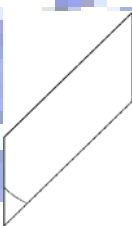

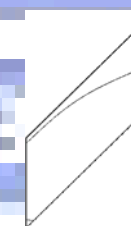
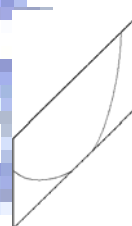

圖 4.1d 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta = 75^\circ$ ,  $c/b = 1$ ,  $h/b = 0.1$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
30°	0.5	 (3.459)	 (4.908)	 (6.819*)	 (8.094)	 (11.47*)
	1	 (3.724)	 (8.094)	 (11.00*)	 (19.72)	 (21.44)
	2	 (3.646)	 (13.64)	 (14.30)	 (22.76)	 (41.47)

\*：面內(in-plane)之模態

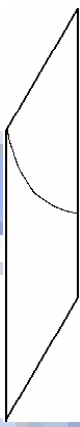














圖 4.1e 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=30^\circ$ ， $c/b=1$ ， $h/b=0.2$ )



$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
45°	0.5	 (3.805)	 (6.266)	 (6.389*)	 (9.261)	 (11.42*)
	1	 (4.179)	 (9.567)	 (10.75*)	 (21.06)	 (23.45*)
	2	 (3.946)	 (12.42*)	 (16.11)	 (25.85)	 (43.79)


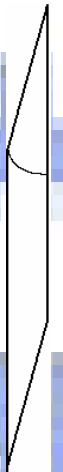
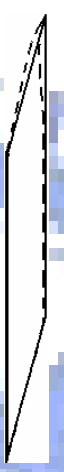
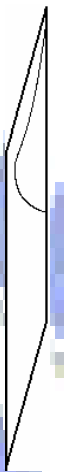











\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1f 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=45^\circ$ ,  $c/b=1$ ,  $h/b=0.2$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
60°	0.5	 (4.205)	 (5.099*)	 (9.323)	 (11.57*)	 (12.16)
	1	 (4.733)	 (9.310*)	 (13.20)	 (22.16*)	 (22.40)
	2	 (4.323)	 (10.06*)	 (19.43)	 (30.82)	 (41.66*)

\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1g 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta = 60^\circ$ ,  $c/b = 1$ ,  $h/b = 0.2$ )

$\beta$	$a/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
$75^\circ$	0.5	 (2.708*)	 (4.696)	 (7.302*)	 (8.487)	 (13.29*)
	1	 (5.363)	 (5.750*)	 (15.71*)	 (19.64)	 (23.75)
	2	 (4.740)	 (6.039*)	 (23.30)	 (27.02*)	 (40.01)

\*：面內(in-plane)之模態

圖 4.1h 懸臂平行四邊形厚板振態圖( $\beta=75^\circ$ ， $c/b=1$ ， $h/b=0.2$ )