

國立交通大學

土木工程研究所

碩士論文

應用細胞自動機於垂向二維地下水流與熱流
耦合數值模式之建立

**Applying Cellular Automata on the development
of Vertical 2D Groundwater Flow and Heat
Transport Model**

研究生：范為善
指導教授：張良正 博士

中華民國九十七年九月

應用細胞自動機於垂向二維地下水流與熱流偶
合數值模式之建立

**Applying Cellular Automata on the
development of Vertical 2D Groundwater Flow
and Heat Transport Model**

研究生：范為善
指導教授：張良正

Student : Wei S. Fan
Advisor : Liang C. Chang

國立交通大學
土木工程學系碩士班
碩士論文



A Thesis

**Submitted to Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Civil Engineering
September 2008
Hsinchu, Taiwan, Republic of China**

中華民國九十七年九月

細胞自動機應用於垂向二維地熱數值模式之建立

學生：范為善

指導教授：張良正 博士

國立交通大學土木工程研究所

摘要

數值模式的建置，可分為四大階段，分別是概念模式階段、數學模式階段、數值模式階段與數值程式階段。傳統上，在數值模式階段均是以各式各樣的數值方法進行離散動作，其中包含有限差分法(FDM)、有限元素法(FEM)等，數值模式是依據模擬區域、邊界條件等離散成一個矩陣方程式，最後再透過矩陣解法求得各結點之模擬值。傳統之矩陣解法效率雖高，然而其本質上並不適合平行運算，對於大量結點之運算，其龐大計算量無法透過日趨便宜的處理器分散處理。因此本研究將以細胞自動機理論為基礎進行開發，細胞自動機特點之一為其網格形狀並不侷限於矩形網格，因此易於針對複雜形狀邊界之模擬。此外，細胞自動機理論本身即隱含平行特性，因此未來進一步擴張為平行運算後，對於大量細胞之運算可以大幅降低計算時間。

本研究的以細胞自動機為基礎，配合徐昇氏網格及守恆定律，針對水流與熱流耦合問題發展一個水流與熱流耦合數值模式。本研究透過九個驗證案例證實模式正確性。在水流熱流耦合案例中顯示，透過耦合模擬，熱流模擬結果會因為水流流動而產生對流效應，因此影響其溫度分佈；另外，相較於傳統地下水模式之定溫假設，耦合模式之水流模擬結果會因為溫度變化而產生不同之流動情形。此外，透過本研究結果發現，應用細胞自動機理論於數值模式之開發，可以採用一系列分散之方程組，而無須採用整合式的偏微分方程式，因此在全

新問題之模式開發上可以大幅減少數學推導之繁瑣流程。



Applying Cellular Automata on the development of Vertical 2D Groundwater Flow and Heat Transport Model

Student : Wei-Shan Fan Advisor : Dr. Liang-Cheng Chang

Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Development of a numerical model generally consists of four major steps; conceptual model proposing, mathematical formulation construction, numerical solution derivation and program development. The numerical solution derivation is the focus of this research the derivation usually applies different numerical schemes such as finite difference method (FDM) or finite element method (FEM) to discretize the associated governing equations and resulting as matrix equations. A program is then developed to solve the matrix equations solving matrix equations is usually a sequentially based approach and is difficult to be parallelized.

Inspired by previous discussion, this research develops a numerical model with groundwater flow and heat transport coupling by applying the concept of Cellular Automata. The relations between cells are defined by using Voronoi Diagram; instead of solving the conventional partial differential equations that governing the groundwater flow and head transport, this proposed methodology solves a series of fundamental equations. Conservation of water and heat are the fundamental physical laws, several hypothetical cases were simulated to validate the accuracy of the model. In the groundwater flow and heat transport coupling cases, simulation results indeed shows that groundwater flow velocity affected the overall temperature distribution.

Comparing the results with that of conventional groundwater flow simulation in a constant temperature condition, the spatial variation of temperature distribution also affects hydraulic head distribution. Beside the simulation validation, the proposed novel simulation model can extend its computational capacity by adding new physical law with minimal code modification.



謝 誌

很高興終於完成碩士班的學業，感謝吾師張良正教授對於本論文之指導及研究生涯中對學生工作態度及學問研究之啟發，使學生受益匪淺。承蒙口試委員 劉振宇教授、陳昶憲教授、李天浩副教授及李明旭副教授在口試前細心審閱學生的論文，並於口試期間給予保貴之意見，使得本文更趨於完備，在此謹致衷心謝意。

在交大求學的這段期間，特別感謝學長學們之提攜及照顧，在此尤其感謝陳宇文學長及蔡瑞彬學長，每當我在程式編程及觀念上遇到瓶頸時，陳文哥總是能即時幫我解惑，讓我能順利跨過種種障礙，並對於程式編程及地下水觀念上成長許多，而在本文初步成型的時候多虧有彬哥在觀念上的指導，讓我能短時間內融會貫通以往所不熟悉之數值觀念。另外還要感謝生哥於地下水實務經驗上之分享、貓哥在計畫上之建議及協助，小朱學長對於論文之專注態度之分享。最後要感謝的就是水資源團隊研究室裡的各位伙伴們：明穎、維珉、浚瑋、昀柏、全佑、任馥、君儀、嘉晉、正偉、婉如、怡釗、智為及汶豪等學長姊們經驗之傳承及學術與計畫上之指導，還有程翔、韋圻、阿爆、敏威、水餃、瀚聖、思瑋、冠宇、雲直、阜峻因為有你(妳)們的陪伴讓我在研究所的這段時間度過無數個歡笑日子，當然還有同窗好友柏成及昱維，想當初要不是有你們在課業及計畫上的幫助，不然我也沒有辦法這麼無後顧之憂的毅然決然選擇完全接觸過的數值模式開發這個大方向當作我的論文重點，在此，很感謝大家對我的提攜及照顧。

最後要感謝我的家人及女友，因為有你們的支持，我才能順利走過這段日子，完成這個碩士學位。我相信因為有這段日子的磨鍊，讓我在韌性及抗壓性有所提升，對於未來的更能勇於接受種種的挑戰。

目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
謝誌.....	V
目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	IX
一、緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 文獻回顧.....	2
1.3.1 地下水模式之演進.....	2
1.3.2 水流與熱流耦合模式之演進.....	4
1.3.3 細胞自動機(Cellular Automata)之應用.....	5
二、研究步驟.....	7
三、研究理論與方法.....	9
3.1 地下水流問題與熱流問題概念模式說明.....	9
3.1.1 地下水流問題概念模式.....	9
3.1.2 熱流問題概念模式.....	11
3.2 計算細胞建立.....	12
3.2.1 細胞自動機(Cellular Automata)介紹.....	13
3.2.2 計算空間架構.....	15
3.2.3 方程式離散化.....	18
3.2.4 內迭代處理方法.....	20
3.2.5 資訊同步流程.....	22

3.2.6 外送代處理方法	23
3.2.7 整體數值模擬流程	24
四、垂向二維地下水流與熱流耦合數值模式開發	26
4.1 地下水流數值模式實做	26
4.2 熱流數值模式實做	30
五、垂向二維水流與熱流耦合數值模式模擬與驗證	36
5.1 熱流案例驗證與模擬	36
5.2 水流與熱流耦合案例驗證與模擬	53
六、結論與建議	68
6.1 結論	68
6.2 建議	69
參考文獻	70
附錄 A 總水頭計算公式推導	76
附錄 B 土壤壓密係數與傳統方法之關聯推導	79
附錄 C Voronoi Diagram 空間切割法	82

表目錄

表 5.1-1 非偶合案例列表	36
表 5.1-2 左右邊界穿越流量比較表(往左為正)	38
表 5.2-1 偶合水流熱流案例列表	53



圖目錄

圖 2-1 研究步驟流程圖	8
圖 3.2.2-1 空間架構說明示意圖	17
圖 3.2.2-2 節點與連結關係示意圖	17
圖 3.2.3-1 模擬網格示意圖	20
圖 3.2.4-1 模式內迭代流程圖	22
圖 3.2.5-1 地下水流模式與熱流模式之變數關係圖	23
圖 3.2.6-1 外迭代流程圖	24
圖 3.2.7-1 整體數值模擬流程圖	25
圖 5.1-1 案例 5.1-1 格網與模式配置圖	38
圖 5.1-2 溫度分佈等值圖	39
圖 5.1-3 案例 5.1-2 格網與模式配置圖	40
圖 5.1-4 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-2).....	41
圖 5.1-5 案例 5.1-3 格網與材質配置圖	42
圖 5.1-6 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-3).....	43
圖 5.1-7 總熱容量分布等值圖(案例 5.1-3).....	43
圖 5.1-8 案例 5.1-4 格網與模式配置圖	45
圖 5.1-9 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-4).....	45
圖 5.1-10 熱容量分布等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-4)	46
圖 5.1-11 案例 5.1-5 格網與模式配置圖	47
圖 5.1-12 溫度分佈等值圖	48
圖 5.1-13 案例 5.1-6 格網與模式配置圖	49
圖 5.1-14 溫度分佈等值圖(案例 5.1-5 與案例 5.1-6)	50
圖 5.1-15 \overline{CC} 示意圖	50

圖 5.1-16	\overline{CC} 剖面溫度分布圖(案例 5.1-5 與案例 5.1-6)	51
圖 5.1-17	溫度分佈等值圖(案例 5.1-6 與案例 5.1-7 之終端溫度)	52
圖 5.1-18	匯流點隨時刻之溫度變化圖	52
圖 5.2-1	案例 5.2-1 格網與模式配置圖	55
圖 5.2-2	無水流流動情況下之溫度分布等值圖	55
圖 5.2-3	水力傳導係數 0.001(m/day)溫度分布等值圖	56
圖 5.2-4	水力傳導係數 0.005(m/day)溫度分布等值圖	56
圖 5.2-5	水力傳導係數 0.01(m/day)溫度分布等值圖	56
圖 5.2-6	案例 5.2-2 格網與模式配置圖	58
圖 5.2-7	時刻 5(天)總水頭等值圖	59
圖 5.2-8	時刻 50(天)總水頭等值圖	59
圖 5.2-9	時刻 100(天)總水頭等值圖	59
圖 5.2-10	時刻 150(天)總水頭等值圖	59
圖 5.2-11	時刻 200(天)總水頭等值圖	59
圖 5.2-12	時刻 250(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-13	時刻 300(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-14	時刻 350(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-15	時刻 400(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-16	時刻 450(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-17	時刻 500(天)總水頭等值圖	60
圖 5.2-18	時刻 5(天)溫度等值圖	61
圖 5.2-19	時刻 50(天)溫度等值圖	61
圖 5.2-20	時刻 100(天)溫度等值圖	61
圖 5.2-21	時刻 150(天)溫度等值圖	61
圖 5.2-22	時刻 200(天)溫度等值圖	61

圖 5.2-23 時刻 250(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-24 時刻 300(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-25 時刻 350(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-26 時刻 400(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-27 時刻 450(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-28 時刻 500(天)溫度等值圖	62
圖 5.2-29 時刻 5(天)流體密度等值圖	63
圖 5.2-30 時刻 50(天)流體密度等值圖	63
圖 5.2-31 時刻 100(天)流體密度等值圖	63
圖 5.2-32 時刻 150(天)流體密度等值圖	63
圖 5.2-33 時刻 200(天)流體密度等值圖	63
圖 5.2-34 時刻 250(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-35 時刻 300(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-36 時刻 350(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-37 時刻 400(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-38 時刻 450(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-39 時刻 500(天)流體密度等值圖	64
圖 5.2-40 節點(5,5)示意圖	66
圖 5.2-41 節點(5,5)隨時間溫度變化圖(不同水力傳導係數)	66
圖 5.2-42 節點(5,5)隨時間溫度變化圖(不同熱傳導係數)	67

一、緒論

1.1 前言

在數值模擬的領域內，基本的建構流程，均是先確立問題的概念模式，再建立其對應的數學模式，接著再應用如有限差分、有限元素或其它數值方法得出該數學模式的離散方程式，最後求解此離散方程式，得出該問題的數值解。由於數值模式大多是以有限的節點代表問題的整個解空間，因此許多的空間切割法因而產生，從基本的方形網格、矩形網格演進至三角格網及其他格網形狀。而求解以節點上的變數來表示的離散方程式，傳統上常見的方式有兩種，即是矩陣求解或迭代求解。其中矩陣求解為將各運算節點之方程式組合成為矩陣方程式，再以矩陣求解法，如高斯消去法進行求解，而矩陣求解因應節點方程式的編排順序與特性，有各種增進時間效益的求解方法，如帶狀矩陣求解法等；迭代求解則不將各運算節點之方程式組合成為矩陣方程式，而每次僅以各節點之方程式更新該節點變數之值，更新時周圍節點上之變數則採用其當下之值，如此重複更新各節點變數之值直至達到設定之收斂標準為止，此類迭代求解也有各種的改良方式如以內插為基礎的連續鬆弛法(Successive Over/Under Relaxation)。

常用於地下水-熱傳模擬問題常用的數值方法有有限差分法(Finite Difference Method, FDM)、有限元素法(Finite Element Method, FEM)、有限體積法(Finite Volume Method, FVM)及邊界元素法(Boundary Element Method, BEM)等，其中過去最常使用的兩種方法為有限差分法與有限元素法，有限差分法的優點在於簡單直接且計算效率高，因此易於實作，目前被普遍應用的 Three-Dimensional Flow, Heat, and Solute Transport Model.(HST3D) (1978) 模式即是應用有限差分法，以往有限差分法最大的缺點，在於其格網形狀僅可是矩型而

缺乏彈性，造成許多實際應用上的不便或精度上的降低。相較於有限差分法，有限元素法的最大優點則在於其網格形狀上的彈性，理論上可以是任意的多邊形，可適應不規則邊界與需局部加密之情況，惟相對而言，其理論較複雜且計算效率較低。有限體積法是針對控制方程式進行空間與時間上之積分，再以此積分形式之控制方程式配合差分與空間內插方法，建立有限體積法之離散方程式，其優點是所得數值解必定符合守恆條件，是近年來較為流行的數值方法，惟目前多數以有限體積法發展的數值模式多仍採用矩形網格，仍有如有限差分模式一般在實際應用上的不便。因此，若能延續有限差分法的簡單及高效率，克服矩形網格的限制，並整合有限體積法符合守恆條件的精神，應可發展出更簡單、精確、高效率及高應用彈性的數值模式。

1.2 研究目的



本研究是應用細胞自動機 (Cellular Automata, CA)理論為基礎，依據水的質量守恆定律與熱能守恆定律，針對地熱問題發展一個全新地下水流熱流耦合數值模式。本研究以徐昇氏網格建立控制體積，透過相關方程式組合進行(質量與能量)守恆運算，因此基本概念相對簡單，且可解決矩形網格實際建模上的不便，有相當高的推廣應用價值。

1.3 文獻回顧

本節將介紹地下水流模式及水流與熱流模式的演進、細胞自動機(Cellular Automata)的發展以及結合上述三者之研究。

1.3.1 地下水模式之演進

在地下水相關問題中，已有許多地下水數值模式被建立，美國

地質測量局(USGS)發展的地下水相關數值模式多是以有限差分法與有限元素法為主。在有限差分法的發展上，由 Trescott, Pinder, and Larson (1976) 發展出以迭代法為求解方式的二維飽和地下水有限差分模式，而後 Larson (1978) 針對此數值解法部分建立起四點矩陣直接求解法以取代先前的迭代求解法減少模擬時間，Manteuffel, Grove, and Konikow (1983) 建立起共軛梯度法，增加了對求解稀疏矩陣的效率，此處可看出在電腦處理速度並未如現今快速的年代，許多研究均投入在增進求解效率。Ozbilgin and Dickerman (1984) 則使用了曼寧公式，將地表水入滲加入了二維地下水有限差分模式的計算，Weeks (1978) 使用以有限個二維侷限層(Confining Layers)切割含水層的概念，建立擬三維的有限差分模式。

三維飽和地下水有限差分模式由 Trescott (1975) 發表，發表的時間早於該作者二維之發表時間，此模式為 1970 至 1980 間的主要模式之一。而後直到 McDonald and Harbaugh (1988) 發表了模組化的有限差分模式即 MODFLOW，此模式為最被廣泛應用之地下水模式之一，並且功能完備，可進行三維之地下水模擬，甚至拘限與非拘限含水層混合的多層地下含水層系統也可模擬，且除地下水系統本身外，區域補注、蒸發散、抽水井抽水、區域排水與河床水位變動都可模擬，其後許多研究均以 MODFLOW 為基礎，如 Kuiper (1987) 於 MODFLOW 三維模式中加入前調式共軛梯度法 (Preconditioned Conjugate Gradient Method, PCG)，加速了 MODFLOW 的求解速度，Leake and Prudic (1991) 則進行因抽水而造成含水層之下陷的研究與模擬。

在污染傳輸上，Grove and Stollenwerk (1984) 發表了一維污染傳輸模式，可模擬吸附與不可逆反應等問題，Konikow and Bredehoeft

(1978)、Goode and Konikow (1989) 推展出的二維污染傳輸模式，除吸附外，尚可模擬傳流、延散與離子交換等現象。

有限元素法的發展則由 Dunlap, Lindgren and Carr (1984) 使用葛勒金法 (Galerkin Method) 為求解方法建立出地下水之二維有限元素模式，其後 Lewis, Voss and Rubin (1986) 發表了二維污染傳輸有限元素模式，可解決傳流、延散與吸附等物理現象與離子交換與化學反應平衡等化學現象。Glover (1988) 建立了模擬河流的動態方程式，Cooley (1992)，Torak (1993) 則模擬了暫態滲流的情形。三維的有限元素模式則是由 Lin, Richards, Yeh, Cheng & Jones (1996) 發展出，其模式稱為 FEMWATER，可模擬飽和、不飽和土壤內之地下水流、不定邊界條件、海水入侵以及污染傳輸等問題，為目前最主要的有限元素模式。



1.3.2 水流與熱流耦合模式之演進

在水流與熱流耦合相關研究中，已有許多水流熱流耦合數值模式被建立，目前最被大家所使用之水流與熱流模式為美國地質測量局 (USGS) 發展的 HST3D 及 Pruess 所建立之 TOUGH2，這兩種模式所採用之數值方法均是使用有限差分法，其中 HST3D 是由 Kenneth 等人於 1987 年所發展，本模式為三維之地下水流、熱能傳輸與溶質傳輸模式，本模式常被應用於模擬地下污染物傳輸、地下含水層過濾現象、海水入侵現象、淡水補注與地下水復育問題、地下放射性污染物質傳輸、地下熱傳導系統與地下能量貯存分佈問題等。

而 TOUGH2 是由 Pruess 博士等人於 1999 年所開發，TOUGH2 為因應分析多相流與多成分的流體，而採取模組化之程式結構，而各模組之組成即為各種物理分析情況下所需之方程式集合，透過積分有

限差分法來進行離散化動作，最後再透過牛頓-拉福森(Newton-Raphson)疊代法來進行求解。TOUGH2 主要是模擬多孔介質或裂隙介質內之多相流、多成分及非等溫的水流及溶質傳輸，其應用範圍相當廣泛，舉凡地熱工程、核廢料處置及未飽和層水流模擬。而 Falta，1995 則成功將 TOUGH2 應用在地下流中之有機揮發性污染傳輸方面之研究。

此外，Grubaugh 等人(1980)利用有限元素法建立二維水流與熱流傳輸有限元素模式，可用來模擬水體受熱後注入地下水含水層後，對於保存太陽能之效應。FEFLOW(Finite Element subsurface FLOW system)為目前最被廣泛應用之水流與熱流耦合模式，是由 WASY(Institute for Water Resources Planning and Systems Research)於 1979 所開發，其為三維之有限元素模式，應用範圍包含海水入侵模擬、礦坑地區之地下水位抬升及洩降現象等。Feng(2007)則利用 FEFLOW 結合 GIS，用來模擬農業抽取地下水及天然補注對於地下水位之影響。

1.3.3 細胞自動機(Cellular Automata)

細胞自動機 (Cellular Automata, CA)自產生以來已被廣泛的應用，應用領域涉及社會學、生物學、生態學、資訊科學、電腦科學、數學、化學、地理、環境、軍事學等。如宋鴻均(2005)，將細胞自動機應用在海洋油污擴散問題中。Parson 等人(2007)則將細胞自動機理論應用於地表淹水模式開發。Mendicino 與 Folino 等人則在 2006 年應用細胞自動機發展三維未飽和層地下水流模式。

由於細胞自動機在定義細胞與相鄰細胞之規則上，不像傳統數值方法，其控制方程式無須限定於整合型式之偏微分方程式，可以使

用分散型式之方程式組合，因此相較於傳統數值方法可以省略繁瑣複雜之數學推導過程，因此細胞自動機對於全新問題而言具有高度可擴充性。本研究將以細胞自動機理論，配合 Voronoi Diagram 作為空間切割法則，建立垂向二維之水流熱流耦合數值模式。



第二章、研究步驟

本研究之研究步驟如圖 2-1 所示，首先以細胞自動機(Cellular Automata)理論，分別開發地下水水流數值模式及熱流數值模式，其次再串接兩者形成地下水流與熱流互動之地下水流與熱流耦合模式。其中將會分別針對非耦合之熱流問題進行與同時考量地下水流與熱流互動之耦合兩種問題進行模擬驗證，以藉由不同的問題來驗證模式正確性。

一、開發階段：

在模式開發階段，首先分別針對「地下水流問題」與「熱流問題」進行模式開發，其中模式開發過程可以再細分為「概念模式建立」與「計算細胞建立」兩個步驟。在「概念模式建立」步驟中，地下水流問題概念模式是基於水的質量守恆，並搭配達西公式描述穿越控制體積邊界的質量穿越量；而熱流問題概念模式則是基於熱的能量守恆，其中穿越控制體積邊界的能量穿越量之描述與水流問題不同，熱之傳輸必須因應其機制之不同，而分成傳導項與對流項兩種。在「計算細胞建立」步驟中，本研究以徐昇氏網格作為空間切割方法，各個徐昇氏網格均可視為一個計算細胞，計算細胞間以特定規則定義彼此之互動關係，本研究所發展之細胞模式的互動規則即為前述概念模式相關公式之離散化。以地下水流問題為例，互動規則即為水之質量守恆方程式、達西公式與其他相關之方程式。

其次，串接兩個獨立完成之數值模式，藉由資訊同步模組的建立，使得兩模式將會互相影響，進一步建立耦合之地下水流與熱流數值模式，其中，在地下水流數值模式部分，則是引用 易正偉(2008)所開發之垂向二維地下水流數值模式。

二、驗證階段：

在驗證階段可以區分為兩個方面，分別為「熱流問題模擬驗證」與「地下水流與熱流耦合問題模擬驗證」兩個部分。當完成熱流模式開發後，透過「熱流問題模擬驗證」，處理不同類型之純粹熱流問題，透過熱能之能量守恆等檢討，進一步證明模式結果之正確性。其次，「地下水流與熱流耦合問題模擬驗證」則同時模擬地下水流與熱流兩模式互動之問題，用以顯示兩問題間之交互影響關係。

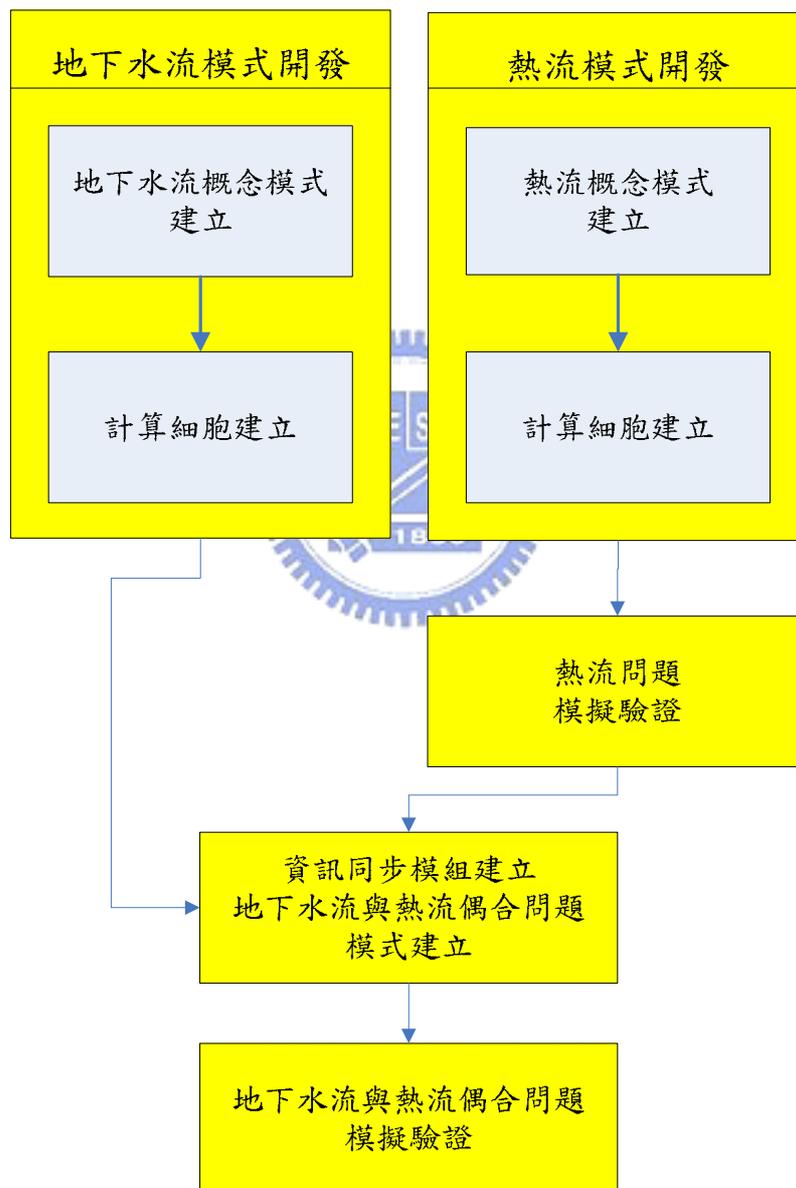


圖 2-1 研究步驟流程圖

三、研究理論與方法

本研究運用「細胞自動機(Cellular Automata)」理論為基礎，分別建立地下水流數值模式與熱流數值模式，首先 3.1 節將針對地下水流問題與熱流問題之概念模式進行說明，其次 3.2 節再針對細胞自動機進行說明介紹。

3.1 地下水流問題與熱流問題概念模式說明

由於本研究之研究範疇可以區分地下水流問題與熱流問題兩個部分，以下將先針對地下水流問題概念模式進行說明，其次再針對熱流問題概念模式進行說明。

3.1.1 地下水流問題概念模式

在地下水流的問題中，控制方程式是基於水的質量守恆概念所建立。水的質量守恆方程式(即連續方程式)可寫為式 3.1.1-1a 與 3.1.1-1b，分別為穩態狀況下與暫態狀況下，如下所示：

$$\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{ij} + q_{M,i} = 0 \dots\dots\dots (3.1.1-1a)$$

$$\frac{\partial M_i^t}{\partial t} = \sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{ij} + q_{M,i} \dots\dots\dots (3.1.1-1b)$$

其中 M_i^t 代表節點 i 於時刻 t 之控制體積內的蓄水質量， Num_i 代表節點 i 之相鄰節點數量， \dot{M}_{ij} 則代表節點 i 與節點 j 之間之質量穿越量， $q_{M,i}$ 則代表節點 i 所屬控制區塊內的水流源流項(或沈流項)。後續將進一步定義質量穿越量與蓄水質量之計算。

$$\begin{cases} \dot{M}_{ij} = (\rho_f \vec{V}_{darcy} \vec{Area})_{ij} \\ \vec{V}_{darcy,ij} = -K \frac{\partial h}{\partial \vec{s}} \vec{s}_{ij} \end{cases} \dots\dots\dots (3.1.1-2)$$

$$\rho_f = \frac{(B + A_1 p + A_2 p^2)}{V^0 - V^0 p} \dots\dots\dots (3.1.1-3)$$

$$h = p + z \dots\dots\dots (3.1.1-4a)$$

$$h = p + \left(\int_{z_0}^z \gamma dz \right) / \gamma_0 \dots\dots\dots (3.1.1-4b)$$

式 3.1.1-2 用以定義式 3.1.1-1 中之質量穿越量，亦即等號右方之第一項，質量穿越量為水流密度(ρ_f)、控制表面面積(\bar{Area})與達西流速(\bar{V}_{darcy})的乘積，達西流速又為水力梯度與水力傳導係數之乘積。另外，式 3.1.1-3 為水流密度之轉換方程式，其為壓力水頭(p)與溫度之函數，其中 V^0 、 A_1 、 A_2 與 B 均為溫度之函數，其為 Rana A. Fine(1973) 提出之轉換公式。式 3.1.1-4a 為定密度條件下之位置水頭(z)、壓力水頭(p)與總水頭(h)三者之關係式，式中指出總水頭為壓力水頭與位置水頭之和；式 3.1.1-4b 為變密度條件下之計算方程式，細部推導內容將於附錄 A 進一步說明。

$$M_i^t = (\rho_f n S_d)_i^t Vol_i \dots\dots\dots (3.1.1-5)$$

$$n = n_0 \left[1 + \frac{\alpha'}{n_0} (p - p_0) \right] \dots\dots\dots (3.1.1-6)$$

式 3.1.1-5 為描述控制體積內的蓄水質量，其為水流密度、飽和度、孔隙率與控制體積大小之乘積。其中水流密度隨壓力之變化，可以透過式 3.1.1-3 計算。在飽和度部分，若所探討之問題為未飽和層之地下水流議題，其數值將隨壓力水頭(稱負壓或張力)變化而改變，因此需要透過土壤之特性曲線加以定義；若所探討之問題為飽和層之地下水流議題，由於飽和與未飽和之差異在於水流是否完全充滿整個孔隙，因此飽和度不隨壓力而改變。由於本研究在此僅以飽和問題進行探討，因此設定為 1。

另外根據地下水理論，拘限含水層之水量進出與壓力變化關係，係受到水的壓縮性與土的壓縮性所造成，亦即土壤孔隙率會隨壓力變化，式 3.1.1-6 為土壤孔隙率隨壓力變化方程式，其中 α' 為土壤之壓密係數，其隨土壤種類不同而改變，關於土體壓縮性之推導內容將於附錄 B 進一步說明。

3.1.2 熱流問題概念模式

在熱流的問題中，其控制方程式是基於熱量守恆概念所建立。熱量守恆方程式(即連續方程式)可寫為式 3.1.2-1a 與 3.1.2-1b，分別為穩態模擬與暫態模擬，如下所示：

$$\sum_{j \in \alpha}^{Num_i} (\dot{H}_{cond,ij} + \dot{H}_{conv,ij}) + q_{H,i} = 0 \dots\dots\dots (3.1.2-1a)$$

$$\frac{\partial H_i^t}{\partial t} = \sum_{j \in \alpha}^{Num_i} (\dot{H}_{cond,ij} + \dot{H}_{conv,ij}) + q_{H,i} \dots\dots\dots (3.1.2-1b)$$

其中 H_i^t 代表節點 i 所代表之控制體積內的熱容量， Num_i 代表節點 i 之相鄰節點數量， $\dot{H}_{cond,ij}$ 則代表節點 i 與節點 j 間傳導項之熱量穿越量， $\dot{H}_{conv,ij}$ 則代表節點 i 與節點 j 間對流項之熱量穿越量， $q_{H,i}$ 則代表節點 i 所屬控制區塊內的源流項(或匯流項)。後續將進一步定義熱量穿越量與熱容量之計算。

$$\dot{H}_{cond,ij} = -K_{H,eq} \frac{\partial T}{\partial \bar{s}} \bar{s}_{ij} \cdot \bar{Area}_{ij} \dots\dots\dots (3.1.2-2)$$

$$\dot{H}_{conv,ij} = \dot{M}_{ij} s_{H,f} T \dots\dots\dots (3.1.2-3)$$

式 3.1.2-2 及 3.1.2-3 用以定義式 3.1.2-1 之熱量穿越量，分別為式 3.1.2-1b 等號右方之第一項（熱傳導項）及第二項（熱對流項）。式 3.1.2-2 定義傳導項之熱穿越量應為有效熱傳導係數、溫度梯度與控制表面面積的乘積，即為傅立葉公式(Fourier's Law)，其中 $K_{H,eq}$ 為

有效熱傳導係數(thermal conductivity)，其為土體與水流熱傳導係數之組合， T 代表溫度， \bar{Area}_{ij} 代表控制表面面積。式 3.1.2-3 定義對流項之熱穿越量應為水流之質量穿越量(\dot{M}_{ij})、水流比熱($s_{H,f}$)與溫度的乘積，表示對流項是因為水流流動而帶動熱能的移動，因此水流之質量穿越量(\dot{M}_{ij})在純粹熱流問題的模擬時，應由外部給定；在綜合水流與熱流之水流熱流耦合問題時，則應藉由地下水流模式模擬計算得知。

$$K_{H,eq} = nK_{H,f} + (1-n)K_{H,s} \dots\dots\dots (3.1.2-4)$$

$$H_i^t = \{s_{H,f}(n\rho_f)_i + s_{H,s}[(1-n)\rho_s]_i\} \cdot Vol_i \cdot T_i^t \dots\dots\dots (3.1.2-5)$$

式 3.1.2-4 為有效熱傳導係數之計算，其中 $K_{H,f}$ 代表水流之熱傳導係數，而 $K_{H,s}$ 為多孔介質(在此即為土壤)之熱傳導係數， n 為孔隙率。式 3.1.2-5 用以定義控制體積內的總熱含量(H_i^t)，其中 ρ_s 為土壤密度， $s_{H,s}$ 為土壤比熱， Vol_i 為控制體積之大小， T 為控制體積內之溫度，其單位為絕對溫度。

$$uh_i^t = s_{H,f,i} \times T_i^t \dots\dots\dots (3.1.2-6)$$

式 3.1.2-6 代表流體之單位熱容量與溫度間的關係，單位熱容量代表單位質量之流體在該溫度下所蘊藏之熱容量，因此其關係為比熱乘上當時的溫度。

3.2 計算細胞建立

本研究利用細胞自動機(Cellular Automata)理論，分別針對水流問題與熱流問題建立計算細胞，首先將針對細胞自動機的理論進行介紹，其次介紹細胞自動機之實際解法與離散方式等。

3.2.1 細胞自動機(Cellular Automata)介紹

細胞自動機(Cellular Automata, 簡稱 CA)最初由數學家 Stanislaw M.Ulam 與 John Von Neumann 於 50 年代所提出, 細胞自動機是由離散且有限狀態之細胞組合, 其中組成細胞會按照局部規則, 在離散的時間維度上進行細胞之轉變行為。細胞自動機中基本元件為細胞, 每個細胞之狀態則透過規則選擇出來, 例如: 生或死。細胞狀態均可由上一個時刻之本身狀態與周遭細胞所決定, 因此其轉變可視為僅對局部規則進行更新。細胞自動機利用空間鄰近關係與局部規則, 可模擬空間中的演化過程。

在利用細胞自動機模擬研究之前須定義四個重要物件, 方可進行模擬, 此四個物件依序如下:

1. 細胞(cells): 定義細胞所在位置與空間中之相鄰關係。
2. 狀態(states): 定義系統中各細胞可選擇之狀態, 其中單一細胞在一個時刻中只選定一個狀態
3. 鄰近細胞(neighborhoods): 一個細胞狀態之轉變係由其周圍鄰近細胞狀態所決定。
4. 規則(rules): 需定義細胞狀態之轉變規則。

細胞自動機具有以下之特性:

1. 同質性、齊性:

同質性反映在細胞空間內的每個細胞的變化都服從相同的規律, 即細胞自動機的規則, 或可稱細胞自動機的轉換函數。而齊性指的是細胞的分布方式相同、大小、形狀相同, 空間分布規則整齊。

2. 空間離散:

細胞分布在按照一定規則劃分的離散細胞空間上。

3. 時間離散：

系統的演化是按照等間隔時間分布進行的，時間變數 t 只能取等步長的時刻點，例如整數形式的 $t, t+1, t+2, \dots$ 。而且時刻 t 的狀態及細胞自動機定義的轉換函數(規則)只對其下一時刻，即 $t+1$ 時刻產生影響，同理， $t+2$ 時刻的狀態及轉換函數(規則)取決於 $t+1$ 時刻的狀態。若將細胞自動機之時間變數 t 與微分方程中的變數 t 做比較，細胞自動機的時間變數 t 為離散的變數，而微分方程中的 t 通常是個連續值變數。

4. 狀態離散有限：

細胞自動機的狀態只能取有限(k)個離散值(s_1, s_2, \dots, s_k)。相對於連續狀態的動力系統，它不需要經過處理就能轉化為離散值之集合。而在實際應用中，往往需要將有些連續變數進行離散化，如分類，分級，以便於建立細胞自動機模型。

5. 同步計算：

各個細胞在時刻 $t+1$ 的狀態變化是獨立的行為，變化與變化之間並沒有任何相互影響。若將細胞自動機的變化看成是對資料或資訊的計算或處理，則細胞自動機的處理是同步進行的，特別適合於平行計算。

6. 時空局部性：

每一個細胞的下一時刻 $t+1$ 的狀態，取決於其周圍半徑為 r 的鄰域(或者其他形式鄰居規則定義下的鄰域)中的細胞的當前時刻 t 的狀態，即所謂時間、空間的局部性。從資訊傳輸的角度來看，細胞自動機中資訊的傳遞速度是有限的。

7. 維度高：

在動力系統中一般將變數的個數視為維數。例如，將區間映射

所形成的動力系統稱為一維動力系統，將平面映射所形成的動力系統稱為二維動力系統，對於偏微分方程描述的動力系統則稱為無窮維度動力系統。從這個角度來看，任何完備細胞自動機的細胞空間，是定義在一維、二維或多維空間上的無限集合，每個細胞的狀態便是這個動力學系統的變數。因此，細胞自動機是一類無窮維度動力系統。在具體應用中或電腦模擬時，系統當然不可能處理無限個變數，但細胞自動機還是變數量很龐大的細胞所組成的系統。因此可以說維數高是細胞自動機研究中的一個特點。

由於細胞自動機原本並非針對數值模擬所提出之概念，因此將細胞自動機之理論應用於數值模擬研究中，仍應進一步定義其實際作法。

在本研究中，吾人以細胞自動機(Cellular Automata)的概念進行水流熱流偶合數值模式之開發，在細胞自動機(Cellular Automata)中「規則」之定義，即定義所有細胞之狀態轉換規則，在本研究中，此規則即以前述之質量守恆及能量守恆為基礎所定義出來之方程組，此部分在上一小節 3.1 節已介紹，而細胞自動機 Cellular Automata 中所定義之「細胞」，在本研究中，則是應用 Voronoi Diagram 空間切割所得之網格，Voronoi Diagram 定義了整個模擬系統之節點位置資訊及節點與節點之相關資訊，而 Voronoi Diagram 將在稍後章節附錄 C 進行介紹。

3.2.2 計算空間架構

本研究在計算上，空間架構可分為節點、連結與控制體積三個部分，如圖 3.2.2-1 所示，黑點即代表節點，意即數值模擬上的計算點；涵蓋節點的多邊形稱為控制體積亦即為細胞本身(Cell)，為該計

算點的代表範圍；兩節點之連線稱為連結，連結之存在代表該兩節點互為相鄰關係，每個連結必穿越一個控制表面。

由於本計算模組是將模擬區域配置有限個數的細胞及計算節點，如同其他數值方法一樣，例如：有限差分法將空間切割成有限個網格區塊。因此，僅在計算節點上擁有空間之場變數，因此若需要非節點位置之場變數數值，則需要搭配空間推估方法進一步推估。

前述已經列出所需之方程式，其中部分方程式僅探究節點本身之變化，例如：控制體積內蓄水質量變化相關方程式，此類方程式稱為節點類型之方程式。其他方程式則與控制表面有關，例如：達西公式即是用以描述穿越控制表面流速之相關方程式，其亦作用於連結上，在此稱為連結類型之方程式。

圖 3.2.2-2 為節點與連結關係示意圖，兩相鄰節點可以形成一連結，其與控制區塊的邊界交點，由於 Voronoi Diagram 的特性，連結必定與邊界垂直，且交點必定位於連結中點。

連結類型方程式可能需要連結中點之參數資訊，以達西公式為例，若欲計算穿越控制表面之流速，其為連結中點位置(即控制表面上)之水力梯度與水力傳導係數的乘積，水力梯度透過中央差分方式可以藉由兩端節點數值來計算，而水力傳導係數則需要進一步透過空間推估方法來估算，以水力傳導係數為例，其數值可以藉由兩節點水力傳導係數之調和平均進行推估。

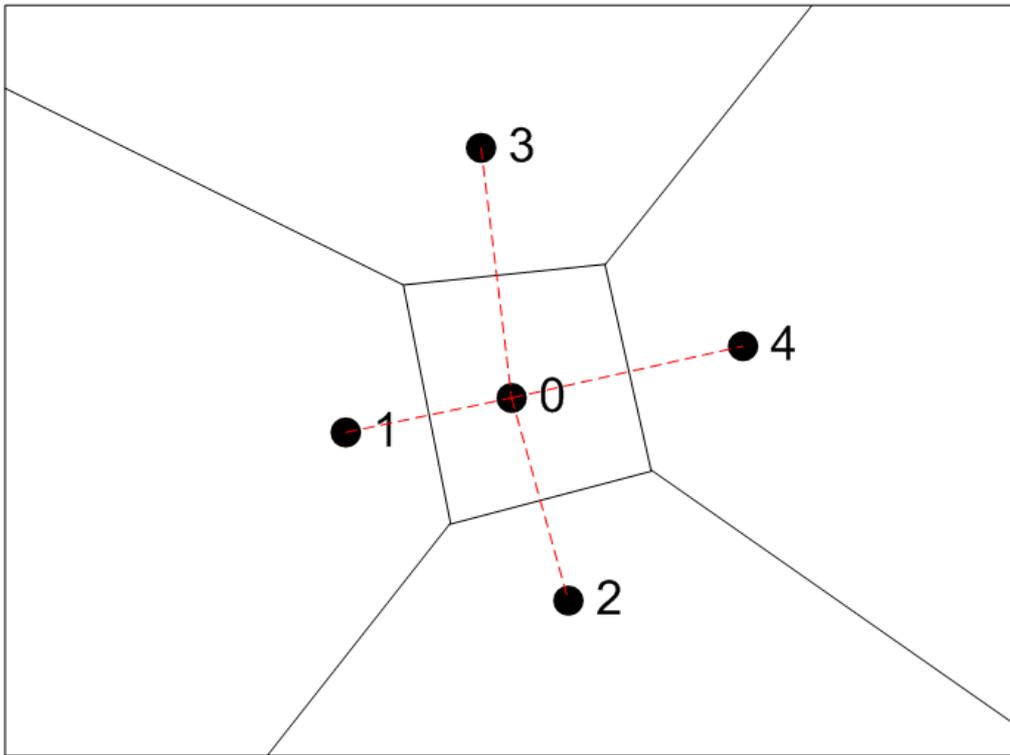


圖 3.2.2-1 空間架構說明示意圖

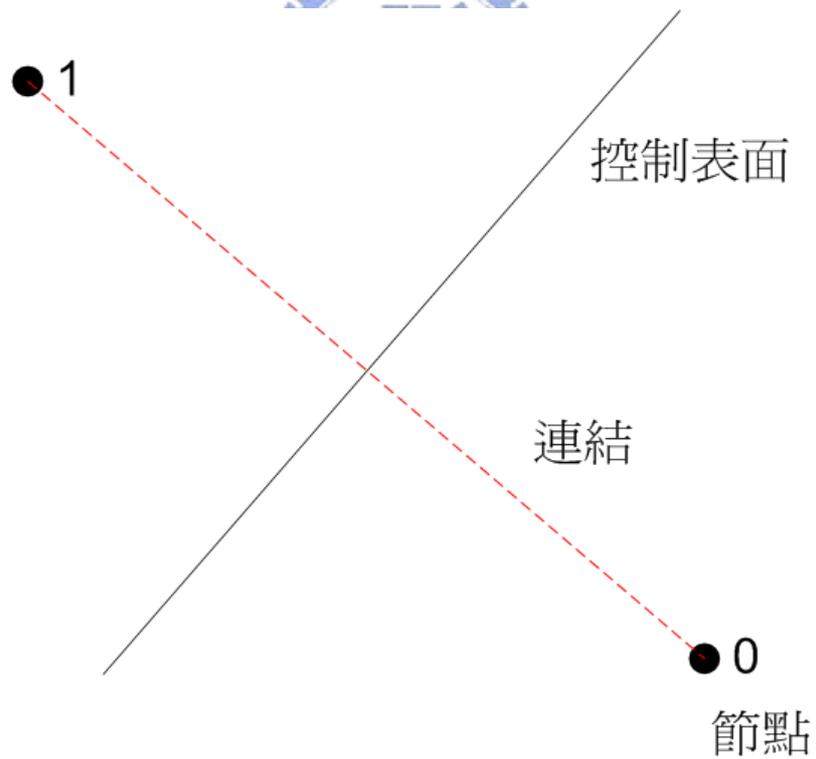


圖 3.2.2-2 節點與連結關係示意圖

3.2.3 方程式離散化

圖 3.2.3-1 為網格示意圖，C、E、W、N 與 S 代表計算節點，因此符號 CE 代表 C 與 E 兩點之連結中點，以下將以此網格示意圖來進行描述。就地下水水流模式而言，在 3.1.1 節中提及之方程式是以連續方程式為起始(式 3.1.1-1a 與 3.1.1-1b)。在暫態模擬上，對該式進行時間上之積分，使得等號左式代表在某段時間之蓄水改變量，等號左式代表某段時間之穿越總量(如式 3.2.3-1 所示)。若進一步將積分方程式進行離散化，可將式 3.2.3-1 改寫為式 3.2.3-2，等號右方可以拆成時刻 τ 與時刻 $\tau + \Delta\tau$ 兩項，其中透過係數 α ，來切換兩者之比重。若 α 等於 1，則代表完全受到時刻 τ 之控制，為傳統數值方法中之顯示法 (explicit method)；若 α 等於 0，則代表完全受到時刻 $\tau + \Delta\tau$ 之控制，亦為傳統之完全隱示法 (fully implicit method)。

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial \dot{M}_C^t}{\partial t} dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} \right) dt \dots\dots\dots (3.2.3-1)$$

$$\dot{M}_C^{\tau+\Delta\tau} - \dot{M}_C^{\tau} = \left\{ \alpha \left(\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} \right)^{\tau} + (1-\alpha) \left(\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} \right)^{\tau+\Delta\tau} \right\} \Delta\tau \dots\dots (3.2.3-2)$$

研究中所採用之方程組可以依據微分與否，作為是否需要進行離散動作之判斷，若無包含微分運算子，方程式本身無須另行離散。以地下水流方程組中之達西公式來看，其離散形式之方程式可以改寫為式 3.2.3-3，水力梯度的微分項部分可藉由中央差分進行離散，意即其數值以節點 C 與節點 E 之總水頭差值除上兩點距離，其含意代表連結中點。水力傳導係數部分則必須透過空間推估方法進一步推估，最簡單的推估方式包含算數平均(式 3.2.3-4a)、幾何平均(式 3.2.3-4b)與調和平均(3.2.3-4c)等，因此上述三式之變數(x)若於達西公式中，即

代表水力傳導係數(K)。此外，傳統上兩串連之非均質區塊，其等效水力傳導係數多建議以調和平均進行計算。另外，若於熱流問題中之對流項估算公式，其中變數單位熱容量之推估，應以上風法作為連結中點數值之基礎，意即透過水流方向之判斷，取其上風方位數值作為連結中點數值。

$$\begin{cases} \dot{M}_{CE/C} = \rho_{f,CE} V_{Darcy,CE} Area_{CE} N_{CE/C} \\ V_{darcy,CE} = -K_{CE} \frac{h_C - h_E}{L_{CE}} \end{cases} \dots\dots\dots (3.2.3-3)$$

$$x_{CE} = \frac{x_C + x_E}{2} \dots\dots\dots (3.2.3-4a)$$

$$x_{CE} = \sqrt{x_C x_E} \dots\dots\dots (3.2.3-4b)$$

$$x_{CE} = \frac{2}{1/x_C + 1/x_E} \dots\dots\dots (3.2.3-4c)$$

控制表面 CE 之穿越流量則為水流密度($\rho_{f,CE}$)、達西流速 ($V_{darcy,CE}$)、穿越面積($Area_{CE}$)與方向係數($N_{CE/C}$)的乘積。上述達西流速的定義，其流向是以節點 E 往節點 C 時為正，其中 $N_{CE/C}$ 代表方向係數的乘積，其用意用以將穿越量數值改為流入控制體積 C 為正，其數值為 1 或 -1，在此方向係數為 -1。反之，若欲計算控制體積 E 之穿越量，其方向係數($N_{CE/E}$)，其數值為 1，其穿越量恰與控制體積 C 之穿越量數值正負相反。

就熱流模式而言，其連續方程式之離散方程式可以改寫為式 3.2.3-5 與 3.2.3-6，分別代表穩態與暫態之離散形式之連續方程式。

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial H_C^t}{\partial t} dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(\sum_{j \in \alpha}^{Num_j} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} \right) dt \dots (3.2.3-5)$$

$$H_C^{\tau+\Delta\tau} - H_C^\tau = \left\{ \alpha \left(\sum_{j \in \alpha} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} \right)^\tau + (1-\alpha) \left(\sum_{j \in \alpha} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} \right)^{\tau+\Delta\tau} \right\} \Delta\tau \dots\dots\dots (3.2.3-6)$$

傳導項之離散公式則為式 3.2.3-7，其熱能傳遞方向之處理則與達西公式雷同。對流項之離散公式則為式 3.2.3-8，其為水流穿越質量 (\dot{M}_{CE})、水流比熱 ($s_{H,f,CE}$) 與溫度 (T_{CE}) 的乘積，其中水流穿越質量則需透過水流模式進行計算。

$$\dot{H}_{cond,CE} = K_{H,eq,CE} \cdot \frac{T_C - T_E}{L_{CE}} \cdot Area_{CE} \cdot N_{CE/C} \dots\dots\dots (3.2.3-7)$$

$$\dot{H}_{conv,CE} = \dot{M}_{CE} s_{H,f,CE} T_{CE} \dots\dots\dots (3.2.3-8)$$

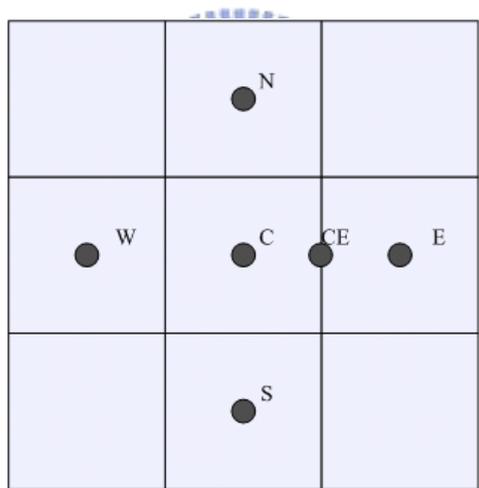


圖 3.2.3-1 模擬網格示意圖

3.2.4 內迭代處理方法

本研究在此採用節點運算概念，亦即各運算節點均可獨立運算，以地下水水流模式而言，其運算變數為壓力水頭 (P)；對熱流模式而言，其運算變數為單位熱容量 (uh)。每次內迭代運算，均是針對單一節點進行運算，運算中則假設周遭節點代表之數值為正確值，而本身之變數數值則透過最陡坡降法等微分形式之最佳化方法進行求

解。

圖 3.2.4-1 為內迭代執行流程圖，圖中之變數(V)若於地下水流問題中，其代表壓力水頭；若於熱流問題中，其代表單位熱容量。首先，給予變數初始解作為微分形式解法之第一步驟，以初始解作為初始搜尋點。其次代入方程式集合中，最後透過各自之守恆方程式，意即水流問題之質量守恆方程式與熱流問題之能量守恆方程式，可以算出變數數值對應之守恆誤差。接著再透過差分方式，進一步計算該守恆誤差之一階微分值。最後，判斷是否已經滿足收斂標準，若尚未收斂則依據微分值修改變數數值，反覆執行此一動作，直至完全滿足內迭代收斂標準為止。

在收斂條件方面，其收斂條件共有三種，滿足其一即停止內迭代演算。首先是迭代次數之最大限制量，其次是守恆誤差之一階微分值趨近於零，最後則是守恆誤差本身小於設定之內迭代收斂標準。



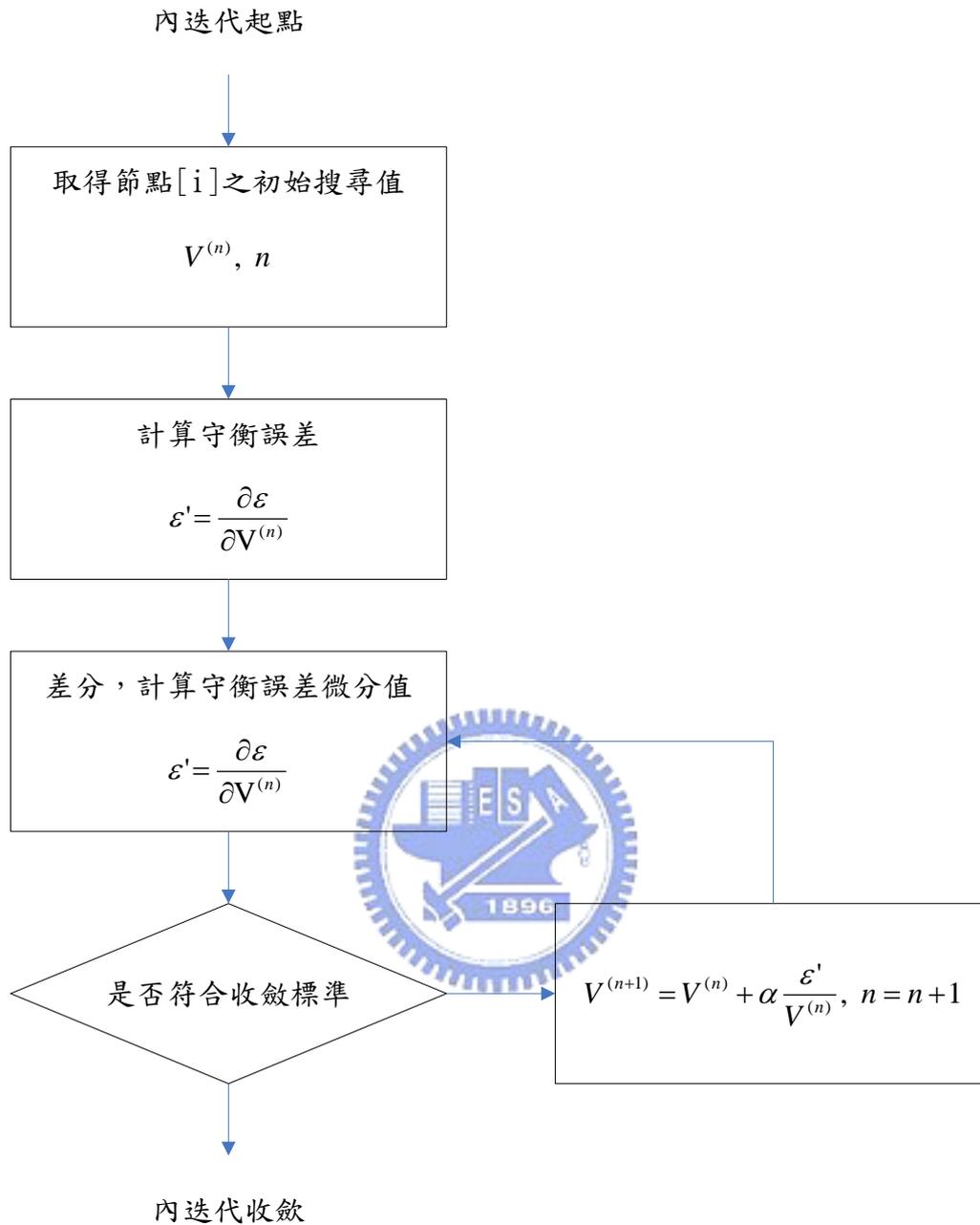


圖 3.2.4-1 模式內迭代流程圖

3.2.5 資訊同步流程

在資訊同步流程部分，於前述之概念模式建立中，水流熱流耦合模式是由地下水流模式及熱流模式所組成，從概念模式中即可瞭解，兩模式彼此交互影響。其中水流模式可以計算水流之質量穿越量，其數值則與熱流模式中之對流項估算影響極大；而熱流模式所計

算之溫度變化，則會影響水流之膨脹與壓縮。圖 3.2.5-1 為兩模式之變數關係圖，當每次完成內迭代過程後均會將互相同步彼此所計算之數值。

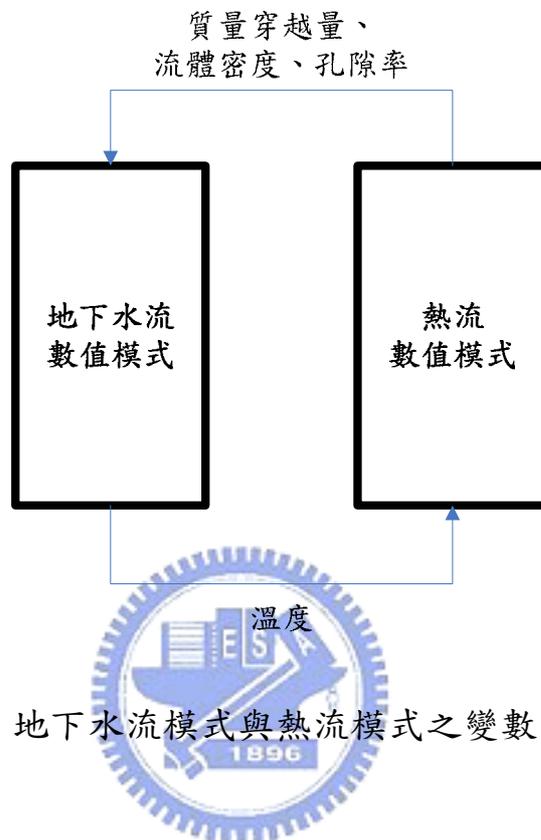


圖 3.2.5-1 地下水流模式與熱流模式之變數關係圖

3.2.6 外迭代處理方法

內迭代流程是透過最佳化方法求得各節點數值，其概念是假設周遭節點之數值為正確，然而實際上僅有緊鄰邊界之計算節點，其周遭邊界因為透過邊界條件之設定 (Dirichlet B.C.)，其數值方為正確。意即內迭代過程僅訂定了單一節點與相鄰節點之關係方程式，如何求得一組解，可以同時滿足聯立的關係方程組，在傳統上多採用矩陣解法，來求得各節點對應之數值。因此，本研究採取外迭代流程求得各計算節點之數值，其外迭代流程如圖 3.2.6-1 所示，反覆執行各節點之資訊同步流程及內迭代流程，每次外迭代流程均可將整體數值往真解逼近，當節點數值每次之迭代改變量漸漸趨緩，即表示已經趨近真解。因此若其改變量小於外迭代收斂標準，則認定外迭代流程已經收

斂。

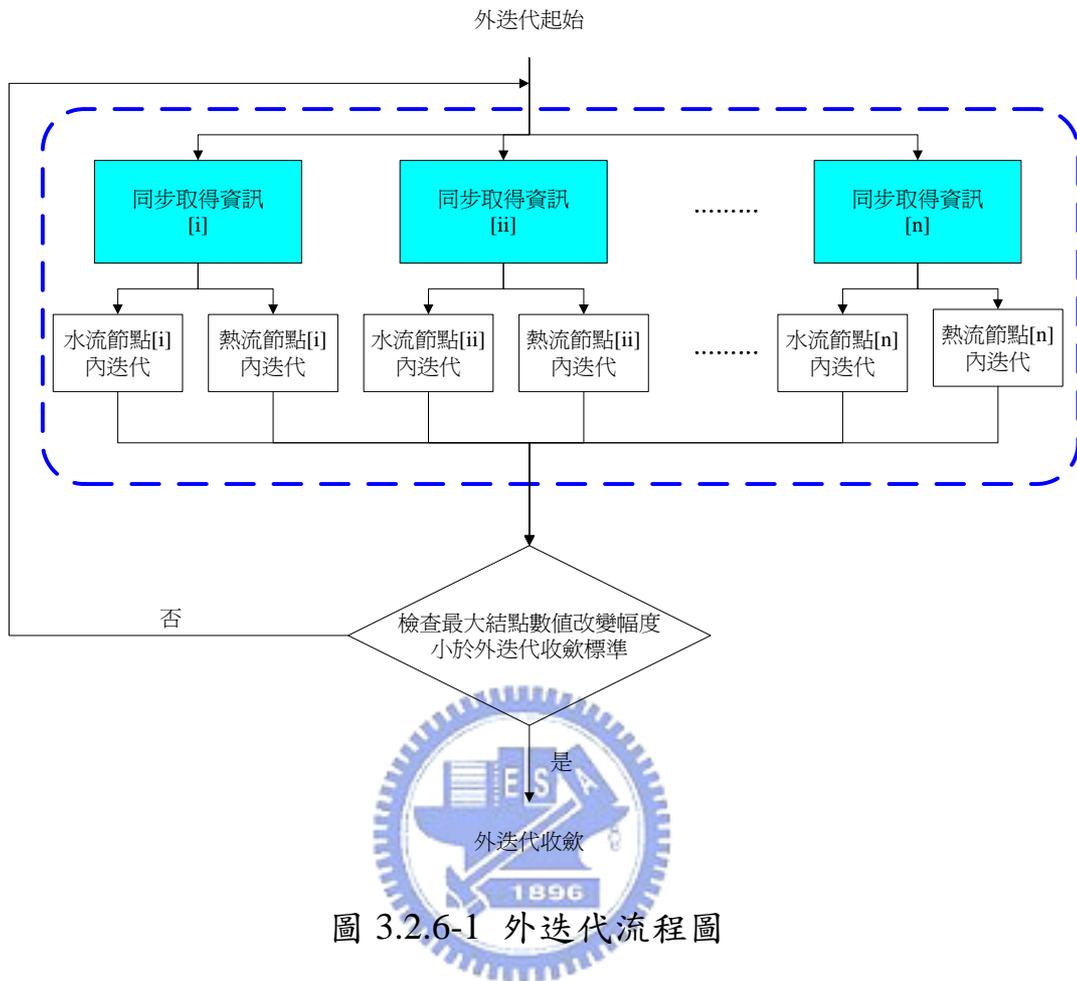


圖 3.2.6-1 外迭代流程圖

3.2.7 整體數值模擬流程

整體數值模擬流程如下圖 3.2.7-1，首先依據模式設定檔，讀入空間切割相關資訊、水文地質參數、邊界條件與方程式集合等資訊，接著則依據模擬之模擬型態、起始時刻、結束時刻與模擬間距，開始進行模擬，流程中則當外迭代流程收斂後，則進行是否進行下一時刻之模擬，若否則完成模擬。若穩態形式之模擬，則僅執行外迭代流程一次；若非穩態形式之模擬，則依據起始時刻、結束時刻與模擬間距等資訊進行判斷。

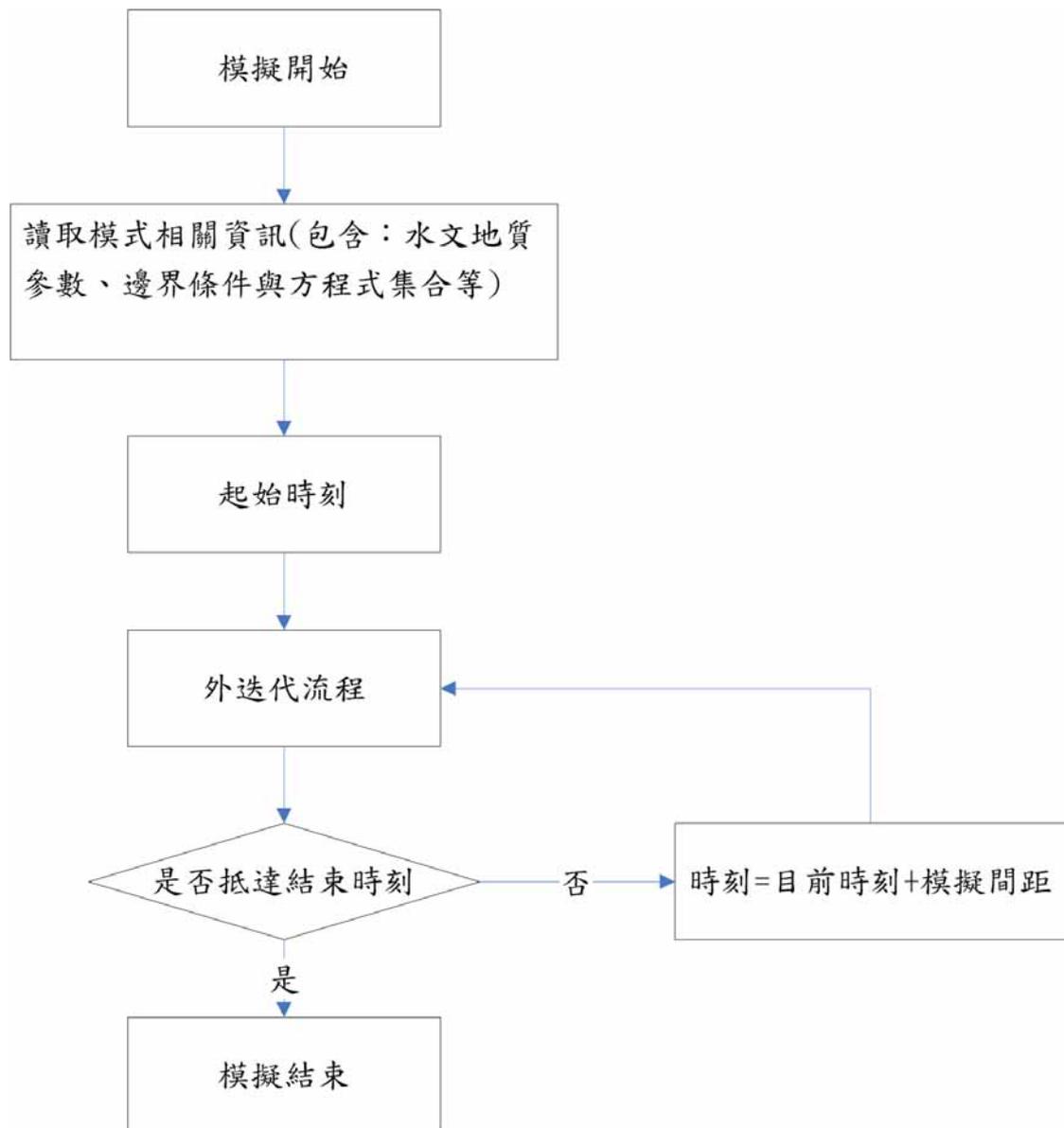


圖 3.2.7-1 整體數值模擬流程圖

四、垂向二維地下水流與熱流耦合數值模式開發

本章節將利用前述之說明建立垂向二維地下水流與熱流耦合數值模式，前述章節已經描述控制方程式之離散方式，本章節將進一步說明依據前述離散方程式，所實做之方程式集合。最後再說明模式呼叫之函式順序。前述章節曾提及本空間數值架構分成節點、連結與控制體積三個部分，在方程式中亦可分類為節點類型之方程式與連結類型之方程式兩種。本節將詳細描述因應需要所實做之各類方程式，並說明各方程式所屬之類別與特性：

4.1 地下水流數值模式實做

1. *Func_Porosity_Affected_by_Pressure* (斜體字代表方程式實做函式名稱)

式 4.1-1 用以定義壓力水頭與實際孔隙率關係，本函式用以呈現土體之壓縮性。未飽和問題中，其數值固定不變；飽和問題中，其數值隨壓力增加而線性增加。本函式為節點類型之方程式。其中 n 為孔隙率、 n_0 為未受壓之孔隙率、 α' 為土壤壓縮係數、 p 則為壓力水頭。

$$\begin{cases} n = n_0 \left[1 + \frac{\alpha'}{n_0} (p - p_0) \right] & \text{for } p > 0 \\ n = n_0 & \text{for } p \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.1-1)$$

2. *Func_Character_PS*

式 4.1-2 與式 4.1-3 是以 van Genuchten(1980)所提出之壓力水頭與含水量的特性曲線關係式為基礎，修改為可同時應用於飽和與未飽和之地下水流問題。未飽和問題中，透過壓力水頭與土壤參數計算對應之土壤飽和度；飽和問題中，其數值等於土體孔隙率。本函式為節點類型之方程式。

$$\theta = \theta_r + \theta_e(n - \theta_r) \dots\dots\dots (4.1-2)$$

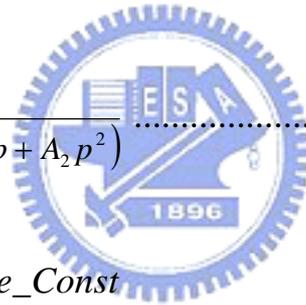
$$\begin{cases} \theta_e = [1 + (\alpha p)^\beta]^{-\gamma} & \text{for } p < 0 \\ \theta_e = 1 & \text{for } p \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.1-3)$$

其中 θ 為含水量、 θ_r 為殘餘含水量、 θ_e 為有效含水量、 n 為孔隙率、 p 為壓力水頭、 α 、 β 、 γ 則為土壤係數。

3. *Func_Calc_Water_Density*

式 4.1-4 為引用 Rana A. 與 Frank J. Millero 在 1973 年經實驗迴歸後，提出一條受壓力與溫度變化影響之水流密度關係式，依據此關係式本模式可因應水體所受壓力水頭與當時溫度，計算對應之水密度。本函式為節點類型之方程式。其中 V^0 、 A_1 、 A_2 、 B 均為溫度之函數， p 為壓力水頭。

$$\rho_f = \frac{V^0 p}{(V^0)^2 p - (B + A_1 p + A_2 p^2)} \dots\dots\dots (4.1-4)$$



4. *Func_Set_Temperature_Const*

本函式用以設定地下水流溫度，本函式適用於地下水流問題非耦合運算。對於耦合運算時，則不使用本函式，其數值則透過熱流模式運算，並透過資訊同步過程取得。本函式為節點形式之方程式。

5. *Func_Calc_TotalHead_DensityDependent*

本函式用於計算總水頭，本方程式可應用於變密度條件下，其位置水頭估算會隨密度變化而變，藉由密度變化之垂直積分計算節點之位置水頭，再與壓力水頭之和即為總水頭。此積分式之推導如附錄 B 所示。本函式為節點類型之方程式。其中 h 為總水頭、 z 為位置水頭、 p 為壓力水頭、 γ_0 則為基準之流體比重。

$$h = p + \frac{\int_{z_0}^z \gamma dz}{\gamma_0} \dots\dots\dots (4.1-5)$$

6. *Func_Calc_TotalHead_DensityIndependentl*

本函式用於計算總水頭，本方程式僅可應用於定密度條件下，其位置水頭之估算可直接以位置高程訂定之，再與壓力水頭之總和即為總水頭。本函式為節點類型之方程式。其中 h 為總水頭、 z 為位置水頭、 p 為壓力水頭。

$$h = z + p \dots\dots\dots (4.1-6)$$

7. *Func_WaterCapacity*

式 4.1-7 則用以將土壤含水量轉換為控制體積內的蓄水質量。本函式為節點類型之方程式。本函式為節點類型之方程式。其中 \dot{M} 為控制體積內之蓄水質量、 ρ_f 為流體密度、 θ 為含水量、 Vol 則為控制體積。

$$\dot{M} = (\rho_f \theta) Vol \dots\dots\dots (4.1-7)$$

8. *Func_InterporlateDensity_UpWind*

本函式透過連結之兩端點水流密度值，以上風法之概念推估連結中央之水流密度，其數值可代表控制表面上的水流密度。本函式為連結類型之方程式。

9. *Func_InterporlateK*

本函式透過連結之兩端點實際水力傳導係數，以調和平均推估連結中央之實際水力傳導係數，其數值可代表控制表面上的水力傳導係數。本函式為連結類型之方程式。

10.Func_DarcyLaw_Flux

式 4.1-9 首先透過達西公式，以水力梯度與實際水力傳導係數乘積計算斷面穿越流速，其次再乘上控制表面面積與水流密度，轉換為斷面之穿越水質量。本函式為連結類型之方程式。

$$\begin{cases} \dot{M} = \rho_f \bar{V}_{darcy} \bar{Area} \\ \bar{V}_{darcy} = -K \frac{h_1 - h_2}{\Delta x} \end{cases} \dots\dots\dots (4.1-9)$$

其中 \dot{M} 為穿越控制斷面流體質量、 ρ_f 為流體密度、 \bar{V}_{darcy} 為達西流速、 K 為水力傳導係數、 h_1 及 h_2 為連結兩端節點之總水頭、 γ 則為土壤係數、 \bar{Area} 為控制斷面面積、 Δx 為兩節點之距離。

11.Func_Continuity_Universal

本函式為地下水模式中之守恆方程式，依據模擬問題可分為穩態與暫態兩種模擬方式，其中暫態模擬又可依據顯示法(explicit method)、完全隱示法(fully implicit method)與混合隱示法(Crank-Nicholson method)，建立不同時間項之處理方式。

在穩態模擬上，連續方程式如式 4.1-10 所示，總穿越量與源項之總和應為零，意即進出平衡。

$$\sum_{j \in \alpha}^{Num_j} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} = 0 \dots\dots\dots (4.1-10)$$

在暫態模擬上，連續方程式如式 4.1-11 所示，前述顯示法、完全隱示法與混合隱示法之差異僅在係數 α 的選定上，若係數 α 設定為 1.0，表示所使用之數值處理方法為顯示法；而係數 α 設定為 0，則表示所使用之數值處理方法為完全隱示法；而係數 α 設定為 0.5，則表示所使用之數值處理方法為混合隱示法。

$$\dot{M}_C^{\tau+\Delta\tau} - \dot{M}_C^\tau = \left\{ \alpha \left(\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} \right)^\tau + (1-\alpha) \left(\sum_{j \in \alpha} \dot{M}_{Cj/C} + q_{M,C} \right)^{\tau+\Delta\tau} \right\} \Delta\tau \quad \dots (4.1-11)$$

上述函式為地下水流議題所實做之函式，其中方程式 *Func_Interpolate_Density* 與 *Func_InterporlateDensity_UpWind* 都屬於水流密度之空間推估函式，為相同功能但內部處理方法不同之函式，因此可以依據需求擇一使用。此外，方程式 *Func_Character_PS* 為 van Genuchten 所提出之特性曲線模型，因此未來亦可因應不同之需求，選用其他特性曲線模型，例如 Brook 等人所提出之方法。

4.2 熱流數值模式實做

1. *Func_Calculate_Flow_SpecificHeat*

本函式用以設定地下水流流體之比熱，由於本問題僅探討純水之問題，故在此將地下水流流體之比熱訂定為常數值 4179(J/kg K)。未來若問題延伸至污染傳輸議題，流體比熱則應隨著污染值濃度而有所變化，屆時可再行擴充。本函式為節點類型之方程式。

2. *Func_Set_Porosity_const*

本函式用以設定材質之孔隙率，本函式適用於熱流問題非偶合運算。對於偶合運算時，則不使用本函式，其數值則透過水流模式運算，並透過資訊同步過程取得。

3. *Func_Set_Flow_Density_const*

本函式用以設定地下水流流體之密度，其數值固定為 1000(kg/m³)，本函式適用於熱流問題非偶合運算。對於偶合運算時，

則不使用本函式，其數值則透過水流模式運算，並透過資訊同步過程取得。本函式為節點類型之方程式。

4. *Func_Set_FlowMassFlux_const*

本函式以設定地下水流流體之質量穿越量，其數值固定為 $0(\text{kg/day})$ ，本函式適用於熱流問題非耦合運算。對於耦合運算時，則不使用本函式，其數值則透過水流模式運算，並透過資訊同步過程取得。本函式為連結類型之方程式。

5. *Func_Calculate_Flow_HeatConductivity_const*

本函式以設定地下水流流體之熱傳導係數，其數值固定為 $48,038.4(\text{J K/day}\cdot\text{m})$ 。未來若搭配污染傳輸模式，地下水流流體之熱傳導係數設定則可隨污染傳輸模式結果而變化。本函式為節點類型之方程式。



6. *Func_InterporlatePorosity*

本函式透過連結兩端點之孔隙率數值，以算數平均推估連結中央之孔隙率，其數值可代表控制表面上的孔隙率。本函式為連結類型之方程式。

7. *Func_Interporlate_Flow_Density*

本函式透過連結之兩端點水流密度值，以算數平均推估連結中央之水流密度，其數值可代表控制表面上的水流密度。本函式為連結類型之方程式。

8. *Func_Heatcapacity_Transfer_To_Temperature*

式 4.2-1 是單位水體熱容量與溫度的轉換關係式，透過單位體積之水體所含熱容量與水體比熱做轉換可得此單位水體所相對應之溫度。本函式為節點類型之方程式。

$$uh_i^t = s_{H,f,i} \times T_i^t \dots\dots\dots (4.2-1)$$

其中 uh 為單位水體之熱容量、 $s_{H,f}$ 為流體比熱、 T 為水體之熱容量之溫度。

9. *Func_CalcMaterial_Constant*

式 4.2-2 是計算控制體積內之多孔介質之質量，因本模式有考慮到多孔介質之壓密性，然而此壓縮性是假定反映在孔隙率上，即在控制斷面上無多孔介質之質量流量，固在此計算在控制體積內之多孔介質之質量僅需考慮受壓後之孔隙率與多孔介質密度之乘積即可。本函式為節點類型之方程式。

$$M_s = (1-n) \times \rho_s \times Vol \dots\dots\dots (4.2-1)$$

其中 M_s 為多孔介質質量、 n 為孔隙率、 ρ_s 為多孔介質密度、 Vol 為控制體積。



10. *Func_Temperature y_Transfer_To_Total Heatcapacit*

式 4.2-1 是總熱容量與溫度的轉換關係式，首先透過流體與多孔介質之質量計算土體之等效比熱，再乘上控制體積數值與溫度求得對應的總熱容量。本函式為節點類型之方程式。

$$H = \{ (n \times \rho_f \times s_{H,f}) + [(1-n) \times \rho_s \times s_{H,s}] \} \times Vol \times T \dots\dots\dots (4.2-1)$$

其中 H 為總熱容量、 n 為孔隙率、 Vol 為控制體積、 T 為多孔介質與流體之平均溫度、 ρ_f 為流體密度、 $s_{H,f}$ 為流體比熱、 ρ_s 為材質密度、 $s_{H,s}$ 為多孔介質比熱。

11.Func_Calculate_EfficientHeatK

式 4.2-2 是以 Bear(1988)所提出轉換方程式，以土體孔隙率、水流熱傳導係數與多孔介質熱傳導係數，計算土體之等效熱傳導係數。其中 K_e 為等效熱傳導係數、 n 為孔隙率、 $K_{H,f}$ 為流體熱傳導係數、 $K_{H,s}$ 為多孔介質熱傳導係數。

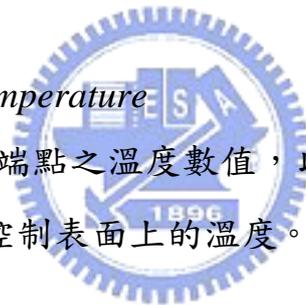
$$K_{H,eq} = (n * K_{H,f}) + ((1 - n) * K_{H,s}) \dots\dots\dots (4.2-2)$$

12.Func_Interporlate_Flow_SpecificHeat

本函式透過連結兩端點之水流比熱數值，以算數平均推估連結中央之水流比熱，其數值可代表控制表面上的水流比熱。本函式為連結類型之方程式。

13.Func_Interporlate_Temperature

本函式透過連結兩端點之溫度數值，以算數平均推估連結中央之溫度，其數值可代表控制表面上的溫度。本函式為連結類型之方程式。



14.Func_InterporlateEfficientHeatK_2

本函式透過連結兩端點之等效熱傳導係數值，以算數平均推估連結中央之等效熱傳導係數，其數值可代表控制表面上的等效熱傳導係數。本函式為連結類型之方程式。

15.Func_HeatFlux_Convection

式 4.2-3 是以 Bear(1988)所提出之對流項估算方程式，藉由地下水流動進而帶動熱量之傳遞，其中之溫度 T 為材質與流體之平均溫度。其中 \dot{H}_{conv} 為對流項之熱穿越量、 \dot{M} 為流體之穿越質量、 s_f 為流體

比熱、 T 為多孔介質與流體之平均溫度。

$$\dot{H}_{conv} = \dot{M} * s_f * T \dots\dots\dots (4.2-3)$$

16.Func_HeatFlux_Conduction

式 4-4 是以 Bear(1988)所提出之傳導項估算方程式，藉由溫度梯度造成之熱量傳遞。其中 \dot{H}_{cond} 為傳導項之熱穿越量、 $K_{H,eq}$ 為等效熱傳導係數、 T 為多孔介質與流體之平均溫度、 $Area$ 為穿越斷面面積。

$$\dot{H}_{cond} = K_{H,eq} * \frac{\partial T}{\partial x} * Area \dots\dots\dots (4.2-4)$$

17.Func_Continuity_Universal

本函式為地熱模式中之熱量守恆方程式，依據模擬問題可分為穩態與暫態兩種模擬方式，其中暫態模擬又可依據顯示法(explicit method)、完全隱示法(fully implicit method)與混合隱示法(Crank-Nicholson method)，建立不同時間項之處理方式。

在穩態模擬上，連續方程式如式 4.2-5 所示，總穿越量與源項之總和應為零，意即進出平衡。

$$\sum_{j \in \alpha}^{Num_i} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} = 0 \dots\dots\dots (4.2-5)$$

在暫態模擬上，連續方程式如式 4.2-6 所示，前述顯示法、完全隱示法與混合隱示法之差異僅在係數 α 的選定上，若係數 α 設定為 1，表示所使用之數值處理方法為顯示法；而係數 α 設定為 0，則表示所使用之數值處理方法為完全隱示法；而係數 α 設定為 0.5，則表示所使用之數值處理方法為混合隱示法。

$$H_C^{\tau+\Delta\tau} - H_C^{\tau} = \left\{ \alpha \left(\sum_{j \in \alpha}^{Num_i} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} \right)^{\tau} + (1 - \alpha) \left(\sum_{j \in \alpha}^{Num_i} (\dot{H}_{cond,Cj/C} + \dot{H}_{conv,Cj/C}) + q_{H,C} \right)^{\tau+\Delta\tau} \right\} \Delta\tau$$

..... (4.2-6)



五、垂向二維水流與熱流耦合數值模式模擬與驗證

前述章節已經建立完成地熱議題之運算模組，以下將透過九種不同類型之地熱案例進行驗證與模擬，其中將針對偶合地熱模式與非偶合熱流模式、均質與非均質、穩態與非穩態，以及與規則網格與不規則網格之差異，建立不同的模擬案例。並針對各個案例的模擬結果進行誤差分析與圖形化輸出，以探討模式的正確性。以下介紹各個案例設定、模擬結果與相關誤差分析。

5.1 熱流案例驗證與模擬

本節為非偶合案例之展示，將分為五個不同的案例進行數值驗證與討論。案例 5.1-1 為採用定溫 Dirichlet 邊界均質案例；案例 5.1-2 為同時採用定熱通量 Neumann 邊界與定溫 Dirichlet 邊界均質案例；案例 5.1-3 與 5.1-4 均為非均質案例模擬，分別為水平向材質分割與垂直向材質分割；案例 5.1-5 則另外增加一個沈流點(sink point)，用以驗證源流項(source term)或沈流項(sink term)之均質案例；案例 5.1-6 設定同案例 5.1-5，差異處在於其網格在抽取點附近進行網格加密；案例 5.1-7 為案例 5.1-6 配置之暫態模擬。表 5.1-1 為非偶合案例列表。

表 5.1-1 非偶合案例列表

案例 5.1-1	穩態	規則網格	單一材質	Dirichlet B.C.
案例 5.1-2			複合材質	Dirichlet + Neumann B.C.
案例 5.1-3				材質水平向切割
案例 5.1-4			材質垂直向切割	
案例 5.1-5	暫態	不規則網格	單一材質	sink point
案例 5.1-6			單一材質	sink point
案例 5.1-7			單一材質	sink point

1. 案例 5.1-1

案例說明：

整體模擬區域如圖 5.1-1 所示，為 11 公尺見方之垂向二維方形薄板。在網格切割上，由原點開始規則地每 1 公尺配置一個計算節點，透過 Voronoi Diagram 可以產生 121 個(11×11)規則形狀之矩形網格，因此每網格之長與寬均為 1 公尺。在材質方面，整體區塊設定為相同材質，其中土壤孔隙率為 0.38，土壤熱傳導係數為 172,800 ($J K/day \cdot m$)，水流熱傳導係數為 48038 ($J K/day \cdot m$)，土壤密度為 2,323 (kg/m^3)，土壤比熱為 710 ($J/kg K$)，水流密度為 1000 (kg/m^3)。

此外，由於本節案例僅單獨模擬熱流部分，並不模擬水流部分，因此令水流流速為 0，故模擬上僅有傳導項而無對流項。

在邊界條件設定上，左方邊界溫度設定為 70(°C)，右方邊界溫度設定為 25(°C)，上下方邊界則設定為無熱流量邊界(No Heat Flux Boundary)，因此本案例溫度將由左往右逐步遞減，亦即熱流方向應為由左往右傳遞。本案例為穩態模擬，全體網格之初始猜值雖任意設定下，最終仍可收斂至真解，但過於懸殊之設定值易影響模擬收斂性與效率，在此設定為 50(°C)。透過模式求解，網格數值逐步依據邊界條件之設定值，收斂於前述之熱流型態。

數值結果：

圖 5.1-2 為溫度分佈之模擬等值圖，從圖面看來溫度由左向右逐步遞減，其等值線分佈均勻，顯示遞減趨勢趨於直線。由於案例邊界條件設計極為簡單，因此流量估算解析解即為傅立葉公式，將左右兩方之邊界溫度差值、左右兩端距離與熱傳導係數帶入公式中即可求得，其數值為 5,642,576.64 (J/day)。

表 5.1-2 為當外迭代收斂標準為 1×10^{-7} 時，解析解與數值解於左右兩側邊界之穿越熱量比較表，數值解方面是將左右兩側網格所計算之穿越流量累加所得，由表上所示其數值誤差已達 0.002%。

表 5.1-2 左右邊界穿越流量比較表(往左為正)

	左側邊界流量(J/day)	右側邊界流量(J/day)
數值解	5,642,472 (99.998%)	-5,642,681 (100.002%)
解析解	5,642,576.64(100%)	-5,642,576.64 (100%)

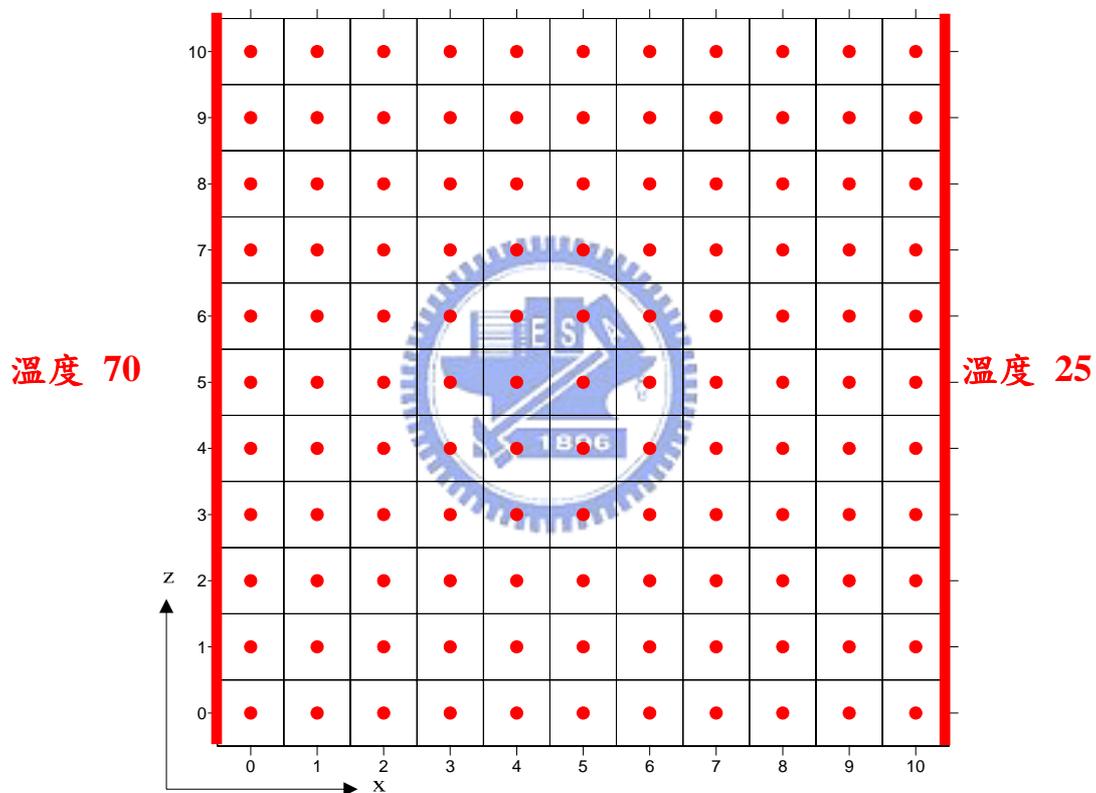


圖 5.1-1 案例 5.1-1 格網與模式配置圖

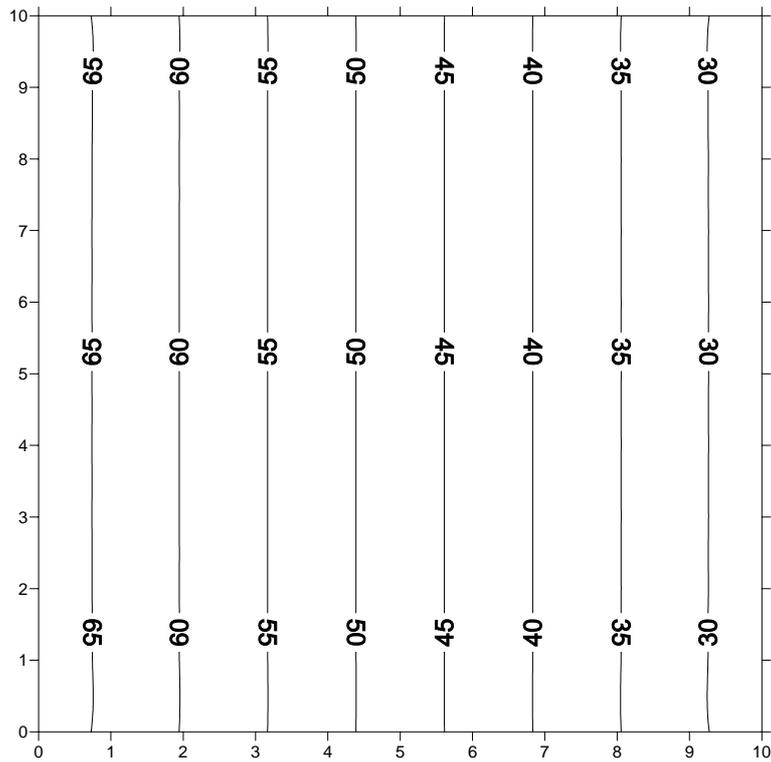


圖 5.1-2 溫度分佈等值圖

2. 案例 5.1-2

案例說明：

由於 Dirichlet 邊界與 Neumann 邊界為兩種最基本之邊界條件，本案例用以驗證 Neumann 邊界正確性，因此大部分設定均沿用案例 5.1-1 設定，左方邊界之熱通量設定為 $5,642,576.64 (J/day)$ ，該數值即為案例 5.1-1 數值解計算所得之熱通量，右方與上下兩邊界則沿用品例 5.1-1 設定，右方邊界設定為 $25(^{\circ}C)$ ，上下方邊界則設定為無熱流量邊界(No Heat Flux Boundary)，整體模擬區域如圖 5.1-3 所示，本案例溫度分布應與案例 5.1-1 依樣，由左往右逐步遞減，亦即熱流方向應為由左往右流動。

數值結果：

本案例主要是為驗證 Neumann 邊界條件之模擬正確性，因此與案例 5.1-1 設定即為相似，僅在邊界條件上取不同之邊界條件型式，

因此模擬結果兩者應該一致。圖 5.1-4 為案例 5.1-1 與案例 5.1-2 之溫度分佈圖，由圖面顯示兩者溫度分佈等值線完全重合，顯示雖然設定為不同邊界條件型式，但其模擬結果仍然一致，可以證明 Neumann 邊界條件型式之正確性。

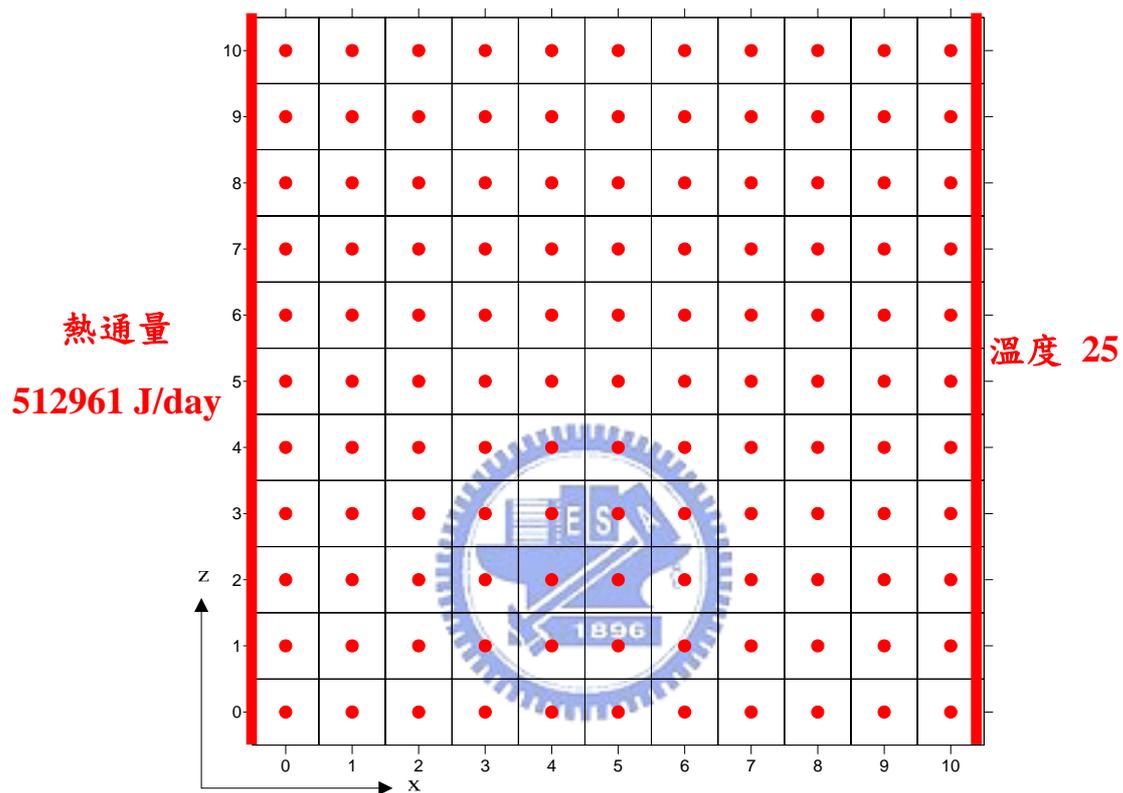


圖 5.1-3 案例 5.1-2 格網與模式配置圖

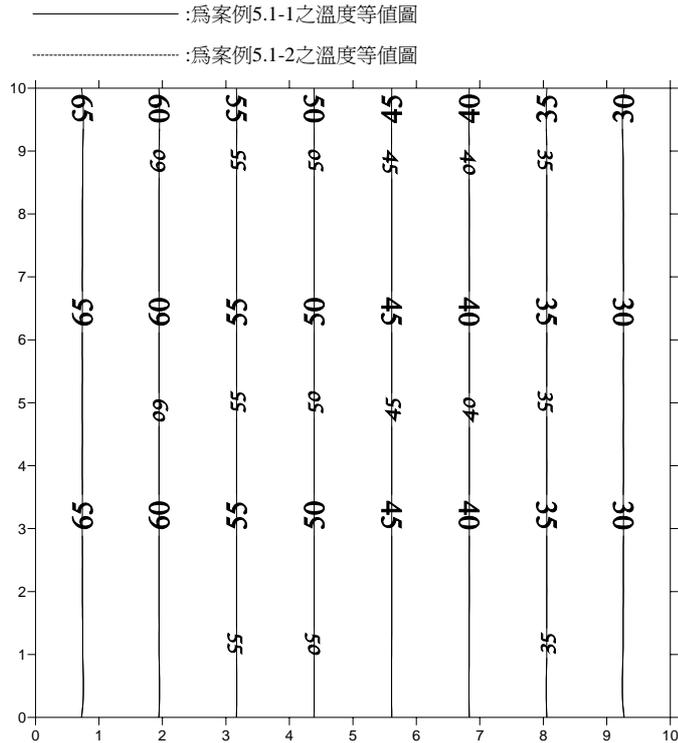


圖 5.1-4 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-2)

3. 案例 5.1-3

案例說明：

本案例探討主題為非均質與非均質含水層差異之探討，因此除了材質以外的方面均與案例 5.1-1 一致，例如網格切割、邊界條件等，材質方面則區分為兩個區塊，圖 5.1-5 為本案例之格網與材質配置圖，其中材質 1 與案例 5.1-1 之性質相同，孔隙率為 0.38、密度為 $2323(kg/m^3)$ 、熱傳導係數為 $172800(J K/day \cdot m)$ 、比熱為 $710(kg/m^3)$ ；材質 2 大部分的性質均與材質 1 相同，其熱傳導係數為 $691200(J K/day \cdot m)$ ，約為材質 1 之熱傳導係數之 4 倍，在水流熱傳導係數部分，其數值為 $48038(J K/day \cdot m)$ 。

數值結果：

圖 5.1-6 為案例 5.1-1 與案例 5.1-3 之溫度模擬等值圖，圖 5.1-7

為兩者之總熱容量模擬等值圖。由於右邊區塊之熱傳導係數左邊區塊之 4 倍大，因此左邊需要透過更高之溫度梯度方可維持相同的熱通量。因此左方溫度變化較右方溫度變化緩和。若觀察圖 5.1-7，由於兩區塊材質比熱相等，因此總熱容量分佈與溫度分佈呈正比，故分佈上趨勢相同。

在熱能守衡分析部份，左邊界之熱通量為 $8,619,116 (J/day)$ ，右邊界之熱通量為 $8,619,490 (J/day)$ ，兩者之相對誤差為 0.0043% ，符合熱能守恆之條件。

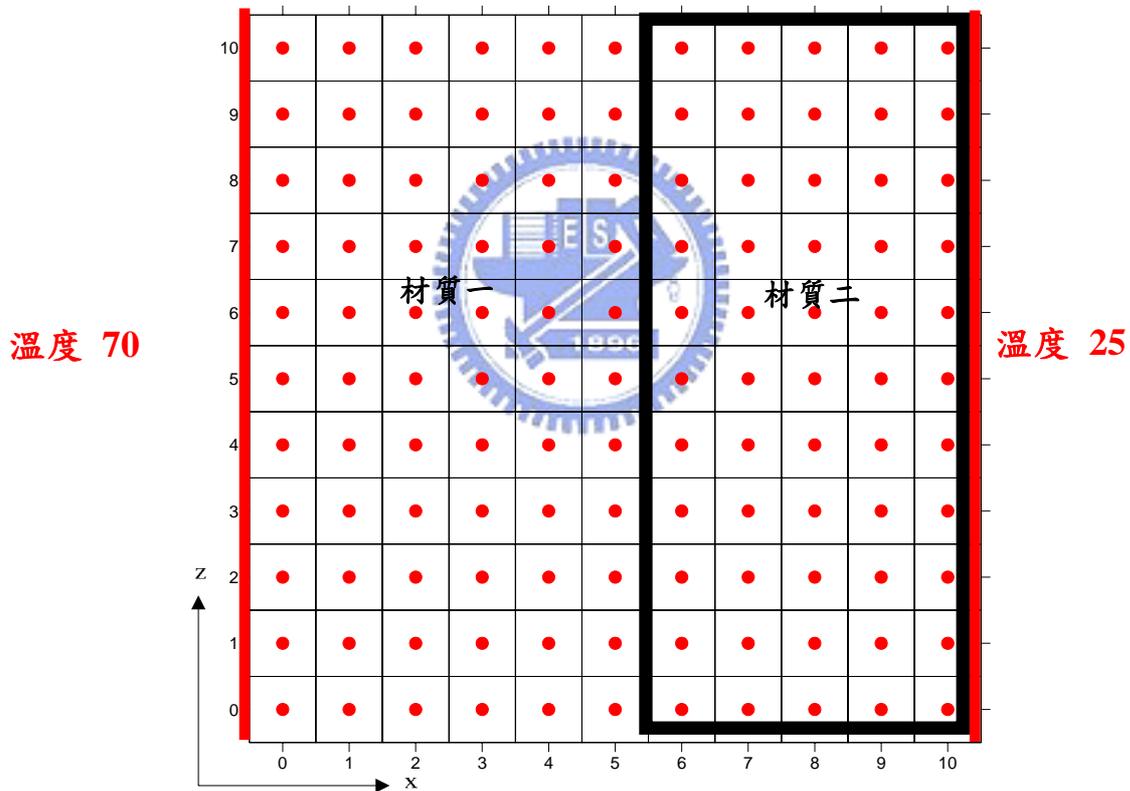


圖 5.1-5 案例 5.1-3 格網與材質配置圖

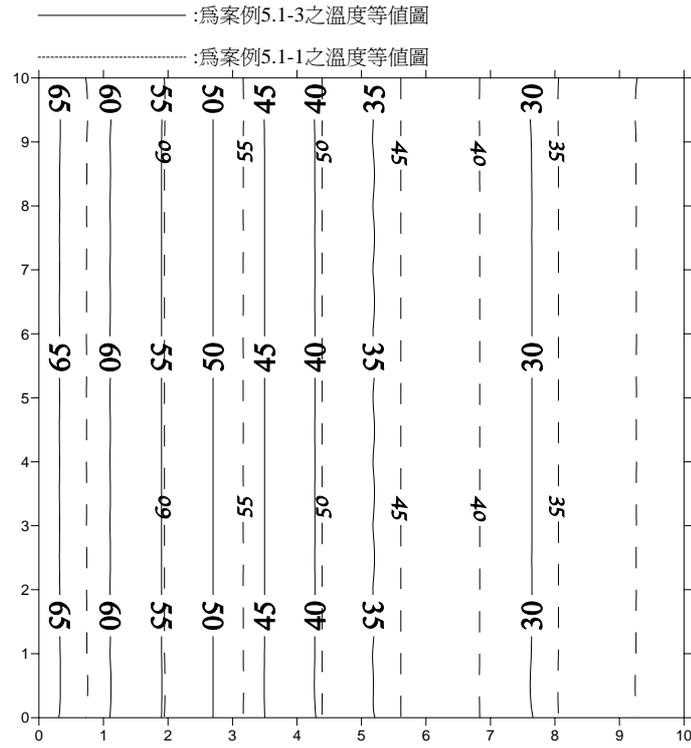


圖 5.1-6 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-3)

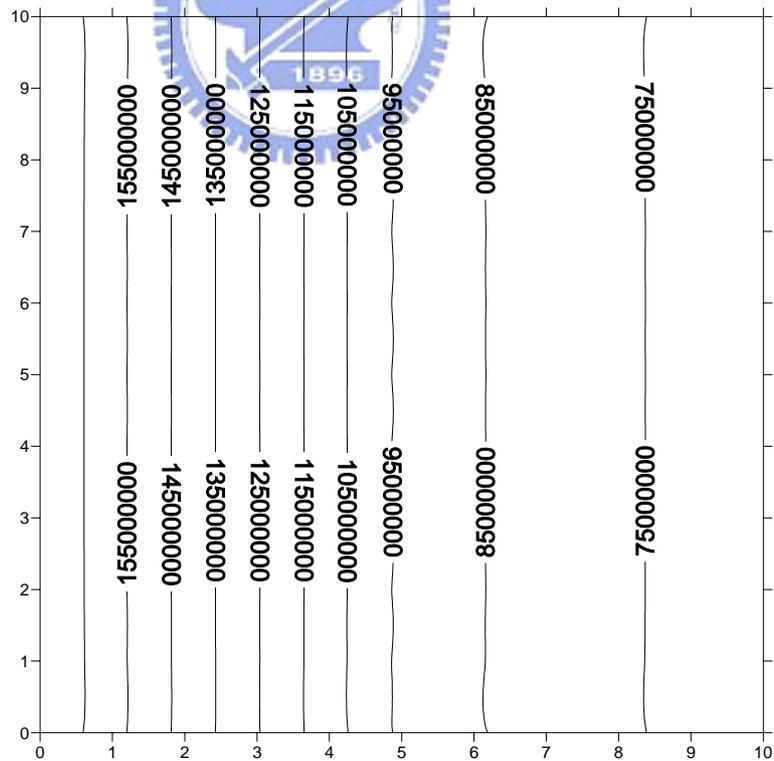


圖 5.1-7 總熱容量分佈等值圖(案例 5.1-3)

4. 案例 5.1-4

案例說明：

本案例探討主題亦為非均質與非均質含水層差異，上下兩部分區隔成不同材質，本案例之網格切割、邊界條件、初始條件等設定與案例 5.1-1 相同。在材質設定方面，其中材質 1 與案例 5.1-1 之性質相同，孔隙率為 0.38、密度為 $2323(\text{kg}/\text{m}^3)$ 、熱傳導係數為 $172,800(\text{J K}/\text{day}\cdot\text{m})$ 、比熱為 $710(\text{J}/\text{kg K})$ ；材質 2 大部分的性質均與材質 1 相同，其比熱為 $860(\text{J}/\text{kg K})$ ，約為材質 1 之比熱之 1.2 倍，在水流熱傳導係數部分，其數值為 $48038(\text{J K}/\text{day}\cdot\text{m})$ 。圖 5.1-8 為本案例之材質設定圖。

數值結果：

圖 5.1-9 為案例 5.1-4 之溫度模擬等值圖，由於溫度遞減與熱傳導係數有關，由於材質一與材質二之熱傳導係數相同，該數值又與案例 5.1-1 之熱傳導係數相同，因此兩案例之溫度坡降型式相等，從圖 5.1-9 所示，兩者之等值線重合。圖 5.1-10 為兩者之總熱容量，總熱容量為溫度、控制體積與對應之等效比熱之乘積，由於兩區塊之材質比熱不同，因此會有不同之數值，原則上其仍與溫度分佈呈現正比關係。

而在熱能量守衡部份，本案左邊界之流入總量為 $5,642,476(\text{J}/\text{day})$ ，右邊界之流出總量為 $5,642,677(\text{J}/\text{day})$ ，兩者之相對誤差為 0.003562266% ，符合熱能守恆之條件。

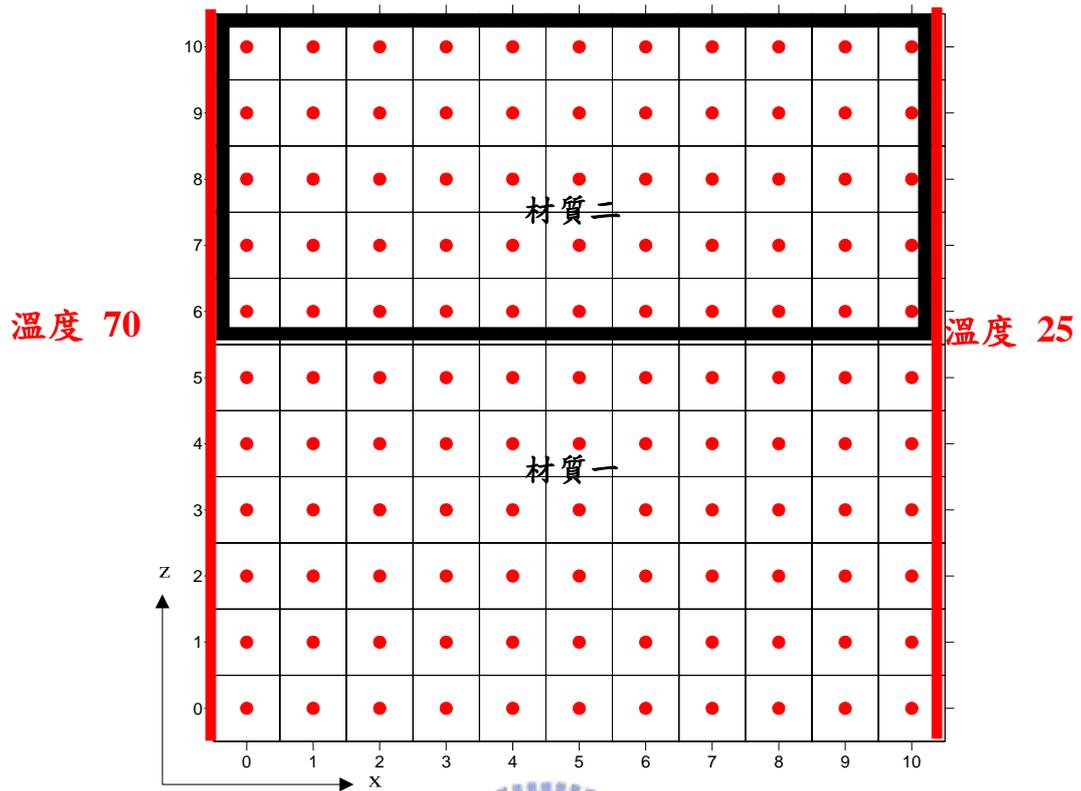


圖 5.1-8 案例 5.1-4 格網與模式配置圖

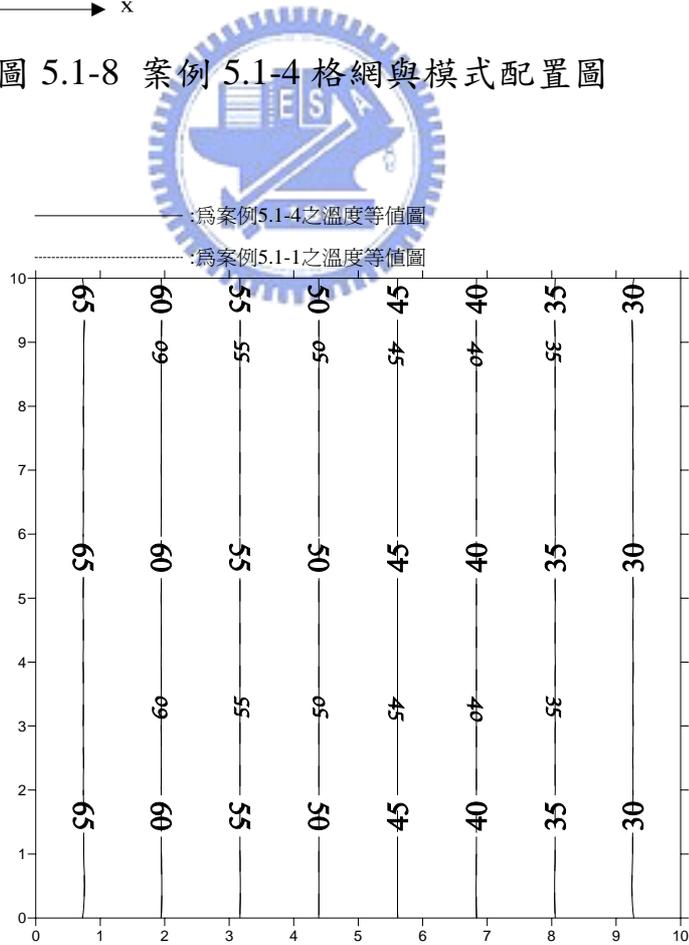


圖 5.1-9 溫度分佈等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-4)

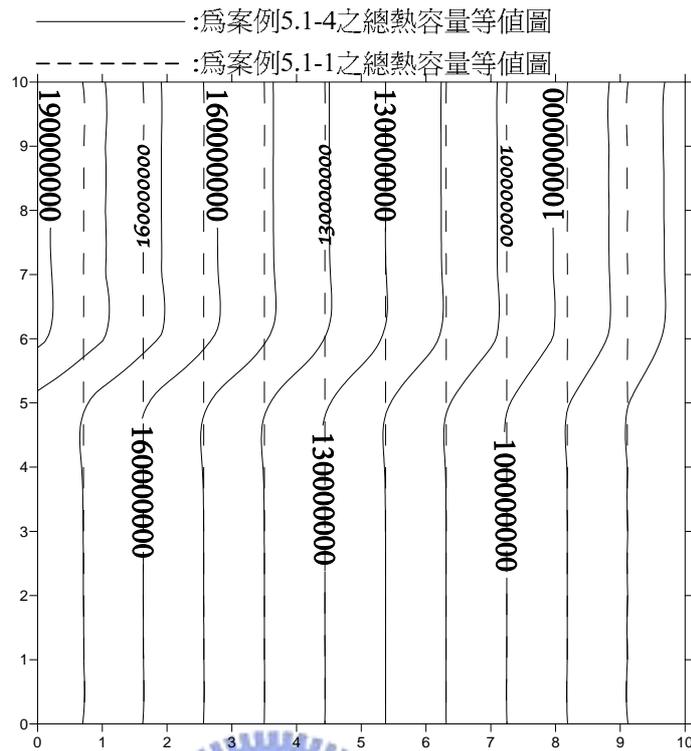


圖 5.1-10 熱容量分布等值圖(案例 5.1-1 與案例 5.1-4)



5. 案例 5.1-5

案例說明：

本案例探討熱量匯流項對於熱流模擬之影響。整體模擬區域如圖 5.1-11 所示，模擬範圍、模擬網格、材質設定等與案例 5.1-1 一致。在邊界條件設定上，左右邊界設定為 $70(^{\circ}\text{C})$ ，上下邊界則設定為無熱通量邊界(No Heat Flux Boundary)，顯示本身並無背景熱流流動。於點位(5, 5)處配置匯流點，並以 $5,000,000(\text{J}/\text{day})$ 之熱通量進行熱量抽取。因此本案例本身並無背景熱流流動，然因受到匯流項之影響，溫度分佈將以匯流點為中心，以同心圓型式往內降溫。本案例為穩態模擬，全體網格之初始猜值雖可任意設定，但過於懸殊之設定值易影響模擬收斂性與效率，因此設定為 $70(^{\circ}\text{C})$ ，較為鄰近模擬結果。透過模

式求解，各網格數值必逐步依據邊界條件之設定值，而收斂於前述之熱流型態。

數值結果：

圖 5.1-12 為溫度之模擬等值圖，從圖面看來的確如預期一般，形成一個橢圓形的溫降錐，其溫降錐頂的溫度改變量約為 $22.77(^{\circ}\text{C})$ 。

此外，本研究進一步作熱量平衡分析，由於系統中有個匯流點，且上下邊界設定為無流量邊界，因此在穩態系統中，必須透過上下邊界之來補充熱量，其補充量必須等於抽取之熱量。上下邊界之總熱通量為 $4,999,722 \text{ (J/day)}$ ，與匯流點之熱通量相比，其計算誤差約為 0.00556% ，因此符合熱量平衡條件。

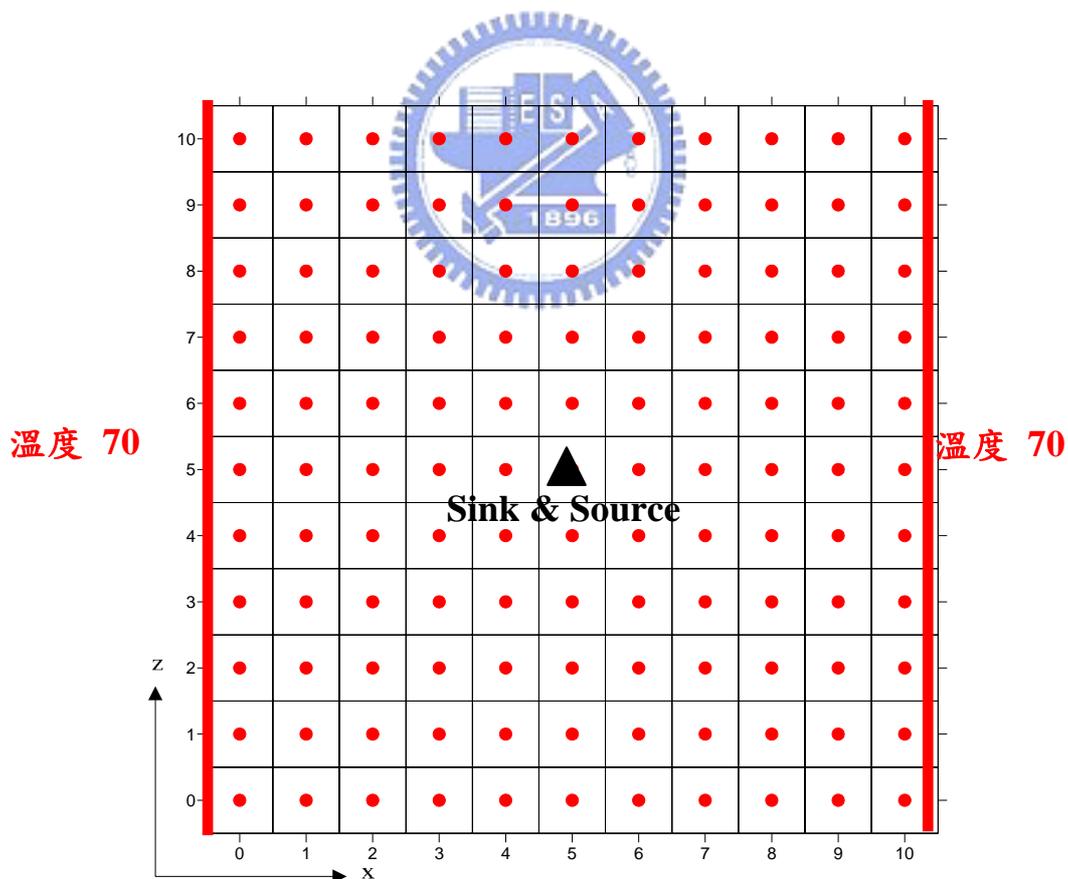


圖 5.1-11 案例 5.1-5 格網與模式配置圖

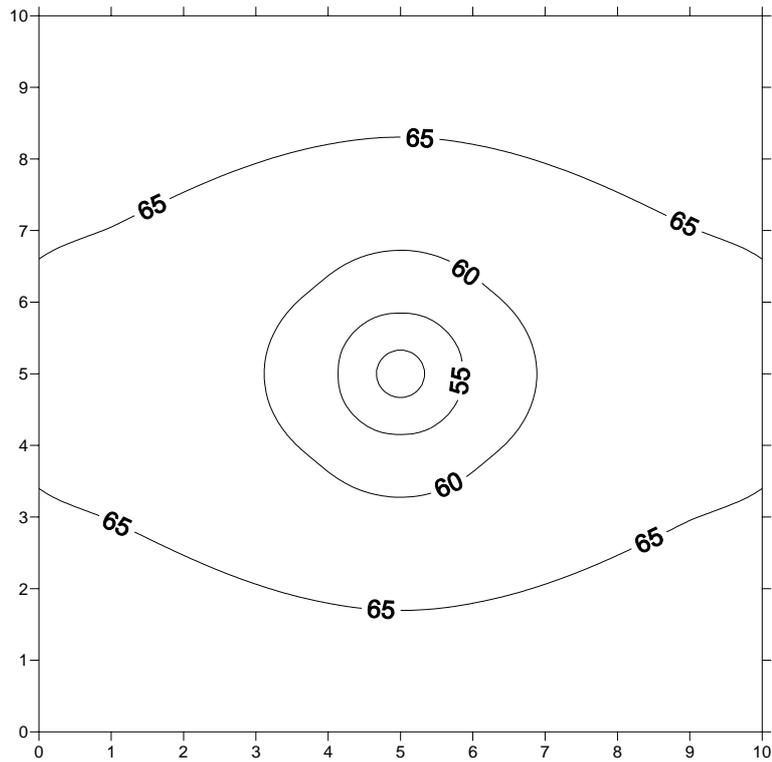


圖 5.1-12 溫度分佈等值圖



6. 案例 5.1-6

案例說明：

本案例修改自案例 5.1-5，為局部加密案例，因此材質區塊、邊界條件、初始條件等之設定均一致，唯一差異處在於網格切割型式不同，圖 5.1-13 為本案例之網格配置圖。

數值結果：

圖 5.1-14 為溫度之模擬等值圖，從圖面看來的確如預期一般，形成一個橢圓形的溫降錐，其溫降錐頂的溫度改變量為 $30.62(^{\circ}\text{C})$ 。與案例 5.1-5 比較，此案例在匯流點附近之溫度改變量較大，如圖 5.1-16 所示，兩案例之椎頂溫度值差異約 $5(^{\circ}\text{C})$ 。

一般而言，在數值變化較為劇烈之處，若可以較細之模擬網格計算模擬，將會有較正確之模擬結果。然較細之模擬網格意味著需要

更多的計算節點方可佈滿整個模擬區域，因此其計算量亦隨之提高。
故透過局部加密可以在可接受的計算增加量下，提升計算精度。

以下為本案例之熱量平衡分析，上下邊界之總熱通量為
4,999,843(J/day)，與匯流點之熱通量相比，其計算誤差為 0.00314%，
因此符合熱量平衡條件。

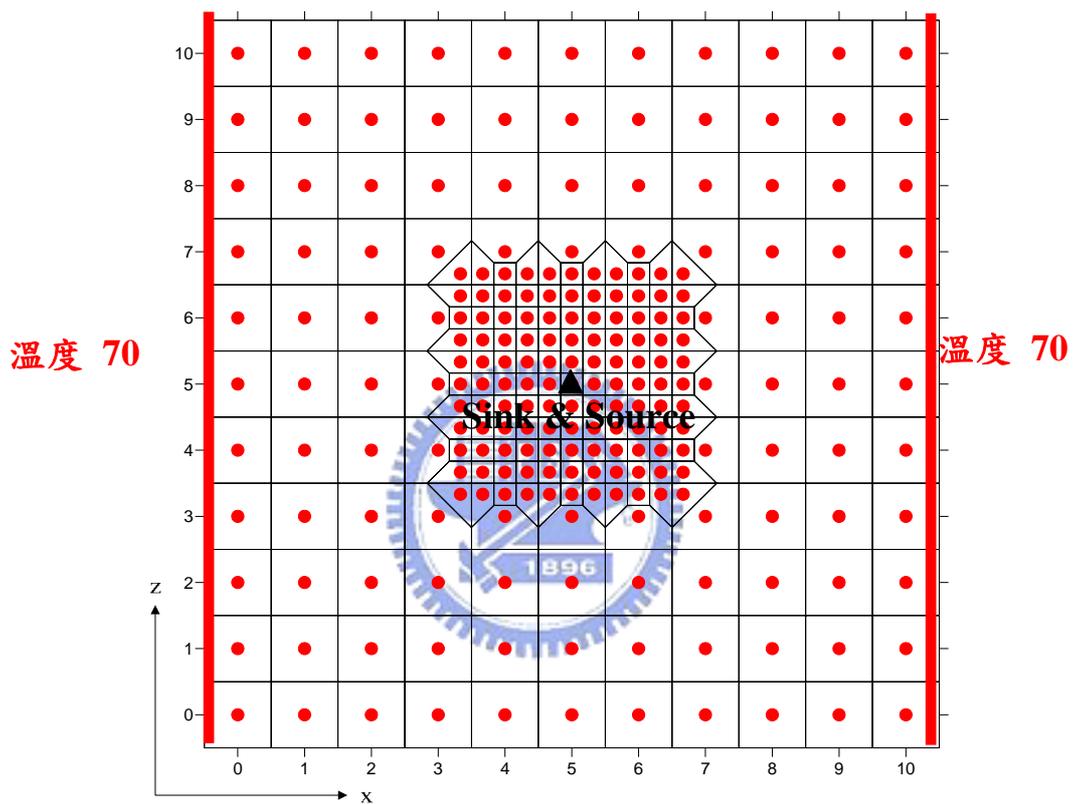


圖 5.1-13 案例 5.1-6 格網與模式配置圖

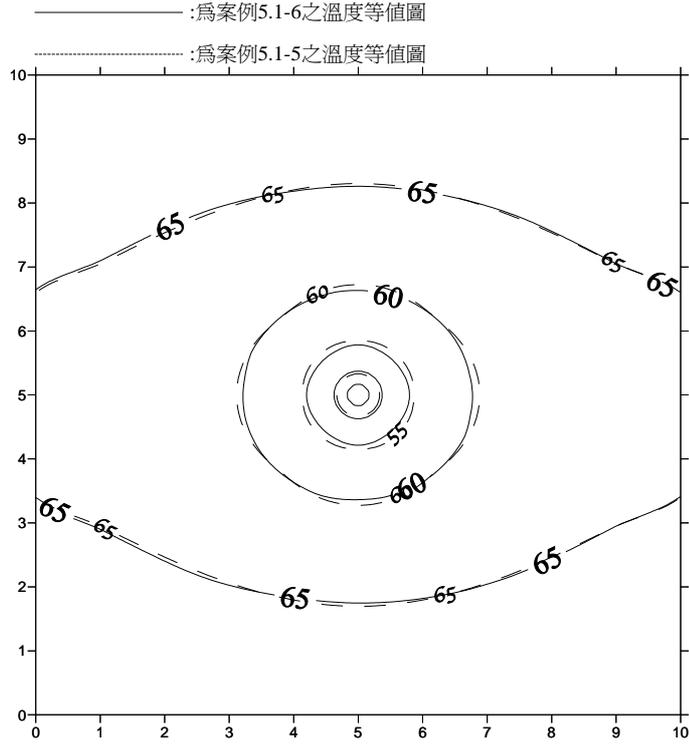


圖 5.1-14 溫度分佈等值圖(案例 5.1-5 與案例 5.1-6)

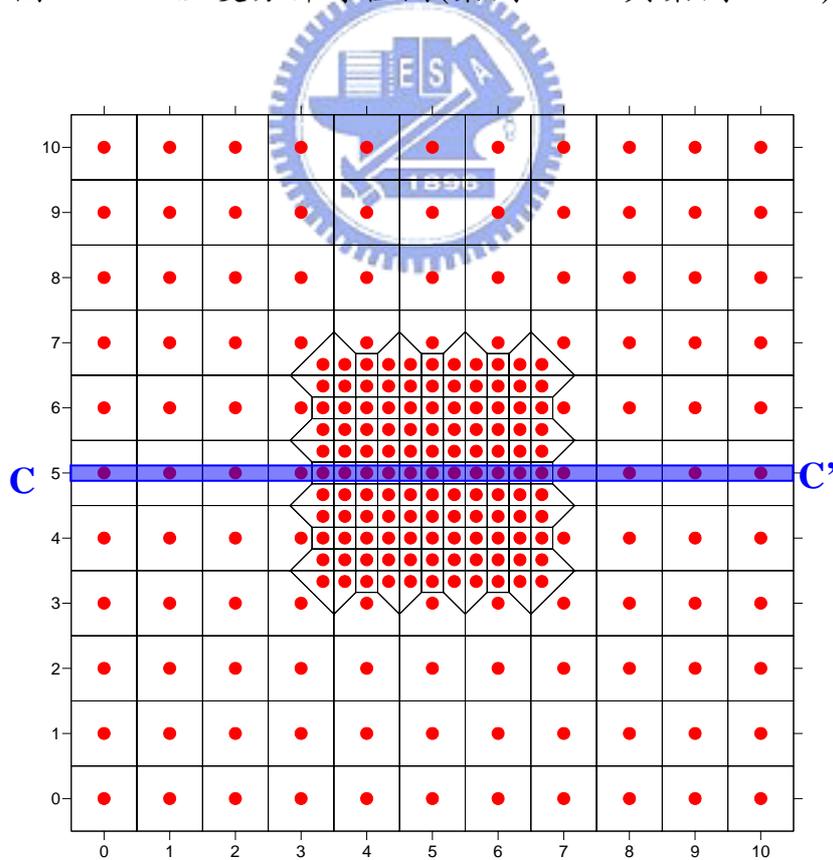


圖 5.1-15 $\overline{CC'}$ 示意圖

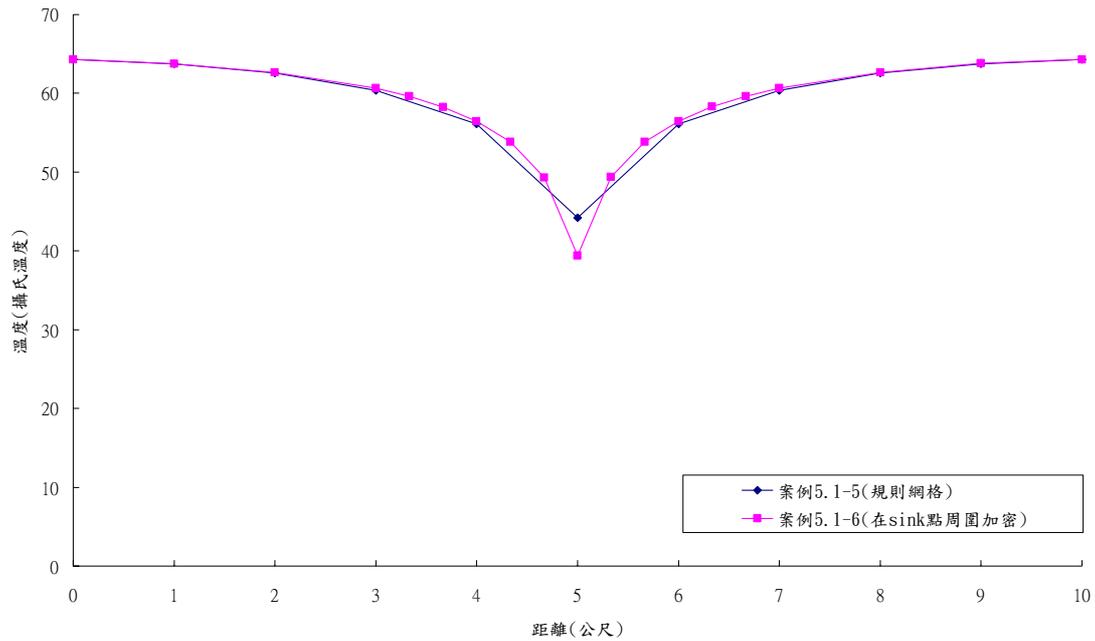


圖 5.1-16 $\overline{CC'}$ 剖面溫度分布圖(案例 5.1-5 與案例 5.1-6)

7. 案例 5.1-7

案例說明：

本案例修改自案例 5.1-6，為其暫態案例。在邊界條件的設定上，左右邊界之溫度設定為 70(°C)，上下邊界則設定為無流量邊界(No Heat Flux Boundary)。在初始條件上，所有位置之初始溫度為 70(°C)。於點位(5, 5)處配置抽取熱量井，並以 5,000,000(J/day)之熱量抽取量進行抽取。另外，模擬間距為 1 天，總模擬時刻數為 1500 個時刻。

數值結果：

由於此案例為案例 5.1-6 之暫態模擬，因此長期模擬後應趨於穩態，由圖 5.1-17 可知，在趨於穩態時其模擬結果與案例 5.1-6 幾乎完全一致，故此暫態模式通過驗證。

圖 5.1-18 為匯流點隨時刻之溫度變化圖，從圖面顯示，溫度隨時間逐漸遞減，直到 50 天後則趨近於穩定。

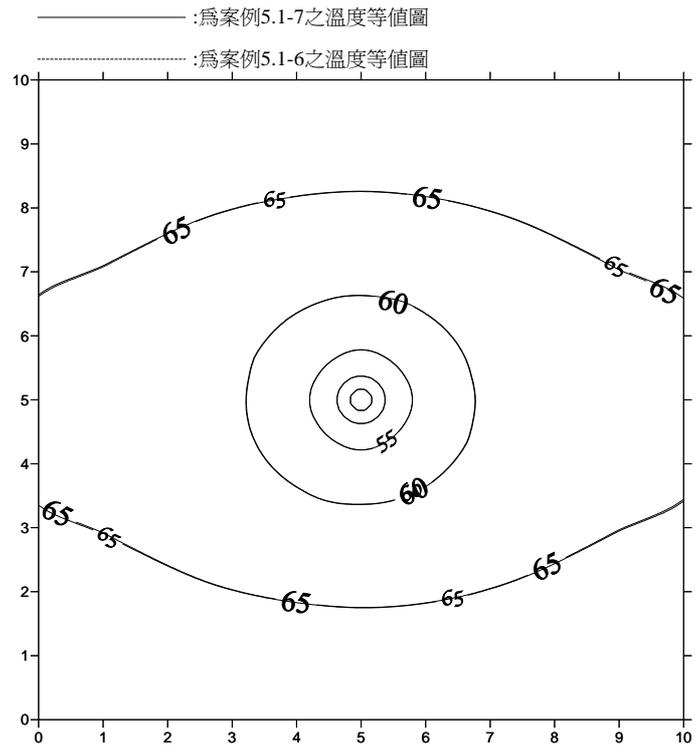


圖 5.1-17 溫度分佈等值圖(案例 5.1-6 與案例 5.1-7 之終端溫度)

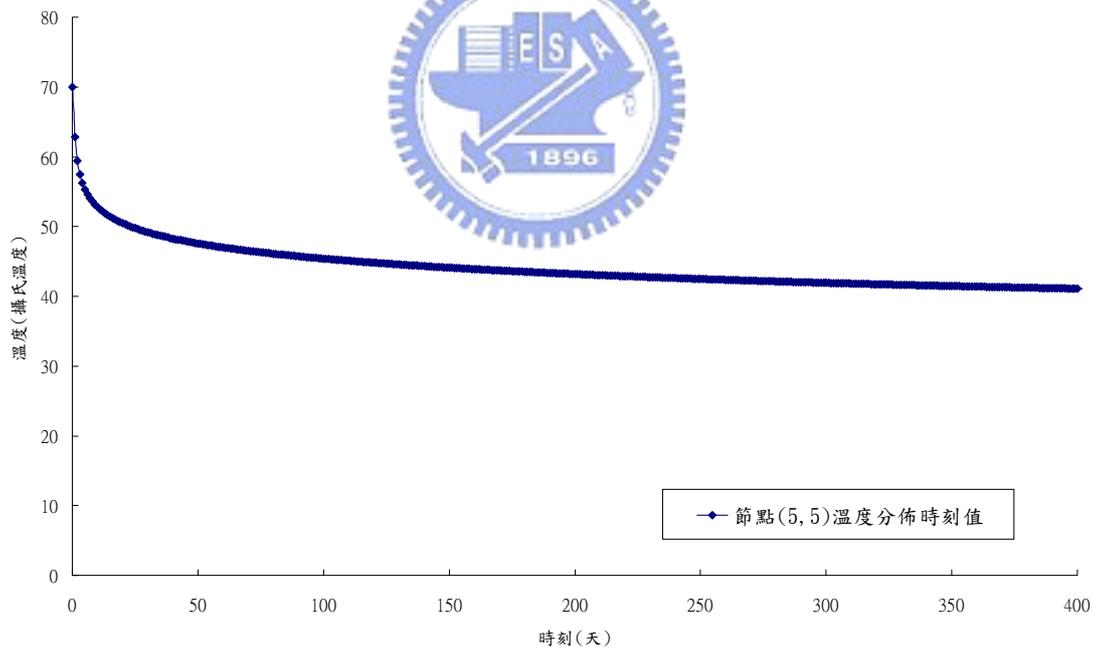


圖 5.1-18 匯流點隨時刻之溫度變化圖

5.2 水流與熱流耦合案例驗證與模擬

本節探討水流熱流耦合案例，以下將分為三個不同的案例進行數值驗證與討論。案例 5.2-1 透過 Dirichlet 邊界條件定義溫度與總水頭，透過邊界條件之設定使其有不同之熱流傳遞方向與水流流動方向；案例 5.2-2 藉由在底部逐步加溫，藉此探討當溫度逐漸提高後，水流流動狀況。

表 5.2-1 耦合水流熱流案例列表

案例 5.2-1	穩態	規則 網格	單一 材質	水流方向與熱流方向垂直
案例 5.2-2	暫態			在左下角邊界有熱源加入

1. 案例 5.2-1

案例說明：

本案例透過 Dirichlet 邊界條件定義溫度與總水頭，透過邊界條件之設定使其有不同之熱流傳遞方向與水流流動方向，案例配置圖如圖 5.2-1 所示。

邊界條件如圖 5.2-1 所示，從水流方面來說，左側邊界設定為總水頭等於 120(m)，右方邊界設定為總水頭等於 80(m)，上下兩方則設定為無流量邊界條件；從熱流方面來說，上方邊界設定為溫度等於 20(°C)，下方邊界設定為溫度等於 70(°C)，左右兩方則設定為無熱通量邊界條件。網格切割方面，沿用案例 5.1-1 設定，為規則網格。材質方面，整體區塊設定為相同材質，其中土壤孔隙率為 0.38，土壤熱傳導係數為 $207,360(J\ K/day \cdot m)$ ，水流熱傳導係數為 $48,038(J\ K/day \cdot m)$ ，土壤密度為 $2323(kg/m^3)$ ，土壤比熱為

$710(\frac{J}{kg K})$ 。另外，水力傳導係數則分別設定為 0.001、0.005 與 0.01(m/day)時，進一步探討水流流動對於溫度變化之影響。本案例為穩態模擬。

數值結果：

本案例在水流方面藉由相同的邊界條件但是不同的水力傳導係數，而有不同的水流流速，因此對於熱流模式而言，其對流項亦因此不同。由於水流之上下邊界設定為無流量邊界，且左右邊界設定為定水頭邊界條件，因此水流會由左往右流動。本案例之水力傳導係數分別為 0.001(m/day)、0.005(m/day)及 0.01(m/day)，若藉由達西公式計算流速，分別為 0.0036(m/day)、0.0182(m/day)與 0.0364(m/day)，隨水力傳導係數增加而逐步增大。由於水流流速為對流項之成因，因此對流項形成熱能流動之水平向分量。

在熱流方面由於上下邊界設定為不同溫度之定溫度邊界條件，左右邊界反而是無熱通量邊界條件，因此熱流之擴散項是有下往上傳遞，因此擴散項形成熱能流動之垂直向分量。

圖 5.2-2 為若不考慮對流項或水流流速為 0 時之溫度分佈等值圖，其等值線由下往上等距離分佈。圖 5.2-3 至 5.2-5 則分別為不同水力傳導係數下之溫度分佈等值圖，因此在不同的水平向分量與垂直向分量之比值下，溫度分佈會有不同之傾斜程度，當對流項越大時，則越傾斜。

由於在熱流模式中，左右兩方之邊界條件均設定為無熱通量邊界條件，但水流又不斷地由左往右流動，因此對流項則不斷地將熱能由左往右帶動，但因為無熱通量邊界條件的關係，左方邊界並無熱能向內補充，右方邊界又無法向外排出，因此形成左方邊界溫度大幅降

低，右方邊界則有累積的情形。

右方熱能累積情況則隨對流項之提高而提升，在 $0.005(m/day)$ 及 $0.01(m/day)$ 案例中，部分區域甚至高於 $70(^{\circ}C)$ ，比下邊界之邊界條件還高。

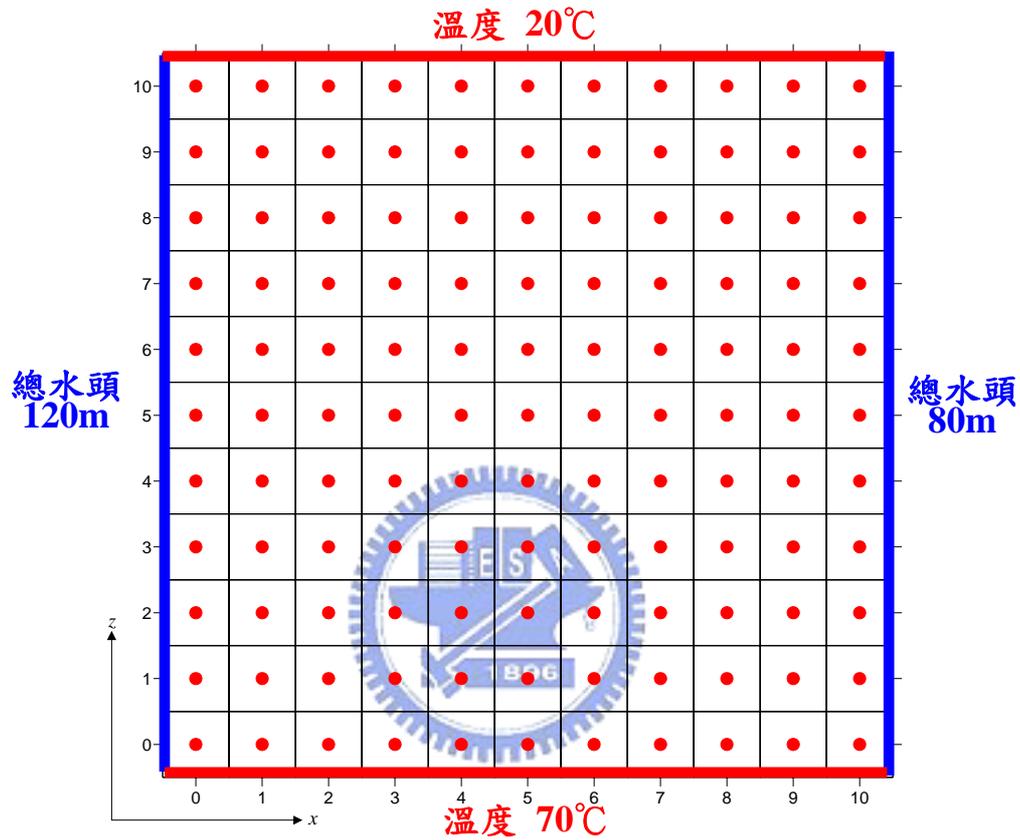


圖 5.2-1 案例 5.2-1 格網與模式配置圖

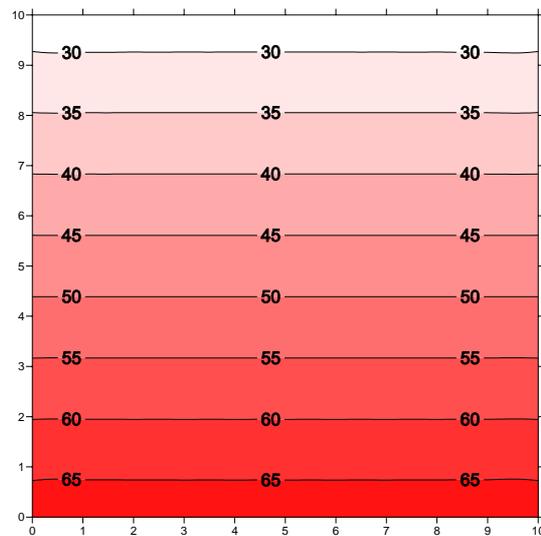


圖 5.2-2 無水流流動情況下之溫度分布等值圖

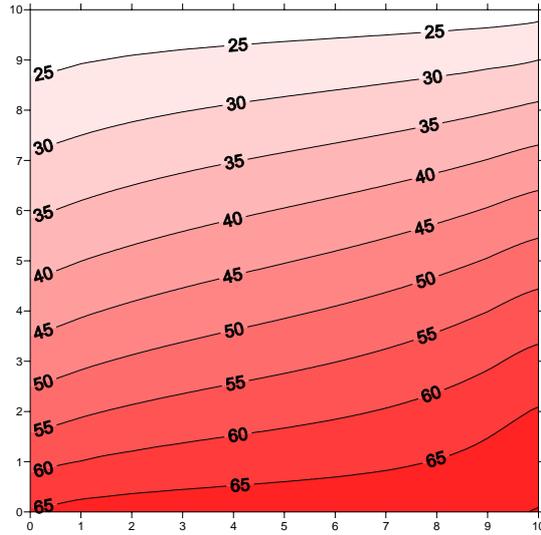


圖 5.2-3 水力傳導係數 $0.001(m/day)$ 溫度分布等值圖

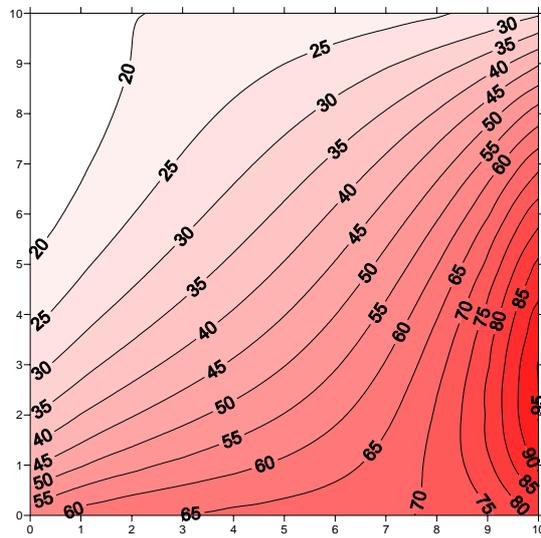


圖 5.2-4 水力傳導係數 $0.005(m/day)$ 溫度分布等值圖

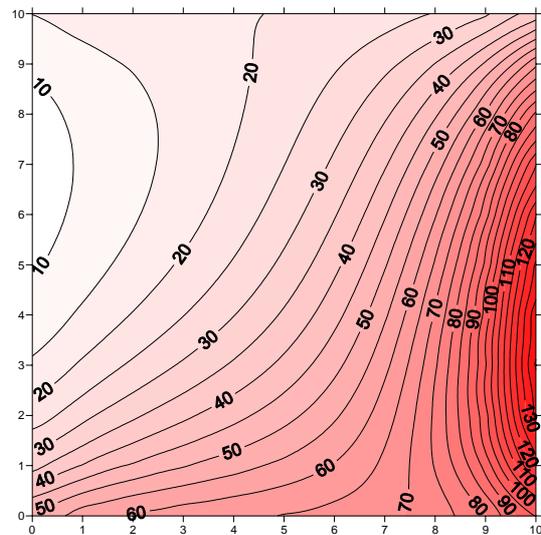


圖 5.2-5 水力傳導係數 $0.01(m/day)$ 溫度分布等值圖

案例 5.2-2

案例說明：

本案例藉由在底部逐步加溫，藉此探討當溫度逐漸提高後，水流流動狀況，圖 5.2-6 為案例配置圖。其網格切割沿用案例 5.1-1 之網格切割，在在材質方面，本案例為均值案例，其中土壤孔隙率設定為 0.38，土壤熱傳導係數為 $207,360(J\ K/day \cdot m)$ ，水流熱傳導係數為 $48,038(J\ K/day \cdot m)$ ，土壤密度為 $2323(kg/m^3)$ ，土壤比熱為 $710(J/kg\ K)$ ，水力傳導係數設定為 $0.001(m/day)$ ，土壤壓密係數(α_s)設定為 0.001。

在地下水邊界條件設定上，上邊界總水頭設定為 30(m)，其餘邊界則設定為無流量邊界(No Flow Boundary)。地下水初始條件上，則設定所有節點總水頭亦為 30(m)。傳統上，前述之邊界條件與初始條件下之地下水流模擬，其模擬結果應為不流動。

在熱流邊界條件的設定上，由圖面顯示，右上方 1(m)寬之邊界設定為 $20(^{\circ}C)$ ，左下方 1(m)寬之邊界設定為前 10 天邊界溫度為 $20(^{\circ}C)$ ，自第 10 天後之邊界溫度為 $90(^{\circ}C)$ ，其餘邊界則設定為無熱通量邊界(No Heat Flux Boundary)。在熱流初始條件的設定上，則所有節點之初始溫度為 $20(^{\circ}C)$ 。本案例為暫態模擬。

數值結果：

圖 5.2-7 至 5.2-17 為案例各時刻之總水頭分佈等值圖，圖 5.2-7 為尚未加溫前之總水頭分佈圖，因此其總水頭分佈與初始條件相同。然從 10 日後逐漸開始加溫後，模式開始由左下往上略微流動，總水頭分佈亦由左下往上些微遞減，直至上方邊界設定之 30(m)為止。

圖 5.2-18 至 5.2-28 為案例各時刻之溫度分佈等值圖，由於前述

各時刻之總水頭變化差異並不大，因此形成之水力梯度與流速亦不大，因此本案例之對流項較傳導項為小。由圖面顯示，地下水溫度則由左下高溫邊界為中心，以同心圓型式往上逐步加溫，隨時間之增加加溫影響範圍亦隨之擴張。

圖 5.2-29 至 5.2-39 為案例各時刻之密度分佈等值圖，由於本模式之水流密度轉換公式為壓力與溫度之函數，因此當溫度提升時，其密度會隨之降低，意即相同質量之水體，其體積會隨之膨脹增加。由此可以得知，因為水體膨脹且左右與下方邊界均為無流量邊界條件，因此所膨脹的水體則從上方邊界流出，如此可以解釋總水頭之變化。

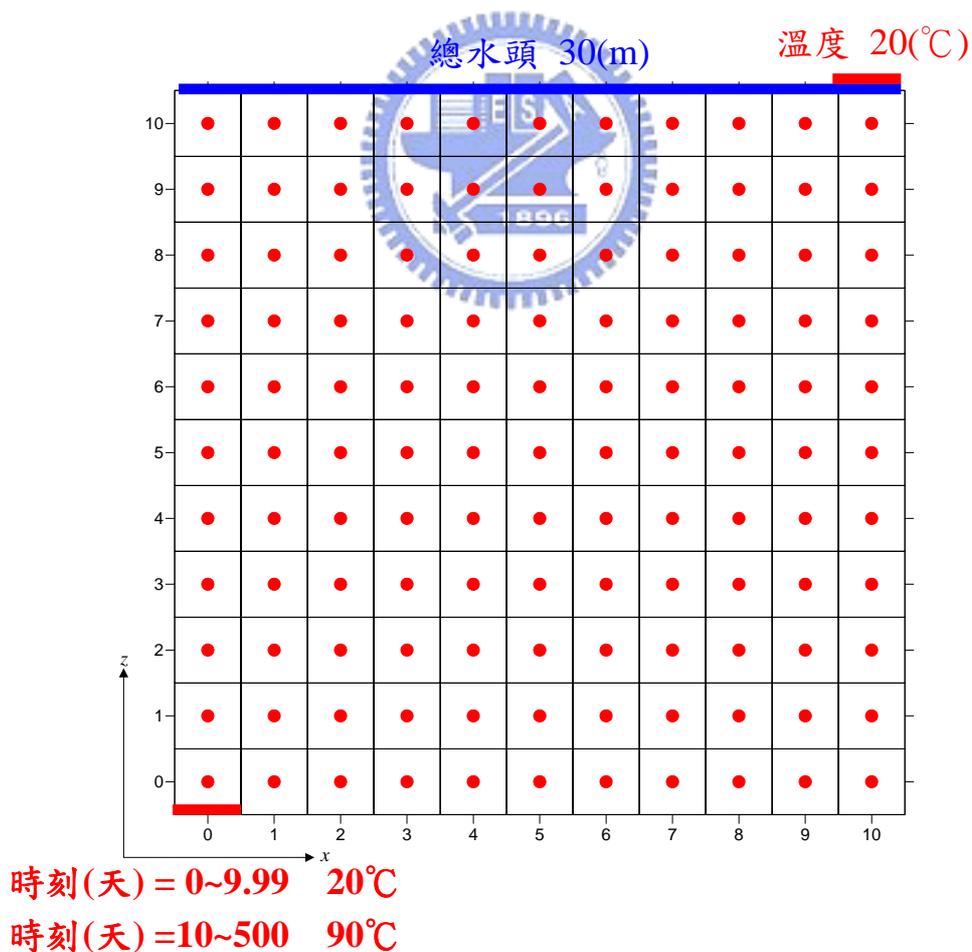


圖 5.2-6 案例 5.2-2 格網與模式配置圖

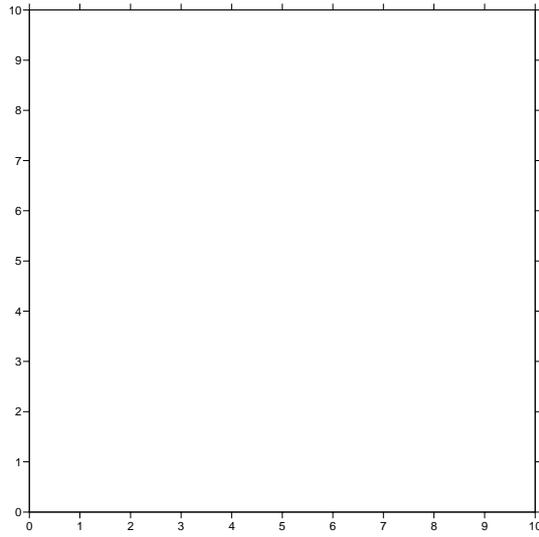


圖 5.2-7 時刻 5(天)總水頭等值圖

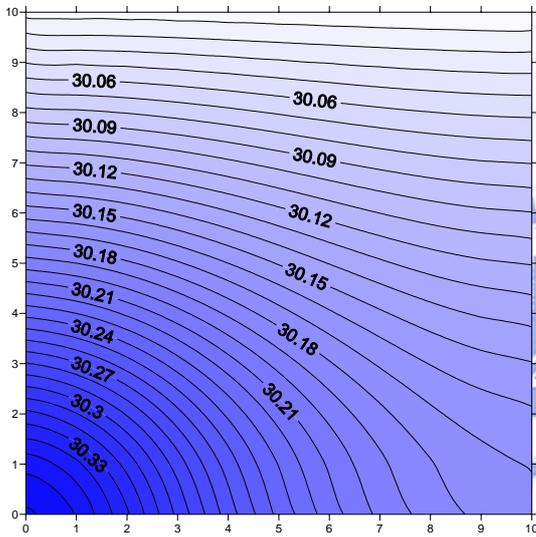


圖 5.2-8 時刻 50(天)總水頭等值圖

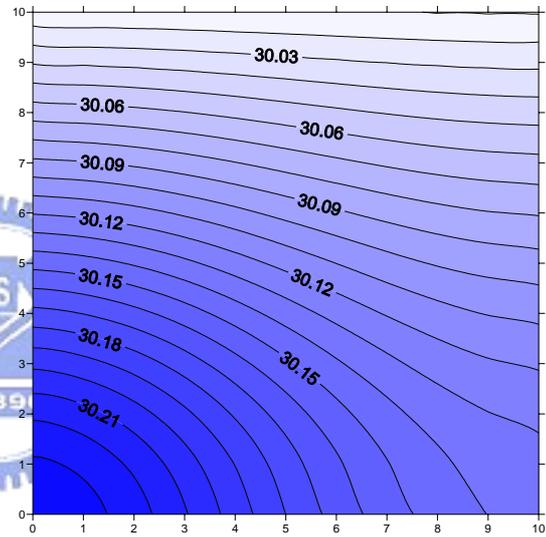


圖 5.2-9 時刻 100(天)總水頭等值圖

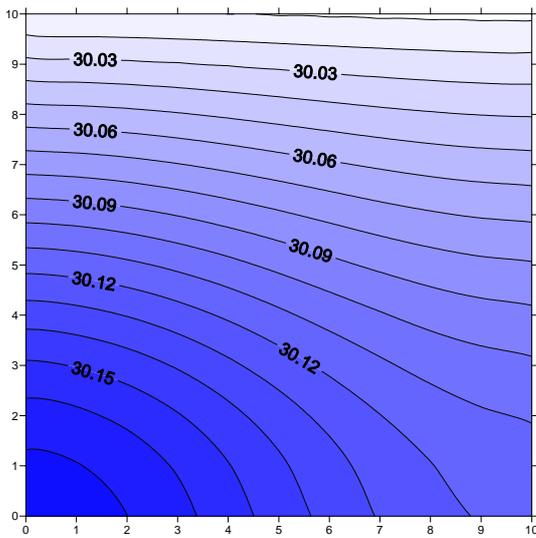


圖 5.2-10 時刻 150(天)總水頭等值圖

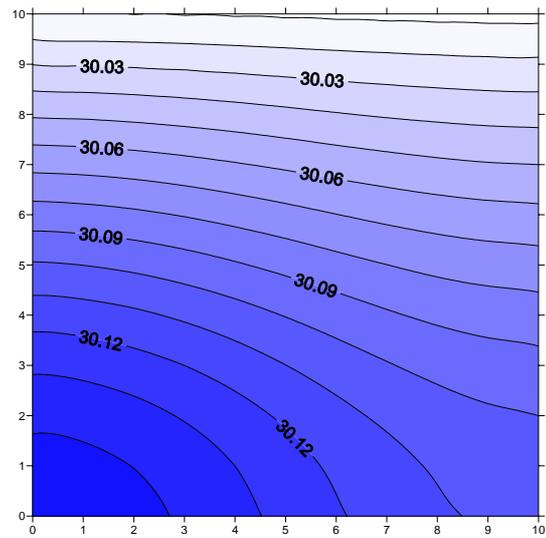


圖 5.2-11 時刻 200(天)總水頭等值圖

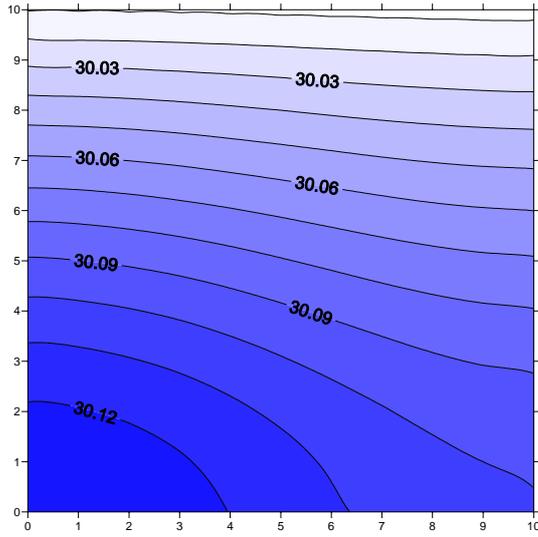


圖 5.2-12 時刻 250(天)總水頭等值圖

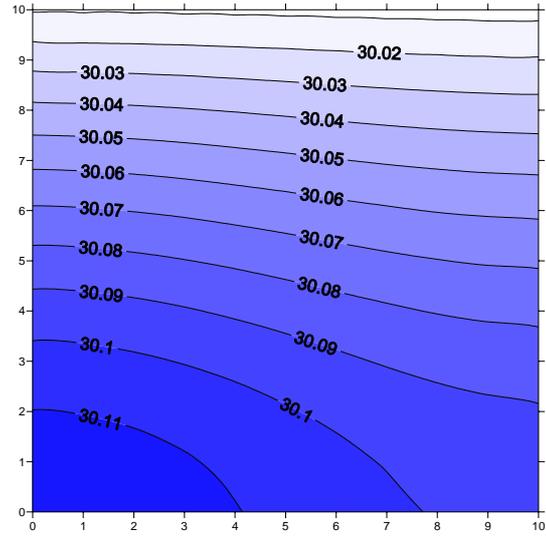


圖 5.2-13 時刻 300(天)總水頭等值圖

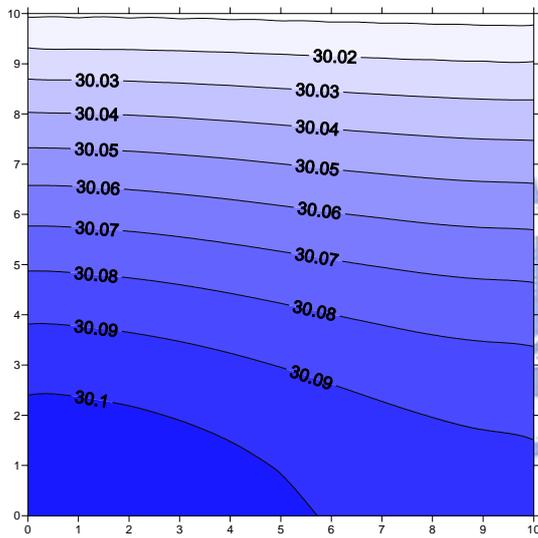


圖 5.2-14 時刻 350(天)總水頭等值圖

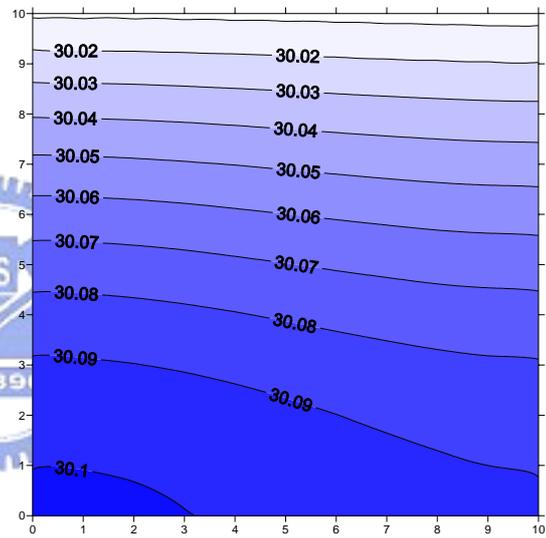


圖 5.2-15 時刻 400(天)總水頭等值圖

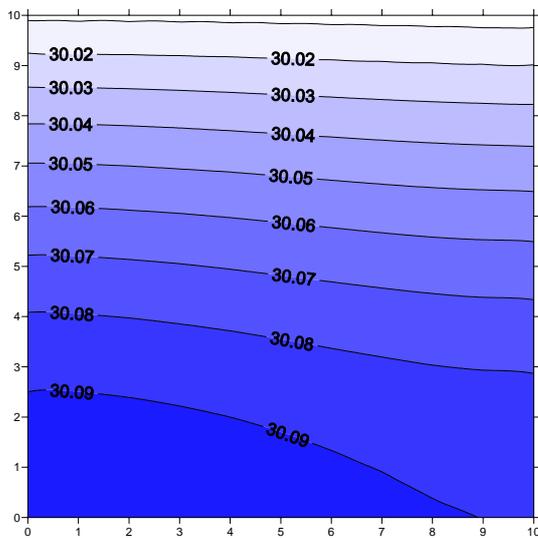


圖 5.2-16 時刻 450(天)總水頭等值圖

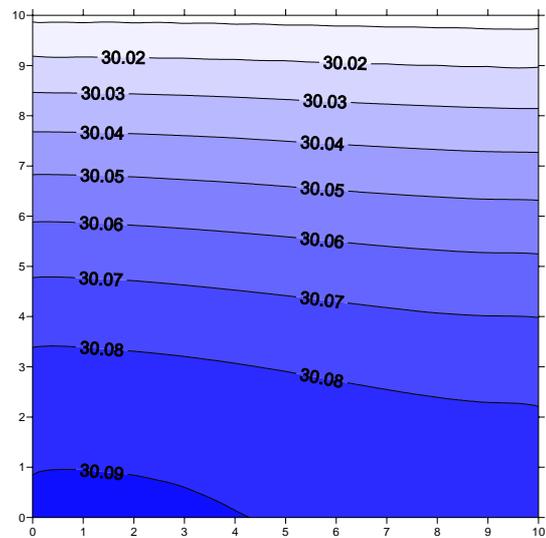


圖 5.2-17 時刻 500(天)總水頭等值圖

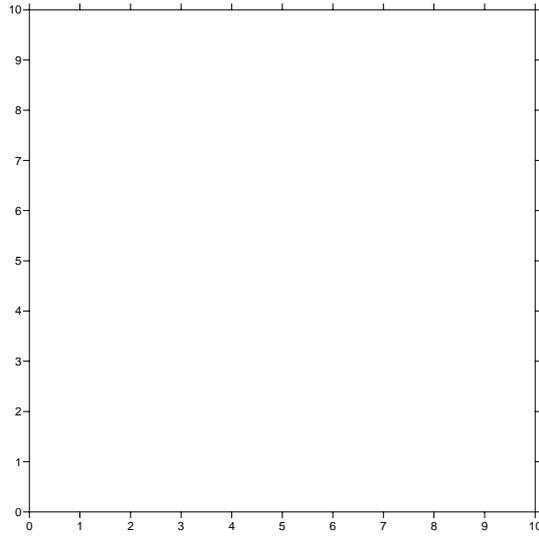


圖 5.2-18 時刻 5(天)溫度等值圖

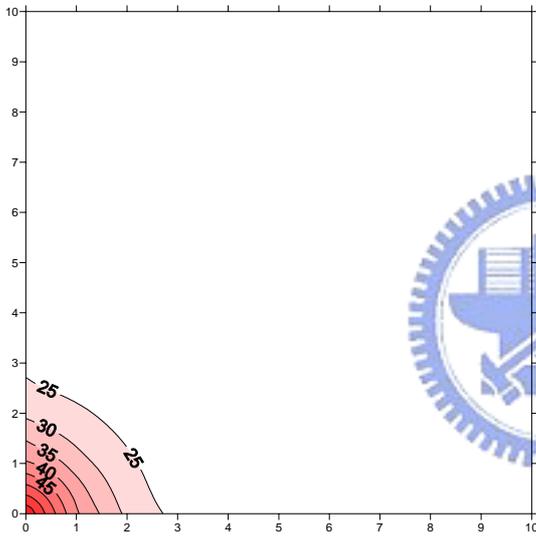


圖 5.2-19 時刻 50(天)溫度等值圖

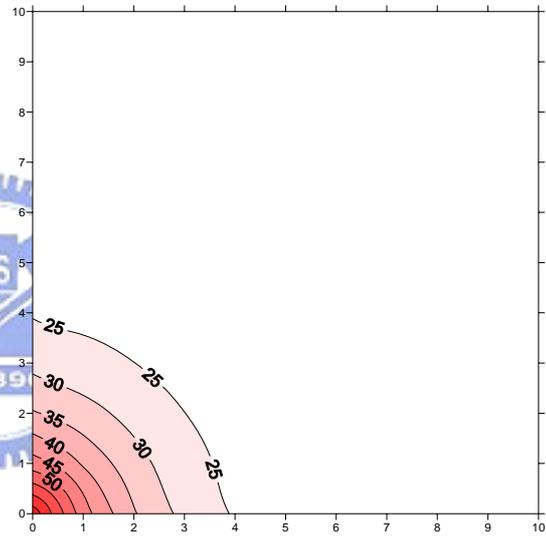


圖 5.2-20 時刻 100(天)溫度等值圖

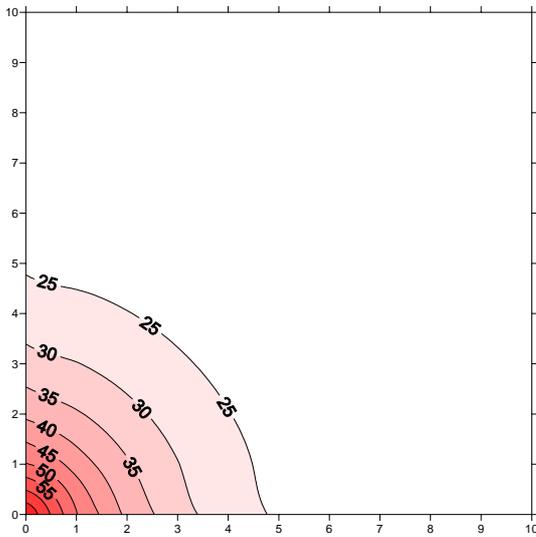


圖 5.2-21 時刻 150(天)溫度等值圖

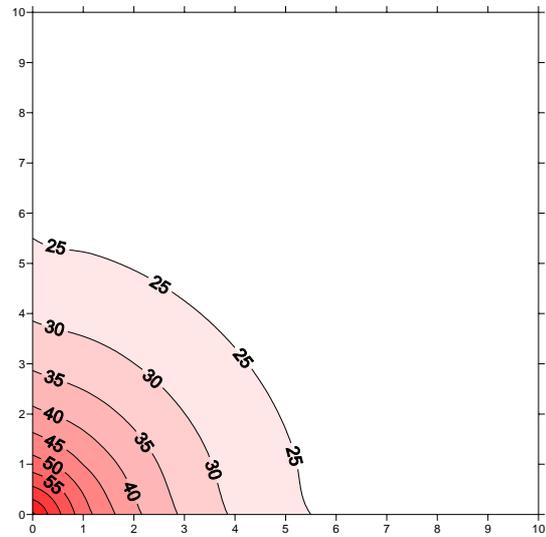


圖 5.2-22 時刻 200(天)溫度等值圖

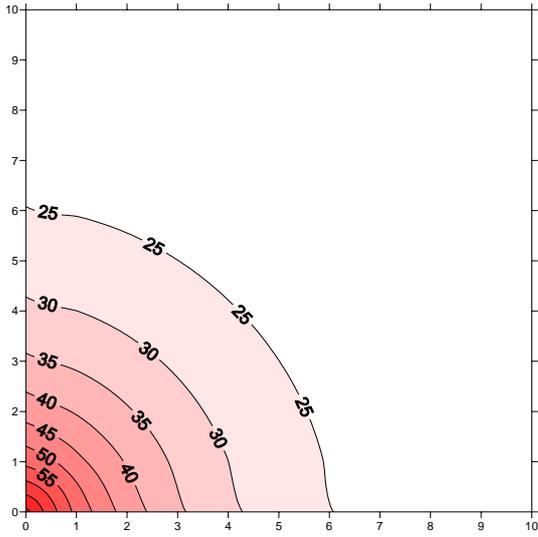


圖 5.2-23 時刻 250(天)溫度等值圖

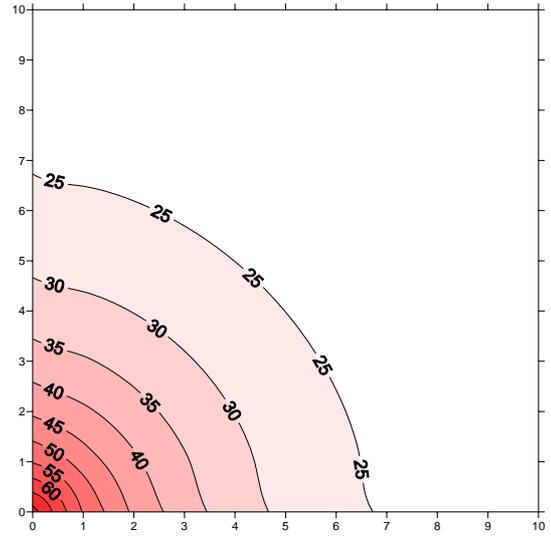


圖 5.2-24 時刻 300(天)溫度等值圖

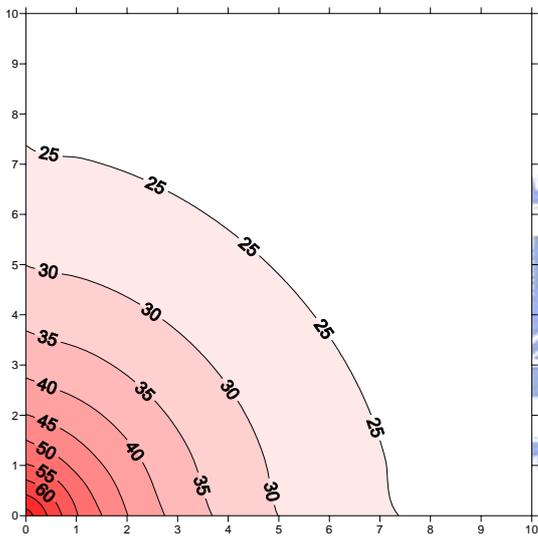


圖 5.2-25 時刻 350(天)溫度等值圖

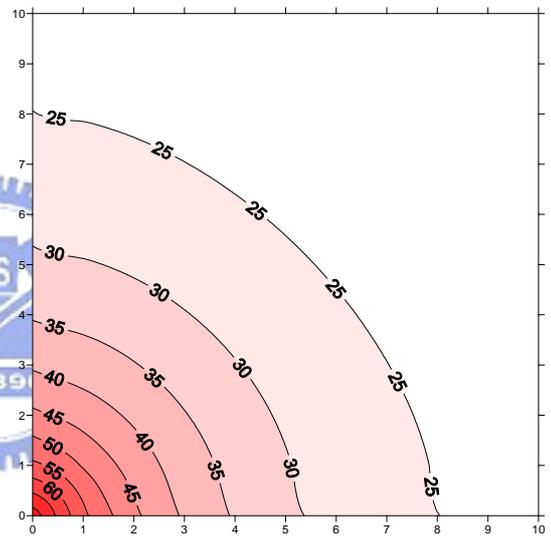


圖 5.2-26 時刻 400(天)溫度等值圖

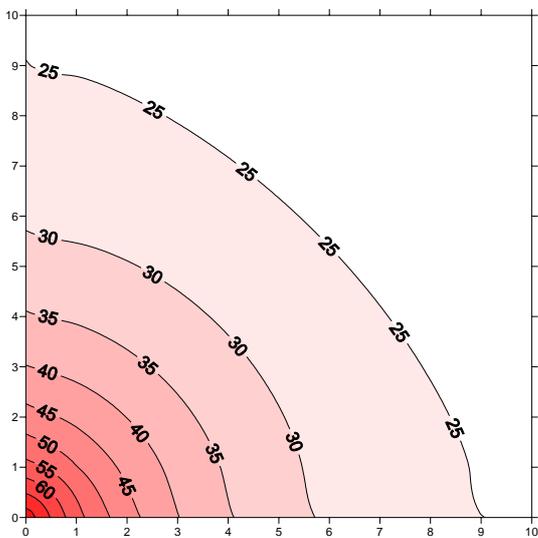


圖 5.2-27 時刻 450(天)溫度等值圖

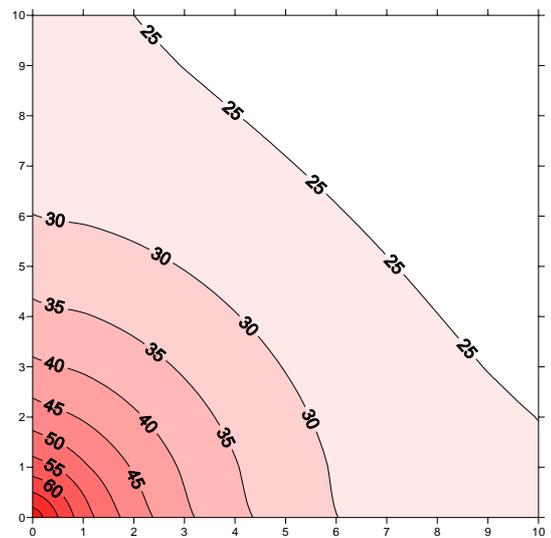


圖 5.2-28 時刻 500(天)溫度等值圖

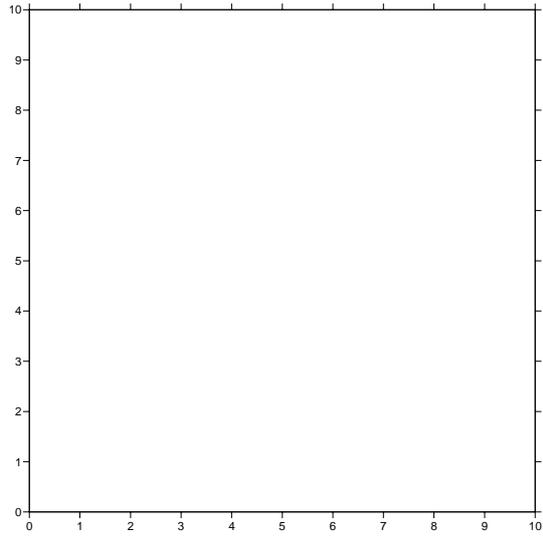


圖 5.2-29 時刻 5(天)流體密度等值圖

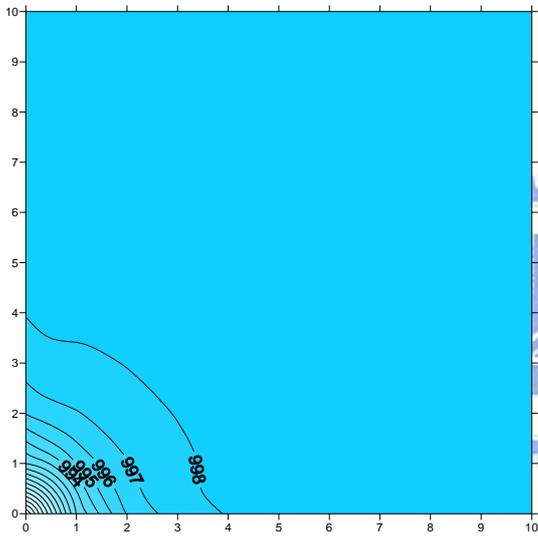


圖 5.2-30 時刻 50(天)流體密度等值圖

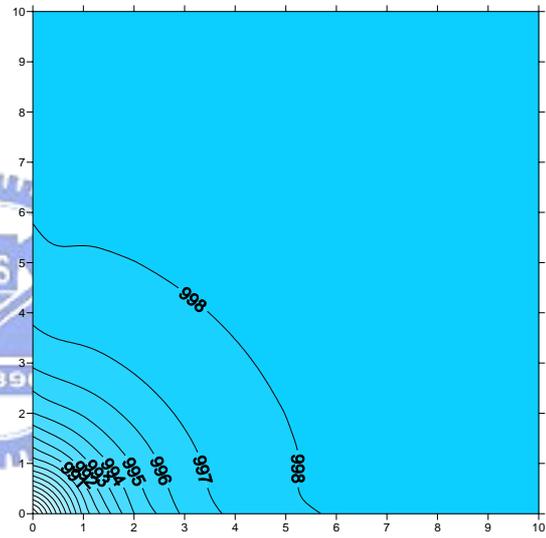


圖 5.2-31 時刻 100(天)流體密度等值圖

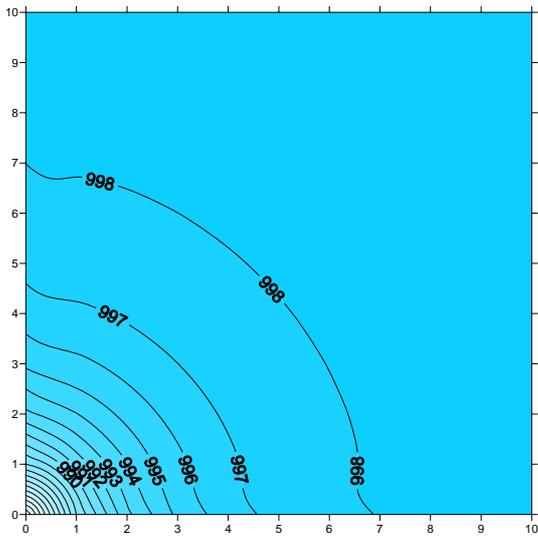


圖 5.2-32 時刻 150(天)流體密度等值圖

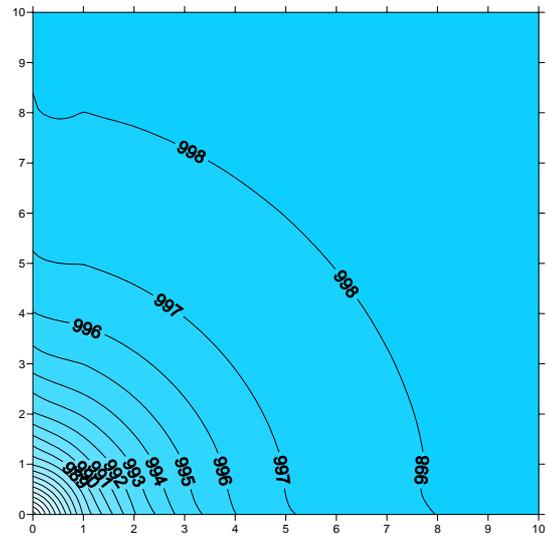


圖 5.2-33 時刻 200(天)流體密度等值圖

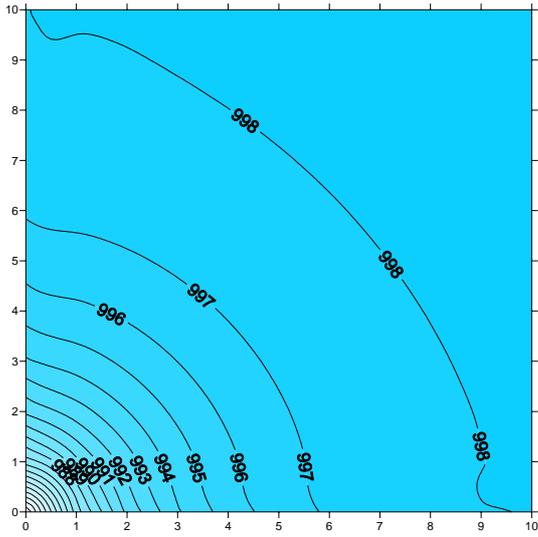


圖 5.2-34 時刻 250(天)流體密度等值圖

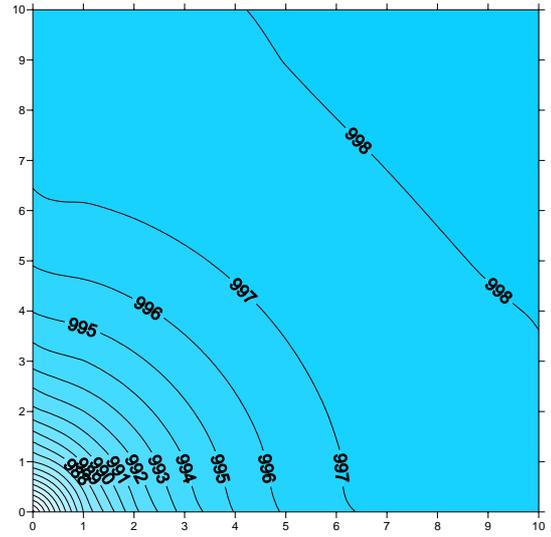


圖 5.2-35 時刻 300(天)流體密度等值圖

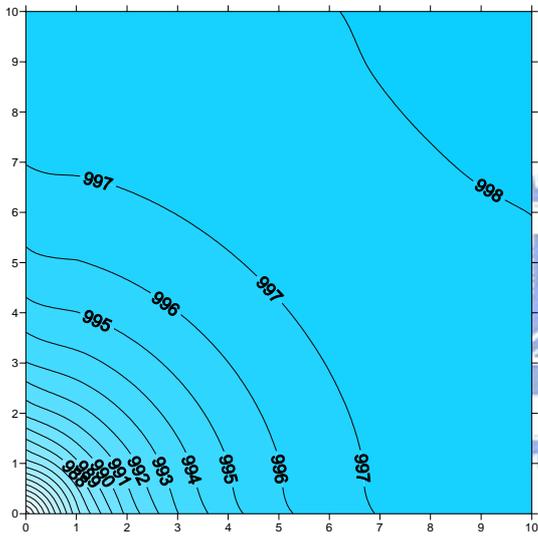


圖 5.2-36 時刻 350(天)流體密度等值圖

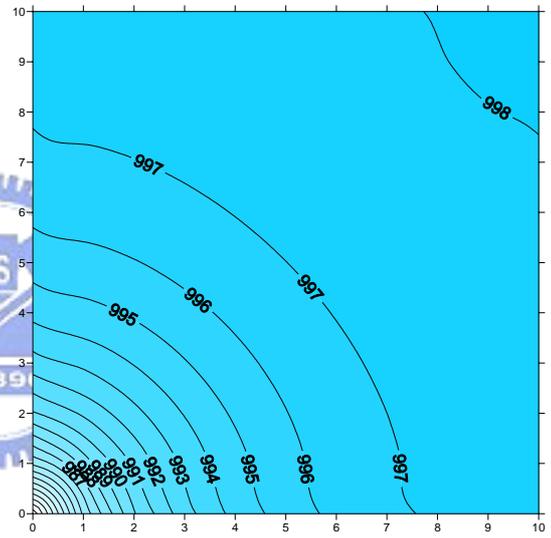


圖 5.2-37 時刻 400(天)流體密度等值圖

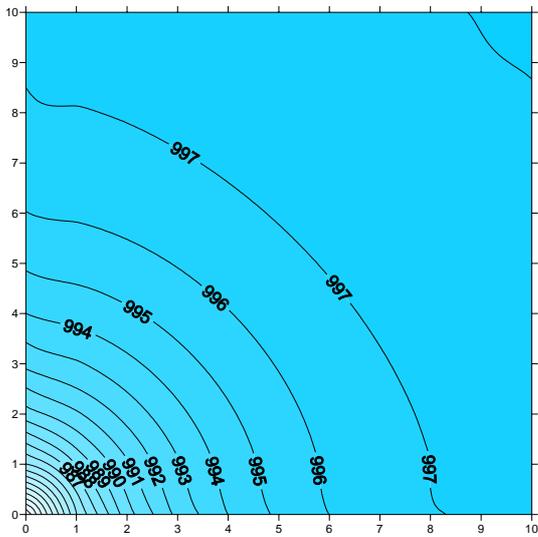


圖 5.2-38 時刻 450(天)流體密度等值圖

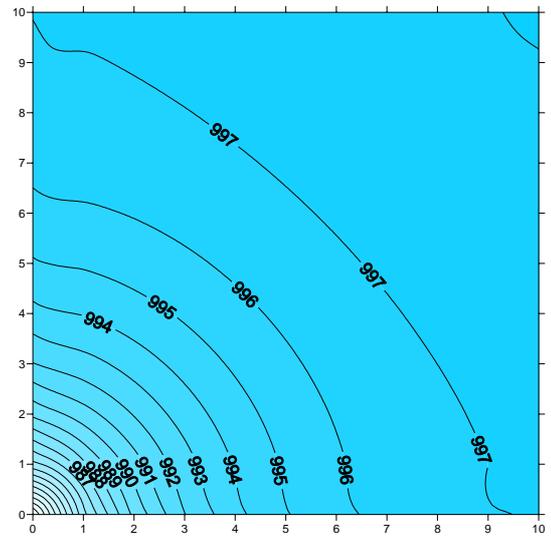


圖 5.2-39 時刻 500(天)流體密度等值圖

前述案例以水力傳導係數 $0.001(m/day)$ 與土壤熱傳導係數 $207360(J\ K/day \cdot m)$ 進行探討，本案例亦進一步探討不同參數對於模擬結果之影響。圖 5.2-41 為不同水力傳導係數對於節點(5, 5)之影響，其中分別比較水力傳導係數 0.005 、 0.001 與 $0.01(m/day)$ 。節點(5, 5)位於模擬區塊的正中央(如圖 5.2-40 所示)，因此受到邊界條件之影響最小，由圖面所示模擬結果僅在前 30 天有些微差異。

模擬差異不大之原因是因為本案例之水流流動極緩，因此造成對流項相較於傳導項影響極小，因此該參數對於節點(5, 5)之溫度變化敏感度極小。

圖 5.2-42 為不同土壤熱傳導係數對於節點(5, 5)之影響，其中分別比較土壤熱傳導係數 $129,600$ 、 $86,400$ 與 $216,000(J\ K/day \cdot m)$ 。從圖面顯示，節點(5, 5)於約 100 天後之溫度開始有所差異，且土壤熱傳導係數越大者，其溫度抬升亦越快。

由於節點(5, 5)距離左下方之加熱邊界有段距離，因此 100 天前溫度不變是因為熱能尚未傳導到節點(5, 5)。此外，傳導項為熱傳導係數與溫度梯度之乘積，因此在相同之溫度梯度下，熱傳導係數越大，所傳遞之熱能亦越多，是故所提升之溫度亦越高，因此模擬結果符合熱傳理論。

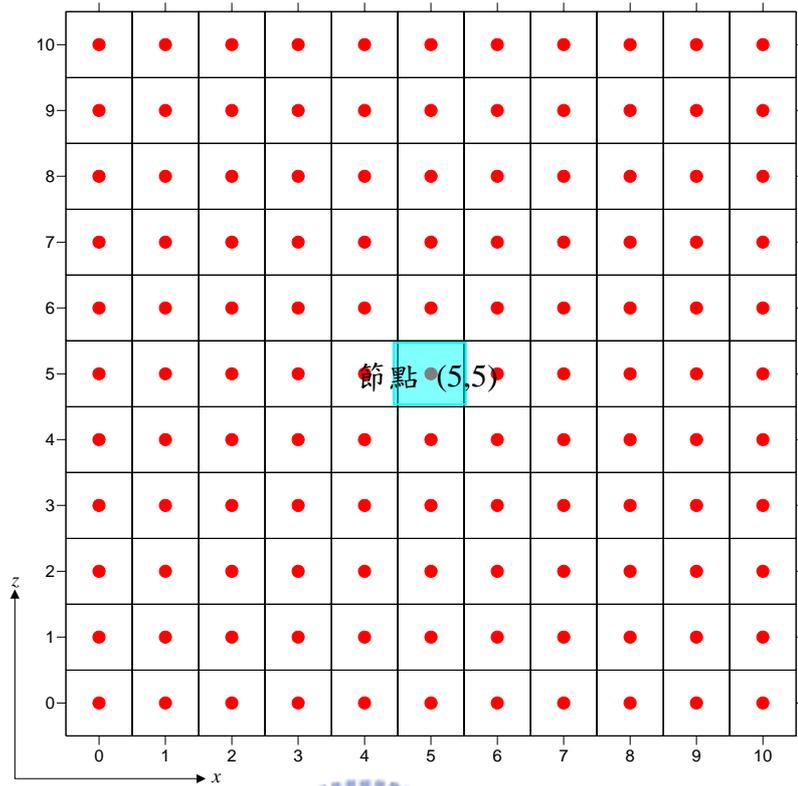


圖 5.2-40 節點(5,5)示意圖

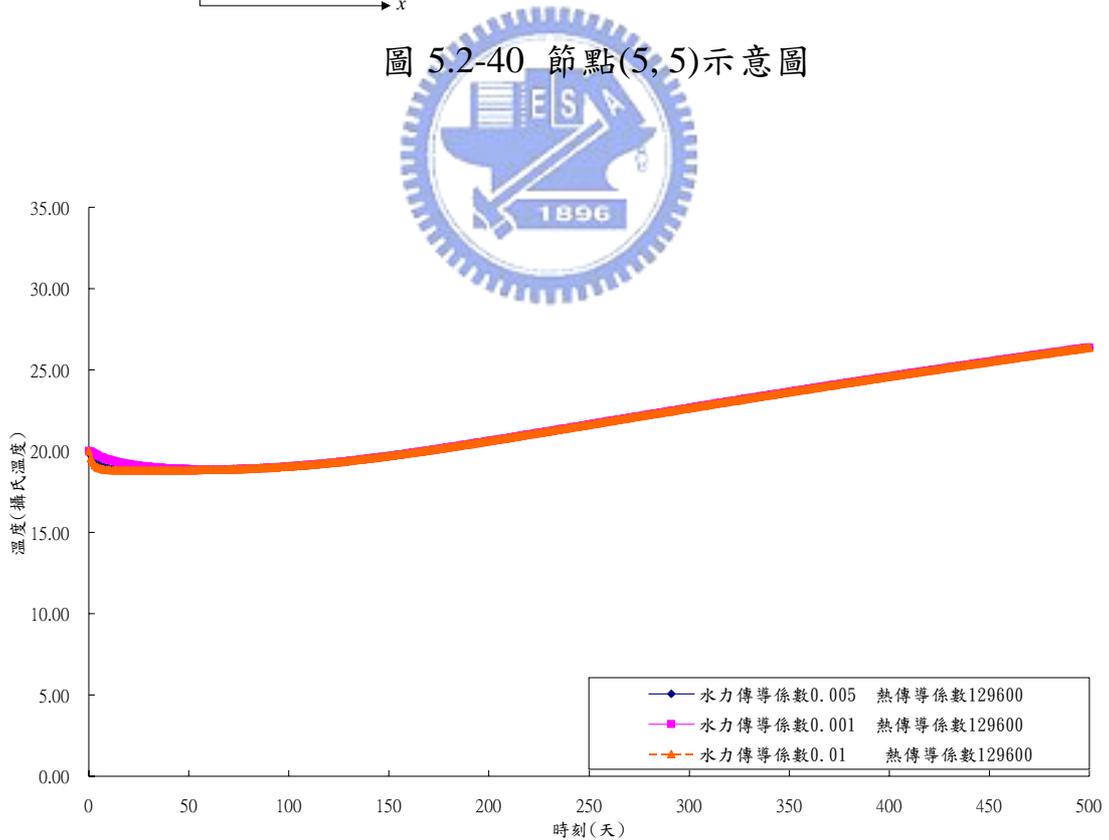


圖 5.2-41 節點(5,5)隨時間溫度變化圖(不同水力傳導係數)

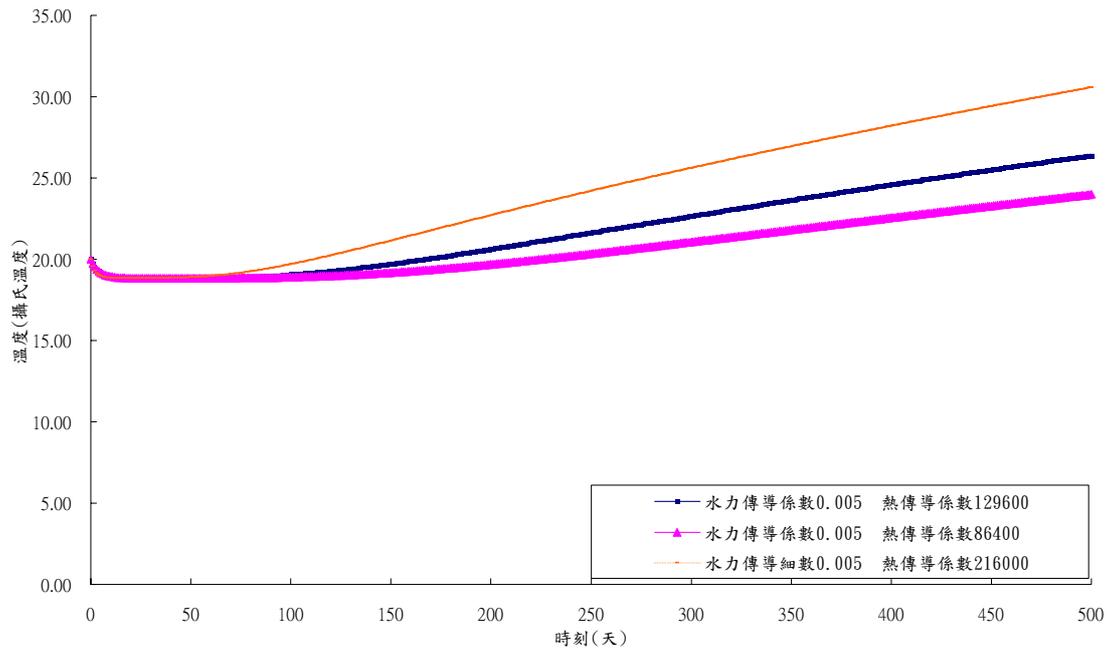


圖 5.2-42 節點(5, 5)隨時間溫度變化圖(不同熱傳導係數)



六、結論與建議

6.1 結論

1. 本研究已經成功應用細胞自動機於「垂向二維熱流非耦合模擬模式」與「垂向二維水流熱流耦合模擬模式」之開發。
2. 本模式應用兩模式透過穩態模擬與暫態模擬，本模式均可正確模擬，證實本模式之適用性與正確性。
3. 透過細胞自動機理論，細胞與相鄰細胞透過給定之規則可以進行數值模式之開發。由於給定之規則並不限定傳統常見之整合式偏微分方程式(PDE)，可以採用一系列分散之方程組，因此本研究若應用於全新問題時，該問題之概念模式建立可以大幅減少數學推導繁瑣流程。
4. 在水流熱流耦合模擬中，水流密度受到溫度變化之影響大於壓力變化之影響，其體積會隨溫度提升而膨脹，溫度冷卻而收縮，因此在原本不流動之水流案例中，會受到溫度之影響而產生流動現象。
5. 在進行不同水力傳係數與熱傳導係數對於溫度分佈之探討中，不同參數將分別影響對流項與傳導項，對於溫度分佈會有不同程度之影響。各自之影響程度則隨問題設定而有所不同。

6.2 建議

1. 本研究目前著重於地下水流與熱流問題之模擬，基於細胞自動機之高度可擴充性，未來亦可以將問題延伸至地下水污染傳輸問題或地層下陷問題等。
2. 本模式目前僅針對純水之熱流問題，因此水流熱傳導係數及水流比熱均設定為定值，未來問題若延伸擴充至污染傳輸問題時，兩參數之給定應依據污染物之特性與濃度進一步計算改變。
3. 本研究目前僅以地下水流模式與熱流模式之耦合模擬，因此對於土壤壓縮性之分析，僅以線性方程式模擬之，未來若透過細胞自動機理論建立地層下陷模式，可對土壤壓縮性進行更嚴謹之探討。
4. 本研究目前為基礎模擬工具之開發，未來可以進一步使用各項應用型問題中，例如溫泉可利用水量管理、冷凍工法模擬分析等。



參考文獻

1. McDonald, M.G., and Harbaugh, A.W., (1988) A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model: U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations, book 6, chap. A1, 586 p.
2. Trescott, P.C., Pinder, G.F., and Larson, S.P., (1976) Finite-difference model for aquifer simulation in two dimensions with results of numerical experiments: Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey, book 7, chap. C1, 116 p.
3. Larson, S.P., (1978) Direct solution algorithm for the two-dimensional ground-water flow model: U.S. Geological Survey Open-File Report 79-202, 22 p.
4. Manteuffel, T.A., Grove, D.B., and Konikow, L.F., (1983) Application of the conjugate-gradient method to ground-water models: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 83-4009, 24 p.
5. Ozbilgin, M.M., and Dickerman, D.C., (1984) A modification of the finite-difference model for simulation of two-dimensional ground-water flow to include surface-ground water relationships: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 83-4251, 98 p.
6. Weeks, J.B., (1978) Digital model of ground-water flow in the Piceance Basin, Rio Blanco and Garfield Counties, Colorado: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations 78-46, 108 p.
7. Trescott, P.C., (1975) Documentation of finite-difference model for

- simulation of three-dimensional ground-water flow: U.S. Geological Survey Open-File Report 75-438, 32 p.
8. Trescott, P. C., and Larson, S. P., (1976) supplement to Open-File Report 75-438--Documentation of finite-difference model for simulation of three-dimensional ground-water flow: U.S. Geological Survey Open-File Report 76-591, 21 p.
 9. Kuiper, L.K., (1987) Computer program for solving ground-water flow equations by the preconditioned conjugate gradient method: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 87-4091, 24 p.
 10. Leake, S.A., and Prudic, D.E., (1991) Documentation of a computer program to simulate aquifer-system compaction using the modular finite-difference ground-water flow model: Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey, book 6, chap. A2, 68 p.
 11. Grove, D.B., and Stollenwerk, K.G., (1984) Computer model of one-dimensional equilibrium-controlled sorption processes: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 84-4059, 58 p.
 12. Konikow, L.F., and Bredehoeft, J.D., (1978) Computer model of two-dimensional solute transport and dispersion in ground water: Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey, book 7, chap. C2, 90 p.
 13. Goode, D.J., and Konikow, L.F., (1989) Modification of a method-of-characteristics solute-transport model to incorporate decay and equilibrium-controlled sorption or ion exchange: U.S. Geological

Survey Water-Resources Investigations Report 89-4030, 65 p.

14. Dunlap, L.E., Lindgren, R.J., and Carr, J.E., (1984) Projected effects of ground-water withdrawals in the Arkansas River Valley, 1980-99, Hamilton and Kearny Counties, southwestern Kansas: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 84-4082, 168 p.
15. Lewis, F.M., Voss, C.I., and Rubin, Jacob, (1986) Numerical simulation of advective-dispersive multisolute transport with sorption, ion exchange and equilibrium chemistry: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 86-4022, 165 p.
16. Glover, K. C., (1987) A dual-porosity model for simulating solute transport in oil shale: U.S. Geological Survey Water Resources Investigations Report 86-4047, 88 p.
17. Cooley, R.L., (1992) Derivation of finite-element equations and comparisons with analytical solutions; Part 2 of A MODular Finite-Element model (MODFE) for areal and axisymmetric ground-water-flow problems: U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations, book 6, chap. A4, 108 p.
18. Torak, L.J., (1993) Design philosophy and programming details; Part 3 of A MODular Finite-Element model (MODFE) for areal and axisymmetric ground-water-flow problems: U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations, book 6, chap. A5, 243 p.
19. Lin, H. C., D. R. Richards, G. T. Yeh, J. P. Cheng and N. L. Jones.. "FEMWATER: a three-dimensional finite element computer model for simulating density dependent flow and transport.", US Army

- Engineer Waterways Experiment Station, Pennsylvania State University, Brigham Young University, 1996.
20. Portela, J. N. and Alencar, M. S. "Outage contour using a Voronoi diagram", IEEE, Piscataway NJ, ETATS-UNIS, 2004.
 21. Thiessen, A.H. "Precipitation averages for large areas". Monthly Weather Review, 39, pp.1082-1084, 1911.
 22. Sukumar, N. "Voronoi cell finite difference method for the diffusion operator on arbitrary unstructured grids". International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, pp.1-34, 2003
 23. Tucker, G.E., Lancaster, S.T., Gasparini, N.M., Bras, R.L., and Rybarczyk, S.M. "An Object-Oriented Framework for Hydrologic and Geomorphic Modeling Using Triangulated Irregular Networks" Computers and Geosciences, 27, pp. 959-973, 2001.
 24. Iske, A. and Käser, M. "Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes". Numerical Methods for Partial Differential Equations, 20:388–411, 2004.
 25. Fuhrmann, J and Langmach, H. "Stability and existence of solutions of time-implicit finite volume schemes for viscous nonlinear conservation laws". APPLIED NUMERICAL MATHEMATICS , 37, pp. 201-230, 2001.
 26. Georgy Voronoi, (1907) Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 133:97-178.
 27. Andreas Fabri, (2007) Voronoi Diagrams in CGAL, the Computational Geometry Algorithms Library. Voronoi Diagrams in Science and Engineering, 2007. ISVD '07. 4th International

28. Fortune, S. "A sweepline algorithm for Voronoi diagrams, Algorithmica". ALGORITHMICA, 2, pp.153-174, 198.
29. VANGENUCHTEN, M.T. "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils". SOIL SCIENCE SOCIETY OF AMERICA JOURNAL, 44, pp.892-898, 1980
30. Fine, R.A. and Millero, F.J. "The compressibility of water as a function of temperature and pressure". Journal Chemical Physics, 59, pp. 5529-5536, 1973.
31. Mendicino, G., Senatore A., Spezzano, G. and Straface , S. "Three-dimensional unsaturated flow modeling using cellular automata". Water Resource Research, 42, W11419, 2006.
32. Ruhaak, W., Rath V. and Wolf A. "3D finite volume groundwater and heat transport modeling with non-orthogonal grids, using a coordinate transformation method". Advances in Water Resource, 31, pp.513-524, 2008.
33. Parsons, J.A. and Fonstad, M.A. "A cellular automata model of surface water flow". HYDROLOGICAL PROCESSES, 21, pp.2189-2195, 2007.
34. Folino, G., Mendicino, G.. and Senatore A. "A model based on cellular automata for the parallel simulation of 3D unsaturated flow". PARALLEL COMPUTING, 32, pp. 357-376, 2006.
35. Coppola, E., Tomassetti, B., Mariotti, L. "Cellular automata algorithms for drainage network extraction and rainfall data assimilation".HYDROLOGICAL SCIENCES OURNAL-JOURNAL DES SCIENCES HYDROLOGIQUES, 52, p. 579-592, 2007.

36. Jacob B., "Dynamics of Fluids in Porous Media", Dover Publications, 1988.
37. 李士哲(2001) 金崙地區溫泉資源調查分析之研究，國立成功大學碩士論文。
38. 許俊賢(2002) 深層岩體熱力-水力-力學偶合行為之研究，國立成功大學碩士論文。
39. 張育弘(2004) 台灣核廢料地下處置場之熱傳及熱應變分析，國立中央大學。
40. 宋鴻鈞(2003) 三微細胞自動機之研究-以海洋油污染擴散為例，國立中山大學碩士論文。
41. 黃宏明(2005) *Voronoi Diagram* 互動教學程式之設計與研究，私立中華大學碩士論文。



附錄 A 總水頭計算公式推導

圖附錄 A.1-1 為控制體積在垂直方向之各項受力示意圖，其中 W 為控制體積本身所受之重力， P_u 與 P_l 則分別為上下兩方所受之壓力。由於本研究為地下水流問題，地下水流流速極小，因此地下水流速之加速度(意即其一階導函數)亦極小，因此可以假設控制體積因速度變化所受之衝量可忽略不計。此外，在地下水問題中，控制體積亦可假設不隨時間移動。因此依據雷諾傳輸定律所建立之力平衡方程式，可以撰寫為式 A-1，由於控制體積所受之重力為密度、重力加速度與體積的乘積(式 A-2)，式 A-3 與 A-4 則表示中心位置的壓力與上下兩方壓力的關係，帶入式 A-1 可以改寫為式 A-5。

$$W + (P_u - P_l) = 0 \dots\dots\dots (A-1)$$

$$W = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z \dots\dots\dots (A-2)$$

$$P_u = P_c + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \dots\dots\dots (A-3)$$

$$P_l = P_c - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \dots\dots\dots (A-4)$$

$$\rho g \Delta x \Delta y \Delta z + \left[\left(P_c + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \left(P_c - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y = 0 \dots\dots\dots (A-5)$$

重新整理式 A-5，可以將 P_c 對消，重新寫成式 A-6。若將方程式左右兩方同除 $\Delta z \Delta x \Delta y$ 與同作垂向積分，其方程式可以改寫為式 A-7。其中第二項的變數 z 之積分運算子與微分運算子將互相抵銷，可進一步寫為式 A-8。

$$\rho g \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = \gamma \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = 0 \dots\dots\dots (A-6)$$

$$\int_{z_l}^{z_u} \gamma dz + \int_{z_l}^{z_u} \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0 \dots\dots\dots (A-7)$$

$$\int_{z_l}^{z_u} \gamma dz + P(z_u) - P(z_l) = 0 \dots\dots\dots (A-8)$$

式 A-9 為積分上之恆等式，意即 a 至 b 間的定積分值，可以拆成 a 至 c 間的與 b 至 c 間的兩項定積分值。因此式 A-8 可以進一步拆成式 A-10，其中 z_0 代表基準高程，基本上可以選擇海拔高程。

$$\int_b^a f dx = \int_c^a f dx - \int_c^b f dx \dots\dots\dots (A-9)$$

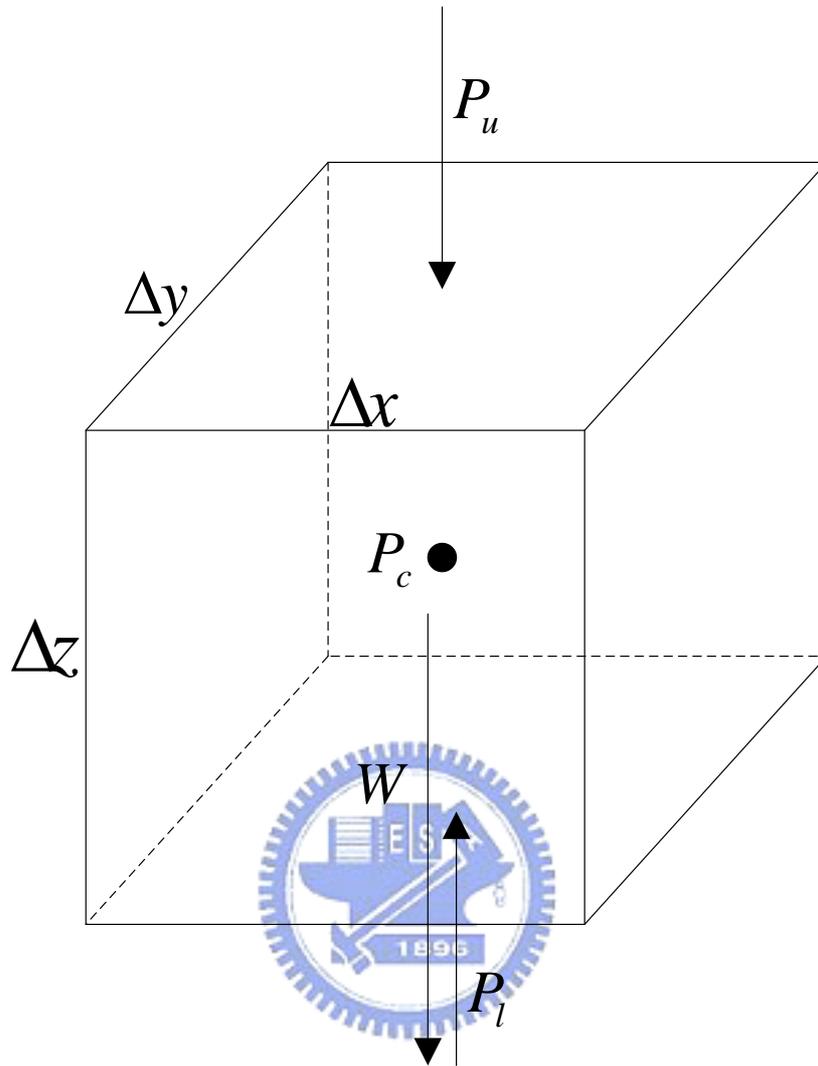
$$\left(\int_{z_0}^{z_u} \gamma dz + P(z_u) \right) - \left(\int_{z_0}^{z_l} \gamma dz + P(z_l) \right) = 0 \dots\dots\dots (A-10)$$

式 A-10 大致上可以區分為兩項，前項代表 z_u 位置之數值，而後向則代表 z_l 位置之數值，其因次與壓力相等。因此若欲將壓力轉換為長度形式之壓力水頭，則需除上特定溫度下之水比重 γ_0 。

若於變密度條件下，位置水頭之估算則需對水流比重進行垂向積分，總水頭則為估算之位置水頭與壓力水頭之和。若於定密度條件下，方程式可以進一步推導簡化為式 A-12，即位置水頭為位置高程差，總水頭為位置高程差與壓力水頭之和，其為常見之地下水流總水頭計算型式。

$$h_u = \frac{1}{\gamma_0} \int_{z_0}^{z_u} \gamma dz + \frac{P(z_u)}{\gamma_0} \dots\dots\dots (A-11)$$

$$h_u = (z_u - z_0) + \frac{P(z_u)}{\gamma_0} \dots\dots\dots (A-12)$$



圖附錄 A.1-1 控制體積垂向受力示意圖

附錄 B 土壤壓密係數與傳統方法之關聯推導

本研究採用式B-1 為模式之水流密度變化方程式，可以描述不同溫度與壓力水頭下的水流密度變化，其中 A_1 、 A_2 、 B 與 V^0 為溫度 T 之函數，因此在定溫問題之中，各項係數將為常數，因此該方程式之分子部分可以視為壓力水頭之二次多項式，分母部分則為壓力水頭之倍數，因此其可重寫為冪級數形式(式B-2)，若假設第一項忽略不計，則可近似為式B-3 之線性形式。其中 C_0 、 C_1 與 C_2 分別為冪級數各項之常數係數。

$$\rho_f = V^0 - \frac{(B + A_1 p + A_2 p^2)}{V^0 p} \dots\dots\dots(B-1)$$

$$\rho_f = C_0/p + C_1 + C_2 p \dots\dots\dots(B-2)$$

$$\rho_f \approx C_1 + C_2 p \dots\dots\dots(B-3)$$

因此可以將水流密度之變化近似簡化為式 B-4 之形式，其中 p_0 代表一大氣壓力下之壓力水頭，錶壓力形式即為 0， ρ_0 代表攝氏 25 度下一大氣壓力之水流密度， β' 代表水流的縮放係數，因此式 B-4 是水流密度之線性縮放公式。

$$\rho_f = \rho_0 \times [1 + \beta' (p - p_0)] \dots\dots\dots(B-4)$$

式 B-5 為模式採用之土體孔隙率變化方程式，用以描述拘限含水層因應壓力水頭變化之蓄水空間變化，其中 n_0 代表一大氣壓力下該土層之原始孔隙率， α' 則代表土體之壓縮性，因此式 B-5 是土體孔隙率之線性縮放公式。

$$n = n_0 \left[1 + \frac{\alpha'}{n_0} (p - p_0) \right] \dots\dots\dots(B-5)$$

式 B-5 為本模式描述控制體積內蓄水質量之方程式，其中因此若式 B-6 則為蓄水質量隨時間之變化率，其中 S_d 代表飽和度，其變化範圍為 0 至 1 之間，由於本問題鎖定為拘限含水層，因此其數值為常數 1， Vol 則代表控制體積之體積大小。

$$S' = (\rho_f n S_d)' Vol = (\rho_f n)' Vol \dots\dots\dots(B-6)$$

綜合式 B-4、B-5 與 B-6，可將蓄水質量之時間變化率重寫為式 B-7。令 $u = p - p_0$ 帶入式中，並進一步將兩個一次多項式進一步相乘推導，可以組合為一個二次多項式(式 B-8)。再透過偏微分運算子進一步拆解，可將常數項移除，並搬移至偏微分運算外部，如式 B-9 所示。

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = Vol \frac{\partial(\rho_f n)'}{\partial t} \dots\dots\dots(B-7)$$

$$= \rho_0 n_0 Vol \times \frac{\partial \{ [1 + \alpha'/n_0(p - p_0)] \cdot [1 + \beta'(p - p_0)] \}}{\partial t}$$

$$= \rho_0 Vol \times \frac{\partial \{ 1 + (\alpha' + n_0 \beta')u + \alpha' \beta' u^2 \}}{\partial t} \dots\dots\dots(B-8)$$

$$= \rho_0 Vol \times \left\{ (\alpha' + n_0 \beta') \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha' \beta') \frac{\partial u^2}{\partial t} \right\} \dots\dots\dots(B-9)$$

由於土體與水流之壓縮縮放係數均遠小於 1，因此兩者相乘下，則可忽略不計，因此本模式採用之方程式組合若在定溫條件與其他上述之簡化下，控制體積內的蓄水變化率如式 B-10 所示。

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = \rho_0 Vol \times (\alpha' + n_0 \beta') \times \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots(B-10)$$

$$= \rho_0 Vol \times (\alpha' + n_0 \beta') \frac{\partial p}{\partial t}$$

$s_s \frac{\partial h}{\partial t}$ 為傳統拘限地下水流方程式在等號左方常見之形式，其代表

控制體積內水體積之時間變化率，其中 s_s 為比出水率，代表拘限含水層因應壓力水頭變化，土體與水體因壓縮或膨脹所釋放出的水量，式 B-11 為比出水率、土體壓縮性與水流壓縮性三者之關係。此外，式 B-12 定義總水頭為壓力水頭與位置水頭之和。由於傳統方式是以水體積守恆建立概念模式，因此若欲轉換為水質量守恆，則需再乘上密度。此外傳統常見之控制方程式均為偏微分形式之方程式，在推導過程中已使其代表單位體積之變化率，因此若欲與本研究對應，則應乘上控制體積之大小，因此透過傳統方法所描述之控制體積內蓄水質量之時間變化率可以描寫為式 B-13。觀察式 B-10 與 B-13，兩者公式極為類似。因此顯示本模式所採用之方程式組合，在經過推導與簡化後，可與傳統拘限地下水流模式所採用之方法一致。

$$s_s = \alpha + n\beta \dots\dots\dots(B-11)$$

$$h = p + z \dots\dots\dots(B-12)$$

$$\frac{\partial S^t}{\partial t} = \rho_0 Vol \cdot (\alpha + n\beta) \frac{\partial(p+z)}{\partial t} = \rho_0 Vol \times (\alpha + n\beta) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots(B-13)$$

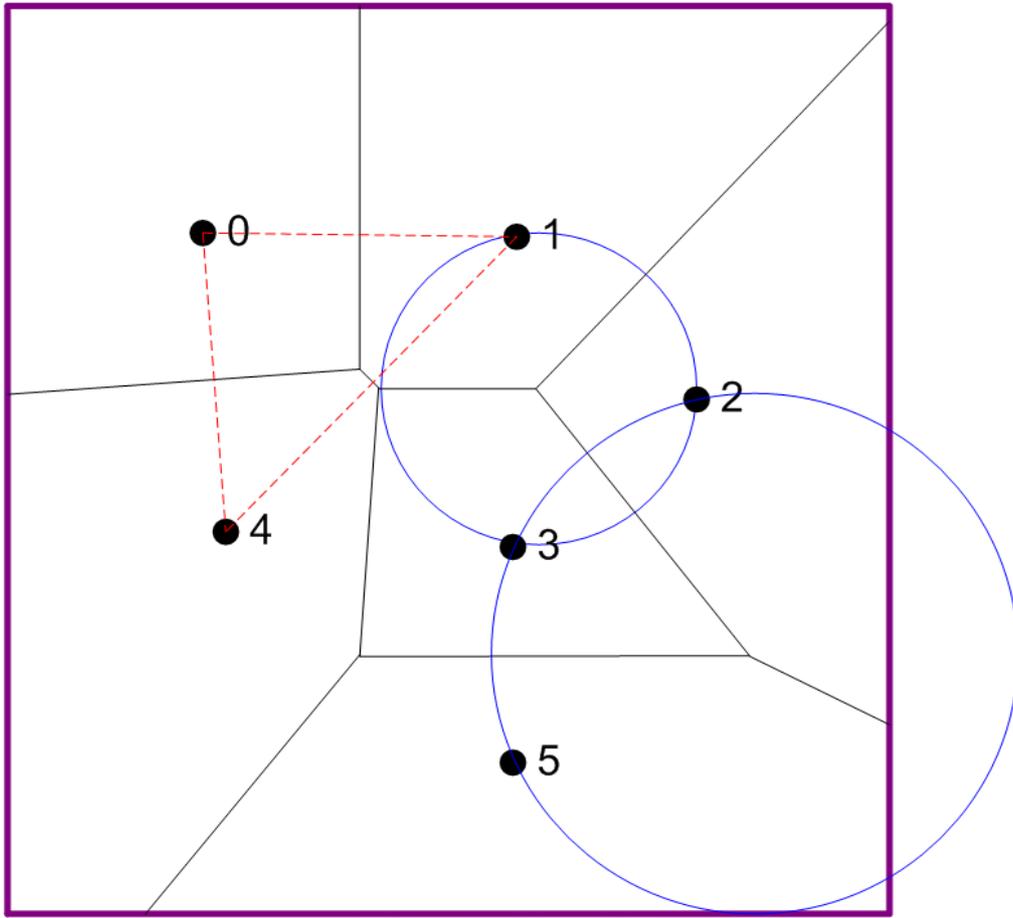
附錄 C Voronoi Diagram 空間切割法

空間切割在數值模擬問題中，為必要的一個步驟，不同數值方法則有不同之切割方法，以最常見的有限差分法(FDM)為例，其必須侷限於矩形網格，因此對於不規則形狀之掌握較差。本研究在此採用 Voronoi Diagram 作為切割演算法。

附錄 C.1 徐昇氏網格(Voronoi Diagram)簡介

Voronoi Diagram 是透過散佈於平面上一群平面點位資料(sites or points)為基礎所切割出來的圖形，其圖形如圖附錄 C.1-1 所示。Voronoi Diagram 具備下列特性：

1. 各點(sites or points)所必對應一個控制區塊(cell)，區塊內之任何一點與該節點之距離，必定小於此點與其他節點之距離。
2. 控制區塊形狀必為凸包(convex hulls)。
3. 兩節點之連線必定正交於其控制區塊(cells)之邊，此邊稱為控制區塊邊(edge)
4. 控制區塊邊(edge)之交接點稱為角點(vertex)，令任意角點為圓心，必可找到一圓通過相鄰之節點(如圖附錄 C.1-1 所示)，該圓稱為空圓(empty circle)。
5. 將任意空圓上之所有節點連線，可以繪製成三角形，其稱為 Delaunay Triangles，其與 Voronoi diagram 為對偶圖形。圖附錄 C.1-1 上，節點 0、1 與 4 之連線所形成之三角形即為 Delaunay Triangles。



圖附錄 C.1-1 Voronoi Diagram 與其相關圖形

數學定義：若給定一組點位資料($N = \{N_1, N_2, N_3 \dots N_n\}$)，其中 N_m 為第 m 個節點， n 為空間中節點數量，其數值應為 $2 \leq n \leq \infty$ 。其控制區塊(Voronoi Diagram)可定義如下：

$$V(N_i) = \{D : \|D - N_i\| \leq \|D - N_j\| \text{ for } \forall j \neq i\} \dots\dots\dots(C.1-1)$$

公式描述了 Voronoi Diagram 最重要的特性，就是控制區塊內的任何點必定與其對應之節點距離最近。代表該節點在空間上，比任何其他節點更能代表該區塊。因此在水利或氣象領域中，Voronoi Diagram 被應用於將點位形式之雨量資料推估集水區內之總降雨量。在數值運算上，由於兩節點連線必正交於其控制區塊邊，因此對於穿越格網邊界之流量估算上，無須進行角度轉換之向量計算。

Voronoi Diagram 發展至今已具有相當多的演算法計算，如 half plane intersection、Divine-and-Conquer、Fortune's Algorithm 等等，其中 Steve Fortune 於 1986 年發表的掃線演算法，由於在最差的狀況下也有 $O(n \log n)$ 的計算複雜度，為建構 Voronoi Diagram 最有效率的演算法之一。

附錄 C.2 CGAL 函式庫簡介

CGAL 全名為 Computational Geometry Algorithm Library，是計算空間幾何上極具可信度的函式庫，其中包含了許多圖形的資料結構、建構圖形的演算法、格網產生與處理與圖形分析等功能。為 Geometry Factory 所開發的開放原始碼專案，其目的為 C++ 環境，提供有效率並且可信賴的空間計算演算法。目前已經被廣泛應用於電腦繪圖、科學視算、設計模擬、格網生成、數值方法與微生物模擬等各項領域上。

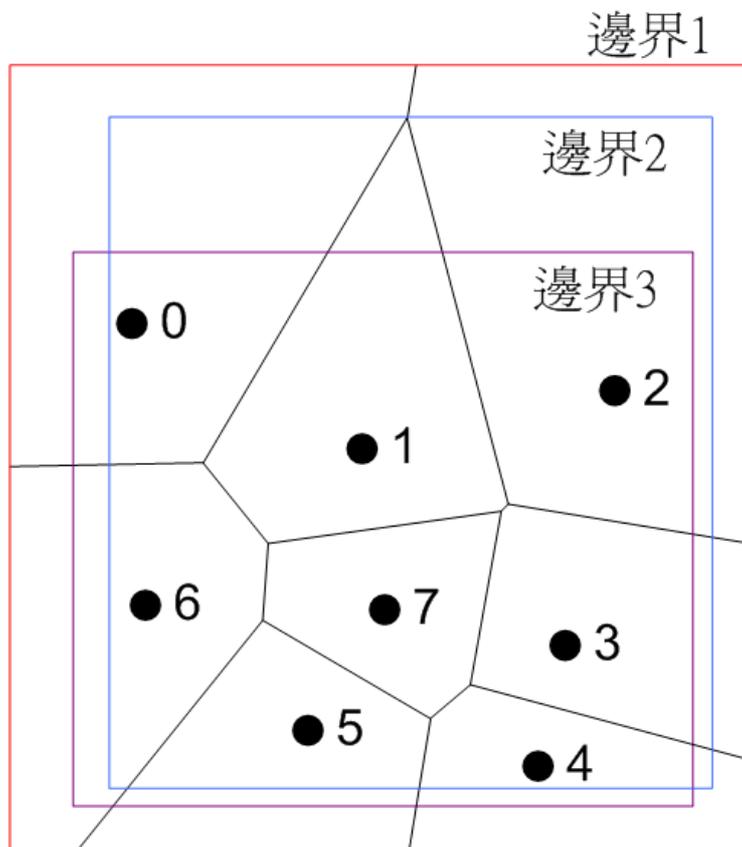
然而 CGAL 函式庫提供之 Voronoi Diagram 相關功能，僅針對無限空間之 Voronoi Diagram 空間切割，亦即外圍節點之控制區塊 (Voronoi Cells) 並不為封閉空間。然而本研究是應用於數值模擬上，網格必須是有限個封閉空間，因此不完全符合需求。

因此本研究是以 CGAL 函式庫作為基礎函式庫，透過物件封裝技巧，進一步開發適合本研究之封閉空間 Voronoi Diagram，使外圍之控制區塊與模擬邊界進行切割計算，重新輸出適合本研究數值模擬之空間切割結果。

附錄 C.3 封閉空間之 Voronoi Diagram 函式庫開發

由於 CGAL 之基本功能僅提供非封閉空間之切割，對於外圍控制區塊需要另行處理，因此本研究透過物件封裝技巧，將其提供之非

封閉空間之切割結果，並與模擬區塊邊界框比較套疊，重新製作為封閉空間之切割結果。



圖附錄 C.3-1 不同邊界框形成之 Voronoi Diagram

圖附錄 C.3-1 為相同之點位資料，套疊不同之模擬區塊邊界框，會套疊出不同之控制區塊形狀。例如邊界 1 與邊界 3 對控制區塊 1 而言，便會形成不同之形狀，對於邊界 3 而言，必須刪除凸出邊界的部分；對於邊界 1 而言，則由於控制區塊本身即為封閉區塊，所以無須另行處理。另外，不同邊界對於非封閉型之控制區塊而言，則需以邊界本身與非封閉型之控制區塊，以聯集方式形成封閉之控制區塊。本研究之處理邏輯如下所示：

1. 非封閉形式之控制區塊：如圖附錄 C.3-1 之控制區塊 0、2、3、4、5、6。此類狀況則以邊界框與該控制區塊做聯集判斷，可形成一個封閉多邊形。

2. 封閉形式之控制區塊：如圖附錄 C.3-1 之控制區塊 1、7。此類狀況可依據邊界框是否穿越該控制區塊，再做分類。若無穿越，則該控制區塊為正確解；若有穿越，則該控制區塊仍應與邊界框做聯集判斷。

