第一章　　緒論

1.1前言

現今社會快速變遷，人類由於生活習慣上的大幅改變，速食文化的盛行，因而導致體內膽固醇攝取量過高、營養過剩等現象，再加上缺乏運動、使得肥胖成為相當嚴重的社會文明病。而由肥胖所造成之動脈硬化(Atherosclerosis)、血拴症(Thrombus)、動脈阻塞及相關心血管疾病的病發率逐年提高，更成為威脅人類健康的無形殺手【1】。

流體流經過管道分歧(Bifurcation)的部分時，流體流動方向的改變，將可能造成流體的分離，以及管道壁面上壓力和剪應力的變化。同樣地，當血液在人體中循環時，在血管分歧處的流場變化是相當劇烈的，由於分歧管道是由主流道與分歧支管相互銜接所組成的，幾何外型十分複雜，故其流場的變化非常複雜，流場分離(Seperation)及二次流(Secondary Flow)均可能於流道的分岔處附近發生。

過去的研究顯示，動脈疾病常會發生在頸動脈、冠狀動脈、腹部主動脈和股動脈之中，具有複雜流場的區域。當血液在這些區域中流動時，會如上所述之受到血管幾何形狀彎曲、分岔或管徑大小之變化的影響，而產生如邊界層分離、迴流(Recirculation)、二次流或停滯(Stagnation)等現象。這些物理現象會影響血液中血小板(Plaques)吸附管壁的作用，而血管中血小板容易聚集的地方很可能將會是發生血管病變機率最大的地方，對於人類心血管循環系統中的動脈硬化和血拴的形成，有著深遠的影響。因此，分歧管流場現象之探討與分析在現今的人體醫學和心血管疾病的研究上，越來越受重視。

此外，分歧管流場在許多工業領域中出現，如冷凍空調系統、化工廠等等，十分值得我們對其流場現象有更為深入的瞭解。

1.2 文獻回顧

1. Lynn, Fox 和 Ross (1972)【2】利用數值方法去計算二維不可壓縮之分歧管流場，以模擬血液在動脈分岔處流動的情形，其流體假設為牛頓流體，並預先將分歧流場視為上下對稱，故僅以上半部之流道作為計算之範圍，來分析夾角 30 度分歧管在不同雷諾數下的流場變化。其結果發現，隨著雷諾數的增加，流場流線並無太大的變化；但渦度(Vorticity)場會隨著雷諾數的增加，而產生陡峭的變化。

2. Brech 和 Bellhouse (1973)【3】利用實驗的方法研究對稱分歧管在穩態和非穩態下的流場，其實驗所採用之分歧管皆為 45 度夾角，但在主流道和分支管的銜接處又有分為銳角型和平滑型，並針對此兩種分岔點造型之分歧管進行比較分析。在量測流道內流體速度時，採用薄膜探針作為量測工具。其結果發現，無論在穩態和非穩態條件下，兩種造型之分歧管皆會產生二次流；而且管道的分岔角度和管徑大小的變化，都會影響二次流的產生。

3. Kreid, Chung 和 Crowe (1975)【4】以實驗的方法研究穩態的層流 T 型分歧管流場，並利用雷射都普勒速度計 LDV(Laser-Doppler Velocimeter) 來量測分支管下游的速度場。其結果發現，在 T 型分岔處的下游會有迴流產生，且越遠離分岔處的流道截面速度分佈，越接近拋物線的造型。

4. Stehbens (1975)【5】利用染料注射的方法研究血液在分歧管中的流動情形，並以玻璃管來模擬分歧流道，以方便用肉眼觀察。Stehbens 在流道分岔處分別製作了一銳角分岔頂點和一外擴半球形頂點，以分析比較兩種不同頂點造型的流場差異，其中外擴半球形頂點可以用來模擬莓果動脈瘤(Berry Aneurysm)的流動情形。其結果顯示，在低雷諾數時，兩種造型的流道在分岔處都會有波動的現象；在高雷諾數

時，大多數的分岔處會有近似卡門渦流(Karman Vortex)的較大渦流產生。

5. O’Brien, Ehrlich 和 Friedman (1976)【6】利用數值方法去計算非穩態二維分歧管流場，並將其結果與先前穩態的計算結果作比較。其結果發現，二維穩態的計算結果，不適合去預測非線性時間相關的流場。

6. Kandarpa 和 Davids (1976)【7】利用有限元素法去求解穩態二維不可壓縮流，以模擬對稱分歧管內的層流流場。並分析低分岔夾角(小於 45 度)和較窄的上下游流道寬度比(d/h 小於一，d:分岔管寬度；h:主流道寬度)對流場造成的影響。由於在計算時以假設流場為上下流道對稱，故僅以上半部流道做為計算範圍。其結果發現，固定夾角下，分歧管下游的迴流長度，會隨著雷諾數增加而增長；在固定雷諾數下，分歧管下游的迴流長度，會隨著夾角的增加而縮短。

7. Sparrow 和 Kemink (1979)【8】以實驗的方法研究混合式 T 型分歧管（兩進口和一出口）的紊流流場及其熱傳分析。並觀察兩進口流量比和雷諾數對流場及熱傳的影響。其結果發現，流體的混和以及管道的彎曲或分岔，會增加流場內及其周圍的熱傳係數。

8. El-Masry, Feuerstein 和 Round (1978)【9】以實驗的方式針對四種不同幾何造型之分歧管進行流場分析，該四種不同造型之分歧管，分別代表體內不同部位之動脈分岔。並進一步分析雷諾數和分支管流量比對各種分歧管流場的影響。其結果顯示，在所研究的雷諾數範圍內，四種造型之分歧管皆有迴流產生；且分支管的流量變化，亦會造成整個流場的改變。

9. Karino, Kwong 和 Goldsmith (1979)【10】利用懸浮粒子攝影法來研究 T 型分歧管內的流場。並分析雷諾數和出口流量比對管內分岔處

之迴流長度的影響。此外，在 T 型管之分岔處，分別採用銳角端點(square point)和圓角端點(rounded point)兩種不同的幾何形狀，進行流場的分析比較。其結果顯示，無論是銳角還是圓角端點，臨界雷諾數(Critical Reynold Number)會隨著出口流量比而改變，且出口流量比越高，臨界雷諾數越大。而圓角端點的流場中，會有迴流延後的現象。

10. Sparrow 和 Kemink (1979)【11】利用實驗的方法，採用空氣做為工作流體，針對 T 型分歧圓管進行流場分析。在主流道的下游，另有局部的均勻加熱，並針對該區域作相關之熱傳分析。其結果顯示，在相同雷諾數下，在 Thermal Entrance 區域內的紐塞數(Nusselt Number)比在傳統軸對稱流場之紐塞數高。

11. Pollard (1981)【12】利用有限差分法去計算三維、穩態且不可壓縮之 T 型管流場，管道寬度均勻且其截面為圓形，但為了計算上的方便，在其入口處採用鍥形管道。在計算紊流流場時，採用 $\kappa-\varepsilon$ 模式。其結果顯示，在分岔處的流場十分複雜，並會產生極大的壓力及壁面熱傳率的變化。

12. Liepsch, Moravec, Rastogi 和 Vlachos (1982)【13】同時針對 T 型分歧管流場進行實驗分析和數值計算分析。在實驗方面，以水做為工作流體，採用寬高比極大之矩形截面流道，來模擬血液在二維 T 形管內的流動情形，並利用雷射都普勒速度計 LDV (Laser -Doppler Velocimeter) 來量測管內流體的速度；在數值計算方面，以有限差分法求解二維、穩態且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，並在工作流體上採用牛頓流體。此外，在實驗和數值計算兩方面，都有針對雷諾數及兩出口流量比對流場的影響，進行比較分析。其結果顯示，在分岔處的轉角所出現之高剪應力，會導致流經分岔處的細胞破裂。同時，血小板沈積也可能會發生在低剪應力或低壓的區域。

13. Lutz, Hsu, Menawat, Zrubek 和 Edwards (1983)【14】以實驗的方法對雙分歧管進行流場分析，來模擬腹部主動脈內的分岔流場，同時比較該流場在穩態和非穩態時的差異。在某一固定分支管流量比下，分離流只會出現在位置較下游的分支管中，而位置在較上游的分支管內並不會產生分離流。此外，在非穩態流場下的峰值剪應力會是穩態流場的 10 到 100 倍。

14. Bramley 和 Dennis (1984)【15】利用有限差分法去計算穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 流線方程式，來模擬夾角 45 度之對稱分歧管流場。由於流場已假設為上下對稱，故僅以上半部流道做為計算範圍。在計算時，針對兩種下游流道寬度 $\left(1/\sqrt{2}\right)d$ 及 $\sqrt{2}d$ （d 為入口處流道寬度）隨著雷諾數變化的影響，進行分析討論。結果顯示，在下游流道寬度為 $\left(1/\sqrt{2}\right)d$ 時，在所測試的雷諾數範圍內(Re=50~2000)，僅有雷諾數 2000 時才會有迴流的產生；在下游流道寬度為 $\sqrt{2}d$ 時，從雷諾數 100 就開始會有迴流出現，而且迴流的長度隨著雷諾數的增加而增長。

15. Cho, Back 和 Crawford (1985)【16】以實驗的方法，採用透明玻璃管和糖水溶液，來模擬血液在非對稱動脈分岔處的流動情況。並針對出口流量比、雷諾數和流道夾角對流場之影響，進行分析。其結果顯示，沿著主流道中心線之無因次壓力降，會隨著雷諾數的增加而減緩；在某一特定雷諾數及流量比的條件下，主流道之無因次壓力升係數，會隨著流道夾角的增大而遞增。

16. Bramley 和 Sloan (1987)【17】利用有限差分法去計算穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 流線方程式，來模擬夾角 45 度之對稱分歧管流場。由於流場已假設為上下對稱，故僅以上半部流道做為計算範圍。不同於 Bramley 和 Dennis 在 1984 年所做的研究，Bramley

和 Sloan 更進一步地去分析比較了三種不同造型之分岔處端點(SHARP、SMOOTH 和 DUBSMOOTH)對流場所造成的影響。同時，也針對兩種下游流道寬度$(1/\sqrt{2})d$及$\sqrt{2}d$（d 為入口處流道寬度）隨著雷諾數變化的影響，進行分析討論。結果顯示，在分岔端點處之造型越平滑，將會使得迴流的起點向下游方向延後。此外，在下游流道寬度$(1/\sqrt{2})d$及相同雷諾數下，具 SHARP 造型之分岔點的渦度最小值會比具 DUBSMOOTH 造型者之渦度最小值來得低。

17. Fukushima, Homma, Azuma 和 Harakawa (1987)【18】以實驗的方法研究 90 夾角之對稱分歧管流場，並個別分析該流場在穩態和非穩態下二次流的變化，同時利用鋁塵照相技術，將流場的型態記錄下來。其結果發現，在非穩態下，鋁塵顆粒的沈積會對稱地由分岔停滯點開始，向兩側流道做延伸。

18. Hayes, Nandakumar 和 Hasr-El-Din (1989)【19】以有限元素法去，採用牛頓流體，求解穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬 T 型分歧管流場，並針對不同之出口流道寬度及雷諾數做計算，以觀察其對該流場的影響。其結果發現，在相同出口流道寬度及出口壓力下，主流道對側流道之流量比和側流道的迴流長度，會隨雷諾數增大而增加。在相同出口壓力且固定雷諾數下，主流道對側流道之流量比，會隨著側流道寬度的縮小而增加；而側流道的迴流長度，會隨側流道寬度增大而增加。

19. Rieu, Pelissier 和 Farahifar (1989)【20】以實驗方法研究非穩態對稱分歧管流場，其管道截面為矩形，利用脈衝都普勒超音速速度儀量測速度場，來觀察該流場隨著分岔角度變化的情形。其結果發現，在非穩態流場中，其二次速度較穩態流的二次速度小。且在非穩態流場中的二次速度會隨著頻率參數的遞增而減小。

20. Hayes 和 Nandakumar (1989)【21】以有限元素法，採用牛頓流體，求解穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬 T 型分歧管流場；同時，給予管道壁面一均勻之溫度，進而分析該流場內的熱傳現象。其結果發現，在主流道及側流道之迴流長度和迴流強度，皆隨雷諾數之增加而增大；但卻隨著 Gr (Grashof Number)的增加而減小。在相同出口壓力下，在側流道會形成相當程度之迴流；而側流道之質量流率將會隨著 Gr/Re^2 成線性增加。

21. Kelkar 和 Choudhury (2000)【22】發展出一套數值方法，使得在計算不可壓縮流場時，可以處理具有壓力邊界的問題。此外，Kelkar 和 Choudhury 進而利用所發展出的數值方法，分別去計算出口處為壓力邊界之有壓差 Y 型分歧管流場和無壓差 T 型分歧管流場，並分析壓力變化對流場的影響。其結果發現，由其數值方法所計算出結果相當準確。在無壓差 T 型分歧管中，主流道出口流量會隨著雷諾數成正比；在有壓差 Y 型分歧管中，上方分支流道出口流量會隨著壓力差成正比。

1.3 研究方向

由文獻回顧之過程中，我們發現在先前的分歧管流場研究裡，所採用之分支流道寬度大多為與主流道同寬，而在少數之漸擴型的分支流道中，其擴張比也皆小於二。此外，在先前的研究中，其分支管出口的邊界條件，也多為控制出口流量或給予相等之出口壓力值。

因此在本研究中，將採用非結構(Unconstructed)性網格，以計算流體力學(Computational Fluids Dynamics)的方法，來計算對稱造型之 45 度夾角 Y 型和直角 T 型分歧管內的流場。並改變兩者之分支管流道寬度，使其擴張比大於二，以分析其流場之變化。而分岔端點處之

造型，本研究暫採銳角(Sharp Point)造型之分岔端點，來進行分析。

此外，在分歧管的出口邊界條件上，我們要給予無壓差及微小壓力差之條件，來觀察此二者對分歧管流場所造成的影響。

第二章　數學模式

2.1 分歧管流場的基本假設(Basic Assumption)

分歧管流場(Branch Flow)出現在許多生物醫學及工程的應用上，其分岔的形式有很多種變化，主要區分為 T 型和 Y 型兩大類。本研究將針對上述兩種造型之對稱分歧管進行流場分析，計算範圍涵蓋上下半部的流道。

本研究流場的基本假設如下：

1. 二維(2-Dimensional)、穩態(Steady)且不可壓縮(Incompressible)之流場。
2. 工作流體(Working Fluids)為牛頓流體(Newtonian Fluids)。
3. 層流(Laminar Flow)、恆溫流場(Isothermal Flow)。
4. 不考慮物體力(Body Force)。

2.2 統御方程式(Governing Equation)

由以上的假設，我們可以推得所需的統御方程式如下：

1. 連續方程式：(Continuity Equation)

$$div(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2.1}$$

2. 動量方程式 (Navier-Stokes Equation)

$$div(\rho\vec{V}\vec{V}) = -gradP + div(\mu grad\vec{V}) \tag{2.2}$$

(2.2) 式可重新整裡如下的傳輸方程式 (Transport Equation)：

$$div(\rho\vec{V}\vec{V}) = div(\mu\, grad\vec{V}) + \vec{q} \tag{2.3}$$

其中，$\vec{V}$ 為速度，ρ 為密度，P 為壓力，μ 為黏滯係數，$\vec{q}$ 則包含壓力梯度項。

在計算的過程中，我們將上述之統御方程式予以無因次化後，再

計算之。而無因次化參數的定義如下：

$$x^* = x/c \text{ 、} y^* = y/c \text{ 、} u^* = u/\overline{V} \text{ 、} v^* = v/\overline{V} \text{ 、} p^* = p/\rho\overline{V}^2 \text{ 、} \mathrm{Re} = \rho\overline{V}c/\mu$$

其中

c ：入口處流道寬度 a 的一半（ $c=\frac{1}{2}a$ ）。

$\overline{V}$ ：入口處的平均速度值。

而經過無因次化後的統御方程式如下：

連續方程式： $$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \tag{2.4}$$

X 方向動量方程式： $$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{2.5}$$

Y 方向動量方程式： $$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{2.6}$$

2.3 邊界條件(Boundary Conditions)

1. 在處理分歧管入口處之邊界條件上，我們假設流體在進入流道入口處時，已達到完全發展流(Fully Developed)的狀態，其速度分佈的公式如下：

$$U_{in}(y)=V_{\max}\left[1-4\cdot\left(\frac{y}{a}\right)^2\right] \tag{2.7}$$

其中

$U_{in}(y)$ ：入口處的速度。

$V_{\max}$ ：入口處中心最大速度值（ $V_{\max}$ =1.5 ）。

a ：入口處的流道寬度（a=2 ）。

2. 分歧管出口處之邊界條件，是於出口處控制其出口流量或出口壓力值，其細節請參考第三章之說明。

3. 分歧管內壁面之邊界條件，採用無滑動(No Slip)的邊界條件。

第三章　數值方法

3.1 傳輸方程式的離散化 (Discretization)

由第二章得知，解題所需的傳輸方程式具有如下的形式：

$$div(\rho\vec{V}\Phi) = div(\mu\, grad\Phi) + \vec{q} \tag{3.1}$$

以下我們將利用高斯散度定理(Gauss Divergence Theorem)及中點定理(Midpoint Rule)，分別將上述方程式中的各項離散化，以方便於轉化成數值的來計算。

3.1.1 對流項 (Convection Term)之離散方程式

$$\iiint_{\Delta v}(\nabla\cdot\rho\vec{V}\Phi)dV = \iint_{S}(\rho\vec{V}\Phi)\cdot d\vec{S} \Rightarrow \sum_{f}\left(\rho\vec{V}\Phi\right)_f\cdot\vec{S}_f = \sum_{f}F_f^c \tag{3.2}$$

而 $F_f^C \equiv \dot{m}_f\Phi_f$ (3.3)

其中

F^c ：任一面上的對流通量 (Convection Flux)。

$\dot{m}$ ：質量流率(mass flow rate)。

$\vec{S}_f$ ：面之法向量。

下標 f ：控制體積之任一面上的中點。

在求解對流項的過程中，為了求得一高準確度且易收斂之解，在此採用以中央差分和上風差分混合之法。如下：

$$F^C = F^{UD} + \gamma(F^{CD} - F^{UD}) \tag{3.4}$$

F^{UD} ：由上風差分法所得之對流通量。

F^{CD} ：由中央差分法所得之對流通量。

而 $0<\gamma<1$ (此 γ 值通常取一接近 1 之值，以確保高階準確)，本研究

於計算過程中一律採用 $\gamma=1$。

為了確保在疊代時，係數矩陣能具有對角優勢(Diagonally Dominant)，因而採用 Deffered Correction 的方法【23】，即將上式中以上風法求得之第一項置於係數矩陣中，而將中央差分法與上風差分法之差所得的第二項置於源項中。

3.1.2 擴散項 (Diffusion Term)之離散方程式

$$\iiint_{\Delta V}\nabla(\mu\nabla\Phi)dV=\iint_{S}\mu\nabla\Phi\cdot d\vec{S}\Rightarrow\sum_{f}(\mu\nabla\Phi)_f\cdot\vec{S}_f=\sum_{f}F_f^d \tag{3.5}$$

而 $$F_f^d\equiv(\mu\nabla\Phi)_f\cdot\vec{S}_f \tag{3.6}$$

其中，F^d：面上的擴散通量 (Diffusion Flux)。

μ：黏滯係數。

在求解擴散項時，我們另外定義 $\vec{d}$ 為一沿主格點 P 至相鄰格點 C 方向的向量，則 $\vec{S}$ 可以做如下的表示：(參考圖 3.1)

$$\vec{S}_f=\vec{d}+(\vec{S}_f-\vec{d}) \tag{3.7}$$

則 $$F_f^D=\mu_f\nabla\Phi_f\cdot\vec{S}_f=\mu_f\nabla\Phi_f\cdot\vec{d}+\mu_f\nabla\Phi_f\cdot(\vec{S}_f-\vec{d}) \tag{3.8}$$

其中，$|\vec{d}|$ 的大小將決定數值計算時擴散量的大小，對於計算的穩定性有重大的影響。為此我們利用 over-relaxed approach【24】來處理 $\vec{d}$ 值，如下：

$$\vec{d}\equiv\frac{|\vec{S}_f|}{\vec{e}_d\cdot\vec{e}_s}\vec{e}_d=\frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}\cdot\vec{S}_f}\vec{\delta} \tag{3.9}$$

此處 $\vec{e}_s$ 表示沿 $\vec{S}_f$ 之單位向量。

將(3.9)帶入(3.8)得到

$$F_f^D=\frac{\mu_f|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_r\cdot\vec{S}_f}(\Phi_C-\Phi_P)+\mu_f\nabla\Phi_f\cdot(\vec{S}_f-\vec{d}) \tag{3.10}$$

在(3.10)式中經由 over-relaxed 方法所得之第一項具有大的擴散係數，此項將置於係數矩陣中；而第二項則放置在源項中。

3.1.3 源項(Source Term)之離散方程式

在源項中之壓力梯度，可同樣由高斯散度定理及中點定理得:

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} \nabla P dV = \frac{1}{\Delta V}\iint_{s} Pd\vec{S} \Rightarrow \frac{1}{\Delta V}\sum_{f} P_f \vec{S}_f \tag{3.11}$$

其中 ΔV 為單一計算網格的體積。

而其在 $\vec{e}_i$ 方向之分量: $$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \nabla P \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{\Delta V}\sum P_f\left(\vec{S}_f \cdot \vec{e}_i\right) \tag{3.12}$$

3.1.4 計算邊界壓力

此外，在求解壓力梯度項時，會需要利用邊界上的壓力值，為了得到邊界上的壓力，我們可做以下的推導：

$$P_b - P_p = \nabla P \cdot \vec{\delta} \tag{3.13}$$

其中，b 表示壁面上的中點；而 $\vec{\delta}$ 代表 P 到 b 之距離向量

(參考圖 3.2)。如前述所示，壓力梯度可由下方的式子去近似之，

$$\nabla P = \frac{1}{\Delta V}\sum_{f} P_f \vec{S}_f = \frac{1}{\Delta V}\left(P_b \vec{S}_b + \sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \right) \tag{3.14}$$

此處下標 f 表示除了 b 之外的其餘各面。

因此我們得到了邊界上之壓力為：

$$P_b = \frac{\left(P_p + \frac{1}{\Delta V}\sum_{f \neq b} P_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\Delta V}\vec{S}_b \cdot \vec{\delta} \right)} \tag{3.15}$$

3.2 線性代數方程式

將上述對流項、擴散項及源項合併後，可得傳輸代數方程式：

$$A_p \Phi_p = \sum_C A_C \Phi_C + Q \tag{3.16}$$

其中 $A_p = \sum_C A_C$

$$A_C = \frac{\mu_f \left|\vec{S}_f\right|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \tag{3.17}$$

而源項 Q 表示如下：

$$\begin{aligned} Q = & \sum_c \left\{ -\gamma \left[\dot{m}_f \left(w_f \Phi_p + (1-w_f)\Phi_C \right) - \left\langle \max(\dot{m}_f, 0)\Phi_P + \min(\dot{m}_f, 0)\Phi_C \right\rangle \right] \right\} \\ & + \sum_f \mu_f \nabla\Phi_f \left(\vec{S}_f - \vec{d} \right) + q_p \Delta V \end{aligned} \tag{3.18}$$

下標 C：控制體積周圍網格之中心格點。

下標 f ：控制體積之任一面上之中點。

為了使(3.16)式之非線性方程式能穩定的收斂，在此加入一常用之鬆弛因子 α (under-relaxation factor，$0<\alpha<1$)【25】，其對動量代數方程式之修正如下所示：

$$\frac{A_P}{\alpha} \Phi_P^{(n+1)} = \sum_C A_C \Phi_C^{(n+1)} + Q_\Phi + \frac{1-\alpha}{\alpha} A_P \Phi_P^{(n)} \tag{3.19}$$

其中上標 n+1 代表新值，n 則代表前一次疊代之值。

3.3 壓力與速度的耦合關係式（SIMPLE 法則）

在計算 Navier-Stokes 方程式時，必須聯立求解連續方程式和動量方程式，此時會多出一個壓力變數。因此，我們需要找出壓力和速度之間的關係，才能完整求解 Navier-Stokes 方程式。在以下過程中，我們將運用 Patankar 所提的 SIMPLE 法則【25】，來求解 Navier-Stokes 方程式。

3.3.1 計算面上的質量流率

根據 SIMPLE 法則，我們可由求解 3.2 節所述之動量線性帶數方程式來獲得網格中心 P 點的新速度值，並以此新的速度值去差分計算面上的速度和面上的質量流率。為了消除計算非交錯網格時所產生的棋盤式震盪(checkerboard)，在此以類似 Rhie & Chow【26】之線性內插法來計算面上速度。詳細過程敘述如下：

將(3.16)式中之壓力項從源項中提出，我們可得主格點之速度與壓力關係式：

$$\vec{V}_p = \vec{H} - \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_p \nabla P_p \tag{3.20}$$

其中 $\vec{H} = \dfrac{\sum_C A_C \vec{V}_C + Q'}{A_p}$　　Q'：不含壓力項之源項　　(3.21)

類似(3.20)的模式，格子面上之速度可寫成：

$$\vec{V}_f = \overline{\vec{H}}_f - \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f \tag{3.22}$$

其中 $\overline{\vec{H}}_f = \overline{\vec{V}}_f + \left(\dfrac{\Delta V}{A_p}\right)_f \overline{\nabla P}_f$　　(3.23)

將(3.23)帶入代入(3.22)式得:

$$\vec{V}_f = \left(\overline{\vec{V}}_f + \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)\overline{\nabla P}_f\right) - \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f \tag{3.24}$$

上標"—" 表示由控制體積之中心格點 P 及另一共面 f 相鄰之 C 格點內插而得，如下所示：

$$\overline{\nabla P}_f = w_p \nabla P_C + (1 - w_p)\nabla P_p \tag{3.25}$$

$$\overline{\vec{V}}_f = w_p \vec{V}_C + (1 - w_p)\vec{V}_p \tag{3.26}$$

至於 $\left(\dfrac{\Delta V}{A_p}\right)_f$ 則可由下式近似之：

$$\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_C + \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_p\right] \tag{3.27}$$

所以任一面上的質量流率可表示為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f &= \rho \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f \\ &= \rho_f \overline{\vec{V}_f} \cdot \vec{S} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \left(\nabla P_f \cdot \vec{S}_f - \nabla \overline{P_f} \cdot \vec{S}_f\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3.2 壓力修正方程式

求解 3.2 節所述之動量線性代數方程式，所得格點中心 P 之速度場 $\vec{V}^*$ 及壓力場 P^* 仍不滿足連續方程式，因此需再修正，根據Patankar之假設，其速度修正量及壓力修正量表示成下面之關係：

$$\vec{V}_p' = -\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_p \nabla P_p' \tag{3.29}$$

其中格點中心之壓力修正量 $P_p' = P_p^{**} - P_p^*$ (3.30)

同理，網格面上速度之速度修正式：

$$\vec{V}_f' = \vec{V}_f^{**} - \vec{V}_f^* = -\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f' \tag{3.31}$$

(假設修正後之速度及壓力為 $\vec{V}^{**}$ 及 P^{**})

由上式可得到修正之質量流率：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^{**} &= \dot{m}_f^* + \rho_f \vec{v}_f' \cdot \vec{S}_f = \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f' \cdot \vec{S}_f \\ &= \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f' \cdot \vec{d} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \nabla P_f' (\vec{S}_f - \vec{d}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$=\dot{m}_f^* - \rho_f\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \frac{\left|\vec{S}_f\right|^2}{\vec{\delta}\cdot\vec{S}_f}(P_C' - P_p') - \rho_f\left(\frac{\Delta V}{A_p}\nabla P'\right)_f \cdot(\vec{S}_f - \vec{d}) \tag{3.33}$$

令修正後之速度場滿足連續方程式：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \tag{3.34}$$

便可得到壓力修正方程式：

$$A_p P_p' = \sum_C A_C P_C' + S_{p1} + S_{p2} \tag{3.35}$$

其中 $A_C = \rho_f\left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_f \frac{\left|\vec{S}_f\right|^2}{\vec{\delta}\cdot\vec{S}_f}$

$$S_{p1} = -\sum_f \dot{m}_f^* \tag{3.36}$$

$$S_{p2} = \sum_f \rho_f\left(\frac{\Delta V}{A_p}\nabla P'\right)_f \cdot(\vec{S}_f - \vec{d}) \tag{3.37}$$

其中 S_{p1} 是由網格內質量不平衡所造成的，而 S_{P2} 則是由網格的幾何形狀不規則所造成。

3.3.3 求解壓力修正方程式

在求解壓力修正方程式時，由於 S_{P2} 中包含 P'，可以採用下列的連續修正 successive correction【23】來近似之：

第一步是只考慮含 S_{p1} 部分，以求得第一次壓力修正量 $P^{(1)}$

$$A_p P_p^{(1)} = \sum_C A_C P_C^{(1)} + S_{p1} \tag{3.38}$$

第二步再以所求得之壓力修正量 $P^{(1)}$ 計算 S_{p2} 部分，並再一次解壓力方程式，以求得第二次壓力修正量 $P^{(2)}$

$$A_p P_p^{(2)} = \sum_C A_C P_C^{(2)} + S_{p2}^{(1)} \tag{3.39}$$

其中 $S_{p2}^{(1)} = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_p} \nabla P^{(1)} \right)_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})$ (3.40)

待解答壓力修正方程式後，便可得一新的壓力修正值。

因而修正後的新速度 $\vec{V}^{**}$ 為：

$$\vec{V}_f^{**} = \vec{V}_f^{*} - \left(\frac{\Delta V}{A_P} \right)_f \nabla P_f' \tag{3.41}$$

由(3.33)式，可用兩步驟修正以求得新的面上質量流率：

第一步修正 $\dot{m}_f^{**} = \dot{m}_f^{*} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\left|\vec{S}\right|^2}{\vec{\delta}_r \cdot \vec{S}} \right)_f (P_C' - P_P')$ (3.42)

第二步修正 $m_f^{**} = \dot{m}_f^{*} - \rho_f \left(\frac{\Delta V}{A_P} \right)_f \nabla P_f' \cdot \left(\vec{S}_f - \vec{d} \right)$ (3.43)

3.3.4 邊界上質量流率之計算

在求解壓力修正方程式時，會需要計算範圍內所有網格面上的質量流率，其中包括在邊界上的面。以下將說明在各種邊界條件下，該邊界面上的質量流率之計算方式。

1. 在入口處，由於本文中已設定為固定入口速度之邊界條件，且給定一固定拋物線之速度分佈，故僅需配合(2.7)式之速度分佈，以(3.44)式直接去計算入口處的流量。

$$\dot{m}_{in} = \rho_{in} \cdot \vec{V}_{in} \cdot \vec{S}_{in} \tag{3.44}$$

其中

$\dot{m}_{in}$ ：入口處的質量流率

ρ_{in} ：入口處流體的密度

$\vec{V}_{in}$ ：入口處流體的速度

$\vec{S}_{in}$ ：入口處截面的法向量。

2. 在出口處的邊界條件有兩種，我們將分別說明之。

a. 當出口處使用流量邊界時，我們會先讓出口處的速度$\vec{V}_{out}$去等於在計算的過程中，每一次疊代後所得之與出口處相鄰的網格速度值$\vec{V}_{pp}$，以(3.45)式直接去計算各出口處的流量。

$$\vec{V}_{out} = \vec{V}_{pp}$$

$$\dot{m}_{out} = \rho_{out} \cdot \vec{V}_{out} \cdot \vec{S}_{out} \tag{3.45}$$

其中

$\dot{m}_{out}$：出口處的質量流率。

ρ_{out}：出口處流體的密度。

$\vec{V}_{out}$：出口處流體的速度。

$\vec{S}_{out}$：出口處截面的法向量。

$\vec{V}_{pp}$：最靠近出口處之網格的速度值。

b. 當出口處使用壓力邊界時，出口處有一固定之壓力值P_b，而通過出口平面之質量流率$\dot{m}_{out}$，我們可以用近似(3.28)式的方法求得。

如(3.46)式所示：

$$\dot{m}_{out} = \rho_b \vec{V}_b \cdot \vec{S}_b - \rho_b \left(\frac{\Delta V}{A_p}\right)_p \frac{S_b^2}{\vec{\delta}_{pb} \cdot \vec{S}_b}\left[\left(P_b - P_p\right) - \nabla P_b \cdot \vec{\delta}_{pb}\right] \tag{3 .46}$$

$$\vec{V}_b = \vec{V}_{pp}$$

其中

下標b：代表流道出口處的位置。

下標p：代表與流道出口處相鄰之網格。

出口處的速度$\vec{V}_b$是由內部點的速度去外插而得的。於此，我們採用 Zero Gradient 的假設，讓出口處的速度$\vec{V}_b$去等於在計算的過程

中，每一次疊代後所得之與出口處相鄰的網格速度值$\bar{V}_{pp}$。而(3.46)式中的∇P_b則可利用(3.14)式的方法去處理。

3. 在壁面上的質量流率，由於所採用之壁面不具滲透性，故在壁面上的質量流率為零。即 $\dot{m}_{wall}=0$ 。

3.4 出口處邊界條件的數值處理

本文在出口處的邊界條件處理有兩種，即為出口流量邊界和出口壓力邊界。這意味著在計算的過程中，出口處的流量或壓力必須一直維持一個定值，而固定流量和壓力的方法將如下所述。

當出口處使用流量邊界時，我們先設定好各出口處的流量$\dot{m}_{fix}$，然後利用在計算的過程中，每一次疊代後所得之各出口處的速度值$\bar{V}_{out}$，以(3.45)式去計算各出口處的流量$\dot{m}_{out}$，再分別將求得之各出口處的流量和預先設定好的各出口處流量作比較，以得到一個比例r_m，並利用此比例去修正在出口處原有的速度V'和$\dot{m}'_{out}$，進而求得一新的速度V''和$\dot{m}''_{out}$。

$$r_m = \dot{m}_{fix} \big/ \dot{m}_{out} \qquad V'' = r_m \cdot V' \qquad \dot{m}''_{out} = r_m \cdot \dot{m}'_{out}$$

當出口處使用壓力邊界時，我們先設定好各出口處的壓力值P_b，然後利用在計算的過程中，每一次疊代後所得之最靠近各出口處之格點的壓力值P_p，配合各出口處已設定之壓力P_b，以(3.46)式去計算各出口處的流量$\dot{m}_{out}$，再分別將求得之各出口處的流量之總和與預先設定好的入口處流量$\dot{m}_{in}$作比較，以得到一個比例r_p，並利用此比例去修正出口處原有的速度V'和$\dot{m}'_{out}$，進而求得一新的速度V''和$\dot{m}''_{out}$。

$$r_p = \dot{m}_{in} \Big/ \sum_b \dot{m}_{out} \qquad V'' = r_p \cdot V' \qquad \dot{m}''_{out} = r_p \cdot \dot{m}'_{out}$$

第四章　程式驗證

4.1　準確度測試

本研究由於範圍涵蓋 Y 型和 T 型分歧管，而且每一造型的分歧管還要搭配兩種不同的出口邊界條件，所以為了驗證本程式在準確度上的可靠度，我們找了五個對照組來進行準確度的測試。

在入口邊界條件上，我們是統一假設流體在入口處已達到完全發展流的狀態。所以在以下的五項測試中，將會依此原則，分別依照各別對照組所給定的幾何造型，給予合適的進口速度分佈。

4.1.1 驗證一 (Y 型分歧管 + 出口流量邊界條件)

在此，我們採用的對照數據是由 Bramley 和 Sloan【17】在 1987 所提出的。在 Bramley 和 Sloan 所提出的論文中是以無因次的渦度-流線方程式(Vorticity-Stream Function)做為統御方程式，利用有限差分法去計算穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬不同角度之對稱分歧管的層流流場。在文中已假設流場為上下對稱，故僅以上半部分岔流道做為計算範圍；此外，Bramley 和 Sloan 還針對三種不同造型的分岔端點(SHARP、SMOOTH 和 DUBSMOOTH)對流場所造成的影響進行分析。其入口處邊界條件，為一給定之拋物線速度分佈；在出口處之邊界條件，則假設出口處已達完全發展流。

本文在驗證時，原先是要以 Bramley 和 Dennis【15】在 1983 所提出的數據進行對照，因為 Bramley 和 Dennis 是只針對 SHARP 造型分岔端點(SHARP 造型就是在流道分岔處的端點皆為銳角造型，而非圓角造型)之分歧管流場進行分析，與本文的研究方向一致；但由於我們一直無法在 Bramley 和 Dennis 的論文中取得正確的數據來對

照，因而改用了 Bramley 和 Sloan 所提出之雙圓角(DUBSMOOTH)造型分岔端點的數據來進行比對，雙圓角造型分岔端點之流道造型示意圖如圖 4.1 所示。

在驗證時所採用的網格數，在沿著流道方向的網格數為 412 格，沿著流道截面方向的網格數為 40 格；在幾何尺寸上皆與 Bramley 和 Sloan 的設定相同，但下游流道長度固定為 40。另外，本文在求解 Navier-Stokes 方程式時，是利用 SIMPLE 法則直接求解速度場和壓力場，而且計算範圍涵蓋上下部分的分歧管流道，此兩點也皆和 Bramley 和 Sloan 不同；當然在驗證時，我們是使用銳角端點(SHARP)的造型，而非 Bramley 和 Sloan 的雙圓角端點造型。

為了達成上下部流道的流場完全對稱，我們除了在網格的建立上，要求對流道對稱中心線完全對稱之外；在出口處的邊界條件上，我們更強制兩個出口的流量相等，以確實達成流道完全對稱的目的。

參考 Bramley 和 Sloan 的內文後，我們選定其中三種的流道造型，即固定下游流道寬度 d 為進口處流道寬度 c 的 $\sqrt{2}$ 倍，分別改變其分歧角度 θ 為 30 度、45 度和 60 度，並計算其流場隨雷諾數變化的情形。經過計算後，在三種分歧角度 θ 為 30 度、45 度和 60 度下，沿著上半部分歧流道下游之壁面 AB 上的表面渦度(Surface Vorticity)隨雷諾數變化的情形，如圖 4.2 所示。由圖 4.2(a)~(c)得知，此三種流道夾角，在 Re=50 時，皆不會產生迴流；而當有迴流產生之後，其迴流長度(Vortex Length)會隨著雷諾數增加而增長；而由圖 4.2(d)得知，在固定雷諾數下，夾角 θ 越大，迴流長度越長。比較後發現，在圖 4.2(a)~(c)中，我們所計算出的表面渦度曲線與 Bramley 和 Sloan 的數據其實是錯開了一個距離，而這個距離大約是一個單位長度。所以，將我們所計算的表面渦度曲線由分差起點處向下游移動一個單位

長之後如圖 4.2(e)所示，我們的結果就可以與 Bramley 和 Sloan 的數據有相當程度的符合了。這種現象應該是由於 DUBSMOOTH 造型分岔端點會造成迴流延後的關係。換句話說，當我們去計算之銳角端點分歧管，其迴流起始點會發生在及靠近銳角端點處，如圖 4.1 中的 A' 點；而由 Bramley 和 Sloan 之 DUBSMOOTH 造型分岔端點所計算出的結果，其迴流起始點會由圖 4.1 中的 A 點，延後到 A'' 點。

4.1.2 驗證二 (直角 T 型分歧管 + 出口流量邊界條件)

針對此測驗，我們採用 Hayes 等人【19】於 1989 年所提出的論文。Hayes 等人是以無因次的渦度-流線方程式(Vorticity-Stream Function)做為統御方程式，利用有限元素法去，採用牛頓流體，求解穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬直角 T 型分歧管的層流流場，並以浦松方程式(Poisson Equation)去計算流場內部的壓力。在入口處邊界條件，為一給定之拋物線速度分佈；在出口處之邊界條件，為固定出口處之流量。其流道之幾何尺寸如圖 4.3 所示。

本文在驗證時，使用的 T 型分歧管幾何形狀、管道尺寸和網格的分佈，皆與 Hayes 等人的設定相同；但在網格造型上，Hayes 等人所用的是三角網格來建構其流道，與我們的矩形網格不同。在驗證時所採用的網格數，在單位正方形內網格數為 14x14 格，而在主流道的總網格數為(14x14)x29 格，在側流道的總網格數為(14x14)x26 格。

參考Hayes等人的內文後，我們固定出口流道寬度($W=d_s$)，來分析當改變主流道與側流道的出口流量比Split (Split=$\dot{m}_1/\dot{m}_2$)時，流場隨著雷諾數的變化。經過計算後，在固定流道寬度($W=d_s=1$)下，側流道的迴流長度隨著Split和雷諾數的變化，如圖 4.4 所示。

由圖 4.4 得知，在此三種 Split 之下，其側流道壁面上 reattachment

的位置會隨著雷諾數增加而越向下游延伸；在相同的雷諾數下，Split 的值越高，其 reattachment 的位置越短。比較後發現，我們所計算出的結果與 Hayes 等人的數據大致符合。

4.1.3 驗證三 (直角 T 型分歧管 + 出口壓力邊界條件)

進行此項測驗時，我們採用的對照數據是由 Kelkar 和 Choudhury【22】在 2000 年所提出的。在 Kelkar 和 Choudhury 所提出的論文是去計算穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬直角 T 型分歧管的層流流場。在求解 Navier-Stokes 方程式時，是利用 SIMPLE 法則直接求解速度場和壓力場。在入口處邊界條件，為一給定之拋物線速度分佈；在出口處之邊界條件，為固定出口處之壓力。其流道之幾何尺寸如圖 4.5 所示。

本文在驗證時，使用的 T 型分歧管之幾何形狀、管道尺寸、網格形狀和網格的分佈，皆與 Kelkar 和 Choudhury 的設定相同。在驗證時所採用的網格數，在主流道的總網格數為 15x90 格，而在側流道的總網格數為 15x45 格。

在直角T型分歧管方面，我們進行的是固定流道寬度(W=d_s)和出口壓力，且兩出口壓力並無壓差(P1=P2)的流場計算，並進而分析該流場隨著雷諾數變化的情形。由於絕對壓力會隨著壓力參考點的不同，而隨之做調整。故於此，我們將兩出口的壓力值設為零。經過計算後，其主流道出口處對進口處的流量比ϕ ($\phi = \dot{m}_1/\dot{m}_{in}$)隨著雷諾數的變化如圖 4.6 所示。由圖 4.6 得知，在兩出口壓力相同時，流量比ϕ會隨著雷諾數增加而增大，且我們所計算出結果與Kelkar和Choudhury的數據大致接近，但卻與Hayes等人【19】的結果相當符合。

4.1.4 驗證四 (Y 型分歧管 + 出口壓力邊界條件)

如同驗證三，我們採用的對照數據是由 Kelkar 和 Choudhury【22】在 2000 年所提出的。在 Kelkar 和 Choudhury 所提出的論文中是去計算穩態、二維且不可壓縮之 Navier-Stokes 方程式，來模擬夾角 θ 為 45 度之對稱 Y 型分歧管的層流流場。在計算對稱 Y 型分歧管時，其計算範圍涵蓋上下部分的分歧管流道。在入口處邊界條件，為一給定之拋物線速度分佈；在出口處之邊界條件，為固定出口處之壓力。其流道之幾何尺寸如圖 4.7 所示。

在驗證時，使用的 Y 型分歧管之幾何形狀、管道尺寸、網格形狀和網格的分佈，皆與 Kelkar 和 Choudhury 的設定相同。在驗證時所採用的網格數，在沿著流道方向的網格數為 60 格，沿著流道截面方向的網格數為 15x2 格。

在 45 度之對稱 Y 型分歧管方面，我們進行的是固定流道寬度和雷諾數(Re=500)，且兩出口壓力具有壓差 $\Delta P=(P_1-P_2)/(0.5\rho\overline{U}^2)$的流場計算($\overline{U}$ 代表入口處的平均速度)，並分析該流場隨著壓差變化的情形。

經過計算後，其上半部流道出口處對進口處的流量比$\phi=\dot{m}_2/\dot{m}_{in}$ 隨著雷諾數的變化如圖 4.8 所示。由圖 4.8 得知，在相同雷諾數下，流量比ϕ 會隨著壓力差增加而增大，且我們所計算出結果與 Kelkar 和 Choudhury 的數據也相當符合。※在圖 4.8 中，dp 代表 ΔP。

4.1.5 驗證五 (T 型分歧管 + 出口流量邊界條件)

於此，我們再一次去驗證 90 度 T 型分歧管配合出口流量邊界條件的情況，所採用的數據為 Liepsch 等人【13】在 1982 年所發表之論文。文中 Liepsch 等人同時針對 T 型分歧管流場進行數值計算分析。本文在驗證時，使用的 T 型分歧管之幾何形狀、管道尺寸、網格

形狀和網格的分佈，皆與 Liepsch 等人的設定相同。在入口處邊界條件，為一給定之拋物線速度分佈；在出口處之邊界條件，為固定出口處之流量。其流道之幾何尺寸如圖 4.9 所示。在驗證時所採用的網格數，在主流道的總網格數為 51x170 格，而在側流道的總網格數為 51x100 格。

在計算時，我們固定雷諾數為 496，側流道出口流量對入口處流量之比則固定為 0.44(即 $\dot{m}_2/\dot{m}_{in}$ =0.44)。經過計算後，其沿著主流道及側流道之截面速度分佈，分別如圖 4.10 和圖 4.11 所示。圖 4.10 中，U 代表主流道入口處在 X 方向上的平均速度；圖 4.11 中，V 代表側流道入口處在 Y 方向上的平均速度。如圖 4.10 和圖 4.11 所示，我們計算之結果與 Liepsch 等人的數據十分接近。